

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE POLUENTES NO CANAL DO
JACUÍ E NO RIO DOS SINOS**

por

Anelise Haag

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2003

SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE POLUENTES NO CANAL DO JACUÍ E NO RIO DOS SINOS

por

Anelise Haag

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Jorge Rodolfo Silva Zabadal

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Carlos Malamut (UFMG/MG)

Prof. Dr. Sérgio Wortmann (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono da Fonseca

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de Maio de 2003

A meus pais pelo carinho,
a minha irmã Aline
pelo apoio nas horas difíceis
e ao meu noivo Daniel
pela compreensão e paciência.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao amigo e professor orientador Jorge Rodolfo Zabadal pela oportunidade de realização deste trabalho e pela forma tranqüila e segura de sua orientação.

Aos colegas Gilberto Orenge de Oliveira, Daniel Fraga Sias, Richard Vasques e Michele Guimarães Salgueiro cujas amizades enriqueceram-me tanto na formação pessoal quanto acadêmica e aos demais colegas que de forma direta ou indireta contribuíram na execução deste trabalho.

Ao CNPQ pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.

Especialmente à generosidade de minha família cuja distância física não a impediu de estar sempre comigo.

5 de Agosto de 2003

RESUMO

SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE POLUENTES NO CANAL DO JACUÍ E NO RIO DOS SINOS

No trabalho proposto é apresentado um método analítico para a obtenção da solução da equação advectivo-difusiva que rege a propagação de poluentes em corpos hídricos. Este método utiliza transformações conformes para efetuar o mapeamento de um corpo hídrico com geometria arbitrária em um semi-plano, fornecendo uma solução em forma fechada expressa em termos da função corrente e do potencial velocidade.

ABSTRACT

In this work an analytical method for solving the advection-diffusion equation describing the propagation of pollutants in water bodies is proposed. The method employs conformal transformations in order to map water bodies with arbitrary contours into a half-plane region, providing a closed-form solution which is expressed as a function of the velocity potential and the streamfunction.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	DESCRIÇÃO DO MÉTODO	4
2.1	A Equação de Propagação de Poluentes em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	4
2.2	Resolvendo a Equação de Propagação de Poluentes em Coordenadas Curvilíneas	9
2.2.1	Aplicação das condições de contorno	12
2.2.2	Correção da Solução para Poluentes Não-conservativos	14
2.2.3	Determinação da Constante C_1	15
2.2.4	Cálculo da função corrente	16
3	RESULTADOS NUMÉRICOS	17
3.1	Simulações Efetuadas ao longo do Canal do Jacuí	18
3.1.1	Cálculo de concentrações de OD ao longo do Canal do Jacuí	20
3.1.2	Simulação da propagação de Cloreto Total ao longo do Canal do Jacuí	22
3.2	Simulações Efetuadas ao longo do Rio dos Sinos	24
3.2.1	Simulação da propagação de Fósforo ao longo do Rio dos Sinos	26
3.2.2	Simulação da propagação de Nitrogênio ao longo do Rio dos Sinos	27
3.2.3	Cálculo de concentrações de OD ao longo da região do Rio dos Sinos	28
3.2.4	Cálculo da DBO ao longo do Rio dos Sinos	29
3.2.5	Simulação da propagação de Fósforo ao longo da primeira seção do Rio dos Sinos	30
3.2.6	Simulação da propagação de Nitrogênio ao longo da primeira seção do Rio dos Sinos	31
3.2.7	Simulação da propagação de Fósforo e Nitrogênio ao longo da segunda seção do Rio dos Sinos	32

4 CONCLUSÕES	34
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	35
APÊNDICES	37
I Noções Básicas de Transformações Conformes	37
II Aplicação das Transformações Conformes	41
III Mapeamento da Equação de Laplace no plano	45
IV Tabelas de dados experimentais referentes ao Rio Jacuí.....	48
V Tabelas contendo valores médios das concentrações para o Rio dos Sinos	50
VI Áreas transversais das seções	52
VII Resultados referentes a simulações em cenários do Canal do Jacuí.....	53
VIII Resultados referentes a simulações em cenários do Rio dos Sinos.....	57

LISTA DE SÍMBOLOS

u	Componente de velocidade na direção Φ
μ, η, h	Variáveis auxiliares
$\mu_{xx}, \mu_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{yy}$	Derivadas parciais de segunda ordem de μ e η
\top	Período entre a emissão da carga e a chegada ao ponto (Φ, Ψ)
D	Coefficiente de difusão
k	Constante de decaimento
s, \bar{s}	Variável complexa
t	Tempo
u, v	Componentes de velocidades nas direções x e y respectivamente
U_∞	Velocidade do escoamento livre
V	Módulo do vetor velocidade
x, y, z	Coordenadas cartesianas longitudinal, transversal e azimutal
$\mu_t, \mu_x, \mu_y, \eta_t, \eta_x, \eta_y$	Derivadas parciais de primeira ordem de μ e η
∇	Operador diferencial nabla
Φ	Potencial velocidade
Ψ	Função corrente
Ψ'	Derivada de primeira ordem
Ψ_{livre}	Função corrente do escoamento livre
W	Variável Complexa

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1 – Mapa Contendo a Região das Bacias Hidrográficas do Guaíba e do Sinos [1]	17
Figura 3.2 – Localização geográfica da região simulada do Canal do Jacuí [1]	18
Figura 3.3 – Região simulada do Canal do Jacuí [2]	19
Figura 3.4 – Dados Experimentais x Valores Calculados para o perfil de OD no Canal do Jacuí: Vazão Baixa [2]	20
Figura 3.5 – Dados Experimentais x Valores Calculados para o perfil de OD no Canal do Jacuí: Vazão Alta [2]	21
Figura 3.6 – Dados Experimentais x Valores Calculados para o perfil de OD no Canal do Jacuí: Média Geral de Vazões [2]	22
Figura 3.7 – Dados Experimentais x Dados Calculados para o perfil de Cloretos Totais no Canal do Jacuí [2]	23
Figura 3.8 – Comparação entre a Região Simulada e o Ajuste das Paramétricas que Descrevem o Percurso	24
Figura 3.9 – Localização geográfica das seções transversais do modelo ao longo da região simulada da Bacia Hidrográfica do Rio dos Sinos [3]	25
Figura 3.10 – Dados Experimentais x Dados Calculados para a concentração de Fósforo ao longo da região simulada do Rio dos Sinos	26
Figura 3.11 – Dados Experimentais x Dados Calculados para a concentração de Nitrogênio ao longo da região simulada do Rio dos Sinos	27
Figura 3.12 – Dados Experimentais x Dados Calculados para o Oxigênio Dissolvido ao longo da região simulada do Rio dos Sinos	28
Figura 3.13 – Dados Experimentais x Dados Calculados para a Demanda Bioquímica de Oxigênio ao longo da região simulada do Rio dos Sinos	29

Figura 3.14 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Fósforo	30
Figura 3.15 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Nitrogênio	31
Figura 3.16 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Fósforo	32
Figura 3.17 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Nitrogênio	33
Figura I.1 – Transformação Conforme utilizando a função z^2 no domínio $-2 - i \dots 2 + i$	37
Figura I.2 – Transformação Conforme utilizando a função z^3 no domínio $-2\pi + 2\pi i \dots 2\pi + i\pi$	38
Figura I.3 – Transformação Conforme utilizando a função z^4 no domínio $-2 + 2i \dots 2 + 2i$	38
Figura I.4 – Transformação Conforme utilizando a função $1/z^2$ no domínio $-2\pi + 2i\pi \dots 2\pi + i\pi$	39
Figura I.5 – Transformação Conforme utilizando a função $z + 1/z$ no domínio $-2 - 2i \dots 2 + 2i$	39
Figura I.6 – Transformação Conforme utilizando a função $\ln(z)$ no domínio $-2\pi + 2i\pi \dots 2\pi + i\pi$	40
Figura I.7 – Transformação Conforme utilizando a função e^z no domínio $-2 + 2i \dots 2 + 2i$	40

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 – Tabela de perfis de velocidade à montante das seções (m/s)	24
Tabela IV.1 – Tabela referente aos dados experimentais de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí	48
Tabela IV.2 – Tabela referente aos dados experimentais de Concentrações de Cloreto (mg/L) no Canal do Jacuí.	49
Tabela V.1 – Vazão média considerada para a simulação da Faixa 1 ($14,43 m^3/s$)	50
Tabela V.2 – Faixa 2 - Vazão Média = $24,54 m^3/s$	50
Tabela V.3 – Faixa 3 - Vazão Média = $34,17 m^3/s$	51
Tabela V.4 – Faixa 4 - Vazão Média = $49,60 m^3/s$	51
Tabela V.5 – Faixa 5 - Vazão Média = $75,63 m^3/s$	51
Tabela V.6 – Faixa 6 - Vazão Média = $125,58 m^3/s$	51
Tabela VI.1 – Tabela referente as áreas transversais das seções do Rio dos Sinos	52
Tabela VII.1 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí	53
Tabela VII.2 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí	54
Tabela VII.3 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí	55
Tabela VII.4 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Concentrações de Cloreto Total(mg/L) no Canal do Jacuí	56
Tabela VIII.1 – Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: carga de Fósforo (mg/L)	57

Tabela VIII.2 –Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: carga de Nitrogênio (mg/L)	58
Tabela VIII.3 –Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: Oxigênio Dissolvido (mg/L)	59
Tabela VIII.4 –Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: DBO	60
Tabela VIII.5 –Tabela de resultados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: carga de Fósforo (mg/L) - Faixa 1 de Vazão	61
Tabela VIII.6 –Tabela de resultados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: carga de Nitrogênio (mg/L) - Faixa 3 de Vazão	62
Tabela VIII.7 –Tabela de resultados referente ao segundo cenário simulado no Rio dos Sinos: carga de Fósforo (mg/L) - Faixa 2 de Vazão	63
Tabela VIII.8 –Tabela de resultados referente ao segundo cenário simulado no Rio dos Sinos: carga de Nitrogênio - Faixa 2 de Vazão	64

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O impacto causado pelo homem nos ecossistemas aquáticos e terrestres, provocados por atividades como a agricultura, a mineração e a atividade industrial, vem aumentando a concentração de poluentes, a perda da biodiversidade e a fragmentação de habitats. Sedimentos minerais, resíduos químicos e material orgânico vêm contaminando progressivamente os cursos d'água, causando inúmeros prejuízos ao ambiente e aos seres vivos. A descarga de efluentes industriais e orgânicos atingiu um estágio tal que compromete muitos mananciais.

A progressiva contaminação das águas superficiais responsáveis pelo abastecimento das cidades mostra claramente a necessidade de investimentos em sistemas de monitoramento de qualidade da água, objetivando evitar uma escassez ainda maior para o consumo humano. As alterações mais intensas na qualidade das águas durante seu ciclo de utilização são originadas nas demandas de indústrias, nas demandas urbanas, assim como nas demandas agrícolas.

Os principais parâmetros utilizados para a análise do impacto ambiental causado pela emissão de efluentes industriais líquidos são a demanda química de oxigênio (DQO) e os cloretos totais. Também, o oxigênio dissolvido (OD) e a demanda bioquímica de oxigênio (DBO) estão ligados à manutenção das formas de vida aquática responsáveis pelo equilíbrio do sistema do manancial (em particular, responsáveis pela sobrevivência de animais e vegetais presentes na região). De forma similar, os coliformes totais são considerados os maiores indicadores de possibilidade de aparecimento de doenças cujo principal vetor transmissor é a água, ou seja, constituem indicadores de referência para a saúde pública. A quantificação das concentrações de Nitrogênio, Fósforo, Cromo, e outras substâncias, muitas vezes encontradas em excesso nos rios e lagos, torna-se necessária em vários casos.

Os problemas envolvendo a dispersão de poluentes em meio aquático podem ser

tratados matematicamente empregando-se modelos transientes ou estacionários. Os problemas em regime transiente são utilizados, em geral, na descrição de fenômenos envolvendo acidentes com cargas tóxicas no curso de corpos hídricos, e no estudo de fenômenos de dinâmica populacional de microorganismos. Para a solução deste tipo de problema, as cargas tóxicas são consideradas condições iniciais, não havendo fontes ou condições de contorno à montante relativas à emissão de qualquer espécie de poluente. Já os problemas estacionários de maior interesse se referem ao saneamento de redes de esgoto, e à análise do impacto ambiental associado à implantação de unidades industriais. Neste tipo de problema as cargas poluentes aparecem na equação da dispersão como termo de fonte ou como condições de contorno à montante.

Os métodos numéricos usualmente empregados na resolução de equações diferenciais parciais [4] (diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, ...) fornecem, geralmente, excelentes resultados para problemas de transporte advectivo-difusivo [5]. Porém, em geral, demandam, alto custo computacional devido à grande quantidade de memória e ao elevado tempo de processamento requerido. Simuladores que utilizam formulações explícitas em diferenças finitas [6], [7] tem boa velocidade de processamento e necessitam de quantidade de memória aceitável no tratamento de problemas em domínios retangulares. Domínios mais complexos requerem a geração de malhas com densidade variável [8]. Simuladores que utilizam formulações em elementos finitos possuem, em geral, geradores automáticos de malha, contornando satisfatoriamente o problema. Entretanto, para problemas bidimensionais produzem sistemas algébricos de ordem demasiadamente elevada [9].

Algumas soluções alternativas foram pesquisadas antes da obtenção da formulação [10], [11], [12], [13]. Soluções variacionais foram empregadas anteriormente na elaboração de um sistema de simulação da propagação de coliformes e oxigênio [14], produzindo resultados razoáveis e apresentando velocidade de processamento aceitável. Entretanto, a escolha das funções de base depende essencialmente da natureza dos cenários a simular. Até o presente momento não foi possível elaborar um processo sistemático de seleção ou construção dessas bases.

A formulação e o uso de métodos híbridos tem por objetivos gerar códigos computacionais com maior velocidade de processamento, minimizar a quantidade de memória requerida e facilitar a interpretação dos resultados obtidos. A propagação de poluentes

em rios é um problema típico de transporte advectivo-difusivo para o qual a utilização de métodos híbridos é particularmente vantajosa em relação aos sistemas numéricos convencionais. Os métodos híbridos podem fornecer soluções em forma fechada para a equação desde que o campo de velocidades do corpo hídrico em estudo seja previamente conhecido [15]. A alta velocidade de processamento dos sistemas baseados em métodos híbridos permite simular a dispersão de poluentes em tempo real, empregando microcomputadores de baixa performance [16]. O emprego de soluções aproximadas em forma analítica facilita a obtenção de estimativas de incerteza (margem de erro). Ocorre que os métodos analíticos não produzem erros de arredondamento elevados, uma vez que efetuam um número bastante reduzido de operações seqüenciais com ponto flutuante. Assim, as soluções obtidas podem ser diretamente substituídas nas equações que lhes deram origem, a fim de verificar sua validade.

Na maioria dos problemas práticos envolvendo a propagação de efluentes em corpos hídricos não há a necessidade de determinar, com alta exatidão, as concentrações dos poluentes. A importância primordial do emprego de sistemas de simulação consiste na determinação da área de influência do despejo, visando a prevenção dos danos causados nessas regiões. A área de influência, por sua vez, é delimitada pela isolinha de concentração correspondente ao limite inferior estabelecido pelo CONAMA - Conselho Nacional do Meio Ambiente.

Neste trabalho é apresentada uma solução em forma fechada para problemas advectivo-difusivos em regime permanente, nos quais a distribuição de velocidades do escoamento pode ser aproximada por um campo potencial. O trabalho é desenvolvido da seguinte forma: no capítulo 2 é descrita a obtenção de soluções para escoamentos potenciais estacionários bidimensionais em geometrias arbitrárias, utilizando transformações conformes [17], bem como a solução em forma fechada para a respectiva distribuição de concentrações, utilizando o campo potencial de escoamento obtido. No capítulo 3 são apresentados os resultados numéricos para as distribuições ao longo do Canal do Jacuí, assim como do Rio dos Sinos, que são comparados com dados experimentais e resultados obtidos através do emprego de métodos numéricos. Por fim, o capítulo 4 encerra, resumizando as conclusões e apresentando recomendações para futuros estudos.

CAPÍTULO 2

DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Este capítulo será dedicado a apresentação do método empregado na resolução de problemas advectivo-difusivos em regime estacionário.

A formulação será aplicada a problemas envolvendo transporte de efluentes líquidos em corpos hídricos.

2.1 A Equação de Propagação de Poluentes em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

A equação advectivo-difusiva bidimensional pode ser expressa na seguinte forma

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + kF = 0. \quad (2.1)$$

Onde,

F representa a concentração do poluente a ser determinada,

D é o coeficiente de difusão,

k é a constante de decaimento, e

u e v representam as componentes da velocidade nas direções x e y , respectivamente.

Tendo em vista a generalização da geometria é possível reescrever a equação em termos de variáveis independentes $\mu(x, y, t)$ e $\eta(x, y, t)$. Utilizando a regra da cadeia, seus termos reescritos tomam o seguinte formato:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mu_t \frac{dF}{d\mu} + \eta_t \frac{dF}{d\eta}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \mu_x \frac{dF}{d\mu} + \eta_x \frac{dF}{d\eta}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{dF}{d\mu} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dF}{d\eta}, \quad (2.2)$$

e, portanto

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \mu_{xx} \frac{dF}{d\mu} + \mu_x^2 \frac{d^2 F}{d\mu^2} + 2 \mu_x \eta_x \frac{d^2 F}{d\eta d\mu} + \eta_{xx} \frac{dF}{d\eta} + \eta_x^2 \frac{d^2 F}{d\eta^2}, \quad (2.3)$$

e,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \mu_{yy} \frac{dF}{d\mu} + \mu_y^2 \frac{d^2 F}{d\mu^2} + 2 \mu_y \eta_y \frac{d^2 F}{d\eta d\mu} + \eta_{yy} \frac{dF}{d\eta} + \eta_y^2 \frac{d^2 F}{d\eta^2}, \quad (2.4)$$

onde, foi utilizada a notação

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{\partial \mu}{\partial x}, & \mu_y &= \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\ \eta_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \eta_x &= \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \mu_{xx} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}, & \eta_{xx} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \eta_{yy} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, & \mu_{yy} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Substituindo as expressões (2.2-2.4) das derivadas parciais na equação (2.1) e agrupando os termos, a equação reescrita assume a forma

$$\begin{aligned}
& [\mu_t + u\mu_x + v\mu_y - D(\mu_{xx} + \mu_{yy})] \frac{\partial F}{\partial \mu} - D(\mu_x^2 + \mu_y^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \\
& + [\eta_t + u\eta_x + v\eta_y - D(\eta_{xx} + \eta_{yy})] \frac{\partial F}{\partial \eta} - D(\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \\
& - 2D(\mu_x\eta_x + \mu_y\eta_y) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial \eta} + kF = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

A partir dessa equação podem ser obtidas diversas soluções específicas, através da escolha de determinadas formas para a função incógnita e para as novas variáveis dependentes. Essa escolha pode ser baseada em informações previamente conhecidas sobre o cenário físico em estudo. Em primeiro lugar, os termos contendo derivadas mistas podem ser eliminados se as novas variáveis μ e η forem mutuamente ortogonais, o que significa que as isolinhas (curvas de nível) de μ e η formam trajetórias ortogonais entre si. O mapeamento conduz a um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais. Uma vez que os coeficientes das derivadas mistas são os produtos escalares entre seus gradientes, a escolha de novas coordenadas mutuamente ortogonais implica na seguinte restrição:

$$\mu_x\eta_x + \mu_y\eta_y = \nabla\mu \cdot \nabla\eta = 0. \tag{2.7}$$

Conseqüentemente, a equação (2.6) se reduz a

$$\begin{aligned}
& [\mu_t + u\mu_x + v\mu_y - D(\mu_{xx} + \mu_{yy})] \frac{\partial F}{\partial \mu} - D(\mu_x^2 + \mu_y^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \\
& + [\eta_t + u\eta_x + v\eta_y - D(\eta_{xx} + \eta_{yy})] \frac{\partial F}{\partial \eta} - D(\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + kF = 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Por outro lado, a própria equação (2.1), expressa em termos das variáveis originais, pode ser previamente decomposta em um sistema, visto que as componentes da velocidade (u e v) não dependem do tempo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} + kF &= 0 \\ u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} - D\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Quando as componentes da velocidade não dependem do tempo, os fenômenos de decaimento (degradação) e transporte de poluente podem ser considerados eventos independentes, de modo que a solução do problema pode ser expressa como um produto do tipo $f(x, y, t) = g(x, y)T(t)$. Uma vez que a forma da solução do problema de decaimento (parte temporal) é conhecida ($T(t) = \exp(-kt)$) a constante de separação resultante deve ser obrigatoriamente nula.

O sistema resultante possui diversas aplicações em Engenharia Ambiental, tais como o planejamento de redes de esgoto e a análise do impacto ambiental decorrente da implantação de unidades industriais junto às margens de rios e lagos. A solução da primeira equação do sistema (2.9) é imediata:

$$F = F_0(x, y)e^{-kt}.\tag{2.10}$$

A segunda equação do sistema pode também ser expressa em termos de novas variáveis independentes μ e η , que agora dependem apenas das variáveis espaciais. O mapeamento é análogo ao utilizado na obtenção da equação (2.6), resultando na eliminação dos termos transientes e de decaimento. Considerando μ e η como a função corrente e o potencial velocidade, respectivamente, a segunda equação do sistema (2.9) em termos das novas variáveis, resulta

$$\begin{aligned}\left[u\Psi_x + v\Psi_y - D(\Psi_{xx} + \Psi_{yy})\right]\frac{dF}{d\Psi} - D(\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\frac{d^2F}{d\Psi^2} \\ + \left[u\Phi_x + v\Phi_y - D(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})\right]\frac{dF}{d\Phi} - D(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)\frac{d^2F}{d\Phi^2} = 0,\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde Ψ representa a função corrente e Φ o potencial velocidade.

Lembrando que, $u = \partial\Psi/\partial y$, $-v = \partial\Psi/\partial x$, $u = \partial\Phi/\partial x$ e $v = \partial\Phi/\partial y$, temos

$$\begin{aligned} u\Psi_x + v\Psi_y &= 0, & u\Phi_x + v\Phi_y &= V^2, \\ \Psi_x^2 + \Psi_y^2 &= V^2, & \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 = V^2,$$

onde V é o módulo do vetor velocidade, a equação (2.11) se reduz a

$$D (\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) \frac{dF}{d\Psi} + V^2 \frac{dF}{d\Phi} - D V^2 \left(\frac{d^2 F}{d\Psi^2} + \frac{d^2 F}{d\Phi^2} \right) = 0. \quad (2.13)$$

No caso de escoamento potencial, a equação pode sofrer uma simplificação adicional, através da eliminação do laplaciano da função corrente. Dessa forma, a equação (2.13) resulta

$$\frac{1}{D} \frac{dF}{d\Phi} = \frac{d^2 F}{d\Psi^2} + \frac{d^2 F}{d\Phi^2}. \quad (2.14)$$

A hipótese de escoamento potencial constitui uma aproximação razoável para problemas de dispersão de poluentes em corpos hídricos, uma vez que a região de desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica é negligenciável em escala geográfica, sendo os vórtices nessa escala produzidos não por descolamento, mas por efeitos potenciais. A camada limite hidrodinâmica é a região na qual os efeitos viscosos predominam sobre os inerciais. Nessa região, próxima às interfaces sólidas, ocorre desaceleração (travamento) do fluxo principal, provocando o desenvolvimento de um perfil de velocidades, caracterizado por valores relativamente elevados de du/dy e dv/dx . Uma vez que a vorticidade é definida como $(dv/dx - du/dy)$, que também é igual a (- laplaciano da função corrente), a vorticidade é apreciável nessa região. Nos escoamentos em corpos hídricos, a região na qual o efeito

do travamento é significativo pode ser negligenciada, porque o fluxo principal passa a não sofrer desaceleração significativa já a poucos metros das margens. Em escala geográfica, essa região tem tamanho desprezível, de modo que a vorticidade pode ser tomada como aproximadamente nula em todo o domínio.

2.2 Resolvendo a Equação de Propagação de Poluentes em Coordenadas Curvilíneas

A equação (2.14) pode ser expressa em termos de uma nova variável h . Utilizando a regra da cadeia a fim de redefinir os operadores presentes na equação ($h = h(\Phi, \Psi)$) são obtidas expressões para as variáveis Φ e Ψ , de modo que a equação (2.14), reescrita em termos da nova variável h , resulta:

$$\frac{1}{D} h_{\Phi} \frac{dF}{dh} = h_{\Psi\Psi} \frac{dF}{dh} + h_{\Psi}^2 \frac{d^2 F}{dh^2} + h_{\Phi\Phi} \frac{dF}{dh} + h_{\Phi}^2 \frac{d^2 F}{dh^2}. \quad (2.15)$$

Visando reduzir esta equação diferencial parcial a uma equação diferencial ordinária será utilizada a seguinte definição para a nova variável independente:

$$h = e^{a_0\Phi + a_1\Psi}, \quad (2.16)$$

pois tal mudança de variáveis, obtida após uma série de tentativas, conduz a uma solução particular da equação diferencial em Φ e Ψ que satisfaz condições de contorno compatíveis com cenários fisicamente realistas em problemas de dispersão de poluentes.

A equação (2.14) pode ser reescrita em termos desta nova variável utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi} = a_0 h \frac{dF}{dh}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} = a_1 h \frac{dF}{dh}, \quad (2.18)$$

assim como os termos de segunda ordem podem ser expressos como segue

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Phi^2} = a_0^2 h \frac{dF}{dh} + a_0^2 h^2 \frac{d^2 F}{dh^2}, \quad (2.19)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi^2} = a_1^2 h \frac{dF}{dh} + a_1^2 h^2 \frac{d^2 F}{dh^2}. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.17 - 2.20) em (2.15), a equação da propagação é reescrita de forma

$$\left(\frac{a_0}{D}\right) \frac{dF}{dh} = (a_0^2 + a_1^2) \frac{dF}{dh} + (a_0^2 + a_1^2) h \frac{d^2 F}{dh^2}. \quad (2.21)$$

Reagrupando os termos, obtém-se

$$h \frac{d^2 F}{dh^2} = \left(\frac{a_0/D - (a_0^2 + a_1^2)}{a_0^2 + a_1^2}\right) \frac{dF}{dh}, \quad (2.22)$$

ou,

$$h \frac{d^2 F}{dh^2} = a_2 \frac{dF}{dh}, \quad (2.23)$$

onde

$$a_2 = \frac{a_0}{D(a_0^2 + a_1^2)} - 1. \quad (2.24)$$

Considerando $\theta = dF/dh$, a equação (2.23) é reescrita tornando-se uma equação a variáveis separáveis, resultando em

$$\ln(\theta) = a_2 \ln(h) + \ln(a_3), \quad (2.25)$$

onde $\ln(a_3)$ é uma constante arbitrária.

Exponenciando ambos os membros da equação, temos

$$\theta = a_3 h^{a_2} \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{dh} = a_3 h^{a_2}, \quad (2.26)$$

onde a_2 e a_3 são constantes arbitrárias.

Integrando ambos os membros de (2.26), obtém-se

$$F = \frac{a_3 h^{a_2+1}}{a_2 + 1} + a_4, \quad (2.27)$$

onde a_4 é a constante de integração. A solução da equação está expressa em termos da variável auxiliar. Agora, portanto, é necessário retornar às variáveis originais substituindo a expressão que define h em (2.27):

$$F = \frac{a_3 (e^{a_0\Phi + a_1\Psi})^{a_2+1}}{a_2 + 1} + a_4. \quad (2.28)$$

substituindo (2.24) em (2.28), resulta

$$F = \frac{a_3 D(a_0^2 + a_1^2)}{a_0} e^{\frac{a_0^2 \Phi + a_1 a_0 \Psi}{D(a_0^2 + a_1^2)}} + a_4. \quad (2.29)$$

Para determinar as constantes presentes em (2.29) é necessário aplicar as respectivas condições de contorno. Contudo, antes de iniciar a aplicação das condições de contorno é possível observar que a_4 deve ser nula, uma vez que, nos cenários a simular, todas as cargas dos poluentes são lançadas junto às margens, a concentração a distâncias elevadas do ponto de lançamento deve tender assintoticamente a zero.

2.2.1 Aplicação das condições de contorno

Após a eliminação da constante a_4 , a solução particular do problema de propagação de poluentes em corpos hídricos se reduz a

$$F = \frac{a_3 D(a_0^2 + a_1^2)}{a_0} e^{\frac{a_0^2 \Phi + a_1 a_0 \Psi}{D(a_0^2 + a_1^2)}}. \quad (2.30)$$

Para problemas unidimensionais é utilizado um perfil longitudinal de concentração de poluentes sobre uma linha de corrente ($\Psi = 0$) dado por

$$F(\Phi) = \frac{a_3 D(a_0^2 + a_1^2)}{a_0} e^{\frac{a_0^2 \Phi}{D(a_0^2 + a_1^2)}}. \quad (2.31)$$

A primeira condição de contorno prescreve a concentração do poluente medida no ponto de despejo, ou seja, $F(\Phi = 0) = C_0$. Tal condição de contorno quando aplicada na solução (2.31), resulta

$$C_0 = \frac{a_3 D(a_0^2 + a_1^2)}{a_0}. \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.31), obtém-se

$$F(\Phi) = C_0 e^{\frac{a_0^2 \Phi}{D(a_0^2 + a_1^2)}}. \quad (2.33)$$

A segunda condição de contorno utilizada para determinar a solução particular prescreve a derivada da concentração do poluente avaliada também em $\Phi = 0$. Assim, a segunda condição de contorno é dada por $\frac{\partial F}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=0} = C_1$. A derivada em relação a Φ , por sua vez, é estimada tomando a concentração em um ponto imediatamente à jusante da emissão da carga (ver seção 2.2.3).

Aplicando tal condição de contorno em (2.33) e isolando a constante a_1 , obtém-se:

$$a_1 = \pm a_0 \sqrt{\frac{C_0}{C_1 D} - 1}. \quad (2.34)$$

Substituindo a expressão em (2.33), a solução particular para uma linha de corrente é explicitamente determinada em função da concentração e da sua derivada junto ao ponto de emissão do despejo:

$$F(\Phi) = C_0 e^{\frac{C_1}{C_0} \Phi}. \quad (2.35)$$

A fim de determinar a solução particular válida para qualquer linha de corrente, as constantes a_1 e a_3 são substituídas em (2.30), de forma que

$$F(\Phi, \Psi) = C_0 e^{\frac{C_1}{C_0} \Phi + \left\{ \pm \frac{C_1}{C_0} \sqrt{\frac{C_0}{C_1 D} - 1} \right\} \Psi}. \quad (2.36)$$

Nesta equação o sinal correspondente à solução consistente com o cenário físico a simular é positivo, visto que:

- C_0 é a concentração no ponto de despejo do poluente, ou seja, C_0 tem sinal positivo;
- C_1 é a inclinação do perfil, logo C_1 tem sinal negativo; e

- a concentração deve decair de montante à jusante.

Portanto, a solução fisicamente consistente, resulta

$$F(\Phi, \Psi) = C_0 e^{\frac{c_1}{c_0} \Phi + \left\{ \frac{c_1}{c_0} \sqrt{\frac{c_0}{c_1 D} - 1} \right\} \Psi}. \quad (2.37)$$

Para problemas bidimensionais, a solução satisfaz automaticamente à seguinte condição de contorno de 3ª espécie. A obtenção de uma solução que satisfaz automaticamente uma condição de contorno de 3ª espécie visa contemplar o fenômeno denominado "splash", no qual o poluente, ao atingir a margem do corpo hídrico, passa a ser gradualmente acumulado nas suas vizinhanças. Junto à uma das margens:

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} - \kappa F = 0. \quad (2.38)$$

A aplicação dessa condição de contorno visa, portanto, apenas especificar o parâmetro κ .

Substituindo (2.37) na condição de contorno, obtém-se

$$\kappa = \frac{C_1}{C_0} \sqrt{\frac{C_1}{C_0 D} - 1}. \quad (2.39)$$

2.2.2 Correção da Solução para Poluentes Não-conservativos

A fim de levar em consideração a degradação dos poluentes ao longo do percurso, a solução é multiplicada por um termo de decaimento cuja cinética é considerada como sendo de primeira ordem:

$$F(\Phi, \Psi) = C_0 e^{-k\Upsilon} e^{\frac{c_1}{c_0} \Phi + \left\{ \frac{c_1}{c_0} \sqrt{\frac{c_0}{c_1 D} - 1} \right\} \Psi} \quad (2.40)$$

onde Υ é o período transcorrido entre a emissão da carga e a chegada ao ponto (Φ, Ψ) , definido como

$$\top = \int \frac{dx}{u} = \int \frac{d\Phi}{u^2}. \quad (2.41)$$

onde u representa a componente de velocidade na direção Φ . Para trechos de um corpo hídrico nos quais o valor de u pode ser tomado como constante, a solução pode ser expressa na forma

$$F(\Phi, \Psi) = C_0 e^{\frac{C_1}{C_0} \left\{ \left(1 - \frac{k}{u^2}\right) \Phi + \sqrt{\frac{C_0}{C_1 D} - 1} \Psi \right\}}. \quad (2.42)$$

Esta correção se deve ao fato da variável \top assumir o papel do tempo em uma descrição do fenômeno do ponto de vista de Lagrange. Uma vez que a solução foi obtida através do emprego de um modelo em regime estacionário, considera-se que o decaimento do poluente não se processa ao longo do tempo, mas sim, ao longo da cordenada Φ , variável que cresce de montante à jusante durante o percurso.

2.2.3 Determinação da Constante C_1

Uma vez que a solução unidimensional é expressa na forma

$$F = e^{a\Phi+b}, \quad (2.43)$$

as constantes a e b podem ser obtidas através das seguintes relações

$$a = \frac{\ln(F_1) - \ln(F_0)}{\Phi_1 - \Phi_0} \quad (2.44)$$

e

$$b = \ln(F_0) - a\Phi_0. \quad (2.45)$$

Nestas equações F_0 e F_1 representam, respectivamente, os valores de duas medidas experimentais de concentração, à montante do trecho que se quer simular. Ou seja, $F_0 = F(\Phi_0) = C_0$ e $F_1 = F(\Phi_1)$ devem ser conhecidas.

Através da comparação direta de (2.43) com a equação (2.35), obtém-se

$$a = \frac{C_1}{C_0} \quad \rightarrow \quad C_1 = aC_0. \quad (2.46)$$

2.2.4 Cálculo da função corrente

A função corrente para o escoamento potencial é calculada através do ajuste de uma função de variável complexa que efetua o mapeamento conforme [4] de retas horizontais em contornos irregulares que representam as margens do corpo hídrico considerado. O ajuste é efetuado em quatro etapas:

- 1) Ajuste das equações paramétricas dos contornos irregulares, produzindo $x(t)$ e $y(t)$;
- 2) Obtenção de $s(w) = x(\Phi + i\Psi) + iy(\Phi + i\Psi) = x(w) + iy(w) = g(w) = F^{-1}(s)$;
- 3) Inversão da função ajustada, resultando na obtenção de $F(s)$;
- 4) Obtenção da função corrente via composição de escoamentos

$$\Psi = \Psi_{livre} + Im(f(s)) \quad (2.47)$$

onde Ψ_{livre} representa a função corrente do escoamento livre - $\Psi_{livre} = U_\infty y$ - sendo U_∞ a velocidade correspondente.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS NUMÉRICOS

A fim de verificar a validade do método proposto foram efetuadas simulações para o Canal do Jacuí, assim como para seis cenários típicos de dispersão de poluentes ao longo do Rio dos Sinos. A localização geográfica das bacias hidrográficas que compreendem estes rios pode ser observada na figura 3.1 .

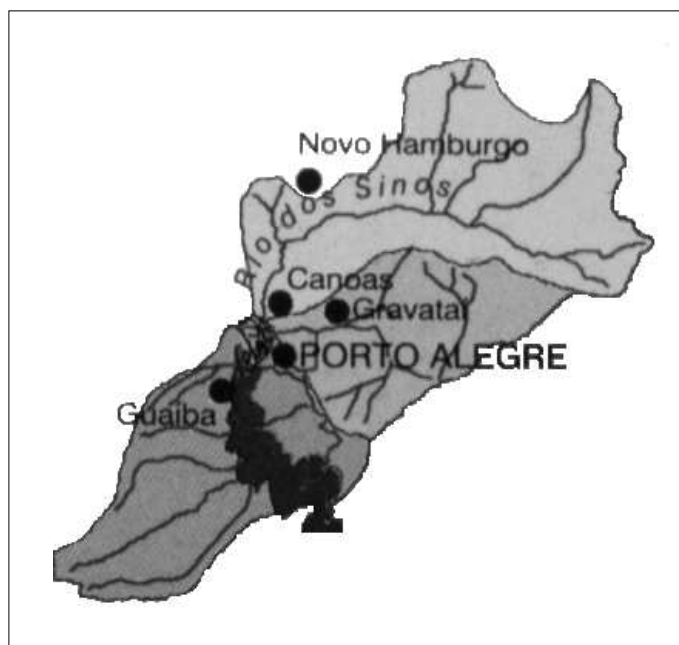


Figura 3.1 – Mapa Contendo a Região das Bacias Hidrográficas do Guaíba e do Sinos [1]

Os dados experimentais são comparados com resultados das simulações, a partir da análise do desvio percentual verificado entre o dado experimental e o respectivo valor estimado pela simulação, definido como

Visando facilitar a visualização do cenário simulado neste trabalho é acrescentado logo a seguir um mapa mostrando a região simulada do Canal do Jacuí contendo o ponto à montante da seção.

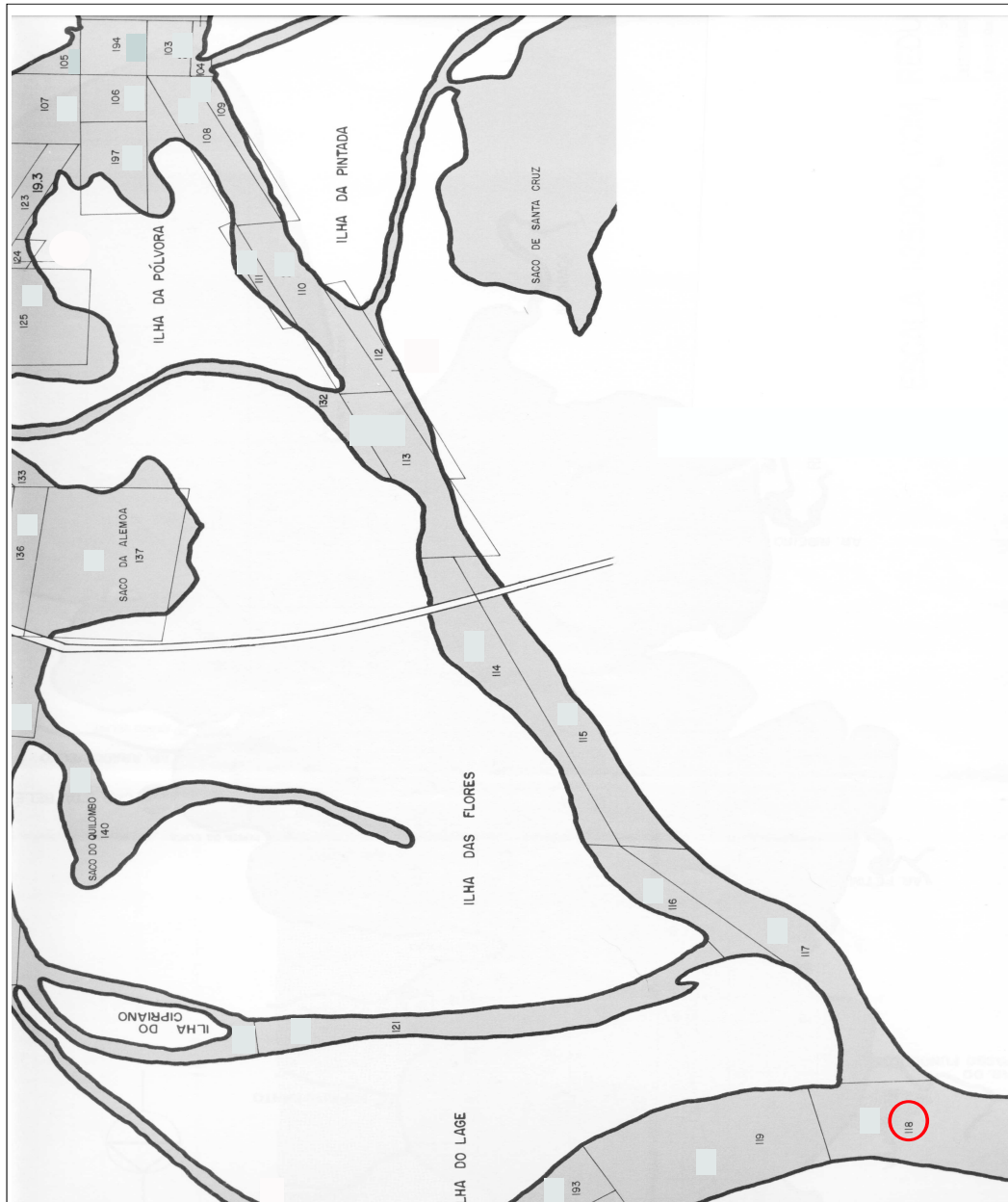


Figura 3.3 – Região simulada do Canal do Jacuí [2]

A velocidade média de escoamento no Canal do Jacuí é aproximadamente $0,3m/s$, com seu valor calculado baseado em medidas experimentais de vazão e área transversal do escoamento.

3.1.1 Cálculo de concentrações de OD ao longo do Canal do Jacuí

Primeiramente, foi simulada a propagação de oxigênio dissolvido para níveis de vazão baixa, cuja concentração no ponto de despejo (ver fig. 3.3) é de $7,2 \text{ mg/L}$ e cujo valor estimado da derivada local do perfil é de $-0,31 \text{ mg/Lm}$. Para tanto foi utilizada a equação (2.42), considerando $\Psi = -0,05$, $\Psi = 0$, $\Psi = 0,05$, onde os valores de $\Psi = -0,05$ e $\Psi = 0,05$ representam as margens do corpo hídrico e o valor $\Psi = 0$ a sua linha de centro. O coeficiente de difusão utilizado $D = D^* = 6,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ foi obtido através de ajustes de curvas nos quais foram utilizados dados experimentais referentes a cenários puramente difusivos. Para este cenário o valor de k utilizado foi de $0,05 \text{ s}^{-1}$.

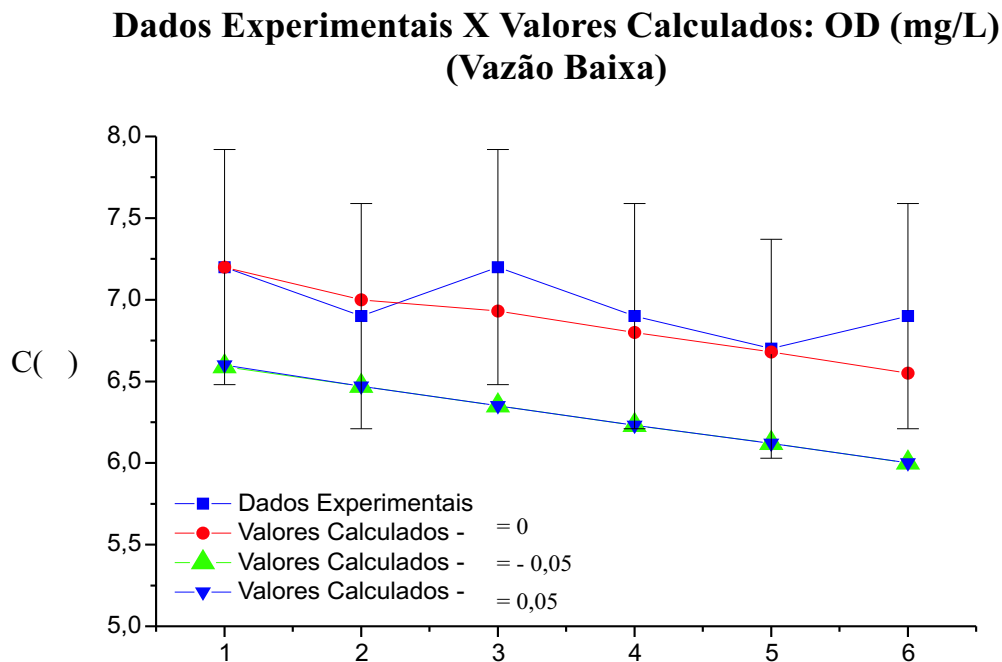


Figura 3.4 – Dados Experimentais x Valores Calculados para o perfil de OD no Canal do Jacuí: Vazão Baixa [2]

O desvio máximo observado para a propagação de oxigênio dissolvido para níveis de vazão baixa foi de, aproximadamente 4%. Os resultados tabelados referentes a esta simulação podem ser observados no Apêndice VII.

Além da simulação efetuada referente a cenários de vazão baixa no Canal do Jacuí, foram simuladas, também, a propagação de oxigênio dissolvido para cenários de vazão alta e para média geral de vazões, cujas concentrações no ponto de despejo são de $9,2 \text{ mg/L}$ e $8,2 \text{ mg/L}$, respectivamente, conforme pode ser observado no (Apêndice IV). Os valores estimados para as derivadas locais dos perfis são de $-0,15 \text{ mg/Lm}$ e $-0,10 \text{ mg/Lm}$ para níveis máximos de vazões e para média geral de vazões, respectivamente. Para tanto foi utilizada a equação (2.42) considerando $\Psi = -0,05$, $\Psi = 0$, $\Psi = 0,05$ e $D = D^* = 6,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ conforme observado anteriormente. Para tal cenário o valor de k utilizado foi de $0,05 \text{ s}^{-1}$.

Dados Experimentais X Valores Calculados: OD (mg/L) (Vazão Alta)

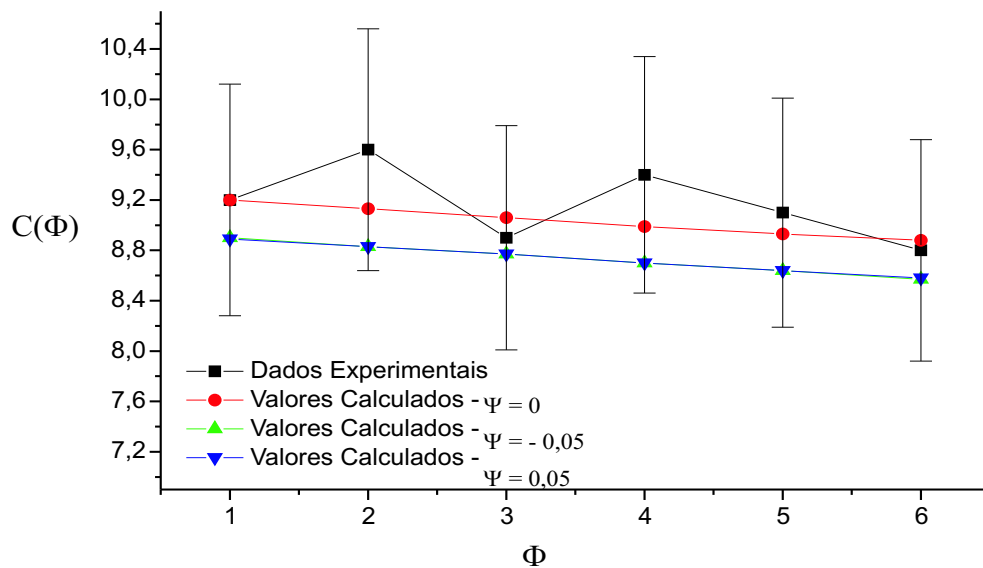


Figura 3.5 – Dados Experimentais x Valores Calculados para o perfil de OD no Canal do Jacuí: Vazão Alta [2]

O desvio máximo observado para a propagação de oxigênio dissolvido para níveis de vazão alta foi de, aproximadamente 5%. Para melhor visualização dos resultados é fornecida, no Apêndice VII a respectiva tabela de resultados.

Na simulação da propagação de Oxigênio para média Geral de Vazões foi utilizada a mesma constante de decaimento ($k = 0,05 \text{ s}^{-1}$). Assim,

Dados Experimentais X Valores Calculados: OD (mg/L)
Vazão = Média Geral

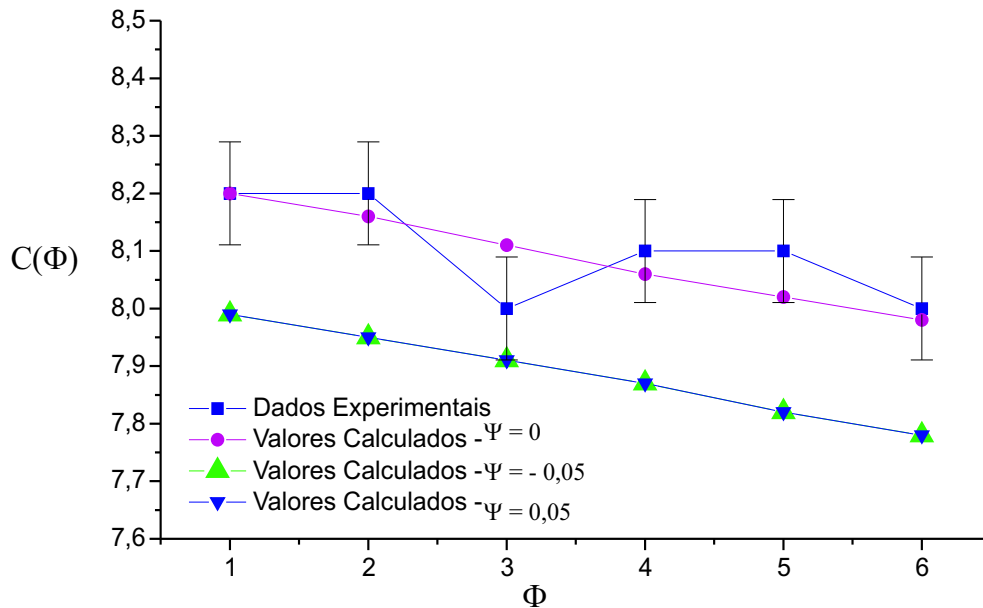


Figura 3.6 – Dados Experimentais x Valores Calculados para o perfil de OD no Canal do Jacuí: Média Geral de Vazões [2]

O desvio máximo observado para a propagação de oxigênio dissolvido para níveis médios de vazão foi de, aproximadamente 5,5 %. A tabela referente a esta simulação pode ser observada no Apêndice VII.

3.1.2 Simulação da propagação de Cloreto Total ao longo do Canal do Jacuí

Foi simulada a propagação de cloretos totais cuja concentração no ponto de despejo é de $3,1 \text{ mg/L}$ e cujo valor estimado da derivada local do perfil é de $-0,21 \text{ mg/Lm}$, utilizando-se a equação (2.42), como anteriormente. Os valores considerados para Ψ e D^* são mantidos. Para este cenário o valor de k utilizado foi de $0,04 \text{ s}^{-1}$. O desvio máximo observado entre os dados experimentais e os valores calculados foi de 9 %. A tabela contendo os resultados e o desvio percentual observado encontra-se no Apêndice VII. O gráfico comparativo pode ser observado logo a seguir

**Dados Experimentais X Valores Calculados:
Cloreto Total (mg/L)**

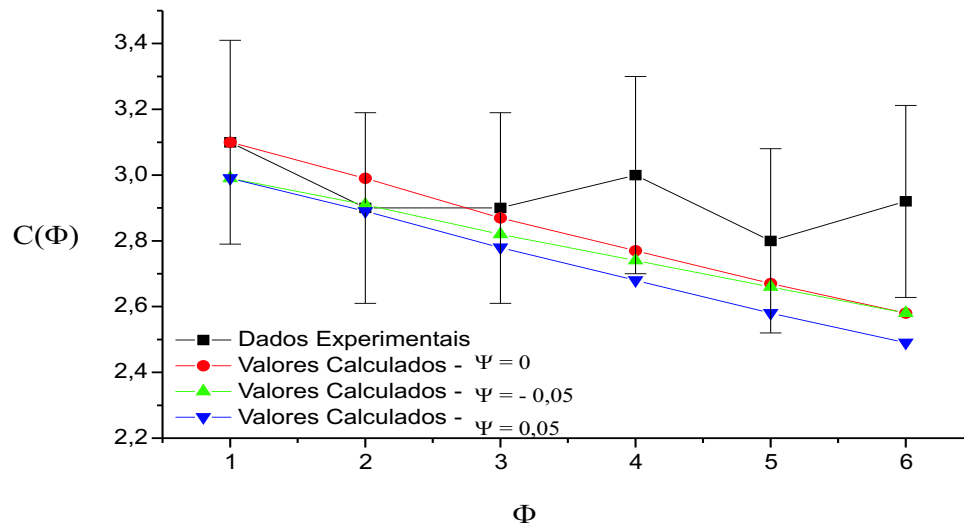


Figura 3.7 – Dados Experimentais x Dados Calculados para o perfil de Cloretos Totais no Canal do Jacuí [2]

3.2 Simulações Efetuadas ao longo do Rio dos Sinos

É importante salientar que, neste trabalho, a região do Rio dos Sinos simulada situa-se entre as cidades de Campo Bom (à montante) e a cidade de Canoas (à jusante). As tabelas contendo as relações gerais dos valores médios das concentrações (mg/L) para diferentes faixas de vazão (m^3/s), encontram-se discriminadas no Apêndice IV.

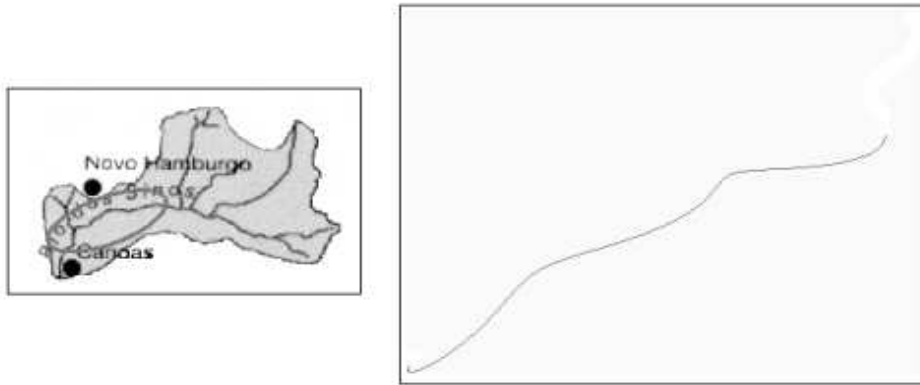


Figura 3.8 – Comparação entre a Região Simulada e o Ajuste das Paramétricas que Descrevem o Percorso

A tabela a seguir mostra os valores calculados para os perfis de velocidade à montante das seções baseados em medidas experimentais de nível e vazão para os trechos simulados.

Tabela 3.1 – Tabela de perfis de velocidade à montante das seções (m/s)

	Faixa 1	Faixa 2	Faixa 3	Faixa 4	Faixa 5	Faixa 6	Faixa 7
S01	0,0432	0,0736	0,1024	0,1487	0,2267	0,3764	0,6401
S04	0,1832	0,3102	0,4339	0,6298	0,96	1,5947	2,7119
S08	0,0325	0,0554	0,0771	0,1119	0,1706	0,2833	0,4817
S10	0,1471	0,2502	0,3483	0,5056	0,7709	1,28	2,1769
S17	0,0573	0,0974	0,1356	0,1968	0,3	0,4983	0,8475

As faixas numeradas de 1 a 7 na tabela referem-se as respectivas vazões médias: $14,43 m^3/s$, $24,54 m^3/s$, $34,17 m^3/s$, $49,60 m^3/s$, $75,63 m^3/s$, $125,58 m^3/s$ e $213,56 m^3/s$.

A tabela contendo as áreas das seções transversais utilizadas no cálculo das velocidades mencionadas acima encontra-se no Apêndice VI.

O mapa abaixo representa os cenários simulados (incluindo todos os pontos à montante de cada seção) referente a região simulada do Rio dos Sinos.

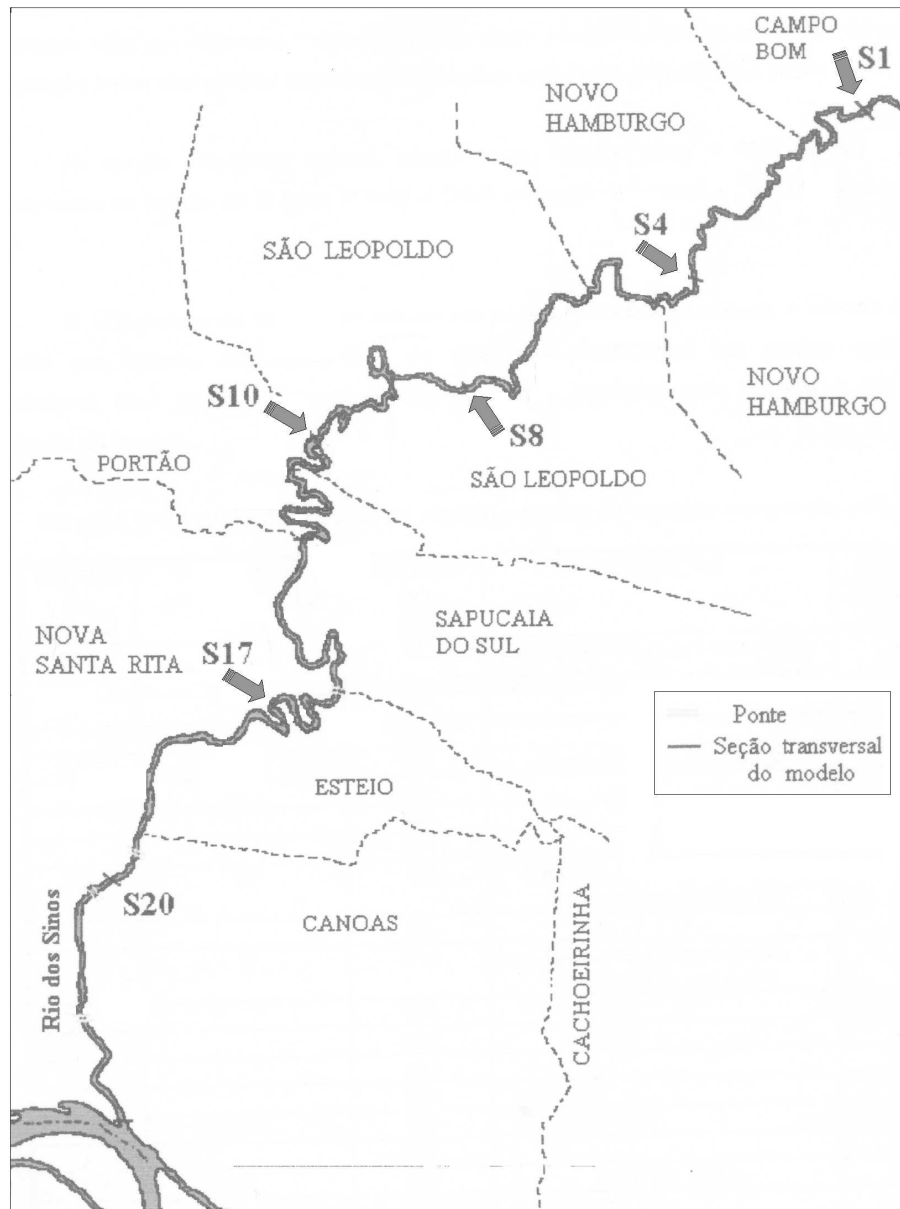


Figura 3.9 – Localização geográfica das seções transversais do modelo ao longo da região simulada da Bacia Hidrográfica do Rio dos Sinos [3]

3.2.1 Simulação da propagação de Fósforo ao longo do Rio dos Sinos

Primeiramente foi simulado o lançamento de uma carga de fósforo para as faixas de vazão 2, 3, 4 e 5 cujas concentrações no ponto de despejo (S1) variam conforme a faixa. A concentração no ponto de despejo é de $0,2 \text{ mg/L}$ para a segunda faixa de vazão e o valor estimado da derivada local do perfil é dado por $1,75 \times 10^{-2} \text{ mg/Lm}$. Para tanto foi utilizada a equação (2.42), considerando $\Psi = 0$, pois para problemas unidimensionais usa-se um perfil longitudinal ($\Psi = 0$) sobre uma linha de corrente. Já os valores de concentração no ponto de despejo para as faixas 3, 4 e 5 são dados por $0,16 \text{ mg/L}$, $0,22 \text{ mg/L}$ e $0,22 \text{ mg/L}$, respectivamente. Os valores calculados para a derivada de cada perfil são dados por: $1,69 \times 10^{-2} \text{ mg/Lm}$, $1,77 \times 10^{-2} \text{ mg/Lm}$ e $0,33 \times 10^{-2} \text{ mg/Lm}$. Assim, os valores obtidos para as concentrações podem ser observados no gráfico a seguir, ou, na tabela em anexo no Apêndice VIII.

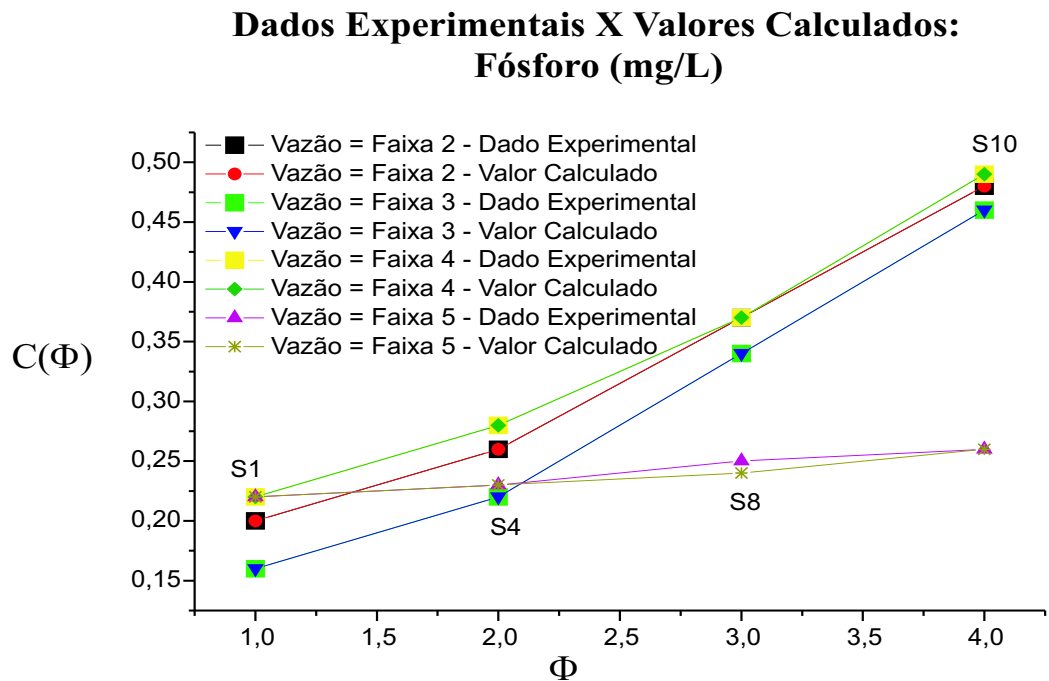


Figura 3.10 – Dados Experimentais x Dados Calculados para a concentração de Fósforo ao longo da região simulada do Rio dos Sinos

Observando os desvios percentuais entre os dados experimentais e os dados obtidos na simulação tem-se um desvio máximo de 4,5 %.

3.2.2 Simulação da propagação de Nitrogênio ao longo do Rio dos Sinos

De forma análoga foi simulado o lançamento de uma carga de nitrogênio para as faixas de vazão 2, 3, 5 e 6 cujas concentrações no ponto de despejo (S1 - ver fig. 3.9) podem ser observadas nas tabelas encontradas no Apêndice V.

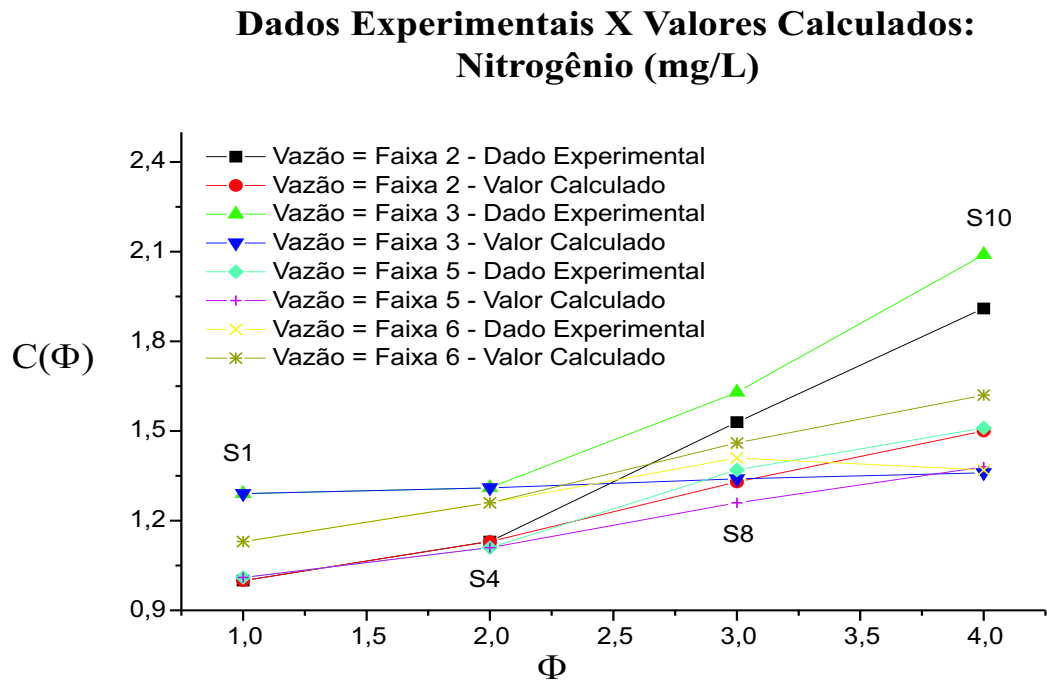


Figura 3.11 – Dados Experimentais x Dados Calculados para a concentração de Nitrogênio ao longo da região simulada do Rio dos Sinos

Para a propagação de Nitrogênio os desvios percentuais observados entre os dados experimentais e os dados obtidos na simulação retornaram um desvio máximo de 35 %.

3.2.3 Cálculo de concentrações de OD ao longo da região do Rio dos Sinos

Seguindo os mesmos passos também foram calculadas concentrações de oxigênio dissolvido (OD). Para este cenário o valor de k utilizado foi de $0,001 s^{-1}$. Os resultados da simulação foram comparados com dados experimentais conforme pode ser observado no gráfico que segue:

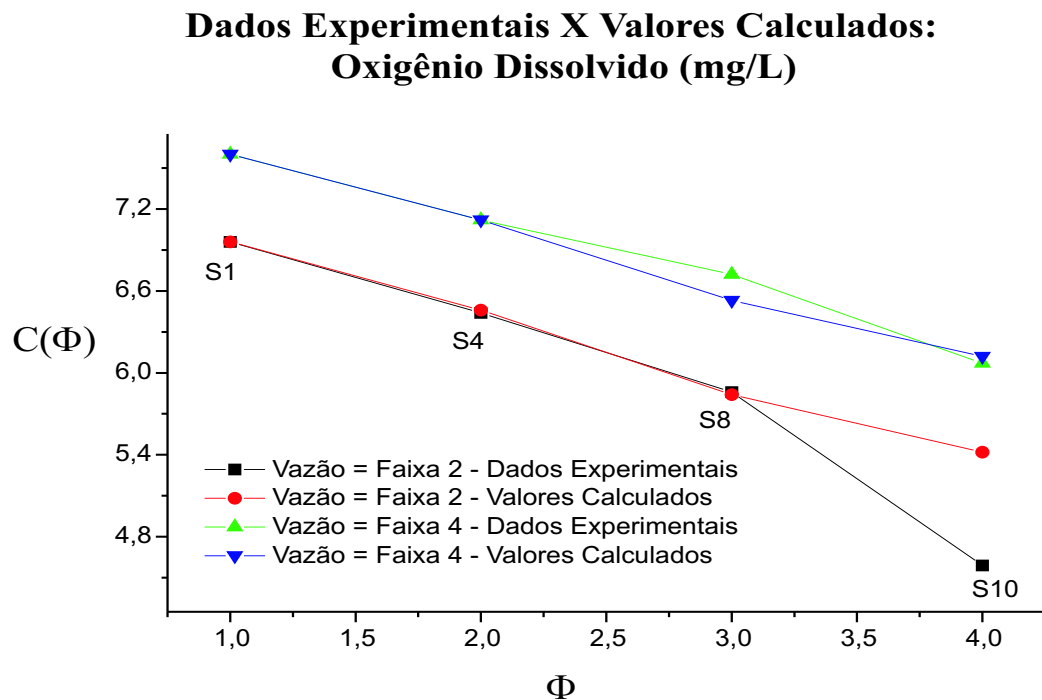


Figura 3.12 – Dados Experimentais x Dados Calculados para o Oxigênio Dissolvido ao longo da região simulada do Rio dos Sinos

O desvio máximo observado entre os dados foi de 19 %. De forma análoga às simulações anteriores os dados tabelados podem ser observados no Apêndice VIII.

3.2.4 Cálculo da DBO ao longo do Rio dos Sinos

O gráfico seguinte refere-se a simulação efetuada para as concentrações de DBO (Demanda Bioquímica de Oxigênio) cujos valores no ponto de despejo encontram-se nos apêndices conforme citado anteriormente. Para este cenário o valor de k utilizado foi de $0,266 \times 10^{-6} s^{-1}$.

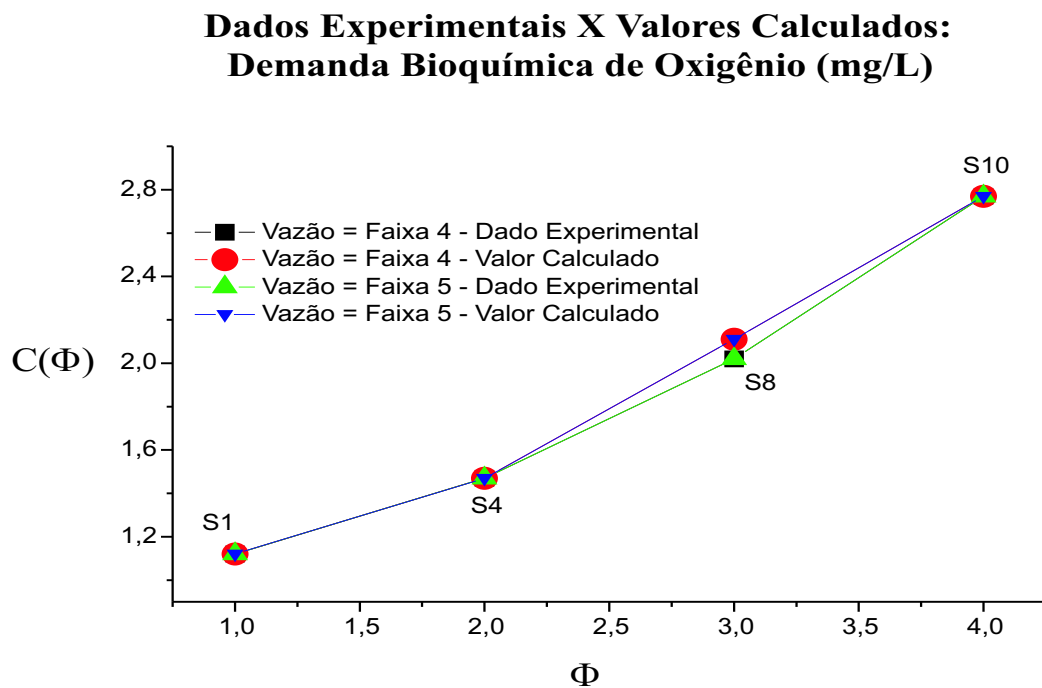


Figura 3.13 – Dados Experimentais x Dados Calculados para a Demanda Bioquímica de Oxigênio ao longo da região simulada do Rio dos Sinos

O desvio máximo observado entre as concentrações de DBO obtidas experimentalmente e as obtidas pelo uso do método proposto foi de 5 %.

Após comparar a solução com dados experimentais, foram simulados certos cenários do Rio dos Sinos onde não haviam dados de campo disponíveis. Logo, as comparações foram feitas entre nossas estimativas e os dados numéricos de Garcia (método de diferenças finitas tipo explícito).

3.2.5 Simulação da propagação de Fósforo ao longo da primeira seção do Rio dos Sinos

No primeiro cenário, (*S1* até *S4*: conforme pode ser observado na fig. 3.2 - parte mais à montante do corpo hídrico) foi simulado o lançamento de uma carga de fósforo cuja concentração no ponto de despejo (*S1*), é de $0,23 \text{ mg/L}$ e cujo valor estimado da derivada local do perfil é de $-3,07 \times 10^{-2} \text{ mg/Lm}$, para tanto foi utilizada a equação (2.42) considerando $\Psi = 0$.

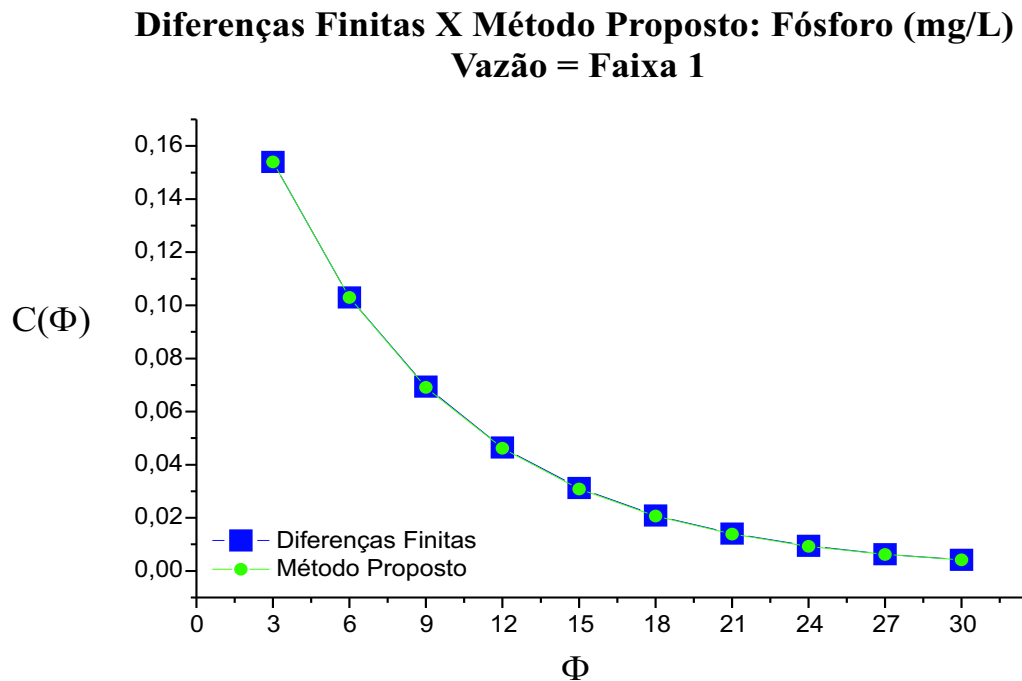


Figura 3.14 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Fósforo

O desvio máximo observado entre as concentrações de Fósforo obtidas por diferenças finitas e as obtidas pelo uso do método proposto neste trabalho foi de 2 %.

Os respectivos valores numéricos para a concentração ao longo do trecho considerado também podem ser observados em forma de tabela no Apêndice VIII, mais especificamente, tabela VIII.5.

3.2.6 Simulação da propagação de Nitrogênio ao longo da primeira seção do Rio dos Sinos

De maneira análoga à simulação realizada para uma carga de fósforo, também foi simulado o lançamento de uma carga de Nitrogênio cuja concentração no ponto de despejo é de $1,29 \text{ mg/L}$ e cujo valor estimado da derivada local do perfil é de $-0,13 \text{ mg/Lm}$. Os respectivos valores numéricos para a concentração ao longo do trecho podem ser observados no gráfico que segue

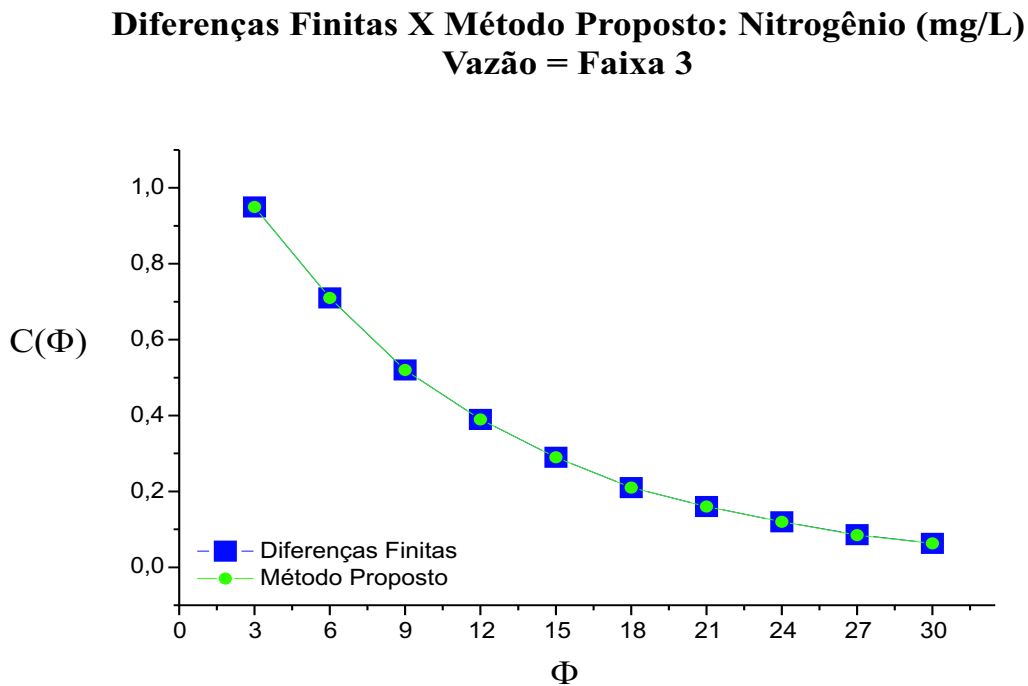


Figura 3.15 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Nitrogênio

Como é possível observar o desvio máximo entre os dois métodos para a propagação de Nitrogênio foi de 0,5 %.

3.2.7 Simulação da propagação de Fósforo e Nitrogênio ao longo da segunda seção do Rio dos Sinos

No segundo cenário (S4 - S8 : cenário à jusante ao simulado anteriormente) foram simulados os lançamentos de cargas de Fósforo e Nitrogênio cujas concentrações no ponto de despejo (S4) são de, respectivamente, $0,26 \text{ mg/L}$ e $1,13 \text{ mg/L}$, como pode ser verificado no Apêndice V. Os valores estimados para as derivadas locais do perfil, para tais cargas, são de $-3,43 \times 10^{-2} \text{ mg/Lm}$ para a carga de Fósforo e $-0,12 \text{ mg/Lm}$ para a carga de Nitrogênio. De forma semelhante à simulação anterior, a equação, o valor de Ψ permanece inalterado.

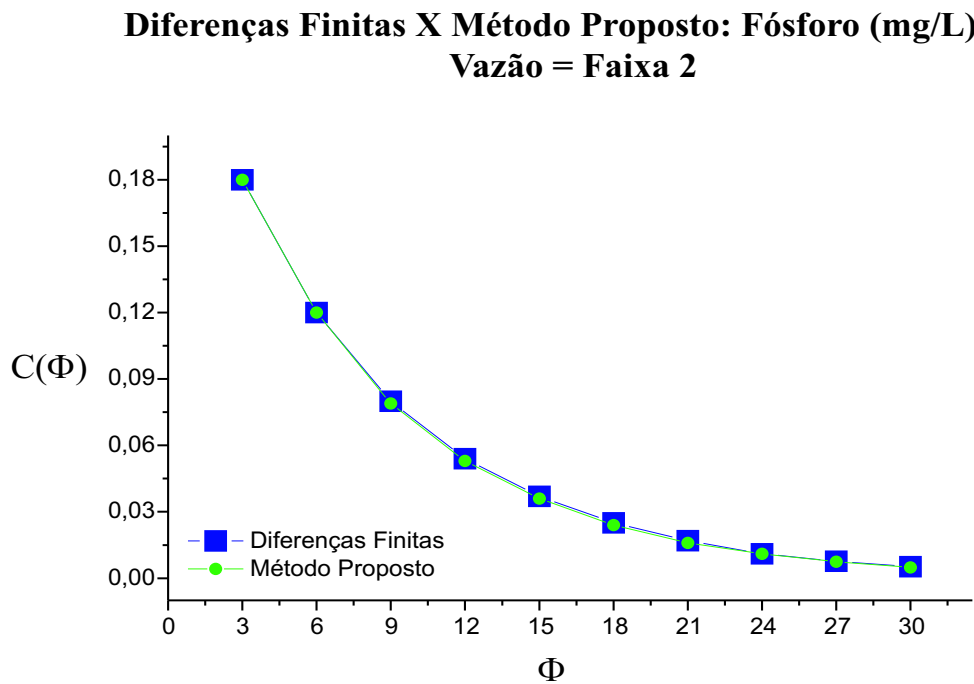


Figura 3.16 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Fósforo

Para a propagação de Fósforo neste cenário o desvio máximo observado foi de 4,5%.

Diferenças Finitas X Método Proposto: Nitrogênio (mg/L)
Vazão = Faixa 2

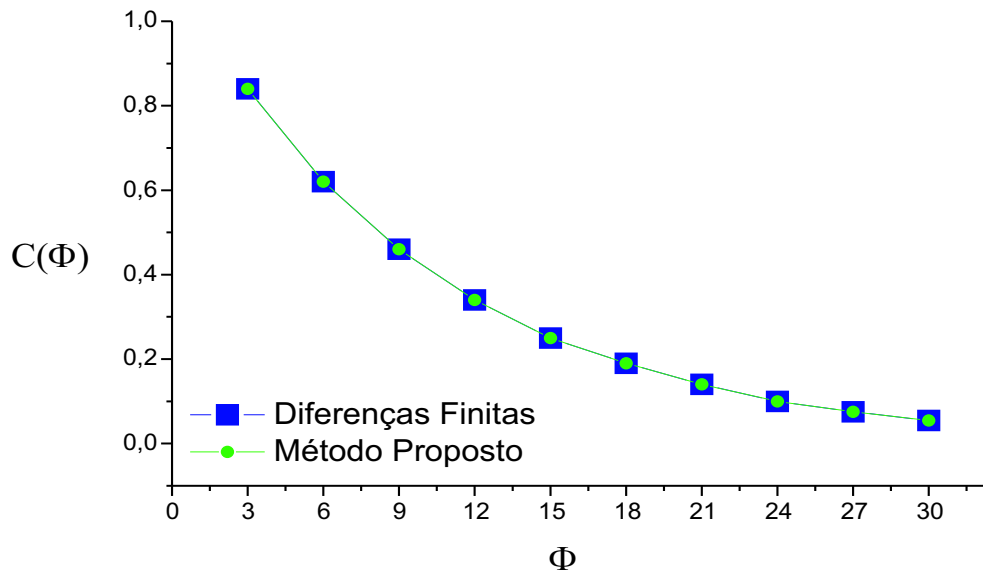


Figura 3.17 – Dados Experimentais x Dados Calculados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos: Carga de Nitrogênio

O desvio máximo observado para a simulação da propagação de Nitrogênio foi de 0,05 %.

Os respectivos valores numéricos para as concentrações de Fósforo e Nitrogênio ao longo do trecho (S4 - S8) podem ser observados em forma de tabela em anexo (Apêndice VIII - Tabelas VIII.7 e VIII.8).

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

O desvio percentual máximo observado nas simulações foi de 35,41 % referente à simulação de uma carga de Nitrogênio para a terceira faixa de vazão no Rio dos Sinos (ver figura 3.11).

A solução proposta reproduz de maneira satisfatória os dados experimentais para todos os parâmetros analisados.

O tempo de processamento requerido para efetuar as simulações apresentadas é virtualmente desprezível uma vez que o cálculo das concentrações requer apenas a avaliação de uma função. As simulações foram efetuadas em um Pentium III 650 MHz.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MENEGAT, R., PORTO, M., CARRARO, C., FERNANDES, L. *Atlas ambiental de porto alegre*. Porto Alegre, RS: Editora da Universidade/UFRGS, 1998.
- [2] TEIXEIRA, A. *Uso de modelos matemáticos no planejamento de obras de esgotamento sanitário - caderno 38*. Porto Alegre, RS: DEMAÉ, 1982.
- [3] GARCIA, R. L. *Simulação da qualidade da Água em regime não-permanente no rio dos sinos, rs*, 1997. Tese de doutorado, Porto Alegre, RS, Brasil, Programa de Pós-Graduação do Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [4] ORTEGA, J., POOLE, W. Numerical analysis for differential equations. *Pitman Publishing*, v. —, n. —, p. —, 1981.
- [5] INCROPERA, F., DEWITT, D. *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. 4a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. v. 1.
- [6] CARNAHAM, J. *Applied numerical methods*. 1a. ed. N. York: McGraw-Hill, 1972. v. 1.
- [7] GREENSPAN, D., CASULI, V. Numerical analysis for applied mathematics, science and engineering. *Addison-Wesley Publishing Co.*, v. 7, n. —, p. 1325–1342, 1988.
- [8] HAUSER, J., PAAP, H., EPPEL, D. *Boundary conformed coordinate systems for fluid flow problems*. —: Swansea: Pineridge Press, 1986.
- [9] DHAUBADEL, M., REDDY, J., TELLIONIS, D. Finite-element analysis of fluid flow and heat transfer for staggered bundles of cylinders in cross flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. —, n. —, p. —, 1987.

- [10] REALI, M., RANGONGI, R., PENNATI, V. Compact analytic expressions of two dimensional finite difference forms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 121–130, 1984.
- [11] REDDY, J. *Applied functional analysis and variational methods in engineering*. N. York: McGraw-Hill, 1986.
- [12] WHITE, F. *Viscous fluid flow*. 1a.. ed. N. York: McGraw-Hill, 1974.
- [13] STRANG, G. *Introduction to applied mathematics*. Wellesley: Wellesley Cambridge Press, 1986.
- [14] ZABADAL, J. *Propagação de bactérias e substâncias químicas no rio guaiíba*. Porto Alegre, RS: DEMA/CESB, 1991.
- [15] ZABADAL, J. Approximate solutions for the two dimensional problems in water pollution, component suppression schemes. *Revista Ciência e Natura*, v. –, n. 22, p. –, 2000.
- [16] ZABADAL, J. *Reformulação do sistema har03 para dispersão de bactérias e oxigênio*. Porto Alegre: Departamento Municipal de água e Esgotos - Divisão de Pesquisa, 1992.
- [17] CHURCHILL, R. *Variáveis complexas e suas aplicações*. São Paulo, SP: McGraw-Hill, 1975.
- [18] VALENTINE, H. *Applied hydrodynamics*. Londres: Butterworth e Co. Ltd., 1959.
- [19] KOBER, H. *Dictionary of conformal representations*. London: Dover Publications, 1944.

APÊNDICE I

Noções Básicas de Transformações Conformes

Nesta seção o intuito é fornecer noções básicas sobre transformações conformes visando um detalhamento maior sobre o assunto.

Uma transformação conforme é uma transformação efetuada sobre uma função de variável complexa que leva a função do plano de origem a um outro plano (mais simples) [18], [19]. Isto é, a idéia básica é transformar a geometria do domínio visando facilitar a resolução de problemas potenciais como citado no corpo do texto.

Geralmente, tenta-se transformar a geometria do domínio em um semi plano.

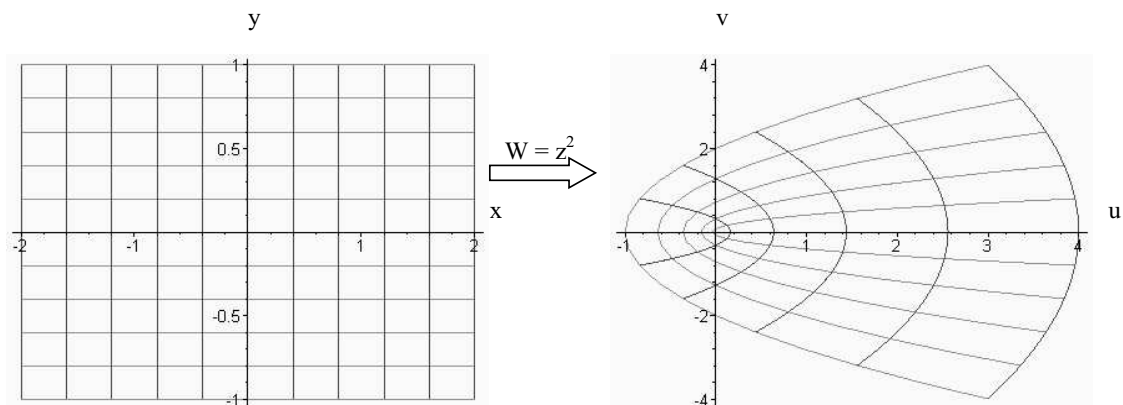


Figura I.1 – Transformação Conforme utilizando a função z^2 no domínio $-2 - i \dots 2 + i$

Para a transformação $W = z^2$, temos

$$W = z^2 = (x + i y)^2 = x^2 - y^2 + 2 x y i \quad (\text{I.1})$$

de forma que

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \\ v &= \operatorname{Im}(z^2) = 2xy \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Seguem, aqui, alguns exemplos de transformações conformes:

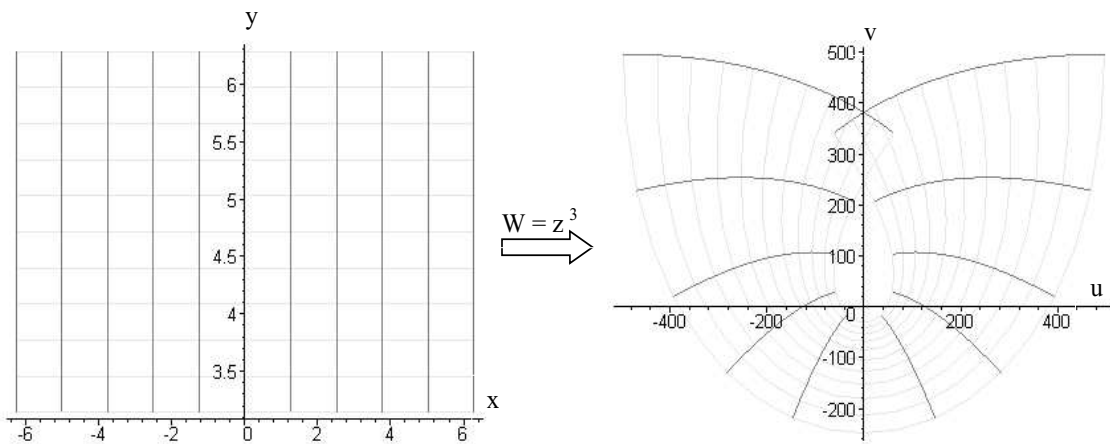


Figura I.2 – Transformação Conforme utilizando a função z^3 no domínio $-2\pi + 2\pi i \dots 2\pi + i\pi$

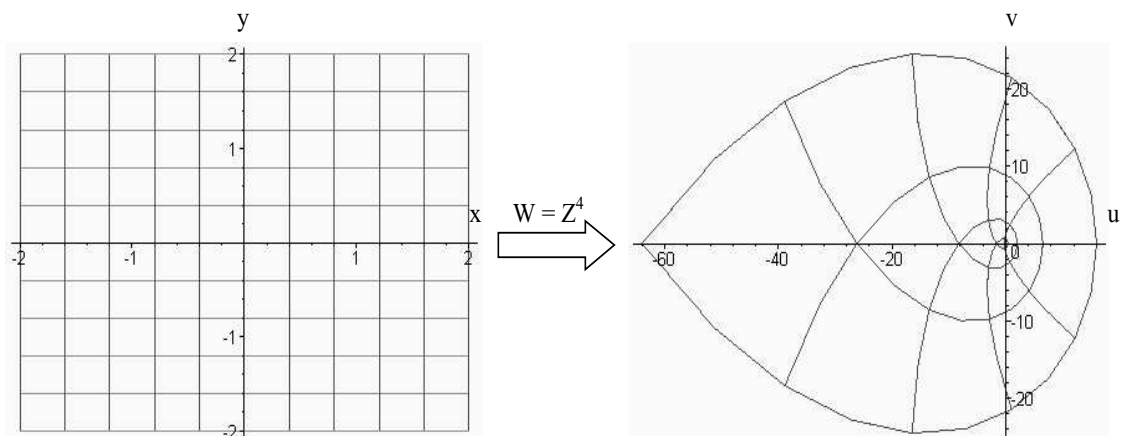


Figura I.3 – Transformação Conforme utilizando a função z^4 no domínio $-2 + 2i \dots 2 + 2i$

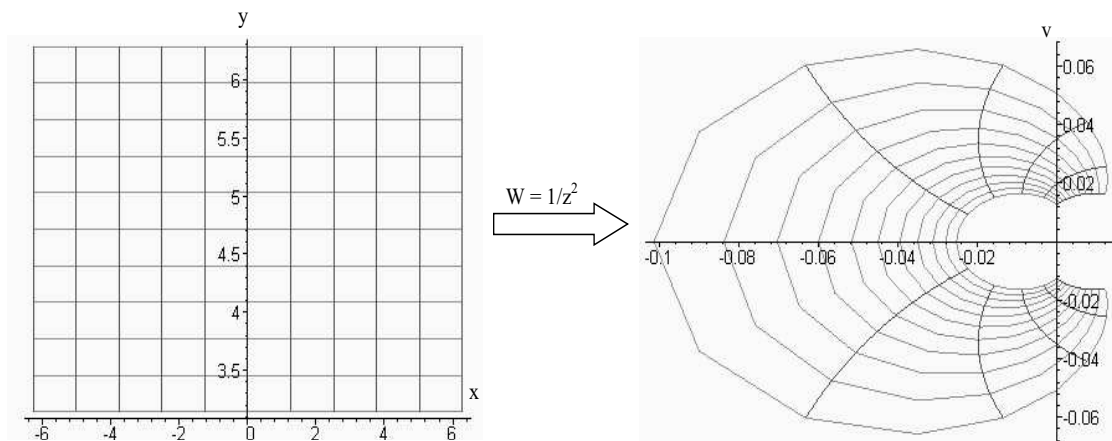


Figura I.4 – Transformação Conforme utilizando a função $1/z^2$ no domínio $-2\pi + 2i\pi \dots 2\pi + i\pi$

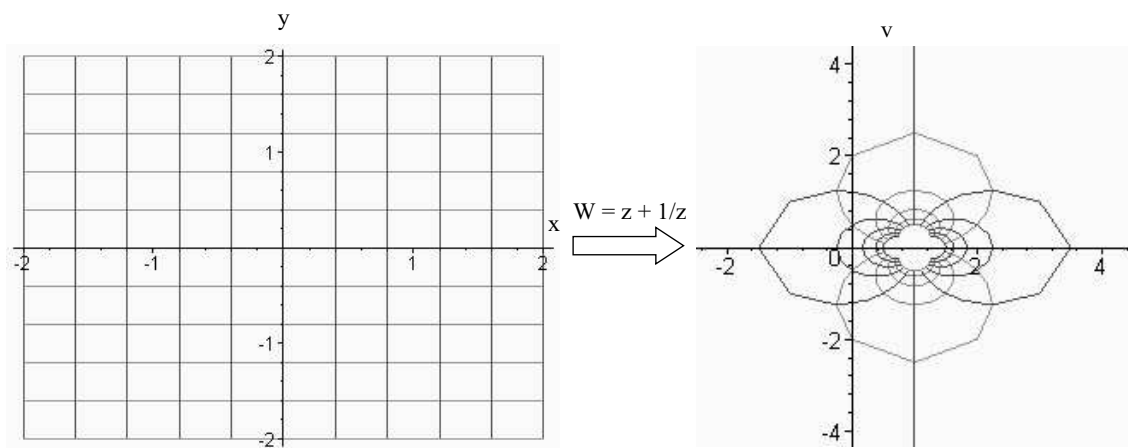


Figura I.5 – Transformação Conforme utilizando a função $z + 1/z$ no domínio $-2 - 2i \dots 2 + 2i$

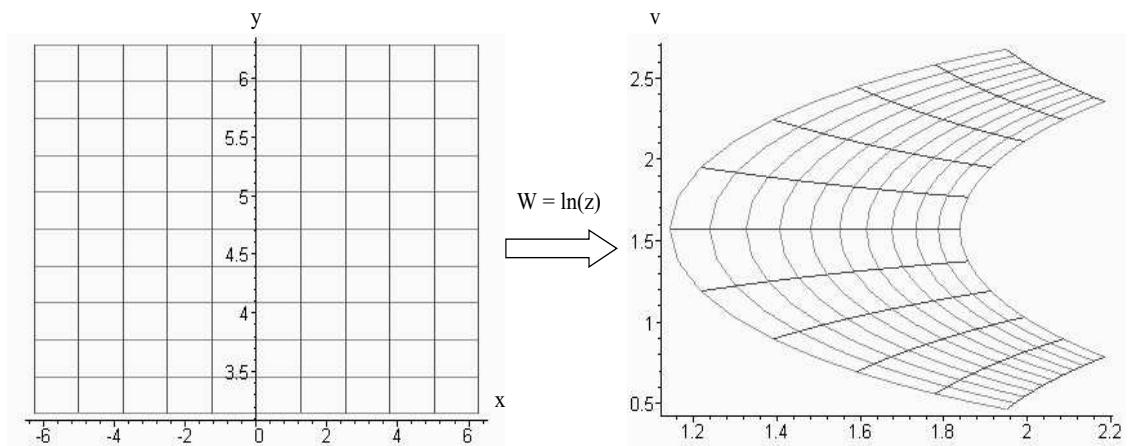


Figura I.6 – Transformação Conforme utilizando a função $\ln(z)$ no domínio $-2\pi + 2i\pi \dots 2\pi + i\pi$

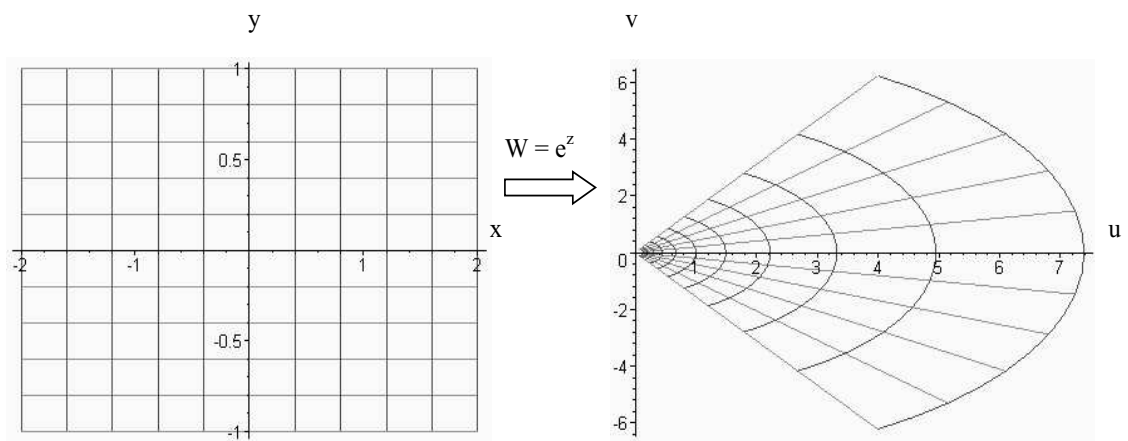


Figura I.7 – Transformação Conforme utilizando a função e^z no domínio $-2 + 2i \dots 2 + 2i$

APÊNDICE II

Aplicação das Transformações Conformes

As transformações conformes [18] são mapeamentos que fazem uso de funções de variável complexa com o intuito de transformar a geometria do domínio, visando facilitar a resolução de problemas potenciais, como, por exemplo:

- resolução de problemas de condução de calor;
- de escoamento invíscido em torno de corpos com diversos formatos;
- problemas envolvendo campos elétricos e magnéticos (Ex.: Efeito Hall, equações de Maxwell, ...)

A partir do ajuste das equações paramétricas que descrevem o contorno do domínio original juntamente com as condições de Cauchy-Riemann, constrói-se uma transformação conforme que converte a geometria do problema em um domínio semi-infinito expresso em coordenadas retangulares. As equações paramétricas do contorno são dadas por

$$\begin{cases} \Phi_0(x) \\ e \Psi_0(x). \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Partindo das condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (\text{II.2})$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{II.3})$$

é possível determinar o procedimento para a construção de uma transformação conforme que converte o domínio original em um semi-plano. Aplicando a primeira condição de Cauchy-Riemann junto ao contorno, obtém-se

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{d\Phi_0}{dx}. \quad (\text{II.4})$$

Assim,

$$\Psi \Big|_{y=0} = y \frac{d\Phi_0}{dx} + \alpha(x), \quad (\text{II.5})$$

como $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$, temos

$$\alpha(x) = \Psi_0(x). \quad (\text{II.6})$$

Portanto, substituindo (II.6) em (II.5),

$$\Psi = \frac{d\Phi_0}{dx} y + \Psi_0. \quad (\text{II.7})$$

Essas condições garantem que a mudança de coordenadas preserve os ângulos. Assim, se um sistema de coordenadas ortogonal é utilizado para descrever o problema em sua forma original, a transformação de coordenadas produzirá um novo sistema de coordenadas curvilíneas que também são ortogonais entre si (ver Apêndice I).

De maneira análoga, aplicando a segunda condição de Cauchy-Riemann junto ao contorno, obtém-se

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{d\Psi_0}{dx} \quad (\text{II.8})$$

assim,

$$\Phi \Big|_{y=0} = y \frac{d\Psi_0}{dx} + \beta(x), \quad (\text{II.9})$$

como $\Phi(x, 0) = \Phi_0(x)$, tem-se

$$\beta(x) = \Phi_0(x). \quad (\text{II.10})$$

Portanto,

$$\Phi = \frac{d\Psi_0}{dx} y + \Phi_0. \quad (\text{II.11})$$

Então, em $y = 0$, $W(s) = \Phi_0(x) + i\Psi_0(x)$, de form que

$$W(s) = \Phi_0(s) + i\Psi_0(s) \quad (\text{II.12})$$

satisfaz automaticamente a condição

$$W(s) \Big|_{\text{contorno}} = \Phi_0(x) + i\Psi_0(x). \quad (\text{II.13})$$

Logo, para efetuar uma transformação conforme que converta o domínio original em um semi-plano, é necessário, primeiramente, ajustar as equações paramétricas $\Phi_0(x)$ e $\Psi_0(x)$ que definem a fronteira do domínio, e em seguida efetuar a substituição $x \rightarrow s = x + i y$.

APÊNDICE III

Mapeamento da Equação de Laplace no plano

A equação da continuidade, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.1})$$

e a imposição de irrotacionalidade, escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial \gamma} = 0 \quad (\text{III.2})$$

podem ser expressas em termos da função corrente como segue

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma \partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \gamma}, \quad (\text{III.3})$$

e

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{III.4})$$

Os termos das equações acima podem ser reescritos em função das novas variáveis independentes $s = \gamma + iz$ e $\bar{s} = \gamma - iz$.

Aplicando uma vez a regra da cadeia nos termos da equação III.3, tem-se

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma \partial z} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\} = i \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\}, \quad (\text{III.5})$$

e

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right\} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial s}{\partial \gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \bar{s}}{\partial \gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\}. \quad (\text{III.6})$$

Aplicando novamente a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma \partial z} &= i \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\} = i \left\{ \frac{\partial s}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] + \frac{\partial \bar{s}}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{s}} \right] \right\} \\ &= i \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] \right\} \\ &= i \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s}^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\} = \left\{ \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] + \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] \right\} \\ &= i \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] - \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] \right\} \\ &= i \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s}^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

de forma que a equação (III.3) reescrita, tornam-se

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s}^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s}^2} \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} \quad (\text{III.10})$$

$$2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} = 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}}$$

De forma análoga ao efetuado para a equação (III.3), os termos da equação (III.4) também podem ser reescritos em termos das variáveis s e \bar{s} como segue

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right\} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s}^2} \quad (\text{III.11})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} = i \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right\} = i \left\{ \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] + \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] \right\} \\ &= i^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] - \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{s}} \right] \right\} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s}^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

tal que

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{s} \partial s} = 0. \quad (\text{III.13})$$

Logo, por (III.9) obtém-se a forma do Laplaciano após a mudança de variáveis:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial \bar{s}} = 0. \quad (\text{III.14})$$

APÊNDICE IV

Tabelas de dados experimentais referentes ao Rio Jacuí

Tabela IV.1 – Tabela referente aos dados experimentais de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí

Segmento	Estações	Vazões Mínimas		Vazões Máximas		Média Geral de Vazões	
		Média Aritmética	Desvio Padrão	Média Aritmética	Desvio Padrão	Média Aritmética	Desvio Padrão
118	57	7,2	0,3	9,2	0,7	8,2	1,1
117	82	6,9	0,1	9,6	0,2	8,2	1,1
114	83	7,2	0,3	8,9	0,6	8	0,9
113	84	6,9	0,3	9,4	0,3	8,1	1,1
112	85	6,7	0,3	9,1	0,5	8,1	1,2
110	86	6,9	0,3	8,8	0,6	8	1
108	57 p	7	0,3	8,9	0,7	8,1	1,1

A tabela seguinte refere-se aos dados experimentais coletados no Canal do Jacuí para amostras de Cloreto.

Tabela IV.2 – Tabela referente aos dados experimentais de Concentrações de Cloreto (mg/L) no Canal do Jacuí

Segmentos	Estações	Média Aritmética	Desvio Padrão
118	57	3,1	0,76
117	82	2,9	0,68
114	83	2,8	0,69
113	84	2,9	0,69
112	85	3,0	0,79
110	86	2,9	0,79
108	57 p	3,0	0,7

APÊNDICE V

Tabelas contendo valores médios das concentrações para o Rio dos Sinos

Nesta seção são fornecidas as tabelas contendo os dados experimentais para os parâmetros utilizados (mg/L) nas simulações, sendo que as faixas de vazão são pré determinadas.

Tabela V.1 – Vazão média considerada para a simulação da Faixa 1 ($14,43 m^3/s$)

	S1	S4	S8	S10	S17	S20
OD	6,75	6,13	4,85	2,97	1,90	3,65
DBO	1,93	3,20	4,15	4,88	5,97	5,12
N total	1,31	1,98	2,46	3,56	4,66	4,75
P total	0,23	0,41	0,75	0,77	0,67	0,62

Tabela V.2 – Faixa 2 - Vazão Média = $24,54 m^3/s$

	S1	S4	S8	S10	S17	S20
OD	6,96	6,44	5,86	4,59	3,42	3,60
DBO	1,24	1,88	2,73	2,99	4,39	3,99
N total	1,00	1,13	1,53	1,91	2,50	2,62
P total	0,20	0,26	0,41	0,48	0,45	0,44

Tabela V.3 – Faixa 3 - Vazão Média = 34,17 m^3/s

	S1	S4	S8	S10	S17	S20
OD	8,10	7,87	7,27	6,18	5,33	4,42
DBO	1,53	2,28	3,05	3,37	3,87	2,80
N total	1,29	1,31	1,63	2,09	2,56	2,44
P total	0,16	0,22	0,28	0,33	0,35	0,36

Tabela V.4 – Faixa 4 - Vazão Média = 49,60 m^3/s

	S1	S4	S8	S10	S17	S20
OD	7,60	7,12	6,72	6,07	5,02	4,48
DBO	1,12	1,47	2,02	2,77	3,57	2,53
N total	1,11	0,96	1,86	1,79	2,06	2,05
P total	0,22	0,28	0,35	0,39	0,38	0,37

Tabela V.5 – Faixa 5 - Vazão Média = 75,63 m^3/s

	S1	S4	S8	S10	S17	S20
OD	7,60	7,12	6,72	6,07	5,02	4,48
DBO	1,12	1,47	2,02	2,77	3,57	2,53
N total	1,01	1,11	1,37	1,51	1,66	1,71
P total	0,22	0,23	0,33	0,31	0,32	0,33

Tabela V.6 – Faixa 6 - Vazão Média = 125,58 m^3/s

	S1	S4	S8	S10	S17	S20
OD	7,34	6,86	6,63	6,25	5,40	4,49
DBO	1,59	1,50	1,72	2,07	2,06	1,84
N total	1,13	1,26	1,41	1,37	1,61	1,46
P total	0,26	0,29	0,33	0,44	0,42	0,41

APÊNDICE VI

Áreas transversais das seções

Tabela VI.1 – Tabela referente as áreas transversais das seções do Rio dos Sinos

Seção	Área (m^2)	Seção	Área (m^2)
1	333,65	14	173,86
4*	78,75	15	476,13
8*	443,31	16	217,37
9	210,30	17*	252,00
10*	98,10	18	304,00
11	82,13	19	290,50
12	81,24	20	364,50
13	188,75	21	565,60

As seções indicadas por (*) representam as seções utilizadas nas simulações.

APÊNDICE VII

Resultados referentes a simulações em cenários do Canal do Jacuí

Os resultados tabelados referentes às simulações efetuadas para o Canal do Jacuí podem ser observados a seguir.

Para a simulação de oxigênio dissolvido considerando vazão baixa tem-se os seguintes resultados:

Tabela VII.1 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí

Segmento	Vazão Baixa		
	Dados Experimentais	Método Proposto	Desvio Percentual
118	7,2	7,2	–
117	6,9	7,07	2,46
114	7,2	6,93	3,75
113	6,9	6,8	1,45
112	6,7	6,68	0,29
110	6,9	6,65	3,62

Para a simulação de oxigênio dissolvido considerando vazão alta os resultados seguem conforme a tabela:

Tabela VII.2 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí

Segmento	Vazão Alta		
	Dados Experimentais	Método Proposto	Desvio Percentual
118	9,20	9,20	–
117	9,60	9,13	4,89
114	8,90	9,07	1,91
113	9,40	9,00	4,25
112	9,10	8,93	1,87
110	8,80	8,86	0,68

A tabela referente a simulação de oxigênio dissolvido para média geral de vazões pode ser observada logo a seguir:

Tabela VII.3 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Oxigênio dissolvido (mg/L) no Canal do Jacuí

Segmento	Média Geral de Vazões		
	Dados Experimentais	Método Proposto	Desvio Percentual
118	8,20	8,20	–
117	8,60	8,16	5,12
114	8,00	8,11	1,38
113	8,10	8,07	0,37
112	8,10	8,02	0,99
110	8,00	7,98	0,25

Tabela VII.4 – Dados Experimentais x Valores Calculados de Concentrações de Cloreto Total(mg/L) no Canal do Jacuí

Segmento	Média Geral de Vazões		
	Dados Experimentais	Método Proposto	Desvio Percentual
118	3,10	3,10	–
113	2,90	2,83	2,41
117	2,90	3,00	3,45
112	3,00	2,75	8,33
114	2,80	2,92	4,29
110	2,92	2,67	8,57

APÊNDICE VIII

Resultados referentes a simulações em cenários do Rio dos Sinos

Tabela VIII.1 – Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: carga de Fósforo (mg/L)

	Faixa 2 de Vazão			Faixa 3 de Vazão		
Segmento	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio
S01	0,20	0,20	–	0,16	0,16	–
S04	0,26	0,26	–	0,22	0,22	0,01
S08	0,37	0,37	0,23	0,34	0,34	1,08
S10	0,48	0,48	0,08	0,46	0,46	0,53
	Faixa 4 de Vazão			Faixa 5 de Vazão		
Segmento	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio
S01	0,22	0,22	–	0,22	0,22	–
S04	0,28	0,28	0,01	0,23	0,23	0,01
S08	0,37	0,37	4,32	0,25	0,24	2,37
S10	0,49	0,49	0,32	0,26	0,26	1,85

Tabela VIII.2 – Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: carga de Nitrogênio (mg/L)

	Faixa 2 de Vazão			Faixa 3 de Vazão		
Segmento	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio
S01	1,00	1,00	–	1,29	1,29	–
S04	1,13	1,13	–	1,31	1,31	–
S08	1,53	1,33	13,00	1,63	1,34	17,78
S10	1,91	1,50	21,50	2,09	1,36	35,41
	Faixa 5 de Vazão			Faixa 6 de Vazão		
Segmento	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio
S01	1,01	1,01	–	1,13	1,13	–
S04	1,11	1,11	–	1,26	1,26	–
S08	1,37	1,26	0,03	1,41	1,46	3,55
S10	1,51	1,38	8,60	1,37	1,62	18,90

Tabela VIII.3 – Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: Oxigênio Dissolvido (mg/L)

	Faixa 2 de Vazão			Faixa 3 de Vazão		
Segmento	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio
S01	6,96	6,96	–	8,10	8,10	–
S04	6,44	6,46	0,31	7,87	7,87	–
S08	5,86	5,84	0,34	7,27	7,58	4,26
S10	4,59	5,42	18,08	6,18	7,37	19,26
	Faixa 4 de Vazão			Faixa 5 de Vazão		
Segmento	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio
S01	7,60	7,60	–	7,60	7,60	–
S04	7,12	7,12	–	7,12	7,12	–
S08	6,72	6,54	2,68	6,72	6,53	2,83
S10	6,07	6,13	0,99	6,07	6,12	0,82

Tabela VIII.4 – Tabela de resultados referente à região simulada no Rio dos Sinos: DBO

Segmento	Faixa 4 de Vazão			Faixa 5 de Vazão		
	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio	Dados Experimentais [3]	Método Proposto	Desvio Médio
S01	1,12	1,12	–	1,12	1,12	–
S04	1,47	1,47	–	1,47	1,47	–
S08	2,02	2,11	4,46	2,02	2,11	4,57
S10	2,77	2,77	0,09	2,77	2,77	0,10

Os valores numéricos obtidos através da utilização do método de diferenças finitas e do método proposto neste trabalho para a concentração ao longo do primeiro cenário no Rio dos Sinos, isto é, trecho que engloba *S1* até pouco antes de *S4*.

Tabela VIII.5 – Tabela de resultados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos:
carga de Fósforo (mg/L) - Faixa 1 de Vazão

Φ	Diferenças Finitas	Método Proposto	Desvio Percentual
3	$1,54 \times 10^{-1}$	$1,54 \times 10^{-1}$	0,17
6	$1,03 \times 10^{-1}$	$1,03 \times 10^{-1}$	0,34
9	$6,94 \times 10^{-2}$	$6,91 \times 10^{-2}$	0,51
12	$4,65 \times 10^{-2}$	$4,62 \times 10^{-2}$	0,68
15	$3,12 \times 10^{-2}$	$3,09 \times 10^{-2}$	0,85
18	$2,09 \times 10^{-2}$	$2,07 \times 10^{-2}$	1,01
21	$1,41 \times 10^{-2}$	$1,39 \times 10^{-2}$	1,18
24	$9,42 \times 10^{-3}$	$9,29 \times 10^{-3}$	1,34
27	$6,32 \times 10^{-3}$	$6,22 \times 10^{-3}$	1,52
30	$4,24 \times 10^{-3}$	$4,17 \times 10^{-3}$	1,69

Tabela VIII.6 – Tabela de resultados referente ao primeiro cenário simulado no Rio dos Sinos:
carga de Nitrogênio (mg/L) - Faixa 3 de Vazão

Φ	Diferenças Finitas	Método Proposto	Desvio Percentual
1	0,95	0,95	0,05
2	0,71	0,71	0,09
3	0,52	0,52	0,13
4	0,39	0,39	0,18
5	0,29	0,29	0,22
6	0,21	0,21	0,26
7	0,16	0,16	0,31
8	0,12	0,12	0,35
9	$0,86 \times 10^{-1}$	$0,85 \times 10^{-1}$	0,40
10	$0,63 \times 10^{-1}$	$0,63 \times 10^{-1}$	0,44

Na tabela seguinte encontram-se os valores obtidos pelo método de diferenças finitas, assim como os valores obtidos pelo método proposto neste trabalho, para as concentrações ao longo do segundo cenário simulado do Rio dos Sinos, ou seja, a parte do corpo hídrico compreendida entre os pontos *S4* e *S8* observados na fig. 3.9.

Tabela VIII.7 – Tabela de resultados referente ao segundo cenário simulado no Rio dos Sinos: carga de Fósforo (mg/L) - Faixa 2 de Vazão

Φ	Diferenças Finitas	Método Proposto	Desvio Percentual
3	0,18	0,18	0,44
6	0,12	0,12	0,88
9	$0,80 \times 10^{-1}$	$0,79 \times 10^{-1}$	1,31
12	$0,54 \times 10^{-1}$	$0,53 \times 10^{-1}$	1,75
15	$0,37 \times 10^{-1}$	$0,36 \times 10^{-1}$	2,19
18	$0,25 \times 10^{-1}$	$0,24 \times 10^{-1}$	2,62
21	$0,17 \times 10^{-1}$	$0,16 \times 10^{-1}$	3,04
24	$0,11 \times 10^{-1}$	$0,11 \times 10^{-1}$	3,47
27	$0,77 \times 10^{-1}$	$0,74 \times 10^{-2}$	3,89
30	$0,52 \times 10^{-2}$	$0,49 \times 10^{-2}$	4,32

A simulação da concentração de Nitrogênio para o segundo cenário pode ser observada na tabela que segue

Tabela VIII.8 – Tabela de resultados referente ao segundo cenário simulado no Rio dos Sinos: carga de Nitrogênio - Faixa 2 de Vazão

Φ	Diferenças Finitas	Método Proposto	Desvio Percentual
3	0,84	0,84	0,01
6	0,62	0,62	0,01
9	0,46	0,46	0,02
12	0,34	0,34	0,02
15	0,25	0,25	0,03
18	0,19	0,19	0,02
21	0,14	0,14	0,04
24	0,10	0,10	0,04
27	$0,75 \times 10^{-1}$	$0,75 \times 10^{-1}$	0,05
30	$0,55 \times 10^{-1}$	$0,55 \times 10^{-1}$	0,05