

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**USO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM PROBLEMAS
DE CONDUÇÃO DO CALOR COM A LEI DE *FOURIER*
MODIFICADA**

por

Leonardo Dagnino Chiwiacowsky

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, janeiro de 2002

**USO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA EM PROBLEMAS
DE CONDUÇÃO DO CALOR COM A LEI DE *FOURIER*
MODIFICADA**

por

Leonardo Dagnino Chiwiacowsky
Bacharel em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Germán Canahualpa Suazo, DCET-URI

Prof. Dr. Marco Tulio Vilhena, PROMEC-UFRGS

Profa. Dra. Teresa Tsukazan, PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Alberto Tamagna

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, janeiro de 2002

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em especial, ao Prof. Júlio Claeysen pelos ensinamentos, apoio, incentivo e dedicação durante minha formação acadêmica e desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos demais professores do PROMEC pela colaboração em minha formação.

Agradeço aos colegas Antônio, Antônio Flávio, Cristiana, Demartini, Inês, Mary, Pedro Borges, Rosemaira e Sandra pela alegria, amizade e incentivo sempre presentes.

Agradeço ao professor e amigo Germán pelas dicas e discussões salutares para o desenvolvimento de qualquer trabalho científico.

Agradeço aos meus pais, Sylvia e Pedro, pelos ensinamentos de vida e confiança depositados. Também a minha irmã, Patricia, pelo companheirismo, incentivo e apoio.

Agradeço à Alessandra, tão especial na minha vida, pela paciência, compreensão e apoio indispensáveis na etapa final deste trabalho.

Agradeço ao PROMEC pela oportunidade e disponibilização dos recursos, materiais e humanos, necessários para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho visa o uso da função de transferência, a qual relaciona distribuição de temperatura e fluxo de calor, na comparação no domínio frequência, entre o modelo de difusão usual (parabólico) e um modelo ondulatório (hiperbólico) que inclui o efeito de propagação do calor não instantâneo, sendo avaliados os casos de meio semi-infinito e finito.

Para o caso de meio semi-infinito, são determinadas as expressões para as características de amplitude e de fase, considerando tanto a abordagem parabólica quanto hiperbólica. É observada a relação entre estas duas abordagens, mostrando que a abordagem parabólica é uma caso particular da abordagem hiperbólica, podendo ser obtida através de um processo de limite envolvendo o tempo de relaxação τ .

Para o caso de meio finito, são determinadas as expressões para as características de amplitude de ambas as faces da placa unidimensional, considerando tanto a abordagem parabólica quanto hiperbólica. Estas expressões são transformadas para a forma adimensional quando então são deduzidas as expressões correspondentes das características de amplitude. Mais uma vez, todos os resultados para o caso parabólico podem ser determinados a partir dos resultados do caso hiperbólico, através de um processo de limite envolvendo o tempo de relaxação τ .

São apresentados resultados numéricos referentes às características de amplitude, onde é apontada a existência de uma frequência limite, acima da qual a diferença entre os dois modelos, do tipo parabólico ou hiperbólico, aumenta rapidamente. Também é apresentada uma forma alternativa de cálculo da distribuição de temperatura transiente que faz uso da função de transferência do sistema.

ABSTRACT

TITLE: “USE OF TRANSFER FUNCTION IN HEAT CONDUCTION PROBLEMS WITH THE NON-FOURIER LAW”

This work has as its main objective uses the transfer function which connect temperature distribution and heat flux, making a frequency domain comparison between the usual diffusion model (parabolic) and a wave model (hyperbolic) which includes the effect of non-instantaneous heat propagation, considering semi-infinity and finite medium.

In relation to the semi-infinity case, the amplitude and phase characteristics expressions are determined, considering both approaches parabolic and hyperbolic. Is pointed the relation between this two approaches, showing that the parabolic approach is a particular case of the hyperbolic, which is obtained by a limit process involving the relaxation time τ .

In relation to the finite case, the amplitude characteristics expressions, regarding the two faces of the one dimensional slab, are determined, considering both approaches parabolic and hyperbolic. This expressions are changed to a non-dimensional form when is obtained the corresponding expressions of the amplitude characteristics. Once again, all the results regarding the parabolic approach can be obtained from the hyperbolic approach results, also by a limit process involving the relaxation time τ .

Are presented numerical results concerning the amplitude characteristics, where is pointed the existence of a limit frequency as that frequency above which the difference between the two models, parabolic or hyperbolic kind, increases rapidly. Moreover, is presented a way of computing the transient temperature distribution using the transfer function.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Difusão Térmica	1
1.2	Equação de <i>Fourier</i> Modificada	2
1.3	Ondas Térmicas	4
1.4	Abordagem Através da Função de Transferência	6
2	SOLUÇÃO ALTERNATIVA PARA MEIO SEMI-INFINITO	10
2.1	Problemas Dinâmicos de Fluxo de Calor	10
2.2	Dinâmica do Fluxo de Calor Ondulatório	11
2.2.1	Cálculo das Características de Amplitude	15
2.2.2	Cálculo das Característica de Fase	17
2.3	Dinâmica do Fluxo de Calor Difusivo	20
2.3.1	Cálculo das Características de Amplitude	25
2.3.2	Cálculo das Características de Fase	27
2.4	Forma Alternativa para Solução de $T(x,t)$	29
3	SOLUÇÃO ALTERNATIVA PARA MEIO FINITO	30
3.1	Definições Básicas	30
3.2	Funções de Transferência da Placa	32

3.3	Casos Especiais de Transmissão na Placa	37
3.3.1	Casos Limites	39
3.4	Características de Amplitude da Placa	41
3.4.1	Características de Amplitude para a Dinâmica Ondulatória .	42
3.4.2	Características de Amplitude para a Dinâmica Difusiva . . .	46
3.5	Forma Alternativa para Solução de $T(x, t)$	50
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	51
4.1	Caso de um Sólido Semi-Infinito	51
4.2	Caso de um Sólido Finito	57
5	APLICAÇÃO PARA MEIO SEMI-INFINITO	63
6	CONCLUSÕES	71
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
	APÊNDICE I TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA DE θ	79

LISTA DE SÍMBOLOS

$a = \sqrt{\alpha/\tau}$	velocidade de propagação do calor no modelo ondulatório [m/s]
$A(x, \omega)$	característica de amplitude
$A_d(x, \omega)$	característica de amplitude para o modelo difusivo do caso semi-infinito
$A_{dj}(x, s)$	característica de amplitude para o modelo difusivo do caso finito com respeito à face esquerda ($j = 1$) e à face direita ($j = 2$)
$A_w(x, \omega)$	característica de amplitude para o modelo ondulatório do caso semi-infinito
$A_{wj}(x, s)$	característica de amplitude para o modelo ondulatório do caso finito com respeito à face esquerda ($j = 1$) e à face direita ($j = 2$)
$A(s)$ e $B(s)$	constantes arbitrárias do caso semi-infinito
$\mathcal{A}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$	constantes arbitrárias do caso finito
$b = \tau\alpha/L^2$	tempo de relaxação adimensional
C	capacidade térmica por unidade de volume [J/m^3K]
c	calor específico [J/kgK]
$D_j(x, s)$	função de transferência adimensional para o modelo difusivo do caso finito com respeito à face esquerda ($j = 1$) e à face direita ($j = 2$)
f	freqüência [Hz]
$f(x, t)$	função auxiliar empregada na solução do perfil de temperatura para o modelo ondulatório do caso semi-infinito
$F(x, s)$	transformada de <i>Laplace</i> da função auxiliar empregada na solução do perfil de temperatura para o modelo ondulatório do caso semi-infinito

$g(t)$ e $h(t)$	funções auxiliares empregadas no teorema da convolução
$G(s)$ e $H(s)$	transformada de <i>Laplace</i> de funções auxiliares empregadas no teorema da convolução
h	coeficiente de transferência de calor [W/mK]
$i = \sqrt{-1}$	unidade imaginária
K	condutividade térmica [W/mK]
$K(x, s)$	função de transferência
$k(x, s)$	resposta impulso do caso semi-infinito
$k_j(x, t)$	resposta impulso do caso finito com respeito à face esquerda ($j = 1$) e à face direita ($j = 2$)
$K_d(x, s)$	função de transferência para o modelo difusivo do caso semi-infinito
$K_{dj}(x, s)$	função de transferência para o modelo difusivo do caso finito com respeito à face esquerda ($j = 1$) e à face direita ($j = 2$)
$K_w(x, s)$	função de transferência para o modelo ondulatório do caso semi-infinito
$K_{wj}(x, s)$	função de transferência para o modelo ondulatório do caso finito com respeito à face esquerda ($j = 1$) e à face direita ($j = 2$)
L	comprimento total da placa (meio finito)
m	fator de proporcionalidade entre os fluxos de calor penetrando na face esquerda e na face direita do meio finito
\mathbf{q}	vetor do fluxo térmico de calor no ponto x e tempo t [W/m^2]
$q(x, t)$	intensidade do fluxo de calor de excitação
$q_0(t) = q(0, t)$	intensidade do fluxo de calor de excitação superficial
$Q_0(s)$	transformada de <i>Laplace</i> do fluxo de calor de excitação superficial

$q_j(t)$	intensidade do fluxo de calor de excitação penetrando na face esquerda ($j = 1$) e na face direita ($j = 2$)
$\bar{q}_j(s)$	transformada de <i>Laplace</i> do fluxo de calor de excitação penetrando na face esquerda ($j = 1$) e na face direita ($j = 2$)
$s = i\omega$	variável de transformação, e pulsação complexa
t	tempo [s]
T	distribuição espaço-temporal da temperatura, $T(x, t)$ [$^{\circ}K$]
$\bar{T}(x, s)$	transformada de <i>Laplace</i> da distribuição de temperatura com respeito a t
t_0	unidade de medida da duração do impulso triangular
$W_j(x, s)$	função de transferência adimensional para o modelo ondulatório do caso finito com respeito à face esquerda ($j = 1$) e à face direita ($j = 2$)
x	coordenada espacial de um ponto [m]
$X = x/L$,	comprimento adimensional
$\alpha = K/C$	difusividade térmica [m^2/s]
$\beta = \omega L^2/\alpha$	freqüência de pulsação adimensional
$\gamma(s)$	variável auxiliar
θ	ângulo auxiliar
λ_1 e λ_2	soluções da equação diferencial transformada
ξ	variável de integração da convolução
ρ	densidade de massa [kg/m^3]
τ	tempo de relaxação [s]
$\phi(x, \omega)$	característica de fase
$\phi_d(x, \omega)$	característica de fase para o modelo difusivo do caso semi-infinito

$\phi_w(x, \omega)$	característica de fase para o modelo ondulatório do caso semi-infinito
$\psi(x, t)$	função auxiliar empregada na solução do perfil de temperatura para o modelo difusivo do caso semi-infinito
$\Psi(x, s)$	transformada de <i>Laplace</i> da função auxiliar empregada na solução do perfil de temperatura para o modelo difusivo do caso semi-infinito
ω	freqüência de pulsação [<i>rad/s</i>]
$\nabla(\dots)$	operador gradiente espacial

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1	Fluxos de calor $q_1(t)$, $q_2(t)$ penetrando na placa de parâmetros K , h , c e $\tau > 0$ (modelo ondulatório) e $\tau = 0$ (modelo difusivo). O princípio de superposição com respeito aos fluxos.	31
Figura 3.2	Diagrama em bloco da placa. $K_1(x, s)$ - transmissão com respeito à face esquerda. $K_2(x, s)$ - transmissão com respeito à face direita.	32
Figura 4.1	Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de baixa frequência de 20-90 rad/s, nos três comprimentos de penetração ($x = 0.005$, 0.010 e 0.015 m) e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)	53
Figura 4.2	Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de média frequência 1.005×10^7 - 1.015×10^7 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.005$ m) e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)	54
Figura 4.3	Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de média frequência 1.005×10^7 - 1.015×10^7 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.010$ m) e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)	54
Figura 4.4	Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de média frequência 1.005×10^7 - 1.015×10^7 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.015$ m) e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)	55
Figura 4.5	Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de alta frequência 4.007×10^8 - 4.011×10^8 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.005$ m) e para os casos ondulatório e difusivo .	55

Figura 4.6	Características de amplitude para $\tau = 10^{-8}$ s, na faixa de média frequência 399×10^3 - 406×10^3 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.005$ m) e para os casos ondulatorio e difusivo	56
Figura 4.7	Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de baixa e média frequência de $10 \times 10^3 - 12 \times 10^3$ rad/s, na posição $X = 0.5$, em relação a ambas as faces, e para os casos ondulatorio (\square) e difusivo (+)	58
Figura 4.8	Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de baixa e média frequência de $10 \times 10^3 - 12 \times 10^3$ rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face esquerda, e para os casos ondulatorio (\square) e difusivo (+)	59
Figura 4.9	Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de média frequência de $10 \times 10^3 - 12 \times 10^3$ rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face direita, e para os casos ondulatorio (\square) e difusivo (+)	59
Figura 4.10	Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de alta frequência 4.065×10^6 - 4.1×10^6 rad/s, na posição $X = 0.5$, em relação a ambas as faces, e para os casos ondulatorio e difusivo .	60
Figura 4.11	Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de alta frequência 4.065×10^6 - 4.1×10^6 rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face esquerda, e para os casos ondulatorio e difusivo .	60
Figura 4.12	Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de alta frequência 4.065×10^6 - 4.1×10^6 rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face direita, e para os casos ondulatorio e difusivo	61

Figura 4.13	Diferenças relativas entre as características de amplitude dos casos ondulatório e difusivo e em ambas as faces: (a) ΔA_1 para $X =$ 0.75, (b) $\Delta A_1 = \Delta A_2$ para $X = 0.5$ e (c) ΔA_2 para $X = 0.75$.	62
Figura 5.1	Impulso triangular ideal do fluxo de calor	63

1 INTRODUÇÃO

Um dos modelos mais usados da física matemática é o modelo de *Fourier* para a condução do calor em sólidos. Apesar de sua excelente concordância obtida entre a teoria e os experimentos, o modelo de *Fourier* possui várias anomalias patológicas, a principal delas sendo a de que o modelo implica em uma velocidade infinita de propagação do calor [Maurer, 1969; Frankel et al., 1987].

Neste capítulo, este e outros comportamentos não contemplados pela equação de difusão tradicional, são estudados e discutidos apresentando-se a forma modificada da lei de *Fourier* a qual conduz a uma formulação hiperbólica da equação do calor, sendo a equação de difusão um caso particular.

1.1 Difusão Térmica

É sabido que a equação de difusão para o transporte térmico resulta de duas considerações [Chester, 1963]: a primeira considera a equação da continuidade para o transporte de calor na ausência de gradientes de densidade e pressão. Ela é dada pela primeira lei da termodinâmica na seguinte forma

$$C \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1.1)$$

onde $C = \rho c$, representa a capacidade térmica por unidade de volume, ρ é a densidade de massa, c o calor específico; T representa a temperatura absoluta; \mathbf{q} é o fluxo térmico de calor; t representa o tempo, e ∇ é o operador gradiente espacial. A segunda consideração diz respeito à equação fenomenológica de *Fourier* da condutividade térmica para o fluxo de calor em um sólido, dada por

$$\mathbf{q} = -K \nabla T, \quad (1.2)$$

onde K representa a condutividade térmica de uma material específico. Se a equação (1.1) é combinada com a equação (1.2) o resultado será a equação de difusão, dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0, \quad (1.3)$$

onde $\alpha = K/C$, é a difusividade térmica.

1.2 Equação de *Fourier* Modificada

O trabalho apontado como o primeiro a abordar o caráter ondulatório da propagação do calor foi o de Maxwell, 1867, o qual apresentou uma relação para o fluxo de calor que inclui pressão e variações da densidade espacial e que pode ser derivada da teoria cinética no caso de um gás ideal. Apesar disso *Maxwell* não percebeu que a difusão está associada com velocidades finitas de propagação [Joseph e Preziosi, 1989] e desconsiderando o tempo de relaxação, por sua pequena magnitude, afirmou que “a taxa de condução se estabelecerá rapidamente” [Chester, 1963]. Certamente ele estava certo com relação ao problema por ele abordado na ocasião. Após este trabalho alguns pesquisadores [Onsager, 1931; Tisza, 1938; Peshkov, 1944] apontaram o caráter aproximado da lei de *Fourier* para descrição do processo de condução, sendo derivada uma equação da onda para o calor [Tisza, 1938] e denominada de “segundo som”, empregando hélio líquido . Porém foi Cattaneo, 1948 e 1958, que propôs a primeira teoria matemática explícita para corrigir as propriedades inaceitáveis da teoria da difusão do calor de *Fourier*. De forma independente, Ver-
notte, 1958, também propôs um modelo ondulatório amortecido para a condução do calor em sólidos.

A equação de difusão tem a propriedade de que um pulso de calor aplicado à superfície de um corpo é imediatamente sentido em todas as partes do corpo, não importando a distância. Assim diz-se que a velocidade de propagação é infinita. Usando argumentos da teoria cinética dos gases, *Cattaneo* derivou a

equação para o fluxo de calor \mathbf{q} na forma

$$\mathbf{q} + \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -K \nabla T, \quad (1.4)$$

onde τ é o tempo de relaxação. Cabe salientar aqui que em ambos os trabalhos de *Cattaneo*, as modificações da lei de *Fourier* foram obtidas teoricamente tendo sido derivadas somente para gases ideais.

Em relação ao significado físico da equação (1.4) pode-se dizer que ela declara a existência de um tempo de acumulação finito para então haver o início da corrente térmica, uma vez que um gradiente de temperatura tenha sido imposto a uma superfície. Em outras palavras, o fluxo de calor não inicia instantaneamente mas cresce gradualmente com o tempo de relaxação τ , o qual é definido como o tempo necessário para a acumulação da energia térmica requerida para a transferência propagativa para um elemento adjacente da estrutura interna. Por outro lado, se um gradiente térmico é repentinamente removido, há um atraso no desaparecimento da corrente de calor, o que é contemplado pela equação (1.4) e não pela equação (1.2). Esta característica também foi observada por Morse e Feshbach, 1953 onde afirmam que deve-se assumir a equação da difusão como correta somente após decorrido um tempo suficientemente longo. Este tempo depende naturalmente da velocidade de propagação do calor, o qual por sua vez depende do livre caminho médio das moléculas. Dependendo do tipo e característica do material o valor de τ é diferente, assumindo, para substâncias homogêneas, valores de 10^{-10} a 10^{-8} s para gases, e de 10^{-12} a 10^{-10} s para líquidos e sólidos dielétricos [Kaminski, 1990], embora diferentes valores possam ser encontrados na literatura [Weymann, 1967].

Diferentes abordagens foram aplicadas na busca de uma teoria que melhor modelasse a característica ondulatória do calor, sendo Chester, 1963, o primeiro a relacionar a equação hiperbólica de *Cattaneo* (gases) e *Vernotte* (sólidos) com a idéia sobre o segundo som (líquidos), quando então declara-se que o segundo som surgirá em qualquer material que possa ser modelado como um *phonon*,

incluindo alguns sólidos bem como o hélio líquido. Sobre o segundo som também é dito que uma onda térmica representa o mesmo fenômeno microscópico, seja em hélio líquido ou em sólidos. Uma onda térmica é a propagação de uma perturbação em uma densidade de *phonons*. Assim, tal onda deve sempre propagar-se com uma velocidade relacionada à velocidade do som (*phonon*) v_s .

1.3 Ondas Térmicas

Para derivação da nova forma da equação diferencial para a propagação do calor, se ao contrário de empregar a equação (1.2) em combinação com a equação (1.1) empregar-se a forma mais “exata” (1.4), o resultado obtido será

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0, \quad (1.5)$$

onde T agora obedece uma equação da onda dissipativa, também conhecida como equação do telégrafo.

Nota-se que a equação (1.5) resolve o dilema da propagação infinita de um sinal térmico. De fato esta equação prediz um limite superior para uma velocidade finita de propagação deste sinal. A velocidade limitante a , é dada por

$$a = \sqrt{\frac{K}{C\tau}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}. \quad (1.6)$$

Observa-se também que para o caso limite de $\tau \rightarrow 0$, a equação (1.5) coincide com a equação de difusão clássica (1.3), o que conduz a uma velocidade de propagação infinita. Outra forma de encarar a forma hiperbólica da equação do calor, é a de que ela remove a necessidade de um gradiente de temperatura infinito na fronteira quando o tempo tende a zero.

Uma vez definida a nova forma da equação diferencial para a propagação do calor, deve-se destacar em que classe de problemas esta nova formulação é

empregada. A idéia básica é que deve ser aplicada a problemas onde a formulação difusiva notadamente não descreve o comportamento físico, em problemas nos quais efeitos inerciais de tempo muito curto são relevantes. Isto acontece em situações envolvendo altas taxas de transferência de calor em curtos espaços de tempo, temperaturas muito baixas (1° a 2° K), irradiação eletromagnética de alta intensidade [Yue e Lee, 1989], aquecimento intenso de sólidos por meio de impulsos laser de alta amplitude e curta duração, rápido fluxo de calor em meios rarefeitos [Golebiowski e Jordan, 1993], quando do uso de fontes de calor como laser e microondas com duração extremamente curta e frequência muito alta [Tang e Araki, 1996].

Cronologicamente muitos outros trabalhos poderiam ser individualmente citados, porém serão referidos apenas os diferentes campos nos quais tais trabalhos estão focados: teóricos [Maurer, 1969; Swenson, 1978; Özisik e Tzou, 1994], matemáticos [Weymann, 1967; Bubnov, 1976; Luikov et al., 1976; Vick e Özisik, 1983; Özisik e Vick, 1984; Frankel et al., 1987; Glass et al., 1987; Gembarovic e Majernik, 1988; Yuen e Lee, 1989; Tang e Araki, 1996], computacionais [Wiggert, 1977; Pulvirenti et al., 1998; Honner, 1999], e experimentais [Greenstein et al., 1982; Kaminski, 1990; Guillemet et al., 1997]. Há abordagens teóricas baseadas em teoria cinética, dinâmica molecular, termodinâmica, e “chutes” dirigidos baseados em equações com propriedades que acredita-se serem desejáveis. Há muitos trabalhos teóricos dedicados a prever condições de temperatura e frequência para as quais ondas de calor possam ser observadas. É nesta última classe que este presente trabalho se encaixa.

Além dos trabalhos citados acima, mais recentemente, alguns outros têm mostrado que mantém-se a busca pela confirmação do uso da forma hiperbólica da equação do calor como a melhor abordagem a determinadas situações físicas. Podem ser citados trabalhos na área de métodos analíticos [Marciak-Kozłowska et al., 2001] ou experimentais [Jiang et al., 2001; Herwig e Beckert, 2000]. Ainda, novas abordagens numéricas [Jiang e Liu, 2001] e analíticas [Lewandowska, 2001;

Reis et al., 2000;] foram propostas na busca da solução da equação hiperbólica do calor. Salienta-se o trabalho de Cho e Juhng, 2000, que além de apresentar um novo método de solução, que emprega a transformada de *Fourier* seno para solução do problema de condução não-*Fourier*, ainda é apresentada uma análise baseando-se nas amplitudes e fases do fluxo de calor em diferentes frequências.

1.4 Abordagem Através da Função de Transferência

Observa-se que na literatura a análise da dinâmica da transferência do calor em sistemas semi-infinitos e finitos tem sido feita considerando apenas o domínio tempo. Entretanto é possível obter uma visão qualitativamente diferente do fenômeno através da análise no domínio frequência. Através do uso de funções de transferência definidas apropriadamente, as características espectrais do sistema podem ser determinadas. Estas características auxiliam na análise de vários sistemas e muito freqüentemente constituem a melhor descrição física possível [Golebiowski et al., 1993]. Em alguns casos, através destas características, é possível obter informações sobre qual o melhor modelo de propagação do calor a ser adotado (difusivo ou ondulatório) na modelagem de um problema.

A função de transferência de um sistema de equações diferenciais lineares invariantes no tempo é definida como a relação entre a transformada de *Laplace* da saída (função resposta) e a transformada de *Laplace* da entrada (função excitação) sob a hipótese de que todas as condições iniciais sejam nulas. Usando o conceito de função de transferência, é possível representar a dinâmica do sistema pelas equações algébricas em s [Ogata, 1993].

A aplicabilidade do conceito de função de transferência é limitada aos sistemas de equações diferenciais lineares invariantes no tempo. O método das funções de transferência, no entanto, é extensivamente usado na análise e no projeto

de tais sistemas. A seguir é apresentada uma lista de importantes características referentes à função de transferência:

1. A função de transferência de um sistema é um modelo matemático em que ela constitui um método operacional de expressar a equação diferencial que relaciona a variável de saída à variável de entrada.
2. A função de transferência é uma propriedade de um sistema em si, independente da magnitude e da natureza da entrada ou função de excitação.
3. A função de transferência inclui as unidades necessárias para relacionar a entrada à saída; no entanto, ela não oferece qualquer informação concernente à estrutura física do sistema.
4. Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída ou resposta pode ser estudada para várias formas de entradas com vistas ao entendimento da natureza do sistema.
5. Se a função de transferência de um sistema for desconhecida, ela pode ser estabelecida experimentalmente introduzindo-se entradas conhecidas e estudando-se a saída do sistema. Uma vez estabelecida, uma função de transferência dá uma descrição completa das características dinâmicas do sistema, conforme distintas de sua descrição física.

Assim, de uma forma geral, para um sistema qualquer, a função de transferência é dada por

$$K(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Bigg|_{\text{CI nulas}}, \quad (1.7)$$

onde para o caso em que será aplicada, “saída” será representada pela grandeza T (temperatura), e “entrada” será representada pela grandeza q (fluxo de calor). Desta forma, o presente trabalho tem como objetivo apresentar a utilização da função de transferência, através de suas amplitudes características no domínio frequência, na

identificação da frequência limite, acima da qual o modelo ondulatório de propagação do calor é o mais adequado. Além disso, apresentar uma forma alternativa de determinação da distribuição de temperatura transiente, através do uso da função de transferência.

Apesar da função de transferência ser uma ferramenta de grande potencial, podendo ser aplicada a diferentes tipos de sistema (mecânico, térmico, etc), o seu emprego está limitado a alguns fatores. Como salientado anteriormente, o seu uso é limitado a sistemas invariantes no tempo e, além disso, ela é definida sob a hipótese do sistema possuir condições iniciais nulas. Embora a função de transferência possa ser utilizada para uma análise no domínio frequência do sistema aqui estudado, empregando-se a resposta em frequência; dependendo da forma da entrada e da sua conseqüente transformada de *Laplace*, a expressão obtida para a função de transferência pode ser tal que a sua inversão não é trivial, podendo ser extremamente complexa. Neste caso, a determinação da distribuição de temperatura transiente, através do uso da função de transferência, torna-se um problema tão ou mais difícil que a solução analítica direta da forma modificada da equação do calor.

A seguir é feita uma breve descrição dos tópicos abordados em cada um dos capítulos que formam este trabalho.

No capítulo 2 é abordado o caso de meio semi-infinito, onde é apresentado o cálculo da função de transferência para o caso difusivo e para o caso ondulatório. São apresentados os cálculos das características de amplitude e de fase para cada uma das formas da equação de propagação do calor. Fechando o capítulo é apresentada a forma com que o perfil de temperatura para um meio semi-infinito é determinado, em termos da função de transferência.

No capítulo 3 é abordado o caso de meio finito, onde é apresentado o cálculo da função de transferência para o caso ondulatório. São abordados alguns casos especiais de transmissão na placa onde então é apresentada uma dedução

da função de transferência para os casos semi-infinito e difusivo finito, a partir do caso ondulatório finito. Também são apresentados os cálculos das características de amplitude, porém agora de uma forma adimensional, para os casos ondulatório e difusivo. Fechando o capítulo é apresentada a forma com que o perfil de temperatura para um meio finito é determinado, em termos da função de transferência.

No capítulo 4 são apresentadas algumas simulações numéricas efetuadas utilizando as características de amplitude de cada um dos casos abordados nos capítulos anteriores, meio semi-infinito e meio finito.

No capítulo 5 é apresentada uma aplicação analítica da função de transferência, onde é determinada a distribuição de temperatura transiente para o caso de meio semi-infinito.

Para finalizar, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões pertinentes ao trabalho.

2 SOLUÇÃO ALTERNATIVA PARA MEIO SEMI-INFINITO

Neste capítulo é apresentado o cálculo da função de transferência para os casos difusivo e ondulatório, considerando um sólido semi-infinito com campo de temperatura $T(x, t)$ e excitado por um fluxo externo de calor $q_0(t)$. São também apresentados os cálculos das características de amplitude e de fase para cada uma das formas da equação de propagação do calor. Finalizando, é apresentada a forma com que o perfil de temperatura para um meio semi-infinito é determinado, em termos da função de transferência.

2.1 Problemas Dinâmicos de Fluxo de Calor

Para o cálculo da função de transferência de um sistema aplica-se a sua definição na seguinte forma

$$K(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{Q_0(s)}, \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}\{q(t), t \rightarrow s\} = Q_0(s)$ é a transformada de *Laplace* do fluxo de calor superficial $q_0(t)$ (sinal de entrada) e $\mathcal{L}\{T(x, t), t \rightarrow s\} = \bar{T}(x, s)$ é a transformada de *Laplace* de uma temperatura $T(x, t)$ em um ponto de coordenada x (sinal de saída).

A determinação da função de transferência - equação (2.1) - do sistema considerado é conveniente pelas seguintes razões:

1. as propriedades dinâmicas do semi-espaço serão determinadas independentemente da forma do fluxo de calor aplicado ao meio semi-infinito;
2. os valores da função de transferência nos eixos imaginários definem as características de amplitude

$$A(x, \omega) = |K(x, i\omega)|, \quad (2.2)$$

e características de fase do sólido semi-infinito

$$\phi(x, \omega) = \arg K(x, i\omega); \quad (2.3)$$

3. o teorema da Convolução de duas funções tornará possível determinar a resposta do semi-espaço em relação à entrada de um forma conhecida do fluxo de calor $q_0(t)$,

$$T(x, t) = \int_0^t k(x, \eta) q_0(t - \eta) d\eta; \quad (2.4)$$

onde $\mathcal{L}\{k(x, t), t \rightarrow s\} = K(x, s)$.

2.2 Dinâmica do Fluxo de Calor Ondulatório

A equação para o semi-espaço é obtida considerando a forma unidimensional da equação (1.5),

$$\alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Além disso, para o caso unidimensional, da equação (1.4), tem-se

$$q(x, t) = -K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}. \quad (2.6)$$

O campo térmico no meio semi-infinito é excitado pelo fluxo de calor

$$q(0, t) = q_0(t), \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Devido à exigência da temperatura no infinito ter que ser limitada, a segunda condição de contorno é assumida através do seguinte limite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

Considerando a definição da função de transferência, é necessário introduzir condições iniciais nulas com relação ao fluxo de calor, temperatura e a taxa de variação da temperatura, obtendo-se:

$$q(x, 0) = 0 \quad (2.9)$$

$$T(x, 0) = 0 \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0. \quad (2.11)$$

O problema dado pela equação (2.5) será resolvido através da aplicação da transformada de *Laplace* na forma $\mathcal{L}\{f(x, t), t \rightarrow s\} = F(x, s)$. Primeiramente a transformada será aplicada na equação para o fluxo de calor (2.6). Assim,

$$\mathcal{L}\left\{\tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}\right\} + \mathcal{L}\{q(x, t)\} = \mathcal{L}\left\{-K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right\}.$$

Sabendo que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0);$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0);$$

tem-se

$$\tau [sQ(x, s) - q(x, 0)] + Q(x, s) = -K \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}\{T(x, t)\}.$$

Aplicando a condição inicial para $q(x, t)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} Q(x, s) [1 + \tau s] &= -K \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} &= -\frac{(1 + \tau s)}{K} Q(x, s). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como

$$q(0, t) = q_0(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{q(0, t)\} = \mathcal{L}\{q_0(t)\} \Rightarrow Q(0, s) = Q_0(s),$$

e assumindo $x = 0$ em (2.12), vem

$$\frac{d\bar{T}(0, s)}{dx} = -\frac{(1 + \tau s)}{K} Q_0(s). \quad (2.13)$$

Agora, aplicando a transformada de *Laplace* na equação (2.5), vem

$$\mathcal{L}\left\{\alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}\right\} + \mathcal{L}\left\{\tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2}\right\}.$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{T(x, t)\} = s\bar{T}(x, s) - T(x, 0) + \tau \left[s^2 \bar{T}(x, s) - sT(x, 0) - \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right].$$

Aplicando as condições iniciais, obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^2 \bar{T}(x, s)}{dx^2} &= s\bar{T}(x, s) + \tau s^2 \bar{T}(x, s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 \bar{T}(x, s)}{dx^2} - \frac{s(1 + \tau s)}{\alpha} \bar{T}(x, s) &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Busca-se agora a solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

A solução, na sua forma geral, é dada por

$$\bar{T}(x, s) = A(s)e^{\lambda_1 x} + B(s)e^{\lambda_2 x},$$

onde λ_1 e λ_2 são obtidos através da solução de

$$\lambda^2 - \frac{s(1 + \tau s)}{\alpha} = 0,$$

obtendo-se

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Substituindo estes resultados na forma geral da solução, vem

$$\bar{T}(x, s) = A(s) \exp\left\{-\sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}} x\right\} + B(s) \exp\left\{\sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}} x\right\}.\tag{2.16}$$

Com o objetivo de assegurar uma solução física factível (temperaturas positivas), considerando a parte real positiva do expoente, são tomados valores de s tal que

$$\operatorname{Re}\left[\sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}}\right] \geq 0.\tag{2.17}$$

Aplicando a transformada de *Laplace* na condição de contorno (2.8) e tomando o limite, vem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x, s) = 0 \Rightarrow B(s) = 0.\tag{2.18}$$

Desta forma a solução reduz-se a

$$\bar{T}(x, s) = A(s) \exp\left\{-\sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}} x\right\}.\tag{2.19}$$

Agora, calculando a primeira derivada em relação a x , vem:

$$\frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} = -A(s) \sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}} \exp\left\{-\sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}} x\right\}.\tag{2.20}$$

Avaliando-se (2.20) em $x = 0$ e usando o resultado de (2.13), vem:

$$-\frac{(1 + \tau s)}{K} Q_0(s) = -A(s) \sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}}$$

ou

$$A(s) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{s + 1/\tau}{s}} Q_0(s). \quad (2.21)$$

A forma final da solução fica:

$$\bar{T}(x, s) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{s + 1/\tau}{s}} Q_0(s) \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right\}. \quad (2.22)$$

Tendo em vista a definição da Função de Transferência, dada pela equação (2.1), então para o caso da dinâmica ondulatória, tem-se:

$$K_w(x, s) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{s + 1/\tau}{s}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right\}. \quad (2.23)$$

Fazendo uso da velocidade de propagação das ondas de calor, definida pela equação (1.6) como $a = \sqrt{\alpha/\tau}$, a equação (2.23) fica:

$$K_w(x, s) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{s + 1/\tau}{s}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{s(s + 1/\tau)} \right\}. \quad (2.24)$$

2.2.1 Cálculo das Características de Amplitude

Da definição das características de amplitude, dada pela equação (2.2), tem-se

$$A_w(x, \omega) = |K_w(x, i\omega)|,$$

e usando o resultado de (2.24), tal grandeza é calculada através de

$$\begin{aligned} A_w(x, \omega) &= \left| \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{i\omega + 1/\tau}{i\omega}} \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{i\omega(i\omega + 1/\tau)} \right\} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \right| \left| \sqrt{\frac{i\omega + 1/\tau}{i\omega}} \right| \left| \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{i\omega(i\omega + 1/\tau)} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Avaliando cada um dos fatores separadamente:

$$\left| \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \right| = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K},$$

$$\left| \sqrt{\frac{i\omega + 1/\tau}{i\omega}} \right| = \sqrt{\left| 1 - \frac{1}{\omega\tau} i \right|} = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}},$$

$$\left| \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{i\omega(i\omega + 1/\tau)} \right\} \right| = \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \right] \right\}.$$

Tomando agora apenas o argumento da exponencial do último fator, tem-se:

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \right] = \operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt{-\omega\tau + i} \right].$$

Escrevendo o número complexo, interno a raiz, na sua forma polar, obtém-se:

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt{-\omega\tau + i} \right] = \operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt{\sqrt{(-\omega\tau)^2 + 1^2} e^{i\theta}} \right],$$

onde $\theta = \arctan[-1/(\omega\tau)]$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt{\sqrt{(-\omega\tau)^2 + 1^2} e^{i\theta}} \right] &= \operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt[4]{\omega^2\tau^2 + 1} e^{i\frac{\theta}{2}} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt[4]{\omega^2\tau^2 + 1} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

e assim

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt[4]{\omega^2 \tau^2 + 1} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right] = -\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Fazendo uso do resultado (I.2) apresentado no apêndice (I), tem-se:

$$-\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan(\omega\tau) \right].$$

Desta forma, para o último fator obtém-se:

$$\exp \left\{ \operatorname{Re} \left[-\frac{x}{a} \sqrt{-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \right] \right\} = -\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau) \right].$$

Portanto a expressão para a característica de amplitude fica determinada, sendo escrita como:

$$A_w(x, \omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau) \right] \right\}. \quad (2.25)$$

2.2.2 Cálculo das Característica de Fase

Da definição das características de fase, dada pela equação (2.3), tem-se

$$\phi_w(x, \omega) = \arg K_w(x, i\omega),$$

ou

$$\phi_w(x, \omega) = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im} [K_w(x, i\omega)]}{\operatorname{Re} [K_w(x, i\omega)]} \right\}. \quad (2.26)$$

Os fatores de $K_w(x, i\omega)$ serão modificados afim de facilitar o cálculo de $\phi_w(x, \omega)$, portanto de (2.24) vem:

$$K_w(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{i\omega + 1/\tau}{i\omega}} \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{i\omega(i\omega + 1/\tau)} \right\}.$$

Primeiramente tomando o segundo fator, tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{i\omega + 1/\tau}{i\omega}} &= \sqrt{1 + \frac{1}{i\omega\tau}} = \sqrt{1 - \frac{i}{\omega\tau}} \\ &= \sqrt{\frac{\omega\tau - i}{\omega\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \sqrt{\omega\tau - i}. \end{aligned}$$

Escrevendo o número complexo, interno a raiz, na sua forma polar, obtém-se:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \sqrt{\omega\tau - i} = \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \sqrt{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \sqrt[4]{\omega^2\tau^2 + 1} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

onde $\theta = \arctan[-1/(\omega\tau)]$.

Para o terceiro fator tem-se:

$$\exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{i\omega(i\omega + 1/\tau)} \right\} = \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{-\omega^2 + \frac{\omega}{\tau}i} \right\} = \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt{i - \omega\tau} \right\}.$$

Escrevendo o número complexo, interno a raiz, na sua forma polar, obtém-se:

$$\exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt{i - \omega\tau} \right\} = \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} e^{i\theta} \right\} = \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt[4]{\omega^2\tau^2 + 1} e^{i\frac{\theta}{2}} \right\},$$

onde $\theta = \arctan[-1/(\omega\tau)]$.

Agora, reescrevendo $K_w(x, i\omega)$, tem-se:

$$K_w(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \sqrt[4]{\omega^2\tau^2 + 1} e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{\tau}} \sqrt[4]{\omega^2\tau^2 + 1} e^{i\frac{\theta}{2}} \right\}$$

ou

$$K_w(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right\}.$$

Definindo $\gamma = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}$, obtém-se uma forma simplificada para $K_w(x, i\omega)$:

$$K_w(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \gamma \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{a} \omega \gamma \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right\},$$

$$K_w(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \gamma \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{x}{a} \omega \gamma \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} i \right),$$

$$\begin{aligned} K_w(x, i\omega) &= \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \gamma \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{x}{a} \omega \gamma \cos \frac{\theta}{2} \right) \times \\ &\quad \times \left[\cos \left(\frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_w(x, i\omega) &= \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \gamma \exp \left(-\frac{x}{a} \omega \gamma \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \left\{ \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$K_w(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \gamma \exp \left(-\frac{x}{a} \omega \gamma \cos \frac{\theta}{2} \right) \times \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

Desta forma $K_w(x, i\omega)$ tem suas partes real e imaginária bem definidas, e da equação (2.26), a característica de fase é escrita como

$$\phi_w(x, \omega) = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im} [K_w(x, i\omega)]}{\operatorname{Re} [K_w(x, i\omega)]} \right\} = \arctan \left\{ \tan \left(\frac{\theta}{2} - \frac{x}{a} \omega \gamma \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \quad (2.27)$$

onde $\theta = \arctan[-1/(\omega\tau)]$. Entretanto, usando o resultado (I.2) que fornece $\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan(\omega\tau)$, obtém-se

$$\phi_w(x, \omega) = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) - \frac{x}{a} \omega \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau)\right]. \quad (2.28)$$

2.3 Dinâmica do Fluxo de Calor Difusivo

O fluxo de calor difusivo é um caso limite do fluxo ondulatório quando o tempo de relaxação térmica tende a zero; isto é, $\tau \rightarrow 0$. Quando isso acontece a velocidade de propagação da onda, $a = \sqrt{\alpha/\tau}$, torna-se infinitamente grande e o termo responsável pela característica ondulatória do calor, na equação (2.5), desaparece. Neste caso recai-se no modelo clássico de transmissão de calor, puramente difusivo. Assim, a equação (2.5) passa a ser escrita como

$$\alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, \quad (2.29)$$

a qual advém da lei de *Fourier*,

$$q(x, t) = -K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}. \quad (2.30)$$

Também para o caso difusivo, o campo térmico no meio semi-infinito é excitado pelo fluxo de calor

$$q(0, t) = q_0(t), \quad t \geq 0. \quad (2.31)$$

Mais uma vez o papel da segunda condição de contorno é assumida através do seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.32)$$

Novamente introduz-se as condições iniciais com relação ao fluxo de calor, temperatura e a taxa de variação da temperatura:

$$q(x, 0) = 0 \quad (2.33)$$

$$T(x, 0) = 0 \quad (2.34)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0. \quad (2.35)$$

O problema dado pela equação (2.29) também será resolvido através da aplicação da transformada de *Laplace* na forma $\mathcal{L}\{f(x, t), t \rightarrow s\} = F(x, s)$. Primeiramente aplicando a Transformada de *Laplace* na equação para o fluxo de calor (2.30), obtém-se

$$\mathcal{L}\{q(x, t)\} = \mathcal{L}\left\{-K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right\}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} Q(x, s) &= -K \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}\{T(x, t)\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} &= -\frac{1}{K} Q(x, s). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como

$$q(0, t) = q_0(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{q(0, t)\} = \mathcal{L}\{q_0(t)\} \Rightarrow Q(0, s) = Q_0(s),$$

então, assumindo $x = 0$ em (2.36) vem

$$\frac{d\bar{T}(0, s)}{dx} = -\frac{1}{K} Q_0(s). \quad (2.37)$$

Agora, aplicando a transformada de *Laplace* na equação (2.29), vem

$$\mathcal{L} \left\{ \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right\}.$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L} \{ T(x, t) \} = s \bar{T}(x, s) - T(x, 0).$$

Aplicando as condições iniciais, vem

$$\alpha \frac{d^2 \bar{T}(x, s)}{d x^2} = s \bar{T}(x, s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \bar{T}(x, s)}{d x^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(x, s) = 0. \quad (2.38)$$

Busca-se agora a solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

A solução, na sua forma geral, será dada por

$$\bar{T}(x, s) = A(s)e^{\lambda_1 x} + B(s)e^{\lambda_2 x},$$

onde λ_1 e λ_2 são obtidos através da solução de

$$\lambda^2 - \frac{s}{\alpha} = 0,$$

obtendo-se

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{s}{\alpha}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{s}{\alpha}}. \quad (2.39)$$

Substituindo estes resultados na forma geral da solução, vem

$$\bar{T}(x, s) = A(s) \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\} + B(s) \exp \left\{ \sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}, \quad (2.40)$$

Novamente, com o objetivo de assegurar uma solução física factível, considerando a parte real positiva do expoente, são tomados valores de s tal que

$$\operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{s}{\alpha}} \right] \geq 0. \quad (2.41)$$

Aplicando a transformada de *Laplace* na condição de contorno (2.32) e tomando o limite, vem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x, s) = 0 \Rightarrow B(s) = 0. \quad (2.42)$$

Desta forma a solução reduz-se a

$$\bar{T}(x, s) = A(s) \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}. \quad (2.43)$$

Agora, calculando a primeira derivada em relação a x , vem:

$$\frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} = -A(s) \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}. \quad (2.44)$$

Avaliando-se (2.44) em $x = 0$ e usando o resultado de (2.37), vem:

$$-\frac{1}{K} Q_0(s) = -A(s) \sqrt{\frac{s}{\alpha}}$$

ou

$$A(s) = \frac{Q_0(s)}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}}. \quad (2.45)$$

A forma final da solução fica:

$$\bar{T}(x, s) = \frac{Q_0(s)}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}. \quad (2.46)$$

Tendo em vista a definição da Função de Transferência, dada pela equação (2.1), então para o caso da dinâmica difusiva, tem-se:

$$K_d(x, s) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}. \quad (2.47)$$

Observa-se que um caminho alternativo, bem mais direto, para chegar-se a este mesmo resultado seria tomar o limite quando $\tau \rightarrow 0$ na expressão final de $K_w(x, s)$ dada por (2.24), isto é

$$K_d(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} K_w(x, s). \quad (2.48)$$

Para este cálculo, a forma de $K_w(x, s)$ será modificada afim de facilitar a tomada do limite. Assim, de (2.24), tem-se

$$K_w(x, s) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{s+1/\tau}{s}} \exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{s(s+1/\tau)} \right\}.$$

Levando-se em consideração a definição da velocidade de propagação $a = \sqrt{\alpha/\tau}$, vem

$$K_w(x, s) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \sqrt{\frac{s\tau+1}{s}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{\alpha/\tau}} \sqrt{s^2 + \frac{s}{\tau}} \right\},$$

ou

$$K_w(x, s) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \sqrt{\tau + \frac{1}{s}} \cdot \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{s^2\tau + s}{\alpha}} \right\}.$$

Agora, aplicando o limite definido na expressão (2.48), tem-se

$$K_d(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} K_w(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \sqrt{\tau + \frac{1}{s}} \cdot \exp \left[-x \sqrt{\frac{s^2\tau + s}{\alpha}} \right] \right\},$$

do qual obtém-se

$$K_d(x, s) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}, \quad (2.49)$$

que é idêntica à expressão (2.47).

2.3.1 Cálculo das Características de Amplitude

Pela definição das características de amplitude, dada pela equação (2.2), define-se característica de amplitude para o caso difusivo como

$$A_d(x, \omega) = |K_d(x, i\omega)|, \quad (2.50)$$

onde tal grandeza é calculada através de

$$\begin{aligned} A_d(x, \omega) &= \left| \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{i\omega}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{i\omega}{\alpha}} x \right\} \right| \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left| \frac{1}{i^{1/2}} \right| \left| \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} i^{1/2} \right\} \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_d(x, \omega) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left| \frac{1}{(e^{i\pi/2})^{1/2}} \right| \cdot \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[-x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} (e^{i\pi/2})^{1/2} \right] \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{|(e^{i\pi/4})|} \cdot \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[-x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} (e^{i\pi/4}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_d(x, \omega) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}}} \cdot \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[-x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_d(x, \omega) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right\}. \quad (2.51)$$

Assim como para a função de transferência, a característica de amplitude para o caso difusivo também pode ser obtida a partir da característica de amplitude do caso ondulatório através do limite quando $\tau \rightarrow 0$; isto é,

$$A_d(x, \omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} A_w(x, \omega). \quad (2.52)$$

Para este cálculo, a forma de $A_w(x, \omega)$, dada por (2.25), será modificada afim de facilitar a tomada do limite. Assim,

$$A_w(x, \omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau) \right] \right\}.$$

Levando-se em consideração a definição da velocidade de propagação $a = \sqrt{\alpha/\tau}$, vem

$$A_w(x, \omega) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \sqrt[4]{\tau^2 \left(1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2} \right)} \cdot \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\tau}{\alpha}} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau) \right] \right\},$$

ou

$$A_w(x, \omega) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \sqrt[4]{\tau^2 + \frac{1}{\omega^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{\alpha}} \omega \sqrt[4]{\tau^2 + \frac{1}{\omega^2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau) \right] \right\}.$$

Agora, aplicando o limite definido na expressão (2.52), tem-se

$$A_d(x, \omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{K} \sqrt[4]{\tau^2 + \frac{1}{\omega^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{\alpha}} \omega \sqrt[4]{\tau^2 + \frac{1}{\omega^2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau) \right] \right\} \right],$$

da qual obtém-se

$$A_d(x, \omega) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{\alpha}} \omega \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\},$$

ou

$$A_d(x, \omega) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right\}, \quad (2.53)$$

que é idêntica à expressão (2.51).

2.3.2 Cálculo das Características de Fase

Pela definição das características de fase, dada pela equação (2.3), define-se característica de fase para o caso difusivo como

$$\phi_d(x, \omega) = \arg K_d(x, i\omega), \quad (2.54)$$

Os fatores de $K_d(x, i\omega)$ serão modificados afim de facilitar o cálculo de $\phi_d(x, \omega)$, portanto de (2.47) tem-se:

$$K_d(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{i\omega}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{i\omega}{\alpha}} x \right\}.$$

Primeiramente tomando o segundo fator, tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{i\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\omega}}.$$

Para o terceiro fator, tem-se:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{i\omega}{\alpha}} \right\} &= \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \sqrt{i} \right\} = \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - i x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, reescrevendo $K_d(x, i\omega)$, tem-se:

$$K_d(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\omega}} \cdot \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - i x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right\},$$

ou

$$K_d(x, i\omega) = \frac{\sqrt{\alpha}}{K} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right\} \cdot \exp \left\{ -i \left(\frac{\pi}{4} + x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right) \right\}.$$

Como $K_d(x, i\omega)$ está na forma polar, $|K_d(x, i\omega)| e^{i\theta}$, onde θ é o argumento, então tem-se

$$\phi_d(x, \omega) = -\frac{\pi}{4} - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}. \quad (2.55)$$

Assim como para a característica de amplitude, a característica de fase para o caso difusivo também pode ser obtida a partir da característica de fase do caso ondulatório, através do limite quando $\tau \rightarrow 0$; isto é,

$$\phi_d(x, \omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \phi_w(x, \omega). \quad (2.56)$$

Para este cálculo, a forma de $\phi_w(x, \omega)$, dada por (2.28), será modificada afim de facilitar a tomada do limite. Assim,

$$\phi_w(x, \omega) = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{\omega \tau} \right) - \frac{x}{a} \omega^4 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega \tau) \right].$$

Levando-se em consideração a definição da velocidade de propagação $a = \sqrt{\alpha/\tau}$, vem

$$\phi_w(x, \omega) = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{\omega \tau} \right) - x \sqrt{\frac{\tau}{\alpha}} \omega^4 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega \tau) \right],$$

ou

$$\phi_w(x, \omega) = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{\omega \tau} \right) - \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \omega^4 \sqrt{\tau^2 + \frac{1}{\omega^2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega \tau) \right].$$

Agora, aplicando o limite definido na expressão (2.56), vem

$$\phi_d(x, \omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{\omega \tau} \right) - \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \omega \sqrt[4]{\tau^2 + \frac{1}{\omega^2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega \tau) \right] \right\},$$

onde obtém-se

$$\phi_d(x, \omega) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\omega}{\sqrt[4]{\omega^2}} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right),$$

ou

$$\phi_d(x, \omega) = -\frac{\pi}{4} - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}, \quad (2.57)$$

que é idêntica à expressão (2.55).

2.4 Forma Alternativa para Solução de $T(x, t)$

Da equação (2.1) sabe-se que

$$K(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{Q_0(s)},$$

e uma vez determinada a função de transferência $K_w(x, s)$ ou $K_d(x, s)$, o cálculo da distribuição de temperatura transiente $T(x, t)$ pode ser feito de maneira simples. Utilizando a informação da função de transferência e a forma transformada do fluxo de calor de excitação, $Q_0(S)$, e aplicando-se a transformada inversa de *Laplace*, é feita a passagem do domínio s para o domínio temporal. Assim,

$$T(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{T}(x, s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ K(x, s) Q_0(s) \}, \quad (2.58)$$

onde, dependendo da forma das funções $K(x, s)$ e $Q_0(s)$, pode-se aplicar o teorema da convolução, conforme definido na equação (2.4), para obtenção da solução do problema, como será apresentado no capítulo 5.

3 SOLUÇÃO ALTERNATIVA PARA MEIO FINITO

Neste capítulo é apresentado o cálculo da função de transferência para os casos difusivo e ondulatório, considerando uma placa unidimensional finita, com campo de temperatura $T(x, t)$ e excitado por um fluxo externo de calor $q_1(t)$ na face esquerda e um fluxo externo de calor $q_2(t)$ na face direita. São também apresentados os cálculos das características de amplitude considerando a forma adimensional das funções de transferência, para os casos ondulatório e difusivo. Finalizando, é apresentada a forma com que o perfil de temperatura para um meio finito é determinado, em termos da função de transferência.

3.1 Definições Básicas

A placa a ser considerada é aquecida por dois fluxos de calor penetrando um na face esquerda ($x = 0$) e outro na face direita ($x = L$) (figura 3.1). Assume-se condições iniciais nulas, assim como a linearidade do meio. As características assim assumidas tornam possível a formulação, com base no princípio da superposição com respeito aos fluxos de calor, de uma forma geral da transformada de Laplace da temperatura, definida como

$$\bar{T}(x, s) = K_1(x, s) \bar{q}_1(s) + K_2(x, s) \bar{q}_2(s). \quad (3.1)$$

A figura (3.2) ilustra a equação (3.1). A partir da definição de $\bar{T}(x, s)$, são desenvolvidas as expressões de transmissão com respeito às faces direita e esquerda, respectivamente:

$$K_1(x, s) = \left. \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_1(s)} \right|_{\bar{q}_2(s)=0}, \quad (3.2)$$

$$K_2(x, s) = \left. \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_2(s)} \right|_{\bar{q}_1(s)=0}. \quad (3.3)$$

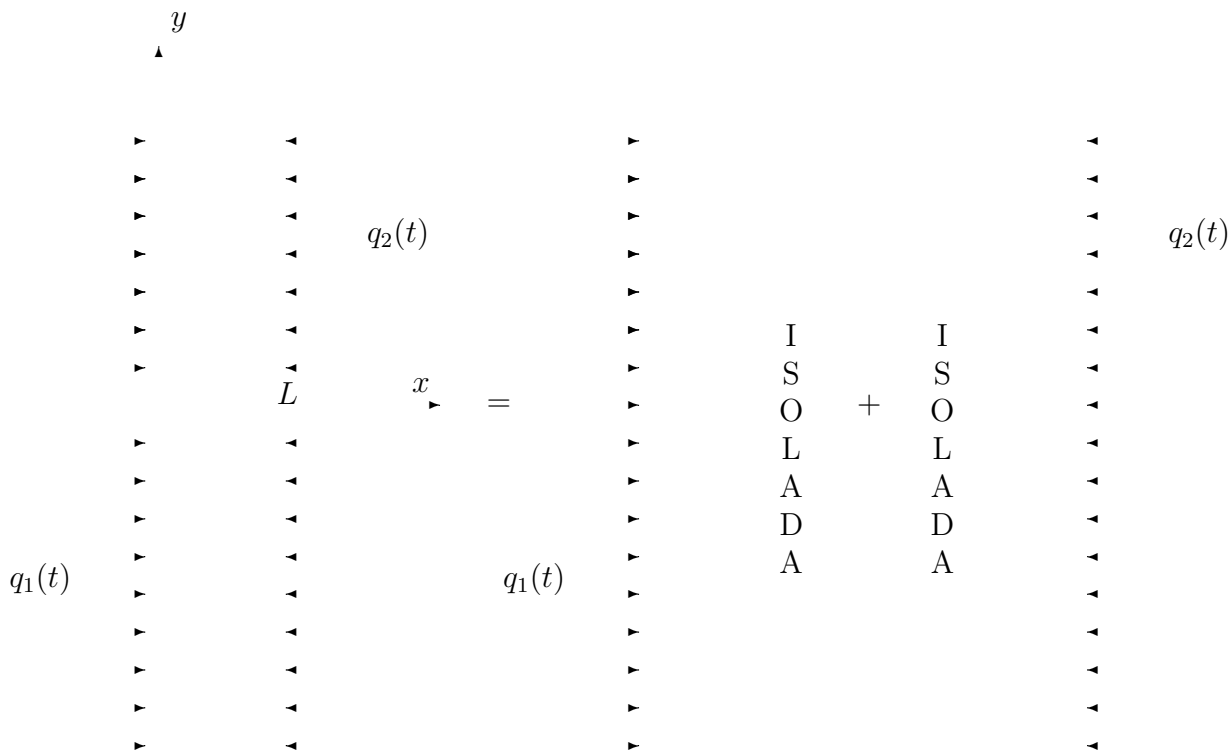


Figura 3.1 Fluxos de calor $q_1(t)$, $q_2(t)$ penetrando na placa de parâmetros K , h , c e $\tau > 0$ (modelo ondulatório) e $\tau = 0$ (modelo difusivo). O princípio de superposição com respeito aos fluxos.

Observa-se que na definição da função de transferência com respeito a uma face específica, assume-se que o lado oposto está isolado termicamente; isto é, fluxo nulo. Apesar de tal idealização, a superposição das equações (3.2) e (3.3) corresponde à situação real, de acordo com as figuras (3.1) e (3.2).

A determinação das funções de transferência, equações (3.2) e (3.3), é conveniente devido às mesmas razões apresentadas no capítulo 2, ou seja:

1. as propriedades dinâmicas do sistema serão determinadas independentemente da forma dos fluxos de calor $q_j(t)$ considerados;
2. os valores da função de transferência nos eixos imaginários definem as características de amplitude

$$A_j(x, \omega) = |K_j(x, s = i\omega)|, \tag{3.4}$$

e as características de fase

$$\phi_j(x, \omega) = \arg K_j(x, s = i\omega), \quad (3.5)$$

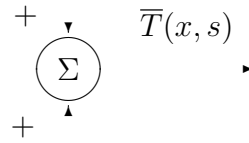
onde $j = 1, 2$;

3. o teorema da Convolução de duas funções tornará possível determinar a resposta do sistema em relação à uma excitação conhecida, e de qualquer formato, do fluxo de calor,

$$T(x, t) = \sum_{j=1}^2 \int_0^t k_j(x, \eta) q_j(t - \eta) d\eta. \quad (3.6)$$

$\bar{q}_1(s)$

► $K_1(x, s)$



$\bar{q}_2(s)$

► $K_2(x, s)$

Figura 3.2 Diagrama em bloco da placa. $K_1(x, s)$ - transmissão com respeito à face esquerda. $K_2(x, s)$ - transmissão com respeito à face direita.

3.2 Funções de Transferência da Placa

Devido à geometria do sistema, apresentada na figura (3.1), a equação (1.5) toma a forma

$$\alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2}, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad \text{e } t > 0. \quad (3.7)$$

Além disso, para o caso unidimensional, da equação (1.4), tem-se

$$q(x, t) = -K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}. \quad (3.8)$$

As condições de contorno do fluxo para o caso da placa são definidas como

$$q(0, t) = q_1(t) \quad \text{para } t \geq 0, \quad (3.9)$$

$$q(L, t) = -q_2(t) \quad \text{para } t \geq 0. \quad (3.10)$$

Fazendo uso da equação (3.8), as equações (3.9) e (3.10) podem ser escritas como

$$q_1(t) = -K \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} - \tau \frac{dq_1(t)}{dt} \quad \text{para } t \geq 0, \quad (3.11)$$

$$-q_2(t) = -K \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} + \tau \frac{dq_2(t)}{dt} \quad \text{para } t \geq 0. \quad (3.12)$$

Considerando a definição da função de transferência, é necessário introduzir as condições iniciais com relação ao fluxo de calor, temperatura e a taxa de variação da temperatura:

$$q(x, 0) = 0 \quad (3.13)$$

$$T(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.15)$$

O problema dado pela equação (3.7) será resolvido através da aplicação da transformada de *Laplace* na forma $\mathcal{L}\{f(x, t), t \rightarrow s\} = F(x, s)$. Assim, tem-se

$$\mathcal{L} \left\{ \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right\} + \mathcal{L} \left\{ \tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \right\}.$$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{T(x, t)\} = s\bar{T}(x, s) - T(x, 0) + \tau \left[s^2\bar{T}(x, s) - sT(x, 0) - \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right].$$

Aplicando as condições iniciais, (3.14) e (3.15), obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^2\bar{T}(x, s)}{dx^2} &= s\bar{T}(x, s) + \tau s^2\bar{T}(x, s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2\bar{T}(x, s)}{dx^2} - \frac{s(1 + \tau s)}{\alpha} \bar{T}(x, s) &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Busca-se agora a solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

A solução, na sua forma geral, é dada por

$$\bar{T}(x, s) = A(s)e^{\lambda_1 x} + B(s)e^{\lambda_2 x},$$

onde λ_1 e λ_2 são obtidos através da solução de

$$\lambda^2 - \frac{s(1 + \tau s)}{\alpha} = 0,$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo estes resultados na forma geral da solução, vem

$$\bar{T}(x, s) = A(s) \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right\} + B(s) \exp \left\{ \sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right\},$$

que, por conveniência, serão escritos na sua forma hiperbólica,

$$\bar{T}(x, s) = \mathcal{A}(s) \cosh \left[\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right] + \mathcal{B}(s) \sinh \left[\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right]. \quad (3.18)$$

Com o objetivo de assegurar uma solução física factível (temperaturas positivas), considerando a parte real positiva do argumento, são tomados valores de s tal que

$$\operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} \right] \geq 0. \quad (3.19)$$

Afim de determinar as funções $\mathcal{A}(s)$ e $\mathcal{B}(s)$, é preciso aplicar a transformada de *Laplace* nas condições de contorno. Assim, aplicando a transformada em relação a t nas equações (3.11) e (3.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1(s) &= -K \left. \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} \right|_{x=0} - \tau s \bar{q}_1(s) + \tau q_1(0), \\ -\bar{q}_2(s) &= -K \left. \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} \right|_{x=L} + \tau s \bar{q}_2(s) - \tau q_2(0). \end{aligned}$$

Aplicando a condição inicial para o fluxo, equação (3.13), as condições de contorno para a equação (3.16) ficam determinadas:

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{K} (1 + \tau s) \bar{q}_1(s), \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} \right|_{x=L} = \frac{1}{K} (1 + \tau s) \bar{q}_2(s). \quad (3.21)$$

Agora, para a determinação de $\mathcal{A}(s)$ e $\mathcal{B}(s)$ deriva-se a expressão (3.18) em relação a x , obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}(x, s)}{dx} &= \mathcal{A}(s) \left[\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right] \sinh \left[\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right] + \\ &+ \mathcal{B}(s) \left[\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right] \cosh \left[\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aplicando a condição de contorno em $x = 0$, equação (3.20), vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(s) \left[\sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}} x \right] &= -\frac{1}{K} (1+\tau s) \bar{q}_1(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{B}(s) &= -\frac{(1+\tau s)}{K\gamma(s)} \bar{q}_1(s), \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $\gamma(s) = \sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}}$.

Aplicando a condição de contorno em $x = L$, equação (3.21), vem:

$$\mathcal{A}(s)\gamma(s) \sinh [\gamma(s)L] + \mathcal{B}(s)\gamma(s) \cosh [\gamma(s)L] = \frac{(1+\tau s)}{K} \bar{q}_2(s).$$

Inserindo o resultado (3.23), referente à $\mathcal{B}(s)$, e isolando $\mathcal{A}(s)$, obtém-se:

$$\mathcal{A}(s) = \frac{(1+\tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L]}{\sinh [\gamma(s)L]} \bar{q}_1(s) + \frac{1}{\sinh [\gamma(s)L]} \bar{q}_2(s) \right\}. \quad (3.24)$$

Uma vez obtidas as expressões que definem $\mathcal{A}(s)$ e $\mathcal{B}(s)$, equações (3.24) e (3.23) respectivamente, estas são inseridas na equação (3.18) para então obter-se uma expressão da transformada de *Laplace* da temperatura em termos dos parâmetros do material e dos fluxos de calor, estes últimos também transformados. Assim, tem-se

$$\bar{T}(x, s) = \frac{(1+\tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \left[\frac{\cosh [\gamma(s)L]}{\sinh [\gamma(s)L]} \bar{q}_1(s) + \frac{1}{\sinh [\gamma(s)L]} \bar{q}_2(s) \right] \cdot \cosh [\gamma(s)x] - \bar{q}_1(s) \sinh [\gamma(s)x] \right\}. \quad (3.25)$$

Agora, como o objetivo é a determinação das expressões de transmissão; isto é, as funções de transferência, deve-se substituir o resultado (3.25) nas definições (3.2) e (3.3). Para o primeiro caso, $K_1(x, s)$, tem-se:

$$K_1(x, s) = \frac{(1+\tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)L]}{\sinh [\gamma(s)L]} \cosh [\gamma(s)x] - \frac{(1+\tau s)}{K\gamma(s)} \sinh [\gamma(s)x],$$

$$K_1(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L] \cosh [\gamma(s)x] - \sinh [\gamma(s)L] \sinh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\},$$

ou

$$K_1(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)(L - x)]}{\sinh [\gamma(s)L]}. \quad (3.26)$$

Da mesma forma para $K_2(x, s)$, aplicando-se a definição, obtém-se:

$$K_2(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]}, \quad (3.27)$$

onde $\gamma(s) = \sqrt{\frac{s(1+\tau s)}{\alpha}}$, o qual é limitado pela condição apresentada em (3.19).

3.3 Casos Especiais de Transmissão na Placa

Como o interesse está voltado para o caso da dinâmica do fluxo de calor ondulatório, passará a ser adotada a notação $K_w(x, s)$ para a função de transferência. Com isso as equações (3.26) e (3.27) serão redefinidas na forma

$$K_{w1}(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)(L - x)]}{\sinh [\gamma(s)L]}, \quad (3.28)$$

$$K_{w2}(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]}. \quad (3.29)$$

Uma vez que serão analisados casos em que $\bar{q}_1(s)$ e $\bar{q}_2(s)$ se relacionam, as equações (3.2) e (3.3), e conseqüentemente (3.28) e (3.29), tornam-se inadequadas para a determinação da função de transferência, pois assume-se que o fluxo é nulo na face oposta àquela considerada. Ainda, como é determinada uma relação entre os fluxos, a função de transferência $K_w(x, s)$ pode ser escrita de uma forma única, independente da face que está sendo considerada. Assim, assumiu-se

$$K_w(x, s) = K_1(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_1(s)}. \quad (3.30)$$

A seguir são apresentadas as diferentes formas em que $q_1(t)$ e $q_2(t)$ se relacionam.

- Aquecimento da placa idêntico em ambos os lados: assumindo a relação $q_2(t) = q_1(t)$ na equação (3.25) e fazendo uso do resultado (3.30), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_1(s)} &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L] \cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} + \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} - \sinh [\gamma(s)x] \right\}, \\ K_w(x, s) &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L] \cosh [\gamma(s)x] - \sinh [\gamma(s)L] \sinh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} + \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\}, \\ K_w(x, s) &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)(x - L)] + \cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\}. \quad (3.31)\end{aligned}$$

- Balanço de transferência de calor nulo na placa: assumindo a relação $q_2(t) = -q_1(t)$ na equação (3.25) e fazendo uso do resultado (3.30), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_1(s)} &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L] \cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} - \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} - \sinh [\gamma(s)x] \right\}, \\ K_w(x, s) &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L] \cosh [\gamma(s)x] - \sinh [\gamma(s)L] \sinh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} + \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\}, \\ K_w(x, s) &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)(x - L)] - \cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\}. \quad (3.32)\end{aligned}$$

- Fluxos de calor proporcionais penetrando na placa: assumindo a relação $q_2(t) = -mq_1(t)$ na equação (3.25), onde m é uma constante, e fazendo uso do resultado (3.30), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_1(s)} &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L] \cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} - m \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} - \sinh [\gamma(s)x] \right\}, \\ K_w(x, s) &= \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)L] \cosh [\gamma(s)x] - \sinh [\gamma(s)L] \sinh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} - m \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\},\end{aligned}$$

$$K_w(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \left\{ \frac{\cosh [\gamma(s)(x - L)] - m \cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\}. \quad (3.33)$$

- Aquecimento do lado esquerdo por um fluxo de calor $\bar{q}_1(s)$ com o lado direito isolado: assumindo a relação $\bar{q}_2(s) = 0$ na equação (3.1), que define $\bar{T}(x, s)$ em termos das funções de transferência, e usando o resultado da equação (3.28), tem-se

$$K_w(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_1(s)} = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)(L - x)]}{\sinh [\gamma(s)L]}.$$

Observa-se que este último caso é um caso especial já anteriormente avaliado.

Colocando a expressão acima na forma exponencial, obtém-se

$$K_w(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\exp \{\gamma(s)(L - x)\} + \exp \{-\gamma(s)(L - x)\}}{\exp \{\gamma(s)L\} - \exp \{-\gamma(s)L\}},$$

ou

$$K_w(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\exp \{-\gamma(s)x\} + \exp \{-\gamma(s)(2L - x)\}}{1 - \exp \{-2\gamma(s)L\}}. \quad (3.34)$$

3.3.1 Casos Limites

- Meio Semi-Infinito ($L \rightarrow \infty$):

O caso de um domínio semi-infinito pode ser descrito a partir do caso de um domínio finito tomando $L \rightarrow \infty$ na equação (3.34). Além disso, empregando $\gamma(s)$ como apresentado em (3.23) e com a restrição da equação (3.19), fica assegurada matematicamente a conversão de placa para meio semi-infinito. Para simplificação da equação (3.34) no caso semi-infinito, leva-se em consideração os seguintes limites:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \exp \{-\gamma(s)(2L - x)\} = \lim_{L \rightarrow \infty} \exp \{-2\gamma(s)L\} = 0. \quad (3.35)$$

Assim, aplicando os resultados de (3.35) na equação para $K_w(x, s)$, tem-se

$$K_w(x, s) = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} e^{-\gamma(s)x} = \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \sqrt{\frac{\alpha}{s(1 + \tau s)}} \cdot \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right\},$$

$$K_w(x, s) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \sqrt{\tau(s + 1/\tau)} \cdot \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\alpha}} x \right\}.$$

Inserindo a definição da velocidade finita de propagação, $a = \sqrt{\alpha/\tau}$, obtém-se

$$K_w(x, s) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{s + 1/\tau}{s}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\sqrt{s(s + 1/\tau)}}{a} x \right\}. \quad (3.36)$$

Com relação à equação (3.29) (face direita), verifica-se que quando $L \rightarrow \infty$ e empregando a restrição dada pela equação (3.19), $K_2(x, s) \rightarrow 0$. Fisicamente, isto é devido ao fato de $q_2(t) = 0$. Observa-se que este resultado é idêntico à equação (2.24), apresentada anteriormente.

- Transmissões do fluxo de calor difusivo ($\tau \rightarrow 0$):

Quando o tempo de relaxação térmica tende a zero a difusão de calor torna-se um caso limite da propagação ondulatória do calor; isto é, a velocidade de propagação $\sqrt{\alpha/\tau}$ torna-se infinita. Desta forma, com base nas equações (3.28) e (3.29), pode-se determinar a função de transferência da placa descrita pela equação de difusão

$$K_{dj}(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} K_{wj}(x, s), \quad \text{onde } j = 1, 2. \quad (3.37)$$

Através da equação (3.37) obtém-se a função de transferência desejada para o caso da dinâmica do fluxo de calor difusivo. Com respeito ao lado esquerdo da placa, tem-se

$$K_{d1}(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} K_{w1}(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1 + \tau s)}{K\gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)(L - x)]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\},$$

ou

$$K_{d1}(x, s) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \frac{\cosh \left[\sqrt{s/\alpha} (L - x) \right]}{\sinh \left[\sqrt{s/\alpha} L \right]}. \quad (3.38)$$

Com respeito ao lado direito da placa, tem-se

$$K_{d2}(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} K_{w2}(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1 + \tau s)}{K \gamma(s)} \frac{\cosh [\gamma(s)x]}{\sinh [\gamma(s)L]} \right\},$$

ou

$$K_{d2}(x, s) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \frac{\cosh \left[\sqrt{s/\alpha} x \right]}{\sinh \left[\sqrt{s/\alpha} L \right]}. \quad (3.39)$$

De forma semelhante, o resultado da equação (3.36), para um meio semi-infinito, torna-se a função de transferência para o caso difusivo, quando toma-se o limite $\tau \rightarrow 0$:

$$K_d(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} K_w(x, s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{(1 + s\tau)}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s(1 + s\tau)}} \cdot \exp \left[-\sqrt{\frac{s(1 + s\tau)}{\alpha}} x \right] \right\}$$

ou

$$K_d(x, s) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}, \quad (3.40)$$

que está de acordo com o resultado (2.47).

3.4 Características de Amplitude da Placa

A amplitude das transmissões (funções de transferência) são encontradas aplicando-se a relação (3.4) definida anteriormente:

$$A_j(x, \omega) = |K_j(x, s = i\omega)|,$$

onde $j = 1, 2$.

Por razões de generalização, as transmissões serão colocadas na forma adimensional. Isto é feito multiplicando-se as equações (3.28) e (3.29) por K/L e efetuando as seguintes mudanças de variável:

$$X = x/L,$$

$$b = \tau\alpha/L^2,$$

$$\beta = \omega L^2/\alpha,$$

onde b representa um tempo adimensional e β uma frequência adimensional tal que L^2/α é uma constante. Desta forma as características de amplitude serão dadas em função de grandezas adimensionais.

3.4.1 Características de Amplitude para a Dinâmica Ondulatória

- Fronteira Esquerda ($X = 0$):

Reescrevendo a equação (3.28) e introduzindo as novas variáveis adimensionais, obtém-se

$$W_1(X, i\beta) = \frac{K}{L} K_{w1} \left(\frac{x}{L}, i\omega \frac{L^2}{\alpha} \right) = \frac{K}{L} \frac{(1 + i\omega\tau)}{K \sqrt{\frac{i\omega(1+i\omega\tau)}{\alpha}}} \cdot \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{i\omega(1+i\omega\tau)}{\alpha}} (L - x) \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{i\omega(1+i\omega\tau)}{\alpha}} L \right]},$$

$$W_1(X, i\beta) = \frac{1}{L} \cdot \frac{(1 + i\frac{\alpha}{L^2}\beta\tau)}{\sqrt{\frac{i\beta}{L^2} \sqrt{1 + i\frac{\alpha}{L^2}\beta\tau}}} \cdot \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2} \sqrt{1 + i\frac{\alpha}{L^2}\beta\tau}} (L - LX) \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2} \sqrt{1 + i\frac{\alpha}{L^2}\beta\tau}} L \right]},$$

ou

$$W_1(X, i\beta) = \sqrt{b + \frac{1}{i\beta}} \cdot \frac{\cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right]}{\sinh \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right]}. \quad (3.41)$$

Para determinação da característica de amplitude aplica-se a definição adaptada para o caso adimensional. Assim,

$$A_{w1}(X, \beta) = |W_1(X, i\beta)|. \quad (3.42)$$

Introduzindo o resultado (3.41) em (3.42), vem

$$\begin{aligned} A_{w1}(X, \beta) &= \left| \sqrt{b + \frac{1}{i\beta}} \cdot \frac{\cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right]}{\sinh \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right]} \right| = \\ &= \left| \sqrt{b + \frac{1}{i\beta}} \right| \cdot \frac{\left| \cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right|}{\left| \sinh \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right|}. \end{aligned}$$

Avaliando cada um dos fatores separadamente:

$$\left| \sqrt{b + \frac{1}{i\beta}} \right| = \sqrt[4]{b^2 + \frac{1}{\beta^2}},$$

$$\left| \cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| = \frac{1}{2} \left| \exp \left\{ (1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right\} + \exp \left\{ (X - 1) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right\} \right|$$

e

$$\left| \sinh \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| = \frac{1}{2} \left| \exp \left\{ \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right\} - \exp \left\{ -\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right\} \right|.$$

Determinando o módulo das funções hiperbólicas, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| &= \frac{1}{2} \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right\} + \frac{1}{2} \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[(X - 1) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right\}, \\ \left| \sinh \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| &= \frac{1}{2} \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right\} - \frac{1}{2} \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[-\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Tomando agora apenas uma das formas dos argumentos da exponencial e escrevendo o número complexo interno à raiz na sua forma polar, obtém-se:

$$Re \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] = Re \left[(1 - X) \sqrt{\beta \sqrt{1 + (\beta b)^2} e^{i\theta}} \right],$$

onde $\theta = \arctan[-1/(\beta b)]$. Assim,

$$\begin{aligned} Re \left[(1 - X) \sqrt{\beta \sqrt{1 + (\beta b)^2} e^{i\theta}} \right] &= Re \left[(1 - X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= (1 - X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Fazendo uso do resultado (I.2), apresentado no apêndice (I), e adaptando-o para o caso adimensional, vem:

$$Re \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] = (1 - X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right].$$

Agora, utilizando este resultado para determinação do módulo de ambas as funções hiperbólicas, vem:

$$\begin{aligned} \left| \cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| &= \frac{1}{2} \exp \left\{ (1 - X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \exp \left\{ (X - 1) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\} \\ \left| \cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| &= \cosh \left\{ (1 - X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{senh} \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| &= \frac{1}{2} \exp \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\} + \\ &- \frac{1}{2} \exp \left\{ -\sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left| \operatorname{senh} \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right] \right| = \operatorname{senh} \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}.$$

Desta forma, a expressão para a amplitude fica determinada, sendo escrita como:

$$A_{w1}(X, \beta) = \sqrt[4]{b^2 + \frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left\{ (1 - X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}{\sinh \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}. \quad (3.43)$$

- Fronteira Direita ($X = 1$):

Reescrevendo a equação (3.29) e introduzindo as novas variáveis adimensionais, obtém-se

$$W_2(X, i\beta) = \frac{K}{L} K_{w2} \left(\frac{x}{L}, i\omega \frac{L^2}{\alpha} \right) = \frac{K}{L} \frac{(1 + i\omega\tau)}{K \sqrt{\frac{i\omega(1+i\omega\tau)}{\alpha}}} \cdot \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{i\omega(1+i\omega\tau)}{\alpha}} X \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{i\omega(1+i\omega\tau)}{\alpha}} L \right]}.$$

$$W_2(X, i\beta) = \frac{1}{L} \cdot \frac{(1 + i \frac{\alpha}{L^2} \beta \tau)}{\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}} \sqrt{1 + i \frac{\alpha}{L^2} \beta \tau}} \cdot \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}} \sqrt{1 + i \frac{\alpha}{L^2} \beta \tau} XL \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}} \sqrt{1 + i \frac{\alpha}{L^2} \beta \tau} L \right]},$$

ou

$$W_2(X, i\beta) = \sqrt{b + \frac{1}{i\beta}} \cdot \frac{\cosh \left[X \sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right]}{\sinh \left[\sqrt{i\beta - \beta^2 b} \right]}. \quad (3.44)$$

Para determinação da característica de amplitude aplica-se a definição adaptada para o caso adimensional. Assim,

$$A_{w2}(X, \beta) = |W_2(X, i\beta)|. \quad (3.45)$$

Como as expressões de $W_1(X, i\beta)$ e $W_2(X, i\beta)$ são muito semelhantes, a determinação de $A_{w2}(X, \beta)$ é feita por analogia com o caso de $A_{w1}(X, \beta)$. Desta forma,

obtem-se

$$A_{w2}(X, \beta) = \sqrt[4]{b^2 + \frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left\{ X \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}{\sinh \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}. \quad (3.46)$$

3.4.2 Características de Amplitude para a Dinâmica Difusiva

- Fronteira Esquerda ($X = 0$):

Reescrevendo a equação (3.38) e introduzindo as novas variáveis adimensionais, obtém-se

$$D_1(X, i\beta) = \frac{K}{L} K_{d1} \left(\frac{x}{L}, i\omega \frac{L^2}{\alpha} \right) = \frac{K}{L} \frac{1}{K} \frac{1}{\sqrt{i\omega/\alpha}} \cdot \frac{\cosh \left[\sqrt{i\omega/\alpha} (L - X) \right]}{\sinh \left[\sqrt{i\omega/\alpha} L \right]}.$$

$$D_1(X, i\beta) = \frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}}} \cdot \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}} (L - LX) \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}} L \right]},$$

ou

$$D_1(X, i\beta) = \frac{1}{\sqrt{i\beta}} \cdot \frac{\cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta} \right]}{\sinh \left[\sqrt{i\beta} \right]}. \quad (3.47)$$

Para determinação da característica de amplitude aplica-se a definição adaptada para o caso adimensional. Assim,

$$A_{d1}(X, \beta) = |D_1(X, i\beta)|. \quad (3.48)$$

Introduzindo o resultado (3.47) em (3.48), vem

$$\begin{aligned} A_{d1}(X, \beta) &= \left| \sqrt{\frac{1}{i\beta}} \cdot \frac{\cosh [(1-X) \sqrt{i\beta}]}{\sinh [\sqrt{i\beta}]} \right| = \\ &= \left| \sqrt{\frac{1}{i\beta}} \right| \cdot \frac{|\cosh [(1-X) \sqrt{i\beta}]|}{|\sinh [\sqrt{i\beta}]|}. \end{aligned}$$

Avaliando cada um dos fatores separadamente:

$$\left| \sqrt{\frac{1}{i\beta}} \right| = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta^2}},$$

$$|\cosh [(1-X) \sqrt{i\beta}]| = \frac{1}{2} \left| \exp \{ (1-X) \sqrt{i\beta} \} + \exp \{ (X-1) \sqrt{i\beta} \} \right|$$

e

$$|\sinh [\sqrt{i\beta}]| = \frac{1}{2} \left| \exp \{ \sqrt{i\beta} \} - \exp \{ -\sqrt{i\beta} \} \right|.$$

Determinando o módulo das funções hiperbólicas, tem-se

$$|\cosh [(1-X) \sqrt{i\beta}]| = \frac{1}{2} \exp \{ \operatorname{Re} [(1-X) \sqrt{i\beta}] \} + \frac{1}{2} \exp \{ \operatorname{Re} [(X-1) \sqrt{i\beta}] \},$$

$$|\sinh [\sqrt{i\beta}]| = \frac{1}{2} \exp \{ \operatorname{Re} [\sqrt{i\beta}] \} - \frac{1}{2} \exp \{ \operatorname{Re} [-\sqrt{i\beta}] \}.$$

Tomando agora apenas uma das formas dos argumentos da exponencial e escrevendo o número complexo interno à raiz na sua forma polar, obtém-se:

$$\operatorname{Re} [(1-X) \sqrt{i\beta}] = \operatorname{Re} [(1-X) \sqrt{\beta} e^{i\pi/4}].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(1-X) \sqrt{i\beta}] &= \operatorname{Re} [(1-X) \sqrt{\beta} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1-X) \sqrt{\beta}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando este resultado para determinação do módulo de ambas as funções hiperbólicas, vem:

$$\left| \cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta} \right] \right| = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - X) \sqrt{\beta} \right\} + \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - X) \sqrt{\beta} \right\}$$

$$\left| \cosh \left[(1 - X) \sqrt{i\beta} \right] \right| = \cosh \left[(1 - X) \frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right],$$

$$\left| \sinh \left[\sqrt{i\beta} \right] \right| = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\beta} \right\} - \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\beta} \right\}$$

$$\left| \sinh \left[\sqrt{i\beta} \right] \right| = \sinh \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right].$$

Desta forma, a expressão para a amplitude fica determinada, sendo escrita como:

$$A_{d1}(X, \beta) = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left[(1 - X) \frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}{\sinh \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}. \quad (3.49)$$

Sabe-se que o caso difusivo é um caso particular do caso ondulatório. Desta forma, o resultado (3.49) poderia ser obtido através do limite

$$A_{d1}(X, \beta) = \lim_{b \rightarrow 0} A_{w1}(X, \beta). \quad (3.50)$$

Assim, usando o resultado (3.43) e aplicando o limite, obtém-se:

$$A_{d1}(X, \beta) = \lim_{b \rightarrow 0} \left\{ \sqrt[4]{b^2 + \frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left\{ (1 - X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}{\sinh \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}} \right\},$$

ou

$$A_{d1}(X, \beta) = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left[(1 - X) \frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}{\sinh \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]},$$

que é idêntico ao resultado (3.49)

- Fronteira Direita ($X = 1$):

Reescrevendo a equação (3.39) e introduzindo as novas variáveis adimensionais, obtém-se

$$D_2(X, i\beta) = \frac{K}{L} K_{d2} \left(\frac{x}{L}, i\omega \frac{L^2}{\alpha} \right) = \frac{K}{L} \cdot \frac{1}{K} \frac{1}{\sqrt{i\omega/\alpha}} \frac{\cosh \left[\sqrt{i\omega/\alpha} X \right]}{\sinh \left[\sqrt{i\omega/\alpha} L \right]}.$$

$$D_2(X, i\beta) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}}} \cdot \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}} LX \right]}{\sinh \left[\sqrt{\frac{i\beta}{L^2}} L \right]},$$

ou

$$D_2(X, i\beta) = \frac{1}{\sqrt{i\beta}} \cdot \frac{\cosh \left[x \sqrt{i\beta} \right]}{\sinh \left[\sqrt{i\beta} \right]}. \quad (3.51)$$

Para determinação da característica de amplitude aplica-se a definição adaptada para o caso adimensional. Assim,

$$A_{d2}(X, \beta) = |D_2(X, i\beta)|. \quad (3.52)$$

Como as expressões de $D_1(X, i\beta)$ e $D_2(X, i\beta)$ são muito semelhantes, a determinação de $A_{d2}(X, \beta)$ é feita por analogia com o caso de $A_{d1}(X, \beta)$. Desta forma, obtém-se

$$A_{d2}(X, \beta) = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left[X \frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}{\sinh \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}. \quad (3.53)$$

Como anteriormente, o resultado (3.53) pode ser obtido através do limite

$$A_{d2}(X, \beta) = \lim_{b \rightarrow 0} A_{w2}(X, \beta). \quad (3.54)$$

Assim, utilizando o resultado (3.46) e aplicando o limite, obtém-se:

$$A_{d2}(X, \beta) = \lim_{b \rightarrow 0} \left\{ \sqrt[4]{b^2 + \frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left\{ X \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}{\sinh \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}} \right\},$$

ou

$$A_{d2}(X, \beta) = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left[X \frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}{\sinh \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]},$$

que é idêntico ao resultado (3.53).

3.5 Forma Alternativa para Solução de $T(x, t)$

Das equações (3.2) e (3.3) sabe-se que

$$K_1(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_1(s)} \Big|_{\bar{q}_2(s)=0},$$

$$K_2(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}_2(s)} \Big|_{\bar{q}_1(s)=0}.$$

e uma vez determinada as funções de transferência $K_{w1}(x, s)$ e $K_{w2}(x, s)$ ou $K_{d1}(x, s)$ e $K_{d2}(x, s)$, o cálculo da distribuição de temperatura transiente $T(x, t)$ pode ser feito de maneira simples. Utilizando a informação das funções de transferência e as formas transformadas dos fluxos de calor de excitação, $\bar{q}_1(s)$ e $\bar{q}_2(s)$, e aplicando-se a transformada inversa de *Laplace*, é feita a passagem do domínio s para o domínio temporal. Assim, utilizando a expressão (3.1), tem-se

$$T(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{T}(x, s) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ K_1(x, s) \bar{q}_1(s) \} + \mathcal{L}^{-1} \{ K_2(x, s) \bar{q}_2(s) \}, \quad (3.55)$$

onde, dependendo da forma das funções $K_1(x, s)$, $K_2(x, s)$, $\bar{q}_1(s)$ e $\bar{q}_2(s)$, pode-se aplicar o teorema da convolução, conforme definido na equação (3.6), para obtenção da solução do problema.

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo são apresentados resultados referentes às características de amplitude para o caso de um sólido semi-infinito e finito, considerando tanto a dinâmica de fluxo ondulatório quanto a dinâmica de fluxo difusivo, determinando a partir de qual patamar de frequência o modelo ondulatório torna-se mais adequado na modelagem do sistema avaliado. Em seguida é apresentada uma aplicação onde é determinado o perfil de temperatura para o caso de um sólido semi-infinito sujeito a uma condição de contorno particular, utilizando a função de transferência.

4.1 Caso de um Sólido Semi-Infinito

Serão apresentados resultados referentes às características de amplitude para o caso de um sólido semi-infinito, considerando a dinâmica de fluxo ondulatório e fluxo difusivo. As equações para cada caso são dadas, respectivamente, pelas expressões (2.25) e (2.51), as quais são repetidas aqui:

$$A_w(x, \omega) = \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x}{a} \omega \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\omega\tau) \right] \right\}$$

e

$$A_d(x, \omega) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right\}.$$

Porém antes, afim de uma análise qualitativa, será feita uma avaliação para os casos limites de $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$.

Caso Ondulatório:

Quando $\omega \rightarrow 0$, tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A_w(x, \omega) = \infty .$$

Quando $\omega \rightarrow \infty$, tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_w(x, \omega) = 0 .$$

Caso Difusivo:

Quando $\omega \rightarrow 0$, tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A_d(x, \omega) = \infty .$$

Quando $\omega \rightarrow \infty$, tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_d(x, \omega) = 0 .$$

Observa-se que ambas as equações que definem as características de amplitude são monotonicamente decrescentes em relação à ω , possuindo o mesmo comportamento nos casos limites avaliados.

Serão usados valores atípicos para o cálculo dos exemplos. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} K &= 145 \text{ [W m}^{-1} \text{ K}^{-1}] \\ \rho &= 2330 \text{ [kg m}^{-3}] \\ c &= 700 \text{ [J kg}^{-1} \text{ m}^{-3}] \\ \alpha &= 8.89 \times 10^{-5} \text{ [m}^2 \text{ s}^{-1}] \\ a &= 9.429 \times 10^3 \text{ [m s}^{-1}], \end{aligned}$$

onde K é a condutividade térmica, ρ é a densidade de massa, c é o calor específico, α é a difusividade térmica e a é a velocidade de propagação do calor no modelo ondulatório. O uso destes valores numéricos justifica-se pelo fato de serem os mes-

mos utilizados no trabalho de Golebiowski et al., 1993, onde todos os resultados, numéricos e gráficos, são derivados a partir destes dados.

Em condições normais os sólidos são caracterizados por um tempo de relaxação (τ) muito curto, entre 10^{-4} e 10^{-12} s [Weymann, 1967], assim o valor assumido nas simulações do caso semi-infinito será de $\tau = 10^{-12}$ s. Para os parâmetros assumidos acima, a faixa de baixa e média frequências para os casos ondulatório e difusivo, em três comprimentos de penetração, são praticamente idênticas, apresentando as mesmas propriedades, conforme observado através das figuras (4.1)-(4.4).

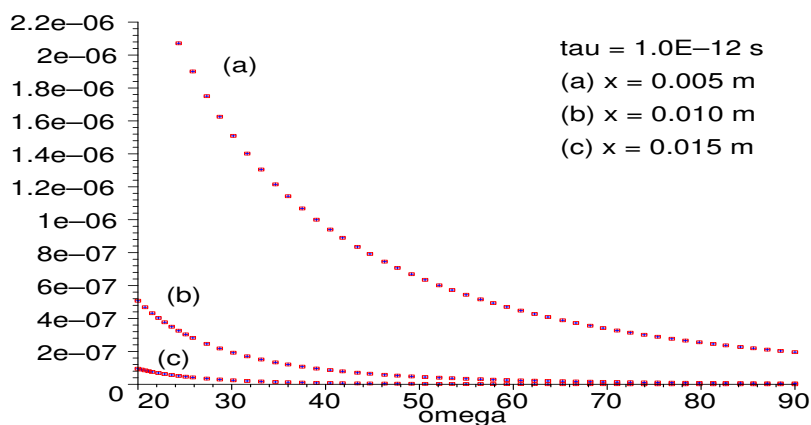


Figura 4.1 Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de baixa frequência de 20-90 rad/s, nos três comprimentos de penetração ($x = 0.005, 0.010$ e 0.015 m) e para os casos ondulatório (\square) e difusivo ($+$)

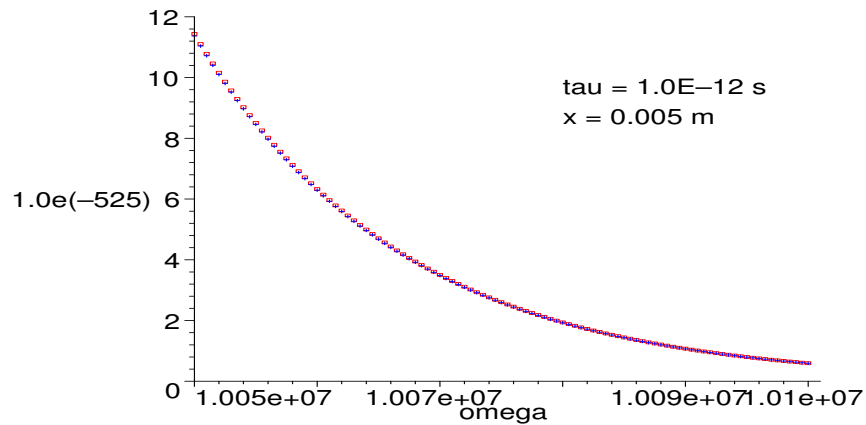


Figura 4.2 Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de média frequência 1.005×10^7 - 1.015×10^7 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.005$ m) e para os casos ondulatorio (\square) e difusivo (+)

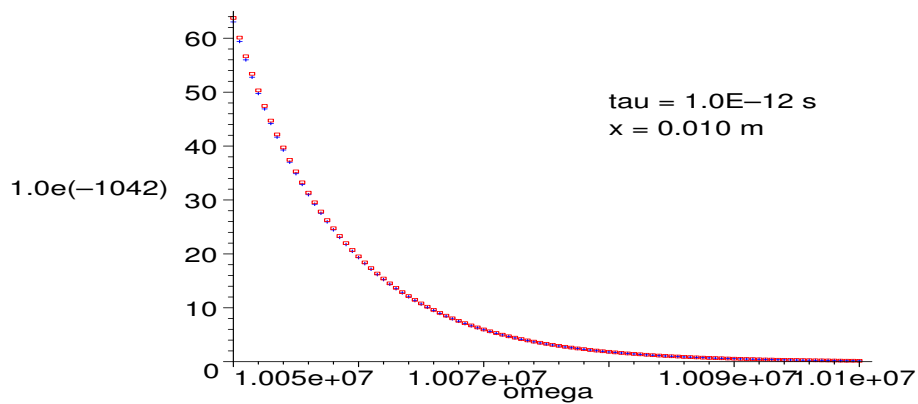


Figura 4.3 Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de média frequência 1.005×10^7 - 1.015×10^7 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.010$ m) e para os casos ondulatorio (\square) e difusivo (+)

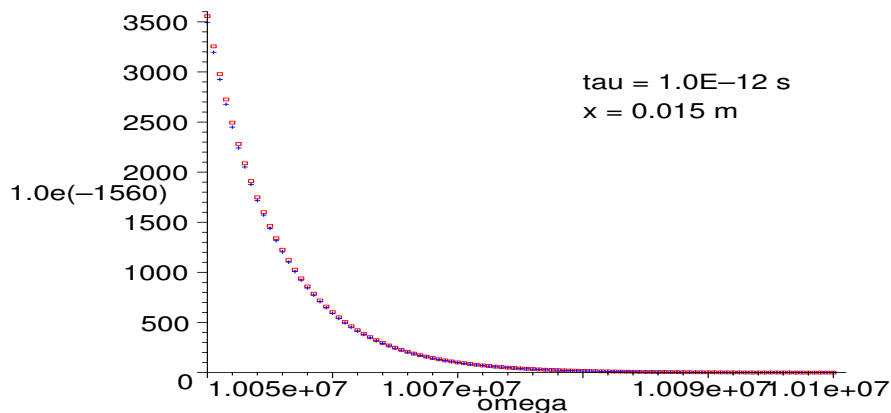


Figura 4.4 Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de média frequência 1.005×10^7 - 1.015×10^7 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.015$ m) e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)

Para os valores dos parâmetros assumidos anteriormente, o limite de pulsação é cerca de 10^8 rad/s. Isto é, acima deste valor as diferenças entre os valores das características de amplitude começam a aumentar significativamente, alcançando diferenças superiores a quatro vezes na faixa dos 63800 MHz, conforme a figura (4.5).

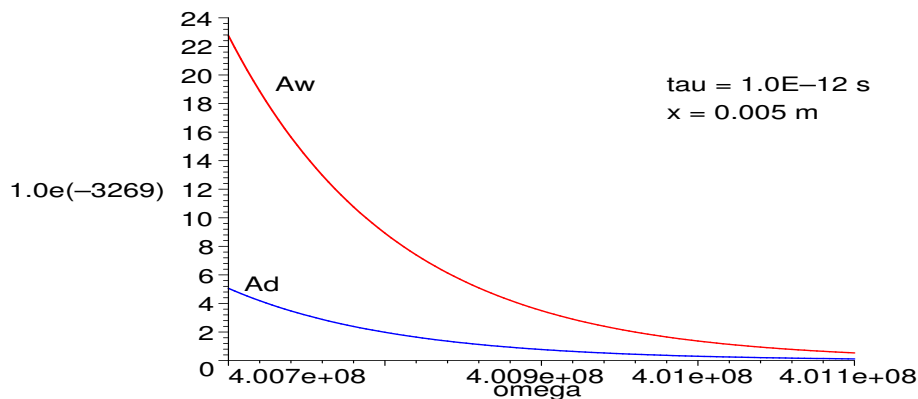


Figura 4.5 Características de amplitude para $\tau = 10^{-12}$ s, na faixa de alta frequência 4.007×10^8 - 4.011×10^8 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.005$ m) e para os casos ondulatório e difusivo

Um aumento no tempo de relaxação τ causa uma queda na velocidade do fluxo de calor ($a = \sqrt{\alpha/\tau}$), o que é equivalente ao comportamento apresentado na figura (4.6) no que se refere à grandeza amplitude. Isto é, para $\tau = 10^{-8}$ s por exemplo, o limite de pulsação das características de amplitude diminui cerca de 10^3 rad/s em relação ao caso de $\tau = 10^{-12}$ s, e as diferenças de amplitude já são observadas para valores na faixa dos 63600 KHz.

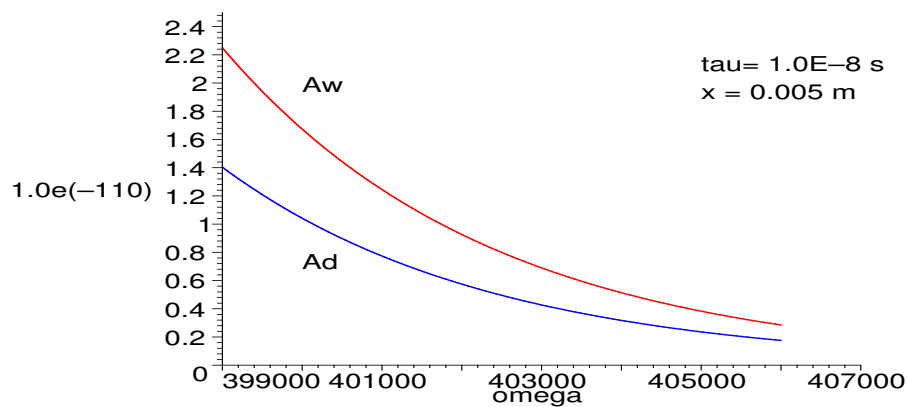


Figura 4.6 Características de amplitude para $\tau = 10^{-8}$ s, na faixa de média frequência 399×10^3 - 406×10^3 rad/s, no comprimento de penetração $x = 0.005$ m) e para os casos ondulatorio e difusivo

4.2 Caso de um Sólido Finito

Serão apresentados resultados referentes às características de amplitude, para ambas as faces do caso finito, considerando a dinâmica de fluxo ondulatório e fluxo difusivo. As equações para cada caso são dadas, respectivamente, pelas expressões (3.43), (3.46), (3.49) e (3.53), definidas anteriormente, as quais são repetidas aqui:

$$A_{w1}(X, \beta) = \sqrt[4]{b^2 + \frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left\{ (1-X) \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}{\sinh \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}},$$

$$A_{w2}(X, \beta) = \sqrt[4]{b^2 + \frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left\{ X \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}}{\sinh \left\{ \sqrt{\beta} \sqrt[4]{1 + (\beta b)^2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan(\beta b) \right] \right\}},$$

e

$$A_{d1}(X, \beta) = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left[(1-X) \frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}{\sinh \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]},$$

$$A_{d2}(X, \beta) = \sqrt[4]{\frac{1}{\beta^2}} \frac{\cosh \left[X \frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}{\sinh \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{2} \right]}.$$

Como no caso semi-infinito, agora também é possível efetuar-se uma análise qualitativa do comportamento das funções de amplitude para os casos limites de $\beta \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow \infty$. Com relação aos resultados apresentados na seção anterior, todas as funções apresentaram o mesmo comportamento nos casos limites avaliados, portanto também possuindo a propriedade de serem monotonicamente decrescentes em relação à β .

Mais uma vez serão empregados os valores atípicos anteriormente definidos e aplicados para o caso semi-infinito, com o acréscimo da dimensão da placa de $L = 0.01$ m. Além disso, para a análise do caso finito serão considerados apenas os posicionamentos adimensionais no centro da placa, $X = 0.5$, e três quartos de placa, $X = 0.75$, em relação a cada uma das faces.

Em condições normais os sólidos são caracterizados por um tempo de relaxação (τ) muito curto, entre 10^{-4} e 10^{-12} s [Weymann, 1967], desta forma o valor assumido nas simulações será de $\tau = 10^{-10}$ s. Para os parâmetros assumidos, os resultados para a faixa de baixa e média frequências nos casos ondulatório e difusivo, para os dois posicionamentos considerados em relação a ambas as faces, são praticamente idênticos, apresentando as mesmas propriedades, conforme observado através das figuras (4.7)-(4.9).

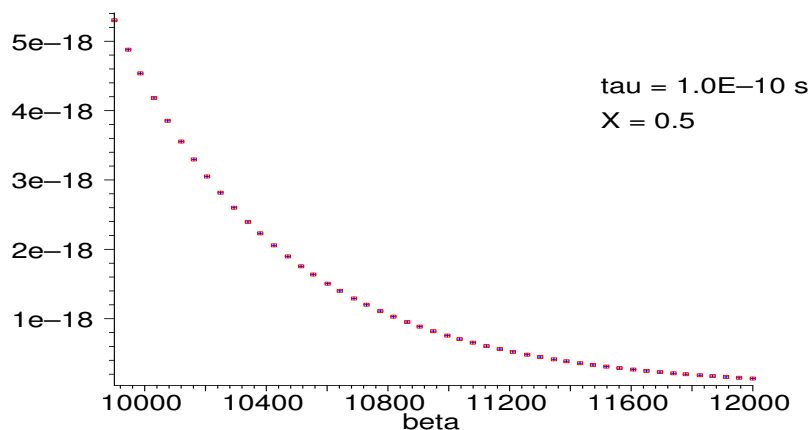


Figura 4.7 Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de baixa e média frequência de $10 \times 10^3 - 12 \times 10^3$ rad/s, na posição $X = 0.5$, em relação a ambas as faces, e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)

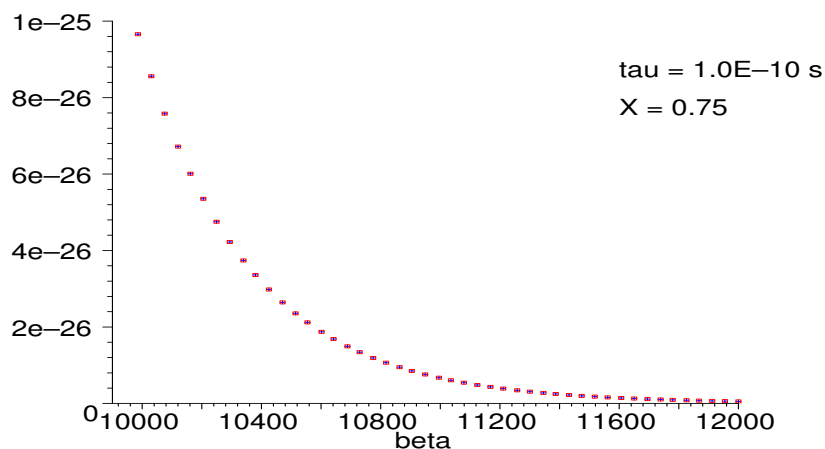


Figura 4.8 Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de baixa e média frequência de $10 \times 10^3 - 12 \times 10^3$ rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face esquerda, e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)

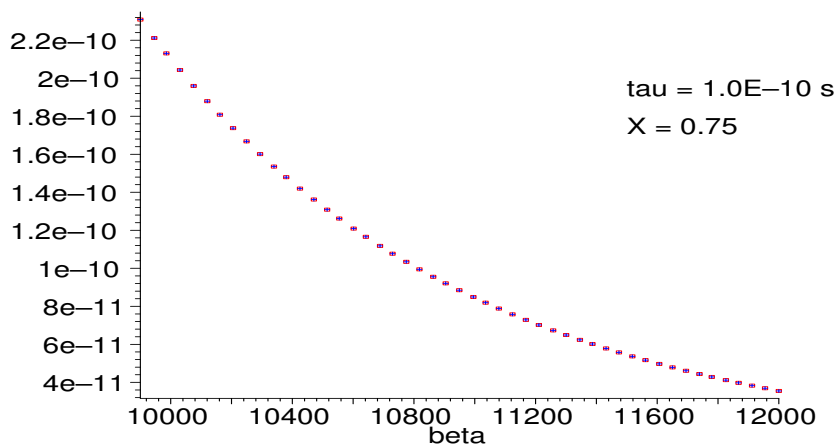


Figura 4.9 Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de média frequência de $10 \times 10^3 - 12 \times 10^3$ rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face direita, e para os casos ondulatório (\square) e difusivo (+)

O efeito da relaxação térmica é manifestado nas altas frequências, causando um aumento do campo de temperatura na placa. Desta forma, para sinais com rápida variação no tempo, os valores de amplitude do modelo ondulatório são maiores que os do modelo de difusão, conforme é observado através das figuras (4.10)-(4.12), para os dois posicionamentos considerados e em relação a ambas as faces.

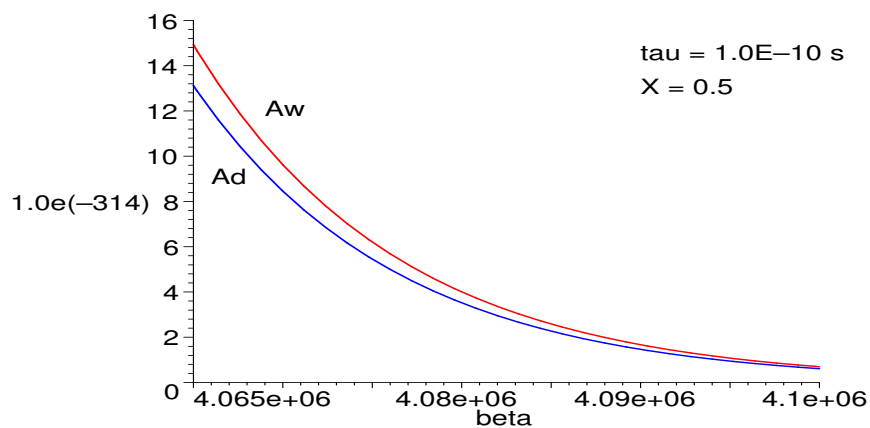


Figura 4.10 Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de alta frequência 4.065×10^6 - 4.1×10^6 rad/s, na posição $X = 0.5$, em relação a ambas as faces, e para os casos ondulatório e difusivo

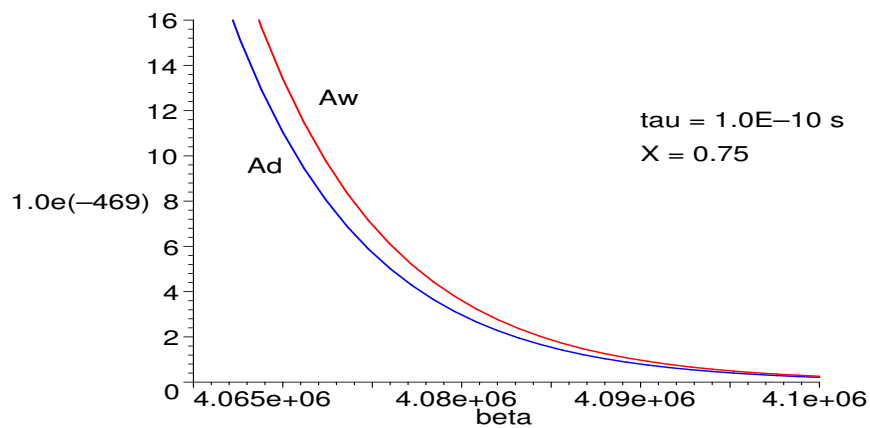


Figura 4.11 Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de alta frequência 4.065×10^6 - 4.1×10^6 rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face esquerda, e para os casos ondulatório e difusivo

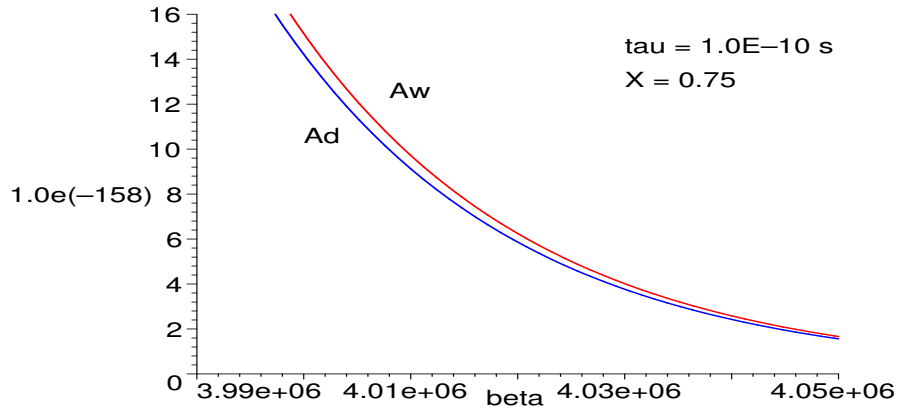


Figura 4.12 Características de amplitude para $\tau = 10^{-10}$ s, na faixa de alta frequência 4.065×10^6 - 4.1×10^6 rad/s, na posição $X = 0.75$, em relação à face direita, e para os casos ondulatório e difusivo

Através das figuras (4.7)-(4.12) observa-se que, dependendo da faixa de frequência, as características de amplitude para os casos ondulatório e difusivo são praticamente idênticas ou notadamente diferentes. Para melhor visualização desta diferença serão definidas expressões para as diferenças relativas entre as características de amplitude do caso hiperbólico (ondulatório) e parabólico (difusivo) de acordo com a face que está sendo considerada. Assim, para a face esquerda tem-se

$$\Delta A_1 = \frac{A_{w1} - A_{d1}}{A_{w1}}, \quad (4.1)$$

e para a face direita tem-se

$$\Delta A_2 = \frac{A_{w2} - A_{d2}}{A_{w2}}, \quad (4.2)$$

onde A_{w1} , A_{w2} , A_{d1} e A_{d2} são definidas pelas equações (3.43), (3.46), (3.49) e (3.53), respectivamente.

Os resultados gráficos são apresentados em termos da diferença percentual em função da frequência adimensional β , através da figura (4.13).

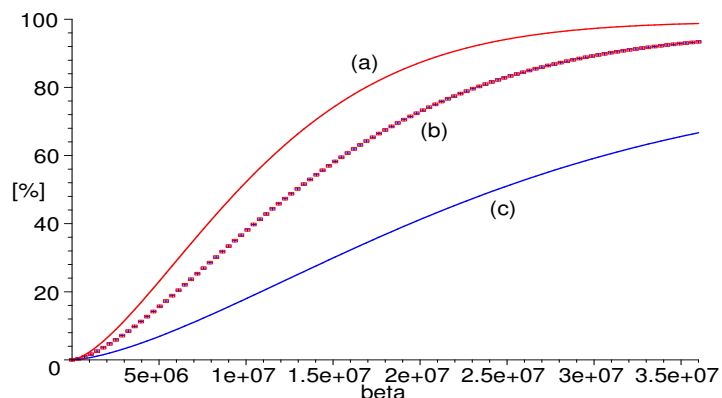


Figura 4.13 Diferenças relativas entre as características de amplitude dos casos ondulatório e difusivo e em ambas as faces: (a) ΔA_1 para $X = 0.75$, (b) $\Delta A_1 = \Delta A_2$ para $X = 0.5$ e (c) ΔA_2 para $X = 0.75$

Através da figura (4.13) observa-se que para X acima de 0.75 em relação à fronteira esquerda, e considerando valores da frequência adimensional abaixo de $\beta = 1.2 \times 10^6$ ($f = 170$ KHz), a diferença entre as amplitudes não é superior a 3%. Acima deste valor de frequência as diferenças começam a crescer rapidamente e, ainda para valores de X acima de 0.75 em relação à fronteira esquerda, a diferença entre as amplitudes alcança quase 100% para valores acima de $\beta = 36 \times 10^6$; isto é, $f = \omega/2\pi = \frac{\alpha\beta}{2\pi L^2} = 5.1 \times 10^7$ MHz.

Observa-se, através de alguns dos gráficos entre as figuras (4.1)-(4.12), que a magnitude dos valores apresentados no eixo das ordenadas destes respectivos gráficos é muito pequena. Como dito anteriormente, os valores numéricos utilizados nas simulações numéricas são valores atípicos; isto é, valores que não representam uma realidade física. Estes valores foram adotados por serem os mesmos empregados no trabalho de Golebiowski e Jordan, 1993, onde também são apresentados resultados com esta mesma característica, das magnitudes das características de amplitude serem muito pequenas. Com isso, pode-se afirmar que o objetivo maior destes gráficos está em mostrar o comportamento qualitativo entre os modelos hiperbólico e parabólico adotados, não sendo de extrema relevância a magnitude destes dados, uma vez que os parâmetros numéricos empregados foram valores atípicos.

5 APLICAÇÃO PARA MEIO SEMI-INFINITO

Considerando a análise do fenômeno térmico em mecanismos semicondutores, o formato triangular do fluxo de calor aplicado ao sólido semi-infinito é de grande significância [Golebiowski e Jordan, 1993]. A forma do fluxo de calor é apresentada na figura (5.1). Definindo $u(t)$ como a função de *Heaviside*, a fórmula analítica correspondente ao formato do fluxo de calor pode ser escrita como

$$q_0(t) = \frac{q_0}{t_0} t u(t) - 2\frac{q_0}{t_0} (t - t_0) u(t - t_0) + \frac{q_0}{t_0} (t - 2t_0) u(t - 2t_0). \quad (5.1)$$

Da expressão (2.1) tem-se

$$K_w(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{Q_0(s)} \Rightarrow \bar{T}(x, s) = Q_0(s) K_w(x, s), \quad (5.2)$$

e sabendo que $\mathcal{L}\{q_0(t), t \rightarrow s\} = Q_0(s)$, vem

$$Q_0(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{q_0}{t_0} t u(t) - 2\frac{q_0}{t_0} (t - t_0) u(t - t_0) + \frac{q_0}{t_0} (t - 2t_0) u(t - 2t_0) \right\}.$$

$q_0(t)$

q_0

$t_0 \quad 2t_0$

$\triangleright t$

Figura 5.1 Impulso triangular ideal do fluxo de calor

Então, aplicando-se a transformada de *Laplace* e empregando os resultados tabelados em [McCollum e Brown, 1965], vem

$$Q_0(s) = \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} - 2 \frac{q_0}{t_0} \frac{e^{-t_0s}}{s^2} + \frac{q_0}{t_0} \frac{e^{-2t_0s}}{s^2}, \quad (5.3)$$

e de (5.2) obtém-se

$$\bar{T}(x, s) = \left[\frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} - 2 \frac{q_0}{t_0} \frac{e^{-t_0s}}{s^2} + \frac{q_0}{t_0} \frac{e^{-2t_0s}}{s^2} \right] K_w(x, s),$$

ou

$$\bar{T}(x, s) = \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} K_w(x, s) [1 - 2e^{-t_0s} + e^{-2t_0s}]. \quad (5.4)$$

Agora, fazendo

$$F(x, s) = \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} K_w(x, s), \quad (5.5)$$

vem

$$\bar{T}(x, s) = F(x, s) - 2F(x, s) e^{-t_0s} + F(x, s) e^{-2t_0s}. \quad (5.6)$$

Sabendo que $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)$ e tomando a transformada inversa de *Laplace* da expressão (5.4), obtém-se

$$T(x, t) = f(x, t) - 2f(x, t - t_0) + f(x, t - 2t_0). \quad (5.7)$$

O objetivo agora está focado na obtenção de $f(x, t)$ através da transformada inversa de $F(x, s)$, definida por (5.5). Para isso a forma da Função de Transferência $K_w(x, s)$,

definida em (2.24), deve ser empregada. Assim

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} K_w(x, s) \right\}, \\
 f(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} \frac{\sqrt{\alpha\tau}}{K} \sqrt{\frac{s+1/\tau}{s}} \exp \left[-\frac{x}{a} \sqrt{s(s+1/\tau)} \right] \right\}, \\
 f(x, t) &= \frac{q_0}{t_0 K} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sqrt{\alpha\tau} \frac{(s+1/\tau)^{1/2}}{s^{5/2}} \exp \left\{ -\frac{x}{a} [s(s+1/\tau)]^{1/2} \right\} \right\}. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Para efetuar a transformada inversa, o termo em questão será modificado afim de facilitar o seu cálculo. Assim

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\alpha\tau} \frac{(s+1/\tau)^{1/2}}{s^{5/2}} \exp \left\{ -\frac{x}{a} [s(s+1/\tau)]^{1/2} \right\} &= \sqrt{\alpha\tau} \frac{(s+1/\tau)^{1/2}}{(s+1/\tau)^{1/2}} \cdot \frac{(s+1/\tau)^{1/2}}{s^{1/2} s^2} \exp \left\{ -\frac{x}{a} \left[s^2 + \frac{s}{\tau} \right]^{1/2} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sqrt{\alpha\tau} \frac{(s+1/\tau)^{1/2}}{(s+1/\tau)^{1/2}} \cdot \frac{(s+1/\tau)^{1/2}}{s^{1/2} s^2} \exp \left\{ -\frac{x}{a} \left[s^2 + \frac{s}{\tau} \right]^{1/2} \right\} &= \frac{\exp \left\{ -\frac{x}{a} \left[s^2 + \frac{s}{\tau} \right]^{1/2} \right\}}{\left(s^2 + \frac{s}{\tau} \right)^{1/2}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha\tau} (s+1/\tau)}{s^2},
 \end{aligned}$$

onde é possível identificar duas funções distintas:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\exp \left\{ -\frac{x}{a} \left[s^2 + \frac{s}{\tau} \right]^{1/2} \right\}}{\left(s^2 + \frac{s}{\tau} \right)^{1/2}}, \\
 H(s) &= \frac{\sqrt{\alpha\tau} (s+1/\tau)}{s^2},
 \end{aligned}$$

que têm suas formas modificadas tal que

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{\left(s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{1}{4\tau^2} \right) - \frac{1}{4\tau^2}} \right\}}{\sqrt{\left(s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{1}{4\tau^2} \right) - \frac{1}{4\tau^2}}}, \\
 H(s) &= \sqrt{\alpha\tau} \left[\frac{s}{s^2} + \frac{1}{s^2\tau} \right],
 \end{aligned}$$

ou

$$G(s) = \frac{\exp \left\{ -\frac{x}{a} \sqrt{\left(s + \frac{1}{2\tau}\right)^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \right\}}{\sqrt{\left(s + \frac{1}{2\tau}\right)^2 - \frac{1}{4\tau^2}}}, \quad (5.9)$$

$$H(s) = \sqrt{\alpha\tau} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau} \right].$$

Portanto, de (5.8) pode-se escrever

$$\frac{f(x, t)}{q_0/t_0 K} = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) H(s)\}. \quad (5.10)$$

Desta forma o cálculo da transformada inversa de *Laplace* fica facilitado uma vez que pode-se empregar o Teorema da Convolução [McCollum e Brown, 1965]. Assim

$$\frac{f(x, t)}{q_0/t_0 K} = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) H(s)\} = g * h = \int_0^t g(\xi) h(t - \xi) d\xi. \quad (5.11)$$

Para aplicação deste teorema é preciso entretanto que as funções $G(s)$ e $H(s)$ tenham suas transformadas inversas determinadas. Portanto, com uso dos resultados tabelados em [McCollum e Brown, 1965] vem

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \Rightarrow g(t) = u(t - x/a) e^{-\frac{t}{2\tau}} I_0 \left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right), \quad (5.12)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \Rightarrow h(t) = \sqrt{\alpha\tau} + \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} t,$$

onde I_0 é a função de *Bessel* modificada do primeiro tipo.

Agora, inserindo os resultados de (5.12) na expressão definida em (5.11), obtém-se:

$$\frac{f(x, t)}{q_0/t_0 K} = \int_0^t u(t - x/a) e^{-\frac{\xi}{2\tau}} I_0 \left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{\xi^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \cdot \left[\sqrt{\alpha\tau} + \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} (t - \xi) \right] d\xi, \quad (5.13)$$

ou

$$f(x, t) = \frac{q_0}{t_0 K} u(t - x/a) \left[(\sqrt{\alpha\tau} + at) \int_{x/a}^t e^{-\frac{\xi}{2\tau}} I_0 \left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{\xi^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) d\xi + \right. \\ \left. - a \int_{x/a}^t \xi e^{-\frac{\xi}{2\tau}} I_0 \left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{\xi^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) d\xi \right]. \quad (5.14)$$

Desta forma, uma vez definida a função $f(x, t)$ e utilizando a expressão (5.7), a determinação da distribuição de temperatura $T(x, t)$, para o caso ondulatório, torna-se imediata.

Para análise do caso difusivo também será considerado o formato triangular do fluxo de calor aplicado ao sólido semi-infinito. Assim, a fórmula analítica correspondente ao formato do fluxo de calor é escrita da mesma maneira que aquela apresentada em (5.1). Assim,

$$q_0(t) = \frac{q_0}{t_0} t u(t) - 2 \frac{q_0}{t_0} (t - t_0) u(t - t_0) + \frac{q_0}{t_0} (t - 2t_0) u(t - 2t_0),$$

e com a aplicação da transformada de *Laplace* obtém-se resultado idêntico ao anterior:

$$Q_0(s) = \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} - 2 \frac{q_0}{t_0} \frac{e^{-t_0 s}}{s^2} + \frac{q_0}{t_0} \frac{e^{-2t_0 s}}{s^2}.$$

De (2.1) tem-se

$$K_d(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{Q_0(s)} \Rightarrow \bar{T}(x, s) = Q_0(s) K_d(x, s),$$

onde $K_d(x, s)$ é dado pela expressão (2.47)

$$K_d(x, s) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right\}.$$

Escrevendo a expressão para $\bar{T}(x, s)$, obtém-se

$$\bar{T}(x, s) = \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} K_d(x, s) [1 - 2e^{-t_0 s} + e^{-2t_0 s}]. \quad (5.15)$$

Agora, fazendo

$$\Psi(x, s) = \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} K_d(x, s), \quad (5.16)$$

vem

$$\bar{T}(x, s) = \Psi(x, s) - 2\Psi(x, s) e^{-t_0 s} + \Psi(x, s) e^{-2t_0 s}. \quad (5.17)$$

Tomando a transformada inversa de *Laplace* da expressão (5.15), obtém-se

$$T(x, t) = \psi(x, t) - 2\psi(x, t - t_0) + \psi(x, t - 2t_0). \quad (5.18)$$

Para obter-se $\psi(x, t)$ será aplicada a transformada inversa de *Laplace* em $\Psi(x, s)$ definida por (5.16). Substituindo a forma da Função de Transferência $K_d(x, s)$, tem-se

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} K_d(x, s) \right\}, \\ \psi(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{q_0}{t_0} \frac{1}{s^2} \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \exp \left[-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right] \right\}, \\ \psi(x, t) &= \frac{q_0 \sqrt{\alpha}}{t_0 K} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{\exp \left[-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right]}{\sqrt{s}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Considerando a expressão a ser invertida, observa-se que é possível identificar duas funções distintas:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (5.20)$$

$$H(s) = s^{-1/2} \exp \left[-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right].$$

Portanto, de (5.19) pode-se escrever

$$\frac{\psi(x, t)}{q_0/t_0 K} = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) H(s)\}. \quad (5.21)$$

Desta forma o cálculo da transformada inversa de *Laplace* fica facilitado uma vez que, como anteriormente, pode-se empregar o Teorema da Convolução [McCollum e Brown, 1965]. Assim

$$\frac{\psi(x, t)}{q_0/t_0 K} = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) H(s)\} = g * h = \int_0^t g(t - \xi) h(\xi) d\xi. \quad (5.22)$$

Para aplicação deste teorema é preciso, entretanto, que as funções $G(s)$ e $H(s)$ tenham suas transformadas inversas determinadas. Portanto, com uso dos resultados tabelados em [McCollum e Brown, 1965] vem

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \Rightarrow g(t) = t, \quad (5.23)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\alpha t} \right\}.$$

Agora, inserindo os resultados de (5.23) na expressão definida em (5.22), obtém-se:

$$\frac{\psi(x, t)}{q_0/t_0 K} = \int_0^t (t - \xi) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\alpha \xi} \right\} d\xi, \quad (5.24)$$

ou

$$\psi(x, t) = \frac{q_0}{t_0 K} t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\alpha \xi} \right\} d\xi - \frac{q_0}{t_0 K} \int_0^t \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4\alpha \xi} \right\} d\xi. \quad (5.25)$$

Desta forma, uma vez definida a função $\psi(x, t)$ e utilizando a expressão (5.18), a determinação da distribuição de temperatura $T(x, t)$, para o caso difusivo, torna-se imediata.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi abordada a determinação da distribuição de temperatura transiente, através do uso da função de transferência, considerando tanto uma abordagem difusiva quanto ondulatória da propagação do calor, e também considerando um sólido semi-infinito e finito. Cabe salientar que primeiramente a grandeza determinada com uso da função de transferência foi a distribuição de temperatura transformada, e em seguida é então obtida a forma do perfil de temperatura no domínio tempo, para uma forma específica do fluxo de calor de excitação.

Uma vez definida a função de transferência do sistema, foram calculadas expressões para as características de amplitude, considerando tanto o modelo ondulatório quanto o difusivo, mostrando-se este último como um caso especial do primeiro. Através das amplitudes características foi possível determinar as propriedades dinâmicas dos casos modelados, no domínio freqüência, sendo identificada uma freqüência limite, acima da qual as diferenças da transmissão do calor, entre os modelos parabólico (difusivo) e hiperbólico (ondulatório), tornam-se cada vez maiores. Isto demonstra a necessidade que existe em fazer-se uma escolha adequada do modelo matemático que irá descrever a propagação do calor no problema que está sendo abordado.

No caso do sólido semi-infinito o modelo de propagação do calor ondulatório é caracterizado pelo tempo $t \in (0, x/a)$ quando então a frente da onda térmica alcançará a distância de penetração x no tempo x/a . Já no caso do modelo de propagação do calor difusivo, observa-se que qualquer excitação causa uma perturbação de temperatura imediata em qualquer posição x . Com relação aos valores de amplitude é observado que, utilizando-se o modelo de difusão, eles são consideravelmente menores comparados com os do modelo ondulatório, conforme demonstrado pelas figuras (4.5) e (4.6), o que leva à determinação de uma freqüência limite que é função do tempo de relaxação τ . Observou-se que um aumento no tempo de

relaxação acarreta uma queda na velocidade do fluxo de calor e conseqüentemente o valor da freqüência limite é menor.

Para o caso do sólido finito, comparando as expressões das características de amplitude dos modelos ondulatório e difusivo, equação (3.28) com (3.38) e (3.29) com (3.39), para as faces esquerda e direita respectivamente, observa-se que as expressões que antecedem o termo de fração, e também os argumentos das funções hiperbólicas, diferem de um fator $\sqrt{1 + \tau s} \Big|_{s=i\omega} = \sqrt{1 + i\omega\tau}$. Portanto, é este o termo que causa o aparecimento, no modelo hiperbólico, atraso do movimento ondulatório e reflexões das ondas térmicas. O mesmo comportamento é observado no caso de um sólido semi-infinito, através da comparação da expressão (2.24) com (2.47), exceto o fato de existirem reflexões de ondas térmicas, isto por que há apenas uma extremidade finita.

Com relação às características de amplitude, para o caso de um sólido finito, através das expressões das respectivas funções de transferência, equações (3.41), (3.44), (3.47) e (3.51), é observada uma interdependência das características em relação à posição adimensional X , ao tempo de relaxação adimensional b e à freqüência adimensional β . Assim como para o caso semi-infinito, o caso finito também apresenta um valor de freqüência limite, porém esta grandeza assume diferentes valores de acordo com a posição na placa que é considerada, conforme pode ser observado na figura (4.13).

Como trabalhos futuros, podem ser citados:

- aplicação de outras formas de fluxos seccionalmente lineares e de duração finita, assim como fluxos harmônicos;
- estender os resultados obtidos neste trabalho para uma forma mais geral do sinal de entrada, considerando a condição de contorno de terceiro tipo, permitindo assim a avaliação dos casos limites que recaem nas condições de primeiro e segundo tipo;

- previsão de transiente livre em termos da resposta permanente e com a presença de termo fonte;
- aproximação espacial do Laplaciano e estudo matricial direto, com equações de segunda ordem, pelo método espectral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bubnov, V.A., 1976. “Wave concepts in the theory of heat”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 19, pp. 175-184.

Cattaneo, C., 1948. “Sulla conduzione del calore”, **Atti del Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena**, vol. 3, n. 3.

Cattaneo, C., 1958. “Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée”, **Comptes Rendus de Seances de L'Academie des Sciences**, vol. 247, pp. 431-433.

Chester, M., 1963. “Second sound in solids”, **Physical Review**, vol. 131, n. 5, pp. 2013-2015.

Cho, C.J., Juhng, W.N., 2000. “Non-Fourier heat conduction in a slab subjected to periodic surface heating”, **Journal of the Korean Physical Society**, vol. 36, n. 4, pp. 209-214.

Frankel, J.I., Vick, B., Özisik, M.N., 1987. “General formulation and analysis of hyperbolic heat conduction in composite media”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 30, n. 7, pp. 1293-1304.

Gembarovic, J., Majernik, V., 1988. “Non-fourier propagation of heat pulses in finite medium”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 111, n. 5, pp. 1073-1080.

Glass, D.E., Özisik, M.N., Vick, B., 1987. “Non-fourier effects on transient temperature resulting from Periodic on-off Heat Flux”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 30, n. 8, pp. 1623-1631.

Golebiowski, J., Jordan, A.J., 1993. “Transfer function method for analysis of temperature field”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 36, n. 12, pp. 3099-3105.

Golebiowski, J., Skorek, A., Jordan, A.J., 1993. "Transmittances and frequency characteristics of wave and diffusion heat transfer in the flat slab", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 36, n. 6, pp. 1709-1713.

Greenstein, M., Tamor, M.A., Wolfe, J.P., 1982. "Propagation of laser-generated heat pulses in crystals at low temperature: Spatial filtering of ballistic phonos", **Physical Review B**, vol. 26, n. 10, pp. 5604-5610.

Guillemet, P., Bardon, J.P., Rauch, C., 1997. "Experimental route to heat conduction beyond the fourier equation", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 40, n. 17, pp. 4043-4053.

Herwig, H., Beckert, K., 2000. "Fourier versus non-Fourier heat conduction in materials with nonhomogeneous inner structure", **Journal of Heat Transfer**, vol. 122, n. 2, pp. 363-365.

Honner, M., 1999. "Heat waves simulation", **International Journal of Computers & Mathematics with Applications**, vol. 38, pp. 233-243.

Jiang, F.M., Liu, D.Y., 2001. "Hyperbolic heat conduction restricted by continuous boundary interface", **Progress in Natural Science**, vol. 11, n. 4, pp. 294-300.

Jiang, F.M., Liu, D.Y., Cai, R.X., 2001. "Theoretical analysis and experimental evidence of Non-Fourier heat conduction behavior", **Chinese Journal of Chemical Engineering**, vol. 9, n. 4, pp. 359-366.

Joseph, D.D., Preziosi, L., 1989. "Heat waves", **Reviews of Modern Physics**, vol. 61, n. 1, pp. 41-73.

Joseph, D.D., Preziosi, L., 1990. "Addendum to the paper "Heat waves" ", **Reviews of Modern Physics**, vol. 62, n. 2, pp. 375-391.

Kaminski, W., 1990. "Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure", **Journal of Heat Transfer**, vol. 112, pp. 555-560.

Lewandowska, M., 2001. "Hyperbolic heat conduction in the semi-infinite body with a time-dependent laser heat source", **Heat and Mass Transfer**, vol. 37, n. 4-5, pp. 333-342.

Luikov, A.V., Bubnov, V.A., Soloviev, I.A., 1976. "On wave solutions of the heat conduction equation", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 19, pp. 245-248.

Marciak-Kozłowska, J., Kozłowski, M., Mucha, Z., 2001. "Thermal waves in two-dimensional heterogeneous materials", **Lasers Engineering**, vol. 11, n. 3, pp. 189-194.

Maurer, M.J., 1969. "Relaxation model for heat conduction in metals", **Journal of Applied Physics**, vol. 40, n. 13, pp. 5123-5130.

Maxwell, J.C., 1867. "On the dynamic theory of gases". **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, vol. 157, pp. 49-88.

McCullum, P.A., Brown, B.F., 1965. "**Laplace Transform Tables and Theorems**", Holt, Rinehart and Winston, New York.

Morse, P.M., Feshbach, H., 1953. "**Methods of Theoretical Physics I**". Mc Graw-Hill, New York, pp. 865.

Ogata, K., 1993. "**Engenharia de Controle Moderno**". Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro.

Onsager, L., 1931. "Reciprocal relations in irreversible processes", **Physical Review**, vol. 37, pp. 405.

Özisik, M.N., Vick, B., 1984. "Propagation and reflection of thermal waves in a finite medium", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 27, n. 10, pp. 1845-1854.

Özisik, M.N., Tzou, D.Y., 1994. "On the wave theory in heat conduction", **Journal of Heat Transfer**, vol 116, pp. 526-535.

Peshkov, V., 1944. "Second sound in helium II", **Journal of Physics**, vol. 8, pp. 31.

Pulvirenti, B., Barletta, A., Zanchini, E., 1998. "Finite-difference solution of hyperbolic heat conduction with temperature-dependent properties", **Numerical Heat Transfer**, vol. 34, pp. 169-183.

Reis, M.C.L., Macedo, E.N., Quaresma, J.N.N., 2000. "Improved lumped-differential formulations in hyperbolic heat conduction", **International Communications in Heat and Mass Transfer**, vol. 27, n. 7, pp. 965-974.

Swenson, R.J., 1978. "Generalized heat conduction equation", **American Journal of Physics**, vol. 46, n. 1, pp. 76-77.

Tang, D.W., Araki, N., 1996. "Non-Fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 39, n. 8, pp. 1585-1590.

Tisza, L., 1938. "Sur la supraconductibilité thermique de l'hélium II liquide et la statistique de Bose-Einstein", **Comptes Rendus de Seances de L'Academie des Sciences**, vol. 207, n. 22, pp. 1035.

Vernotte, P., 1958. "La véritable équation de la chaleur", **Comptes Rendus de Seances de L'Academie des Sciences**, vol. 247, pp. 2103-2105.

Vick, B., Özisik, M.N., 1983. “Growth and decay of a thermal pulse predicted by the hyperbolic heat conduction equation”, **Journal of Heat Transfer**, vol. 105, pp. 902-907.

Weymann, H.D., 1967. “Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion, and viscous shear motion”, **American Journal of Physics**, vol. 35, pp. 488-496.

Wiggert, D.C., 1977. “Analysis of early-time transient heat conduction by method of characteristics”, **Journal of Heat Transfer**, vol. 99, pp. 35-40.

Yuen, W.W., Lee, S.C., 1989. “Non-Fourier heat conduction in a semi-infinite solid subjected to oscillatory surface thermal disturbances”, **Journal of Heat Transfer**, vol. 111, pp. 178-181.

Apêndice I TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA DE θ

Escrevendo θ como definido na seção (2.2.1), tem-se:

$$\theta = \arctan[-1/(\omega\tau)], \quad (\text{I.1})$$

pode-se mostrar que

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan(\omega\tau). \quad (\text{I.2})$$

Assim, considere-se

$$\tilde{\theta} = \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) + \arctan(\omega\tau),$$

onde ϵ é muito pequeno.

$$\tan \tilde{\theta} = \tan \left[\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) + \arctan(\omega\tau) \right],$$

$$\tan \tilde{\theta} = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) + \tan [\arctan(\omega\tau)]}{1 - \tan \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \cdot \tan [\arctan(\omega\tau)]}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\tan(\pi/2 + \epsilon)$, obtém-se:

$$\tan \tilde{\theta} = \frac{1 + (\omega\tau)/\tan \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)}{1/\tan \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) - (\omega\tau)}.$$

Agora, tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, tem-se:

$$\tan \theta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\tan \tilde{\theta} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1 + (\omega\tau)/\tan \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)}{1/\tan \left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) - (\omega\tau)} \right],$$

obtendo-se

$$\tan \theta = -1/(\omega\tau),$$

ou seja

$$\theta = \arctan[-1/(\omega\tau)].$$

Com isso mostra-se que a relação (I.2) é válida.