

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC

# **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**

**Herbert Martins Gomes**

Tese Apresentada para Obtenção do  
Título de Doutor em Engenharia

Porto Alegre

Maio 2001

**Herbert Martins Gomes**

**Técnicas de Avaliação da  
Confiabilidade em Estruturas de  
Concreto Armado**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Porto Alegre

Maio 2001

Esta Tese de Doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

---

Prof. Armando Miguel Awruch  
Orientador

---

Prof. Francisco P. S. L. Gastal  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

Banca Examinadora:

- Prof. Romilde Almeida de Oliveira - UFPE  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Eduardo de Moraes Rego Fairbairn - UFRJ  
Dr. Ing. pela Univ. Paris VI
- Prof. Jorge Daniel Riera - UFRGS  
Ph.D. pela Univ. de Princeton

*Dedico este trabalho a Fábio  
e a Luciana.*

# Agradecimentos

Ao orientador, e acima de tudo amigo, Prof. Awruch, pelas valiosas sugestões e o inestimável apoio dispensado durante a elaboração da Tese.

A minha esposa, Luciana, e ao meu filho Fábio, pela paciência e dedicação dispensados durante estes anos.

A todos aqueles que de certa forma, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste empreendimento.

O autor deseja agradecer à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro em forma de bolsa de estudos.

# Sumário

Sumário.....	ii
Lista de Tabelas .....	v
Lista de Figuras.....	vi
Lista de Símbolos .....	x
Resumo .....	xv
Abstract.....	xvi
Capítulo 1 .....	1
1. Introdução .....	1
1.1 Considerações iniciais.....	1
1.2 Objetivos e justificativas.....	2
1.3 Organização do trabalho .....	2
Capítulo 2 .....	5
2. Revisão Bibliográfica .....	5
2.1 Avaliação da confiabilidade em estruturas de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos .....	5
2.2 Aplicação de redes neurais em problemas de engenharia.....	7
2.2.1 Redes neurais na mecânica estrutural.....	9
2.2.2 A aplicação de redes neurais de retropropagação na mecânica estrutural.....	9
2.2.3 Redes neurais na confiabilidade estrutural.....	10
2.2.4 Redes de retropropagação na otimização estrutural .....	11
2.2.5 Redes de retropropagação na identificação e detecção de dano.....	12
2.2.6 Aplicação de redes de retropropagação na análise estrutural .....	15
2.2.7 Otimização de treliças usando redes de Hopfield .....	18
2.2.8 Criação de malhas de elementos finitos através de mapas de Kohonen.....	21
2.2.9 A rede ART no projeto conceitual .....	22
2.2.10 Redes de propagação em sentido contrário na mecânica estrutural .....	23
Capítulo 3 .....	24
3. Elementos Finitos para Concreto Armado.....	24
3.1 Modelo constitutivo para concreto.....	24
3.2 Modelo de fissuras distribuídas .....	32
3.3 Modelo numérico para armaduras.....	36
3.3.1 Modelo constitutivo para as armaduras.....	42
3.4 Avaliação da matriz de rigidez para o concreto e para as barras de aço .....	43
3.5 Método de solução .....	45
3.5.1 Equação de equilíbrio.....	45
3.5.2 Algoritmo elasto-viscoplástico padrão.....	46
3.5.3 Método do controle dos deslocamentos generalizado .....	47
3.6 Exemplos numéricos.....	49
3.6.1 Testes de tração e compressão puros no concreto.....	49
3.6.2 Teste de tração por compressão diametral .....	53
3.6.3 Falha de uma viga devido à plastificação do aço de reforço.....	57
3.6.4 Série de testes em vigas de Bresler e Scordelis.....	60
3.6.5 Exemplo de estrutura com laje, vigas e pilares .....	63
Capítulo 4 .....	68
4. Campos Estocásticos .....	68
4.1 Introdução .....	68

4.1.1	Geração de campos estocásticos.....	69
4.1.2	Geração de campos não Gaussianos.....	70
4.1.3	Formas usuais da matriz de coeficientes de correlação no espaço real.....	72
4.2	Exemplo numérico.....	73
4.2.1	Comentários.....	78
4.3	Expansão em séries de Neumann da matriz de rigidez.....	78
4.3.1	Exemplo numérico.....	80
4.4	Variabilidade das propriedades dos materiais, cargas e geometria.....	92
4.4.1	Resistência à compressão do concreto.....	92
4.4.2	Módulo de elasticidade do concreto à compressão.....	93
4.4.3	Resistência à tração do concreto.....	93
4.4.4	Deformação máxima e deformação limite à compressão no concreto.....	94
4.4.5	Módulo de elasticidade do aço.....	94
4.4.6	Tensão máxima de escoamento para o aço.....	95
4.4.7	Energia de fratura no concreto.....	95
4.4.8	Erro de modelagem.....	96
4.4.9	Geometria da peça.....	96
4.4.10	Cargas aplicadas.....	96
4.4.11	Exemplo numérico.....	98
4.4.11.1	Comentários.....	102
Capítulo 5	.....	103
5.	Confiabilidade Estrutural : Métodos FORM e Monte Carlo.....	103
5.1	Introdução.....	103
5.2	Método de confiabilidade de 1ª ordem (FORM).....	105
5.2.1	Problema de otimização com restrição.....	105
5.2.2	Problema de otimização em Coordenadas Polares.....	106
5.2.3	Medidas de sensibilidade.....	107
5.2.4	Cálculo da função de estado limite e derivadas no espaço Gaussiano padrão.....	107
5.2.5	Eliminação de iterações excessivas.....	109
5.3	Método de simulação direta Monte Carlo.....	110
5.3.1	Geração de amostras para simulação.....	111
5.3.1.1	Variáveis Antitéticas.....	112
5.4	Método de simulação Monte Carlo com amostragem por importância adaptativa.....	113
5.4.1	Geração das amostras para simulação.....	115
Capítulo 6	.....	117
6.	Superfícies de Resposta e Redes Neurais Aplicadas à Análise de Confiabilidade.....	117
6.1	Método da superfície de resposta.....	117
6.1.1	Introdução.....	117
6.1.2	Formulação para análise de confiabilidade por superfícies de resposta.....	118
6.1.3	Método da projecção de vetor.....	124
6.2	Redes neurais artificiais.....	126
6.2.1	Introdução.....	126
6.2.2	Modelo geral para redes multicamada.....	128
6.2.3	Algoritmo de retropropagação padrão.....	129
6.2.4	Algoritmo de retropropagação com a regra de aprendizado delta-barrá-delta.....	132
6.2.5	Diferenciação da rede neural perceptron multicamada.....	135
6.2.6	Seleção da arquitetura da rede.....	136
6.2.7	Definição do uso da aproximação por rede neural.....	137
6.3	Redes neurais com funções de base radial.....	138
6.3.1	Projeto de uma rede generalizada com funções de base radial.....	139

6.3.2 Diferenciação da rede neural com função de base radial .....	143
6.3.3 Comparações entre redes de base radial e redes percéptron multicamada .....	144
6.4 Algoritmo de aprendizado ativo para redes neurais .....	145
Capítulo 7 .....	148
7. Aplicações das Diferentes Técnicas na Confiabilidade Estrutural .....	148
7.1 Exemplos com funções de estado limite explícitas .....	148
7.1.1 Viga em balanço em regime elástico linear .....	148
7.1.1.1 Comentários .....	154
7.1.2 Barra sujeita a carga concentrada uniaxial .....	157
7.1.2.1 Comentários .....	163
7.1.3 Barra sujeita a carga concentrada uniaxial com correlação entre variáveis .....	164
7.2 Exemplos com funções de estado limite implícitas .....	166
7.2.1 Viga bi-engastada com campos estocásticos de rigidez e carga .....	166
7.2.1.1 Comentários .....	171
7.2.2 Corpo de prova de concreto com campo estocástico da resistência à compressão .....	173
7.2.2.1 Comentários .....	176
7.2.3 Viga simplesmente apoiada de C.A. sujeita a carga uniforme ao longo do vão com um campo estocástico bidimensional do módulo de elasticidade .....	177
7.2.3.1 Comentários .....	186
Capítulo 8 .....	187
8. Conclusões e Sugestões .....	187
8.1 Conclusões .....	187
8.2 Sugestões para trabalhos futuros .....	188
Referências Bibliográficas .....	190
Apêndice I .....	214
Formulação Geral para Superfícies de Falha-Plastificação para o Concreto .....	214

# Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Representação binária das características de um problema.....	22
Tabela 3.1 - Propriedades do material para o teste de tração e compressão pura.....	50
Tabela 3.2 - Propriedades do material e geometria da viga ensaiada.....	57
Tabela 3.3 - Propriedades do material e geometria da viga OA-1 ensaiada.....	60
Tabela 4.1 - Tempo de CPU relativo para diferentes métodos e número de amostras.....	78
Tabela 4.2 - Seqüência de testes para os métodos de geração de campos para o exemplo da viga com campo do módulo de elasticidade discretizado no centróide de cada elemento (40 pontos).....	81
Tabela 4.3 - Seqüência de testes para os métodos de geração de campos para o exemplo da viga com campo do módulo de elasticidade discretizado em 10 pontos equidistantes na linha neutra da viga.....	81
Tabela 4.4 - Parâmetros estatísticos e tipos de distribuição para o exemplo da viga de concreto armado.....	99
Tabela 4.5 - Coeficientes de correlação linear adotados entre variáveis dependentes para o exemplo da viga de concreto armado.....	99
Tabela 7.1 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para a viga em balanço.....	149
Tabela 7.2 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga em balanço.....	154
Tabela 7.2 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para a barra e carregamento.....	157
Tabela 7.4 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da barra sob carga axial.....	162
Tabela 7.3 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para viga bi-engastada e carregamento.....	167
Tabela 7.6 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga biengastada.....	171
Tabela 7.4 - Características estatísticas das variáveis aleatórias.....	173
Tabela 7.8 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo do corpo de prova de concreto.....	176
Tabela 7.5 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para a viga de concreto armado.....	178
Tabela 7.10 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga de concreto armado (discretizada pela metade).....	182
Tabela 7.11 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga de concreto armado (discretizada completamente).....	183

# Lista de Figuras

Figura 2.1 - Treliça plana com dez barras, onde foi usado RNA para a otimização das variáveis de projeto.....	11
Figura 2.2 - Treliça plana analisada e otimizada usando redes de Hopfield. ....	19
Figura 3.1 - Superfície de falha para o concreto no espaço das tensões.....	25
Figura 3.2 - Definições para o espaço das tensões principais.....	26
Figura 3.3 - Construção da superfície de plastificação e de carregamento subsequentes.....	27
Figura 3.4 - Diagrama tensão-deformação equivalente para o concreto sob compressão uniaxial. ....	29
Figura 3.5 - Modelo para amolecimento à deformação ( strain softening).....	32
Figura 3.6 - Esquema para fissuras ortogonais fixas em três dimensões em um ponto de integração genérico. ....	33
Figura 3.7 - Definição dos eixos globais e locais. ....	35
Figura 3.8 - Modelos numéricos para a representação das armaduras: a) distribuído, b) discreto, c) incorporado. ....	37
Figura 3.9 - Elemento de concreto e barra de aço no domínio físico e computacional. ....	40
Figura 3.10 - Algumas configurações de armaduras no sistema de coordenadas naturais do elemento testadas com sucesso. ....	43
Figura 3.11 - Diagrama tensão deformação uniaxial para as armaduras. ....	43
Figura 3.12 - Características gerais de sistemas não lineares. ....	48
Figura 3.13 - Elemento simples hexaédrico de 20 nós de concreto submetido a uma pressão uniforme numa face do elemento. ....	50
Figura 3.14 - Curva fator de carga-deslocamento para o teste de compressão pura.....	51
Figura 3.15 - Curva tensão-deformação para o teste de compressão pura.....	51
Figura 3.16 - Curva fator de carga-deslocamento para o teste de tração pura.....	52
Figura 3.17 - Curva tensão-deformação para o teste de tração pura.....	52
Figura 3.18 - Configuração das fissuras para o teste de tração pura (1 elemento e regra de integração 3x3x3). ....	53
Figura 3.19 - Malha de elementos finitos para o teste de compressão diametral (o ponto D também é restringido na direção z).....	54
Figura 3.20 - Diagrama fator de carga-deslocamento do ponto A no teste de compressão diametral. ....	55
Figura 3.21 - Diagrama tensão-deformação do ponto B no teste de compressão diametral....	55
Figura 3.22 - Configuração das fissuras para o teste de compressão diametral: (a) planos de corte (as setas indicam as direções por onde o corpo é observado), (b) seção transversal, (c) plano diametral.....	56
Figura 3.23 - Características geométricas da viga RC-75-1. ....	57
Figura 3.24 - Curva fator de carga-deslocamento para um ponto para parte inferior da seção transversal no meio do vão da viga RC-75-1.....	58
Figura 3.25 - Configuração das fissuras para a viga RC-75-1 na a) carga última e b) último passo incremental. ....	58
Figura 3.26 - Curva tensão-deformação para o aço de reforço na seção transversal central, próximo à face inferior da viga.....	59
Figura 3.27 - Curva tensão-deformação para concreto na face superior do vão central da viga RC-75-1. ....	59
Figura 3.28 - Curva tensão-deformação para o concreto na face inferior do vão central da viga .....	60

Figura 3.29 - Curva fator de carga-deslocamento para um ponto na parte inferior da seção transversal no meio do vão da viga OA-1. ....	61
Figura 3.30 - Curva tensão-deformação no concreto nas faces superiores e inferiores no vão central da viga OA-1.....	62
Figura 3.31 - Configuração das fissuras para a viga OA-1 correspondentes ao último ponto da curva fator de carga-deslocamento (ponto A) para a malha com 100 elementos. ....	62
Figura 3.32 –Características geométricas para o exemplo de um pavimento tipo de concreto armado (dimensões em m).....	63
Figura 3.33 – Malha de elementos finitos para o exemplo do pavimento tipo de concreto armado. ....	64
Figura 3.34 – Detalhe da discretização das armaduras na conexão laje-viga-pilar. ....	65
Figura 3.35 – Diagrama de fator de carga versus deslocamento no centro inferior da laje de concreto armado. ....	65
Figura 3.36 – Vista lateral para a configuração final das fissuras com fator de carga de 0.66.	66
Figura 3.37 – Vista superior para a configuração final das fissuras com fator de carga de 0.66. ....	66
Figura 3.38 – Vista superior genérica para a configuração final das fissuras.....	67
Figura 4.1 - Discretização da placa quadrada em 100 elementos finitos iguais. ....	74
Figura 4.2 - Matriz de autocorrelação original. ....	75
Figura 4.3 - Função de autocorrelação para o método de decomposição Cholesky. ....	75
Figura 4.4 - Função de autocorrelação para o método de decomposição modal. ....	76
Figura 4.5 - Função de autocorrelação para o método da representação espectral. ....	76
Figura 4.6 - Campos gerados: (a)Decomposição Cholesky; (b)Decomposição modal e (c)Representação espectral por séries de cosseno.....	77
Figura 4.7 - Esboço da geometria da viga, da malha de elementos finitos e do campo estocástico.....	80
Figura 4.8 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Cholesky e $\delta E=0.1$ . ....	82
Figura 4.9 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Cholesky e $\delta E=0.2$ . ....	83
Figura 4.10 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Cholesky e $\delta E=0.3$ . ....	84
Figura 4.11 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral e $\delta E=0.1$ . ....	85
Figura 4.12 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral e $\delta E=0.2$ . ....	86
Figura 4.13 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral e $\delta E=0.3$ . ....	87
Figura 4.14 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Decomposição Cholesky, $\delta E=0.3$ e campo com 10 pontos. ....	88
Figura 4.15 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Decomposição Cholesky, $\delta E=0.1$ e campo com 10 pontos. ....	89
Figura 4.16 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral, $\delta E=0.3$ e campo com 10 pontos.....	90
Figura 4.17 - Dados geométricos para a viga de concreto armado estudada. ....	98
Figura 4.18 - Coeficientes de correlação original dos campos para exemplo da viga de concreto armado. ....	100
Figura 4.19 - Coeficientes de correlação dos campos recomposto com 100 amostras com o método da representação espectral para o exemplo da viga de concreto armado.....	101

Figura 4.20 - Amostra aleatória dos campos correlacionados gerados ao longo do vão da viga de concreto armado.....	101
Figura 4.21 - Convergência para o valor médio e variância da flecha no vão central da viga de concreto armado. ....	102
Figura 5.1 - Esboço no espaço Gaussiano padrão não correlacionado a) das iterações excessivas para a procura do ponto de projeto e b) do método proposto por Yang et al. ....	110
Figura 6.1 - Localização no espaço Normal não correlacionado para geração de amostras para duas variáveis segundo diversos métodos: * fatorial fracional total; X amostragem proposta por Bucher(1990)[38]; ⊗ aleatória; ∇ incompleta parcialmente balanceada. .	119
Figura 6.2 - Esquema do algoritmo para adaptação da superfície de resposta à função de estado limite.....	122
Figura 6.3 - Esquema comparativo no espaço Gaussiano padrão não correlacionado entre amostras geradas a) pelos métodos tradicionais e b) pela técnica da projeção de vetor. ° representa a amostra. ....	125
Figura 6.4 - Esquema no espaço Gaussiano padrão não correlacionado da transformação....	126
Figura 6.6 - Neurônio, a unidade de processamento neural mais simples.....	127
Figura 6.7 - Arquitetura generalizada de uma rede percéptron multicamada.....	129
Figura 6.8 - Esquema geral de um neurônio de base radial.....	138
Figura 6.9 - Esquema geral de uma rede neural de base radial.....	141
Figura 6.9 - Região de falha distribuída no domínio. ....	146
Figura 6.11 - Região de falha concentrada no domínio.....	147
Figura 7.1 - Viga bi-engastada de seção transversal retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído. ....	148
Figura 7.2 - Valor do índice de Confiabilidade $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha $\mu Pf$ e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha $\delta Pf$ , versus número de simulações para o exemplo da viga em balanço (símbolos claros - amostragem por Importância; símbolos escuros - Monte Carlo direto). ....	150
Figura 7.3 - Valor do índice de Confiabilidade $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha $\mu Pf$ e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha $\delta Pf$ , versus número de simulações para o exemplo da barra com carga uniaxial concentrada e função de estado limite representado por uma rede neural treinada. ....	153
Figura 7.4 - Função de Estado limite real e diversas aproximações para o cálculo da confiabilidade (as curvas ajustadas referem-se à última aproximação utilizada para o cálculo do índice de confiabilidade). ....	156
Figura 7.5 - Amostras no espaço Gaussiano padrão não correlacionado para rede com base radial, rede percéptron multicamada, amostragem compósita central sem e com a técnica de projeção de vetor.....	156
Figura 7.6 - Barra sujeita a carga uniaxial aplicada.....	157
Figura 7.7 - Valor do índice de Confiabilidade $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha $\mu Pf$ e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha $\delta Pf$ , versus número de simulações para o exemplo da barra com carga uniaxial concentrada(símbolos claros - amostragem por importância; símbolos escuros - Monte Carlo direto). ....	158
Figura 7.8 - Valor do índice de Confiabilidade $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha $\mu Pf$ e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha $\delta Pf$ , versus número de simulações para o exemplo da barra com carga uniaxial concentrada e função de estado limite representado por um polinômio quadrático. ....	162
Figura 7.9 – Índice de Confiabilidade $\beta$ e Probabilidade de falha $Pf$ versus coeficiente de correlação entre as variáveis $x_1$ e $x_2$ . ....	165

Figura 7.10 – Medida de Sensibilidade $\partial\beta/\partial\mathbf{Z}$ versus coeficiente de correlação entre as variáveis $x_1$ e $x_2$ .	166
Figura 7.11 - Viga bi-engastada de rigidez aleatória, sujeita a um carregamento linear	167
Figura 7.12 - Sensibilidade do índice de confiabilidade com respeito	170
Figura 7.13 - Influência do comprimento de correlação no índice de confiabilidade: comparações entre os resultados obtidos por Kiureghian et al (1988) (curvas com símbolos) e os resultados obtidos utilizando-se uma rede de base radial (curvas sem símbolos).	171
Figura 7.14 - Corpo de prova paralelepípedo de concreto com carregamento determinístico (pa) e campo estocástico da resistência à compressão $f_c$ .	173
Figura 7.15 - Curvas de comprimento de correlação versus índice de confiabilidade e probabilidade de falha entre diversas técnicas para exemplo do corpo de prova com campo discretizado nos pontos de integração (2x2x2).	176
Figura 7.16 - Dados geométricos da viga simplesmente apoiada de concreto armado.	178
Figura 7.17 - Configuração final das fissuras para carga de serviço, representada pelo fator de carga de $\lambda=1.0$ .	179
Figura 7.18 - Comparação entre resultados numérico e experimental da flecha no vão central da viga.	179
Figura 7.19 - Curvas de comprimento de correlação versus índice de confiabilidade e probabilidade de falha entre diversas técnicas para exemplo da viga discretizada pela metade.	181
Figura 7.20 - Valor do índice de Confiabilidade $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha $\mu Pf$ e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha $\delta Pf$ , versus número de simulações para o exemplo da viga de concreto armado pela metade e função de estado limite representada por um polinômio quadrático (d=100).	181
Figura 7.21 - Iterações e parâmetro de distância sucessivos versus índice de confiabilidade para o exemplo da viga completa e técnica de rede neural perceptron multicada.	184
Figura 7.22 - Curvas de comprimento de correlação versus índice de confiabilidade e probabilidade de falha entre diversas técnicas para exemplo da viga discretizada completa.	185
Figura 7.23 - Valor do índice de Confiabilidade $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha $\mu Pf$ e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha $\delta Pf$ , versus número de simulações para o exemplo da viga de concreto armado completa e função de estado limite representada por um polinômio quadrático (d=100).	185

# Lista de Símbolos

## Letras romanas minúsculas

$b$	limiar de ativação
$c$	relativo ao concreto
$c$	constante positiva
$d$	comprimento de correlação
$d_i$	saídas desejadas
$d_k$	vetor que define a direção de procura
$d_{máx}$	diâmetro máximo do agregado
$d_{mín}$	parâmetro para controle da precisão do ajuste
$f_{bc}$	resistência biaxial à compressão
$f_c$	resistência à compressão no concreto
$f_{ck}$	resistência característica do concreto
$f_{cm}$	resistência média à compressão no concreto
$f_{ct,flex}$	resistência à tração no concreto na flexão
$f_{tm}$	resistência média à tração no concreto
$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$	função de densidade de probabilidade conjunta
$f_{xi}$	função de densidade de probabilidade
$f_y$	tensão de escoamento do aço
$f_{yk}$	tensão característica de escoamento do aço
$f_{ym}$	tensão média de escoamento do aço
$g(.)$	função de estado limite no espaço real
$\hat{g}(\mathbf{Z})$	aproximação por superfície de resposta no espaço Gaussiano Padrão não correlacionado
$h$	altura
$h$	referente à camada escondida
$i$	entrada de um neurônio
$k$	fator de forma
$l$	cosseno diretor
$l_c$	comprimento característicos para o concreto
$l_{ch}^H$	comprimento característico para o concreto de Hilleborg
$m$	cosseno diretor
$m$	parâmetro
$m$	metro
$m(.)$	função de mérito não negativa
$n$	cosseno diretor
$n$	tamanho do campo
$no$	número de neurônios na camada de saída
$ns$	número de simulações
$p$	pressão
$r$	relativo à barra de reforço
$radbas$	função de base radial
$s$	parâmetro que define comprimento do passo
$s_1, s_2$	tensões desviadoras
$s_i, s_j$	estados das unidades
$t$	tempo
$\mathbf{u}$	vetor de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas entre 0 e 1

$w_\xi$	peso para integração
$w_\eta$	peso para integração
$w_\zeta$	peso para integração
$w_{ij}$	pesos sinápticos
$w_o$	peso sináptico da camada de saída
$x$	coordenada global $x$
$\mathbf{x}_i$	amostra de entrada para treinamento
$y$	coordenada global $y$
$y_{pi}$	saída desejada
$z$	coordenada global $z$

### Letras romanas maiúsculas

$A_r$	área da seção transversal da barra de reforço de aço
$A_s$	área da seção transversal da barra de reforço de aço
$\mathbf{B}$	matriz que relaciona deslocamentos e deformações
$C$	operador para imposição da correlação
$C_{xij}$	matriz de covariância
$\mathbf{D}$	matriz constitutiva para o material
$D$	diâmetro
$E_{cl}$	módulo de elasticidade secante na máxima tensão
$E_{ci}$	módulo de elasticidade do concreto
$E_{ms}$	erro quadrático médio
$E_r$	módulo de elasticidade da barra de aço de reforço
$E_s$	módulo de elasticidade do aço
$\mathbf{F}$	vetor de forças externas nodais
$F(.)$	função
$F_x^{-1}$	função inversa de distribuição acumulada
$G$	módulo de rigidez ao corte
$\hat{G}(\mathbf{X})$	aproximação da superfície de resposta no espaço real
$G$	função de estado limite no espaço normal padrão não correlacionado
$G$	função de base radial
$G_f$	energia de fratura
$G_{fm}$	energia de fratura média do concreto
$G_m$	valor médio da carga permanente
$G_n$	valor nominal da carga permanente
$G_n$	valor nominal da carga permanente
$H$	dimensão, altura
$\mathbf{I}$	matriz identidade
$I[.]$	função indicadora
$I_1$	primeiro invariante de tensões
$I_i$	tendência
$\mathbf{J}$	Jacobiano
$J_2$	segundo invariante do tensor de tensões desviadoras
$\mathbf{J}_{z,x}$	Jacobiano da transformação probabilística
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$\mathbf{K}_0$	matriz de rigidez com os valores médios
$\mathbf{K}_c$	matriz de rigidez do concreto
$\mathbf{K}_r$	matriz de rigidez do aço de reforço
$\mathbf{K}_{rc}$	matriz de rigidez do concreto armado
$\mathbf{K}_s$	matriz de rigidez do aço de reforço

$L$	matriz triangular inferior da decomposição Cholesky
$L_Z$	matriz triangular inferior da decomposição Cholesky da matriz de coeficientes de correlação
$L_1, L_2$	dimensão
$M$	número de modos considerados
$N$	número de unidades de processamento
$NET$	combinação linear
$N_f$	número de funções cosseno a serem adicionadas
$N_i$	função de forma
$N_i^*$	função de forma para elementos do tipo $C^0$
$P$	vetor de forças nodais
$\hat{P}_f$	estimador da probabilidade de falha
$P$	matriz intermediária
$P_f$	probabilidade de falha
$Q_m$	valor médio da carga acidental
$R$	vetor de forças desequilibradas
$R_{x ij}$	matriz de autocorrelação
$S$	matriz de cossenos diretores
$S$	relativo à secante
$S$	transformação probabilística
$T$	matriz de transformação entre sistemas de coordenadas de tensões e deformações
$T$	transposta de uma matriz
$T$	transformação probabilística
$T^E$	tempo para uma análise exata
$T^G$	tempo para a geração das amostras
$T^{NA}$	tempo para uma avaliação pela rede neural
$T^T$	tempo para o treinamento da rede
$U$	vetor de deslocamentos
$U_0$	vetor de deslocamentos médios
$V_\xi$	coeficiente de variação do erro de modelagem
$V_{afct}$	coeficiente de variação do fator que relaciona resistência à tração com resistência à compressão do concreto
$V_{\alpha Gf}$	coeficiente de variação do fator que relaciona energia de fratura com a resistência à compressão do concreto
$V_{Ec}$	coeficiente de variação do módulo de elasticidade do concreto
$V_{fc}$	coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto
$V_{fct}$	coeficiente de variação da resistência à tração do concreto
$V_{fy}$	coeficiente de variação da tensão de escoamento do aço
$V_G$	coeficiente de variação da carga permanente
$V_{Gf}$	coeficiente de variação da energia de fratura do concreto
$V_Q$	coeficiente de variação da carga acidental
$X$	variáveis aleatórias básicas, campo gerado
$Z$	vetor de variáveis Gaussianas padrão não correlacionadas
$Z'$	vetor de variáveis correlacionadas Gaussianas Padrão
$Z^*$	ponto de projeto no espaço Gaussiano Padrão não correlacionado

### Letras gregas minúsculas

$\alpha$  vetor de sensibilidades

$\alpha$	Momento regra de aprendizado por retropropagação
$\alpha$	constante da superfície de Ottosen, parâmetro da curva de enrijecimento à tração
$\vec{\alpha}$	vetor normal à superfície de resposta
$\alpha_i$	cosenos diretores do ponto de projeto
$\alpha_{Ec}$	fator que relaciona o módulo de elasticidade do concreto com sua resistência à compressão
$\beta$	constante da superfície de Ottosen
$\beta$	parâmetro da regra de aprendizado delta-barra-delta
$\beta$	índice de confiabilidade
$\gamma$	coeficiente de fluidez
$\delta_E$	coeficiente de variação do módulo de elasticidade
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	tolerância
$\varepsilon_c$	deformação no concreto
$\varepsilon_{c,lim}$	Deformação limite no concreto
$\varepsilon_{c1}$	deformação no concreto na tensão máxima
$\varepsilon_p$	ângulo pequeno
$\varepsilon_{ref}$	deformação de referência para modelo de enrijecimento à tração
$\varepsilon_{vp}^{eq}$	deformação viscoplástica equivalente
$\lambda$	fator de carga
$\lambda$	constante da superfície de Ottosen
$\lambda_i$	$i$ -ésimo autovalor
$\kappa$	parâmetro da regra de aprendizado delta-barra-delta
$\eta$	taxa de aprendizado
$\varphi_2$	função de densidade de probabilidade de distribuição Gaussiana bidimensional
$\phi_i$	função indicadora de posição de nó
$\xi$	coordenada natural, tensão hidrostática
$\xi_m$	erro de modelagem médio
$\xi_k$	valor constante no eixo hidrostático
$\xi_c, \xi_b, \xi_k, \bar{\xi}$	valor constante no eixo hidrostático que define as regiões da superfície de falha/plastificação
$\rho$	vetor das tensões desviadoras
$\rho_f$	superfície de falha
$\rho_{ij}$	coeficiente de correlação no espaço real
$\rho'_{ij}$	coeficiente de correlação no espaço Gaussiano Padrão não correlacionado
$\rho_c$	meridiano de compressão
$\rho_s$	meridiano de corte
$\rho_t$	meridiano de tração
$\sigma_m$	tensão hidrostática
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	tensões principais no concreto
$\hat{\sigma}_{pf}$	estimador do desvio padrão da probabilidade de falha
$\sigma_i$	desvio padrão da variável $i$
$\eta$	coordenada natural
$\mu_i$	média da variável $i$
$\mu_X$	valor médio
$\nu$	coeficiente de Poisson

$\psi_k$	$k$ -ésimo ângulo de fase
$\omega$	fator de peso
$\pi$	constante pi
$\theta$	ângulo de similaridade
$\zeta$	parâmetro da regra de aprendizado delta-barras-delta
$\zeta$	coordenada natural

### Letras gregas maiúsculas

$\Delta$	incremento
$\Phi^{-1}$	derivada da inversa da função de distribuição acumulada Gaussiana Padrão
$\Phi$	vetor de direções
$\Phi^{-1}$	inversa da função de distribuição acumulada Gaussiana Padrão
$\Lambda$	matriz de autovalores
$\Psi$	vetor de ângulos de fase
$\Psi_t$	vetor de forças residuais
$\rho$	matriz de correlação no espaço Gaussiano Padrão não correlacionado
$\rho'$	matriz de correlação no espaço Gaussiano Padrão correlacionado
$\Theta$	matriz de autovetores

### Símbolos especiais

$\int$	integral
$\partial$	derivada parcial
$\ \cdot\ $	norma Euclidiana
$\nabla$	gradiente de uma função
$/./$	operador módulo
$\langle.\rangle$	função que assume valor zero se o valor no interior for negativo e o próprio valor caso contrário
$\langle\rangle$	transposição de um vetor

# Resumo

Neste trabalho é dada ênfase à inclusão das incertezas na avaliação do comportamento estrutural, objetivando uma melhor representação das características do sistema e uma quantificação do significado destas incertezas no projeto.

São feitas comparações entre as técnicas clássicas existentes de análise de confiabilidade, tais como FORM, Simulação Direta Monte Carlo (MC) e Simulação Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa (MCIS), e os métodos aproximados da Superfície de Resposta (RS) e de Redes Neurais Artificiais (ANN). Quando possível, as comparações são feitas salientando-se as vantagens e inconvenientes do uso de uma ou de outra técnica em problemas com complexidades crescentes. São analisadas desde formulações com funções de estado limite explícitas até formulações implícitas com variabilidade espacial de carregamento e propriedades dos materiais, incluindo campos estocásticos.

É tratado, em especial, o problema da análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado incluindo o efeito da variabilidade espacial de suas propriedades. Para tanto é proposto um modelo de elementos finitos para a representação do concreto armado que incorpora as principais características observadas neste material. Também foi desenvolvido um modelo para a geração de campos estocásticos multidimensionais não Gaussianos para as propriedades do material e que é independente da malha de elementos finitos, assim como implementadas técnicas para aceleração das avaliações estruturais presentes em qualquer das técnicas empregadas.

Para o tratamento da confiabilidade através da técnica da Superfície de Resposta, o algoritmo desenvolvido por Rajashekhar *et al*(1993) foi implementado. Já para o tratamento através de Redes Neurais Artificiais, foram desenvolvidos alguns códigos para a simulação de redes perceptron multicamada e redes com função de base radial e então implementados no algoritmo de avaliação de confiabilidade desenvolvido por Shao *et al*(1997).

Em geral, observou-se que as técnicas de simulação tem desempenho bastante baixo em problemas mais complexos, sobressaindo-se a técnica de primeira ordem FORM e as técnicas aproximadas da Superfície de Resposta e de Redes Neurais Artificiais, embora com precisão prejudicada devido às aproximações presentes.

# Abstract

In this work special emphasis is given to uncertainties in the evaluation of the structural behavior, looking for a better representation of the system characteristics and quantification of the significance of these uncertainties in the design.

It is confronted some existing classical reliability analysis techniques, such as the First Order Reliability Method (FORM), Direct Monte Carlo Simulation (MC) and Monte Carlo Simulation with Adaptive Importance Sampling (MCIS), and approximated techniques such as Response Surface (RS) and Artificial Neural Networks (ANN). It is highlighted, when possible, the advantages and shortcoming in applying these techniques in problems with increasing complexity. Problems with some explicit and implicit limit state functions formulations with material and load spatial variability, including stochastic fields, are analyzed.

The reliability analysis of reinforced concrete structure problems is specially considered taking into account the spatial variability of the material properties. A finite element algorithm is proposed to model its main characteristics. It is developed a multidimensional non-Gaussian stochastic field generation model (independent of the finite element mesh). Some techniques to accelerate the structural evaluation, performed by any of the methods mentioned previously, are also implemented.

The reliability analysis by the Response Surface technique is performed with the algorithm implemented by Rajashekhar *et al* (1993). The reliability analysis is also accomplished with Shao's *et al*(1997) algorithm, which is implemented together with computer codes for neural network simulation with multilayer perceptrons and radial basis functions.

It was observed that the direct simulation techniques have a low performance in complex problems. FORM, Response Surface and Neural Networks techniques are outstanding techniques, despite the loss of accuracy due to approximations characterizing these methods.

# Capítulo 1

## 1. Introdução

*“... uncertainties are unavoidable in the planning of engineering systems. Properly, therefore, the tools of engineering analysis should include methods and concepts for evaluating the significance of uncertainty on system performance and design.”*

A. H.-S. Ang  
1975

Neste capítulo é dada uma visão sobre o tema abordado. Maior ênfase é dada à área mais abrangente que ele envolve: a confiabilidade estrutural. São apresentados os objetivos e as justificativas para o trabalho bem como sua organização em capítulos.

### 1.1 Considerações iniciais

Atualmente grande importância tem sido dada ao ramo da engenharia denominada Confiabilidade Estrutural. Os esforços têm se concentrado na previsão da confiabilidade dos sistemas estruturais frente à aleatoriedade das propriedades dos materiais e dos carregamentos. Neste sentido, a confiabilidade estrutural pode ser vista como um sub-ramo da otimização estrutural, uma vez que objetiva-se avaliar propriedades, materiais e geometria ótimas que atendam a critérios de segurança. Problemas como a determinação da vida útil, níveis de segurança e índices de confiabilidade dos sistemas estruturais têm sido motivo de intensas pesquisas nos últimos anos. O desenvolvimento de novos algoritmos para o tratamento de tais problemas também tem consumido bastante tempo de pesquisas.

Em verdade, o que se pode dizer é que atualmente para problemas estruturais de grande porte a análise da confiabilidade encontra empecilhos que não são teóricos, mas numéricos. Por ter uma abordagem eminentemente probabilística, a confiabilidade estrutural também sofre com a escassez de dados experimentais, principalmente devido às dificuldades para a obtenção dos mesmos e que são úteis na validação de teorias e resultados.

Os métodos clássicos de confiabilidade estrutural de primeira ordem e os baseados em simulações, cada qual com suas vantagens e desvantagens, têm resolvido uma grande variedade de problemas estruturais. Os esforços para tornar os métodos eficazes no tratamento de grandes problemas têm se direcionado no sentido de aproximar as funções de estado limite, em última instância, todo um procedimento numérico pesado e lento, por funções mais simples para avaliação, a ponto de tornar vantajosos métodos como o Monte Carlo. Aproximações que utilizam polinômios Bucher(1990), Das(2000), Faravelli(1989), Frangopol(1996), Grabe(1997), Haftka(1996), Orissimolu(1998), Rajashekhar(1995)(1993), Roux(1986), Soares(1995), Tandjiria(1995), Vitali(1989), Wong(1992), Zheng(1989), funções racionais Nelder(1996), funções *splines* Oliveira (1997), e recentemente redes neurais artificiais Lee(2001), Papadrakakis(1996), Shao(1997), Saraiva(1997)(1998), têm apresentado relativo sucesso ainda que com menor precisão, nestes problemas.

## 1.2 Objetivos e justificativas

Este trabalho tem como objetivo desenvolver algoritmos e técnicas capazes de abordar o problema da confiabilidade estrutural em estruturas elástico lineares e em particular em estruturas de concreto armado, conhecidamente de comportamento fortemente não-linear, considerando-se a aleatoriedade espacial dos materiais e carregamentos, de uma forma abrangente e viável. Até agora, a abordagem de tal problema tem sido feita de uma forma bastante simples, não sendo a mesma capaz de modelar características tais como a presença da dispersão espacial nas propriedades do material, especialmente o concreto armado, um material de características eminentemente aleatórias devido à sua constituição física e processo de produção.

A análise de confiabilidade de estruturas de concreto armado de uma forma mais abrangente justifica-se pelo fato da possibilidade de se avaliar de maneira mais precisa, e portanto com maior segurança, processos existentes e futuros de dimensionamento e verificação, visando em última análise um projeto mais econômico e ao mesmo tempo mais seguro.

## 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em 8 capítulos. No presente capítulo é dada uma introdução sobre o tema da Tese, expondo-se os objetivos e justificativas para a mesma. Os capítulos 2 ao 7 abordarão cada um dos temas que compõem esta Tese.

No capítulo 2 é examinada brevemente a bibliografia sobre as técnicas aplicadas no estudo da confiabilidade estrutural, principalmente para o material concreto armado, indicando-se os principais pólos de pesquisas nesta área existentes atualmente no Brasil. Também no capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica da aplicação de redes neurais na engenharia estrutural, apontando-se os principais ramos em que esta nova metodologia vem sendo aplicada com relativo sucesso, inclusive no ramo da confiabilidade estrutural.

No capítulo 3 é abordada a modelagem empregada para o material concreto armado, como também novas implementações e exemplos que visam salientar as capacidades do programa de elementos finitos tridimensionais desenvolvido para o uso nos testes de confiabilidade.

No capítulo 4 são apresentados os conceitos relativos à geração de campos estocásticos não Gaussianos para modelagem das aleatoriedades espaciais presentes nas estruturas de concreto armado. São apresentados alguns métodos de geração bem como alguns exemplos numéricos comparativos que visam ressaltar virtudes e desvantagens de um ou outro método quando do tratamento da análise da confiabilidade estrutural das estruturas. Também, dados a respeito das propriedades estatísticas dos materiais empregados, presentes na literatura, são apresentados.

Uma revisão sobre as técnicas de confiabilidade empregadas nesta Tese é feita no capítulo 5. São apresentados os métodos FORM (First Order Reliability Method), Simulação Direta Monte Carlo (MC - Direct Monte Carlo Simulation) e Simulação Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa (MCIS - Monte Carlo Simulation with Adaptive Importance Sampling).

No capítulo 6, revisa-se brevemente a técnica da Superfície de Resposta (RS - Response Surface) para o tratamento de problemas de confiabilidade estrutural. Também neste capítulo é apresentada uma revisão sobre os dois tipos de redes neurais artificiais empregadas nesta Tese: a rede percéptron multicamada (MLP - Multi Layer Perceptron) e a rede neural de base radial (RBN - Radial Basis Network). Apresentam-se também algumas implementações e modificações específicas feitas nestas redes para o seu emprego na análise de confiabilidade.

No capítulo 7 são apresentados exemplos comparativos tanto simples quanto complexos do emprego das diversas técnicas de análise de confiabilidade e as implementações que aqui serão feitas com redes neurais. Neste mesmo capítulo é feita a análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado incluindo campos estocásticos. Algumas conclusões preliminares são indicadas neste capítulo.

No capítulo 8 são apresentadas as conclusões finais a respeito do emprego de redes neurais artificiais na análise da confiabilidade estrutural e em especial em estruturas de concreto armado. Algumas observações também são feitas a respeito de futuros desenvolvimentos que possam vir a serem feitos na forma de melhoramentos para os trabalhos que se seguirem. Em seguida, a relação de referências bibliográficas mencionadas no texto é apresentada.

E finalmente, num apêndice, alguns detalhes sobre a formulação geral implementada para as superfícies de falha/plastificação para o concreto são apresentados.

# Capítulo 2

## 2. Revisão Bibliográfica

*“...The computational effort involved in the Monte Carlo Simulation becomes excessive in large-scale problems...The use of Neural networks can practically eliminate any limitation on the scale of the problem and the sample size used for Monte Carlo simulation...”*

*Papadarakakis, M.  
1996*

Neste capítulo são brevemente revisados trabalhos em análise de confiabilidade em estruturas de concreto armado através de um enfoque via elementos finitos. Também é dada uma visão geral sobre a aplicação de diferentes tipos de redes neurais artificiais na engenharia estrutural, assim como seu uso na confiabilidade estrutural.

### 2.1 Avaliação da confiabilidade em estruturas de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos

Uma breve revisão bibliográfica sobre a área de Confiabilidade Estrutural aplicada especificamente à concreto armado até 1997, é apresentada na Dissertação de Mestrado de Gomes *et al* (1997). Os primeiros trabalhos na área de confiabilidade, realmente aplicados na engenharia civil, dentre outros também não menos importantes, se devem a A. M. Freudenthal(1947), (1966) , A. H. S. Ang (1975) e a Shinozuka (1983). Investigadores como Melchers (1987), Hasofer e Lind (1984), Ellingwood (1995), Bucher (1989), (1988), (1990), (1994), Schuëler, Bourgund e Brener (1986), (1986), (1991), Kiureghian, Rackwitz (1987a), (1987b), Liu (1988) e Stix (1998), estão mais ligados ao desenvolvimento conceitual das pesquisas neste tema tendo diversos trabalhos publicados a respeito de técnicas de avaliação de confiabi-

lidade como os métodos FORM, FOSM, SORM, Monte Carlo Direto e com Amostragem por Importância entre outras técnicas de redução de variância.

Trabalhos ligados à aplicação da confiabilidade em problemas reais de engenharia e a estruturas de concreto armado propriamente ditas através de um enfoque via elementos finitos, foram abordados pelos pesquisadores Frangopol (1996), Bljucer (1998), Ciampoli (1999), Thoft-Christensen (1998), Li (1995), Sarveswaran (1999), Mahadevan (2000), Yang (1999), Vismann (1996), Val (1995), Wang (1997), Stewart (1996), Grabe (1997), Zhang (1998), Yankelevsky (1997), Srividya (1995), Galambos (1996), Mirza (1996), Hong (1999), Rajashekhar e Ellingwood (1995). Nestes trabalhos as mais diversas técnicas são empregadas, como por exemplo FORM, SORM e inclusive a técnica da Superfície de Resposta. Entretanto em nenhum deles técnicas de simulação ou a técnica de Redes Neurais são empregados. Trabalhos recentes de aplicação de conceitos da confiabilidade a estruturas reais através de um enfoque numérico também se devem a Frangopol, da Universidade de Boulder, Colorado, nos Estados Unidos. Temas como, por exemplo, a avaliação da confiabilidade variável no tempo de pontes de concreto, incluindo efeitos importantes como a corrosão das armaduras, foram abordados em suas pesquisas. O desenvolvimento de códigos como o conhecido RELTRAN, por este investigador, para o cálculo dos gradientes da resposta estrutural comprovam o nível de sofisticação alcançado nestes temas.

No Brasil apenas se tem dado maior ênfase na aplicação da teoria da confiabilidade em estruturas de concreto armado nas três últimas décadas. Na UFRGS, o trabalho de Rocha (1989) tratou do problema de ruptura e de efeitos de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil, como o é o concreto. Os trabalhos de Araújo *et al* (1995), (1994), (1995) têm aplicado o método dos elementos finitos probabilísticos para a análise não-linear física de vigas de concreto, e métodos de simulação como Monte Carlo direto para a análise de problemas dinâmicos de interação barragem-fundação-reservatório. Gomes *et al* (1999), (1996), (1998), (1997), (1997) têm tratado da avaliação da confiabilidade de estruturas de concreto armado sob diversos enfoques: a) ao nível das seções transversais, considerando-se como variáveis aleatórias básicas a resistência do concreto, resistência à tração, recobrimento das armaduras, propriedades geométricas da seção etc. e b) ao nível de elementos finitos tridimensionais incluindo algumas variáveis básicas, tanto na análise estática linear, de longa duração quanto na análise dinâmica. Também, recentemente, a tese de doutorado de Real(2000) trata da aplicação dos conceitos de confiabilidade a estruturas de concreto armado utilizando elementos finitos bidimensionais e processos de Simulação Direta Monte Carlo

para a obtenção das estatísticas da resposta estrutural. Existem ainda diversos trabalhos relacionados à confiabilidade estrutural nesta Universidade, entretanto não se aplicam especificamente ao material concreto armado.

Em São Carlos, São Paulo, esta linha de pesquisa parece ter iniciado com os trabalhos de Bernardo(1999), Soares e Venturini (1999). Estas pesquisas incluem a utilização de técnicas de simulação e FORM e Superfície de Resposta para a avaliação da confiabilidade ao nível das seções transversais de concreto armado e para estruturas simples como vigas.

Na Universidade Federal de Minas Gerais, trabalhos vem sendo desenvolvidos por Diniz(1997). A ênfase é dada à análise da confiabilidade também ao nível das seções transversais, em pilares de concreto de alta resistência.

Na Universidade Federal de Pernambuco, Oliveira(1997) tem abordado o tema e aplicado métodos de avaliação da confiabilidade em problemas de estacas de fundação de concreto armado, utilizando técnicas de aproximação através de *splines* cúbicas e Simulação Monte Carlo com Amostragem por Importância.

Na Universidade Federal de Santa Catarina, o grupo de análise numérica GRANTE, especificamente os pesquisadores Beck e da Rosa(1999), têm feito bastantes avanços, inclusive com a criação de códigos numéricos como o ACE-Pro, o qual aproveita toda a interface do programa comercial Ansys para a análise de confiabilidade com FORM, Simulação Monte Carlo com Amostragem por Importância e técnica da Superfície de Resposta. As pesquisas tem se dirigido para análise da confiabilidade de componentes mecânicos e de estruturas em geral, utilizando o método dos elementos finitos.

Na Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia, COPPE, no Rio de Janeiro, as pesquisas têm se concentrado nas publicações de Lima(1996), Ebecken e Fairbairn(1999a), (1999b), (1999c). Diversas dissertações de mestrado e doutorado tem sido apresentadas referentes ao tema de análise de confiabilidade estrutural. O enfoque tem sido dado ao tratamento de problemas tanto simples quanto complexos, neste último enquadrando-se a análise de plataformas de exploração de petróleo em águas profundas (estruturas *offshore*). Também, através de um enfoque probabilístico, tem sido tratado o problema inverso da determinação de parâmetros e da durabilidade em barragens de concreto.

## **2.2 Aplicação de redes neurais em problemas de engenharia**

O cérebro humano é a mais sofisticada rede neural biológica e é frequentemente muito mais eficiente, adaptável e tolerante que os computadores convencionais nos campos do reconhecimento, controle e aprendizado. Embora a velocidade de processamento de neurônios biológicos seja muito mais lenta que a dos computadores digitais, o seu poder de processamento paralelo massivo supera a sua deficiência de velocidade (Baele, 1990).

O desenvolvimento de Redes Neurais Artificiais (RNA) foi inspirado na Neurociência, ou seja, a ciência que estuda o cérebro, os neurônios biológicos e as sinapses. As RNA pretendem imitar o comportamento biológico do aprendizado e dos processos de tomada de decisão, sem entretanto tentar ser realística em detalhes do ponto de vista biológico. Redes Neurais Artificiais representam modelos simplificados do cérebro humano e podem ser usadas para resolver problemas onde métodos convencionais aplicados a computadores encontram dificuldades.

Houve um crescente interesse em Redes Neurais Artificiais durante anos recentes. A primeira onda de interesse emergiu depois da introdução de neurônios simplificados por McCulloch e Pitts (1943). Estes neurônios foram apresentados como modelos de neurônios biológicos e também como componentes conceituais para circuitos que poderiam executar certas tarefas computacionais. Depois da publicação do livro *Percéptrons* em 1969, escrito por Minsky e Papert (1969) no qual foi descrita a ineficiência dos percéptrons em alguns problemas, foram poucos os pesquisadores que continuaram com trabalhos neste campo. O interesse voltou após a descoberta das redes de retropropagação (*back-propagation*) (1991) e o desenvolvimento de novos algoritmos de treinamento e de implementações físicas (*hardwares*) para aplicações com redes neurais.

RNA podem ser caracterizadas como modelos computacionais baseados no processamento distribuído em paralelo com propriedades particulares como a habilidade de aprender, generalizar; classificar e de organizar dados. Há vários modelos de RNA desenvolvidos para diversas tarefas computacionais específicas. Em princípio, eles podem ser divididos em dois grupos, modelos de redes de treinamento supervisionado e modelos de redes de treinamento não supervisionado. Eles podem ter uma arquitetura de alimentação à frente (*feedforward*), recorrentes ou realimentadas (*feedback*), ou uma combinação de ambas. Uma rede de arquitetura de alimentação à frente tem uma estrutura de camadas onde as unidades em cada camada recebem as entradas da(s) camada(s) prévia(s) e envia suas saídas para a(s) camada(s) subsequente(s). As redes com arquitetura de realimentação têm laços de realimentação entre unidades de camadas não necessariamente subsequentes. Em redes de realimentação a direção do

fluxo de dados viaja através da cadeia não necessariamente em um único sentido. Isto significa que a saída de uma unidade pode ser a entrada de outras unidades da cadeia. O treinamento supervisionado conta com a disponibilidade da resposta conhecida *a priori* (a saída desejada da rede), para cada entrada do conjunto de treinamento. Portanto a rede é treinada utilizando-se dados de entrada e os correspondentes dados de saída fornecidos por um supervisor externo. As Redes Neurais de retropropagação (*back-propagation*) e as Redes Neurais de propagação em sentido contrário (*counterpropagation*) são exemplos de redes com treinamento supervisionado e que têm arquiteturas de alimentação à frente. De forma diferente, no treinamento não supervisionado, a rede neural forma a sua própria classificação dos dados de treinamento. Assim, uma unidade de saída é treinada para responder a padrões de estímulos contidos nos dados de entrada para os quais a rede desenvolveu sua própria representação. Redes não supervisionadas freqüentemente têm uma arquitetura recorrente e são exemplos deste tipo de redes as Redes de Kohonen (1984), as Redes da Teoria de Ressonância Adaptável (ART - *Adaptive Resonant Theory*) (1988), as redes de Hopfield (1982) e as Redes de Recozimento de Campo Médio (MFA - *Mean Field Annealing*) (1987).

As redes de MFA estão baseadas nas redes recorrentes de Hopfield que usam unidades de estimação contínua (1984). A aplicação eficiente de RNA na geração de malhas adaptativas e de elementos finitos e o remalhamento são uma das aplicações usuais de RNA na área de processamento paralelo de elementos finitos

## 2.2.1 Redes neurais na mecânica estrutural

A aplicação de RNA na mecânica estrutural ganharam interesse nos anos recentes. Os modelos de RNA adotados para mecânica estrutural podem ter diferentes arquiteturas e podem possuir diferentes padrões de conectividade. RNA têm sido usadas como ferramenta computacional em várias áreas da mecânica estrutural, entre elas, identificação, simulação, avaliação, otimização, análise e projeto. A seguir serão descritas algumas aplicações das RNA na mecânica estrutural.

## 2.2.2 A aplicação de redes neurais de retropropagação na mecânica estrutural

A rede neural mais amplamente utilizada é a rede de retropropagação (*back-propagation* - BP), que é usada para a classificação e o reconhecimento de padrões. Uma ra-

ção para a popularidade deste tipo de RNA é a sua facilidade de uso. A principal dificuldade de sua utilização em problemas de Engenharia é a quantidade significativa de tempo de processamento requerida para a solução dos problemas. As redes BP podem ser treinadas para obter soluções aproximadas evitando a necessidade de tediosas avaliações analíticas e/ou numéricas. Vários problemas da Mecânica Estrutural foram resolvidos usando-se redes neurais BP. A vantagem de usar-se redes neurais, uma vez que estejam devidamente treinadas, está na sua velocidade e sua eficiência na geração das soluções. Embora haja certas dificuldades no treinamento das redes BP, elas são fáceis de usar e extremamente poderosas para a aproximação de qualquer função não linear. O alcance de aplicações de redes BP na Mecânica Estrutural estende-se ao projeto, otimização, identificação, geração de malhas e análise inversa.

### 2.2.3 Redes neurais na confiabilidade estrutural

São poucos os trabalhos relacionados à aplicação de redes neurais à confiabilidade estrutural. No Brasil, a Tese de Doutorado de Saraiva(1997) e sua publicação em revista (1998) parecem ser as primeiras a abordarem o problema. A rede neural do tipo retropropagação é utilizada em conjunto com o Método de Simulação Direta Monte Carlo e com Simulação com Amostragem por Importância na avaliação da confiabilidade de estruturas do tipo treliças, pórticos planos, espaciais e estacas de fundação. A abordagem é feita através da aproximação da função de estado limite pela rede neural do programa comercial Neuroshell2, gerada através de amostras aleatórias. Depois a avaliação da probabilidade de falha é feita através do programa CALREL (Prof. Kiureghian), da Universidade de Berkeley e do programa PANCOF elaborado na COPPE/UFRJ.

Papadrakakis *et al* (1996) utilizaram redes neurais de retropropagação juntamente com Monte Carlo com Amostragem por Importância para a análise da confiabilidade de pórticos planos e espaciais quanto ao colapso plástico. A rede foi usada para aproximar os fatores de carga crítica, obtendo-se bons resultados independente do tamanho ou complexidade do problema. Este mesmo trabalho, relata o fato de que as amostras para treinamento da rede aparentaram ser independentes do tipo de estrutura ou do tipo de análise, levando a uma diminuição drástica do tempo para a avaliação da probabilidade de falha daquelas estruturas quando comparado com os métodos tradicionais de simulação.

Shao *et al* (1997) desenvolveram um algoritmo ativo de aprendizagem da função de estado limite para a rede neural de forma que pudesse aproximar os vários modos de falha (geralmente tratados de forma separada em formulações de Primeira e Segunda Ordem). Tam-

bém desenvolveram um algoritmo para a rede de forma que a mesma pudesse julgar quais pontos mais importantes deveriam se utilizados ao aproximar a função de estado limite. Verificaram que o tempo para treinamento da rede aumentava com o número de variáveis aleatórias consideradas no problema. Os exemplos analisados foram pórticos planos e funções de estado limite explícitas.

Kim (1995) utilizou redes de retropropagação, como alternativa para os polinômios usados na técnica da Superfície de Resposta, como aproximação da função de estado limite para a avaliação da confiabilidade de um pórtico plano. Kim observou que, nestes casos, a rede neural pode produzir uma aproximação mais precisa para a probabilidade de falha que os polinômios.

## 2.2.4 Redes de retropropagação na otimização estrutural

Hajela *et al* (1992), (1992) têm investigado a aplicação de RNA na Mecânica Estrutural e na Otimização. Dentre os tipos de RNA empregados estão as redes neurais artificiais BP. A aplicação de redes BP na otimização de variáveis de projeto também foi investigada (1992). Assumiu-se que um equipamento de uma companhia estava montado numa treliça de dez barras como indicado na Figura 2.1. Também foi assumido que as dimensões da treliça  $L_1$ ,  $L_2$  e  $H$ , poderiam variar dentro de certos limites que dependiam da instalação em particular.

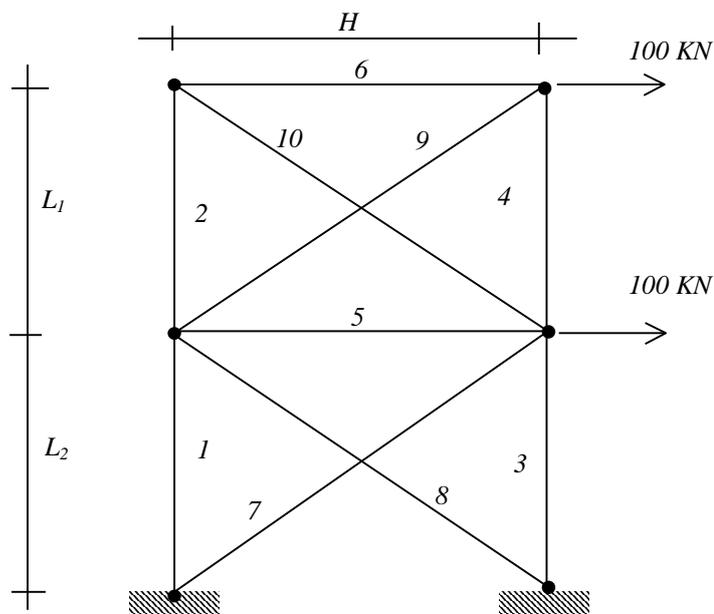


Figura 2.1 - Treliça plana com dez barras, onde foi usado RNA para a otimização das variáveis de projeto.

Para treinar a rede utilizada, foram geradas variáveis ótimas usando os métodos convencionais, variando os valores de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $H$ . Um conjunto de treinamento foi gerado usando as dimensões da treliça  $L_1$ ,  $L_2$  e  $H$ , como entrada. As saídas eram os valores ótimos do peso das barras e as correspondentes áreas de cada uma das dez barras. A rede BP foi treinada e então foi testada com dados não utilizados no treinamento para os quais foram produzidas previsões satisfatórias para os valores ótimos. Estudos adicionais foram levados a cabo por Hajela (1985), Berke (1991), Hajela (1991) e Berke (1993) para investigar a aplicação de RNA na otimização estrutural. Swift e Batill (1991) fizeram pesquisas para investigar a aplicação de RNA na avaliação preliminar do peso mínimo de estruturas treliçadas. Kang e Yoon (1994) descreveram experiências semelhantes onde foram treinadas redes neurais para prever o projeto ótimo de treliças de formas diversas onde as áreas das barras podem ser obtidas usando-se uma ou mais redes neurais treinadas.

Rogers (1994) investigou a aplicação de redes BP para obter soluções ótimas para problemas estruturais que envolvem análise e otimização. A ênfase foi colocada no desenvolvimento de diretrizes para projetar e treinar as redes neurais a fim de simular um programa de análise estrutural em um processo de otimização. Rogers e LaMarsh (1992) previamente estudaram a aplicação de RNA para a otimização de um problema de viga engastada.

## **2.2.5 Redes de retropropagação na identificação e detecção de dano**

Um dos procedimentos na mecânica estrutural para detectar o dano é a medição e análise de sinais de vibração. As RNA podem ser usadas como ferramentas computacionais que eficazmente identificam o dano estrutural.

Baral e Pandey(1998) usaram redes neurais BP para a análise do sinal de vibração de uma treliça de ponte típica com estados danificados simulados. Eles verificaram que o desempenho das redes treinadas na identificação dos estados danificados parece ser bom. Neste mesmo estudo o desempenho da rede treinada para um sinal de vibração em um único ponto para uma dada posição escolhida na estrutura foi mostrado ser melhor que quando usados sinais de vibração em três e cinco pontos. Os mesmos autores (1994), também fizeram um estudo para investigar a aplicação de redes BP para a detecção do dano em estruturas treliçadas de ponte para casos estáticos. Eles verificaram que o desempenho das redes treinadas neste caso também foi satisfatório.

Kirkegard e Rytter (1993) investigaram a aplicação de redes BP de alimentação à frente (*feedforward*) para avaliar o dano em uma viga de aço simplesmente apoiada e fissurada baseando-se em medidas dos sinais de vibração. O objetivo era treinar uma rede (ou múltiplas redes) de forma que fosse possível prever a localização e a intensidade do dano através de medições dos sinais de vibração. A rede também foi treinada de forma que poderia também reconhecer o comportamento de estruturas não danificadas. Em suas investigações, foram selecionadas duas vigas de aço simplesmente apoiadas de mesmo comprimento, 0.8m, e duas seções transversais: 0.02mx0.02m e 0.025mx0.025m. Foram feitos experimentos para estimar as cinco primeiras frequências naturais à flexão. Uma rede BP com cinco unidades de entrada, duas camadas escondidas, cada uma contendo sete unidades e duas unidades de saída foi selecionada. As entradas eram as cinco primeiras frequências naturais à flexão e as saídas eram a localização e o tamanho da fissura. A rede foi treinada usando-se 121 padrões e subsequentemente foi testada contra dados não incluídos no conjunto de treinamento. A rede treinada gerou saídas satisfatórias para a localização e tamanho da fissura.

Uma aproximação para treinar redes de dois passos hierárquicas também foi investigada. Foram formadas duas topologias de redes diferentes sendo que a rede com cinco unidades de entrada, duas camadas escondidas, cada uma com doze unidades e uma unidade de saída foi selecionada. As entradas consistiam das cinco frequências naturais e a localização do dano, a saída. Uma segunda rede com seis unidades de entrada, duas camadas escondidas, cada uma com oito unidades e uma unidade de saída foi testada. As entradas consistiam das cinco primeiras frequências naturais e a localização da fissura. O tamanho da fissura foi tomada como saída. Foi notado que a aproximação hierárquica parecia gerar aproximações melhores. Kirkegaard (1995) estudou a aplicação de duas diferentes redes parcialmente recorrentes que foram estruturadas como redes multicamada para a identificação de estruturas não lineares. Foi deduzido que duas redes recorrentes são capazes de modelar um oscilador com amortecimento viscoso e com histerese sujeitas a um carregamento dinâmico estocástico.

Chassiakos e Masri (1992) estudaram o uso de RNA para identificar as forças internas de sistemas estruturais típicos sob várias excitações. Os dois tipos de sistemas que foram investigados incluíam os sistemas estruturais lineares e os sistemas não lineares dinâmicos. Os mesmos autores (1991) também estudaram a aplicação de redes BP na identificação das forças internas de sistemas típicos encontradas no campo da dinâmica estrutural. As redes treinadas puderam caracterizar as forças internas tanto para sistemas lineares como não lineares de um grau de liberdade.

Elkordy *et al*(1993) usaram redes BP para modelar os estados de dano de um pórtico de aço de cinco pavimentos. Eles usaram as mudanças nos sinais de vibração em lugar dos seus valores absolutos como entrada na rede neural. Uma de suas conclusões foi a de que mais amostras de treinamento seriam necessárias para um correto treinamento uma vez que uma primeira rede treinada com menor precisão não obteve resultados satisfatórios.

Wu *et al*(1992) estudaram a aplicação de redes BP para simular estados de dano em um pórtico de aço de três pavimentos. A rede BP usada por eles consistia de 200 unidades na camada de entrada, uma única camada escondida com dez unidades e três unidades na camada de saída. A entrada representava uma certa banda dos espectros de Fourier e as saídas o estado de dano de cada pavimento. Um total de 43 padrões de treinamento foram usados, consistindo de 42 espectros de frequência de acelerações relativas registradas ao nível do topo do pavimento juntamente com a informação que indicava o pavimento danificado e a extensão deste dano.

Rehak *et al* (1989) estudaram a aplicação de redes neurais para a identificação da resposta de sistemas estruturais. Um sistema de dois graus de liberdade foi selecionado para fins de simulação e foi sujeito a uma excitação de terremoto de uma única componente. Uma rede de alimentação à frente (*feedforward*) de quatro unidades na camada de entrada e uma unidade na camada de saída foi selecionada. Esta rede não possuía nenhuma camada escondida. As entradas em um tempo  $t$  consistiam na excitação devido ao terremoto, o deslocamento, a velocidade e a aceleração. A saída consistia na aceleração no passo de tempo  $t + 1$ .

Yen (1994) explorou o uso de RNA na identificação e controle de grandes estruturas. O uso de redes de função de base radial (RBF - *Radial Basis Function*) (1989) como um controlador de aprendizagem foi examinado a fim de se alcançar a supressão e/ou controle da vibração. Embora a rede de retropropagação (*back-propagation*) tenha mostrado sua efetividade na aproximação de qualquer função com um grau arbitrário de precisão, foi decidido empregar a rede RBF. Uma rede de função de base radial típica tem uma camada escondida e mostrou-se ser um aproximador universal (Hartman(1990)). Uma função de Gauss pode ser usada como meio de treinamento de uma rede RBF. Esta função (1993) pode ser definida por:

$$h_j = e^{-\frac{\|x_{ij} - w_{ij}\|^2}{2\sigma_i^2}} \quad (2.1)$$

onde  $h_j$  é a saída do  $j$ -ésimo neurônio na camada escondida,  $x_{ij}$  é a entrada da  $i$ -ésima unidade de entrada para a  $j$ -ésima unidade escondida,  $w_{ij}$  denota o peso para a  $i$ -ésima unidade da ca-

mada de entrada para a  $j$ -ésima unidade da camada de saída e  $\sigma$  é o desvio padrão da função de Gauss. As saídas das unidades na camada de saída são determinadas por:

$$\sigma_j = w_{ij}h_j \quad (2.2)$$

onde  $w_{ij}$  é o peso do  $i$ -ésima unidade da camada escondida para a  $j$ -ésima unidade da camada de saída.

A identificação de falhas em uma estrutura de viga usando RNA foi investigada por Takahashi e Yoshioka (1995). O objetivo deles era treinar uma rede neural com padrões simulados das mudanças relativas nas frequências naturais e os correspondentes tamanhos e localização da falha a fim de reconhecer o comportamento do dano e da manutenção da estrutura. Foi feito um treinamento com uma rede de retropropagação (*back-propagation*) com uma topologia de rede de cinco unidades de entrada representando as cinco primeiras frequências naturais, duas camadas escondidas com cinco e seis unidades e duas unidades na camada de saída que representavam o tamanho e a localização da falha.

## 2.2.6 Aplicação de redes de retropropagação na análise estrutural

Hajela e Berke (1992), (1991) exploraram a aplicação de redes de retropropagação no dimensionamento e na análise estrutural. Foi dado ênfase ao uso de redes neurais para representar as relações de força-deslocamento usadas na determinação da resposta de deslocamentos ou tensões em análises estruturais estáticas. A análise foi usada no dimensionamento do peso mínimo de sistemas estruturais com restrições de projeto especificadas.

Mukherjee e Deshpande (1995), (1995) estudaram a aplicação de redes neurais no projeto preliminar de estruturas. A aplicação de RNA no projeto de uma viga de único vão de concreto armado foi explorado. As entradas da rede consistiam no vão da viga, o tipo de aço escolhido, o tipo de concreto e a carga aplicada. As saídas estavam na forma da área de aço tracionado, largura e profundidade da viga, custo da viga por metro e a sua capacidade portante à flexão.

A aplicação de RNA para otimizar as propriedades de materiais compostos como o concreto foi explorada por Wittmann e Martinola (1993). A otimização foi feita considerando-se três passos. Primeiramente a composição do concreto fresco foi considerada. Depois, as condições de cura e compactação foram levados em conta e, finalmente, parâmetros que influ-

enciam na durabilidade foram introduzidos. Desta forma, um sistema consistindo de três redes neurais treinadas foi desenvolvido onde cada rede neural representava um dos três passos.

VanLuchene e Sun (1990) aplicaram uma rede com alimentação à frente (*feedforward*) na simulação da análise estrutural de uma placa retangular simplesmente apoiada. O objetivo era prever a localização e magnitude do momento máximo na placa quando sujeita a uma carga concentrada. As entradas da rede incluíam quatro quantidades: as dimensões da placa nas direções  $x$ - $y$  e as coordenadas  $x$ - $y$  dos pontos onde a carga era aplicada. As saídas consistiam em seis quantidades: a localização e valor do máximo momento à flexão em ambas as direções.

Lee e Hajela (1994) investigaram a aplicação de redes com alimentação à frente (*feedforward*) para prever propriedades geométricas, como a relação do momento de inércia e o raio de giração de formas planares não homogêneas. O estudo estava baseado no trabalho dos mesmos autores (1993) onde as formas não homogêneas foram representadas por descritores Fourier-Polar-Fourier (FPF) com ênfase no estudo do efeito da redução do mapeamento das não linearidades presentes nos padrões de treinamento através da normalização das amostras de entrada. Uma rede neural treinada pôde prover estimativas rápidas das propriedades geométricas e assim reduzir o uso de programas de uso intensivo de CPU para a estimação das características de distribuição de tensão-deformação em modelos geométricos. O mapeamento das não linearidades entre as entradas e as saídas nas amostras de treinamento foram reduzidas de forma a permitir à rede neural aprender mais eficientemente. Os mesmos autores investigaram a predição do desempenho de turbinas (1994) usando uma técnica melhorada do mapeamento das não linearidades.

Cauvin (1995) estudou o uso de uma RNA do tipo percéptron com duas camadas como um banco de dados que pode agir como um sistema especialista no projeto preliminar de estruturas.

A aplicação de RNA na geração de malhas não recebeu muita atenção. Hartle e Jambunathan (1996) estudaram a aplicação de RNA para geração de malhas. Foram treinadas redes neurais de retropropagação (*back-propagation*) para prever todas as coordenadas  $x$ - $y$  internas de uma estrutura com malha bidimensional de elementos quadriláteros. O domínio consistia de uma malha padrão de  $10 \times 10$  elementos e que resulta em  $11 \times 11 \times 2$  valores de coordenadas. As entradas da rede consistiam de seis valores que representavam o número de células em cada região dos eixos e quatro pares de coordenadas  $x$ - $y$  descrevendo a localização de cada canto do quadrilátero. Uma rede BP com 14 unidades na camada de entrada, 100 unidades na

camada escondida e 242 unidades na camada de saída foi treinada usando 1000 configurações de malhas diferentes. Os resultados indicaram que para a configuração escolhida, mais de 79% das predições das coordenadas  $x$  e  $y$  estavam dentro de 1.14% da sua posição correta.

Shieh (1994) usou uma combinação de RNA com um modelo computacional baseado no Método dos Mínimos Quadrados em um procedimento de re-análise estrutural. O modelo substituiu completamente o módulo de re-análise estrutural via elementos finitos e os cálculos foram feitos num ambiente de Processamento Massivamente Paralelo (PMP). O modelo foi testado para a obtenção do peso mínimo de estruturas de treliças. O mesmo autor fez outro estudo (1994) onde substituiu o método dos gradientes conjugados pré-condicionado baseado na solução de sistemas de equações lineares por uma rede neural treinada. O modelo foi formulado em uma máquina de ambiente de PMP e obteve relativo sucesso.

Hoit *et al* (1994), (1994) investigaram a aplicação de redes de alimentação à frente (*feedforward*) no renumeramento de equações. O método de renumeração era baseado no algoritmo de renumeração nodal através da minimização do perfil de blocos. Foram usadas redes neurais de retropropagação (*back-propagation*) as quais podiam predizer o conjunto de parâmetros usados no esquema de renumeração.

Biedermann e Grierson (1994) usaram uma rede de retropropagação para extrair conhecimentos heurísticos do projeto de um conjunto de exemplos para seu uso subsequente durante o projeto detalhado da estrutura de um edifício. As entradas na rede consistiam nas características da estrutura como um todo, tais como simetria, número de peças de um mesmo tipo particular e assim por diante, e as características correspondentes a peças particulares tais como localizações de carga, condições de apoio, etc. As saídas da rede eram a identidade do grupo de fabricação para o qual a peça em consideração deveria pertencer e o número total de grupos daquele tipo de componente estrutural que o edifício teria. Várias redes foram treinadas para cada tipo de peça como vigas de pavimento, vigas de cobertura, colunas externas e colunas internas. As redes treinadas eram então integradas em um modelo orientado ao objeto para formar um programa genérico para o projeto orientado de sistemas de edifício.

O treinamento de redes com retropropagação (*back-propagation*) foi usado por Arslan e Ince (1994) no projeto de lajes bi-apoiadas de concreto armado. As entradas na rede consistiam em três tipos de momento: o momento negativo, o momento positivo devido às cargas permanentes e o momento positivo devido às cargas acidentais. As condições de apoio da laje representavam as próximas nove entradas e a relação largura comprimento da laje. As saídas

da rede foram os dois coeficientes de momento. Bons resultados foram então obtidos com este algoritmo para treinamento e tipo de rede.

O teste de integridade de superfícies de concreto usando RNA foi considerada por Begum *et al* (1995). Ele mostrou a aplicação de redes de retropropagação para um problema de fissura incorporada onde a entrada da rede consistia nas amplitudes das ondas geradas por métodos de ensaios não destrutivos e as saídas incluíam o comprometimento global do defeito no concreto e os limites para as profundidades da fissura.

Jenkins (1995) estudou a aplicação de redes BP para aproximar análises estruturais. Um pórtico estrutural de aço de seis pavimentos com articulações rígidas foi selecionado para análise. As entradas na rede incluíam duas variáveis geométricas, o vão das vigas externas e a altura do pavimento, e duas variáveis de propriedade da peça, segundo momento de inércia de viga e coluna. As três saídas incluíam os deslocamentos e as resultantes de tensão. Um total de sessenta conjuntos de dados de treinamento foram preparados e dez vetores foram deixados para posterior teste da rede treinada. O autor conclui que as RNA podem aproximar a análise de estruturas simples desde que se forneça dados de treinamento suficientes e que o número de unidades na camada escondida seja suficiente para representar as características internas e as relações entre os valores de entrada e saída. Neste tema, no Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, Gomes e Awruch (1999), (2000) avaliaram o uso de redes de retropropagação (do tipo perceptron multicamada) para a aproximação da resposta estrutural de pórticos planos simples de estruturas metálicas. Também avaliou-se a escolha de arquiteturas ótimas, indicando a necessidade de uma melhor avaliação desta e da quantidade de amostras para um bom treinamento e aproximação da resposta estrutural pela rede neural.

Anderson *et al* (1993) investigou a predição do comportamento de conexões secundárias de eixos de aço usando redes BP. O estudo considerou conexões entre vigas e colunas que restringem as colunas quanto à flambagem. Experimentos foram feitos e dados de treinamento foram gerados. Os vetores de entrada para a rede incluíam a profundidade da seção da coluna, espessuras dos flanges da coluna, espessuras da alma da coluna, largura do flange da viga, profundidade da seção da viga, número de parafusos e as espessuras das placas. As saídas eram os momentos últimos e as correspondentes rotações nos nós.

### **2.2.7 Otimização de treliças usando redes de Hopfield**

Redes de Hopfield podem ser usadas como memórias associativas ou como ferramentas para resolver problemas de otimização. Problemas de otimização podem ser resolvidos

usando este tipo de rede neural mapeando o problema da função de energia da rede de Hopfield, mostrada na equação (2.3) abaixo:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^N I_i s_i \quad (2.3)$$

onde  $I_i$  é a tendência da  $i$ -ésima unidade,  $N$  é o número de unidades de processamento,  $s_i$  representa o estados das unidades  $i$  e  $j$  da rede conectada através dos pesos  $t_{ij}$ .

Hajela *et al* (1993), (1992) estudou a aplicação de redes Hopfield de estados binários para a otimização de estruturas treliçadas. Uma treliça simples mostrada na Figura 2.2 foi considerada, onde, por simplicidade, foi adotado os comprimentos nominais de todos os elementos estruturais iguais. O problema a ser resolvido era o da distribuição ótima das barras, onde se procurava a posição de uma barra de treliça particular a fim de reduzir a distorção geral e de forma a minimizar as pré-cargas nas barras.

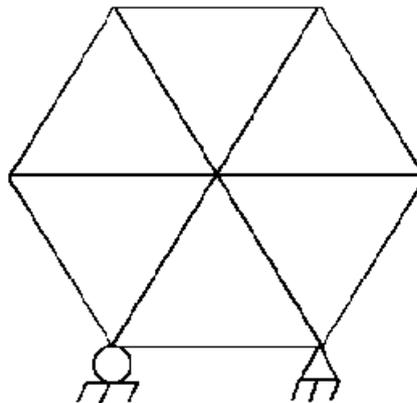


Figura 2.2 - Treliça plana analisada e otimizada usando redes de Hopfield.

O problema foi mapeado para a equação (2.3) de forma que para as variáveis  $s_i$  e  $s_j$  representassem a colocação da peça estrutural, ou seja se a variável fosse unitária, a peça estrutural estava colocada na posição correta  $i$  e 0 no caso contrário. O objetivo de usar a rede Hopfield como aproximação para a otimização era o de ajustar o valor dos pesos das conexões da rede e também a saída de cada unidade de processamento tal que um estado estável de energia fosse alcançado. A dificuldade encontrada estava na sensibilidade das constantes usadas para a definição da função de energia.

Kishi *et al.* (1993) estudou a aplicação da rede de Hopfield para resolver problemas de otimização de valores discretos. Eles propuseram um método de otimização baseado na rede Hopfield chamado o Neuro-Otimizador. Foi considerada a otimização de uma estrutura de treliça cujas barras eram uniformes e homogêneas e onde a configuração da estrutura, os ma-

teriais usados e as condições de carregamento eram assumidas como dadas. O problema foi formulado de forma a determinar a dimensão ótima da seção transversal das barras de forma a minimizar o peso e a massa estrutural, considerando-se certos critérios de falha determinísticos.

Lou e Perez (1994) empregaram as redes de Memória Associativa de Hopfield contínua e bi-direcional (BAM - *Bidirectional Associative Memory*) (1988) na análise estrutural. Uma rede de BAM se assemelha à rede Hopfield e tem no mínimo duas camadas com pesos *feedforward* e *feedback* entre as camadas. A rede foi usada para minimizar uma função de energia do tipo Liapunov a qual convergiu a um estado estável. Lou e Perez mapearam problemas estruturais sobre uma função de energia tanto para a rede de Hopfield contínua como para redes BAM baseado no método dos deslocamentos. Dos resultados de deslocamentos nodais da simulação estrutural, foi deduzido que a velocidade de convergência do sistema de BAM era maior que a do modelo de Hopfield.

Modelos de redes de Hopfield foram propostos por Kortesis e Panagiotopoulos (1993) para resolver problemas de otimização estrutural. Investigou-se otimizações sem restrições ou com restrições em forma de desigualdade para um potencial quadrático ou função de energia complementar. Foram estudadas análises estruturais em casos de contato bilateral e unilateral. As suas conclusões foram as seguintes:

- Erros de arredondamento não influenciam o algoritmo de redes neurais;
- Em um ambiente neural a necessidade de distinguir entre os problemas unilaterais e bilaterais pode não ser necessária;
- A solução de problemas unilaterais em um ambiente neural permite a estimação de pontos ótimos em contraste com o método clássico da penalidade ou métodos de multiplicadores de Lagrange que conduzem ao cálculo de uma estimativa média da norma de energia;
- A aproximação por redes neurais para problemas de contato bilaterais onde há elementos com singularidades permite uma solução mais eficiente do problema próximo à singularidade;
- O método dos elementos de contorno pode ser formulado em um ambiente neural considerando os problemas de contorno mínimo; e
- O algoritmo perceptron para aprendizado supervisionado de redes neurais permite uma nova formulação e tratamento numérico de praticamente todos os tipos de problemas de identificação de parâmetros.

Um estudo semelhante foi feito por Theocaris e Panagiotopoulos (1993) para os casos clássicos de fissuras e aqueles envolvendo a fricção de Coulomb (contato unilateral) e condições de interface de separação. Os mesmos autores também investigaram a aplicação de RNA para problemas de identificação de parâmetros na análise estrutural (1995a)(1995b). O estudo lidava com a aplicação do aprendizado supervisionado e não supervisionado que pode substituir problemas de plasticidade com encruamento anisotrópico através de uma seqüência apropriada de problemas elásticos anisotrópicos.

Uma aproximação semelhante à rede Hopfield contínua foi adotada por Zeng (1995) para resolver problemas na engenharia estrutural. Um problema de análise estrutural foi mapeado sobre a rede através da conexão de pesos os quais foram representados pelos coeficientes da matriz de rigidez e as cargas nodais de elementos de barra/viga/placa como entradas na rede. Estudo de casos foram feitos em treliças de 4, 7 e 15 barras, numa viga e numa estrutura contínua plana, nos quais a rede convergiu a um estado estável, sendo os respectivos deslocamentos determinados pela rede.

## **2.2.8 Criação de malhas de elementos finitos através de mapas de Kohonen**

A geração de malhas de elementos finitos foi estudada por Sarzeaud *et al* (1991) usando os mapas auto-organizáveis de Kohonen da seguinte forma:

- Partição da geometria do domínio em sub-domínios convexos;
- A distribuição dos nós nos contornos e as áreas que são críticas (zonas de alta densidade) são especificadas;
- Para cada um dos sub-domínios seleciona-se uma rede baseada na distribuição dos nós dos contornos;
- Os pesos dos neurônios periféricos são avaliados de forma a coincidir com os nós no contorno;
- Cada rede organiza-se para gerar um pedaço da malha;
- Monta-se os sub-domínios para formar a malha final.

A técnica de geração de malhas mostrou que a qualidade da geração geométrica é satisfatória. Também, a aproximação por rede neural permitiu a combinação de diferentes tipos de elementos (triângulos e quadriláteros).

## 2.2.9 A rede ART no projeto conceitual

Hajela *et al*(1992)(1991) usou uma rede ART (*Adaptive Resonant Theory*) como um dispositivo de memória associativa no projeto conceitual de sistemas estruturais. Foram considerados duas classes de projetos distintas. A primeira, incluía estruturas onde a configuração estrutural era geralmente conhecida e onde era permitido variar as cargas e condições de apoio. A segunda classe considerava problemas onde a carga e condições de apoio foram assumidas dadas previamente, sendo o objetivo gerar dimensionamentos próximos ao ótimo. O dimensionamento ótimo de sistemas estruturais relativo à geometria estrutural pode ser determinado através de um processo de projeto distinto de acordo com cada condição de apoio ou carga. O problema considerado foi o projeto ótimo da seção transversal de uma viga para uma dada resistência uniforme permitida e peso mínimo. As propriedades ótimas da seção foram completamente baseadas no valor do momento fletor naquela seção. Estes valores foram determinados pelas condições de apoio e tipo de carregamento aplicado. Os tipos de cargas e as condições de apoio eram críticos e foram representados pelos códigos binários de quatro dígitos mostrados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Representação binária das características de um problema.

Caracterização do Problema	Dígito Binário	Estado da viga
A	0	O apoio esquerdo é simplesmente apoiado
	1	O apoio esquerdo é engastado
B	0	O apoio direito é simplesmente apoiado
	1	O apoio direito é engastado
C	0	A carga é uma força
	1	A carga é um momento
D	0	A carga é concentrada
	1	A carga é uniformemente distribuída

Assim foram atribuídas quatro unidades para cada dígito dos padrões de entrada na camada de comparação da rede ART. A camada de reconhecimento poderia ter tantas unidades quanto o número de padrões apresentados para a classificação. Neste problema a influência do parâmetro de vigilância (limite) da rede ART foi testado contra o grau de classificação. Foi notado que com um limite de vigilância mais alto, diferenças secundárias nos padrões de entrada são tratadas como parâmetros críticos e então são agrupados em categorias diferentes. Um valor do limite de vigilância mais baixo resultou na criação de um pequeno número de categorias. A experiência mostrou que uma rede ART pode ser usada para prover uma capaci-

dade de memória ou uma base de conhecimento para projetos onde podem ser recuperadas informações sobre características relevantes do sistema.

## **2.2.10 Redes de propagação em sentido contrário na mecânica estrutural**

Szewczyk e Hajela (1992) investigaram a aplicação redes neurais na aproximação de funções juntamente com uma estratégia de simulação de recozimento para a otimização de sistemas estruturais. Eles usaram uma rede de propagação em sentido contrário (*counterpropagation*, CP) melhorada. Foram obtidos dimensionamentos próximos ao ótimo de estruturas espaciais e planas de treliças com uma significativa redução total no esforço computacional.

Os mesmos autores (1992),(1994) também usaram a rede CP melhorada para o mapeamento inverso no problema de identificação de sistemas como a avaliação do dano estrutural. Neste estudo, foi usado um modelo de dano estrutural baseado em redução de rigidez nos componentes estruturais de uma treliça e de um pórtico. Simulações foram feitas para a estrutura de pórtico com nove elementos à flexão e dezoito graus de liberdade (deslocamentos  $x$  e  $y$  e a rotação em cada nó). A rede CP treinada gerou resultados precisos. A rede CP foi usada como ferramenta que funcionou como uma memória associativa com a capacidade adicional de generalização.

Adeli e Parque (1995) investigaram a aplicação de redes CP na análise estrutural e dimensionamento e compararam o desempenho das redes CP com as redes BP. Em seus estudos foi verificado uma convergência mais rápida e uma diminuição significativa no tempo de processamento no treinamento para as redes CP em relação às redes BP.

# Capítulo 3

## 3. Elementos Finitos para Concreto Armado

*“... the fact that full 3D modeling enables the structural model to deform more freely (and closer to reality) adds a dimension of complexity to both constitutive modelling of concrete, its bond to steel reinforcement, as well as pre- and post-processing of data”*

*Barzegar, F. et al.*

*1995*

Neste Capítulo é mostrado o modelo para concreto armado desenvolvido para posterior utilização na análise de confiabilidade. Destaque é dado às inovações implementadas no modelamento que o tornam bastante robusto. Comparações entre resultados numéricos e resultados experimentais estão mostradas.

### 3.1 Modelo constitutivo para concreto

O concreto é um material que apresenta diferentes comportamentos quer à tração quer à compressão. No ensaio de compressão uniaxial, a aproximadamente  $0.3f_{cm}$ , o comportamento do concreto deixa de ser elástico linear tendo um comportamento não-linear, surgindo as primeiras microfissuras neste estágio. A aproximadamente  $0.75f_{cm}$ , inicia-se o processo de propagação instável de fissuras. Após este nível de tensões, o comportamento é bastante não linear, com progressiva falha do concreto e perda da sua capacidade de resistir a incrementos de tensões até atingir a sua ruptura para  $f_{cm}$ . Já para uma curva de tração uniaxial, observa-se um comportamento de material quase frágil, quase que elástico até a sua ruptura  $f_{tm}$ . Também como na compressão não há perda total da capacidade de carga, mas sim uma perda progressiva, a qual depende de fatores como dimensões da peça ensaiada e propriedades do material concreto. Neste trabalho para a análise deste comportamento não-linear, emprega-se uma formulação elasto-viscoplástica, juntamente com um critério de fissuras distribuídas.

Para a descrição do comportamento do concreto utiliza-se um modelo constitutivo baseado na elasto-viscoplasticidade. Para isto são feitas três hipóteses básicas: (a) primeiro é definida uma superfície no espaço das tensões ao nível da qual o comportamento do concreto deixa de ser elástico e as deformações viscoplásticas aparecem; (b) é definida uma regra para o endurecimento, pela qual as superfícies de plastificação evoluem até a superfície de falha final; (c) é definida uma regra para definição das deformações viscoplásticas, a qual está relacionada a uma função potencial.

Para o concreto há diversas superfícies de falha que podem ser adotadas. Estas superfícies devem distinguir bem os limites de falha final para o concreto, além de terem certas características desejáveis para este tipo de material. Se desenharmos a superfície de falha para o concreto no espaço das tensões principais ela terá uma forma como a indicada na Figura 3.1:

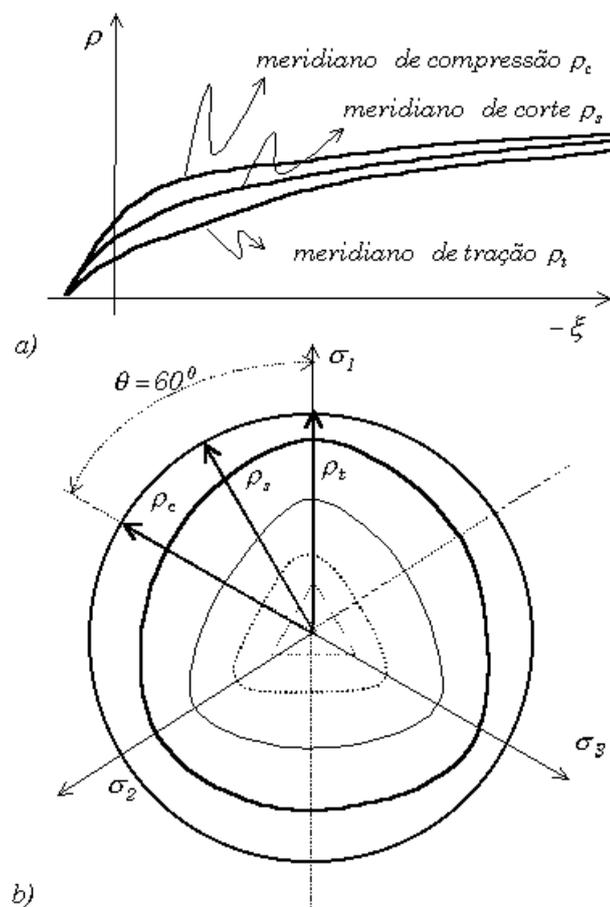


Figura 3.1 - Superfície de falha para o concreto no espaço das tensões principais: a) corte pelo eixo hidrostático; b) vista isométrica.

Considerando-se que  $\sigma_1 > \sigma_2 \geq \sigma_3$  são as tensões principais para o estado de tensões,  $\xi = \sigma_m = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  é a reta que contém as tensões hidrostáticas e  $\rho$  é o módulo do vetor formado pelas tensões desviadoras, como definido na Figura 3.2.

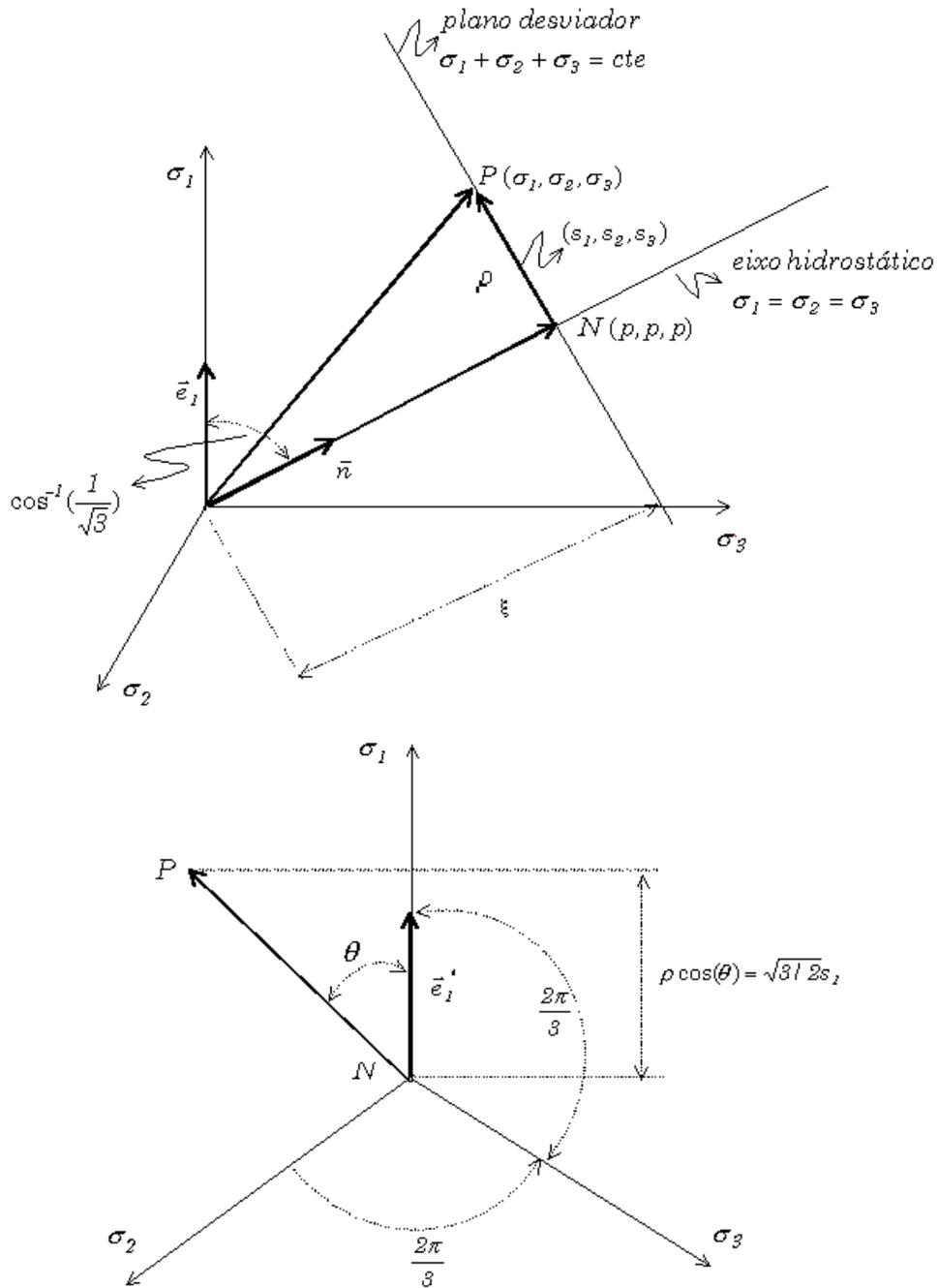


Figura 3.2 - Definições para o espaço das tensões principais.

Observe-se que  $\cos \theta = \sqrt{3}/2(s_1/\sqrt{J_2})$ , sendo  $\theta$  o ângulo de similaridade,  $s_1$  é a tensão desviadora associada à  $\sigma_1$  e  $J_2$  o segundo invariante do tensor de tensões desviadoras.

Devido à isotropia do material, a superfície de falha tem três eixos de simetria, sendo necessário a sua definição em apenas um setor de  $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ . Na Figura 3.1 (a), representa-se um corte da mesma superfície de falha no eixo hidrostático para três ângulos específicos  $\theta = 0^\circ, \theta = 30^\circ, \theta = 60^\circ$ , os quais são referenciados como meridianos de tração, corte e compressão devido ao fato de representarem estados de tensões com uma tensão pura apenas de tração, um estado de corte puro, ou uma tensão pura de compressão, respectivamente. Uma das características do concreto é apresentar  $\rho_t \leq \rho_s \leq \rho_c$  para tensões hidrostáticas positivas e pequenas, sendo a igualdade estabelecida para altos valores negativos das tensões hidrostáticas, que dá uma forma circular à superfície de falha (Chen, 1988).

O comportamento do concreto até a ruptura fica definido através do uso de uma superfície de falha e superfícies de plastificação para os estados de tensões, as quais seguem um regra de endurecimento durante o curso das deformações viscoplásticas. Este endurecimento é função do tipo de material e do trabalho viscoplástico sofrido pelo mesmo. Como superfície de plastificação, utiliza-se uma superfície com a mesma forma que a superfície de falha (aqui utilizada a superfície de quatro parâmetros de Ottosen). Para o estado de tensões de tração-tração-tração, admite-se que não há deformações viscoplásticas devido ao comportamento frágil juntamente com um modelo de amolecimento à tração neste estado de tensões, como é mostrado na Figura 3.3.

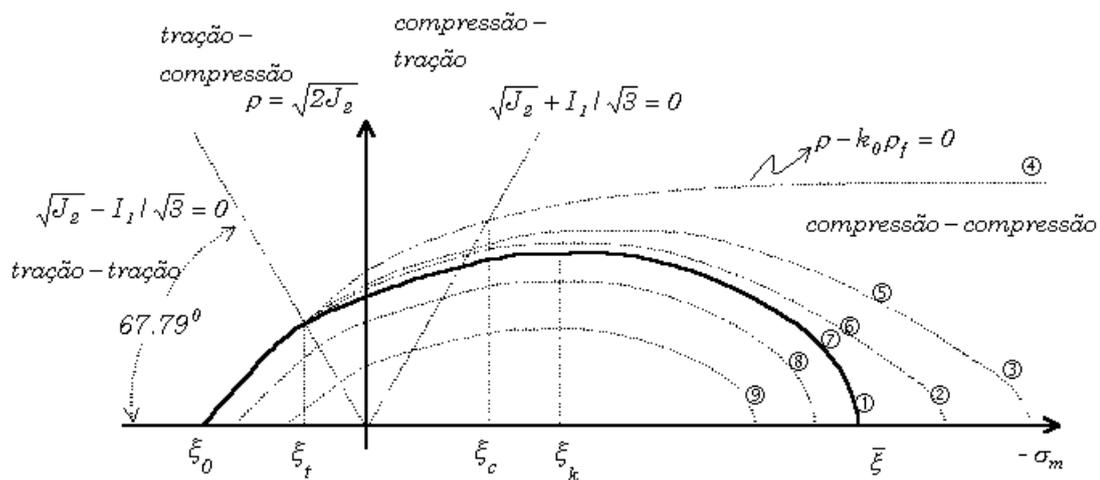


Figura 3.3 - Construção da superfície de plastificação e de carregamento subsequentes.

Como indicado nesta mesma figura, a superfície de falha engloba todas as superfícies de carregamento e permanece inalterada durante o carregamento. A superfície inicial de plastificação tem uma forma fechada na região de compressão, para levar em conta altas pressões de confinamento, enquanto que evolui para uma superfície aberta nesta mesma região na fase

do endurecimento. No ramo do comportamento de amolecimento, a superfície de plastificação encolhe para uma forma proporcional à superfície de plastificação original. Na região de tração a superfície de plastificação coincide com a superfície de falha e nenhuma deformação viscoplástica é permitida até a ruptura frágil. Entretanto, nesta região, a aproximação por fissuras distribuídas ou uma extensão do modelo elasto-viscoplástico para a região de tração pode ser ativado. No plano hidrostático, a superfície de falha/carregamento pode ser escrita como:

$$f(\rho, \sigma_m, \theta) = \rho - k \rho_f(\sigma_m, \theta) = 0 \quad |\theta| \leq 60^\circ \quad (3.1)$$

onde  $\rho = \sqrt{2J_2}$  é a componente de tensão perpendicular ao eixo hidrostático,  $\sigma_m$  é a tensão hidrostática e  $\rho_f$  é a superfície de falha, a qual depende do modelo adotado. Por exemplo para o modelo de quatro parâmetros de Ottosen (1979), ela pode ser escrita como segue:

$$\rho_f = \frac{I}{2\alpha} \left[ -\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2\lambda^2 - 8\alpha(3\beta\sigma_m/f_c - I)} \right] \quad (3.2)$$

onde as constantes apresentadas na equação (3.2) podem ser avaliados como descrito no código modelo CEB-FIP 90 (1990) ou, de uma maneira mais geral, pela resistência uniaxial à compressão ( $f_c$ ), a resistência uniaxial à tração ( $f_t$ ), a resistência biaxial à compressão ( $f_{bc}$ ) e o estado de tensões triaxiais no meridiano de compressão ( $\xi/f_c, \rho/f_c$ ). Um resumo dos modelos de superfícies de falha/plastificação também implementadas neste trabalho no código de elementos finitos para o concreto é apresentado no Apêndice I.

O parâmetro  $k = k(I_1, \varepsilon_{vp}^{eq})$  apresentado na equação (3.1) é o fator de forma que representa a dilatação ou encolhimento da superfície. Este parâmetro é definido de maneira que durante o endurecimento ou amolecimento do material, tanto a forma quanto o tamanho das superfícies de plastificação subsequentes variam continuamente e suavemente de uma forma inicial para as formas seguintes. Este parâmetro pode ser definido através de ensaios experimentais uniaxiais e extrapolados para estados de tensões multiaxiais por meio da definição das relações de tensão e deformação equivalentes ( $\sigma^{eq} = \sqrt{3J_2}$  e  $\varepsilon_{vp}^{eq} = \sqrt{2/3 \varepsilon_{vp,i,j} \varepsilon_{vp,i,j}}$ ). O fator de forma é uma função da deformação viscoplástica equivalente ( $\varepsilon_{vp}^{eq}$ ) e do primeiro invariante do tensor de tensões ( $I_1$ ). A seguinte expressão para  $k$  é usada neste trabalho, como sugerido por Chen (1988)[47]:

$$k(I_1, \varepsilon_{vp}^{eq}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{I_1}{3} \geq \xi_t \\ 1 + \frac{(1 - k_0(\varepsilon_{vp}^{eq}))[-\xi_t(-2\xi_c + \xi_t) - 2\xi_c \frac{I_1}{3} + \frac{I_1^2}{9}]}{(\xi_c - \xi_t)^2} & \text{se } \xi_t \geq \frac{I_1}{3} \geq \xi_c \\ k_0(\varepsilon_{vp}^{eq}) & \text{se } \xi_c \geq \frac{I_1}{3} \geq \xi_k \\ \frac{k_0(\varepsilon_{vp}^{eq})(\bar{\xi} - \frac{I_1}{3})(\bar{\xi} + \frac{I_1}{3} - 2\xi_k)}{(\bar{\xi} - \xi_k)^2} & \text{se } \frac{I_1}{3} < \xi_k \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\xi_c$ ,  $\xi_t$ ,  $\xi_k$  e  $\bar{\xi}$  são valores constantes no eixo das tensões hidrostáticas e que delimitam as regiões de tração-tração, tração-compressão, compressão-tração e compressão-compressão, respectivamente, e  $k_0(\varepsilon_{vp}^{eq})$  é o fator que representa a relação tensão-deformação viscoplástica equivalente.

A relação tensão-deformação viscoplástica equivalente para a curva de compressão uniaxial é aproximada pelas seguintes equações propostas pelo código modelo CEB-FIP 90 (1990) e indicada na Figura 3.4.

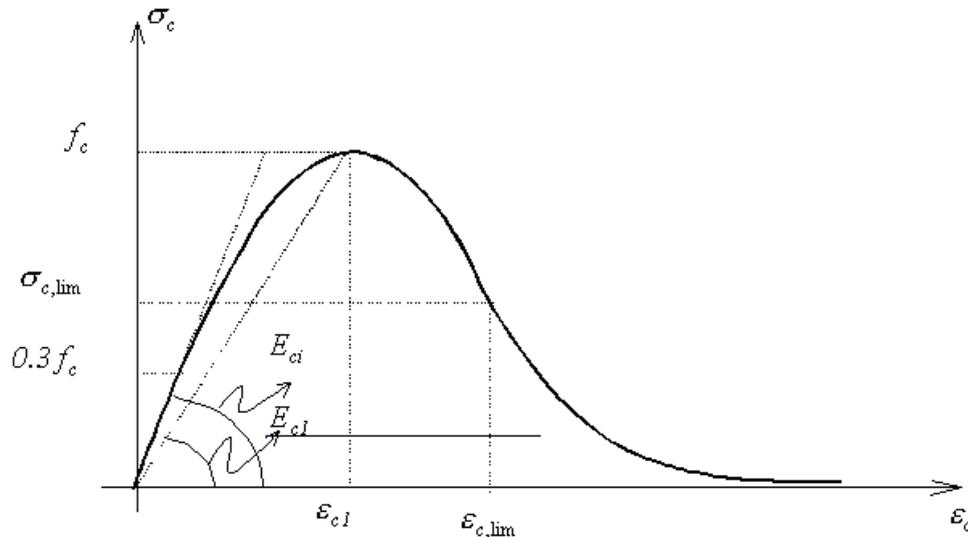


Figura 3.4 - Diagrama tensão-deformação equivalente para o concreto sob compressão uniaxial.

Para  $|\varepsilon_c| \leq |\varepsilon_{c,lim}|$ , tem-se que,

$$\sigma_c = - \left[ \frac{E_{ci}}{E_{cl}} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \right)^2 \right] \cdot f_{cm} / \left[ 1 + \left( \frac{E_{ci}}{E_{cl}} - 2 \right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \right] \quad (3.4)$$

com,

$$\frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

e para  $|\varepsilon_c| > |\varepsilon_{c,\text{lim}}|$ , tem-se que,

$$\sigma_c = - \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon_{c,\text{lim}}/\varepsilon_{c1}} \xi - \frac{2}{(\varepsilon_{c,\text{lim}}/\varepsilon_{c1})^2} \right) \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + \left( \frac{4}{\varepsilon_{c,\text{lim}}/\varepsilon_{c1}} - \xi \right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right]^{-1} \cdot f_{cm} \quad (3.6)$$

com,

$$\xi = 4 \left[ \left( \frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right] / \left[ \frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} \cdot \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 1 \right]^2 \quad (3.7)$$

onde  $E_{ci}$  é o módulo de elasticidade do concreto em (MPa) na idade de 28 dias,  $\sigma_c$  é a tensão de compressão uniaxial equivalente em (MPa),  $\varepsilon_c$  é a deformação uniaxial de compressão equivalente,  $\varepsilon_{c1}$  é a tensão de compressão no valor máximo da tensão de compressão equivalente (geralmente adotado como  $-0.0022$ ) e  $E_{c1} = f_c / \varepsilon_{c1}$  é o módulo de elasticidade secante definido no valor máximo da tensão de compressão equivalente ( $f_c$ ), como indicado na Figura 3.4. Estas relações podem ser invertidas, e adotando um valor limite para o comportamento elástico (por exemplo  $0.3f_c$ ) uma relação explícita entre a deformação viscoplástica equivalente e a tensão equivalente pode ser encontrada. Neste trabalho, esta relação é utilizada para definir  $k_0(\varepsilon_{vp}^{eq})$ .

Para a região de tração-tração, um modelo de amolecimento associado a uma modelo de fissuras distribuídas fixas é adotado no espaço das componentes de tensões principais. A tensão de tração pós-pico é modelada como indicado na Figura 3.5, onde  $\alpha = (G_f - 1/2 E_{ci} \varepsilon_t^2 l_c) / E_{ci} \varepsilon_t l_c$  é o parâmetro de amolecimento,  $G_f$  é a energia de fratura do concreto e  $l_c$  é o comprimento característico equivalente, o qual para elementos isoparamétricos quadráticos com 20 nós, pode ser dada aproximadamente por:

$$l_c = \left( \sum_{\xi=1}^{n_\xi} \sum_{\eta=1}^{n_\eta} \sum_{\zeta=1}^{n_\zeta} \det(\mathbf{J}) \cdot w_\xi \cdot w_\eta \cdot w_\zeta \right)^{1/3} \quad (3.8)$$

onde  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  são os eixos naturais do elemento,  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana,  $w_i$  são os correspondentes pesos para a integração numérica e  $n_i$  é a correspondente ordem de integração. Esta fórmula fornece uma boa aproximação quando a malha de elementos finitos usada para modelar o concreto não for muito distorcida e a maior parte das fissuras estiver alinhada com as

linhas da malha. A equação (3.8), entretanto, não assegura a objetividade do modelo com respeito à regra de integração e à orientação das fissuras que não estejam alinhadas com as linhas da malha. Uma metodologia similar para definir o comprimento característico equivalente usando elementos diferenciais de volume correspondentes ao ponto de integração ao invés de utilizar o volume do elemento foi proposta por Cervera (1994). Esta metodologia também é dependente da regra de integração. Assumindo-se um comportamento idealizado de uma banda singular para elementos fissurados, a seguinte formulação para o comprimento característico equivalente, a qual depende da dimensão da malha, direção das fissuras e posição espacial foi proposta por Oliver(1989):

$$l_c(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \left( \sum_{i=1}^{nc} \left[ \frac{\partial N_i^*(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)}{\partial x} \cdot l_j + \frac{\partial N_i^*(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)}{\partial y} \cdot m_j + \frac{\partial N_i^*(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)}{\partial z} \cdot n_j \right] \phi_i \right)^{-1} \quad (3.9)$$

onde  $j$  representa o ponto de integração,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  são os eixos naturais do elemento,  $l$ ,  $m$  e  $n$  são os cossenos diretores do vetor normal à direção da fissura com respeito às coordenadas globais no ponto de integração  $j$ ,  $N_i^*$  são as funções de forma de elementos equivalentes do tipo  $C^0$  utilizados para a discretização do domínio (para elementos tridimensionais de 20 nós, as funções de forma  $N_i^*$  de elementos tridimensionais de 8 nós devem ser utilizadas) e as funções  $\phi_i$  assumem os valores de 1 ou 0, dependendo da posição dos nós de canto do elemento  $C^0$  com relação à banda da fissura (1 se o nó estiver à frente do plano da fissura e 0 caso contrário). Para a identificação destes nós de cantos, um conjunto de eixos no centro de cada elemento é fixo e orientado com a normal a cada direção da fissura.

Para assegurar a objetividade, o comprimento equivalente deve ser inferior a um certo comprimento característico equivalente introduzido por Hilleborg (1994) e dado por:

$$l_{ch}^H = \frac{E_{ci} G_f}{f_t^2} \quad (3.10)$$

e maior que um comprimento característico equivalente o qual é uma propriedade do material e que depende de sua microestrutura (usualmente três vezes o tamanho do agregado graúdo). Se  $l_c > l_{ch}^H$ , o limite de resistência deve ser reduzido de forma a se obter uma energia de fratura objetiva, quando então uma queda abrupta da tensão de tração ocorre. Isto é levado em conta através da seguinte relação:

$$f_t = \sqrt{\frac{E_{ci} G_f}{l_c}} \quad (3.11)$$

A Figura 3.5 mostra a relação tensão-deformação no local onde a fissura é formada. Na fase (1) as tensões principais permanecem no limite elástico. No ponto (2), quando a superfície de falha é alcançada, como indicado na Figura 3.3, uma fissura é formada e as componentes de tensões principais, componentes de deformações e as correspondentes direções ortotrópicas são guardadas para a avaliação da matriz constitutiva secante ortotrópica. Na posição (3), a fissura previamente aberta fecha parcialmente se a deformação atual no sistema local da fissura  $\varepsilon^{local}$  é menor que a última deformação guardada  $\varepsilon_{ref}$  (ponto (5)). Portanto, a tensão local é computada com o módulo secante, para a fase (4), como  $\sigma^{local} = (\sigma_{ref} / \varepsilon_{ref}) \varepsilon^{local}$ . Caso contrário, como no ponto (6), a tensão local é computada seguindo-se o ramo exponencial descrito na mesma figura.

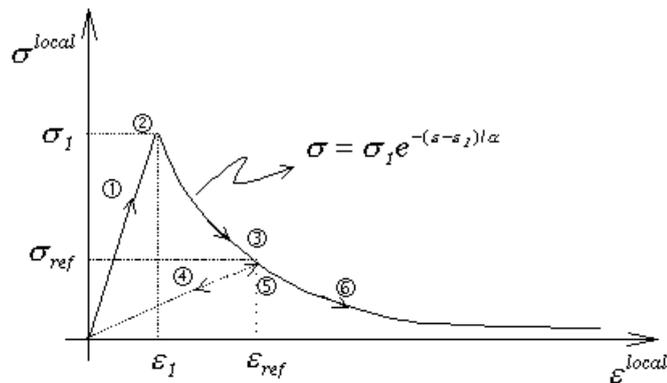


Figura 3.5 - Modelo para amolecimento à deformação (*strain softening*).

## 3.2 Modelo de fissuras distribuídas

No presente modelo de fissuras, há a possibilidade de formação de três fissuras em cada ponto de integração. Estas fissuras são mutuamente perpendiculares entre si, como se mostra esquematicamente na Figura 3.6.

A direção de formação destas fissuras está diretamente relacionada à direção principal do estado de tensões no ponto de integração. Aqui neste trabalho adotou-se o critério proposto pelo CEB-FIP 90 (1990) para a distinção entre falha por fissuração e falha por esmagamento. Este critério afirma que o estado de tensões no ponto de integração ao ultrapassar a superfície de falha para o concreto origina uma falha cujo tipo é determinado pelo valor da primeira tensão principal (tensões ordenadas de forma decrescente,  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ), podendo-se distinguir entre fissuração e esmagamento. Assim, segundo o CEB-FIP 90 (1990), quando se tem  $f(\rho, \sigma_m, \theta) > 0$  e  $\sigma_1 > f_t / 2$ , o tipo de falha é por formação de fissuras sendo no caso contrário falha por esmagamento.

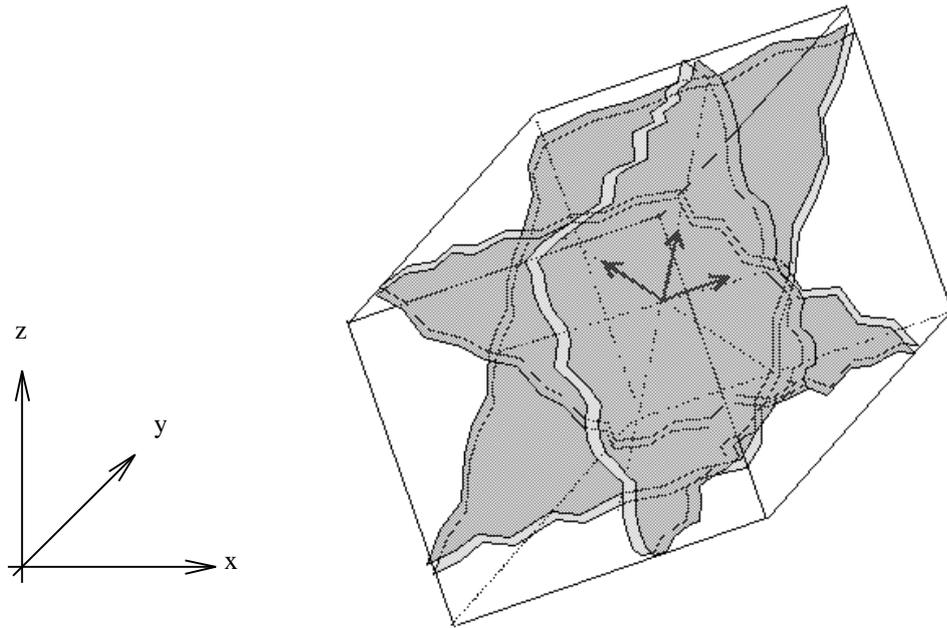


Figura 3.6 - Esquema para fissuras ortogonais fixas em três dimensões em um ponto de integração genérico.

A formação da fissura então se dá no plano perpendicular ao da tensão principal. Para as fissuras que venham a se formar depois, o mesmo critério é utilizado para a determinação do tipo de falha. No caso da formação da segunda fissura, a direção é determinada através da avaliação das tensões principais no plano paralelo ao da primeira fissura. Durante todo o processo, as direções das fissuras são mantidas fixas. A formação da terceira fissura se dá apenas quando o critério anteriormente dito for atendido não sendo necessário a avaliação de sua direção, uma vez que ao formar-se as duas fissuras a direção da terceira fica implicitamente determinada, já que as mesmas são mutuamente perpendiculares.

Assumindo-se a seguinte notação para a representação do tensor de tensões e de deformações:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

tem-se que as tensões referenciadas às coordenadas globais e às coordenadas locais podem ser dadas de acordo com as seguintes equações:

$$\sigma^{global} = {}^s \mathbf{D}^{global} \varepsilon^{global} \quad (3.13)$$

$$\sigma^{local} = {}^s \mathbf{D}^{local} \varepsilon^{local}$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva secante referente a cada um dos sistemas de coordenadas e sendo dada especificamente para o sistema local por:

$${}^s \mathbf{D}^{local} = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \nu_{23}\nu_{32})E_1}{\bar{\nu}} & \frac{(\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{32})E_2}{\bar{\nu}} & \frac{(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})E_3}{\bar{\nu}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})E_1}{\bar{\nu}} & \frac{(1 - \nu_{13}\nu_{31})E_2}{\bar{\nu}} & \frac{(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})E_3}{\bar{\nu}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})E_1}{\bar{\nu}} & \frac{(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})E_2}{\bar{\nu}} & \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})E_3}{\bar{\nu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 G_{13} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

sendo  $\bar{\nu}$  dado por:

$$\bar{\nu} = I - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{13}\nu_{32} \quad (3.15)$$

e também

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{I}{2} \left[ \frac{E_1}{2(I + \nu_{12})} + \frac{E_2}{2(I + \nu_{21})} \right] \\ G_{23} &= \frac{I}{2} \left[ \frac{E_2}{2(I + \nu_{23})} + \frac{E_3}{2(I + \nu_{32})} \right] \\ G_{13} &= \frac{I}{2} \left[ \frac{E_3}{2(I + \nu_{31})} + \frac{E_1}{2(I + \nu_{13})} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

sendo  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , os valores para o módulo de elasticidade secante em cada uma das direções respectivamente.

Os respectivos valores de  $\beta$  que multiplicam os valores do módulo de rigidez ao corte representam um modelo de retenção de rigidez ao corte (Hinton, 1988). Nos planos das fissuras, certa rigidez ao deslizamento é mantida após a fissuração a qual representa o efeito de pino das armaduras e o engrenamento dos agregados. Este fator de retenção diminui com o aumento da separação da fissura segundo a relação dada em e indicado por:

$$\beta = 1 - (\varepsilon / 0.005)^{0.7} \quad (3.17)$$

Para a transformação da matriz constitutiva do material do sistema local, onde as fissuras terão seus planos perpendiculares aos eixos coordenados, para ao global e vice-versa, a notação dos sistemas de referências que será adotada é indicada na Figura 3.7.

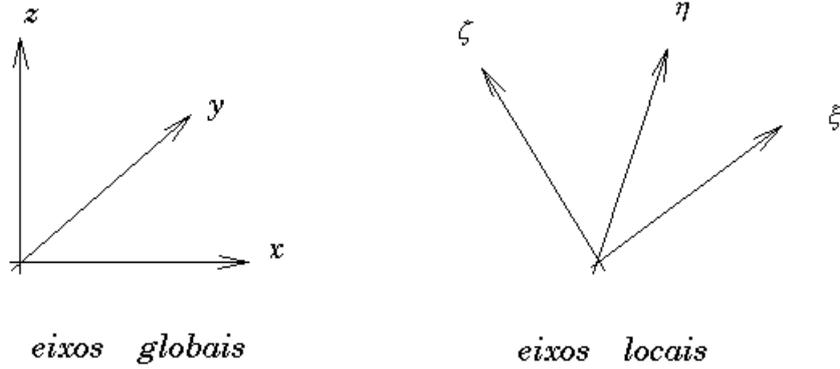


Figura 3.7 - Definição dos eixos globais e locais.

Assim a seguinte matriz de cossenos diretores entre os eixos locais e os globais, pode ser formada:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\xi, x) & \cos(\xi, y) & \cos(\xi, z) \\ \cos(\eta, x) & \cos(\eta, y) & \cos(\eta, z) \\ \cos(\zeta, x) & \cos(\zeta, y) & \cos(\zeta, z) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

e então a matriz que transforma deformações e tensões globais em locais vem dadas, respectivamente por:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1 m_1 & 2m_1 n_1 & 2l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2 m_2 & 2m_2 n_2 & 2l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3 m_3 & 2m_3 n_3 & 2l_3 n_3 \\ l_1 l_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ l_2 l_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ l_1 l_3 & m_1 m_3 & n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Desta forma, qualquer das transformações dos sistema local para global e vice-versa tanto para deformações quanto para tensões podem ser feitas sem maiores problemas utilizando-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{local} &= \mathbf{T}_\varepsilon \varepsilon^{global} \\ \varepsilon^{global} &= \mathbf{T}_\sigma^T \varepsilon^{local} \end{aligned} \quad (3.21)$$

e,

$$\begin{aligned}\sigma^{local} &= \mathbf{T}_\sigma \sigma^{global} \\ \sigma^{global} &= \mathbf{T}_\varepsilon^T \sigma^{local}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Equacionando a energia de deformação virtual complementar para os dois sistemas de coordenadas, obtém-se por fim a matriz constitutiva do material no sistema global em função desta mesma matriz no sistema local da fissura, como indicado na seguinte expressão:

$${}^s \mathbf{D}^{global} = \mathbf{T}_\varepsilon^T {}^s \mathbf{D}^{local} \mathbf{T}_\varepsilon \quad (3.23)$$

A obtenção de curvas do tipo fator de carga *versus* deslocamentos em análises não lineares envolve processos do tipo incremental-iterativo. Se tais processos utilizam relações secantes de equilíbrio, como no presente trabalho, a equação (3.23) é suficiente. Mas se estes processos necessitam do cálculo de incrementos de tensões a partir de incrementos de deformações, uma relação incremental entre as tensões globais e deformações globais deve ser definida. Assim diferenciando as tensões e deformações chega-se às seguintes relações incrementais:

$$\begin{aligned}\sigma^{global} &= \mathbf{T}_\varepsilon^T {}^s \mathbf{D}^{local} \mathbf{T}_\varepsilon \varepsilon^{global} \\ \frac{\partial \sigma^{global}}{\partial \varepsilon^{global}} &= \left( \mathbf{T}_\varepsilon^T {}^s \mathbf{D}^{local} \mathbf{T}_\varepsilon + \frac{\partial \mathbf{T}_\varepsilon^T}{\partial \varepsilon^{global}} \sigma^{local} \right) = \\ &= \left( \mathbf{T}_\varepsilon^T \frac{\partial \sigma^{local}}{\partial \varepsilon^{local}} \mathbf{T}_\varepsilon + \frac{\partial \mathbf{T}_\varepsilon^T}{\partial \varepsilon^{global}} \sigma^{local} \right) = \\ &= \left[ \mathbf{T}_\varepsilon^T \left( {}^s \mathbf{D}^{local} + \frac{\partial {}^s \mathbf{D}^{local}}{\partial \varepsilon^{local}} \varepsilon^{local} \right) + \frac{\partial \mathbf{T}_\varepsilon^T}{\partial \varepsilon^{global}} \sigma^{local} \right]\end{aligned}\quad (3.24)$$

Alguns autores, como Pitangueira *et al*(1999), asseguram que a utilização da formulação acima para relações incrementais entre tensões e deformações, adotando-se a matriz constitutiva secante local ao invés da tangente, é suficiente para a obtenção de bons resultados.

### 3.3 Modelo numérico para armaduras

Em análises tridimensionais não lineares de elementos finitos de estruturas de concreto armado, três modelos numéricos estão disponíveis para a simulação das armaduras: o modelo distribuído, o discreto e o incorporado. A formulação distribuída é mais adequada para estruturas em forma de superfícies, onde as malhas de armadura distribuídas permitem o modelamento de cada camada de armadura separadamente como uma membrana de seção transversal equivalente. Para armaduras não espaçadas uniformemente, tanto a formulação discreta quanto a incorporada são as mais apropriadas. Na formulação discreta, as barras são freqüentemen-

te modeladas como elementos axiais localizados nos contornos dos elementos. Uma restrição óbvia é a de que a malha de elementos de concreto fica dependente da posição das barras, ao invés de representar adequadamente o campo de tensões. Especialmente em aplicações tridimensionais, isto pode levar a custos computacionais elevados devido ao uso de muitos elementos pequenos, não necessários, ou mesmo a erros de precisão causado por elementos com formas muito distorcidas. Para aliviar estes problemas alguns investigadores têm alterado o arranjo real das barras durante o modelamento via elementos finitos, em detrimento da precisão dos resultados.

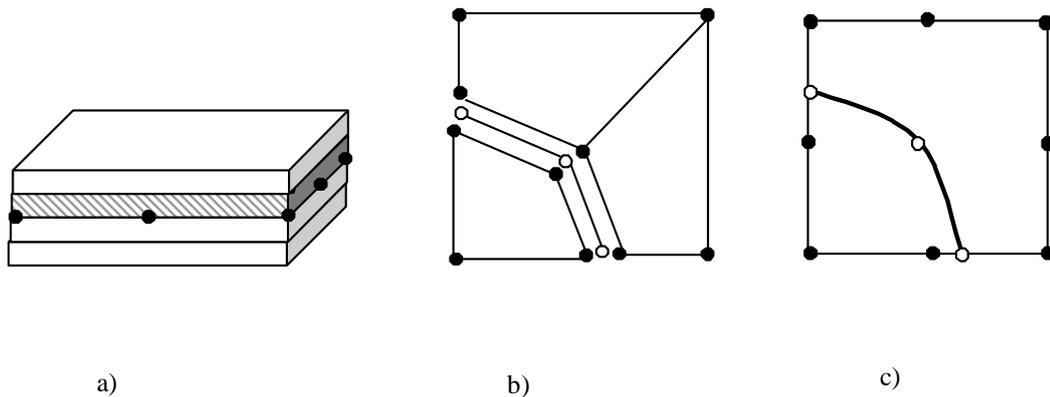


Figura 3.8 - Modelos numéricos para a representação das armaduras: a) distribuído, b) discreto, c) incorporado.

De forma a remediar tais deficiências é preferível usar a formulação incorporada. Este método entretanto, tem sido muito usado em análises via Elementos Finitos bidimensionais. A formulação original de Phillips e Zienkiewicz (1976) foi modificada por Chang *et al* (1987) para permitir que um segmento reto de armadura pudesse ser colocado com um ângulo qualquer em relação aos eixos naturais do elemento isoparamétrico de concreto armado. Balakrishman and Murray(1986) introduziram uma formulação incorporada com capacidade de modelar a aderência entre concreto e armadura. Aperfeiçoamentos adicionais feitos por Elwi e Hrudey (1989) permitiram uma formulação incorporada mais geral para armaduras curvas. El-Mezaini e Citipitioglu(1991), citado em Barzegar(1994), introduziram elementos isoparamétricos com nós móveis para conseguir uma formulação mais eficiente quando é feito o modelamento da aderência entre o concreto e a armadura.

Os requerimentos necessários de grande parte das formulações incorporadas atuais são os de que as coordenadas globais do ponto de interseção entre as armaduras individuais e os elementos de concreto sejam fornecidas pelo analista. Enquanto tais dados de entrada em modelos bidimensionais podem ser manejáveis, para aplicações tridimensionais a determinação

de cada ponto, suas correspondências com os elementos de concreto e a entrada manual de tais dados é formidável. Estes problemas e dificuldades associadas ao cálculo da rigidez para uma localização arbitrária dos elementos de barra incorporada nas malhas tridimensionais de elementos finitos têm levado a algumas restrições, simplificações e aproximações com o intuito de simplificar a geração dos dados de entrada necessários. Isenberg e Levine (1985) impuseram a condição de que as barras incorporadas passassem através dos centróides dos elementos hexaédricos de concreto, Cervera (1986) distribuiu um grupo de barras numa dada localização e as usou como camadas incorporadas dentro dos elementos sólidos de concreto, e Zienkiewicz *et al* (1972) e Bhatt *et al* (1989) impuseram que as barras incorporadas sejam paralelas às coordenadas locais isoparamétricas.

Métodos de elementos finitos para estruturas de concreto armado têm sido desenvolvidos a um nível relativamente avançado com respeito ao modelamento constitutivo, à representação do comportamento de aderência e vários outros aspectos importantes. Entretanto, o problema que permanece é que em certas situações, como por exemplo, na representação de fissuras distribuídas, o resultado de uma análise de elementos finitos e mesmo ainda o modelo constitutivo em si, podem ser fortemente dependentes da malha. Isto deve ser reconhecido quando da escolha da malha, e de fato, deve ser a primeira consideração. Por estas e outras razões, malhas com um alto grau de regularidade são propícias. Em contrapartida as restrições na escolha de malhas que provém do modelamento das armaduras são um outro problema. A fim de alcançar as vantagens de uma malha regular, e ao mesmo tempo modelar complicados detalhes de armaduras, uma representação incorporada das armaduras parece ser a aproximação desejável. Ainda assim, os modelos atuais de armaduras incorporadas, quando aplicadas a problemas com armaduras curvas e cabos de protensão, impõem restrições significativas na seleção de toda a malha. Existe uma necessidade, portanto, para a representação de armaduras curvas incorporadas que permitisse a escolha da malha para representar o concreto de alguma forma independente da geometria e localização das armaduras.

Vários trabalhos têm sido publicados a respeito das representações incorporadas para as armaduras. Phillips e Zienkiewicz (1975) e Elwi (1989) e Murray (1986) separadamente desenvolveram representações incorporadas nas quais a integração do trabalho virtual é feita ao longo das camadas de armadura, sendo as armaduras alinhadas com uma das coordenadas locais dos elementos. Nestas representações, a malha não precisa necessariamente ser retilínea. Isto é útil quando se está analisando estruturas com paredes curvas de espessura constante e distribuição regular de armadura.

Representações incorporadas que permitem uma camada de armadura ser colocada a um certo ângulo dos eixos isoparamétricos dos elemento têm sua utilização restrita a problemas que têm camadas de armaduras retas e malhas retilíneas. Como exemplos disto tem-se o modelo incorporado do programa ABAQUS e aquele publicado por Chang *et al* (1987).

Pinto (1982) (citado em Balakrishanan, 1986) relatou uma formulação limitada de um elemento de armadura incorporada curva e orientada genericamente. Entretanto, a descrição das camadas de armadura é admitida conhecida no espaço isoparamétrico local. Em geral este não é o caso. Por exemplo, se a camada de armadura segue um elemento de contorno, então sua posição no espaço isoparamétrico local é conhecido. Se , entretanto, a camada segue alguma curva arbitrária através do elemento, a posição no elemento não mapeado não é prontamente disponível.

Barzegar *et al* (1991) propôs um modelo mais geral para superar as deficiências dos modelos anteriores utilizando a técnica do Mapeamento Inverso associada a um algoritmo de detecção dos pontos de interseção. Eles assumiram que as barras de aço poderiam ser modeladas como uma seqüência de segmentos retos no espaço das coordenadas globais, sendo necessário, portanto, um refinamento na discretização para definir completamente barras curvas. O algoritmo proposto foi baseado na hipótese de que cada segmento reto pode interceptar ou tangenciar as faces dos elementos tridimensionais somente em um ponto, pois estas faces eram consideradas como planas por Barzegar *et al* (1991), embora na verdade elas pudessem ser faces côncavas ou convexas no domínio físico.

A adoção destas hipóteses pode levar a certas inconveniências. Considere-se, por exemplo, o elemento quadrático tridimensional distorcido esquematizado na Figura 3.9 e o segmento reto de barra, com a seqüência de nós  $i$  e  $j$  no sistema de coordenadas globais que interceptam dois pontos na mesma face do elemento distorcido. Quando mapeados para o sistema de coordenadas naturais do elemento, estes dois pontos irão assumir suas respectivas coordenadas naturais correspondentes ao domínio computacional, como ilustrado na mesma figura. O segmento de barra, antes reto, terá uma forma curva e a hipótese de uma linha reta definida pelos pontos  $i$  e  $j$  no sistema de coordenadas naturais não é adequada. Elementos com faces distorcidas devido a funções de interpolação quadráticas com domínios irregulares e barras com formas curvas (um caso muito comum em vigas de concreto protendido, onde as armaduras de protensão assumem uma trajetória parabólica) são situações onde as barras de aço podem interceptar duas vezes a mesma face de um elemento.

Para superar as restrições do algoritmo proposto por Barzegar, seria necessário substituir o segmento  $i-j$  por vários segmentos retos para obter uma melhor representação no domínio físico (ou sistema de coordenadas globais) das barras que interceptam as faces de um mesmo elemento em mais de um ponto. Como uma procura destes pontos de interseção no domínio físico não é, em geral, adequada para certos casos, parece ser conveniente fazer esta procura ao nível do domínio computacional onde as faces dos elementos são planas. Portanto, uma formulação incorporada modificada é proposta neste trabalho e também apresentada por Gomes e Awruch(2001).

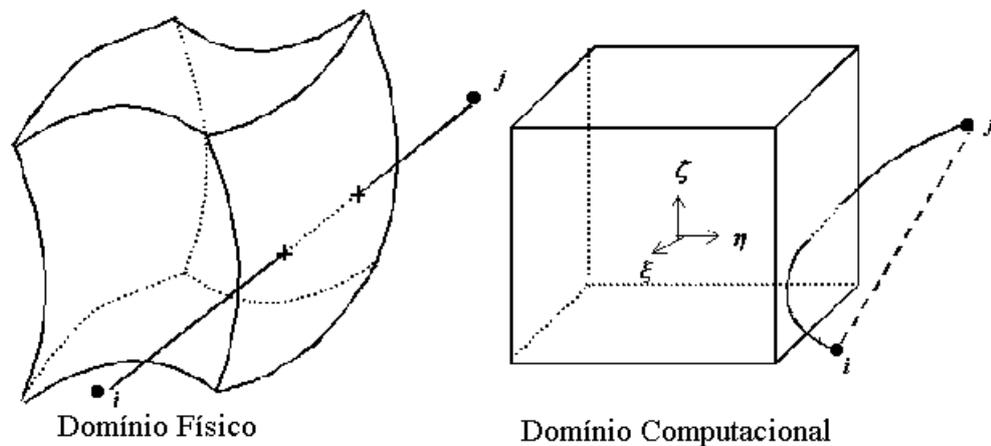


Figura 3.9 - Elemento de concreto e barra de aço no domínio físico e computacional.

Primeiro admite-se que as barras de aço da armadura são completamente definidas no sistema de coordenadas globais por nós que adequadamente representem o grau da curva formada pelas barras. Para barras retas, dois nós são suficientes. Para barras com traçado parabólico, ao menos três nós são necessários. Note-se que na formulação anterior, mesmo para barras retas, se fazia necessário definir múltiplos nós para levar em conta a possível existência de mais de um ponto de interseção em faces distorcidas de elementos. Na presente formulação, as barras são descritas de uma forma paramétrica usando as funções de interpolação de Lagrange, tal que as coordenadas no domínio físico (globais) de um ponto pertencente a esta barra pode ser avaliada através de :

$$\begin{Bmatrix} x^r \\ y^r \\ z^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{nr} N_i^r(\zeta) \cdot x_i^r \\ \sum_{i=1}^{nr} N_i^r(\zeta) \cdot y_i^r \\ \sum_{i=1}^{nr} N_i^r(\zeta) \cdot z_i^r \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

onde  $N_i^r(\zeta)$  são as funções de interpolação de Lagrange,  $\zeta$  é a coordenada paramétrica situada nos limites  $[-1,+1]$ ,  $x_i^r, y_i^r, z_i^r$  são as coordenadas globais dos nós que definem a curva e  $nr$  define o grau da curva formada por uma barra específica.

Os pontos que pertencem a uma dada barra e que interceptam uma face de um elemento devem satisfazer as seguintes condições:

$$|\xi^r| = 1 \quad e \quad |\eta^r| \leq 1 \quad e \quad |\zeta^r| \leq 1 \quad (3.26)$$

onde  $\xi^r, \eta^r$  e  $\zeta^r$  são as coordenadas naturais da barra de aço. A expressão anterior deve ser avaliada para cada um dos eixos naturais. Estas coordenadas naturais podem ser avaliadas como segue:

$$\begin{Bmatrix} \xi^r \\ \eta^r \\ \zeta^r \end{Bmatrix} = \text{Mapeamento Inverso de} \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{nr} N_i^r(\zeta) \cdot x_i^r \\ \sum_{i=1}^{nr} N_i^r(\zeta) \cdot y_i^r \\ \sum_{i=1}^{nr} N_i^r(\zeta) \cdot z_i^r \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Na técnica de mapeamento inverso, procura-se as coordenadas naturais do elemento em questão cujas coordenadas globais correspondam às coordenadas globais da barra de aço. Portanto, equacionando as coordenadas globais do elemento com as coordenadas globais da barra de aço, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} x^r \\ y^r \\ z^r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{ne} N_j^c(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_j^e \\ \sum_{j=1}^{ne} N_j^c(\xi, \eta, \zeta) \cdot y_j^e \\ \sum_{j=1}^{ne} N_j^c(\xi, \eta, \zeta) \cdot z_j^e \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

onde  $N_i^c(\xi, \eta, \zeta)$  e  $x_i^e, y_i^e, z_i^e$  são, respectivamente, as funções de forma do elemento tridimensional de concreto e suas coordenadas nodais e  $ne$ , o seu número de nós. Para resolver a equação anterior é utilizado o algoritmo híbrido devido a M. J. D. Powell (1980). Este algoritmo, o qual é uma variação do método de Newton, toma precauções quanto ao tamanho do passo incremental adotado e resíduos crescentes no processo iterativo de solução. Para cada elemento, uma procura é feita, no sistema de eixos naturais, sobre o valor de  $\zeta$  pertencente a qualquer barra que intercepte, seja tangente ou mesmo apenas toque um elemento. Para tanto é usado um algoritmo simples de bissecção para encontrar as raízes da equação (3.27) com as

restrições dadas pela equação (3.26). Estas raízes podem ser mais de uma para uma mesma face de um elemento, como no caso apresentado na Figura 3.9. Em cada avaliação, a técnica do mapeamento inverso é usada para obter as coordenadas da barra no sistema de coordenadas naturais do elemento.

Uma vez que os pontos de interseção tenham sido encontrados, novos pontos devem ser definidos para satisfazer os requerimentos de compatibilidade entre os segmentos de aço e os elementos de concreto. Se elementos de vinte nós são usados, são necessários três nós para a definição do segmento de armadura. Já para elementos de hexaédricos de 8 nós são usados, apenas dois nós são necessários. Algumas configurações de barras de aço curvas, testadas com sucesso com o algoritmo proposto, são mostradas na Figura 3.10.

Deve-se salientar que a fim de minimizar o tempo computacional requerido por este tipo de modelo de armadura, todo o procedimento de procura de barras implementado é feito apenas uma única vez, sendo todos os dados gerados, automaticamente guardados para posterior utilização.

### **3.3.1 Modelo constitutivo para as armaduras**

Para o modelamento constitutivo do material aço é utilizado um modelo uniaxial elasto-viscoplástico. Três ramos formam este modelo: um ramo linear elástico, um ramo com encruamento linear e outro com encruamento e amolecimento parabólicos. Na Figura 3.11 é mostrado o diagrama tensão deformação para a barra de aço e os parâmetros utilizados para definir a curva. Por simplicidade, este mesmo modelo foi adotado tanto para situações de tração quanto compressão.

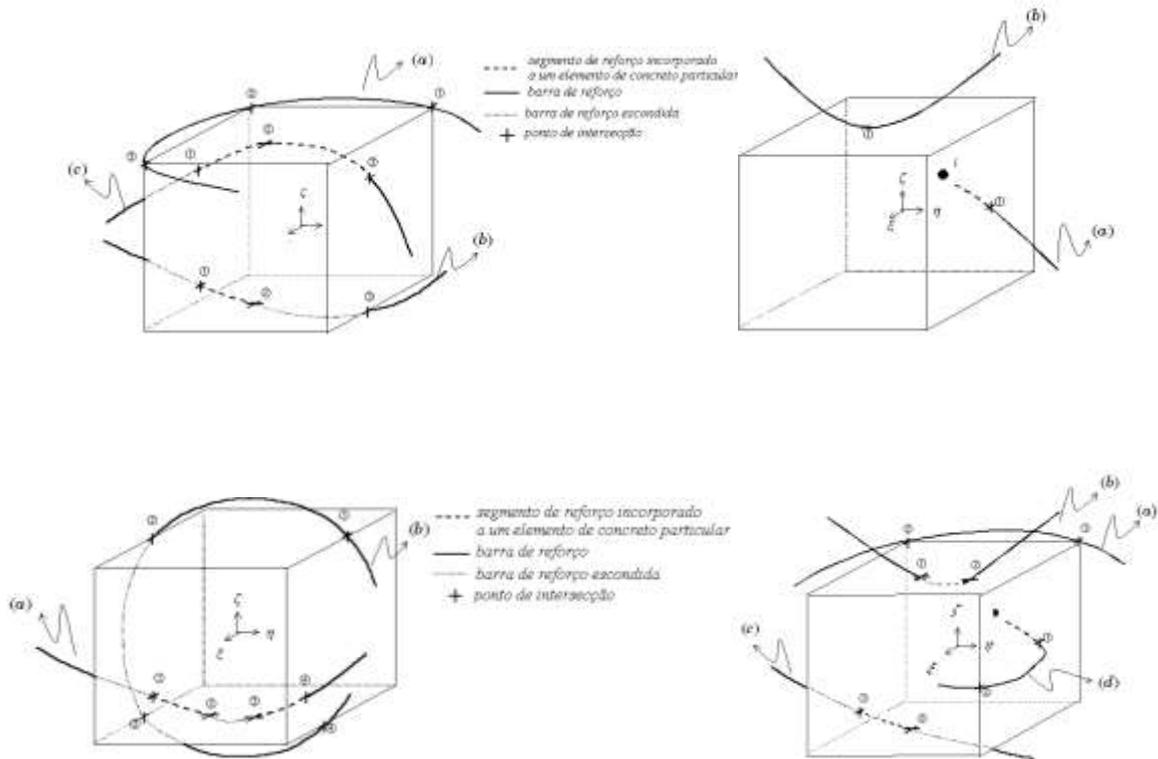


Figura 3.10 - Algumas configurações de armaduras no sistema de coordenadas naturais do elemento testadas com sucesso.

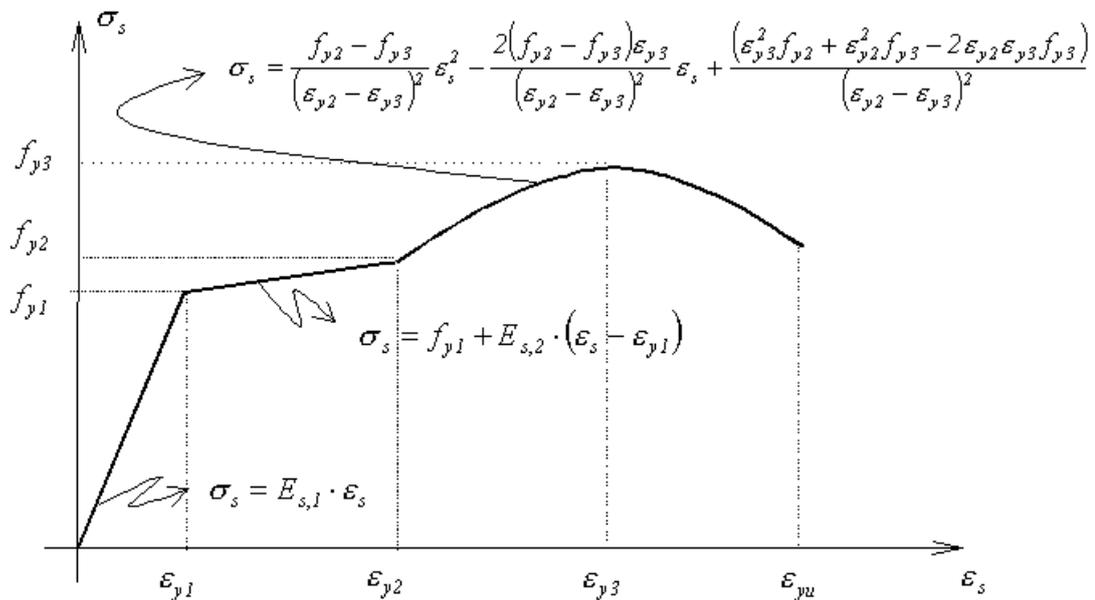


Figura 3.11 - Diagrama tensão deformação uniaxial para as armaduras.

### 3.4 Avaliação da matriz de rigidez para o concreto e para as barras de aço

Para a avaliação da matriz de rigidez geral, a formulação incorporada foi adotada. A matriz de rigidez de um elemento de concreto pode ser expressa como:

$$\mathbf{K}_{rc} = \mathbf{K}_c + \sum_{i=1}^{nrs} \mathbf{K}_{r,i} \quad (3.29)$$

onde  $rc$  refere-se a concreto armado,  $c$  refere-se a concreto,  $r$  refere-se a armadura e  $nrs$  é o número de segmentos de armaduras contidas no elemento de concreto em questão. Para a matriz de rigidez do elemento de concreto tem-se:

$$\mathbf{K}_c = \int_V \mathbf{B}_c^T {}^s\mathbf{D}_c^{global} \mathbf{B}_c dV \quad (3.30)$$

onde  ${}^s\mathbf{D}_c$  é a matriz constitutiva ortotrópica secante do concreto e  $\mathbf{B}_c$  é a já conhecida matriz que relaciona deslocamentos e deformações para o concreto. Para a armadura, a matriz de rigidez para um segmento de aço é dada por:

$$\mathbf{K}_s = A_r E_r \int_S \mathbf{B}_r^T \mathbf{B}_r dS \quad (3.31)$$

onde  $A_r$  é a área da barra de aço,  $E_r$  é o módulo de elasticidade e  $\mathbf{B}_r$  é a matriz que relaciona deslocamentos e deformações para a barra de aço, a qual relaciona os deslocamentos do elemento de concreto com as deformações axiais da barra de aço. Neste trabalho admite-se a perfeita aderência entre o aço e o concreto. O campo de deformações do concreto é completamente transferido para o aço assumindo-se que este só resista a forças axiais. Portanto, como proposto por Elwi e Hrudey (1989) e por Ranjbaran (1996), a deformação no concreto tangente à armadura é dada por:

$$\varepsilon_{11}^r = \varepsilon_{11}^c l_1^2 + \varepsilon_{22}^c m_1^2 + \varepsilon_{33}^c n_1^2 + 2\varepsilon_{12}^c l_1 m_2 + 2\varepsilon_{23}^c m_2 n_3 + 2\varepsilon_{13}^c m_1 n_3 \quad (3.32)$$

onde,  $\varepsilon_{ij}^c$  são as componentes de deformação do concreto em um ponto particular dentro do elemento de concreto (e também pertencente a uma dada barra de armadura),  $l_1, m_1, n_1$  são os cossenos diretores dos eixos tangentes à armadura (esta transformação é similar àquela usada para a matriz constitutiva ortotrópica secante do concreto). Diferenciando a equação (3.25), a matriz Jacobiana (que neste caso resume-se a um vetor) em um ponto genérico da armadura pode ser avaliada como,

$$\mathbf{J}^{rT}(\zeta) = \begin{Bmatrix} dx^r / d\zeta \\ dy^r / d\zeta \\ dz^r / d\zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{dN_i^r(\zeta)}{d\zeta} \cdot x_i^r \\ \sum_{i=1}^r \frac{dN_i^r(\zeta)}{d\zeta} \cdot y_i^r \\ \sum_{i=1}^r \frac{dN_i^r(\zeta)}{d\zeta} \cdot z_i^r \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

O próprio vetor Jacobiano da armadura define as tangentes à armadura de aço. Para avaliar os cossenos diretores somente faz-se necessário normalizar este vetor utilizando, por exemplo, a norma Euclidiana. Através da equação (3.23), a matriz  $\mathbf{B}_r$ , pode ser encontrada utilizando-se a seguinte equação:

$$\varepsilon^r = \mathbf{T}_\varepsilon \varepsilon^c = \mathbf{T}_\varepsilon \mathbf{B}_c \mathbf{d} = \mathbf{B}_r^* \mathbf{d} \quad (3.34)$$

onde  $\varepsilon^r$  é o tensor de deformações com uma rotação rígida ao novo sistema de coordenadas cujo eixo é tangente à armadura e  $\mathbf{B}_r^*$  é a matriz que relaciona os deslocamento e deformações para o aço. Como somente o elemento  $\varepsilon_{11}^r$  é relevante, o vetor  $\mathbf{B}_r$  é definido como uma submatriz da matriz  $\mathbf{B}_r^*$ .

## 3.5 Método de solução

### 3.5.1 Equação de equilíbrio

Em qualquer instante de tempo  $t$ , a equação de equilíbrio a ser satisfeita é dada por:

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_t dV + \lambda_t \mathbf{P}_t = 0 \quad (3.35)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona deslocamentos e deformações,  $\mathbf{P}$  é o vetor de forças nodais aplicadas,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor que representa o tensor de tensões,  $\lambda_t$  é o fator de carga (supondo-se que as cargas sejam aplicadas proporcionais) e  $V$  é o domínio dos elementos finitos. No algoritmo elasto-viscoplástico são definidas as pseudo-cargas  $\Delta \mathbf{V}_t$ , dadas por:

$$\Delta \mathbf{V}_t = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^{vp} dV + \Delta \lambda_t \mathbf{P}_t + \boldsymbol{\Psi}_t \quad (3.36)$$

onde o vetor de forças residuais (ou vetor de forças desbalanceadas)  $\boldsymbol{\Psi}_t$  resultam do fato de que a equação (3.35) é somente aproximadamente satisfeita.

### 3.5.2 Algoritmo elasto-viscoplástico padrão

Para a formulação constitutiva, uma formulação elasto-viscoplástica incremental padrão é adotada. Assume-se que o tensor de deformações totais incrementais ( $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^t$ ) pode ser separado em uma parte elástica ( $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$ ) e uma parte viscoplástica ( $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ ) em um dado nível de tempo. Portanto, pode ser escrito que:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^t = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^{vp} \quad (3.37)$$

onde  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^t = \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_t$  é a relação entre os incrementos de deformações totais e o incremento da componente de deslocamentos,  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona deformações e deslocamentos e  $\Delta \mathbf{d}_t$  é o vetor de incrementos de deslocamentos.

O vetor de componentes do tensor de tensões totais incrementais  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_t$  em um dado tempo  $t$  é definido como:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{D} \cdot (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^t - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^{vp}) \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{D}$  representa a matriz constitutiva. O tensor de tensões totais é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma}_{t-\Delta t} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_t \quad (3.39)$$

A regra de fluxo viscoplástica é definida assumindo-se uma regra de fluxo associada, como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \gamma \langle f(\rho, \sigma_m, \theta) \rangle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.40)$$

onde  $\gamma$  é o coeficiente de fluidez,  $f(\rho, \sigma_m, \theta)$  é a superfície de plastificação e  $\langle \cdot \rangle$  representa uma função a qual assume o valor de  $f(\rho, \sigma_m, \theta)$  para valores positivos da superfície de plastificação e zero no caso contrário. O esquema de integração totalmente explícito de Euler é adotado para avaliar os incrementos de deformações viscoplásticas como segue:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^{vp} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{vp} \cdot \Delta t \quad (3.41)$$

e o tensor de deformações viscoplásticas é definido por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}_t^{vp} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t^{vp} \quad (3.42)$$

Como o esquema de integração explícito de Euler é condicionalmente estável,  $\Delta t$  deve ser menor ou igual a um intervalo de tempo crítico. Neste trabalho adota-se  $\Delta t = 0.6 \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_t^t / \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{vp} \right]$ .

### 3.5.3 Método do controle dos deslocamentos generalizado

O comportamento geral de um sistema não linear pode assumir as características indicadas pela Figura 3.12. Para um gráfico da carga *versus* deslocamento o sistema pode apresentar regiões de comportamento estável e regiões de comportamento instável como explicitado na mesma figura. A caracterização destas regiões está no surgimento de pontos limite, como o ponto A e o ponto D e de pontos de *snap-back*, como os pontos B e C. Os pontos limites podem ser definidos como pontos da curva carga deslocamento onde a tangente é nula e é nestes pontos de singularidade em que os métodos como o de Newton-Raphson com atualização da matriz de rigidez falham. A solução do sistema de equações incremental torna-se instável. Pode-se entretanto utilizar o método de Newton-Raphson sem a atualização da matriz de rigidez, entretanto isto é questionável do ponto de vista do esforço computacional adicional empregado para atingir-se o equilíbrio. É comum o aparecimento destes pontos em estruturas sujeitas à plastificação ou algum tipo de deterioração, como a fissuração ou plastificação.

Os pontos de *snap-back* podem ser definidos como aqueles pontos onde a tangente da curva carga deslocamento torna-se infinita. Devido ao seu comportamento intrinsecamente instável, o sistema pode apresentar, para um mesmo deslocamento, variação na carga aplicada. São nestes pontos onde métodos como o de controle dos deslocamentos falham. No método do controle dos deslocamentos, ao invés de incrementar-se a carga, incrementa-se os deslocamentos e assim sendo ao chegar-se nos pontos de *snap-back*, o método do controle de deslocamentos não será sensível à variação da carga para um mesmo deslocamento ou até mesmo à mudança de direção dos deslocamentos. É comum a presença deste tipo de comportamento em estruturas sujeitas a falhas bruscas e não linearidades geométricas.

Yeon-Bin Yang e Ming-Shan Shieh (1990) demonstraram que a maioria dos métodos existentes (quais sejam, o método de Newton-Raphson, na sua forma original e na sua forma modificada, o método do controle de incrementos de deslocamentos, o método do controle do comprimento de arco - "*Arc Length Method*", o método do controle da energia - "*Work Control Method*" e o método do controle dos deslocamentos generalizados com o parâmetro corrente de rigidez - "*Current Stiffness Parameter*") não são perfeitos em termos da estabilidade numérica ao aproximar-se de pontos limites e de *snap-back*, e que também apresentam inconsistências quanto aos critérios de incrementos de carga usados para refletir a variação de rigidez. Eles também afirmam que grande parte destes métodos pecam na falta da capacidade de auto-adaptação na determinação da direção do carregamento. Desta forma, eles propuseram

um método o qual atende aos critérios anteriores para a análise de estruturas no regime pré e pós crítico, o método do controle dos deslocamentos generalizados (MCDG).

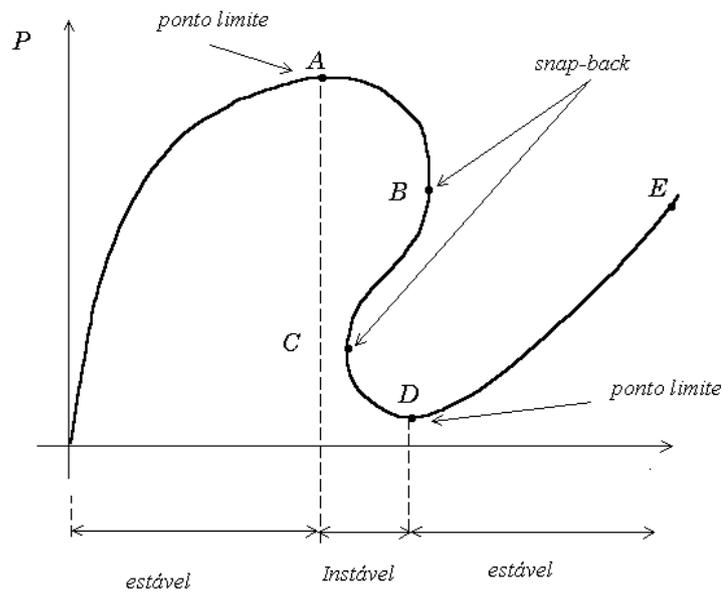


Figura 3.12 - Características gerais de sistemas não lineares.

Em geral, na solução incremental/iterativa de problemas estruturas não lineares, o fator de incremento de carga  $\Delta\lambda_j$  de cada passo iterativo  $j$  pode ser considerado como uma variável incógnita adicional. Assim, assumindo-se que o carregamento seja proporcional, pode-se escrever a equação de equilíbrio na seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{i-1} \Delta\mathbf{U}^i = \Delta\lambda^i \mathbf{P} + \mathbf{R}^{i-1} \quad (3.43)$$

onde  $\Delta\lambda^i$ , define o incremento de carga da iteração  $i$ ,  $\mathbf{R}^{i-1}$  é o vetor de forças desequilibradas na iteração  $i-1$ . O vetor de incrementos de deslocamentos pode ser expresso pela soma de vetores na forma :

$$\Delta\mathbf{U}^i = \Delta\mathbf{U}^{2i} + \Delta\lambda^i \Delta\mathbf{U}^{1i} \quad (3.44)$$

que pode ser obtida da solução de dois sistemas de equações:

$$\mathbf{K}^{i-1} \Delta\mathbf{U}^{2i} = \mathbf{R}^{i-1} \text{ e } \mathbf{K}^{i-1} \Delta\mathbf{U}^{1i} = \mathbf{P} \quad (3.45)$$

No método do controle dos deslocamentos generalizados, utiliza-se um parâmetro referido como Parâmetro Geral de Rigidez (General Stiffness Parameter, GSP), para obter o incremento do fator de carga da primeira iteração do  $j$ -ésimo passo incremental, o qual é definido por:

$$GSP = \frac{\langle \Delta \mathbf{U}^{l \ 1} \rangle \Delta \mathbf{U}^{l \ 1}}{\langle \Delta \mathbf{U}^{l \ 1} \rangle \Delta \mathbf{U}^{l \ 1}} \quad (3.46)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  indica a transposição. Assim na primeira iteração do passo  $j$ , o incremento do fator de carga é dado pela equação:

$$\Delta \lambda_j^l = \Delta \lambda_j^l (|GSP|)^{1/2} \text{ sinal}(GSP) \quad (3.47)$$

Na qual  $\Delta \lambda_j^l$ , representa o incremento inicial do fator de carga (primeiro passo e primeira iteração de cálculo), enquanto que para as iterações subsequentes ( $i > 1$ ) do mesmo passo  $j$ , tem-se:

$$\Delta \lambda_j^i = - \frac{\langle \Delta \mathbf{U}^{l \ 1} \rangle \Delta \mathbf{U}^{l \ i}}{\langle \Delta \mathbf{U}^{l \ 1} \rangle \Delta \mathbf{U}^{l \ 1}} \quad (3.48)$$

fazendo-se para  $j=1$ ,  $\Delta \mathbf{U}^{l \ 1} = \Delta \mathbf{U}^{l \ 1}$ . Como visto na equação (3.47), o que define a direção do carregamento incremental é o sinal do GSP, uma vez que este possui a peculiaridade de mudar de sinal apenas nos pontos imediatamente após os pontos limites, permitindo que estes pontos sejam identificados.

## 3.6 Exemplos numéricos

### 3.6.1 Testes de tração e compressão puros no concreto

Para avaliar o modelo constitutivo adotado para o concreto em tração pura e compressão pura, dois exemplos foram analisados. Primeiramente, um único elemento hexaédrico de concreto, representando um quarto de um espécimen cúbico ( $h=0.3$  m), é sujeito a um estado de tensões correspondentes à compressão e posteriormente tração puras através uma pressão uniforme aplicada numa face do elemento como indicado na Figura 3.13.

Para o teste de tração pura, regras de integração do tipo 3x3x3, com 14 e com 15 pontos de integração foram usadas. Após, três diferentes densidades de malha (uma com um elemento, outra com cinco e outra com dez) foram comparadas. Em todos os casos, o modelo de Ottosen(1979) de quatro parâmetros foi utilizado como superfície de falha/plastificação. As propriedades dos materiais para este exemplo são dadas na Tabela 3.1

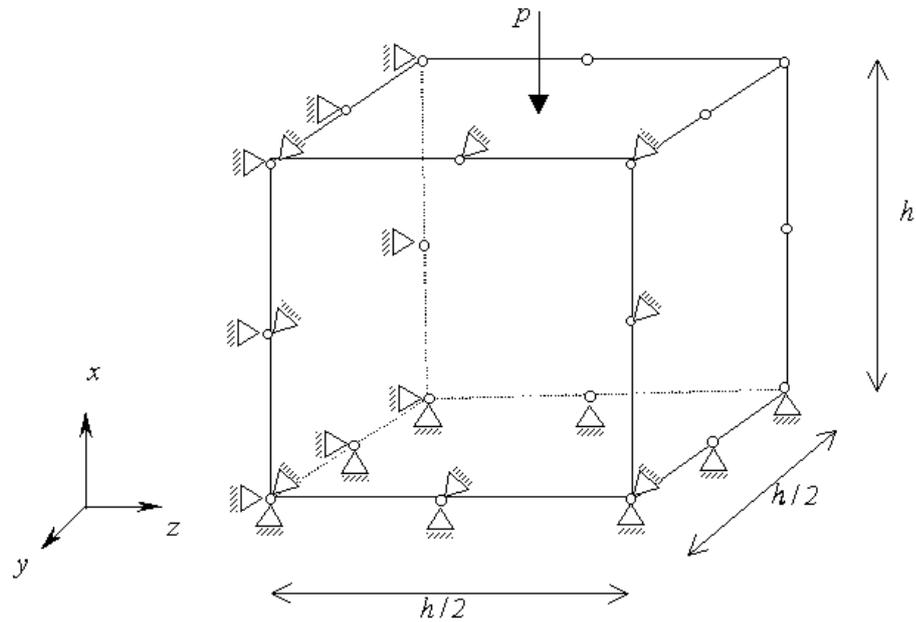


Figura 3.13 - Elemento simples hexaédrico de 20 nós de concreto submetido a uma pressão uniforme numa face do elemento.

A curva de fator de carga-deslocamento e a curva tensão-deformação, no estado de tensão de compressão, na face superior para uma malha com apenas um elemento é mostrada na Figura 3.14 e na Figura 3.15, respectivamente.

Tabela 3.1 - Propriedades do material para o teste de tração e compressão pura.

$f_c$ (MPa)	21.3
$E_{ci}$ (MPa)	27560.0
$\nu$	0.15
$f_t$ (MPa)	1.7
$G_f$ (MN/m)	$0.5 \times 10^{-4}$

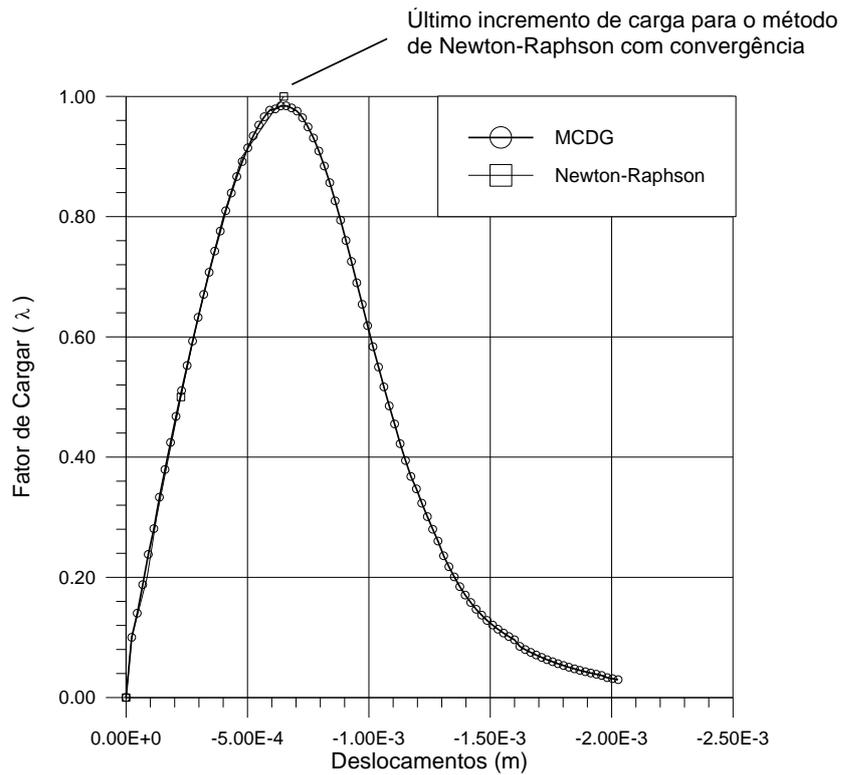


Figura 3.14 - Curva fator de carga-deslocamento para o teste de compressão pura.

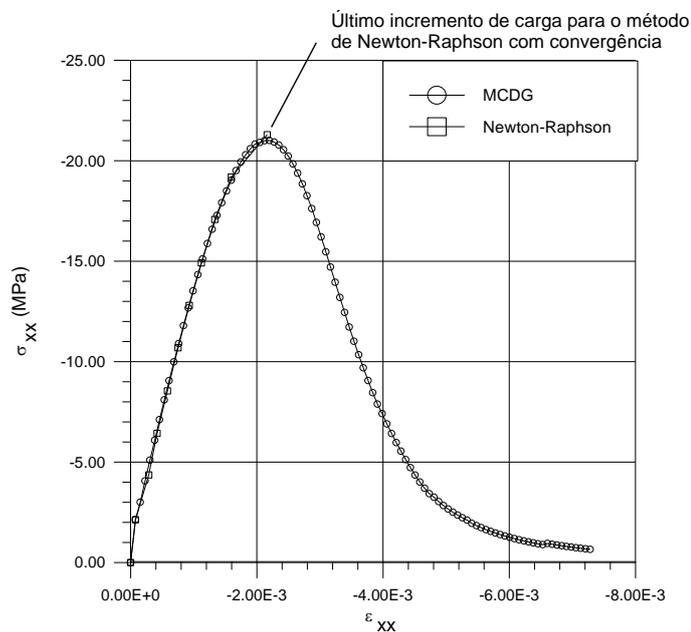


Figura 3.15 - Curva tensão-deformação para o teste de compressão pura.

As Figura 3.16 e Figura 3.17 indicam as curvas de fator de carga-deslocamento e tensão-deformação, na face superior, respectivamente, para algumas regras de integração numéricas e densidades de malha para o teste de tração pura.

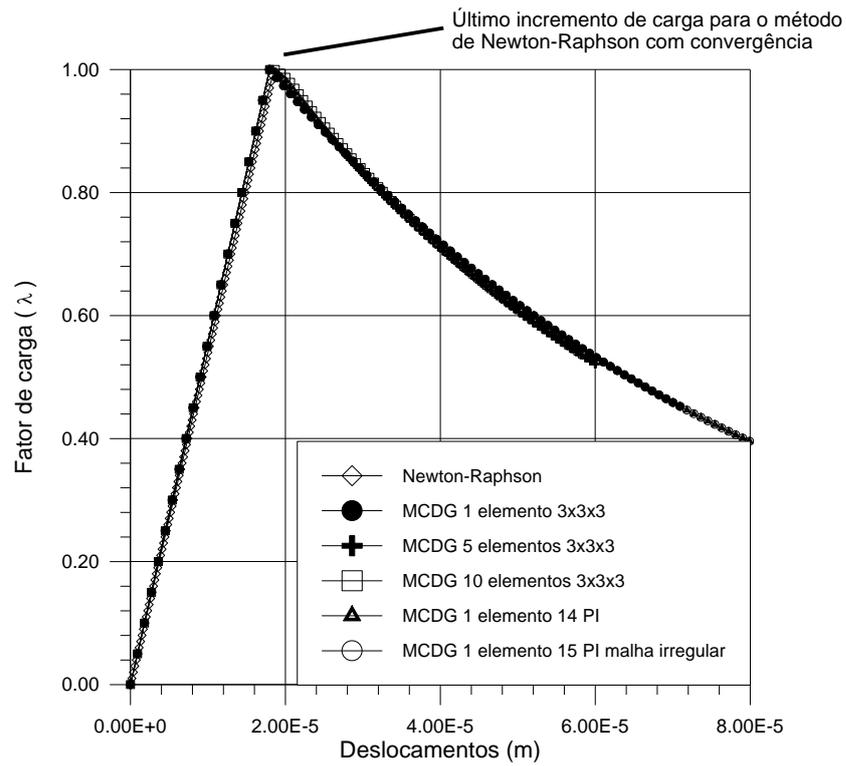


Figura 3.16 - Curva fator de carga-deslocamento para o teste de tração pura.

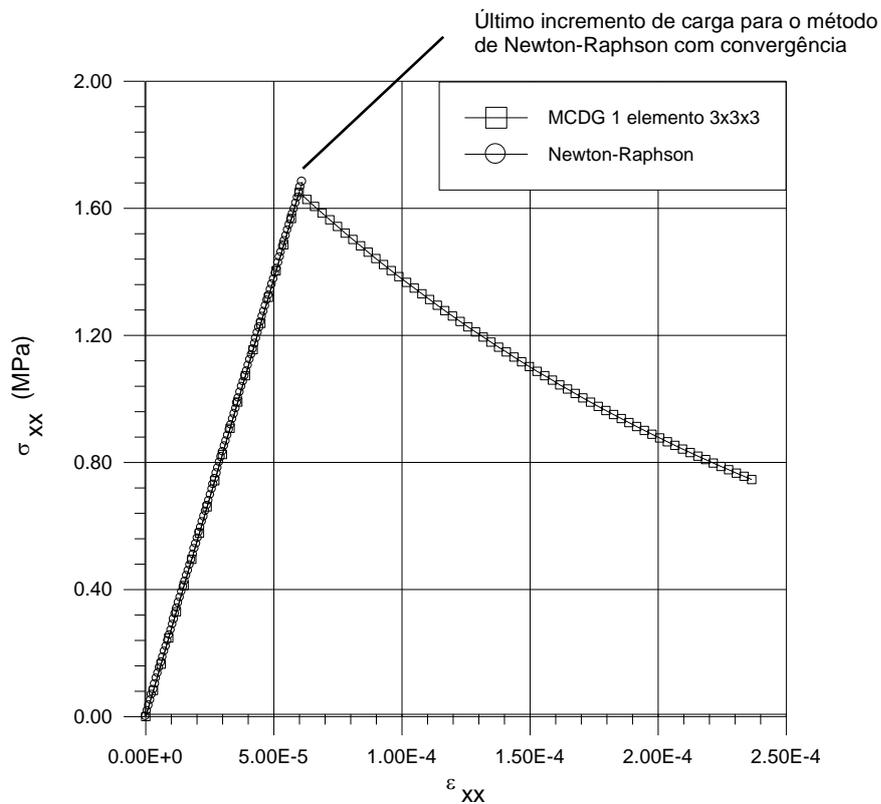


Figura 3.17 - Curva tensão-deformação para o teste de tração pura.

A Figura 3.18 mostra a configuração das fissuras, no estado de tensão de tração, para a malha com apenas um elemento e regra de integração de  $3 \times 3 \times 3$  pontos.

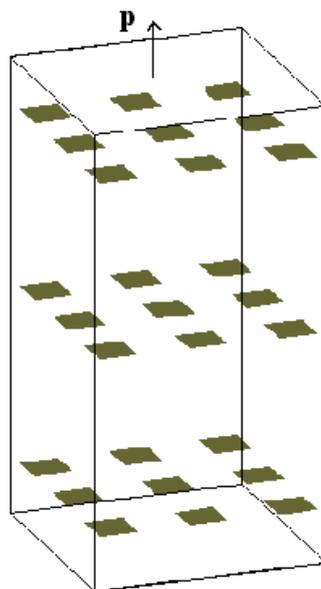


Figura 3.18 - Configuração das fissuras para o teste de tração pura (1 elemento e regra de integração  $3 \times 3 \times 3$ ).

Na Figura 3.14 até a Figura 3.17, as soluções obtidas com o método de Newton-Raphson são comparadas com aquelas fornecidas pelo método GDCM-GSP. Em ambos os casos somente o comportamento de pré-pico é obtido pelo método de Newton-Raphson, enquanto que o método GDCM-GSP representa razoavelmente bem o comportamento pós-pico. No teste de tração pura, foi empregado o modelo proposto por Oliver(1989) para a avaliação do comprimento característico equivalente. Deve-se observar que o modelo empregado é independente com respeito a várias malhas e regras de integração usadas nos testes.

### 3.6.2 Teste de tração por compressão diametral

A resistência à tração do concreto é frequentemente determinada por testes experimentais como o teste de compressão diametral (conhecido mundialmente como teste Brasileiro). Este exemplo tem sido escolhido para analisar a capacidade de modelos propostos para prever modos de falha em modo de compressão-tração. A análise numérica deste exemplo é sensível ao modelo de amolecimento na compressão adotado, uma vez que curvas de carga-deslocamento lineares são obtidas se nenhuma hipótese é feita a respeito do amolecimento na compressão.

Neste teste, um espécimen cilíndrico de concreto com 0,30 m de altura e um diâmetro de 0,15 m é apoiado horizontalmente entre placas de aço de suporte da máquina de teste e

comprimido ao longo de suas geratrizes opostas, através de tiras metálicas, até que o espécimen testado divida-se ao meio no plano diametral vertical. A resistência à tração derivada deste experimento pode ser calculada como:

$$f_t^{\text{exp}} \cong \frac{2P}{\pi DH} \quad (3.49)$$

onde  $P$  é a carga última na curva carga-deslocamento,  $D$  e  $H$  são o diâmetro e a altura, respectivamente, do espécimen testado. Entretanto, esta tensão de tração é consideravelmente influenciada pelas condições de contorno, levando à dispersão nos resultados. Limites superiores e inferiores para a carga última podem ser obtidas por uma análise limite e variações de 25% dos valores médios podem ser encontrados.

Devido à simetria, somente um quarto do espécimen foi discretizado usando 30 elementos hexaédricos de 20 nós (dois elementos são usados para a discretização da tira metálica), como mostrado na Figura 3.19.

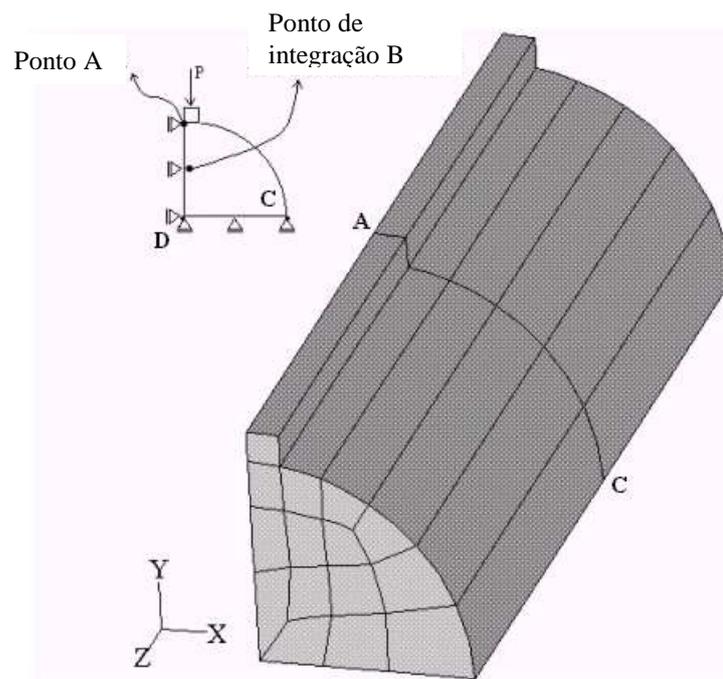


Figura 3.19 - Malha de elementos finitos para o teste de compressão diametral (o ponto D também é restringido na direção  $z$ ).

Admite-se que a tira metálica comporta-se como um material elástico linear com módulo de elasticidade dez vezes maior que o módulo adotado para o concreto. As propriedades do concreto são dadas na Tabela 3.1. A carga última (igual a 0.1201 MN) foi calculada usando-se a equação (3.49) e aplicada como uma carga uniformemente distribuída sobre a tira me-

tática. Foi utilizada a regra de integração de 3x3x3 pontos por elemento e o modelo de quatro parâmetros de Ottosen como superfície de falha/plastificação. A Figura 3.20 mostra diagramas de fator de carga-deslocamento para um ponto imediatamente sob a tira metálica ( ponto A na Figura 3.19) e a Figura 3.21 mostra a curva de tensão-deformação para o ponto de integração B indicado na Figura 3.19. A Figura 3.22 mostra duas vistas da configuração final das fissuras do espécimen ensaiado.

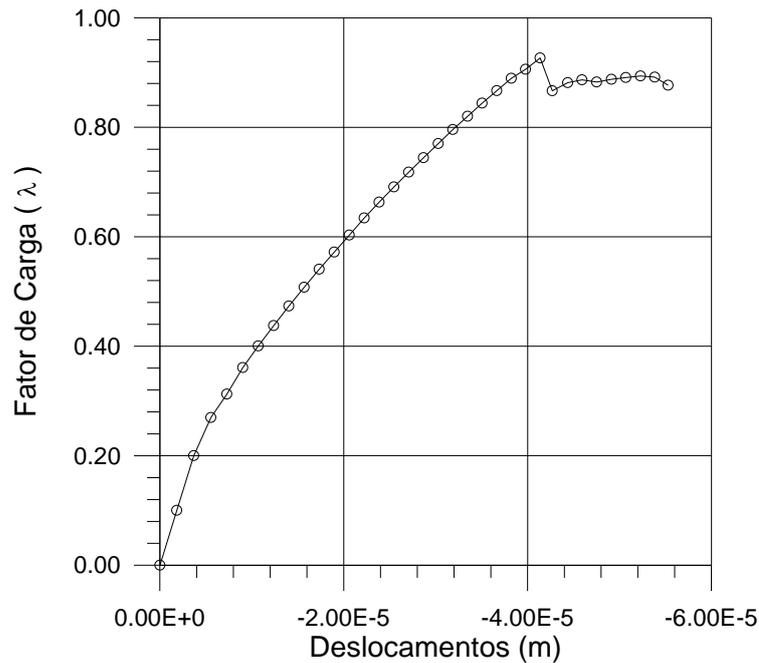


Figura 3.20 - Diagrama fator de carga-deslocamento do ponto A no teste de compressão diametral.

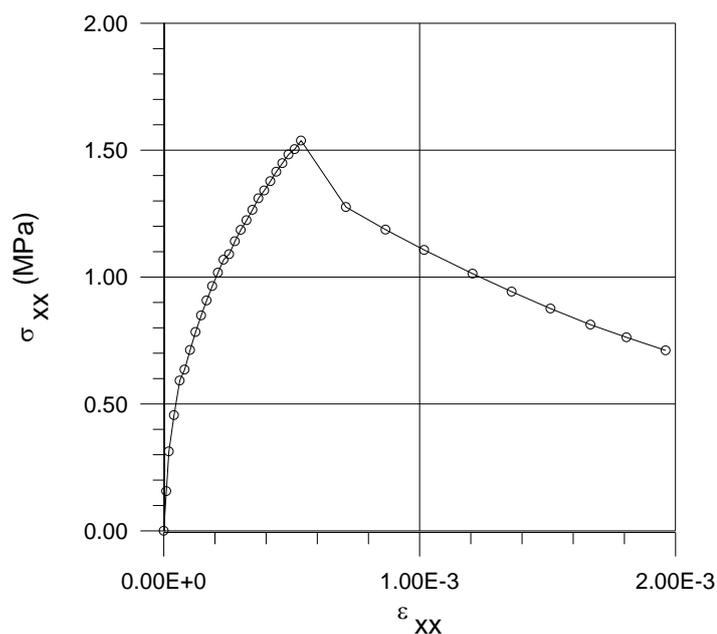


Figura 3.21 - Diagrama tensão-deformação do ponto B no teste de compressão diametral.

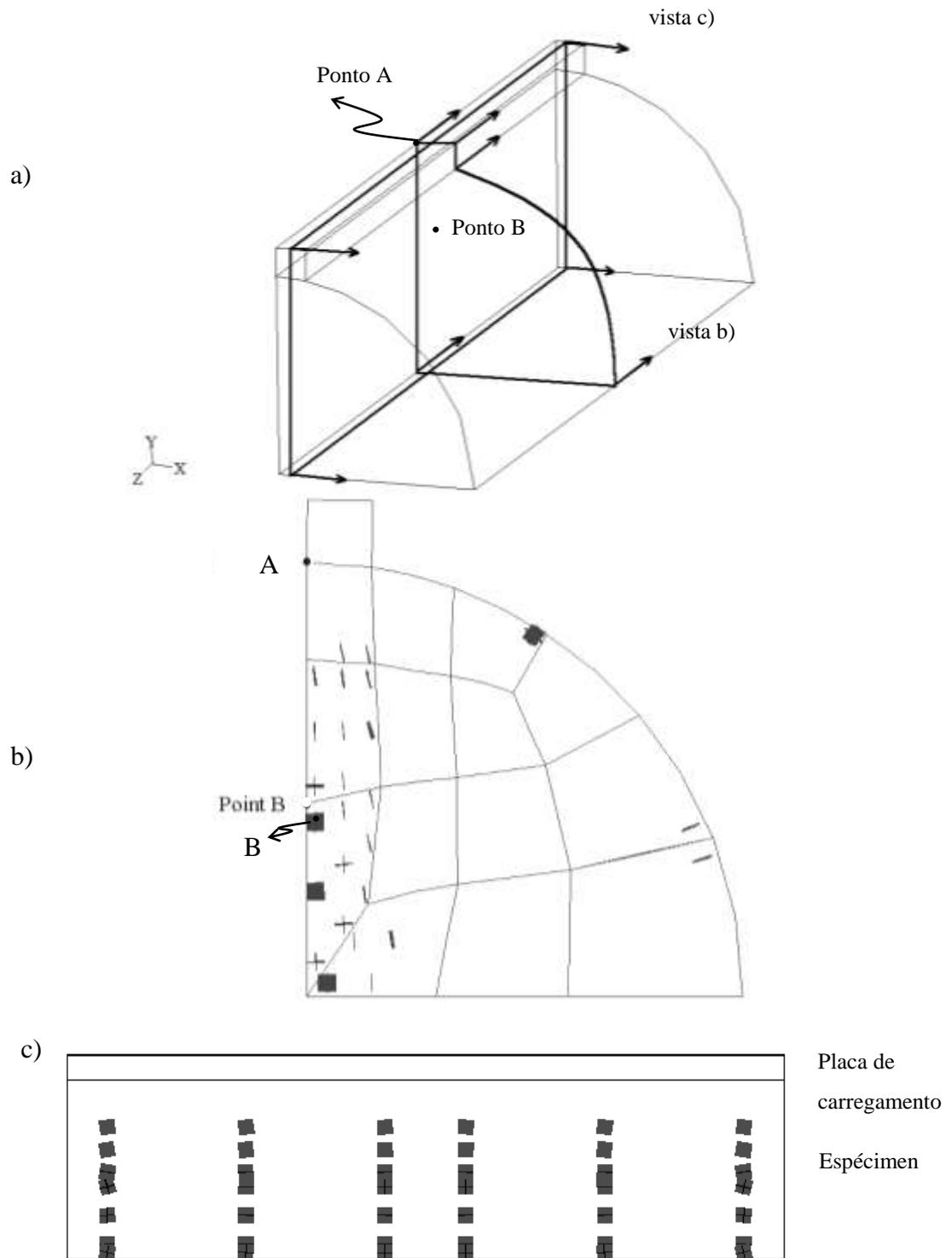


Figura 3.22 - Configuração das fissuras para o teste de compressão diametral: (a) planos de corte (as setas indicam as direções por onde o corpo é observado), (b) seção transversal, (c) plano diametral.

### 3.6.3 Falha de uma viga devido à plastificação do aço de reforço

Este exemplo mostra a falha de uma viga de concreto armado de um vão devido à plastificação da armadura de reforço. Este exemplo foi tomado da série de testes de Shegg e Decanini (1971) (viga RC-75-1). As características geométricas da viga são listadas na Tabela 3.2 e os valores numéricos para a carga, geometria e propriedades dos materiais são mostrados na Figura 3.23.

Tabela 3.2 - Propriedades do material e geometria da viga ensaiada.

$f_c$ MPa	$f_t$ MPa	$\nu^a$	$E_{ci}^a$ MPa	$G_f^a$ MN/m	$A_s$ cm <sup>2</sup>	$f_y$ MPa	$b$ cm	$h$ cm	$d$ cm	$L$ cm	$P$ MN
31.1	2.15	0.15	30653.0	$0.55 \times 10^{-4}$	2.35	550.0	15.3	24.6	22.1	300.0	0.0325

<sup>a</sup> Valores obtidos das recomendações do código CEB-FIP-90

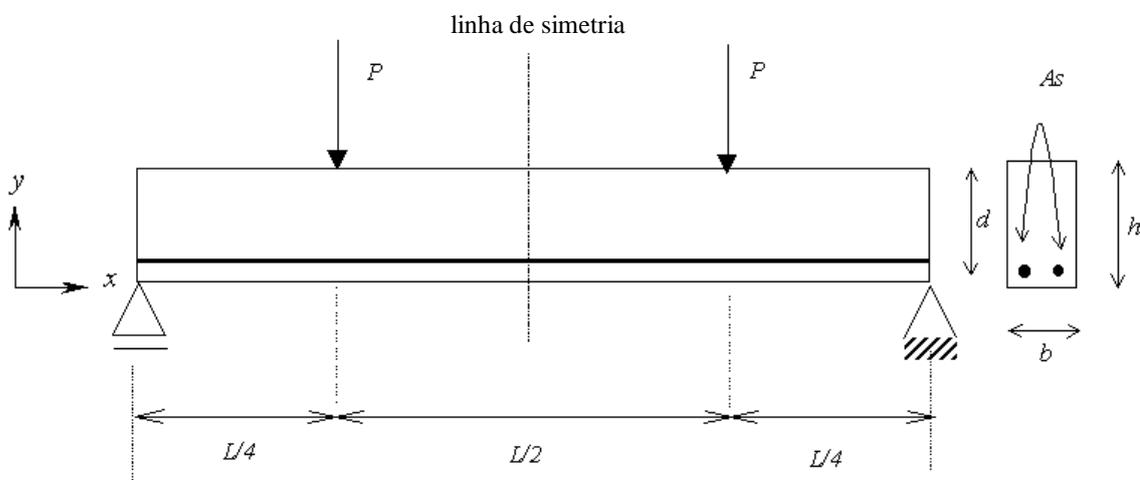


Figura 3.23 - Características geométricas da viga RC-75-1.

Devido à simetria, somente metade da viga foi discretizada com 20 elementos isoparamétricos de 20 nós (4 elementos na altura, 5 no comprimento e 1 na espessura). Na Figura 3.24 é mostrada a curva fator de carga-deslocamento de um ponto na face inferior da seção transversal no meio do vão. A configuração das fissuras na situação de pré-pico e no último passo incremental é mostrada na Figura 3.25. A Figura 3.26 mostra a curva tensão-deformação para um ponto no aço de reforço no meio do vão e próximo à face inferior da viga. A Figura 3.27 e a Figura 3.28 mostram as curvas de tensão deformação para o concreto no

topo e na face inferior no vão central respectivamente. Como indicado pela configuração das fissuras e curvas de tensão-deformação na face superior, após a plastificação das barras de aço de reforço, o concreto comprimido situado no meio do vão central, fratura no plano da viga.

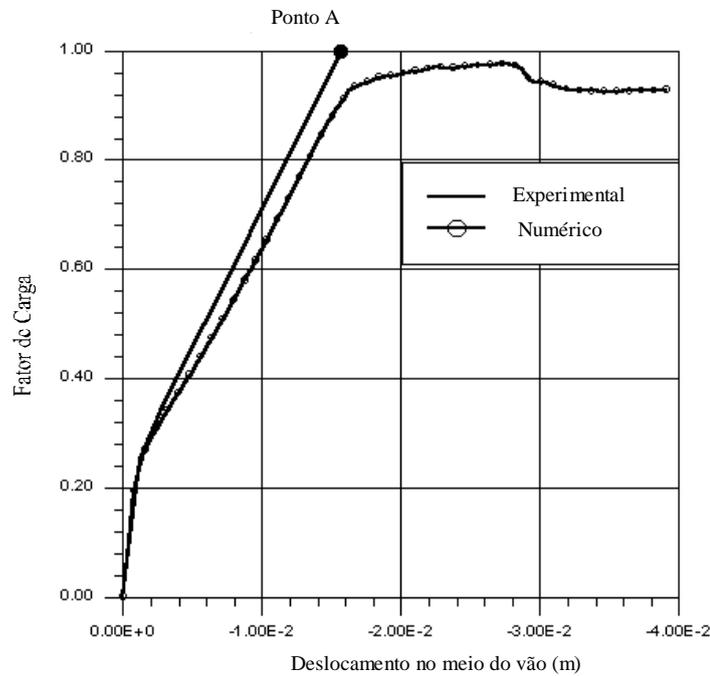


Figura 3.24 - Curva fator de carga-deslocamento para um ponto para parte inferior da seção transversal no meio do vão da viga RC-75-1.

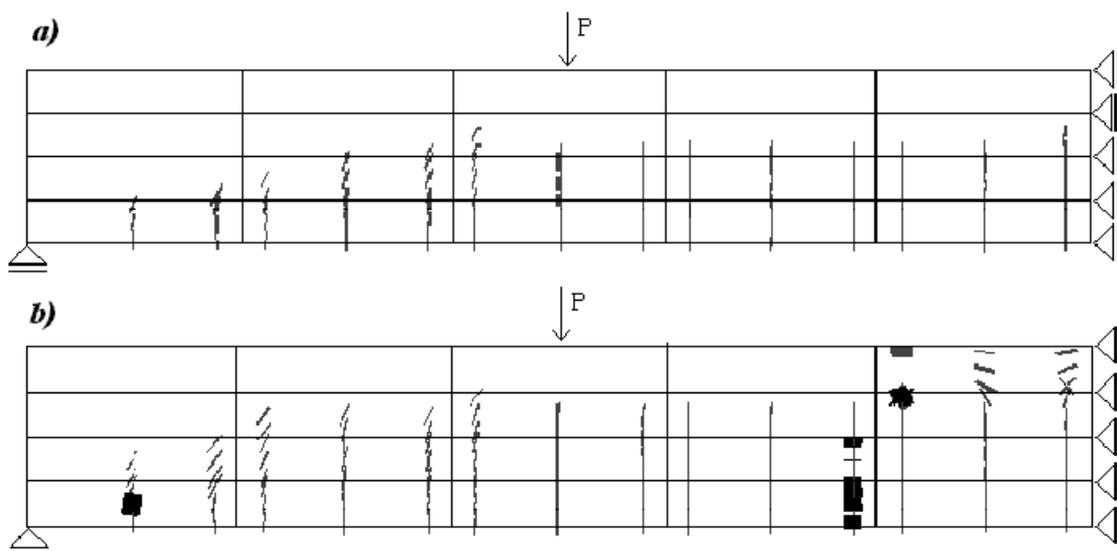


Figura 3.25 - Configuração das fissuras para a viga RC-75-1 na a) carga última e b) último passo incremental.

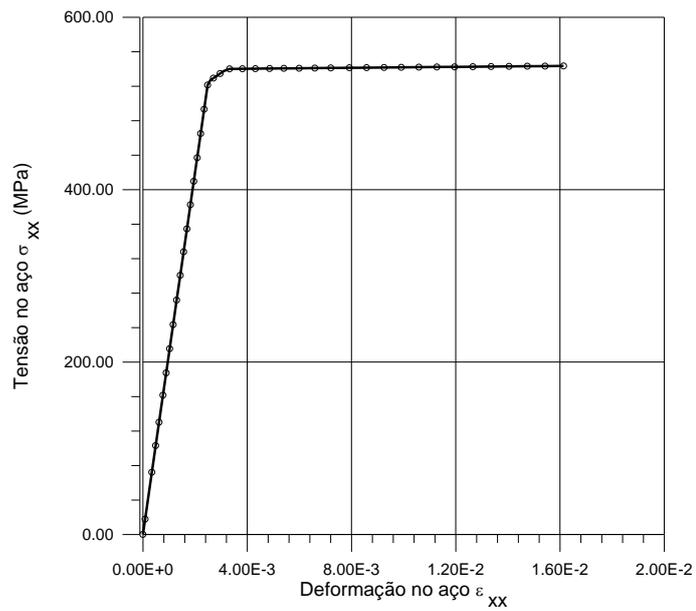


Figura 3.26 - Curva tensão-deformação para o aço de reforço na seção transversal central, próximo à face inferior da viga.

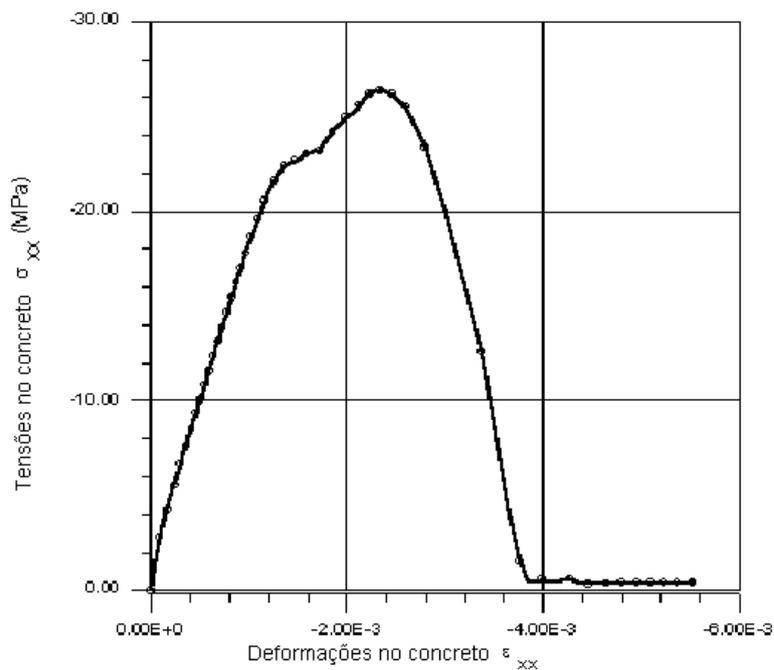


Figura 3.27 - Curva tensão-deformação para concreto na face superior do vão central da viga RC-75-1.

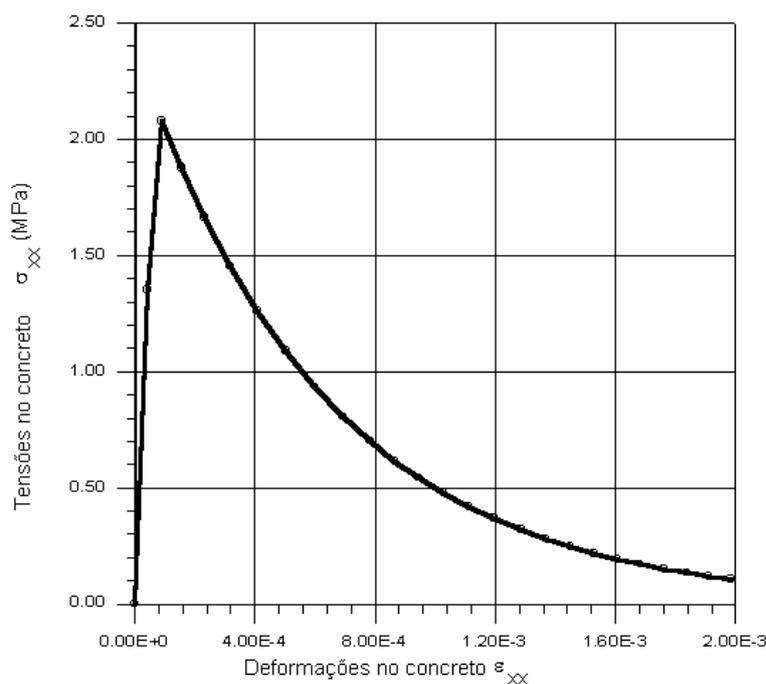


Figura 3.28 - Curva tensão-deformação para o concreto na face inferior do vão central da viga RC-75-1.

### 3.6.4 Série de testes em vigas de Bresler e Scordelis

Neste item, a viga simplesmente apoiada AO-1 da série de testes de vigas de Bresler e Scordelis (1963) é analisada. Infelizmente, os testes foram levados através de incrementos de cargas, impossibilitando a avaliação do comportamento pós-pico. O modo de falha observado no teste foi devido à falha por tração diagonal, uma vez que a viga não possui estribos. Este modo de falha é caracterizado por uma falha abrupta depois da formação da fissura principal por tração diagonal, fraturando ao longo das armaduras de tração próximo ao suporte e na zona de compressão próximo à carga aplicada. As características geométricas, propriedades dos materiais e valores da carga para a viga testada são mostrado na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 - Propriedades do material e geometria da viga OA-1 ensaiada.

$f_c$	$f_{t,flex}$	$f_t^a$	$\nu^a$	$E_{ci}^a$	$G_f^a$	$As$	$f_y$	$b$	$h$	$d$	$L$	$P$
MPa	MPa	MPa		MPa	MN/m	cm <sup>2</sup>	MPa	cm	cm	cm	cm	MN
22.5	3.96	1.79	0.15	28192.1	$0.53 \times 10^{-4}$	26.32	555.0	31.0	55.6	46.1	365.8	0.333

<sup>a</sup> Valores obtidos das recomendações do código CEB-FIP-90

Algumas das propriedades do material, tais como  $f_t$ ,  $E_{ci}$ ,  $G_f$ ,  $\nu$ , foram derivadas do Código modelo CEB-FIP-90, uma vez que resultados experimentais para estas propriedades não foram descritos. Foi adotado  $\nu=0.15$ ,  $E_{ci}=28192.1$  e algumas combinações para  $f_t$  e  $G_f$  foram testadas para avaliar a sensibilidade do modelo a estes parâmetros. Para valores de  $f_t$  diferentes de 2,25 MPa, a curva de fator de carga-deslocamento diverge pronunciadamente dos resultados experimentais e não são mostradas aqui. Na Figura 3.29 é mostrada a curva de fator de carga-deslocamento para a viga OA-1.

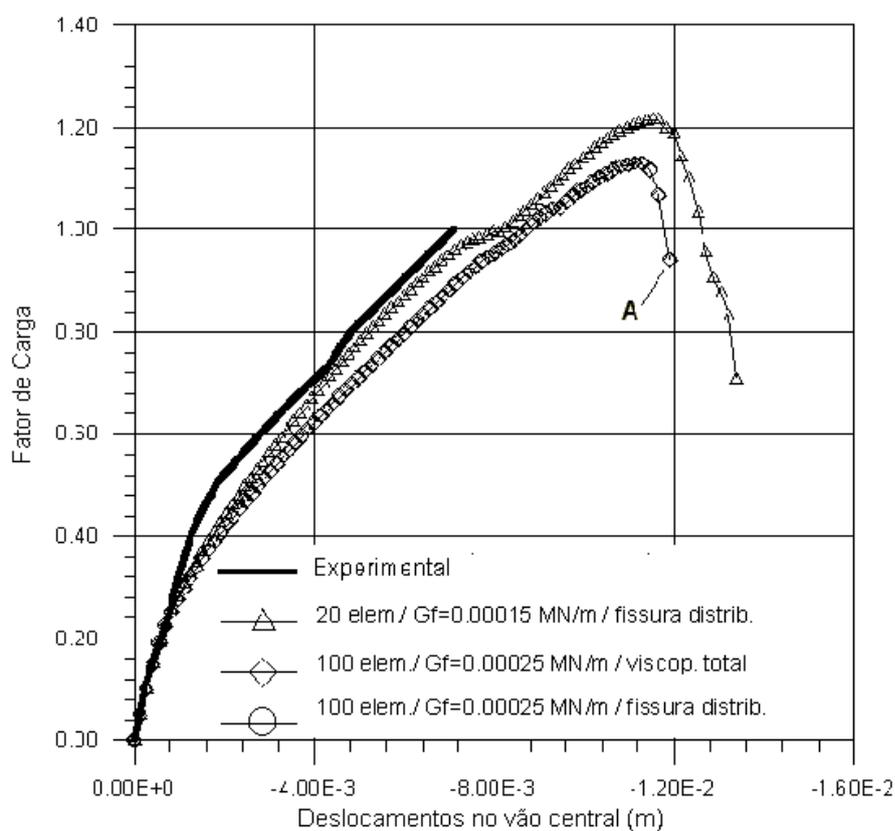


Figura 3.29 - Curva fator de carga-deslocamento para um ponto na parte inferior da seção transversal no meio do vão da viga OA-1.

A Figura 3.30 mostra a curva tensão-deformação no concreto para as faces superiores e inferiores na seção do vão central utilizando-se duas diferentes malhas: uma com 20 e outra com 100 elementos (4 na altura, 25 no comprimento e 1 na espessura) respectivamente. Na Figura 3.31, mostra-se a configuração das fissuras para a malha de 100 elementos com o modelo de fissuras distribuídas para o último ponto na curva fator de carga-deslocamento. Para a malha com 100 elementos nenhuma diferença foi observada entre o modelo de fissuras distribuídas e o modelo alternativo totalmente viscoplastico como visto na Figura 3.29 e na Figura 3.30. A análise foi interrompida tanto para o modelo de fissuras distribuídas quanto para o

modelo totalmente viscoplástico no ponto A indicado nestas últimas figuras, devido a deformações excessivas nas barras de reforço próximas ao apoio ( $\varepsilon_{II}^r = 0.07$ ).

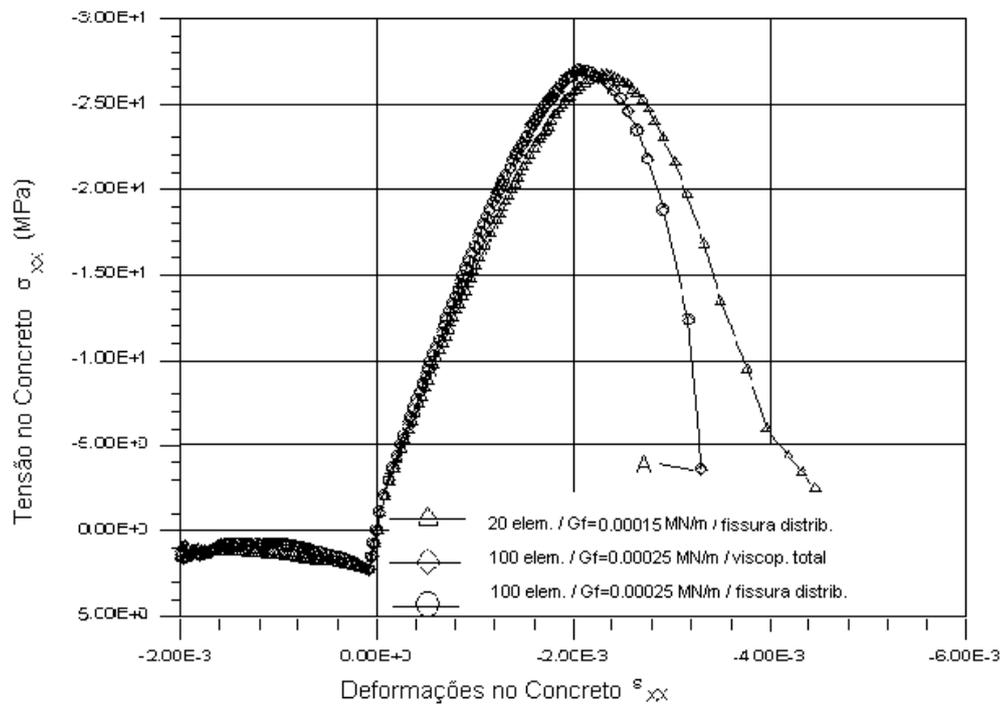


Figura 3.30 - Curva tensão-deformação no concreto nas faces superiores e inferiores no vão central da viga OA-1.

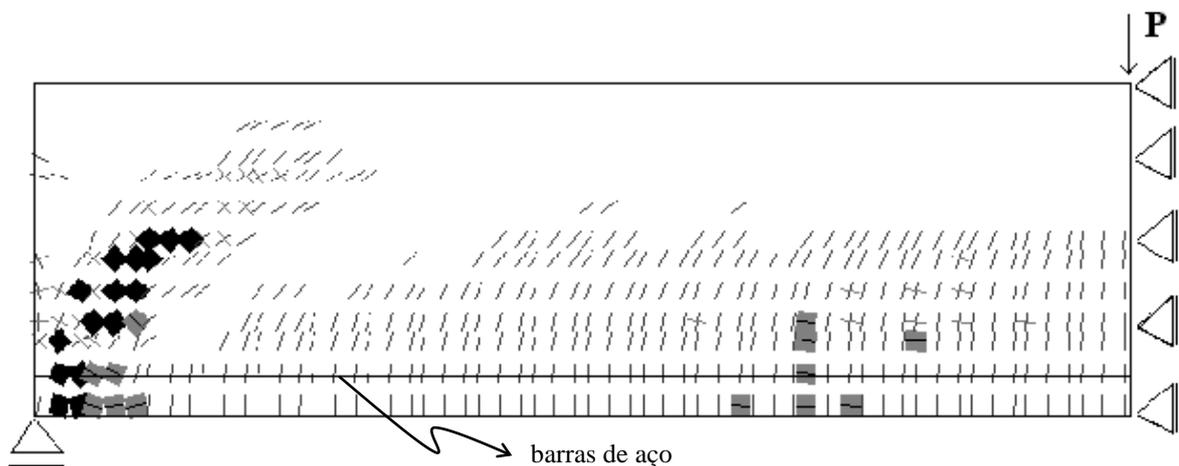


Figura 3.31 - Configuração das fissuras para a viga OA-1 correspondentes ao último ponto da curva fator de carga-deslocamento (ponto A) para a malha com 100 elementos.

### 3.6.5 Exemplo de estrutura com laje, vigas e pilares

Neste item é feita uma análise numérica de uma estrutura usual de um pavimento tipo de concreto armado. Trata-se de uma estrutura hiperestática composta por uma laje apoiada sobre quatro vigas as quais estão ligadas a quatro pilares. As dimensões de cada uma das peças estão indicadas na Figura 3.32.

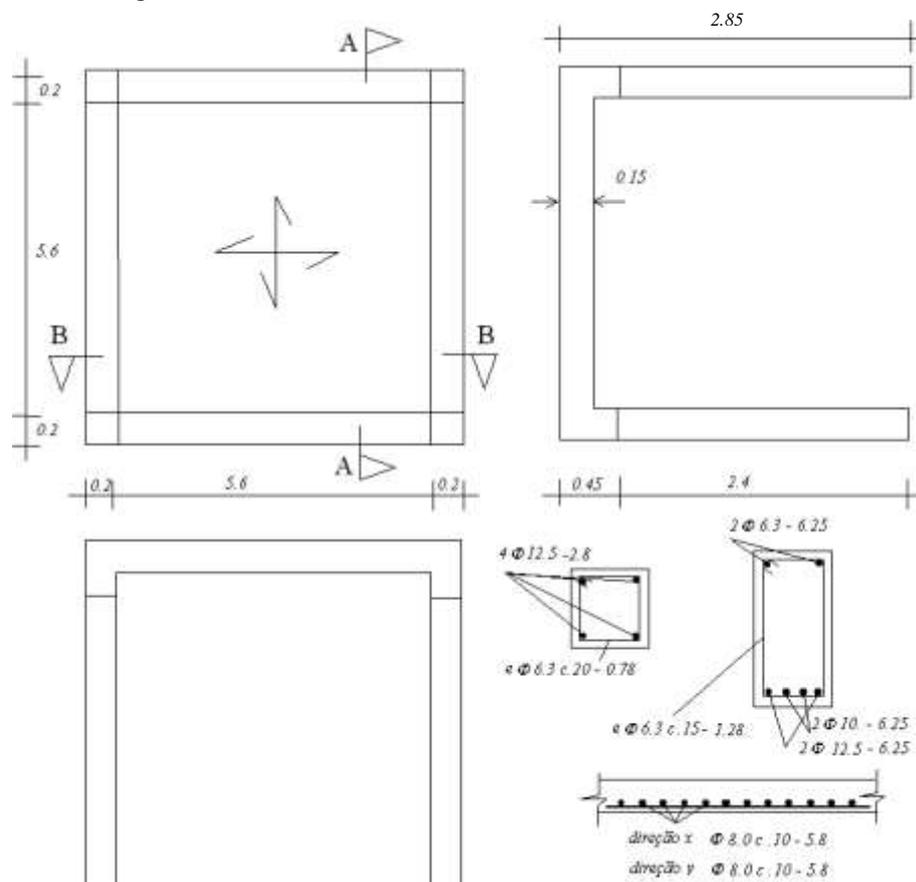


Figura 3.32 –Características geométricas para o exemplo de um pavimento tipo de concreto armado (dimensões em m).

O tipo de concreto utilizado foi C20 ( $f_{ck}=20$  MPa). O tipo de aço utilizado foi o CA50 e CA60, sendo este último utilizado nas barras de diâmetro de 6.3 mm. No dimensionamento, adotou-se sobrecarga de utilização de  $3 \text{ KN/m}^2$ , revestimento de paredes de  $1 \text{ KN/m}^2$ , peso de paredes de  $18 \text{ KN/m}^3$  e peso próprio para o concreto armado de  $25 \text{ KN/m}^3$ . A laje foi discretizada com duas camadas de elementos finitos de 20 nós. As vigas foram discretizadas com quatro camadas, sendo duas correspondentes às camadas da laje e as outras duas igualmente espaçadas. Os pilares foram cada um discretizados com três elementos em sua altura livre e na

região da ligação laje-viga-pilar de acordo com a discretização dos outros elementos, como pode ser visto na Figura 3.33.

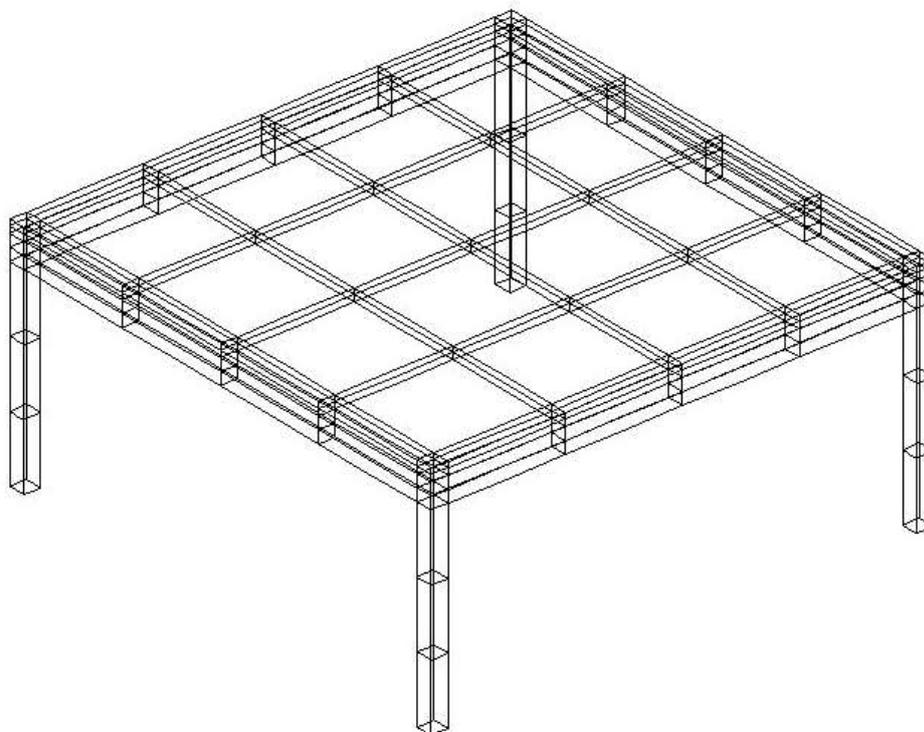


Figura 3.33 – Malha de elementos finitos para o exemplo do pavimento tipo de concreto armado.

Para as armaduras, observaram-se as dimensões previstas no projeto. Descartaram-se entretanto apenas dobras e/ou ganchos para ancoragens. Nas vigas, para fins de simplicidade, concentraram-se as quatro barras inferiores em apenas duas nos cantos, com área equivalente. Esta mesma estrutura foi submetida a uma carga concentrada pontual na face superior no centro da laje de  $P=100$  KN.

Este exemplo serve para ilustrar a robustez do algoritmo para a inclusão do modelo incorporado de barras de aço na malha de elementos finitos. Na Figura 3.34 é mostrado um detalhe na conexão laje-viga-pilar juntamente com a configuração das armaduras na malha de elementos finitos. Na Figura 3.35 é mostrado um diagrama de carga *versus* deslocamento na face inferior da laje imediatamente abaixo do ponto de aplicação da carga.

Na Figura 3.36, Figura 3.37 e na Figura 3.38 são mostradas as vistas lateral, superior e uma superior genérica, da configuração final das fissuras para o nível de carga de 66% do valor final (fator de carga=0.66). Observe-se a formação de fissuras nas faces inferiores e no meio do vão das vigas e da laje (inclusive na direção das bissetrizes dos cantos da laje), bem como nas arestas exteriores dos pilares (zonas de tração).

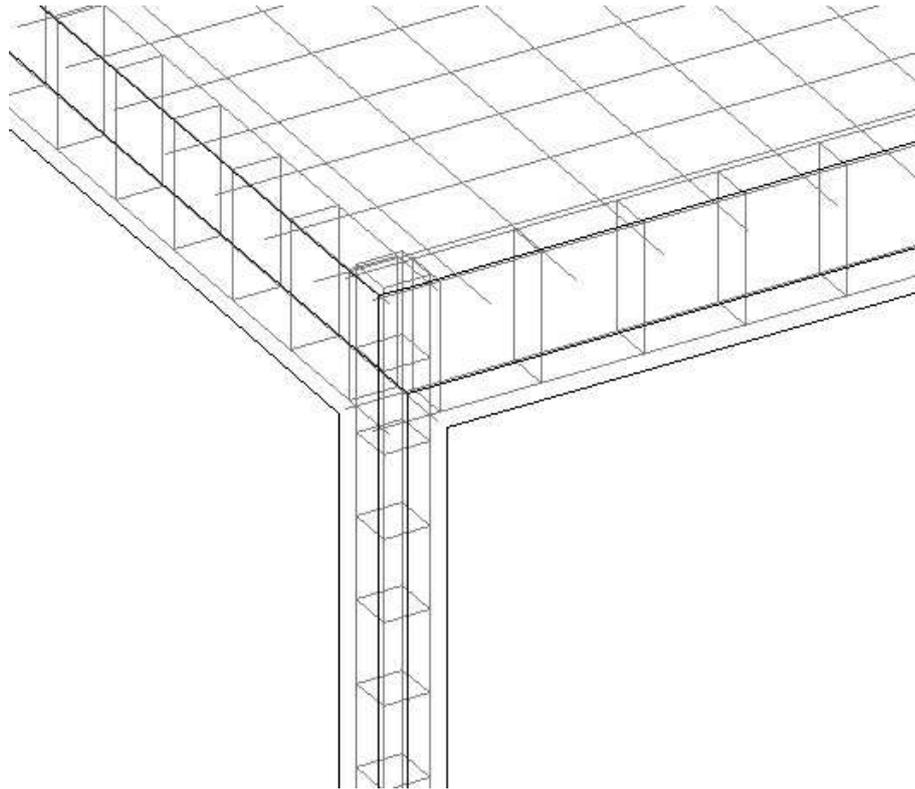


Figura 3.34 – Detalhe da discretização das armaduras na conexão laje-viga-pilar.

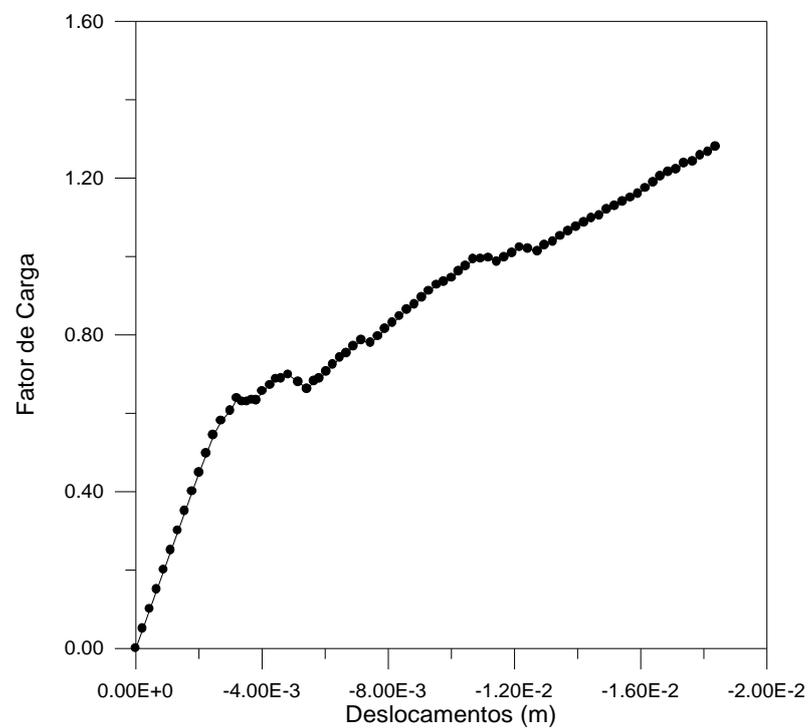


Figura 3.35 – Diagrama de fator de carga *versus* deslocamento no centro inferior da laje de concreto armado.

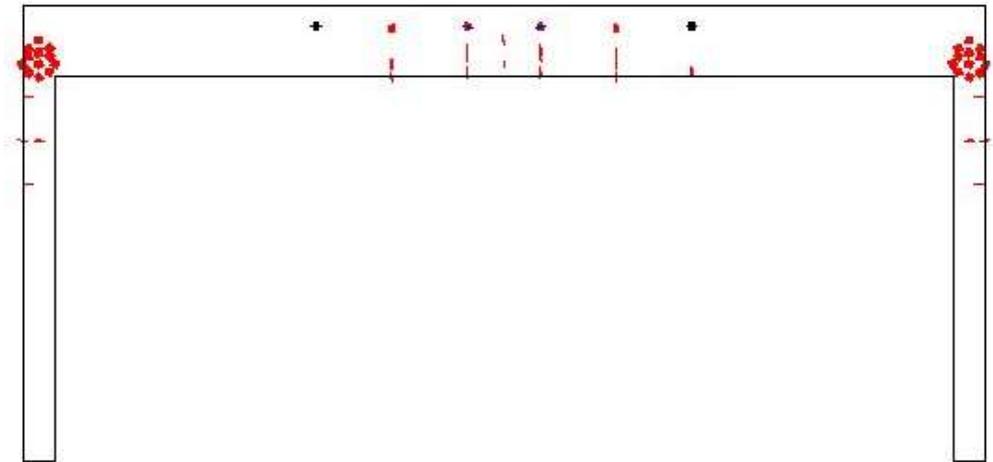


Figura 3.36 – Vista lateral para a configuração final das fissuras com fator de carga de 0.66.

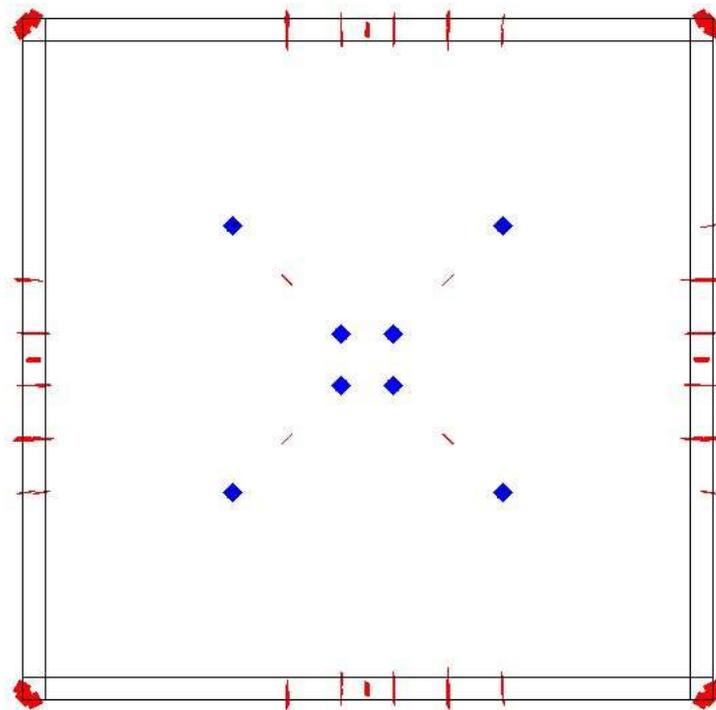


Figura 3.37 – Vista superior para a configuração final das fissuras com fator de carga de 0.66.

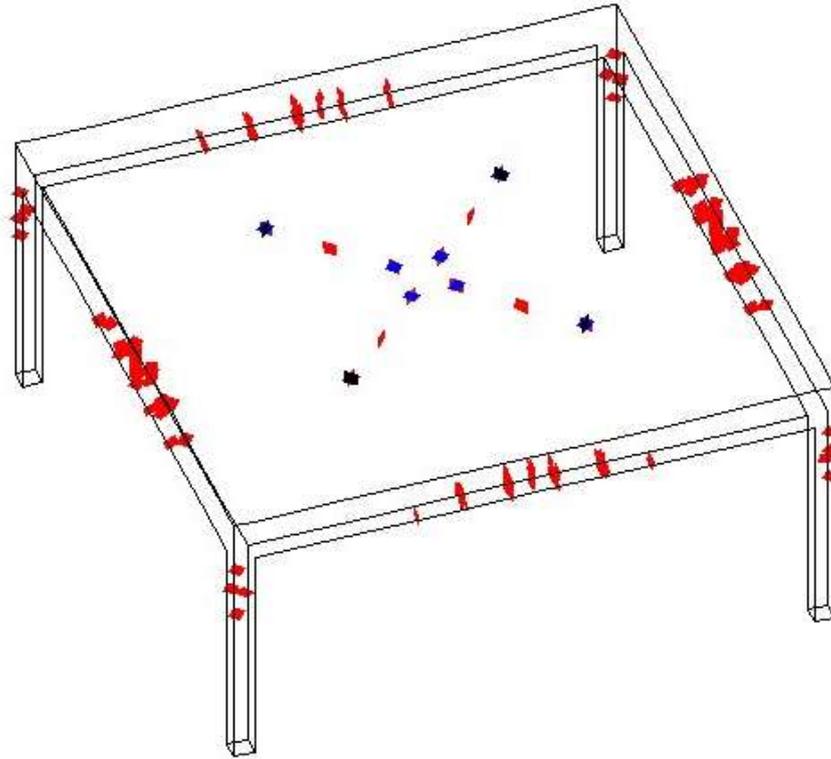


Figura 3.38 – Vista superior genérica para a configuração final das fissuras.

# Capítulo 4

## 4. Campos Estocásticos

*“...Furthermore, the damage evolution may be strongly influenced by the randomness in material properties, boundary conditions, or loads. These uncertainties in the damage process may have many consequences regarding the structural behavior and reliability of heterogeneous materials.”*

*Carmeliet, J. & Hens, H.,  
1994.*

Neste Capítulo é dada uma visão sobre os métodos de geração de campos estocásticos não Gaussianos empregados neste trabalho, ressaltando tanto as virtudes quanto aos defeitos na geração de campos para posterior utilização na análise através de elementos finitos.

### 4.1 Introdução

A geração de campos aleatórios é um assunto muito importante e está relacionado à análise estrutural de elementos finitos estocásticos e de confiabilidade estrutural. Nestes casos, a despeito da aleatoriedade das diferentes variáveis, o projetista está preocupado com a aleatoriedade espacial das propriedades dos materiais, geometria, cargas externas aplicadas e condições de contorno de forma a melhorar a representação das características do sistema. Na análise da confiabilidade de estruturas tridimensionais, a geração destes campos é de grande importância, principalmente na geração das geometria e cargas, uma vez que pretende-se trabalhar com modelos que melhor representem o comportamento das estruturas reais.

Devido às dificuldades matemáticas e à falta de dados observados, a maioria das técnicas de geração, assim como as aproximações analíticas para a geração de campos estocásticos, são limitadas ao tratamento de campos Gaussianos. Em algumas situações, a hipótese de um campo estocástico Gaussiano não é adequada devido ao fato de que os dados reais observados apresentam características não Gaussianas. Como exemplificado por Yamazaki *et al.*

(1988), a resposta de sistemas não lineares é reconhecidamente não Gaussiana, mesmo para excitações Gaussianas. Também, por exemplo, a variabilidade espacial do módulo de Young e outras propriedades mecânicas não devem ser consideradas como Gaussianas porque teoricamente estas propriedades não assumem valores negativos. É mais apropriado considerá-las como campos estocásticos com distribuição lognormal.

### 4.1.1 Geração de campos estocásticos

A técnica de geração digital de campos estocásticos tem se estabelecido durante as duas últimas décadas (Yamazaki *et al.*, 1988). Em geral, a simulação e geração de amostras de campos estocásticos pode ser feita por meio de três procedimentos: (a) Representação espectral; (b) Modelamento ARMA (Auto-Regressive Moving Average); e (c) Procedimentos de decomposição da matriz de autocovariança (Yamazaki *et al.*, 1990).

Yamazaki *et al.* (1990) mostraram que com a representação espectral, os campos estocásticos podem ser simulados e as respectivas amostras geradas, e que devido à periodicidade e ortogonalidade das funções trigonométricas empregadas na expansão, as estatísticas espaciais resultantes são altamente precisas. A geração digital de amostras pode ser feita eficientemente com ajuda do algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*). O modelamento ARMA para a representação de campos estocásticos tem recebido recentemente considerável atenção. Basicamente, a vantagem de uso do modelamento ARMA recai na pequena quantidade de memória e tempo de CPU para a geração do campo devido à forma recursiva envolvida na formulação. Como foi observado por Yamazaki *et al.*, (1990), este método usualmente requer uma grande quantidade de amostras, de forma que é alcançado o mesmo nível de precisão estatística que, por exemplo, o método da representação espectral, o qual requer um menor número de amostras.

Os métodos de decomposição da matriz de autocovariança, tais como decomposição Cholesky e decomposição modal, permitem a geração de campos estocásticos em pontos discretos, desde que suas funções de correlação, ou opcionalmente suas funções de densidade espectral sejam conhecidas *a priori*. A grande vantagem destes métodos recai no fato de que a geração de campos estocásticos multivariáveis, multidimensionais, não homogêneos e não Gaussianos é tão simples quanto para campos unidimensionais. Entretanto, o método de decomposição da matriz de autocovariança pode necessitar de uma grande quantidade de amostras para alcançar estatísticas estáveis e de alta precisão. Nos parágrafos seguintes, é dada uma

breve descrição do uso dos métodos clássicos de decomposição da matriz de autocovariança para a geração de campos estocásticos isotrópicos ou não e não Gaussianos.

### 4.1.2 Geração de campos não Gaussianos

A geração de campos estocásticos com distribuições não Gaussianas segue a técnica do mapeamento inverso usada para a geração de variáveis simples com função de densidade de probabilidade prescrita. Assim como no caso de variáveis aleatórias simples, é necessário gerar variáveis com média zero e desvio padrão unitário. A técnica do mapeamento inverso é então usada para impor a correta função de densidade de probabilidade.

Pode-se começar por gerar números aleatórios uniformemente distribuídos ( $\mathbf{u}$ ) entre 0 e 1 na mesma quantidade do campo discreto. Então, a inversa da função de distribuição acumulada Gaussiana padrão é usada para obter o campo Gaussiano padrão (média zero e desvio padrão unitário,  $\mathbf{Z}$ ) como descrito na equação seguinte:

$$\mathbf{Z} = \Phi^{-1}(\mathbf{u}) \quad (4.1)$$

onde  $\Phi^{-1}$  é a inversa da função de distribuição acumulada Gaussiana padrão.

Na análise estatística de campos reais, as estatísticas obtidas a respeito das variáveis estão no espaço real das variáveis. Portanto, os dados disponíveis a respeito de uma dada variável são o seu tipo de função de distribuição e sua matriz de autocorrelação. Se, por exemplo, uma variável tem um tipo de distribuição lognormal, então a descrição em termos de sua média, desvio padrão e matriz de autocorrelação ( $R_{x_{ij}}$ , no espaço real) é suficiente.

O modelo de Nataf pode ser usado para a transformação da matriz de autocovariança para o espaço não correlacionado Gaussiano padrão como descrito em Liu *et al.* (1986). Basicamente, dada a matriz de coeficientes de correlação no espaço real ( $\rho_{ij}$ ), a matriz de coeficientes de correlação no espaço Gaussiano padrão ( $\rho'_{ij}$ ) pode ser encontrada através da solução numérica da integral dada abaixo:

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left( \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \varphi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij}) dz_i dz_j \quad (4.2)$$

onde  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  são a média e desvio padrão da  $i$ -ésima variável e  $\varphi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij})$  é a função de densidade Gaussiana bidimensional de média zero e desvio padrão unitário. Como os coefi-

entes de correlação aparecem dentro da integral, uma integração numérica ou mesmo fórmulas empíricas podem ser usadas para resolver este tipo de problema (Liu *et al.* 1986).

Como não se conhece  $\rho'_{ij}$ , é necessário transformar a função de autocorrelação dada ( $R_{Xij}$ ) numa matriz de coeficientes de correlação ( $\rho'_{ij}$ ) de forma a poder utilizar o modelo de Nataf. Então a seguinte definição da matriz de coeficientes de correlação é usada, lembrando-se da homogeneidade do campo gerado que tem médias zero:

$$C_{Xij} = R_{Xij} - \mu_{X_i}\mu_{X_j} \text{ e } \rho_{ij} = \frac{R_{Xij}}{\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}} \quad (4.3)$$

onde  $C_{Xij}$  é a matriz de autocovariância,  $R_{Xij}$  é a matriz de autocorrelação e  $\sigma_{X_i}$  e  $\mu_{X_i}$  são o desvio padrão e média da  $i$ -ésima variável.

Uma vez que a matriz de coeficientes de correlação ( $\rho$ ) no espaço real seja obtida e a matriz de coeficientes de correlação no espaço Gaussiano padrão ( $\rho'$ ) seja calculada, dois métodos para decomposição matricial podem ser usados como indicados abaixo:

- Decomposição de Cholesky: (Ripley, 1987)

$$\rho' = \mathbf{L} \mathbf{L}^T \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior.

- Decomposição modal:

$$\rho' = \mathbf{\Theta} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Theta}^T \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}$  é a matriz diagonal de autovalores em ordem decrescente,  $\mathbf{\Theta}$  é a matriz de autovetores associada correspondente, cujo problema de autovalores-autovetores vem dado por:

$$\rho' \mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta} \mathbf{\Lambda} \quad (4.6)$$

A seguir, pode-se verificar que os seguintes três procedimentos são aplicáveis à geração de variáveis correlacionadas Gaussianas prescritas ( $\mathbf{Z}'$ ):

- Multiplicar a matriz triangular inferior da decomposição Cholesky por um vetor de números Gaussianos padrão (método de decomposição de Cholesky):

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \mathbf{Z} \quad (4.7)$$

- Multiplicar a matriz de autovetores (ou parte dela) pela raiz quadrada dos autovalores e pelo vetor de números Gaussianos padrão, como mostrado na equação seguinte (método da decomposição Modal):

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{\Theta} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Z} \quad (4.8)$$

- Gerar diretamente números Gaussianos padrão pela representação espectral usando autovetores e autovalores do procedimento anterior e séries de cosseno (Shinozuka *et al* 1985), como indicado na equação seguinte (método da representação espectral por séries de cosseno):

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}'_s = \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^{N_f} \Theta_{si} \sqrt{\frac{\lambda_i}{N_f}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{T_{nN_f}}{T_k} + \psi_k\right) \quad (4.9)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n) \quad (k = 1, 2, \dots, nN_f) \quad k = (m-1)M + i$$

onde  $\lambda_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor da matriz de coeficientes de correlação (em ordem decrescente),  $\Theta_{si}$  é a  $s$ -ésima componente do vetor  $\Theta_i$ ,  $\psi_k$  é o  $k$ -ésimo ângulo de fase uniformemente distribuído entre  $0$  e  $2\pi$  ( $\boldsymbol{\psi} = 2\pi \mathbf{Z}$ ),  $M$  é o número de modos da matriz de autovalores que serão retidos,  $N_f$  é o número de funções cosseno a serem adicionadas à série,  $n$  é o tamanho do campo discreto e  $T_k = 1/k$ .

Uma vez que o campo Gaussiano padrão correlacionado seja gerado, estes valores são mapeados ao espaço real das variáveis através da inversa da função de densidade de probabilidade acumulada desejada, originando:

$$\mathbf{X} = F_x^{-1}(\mathbf{Z}') \quad (4.10)$$

onde  $F_x^{-1}$  e  $\mathbf{X}$  são a função inversa acumulada e o campo gerado, respectivamente.

### 4.1.3 Formas usuais da matriz de coeficientes de correlação no espaço real

Nas análises numéricas usuais, são considerados os seguintes três modelos de funções de autocorrelação multidimensionais para campos estocásticos homogêneos e isotrópicos:

Correlação do tipo exponencial:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{d}\right) \quad (4.11)$$

Correlação do tipo exponencial quadrada:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{d}\right)^2\right) \quad (4.12)$$

Correlação do tipo senoidal:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\sin\left(-2.2 \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{d}\right)}{-2.2 \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{d}} \quad (4.13)$$

onde em todos os modelos anteriores  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  representa a distância física entre dois pontos pertencentes ao campo, e o parâmetro  $d$  representa a medida da taxa de flutuação do campo estocástico, geralmente conhecido como “comprimento de correlação”. O modelo de correlação do tipo exponencial descreve bem campos estocásticos não diferenciáveis, enquanto que os tipos exponencial quadrada e senoidal descrevem bem campos estocásticos diferenciáveis, sendo o último, campos com um comportamento oscilatório. Os primeiros dois tipos são os mais utilizados na prática. Estes mesmos modelos podem ser facilmente modificados para a inclusão de não isotropia através da introdução de comprimentos de correlação diferenciados para cada uma das direções espaciais.

## 4.2 Exemplo numérico

Com fim ilustrativo, para a comparação entre os métodos apresentados, é feita a geração digital de um campo com distribuição lognormal numa placa quadrada de aço com dimensões 10,0 x 10,0 m. A placa quadrada é discretizada em 100 elementos finitos de igual área (1,0 x 1,0 m). Um esquema da placa quadrada de aço é mostrado na Figura 4.1. As propriedades dos elementos são consideradas como constantes ao longo da área do elemento e representada por seu valor no centro, admitindo-se uma função de autocorrelação isotrópica com forma exponencial como mostrada na equação seguinte:

$$\mathbf{R}_{xx}(\xi) = \sigma^2 \exp\left[-\left(\xi/d\right)^2\right] \quad (4.14)$$

onde  $d$  é o parâmetro que representa a escala de correlação,  $\xi$  o vetor de separação, contendo as distâncias entre os centróides dos elementos (quanto maior  $d$ , mais devagar a correlação desaparece em função da distância de separação  $\xi$ ), e  $\sigma$  é o desvio padrão do campo estocástico. Tomou-se a discretização da malha pequena o suficiente para representar a variabilidade espacial requerida. Para uma discussão mais precisa a respeito do problema da escolha da dimensão da malha de elementos finitos, veja por exemplo, Liu *et al.* (1993).

Para a validação dos resultados, calculou-se a matriz de autocorrelação de uma série de 500 amostras geradas segundo o procedimento anteriormente descrito, supondo-se a ergodicidade do campo gerado.

Neste exemplo, o campo estocástico representa a variabilidade espacial da tensão de escoamento ( $f_y$ ) da placa quadrada de aço. É tomado  $\mu = 500 \text{ MPa}$ ,  $\sigma = 30 \text{ MPa}$  com uma função de densidade de probabilidade do tipo lognormal e  $d = 2 \text{ m}$ . Na Figura 4.2, Figura 4.3, Figura 4.4 e Figura 4.5 são comparados a função de autocorrelação original e os resultados obtidos com cada um dos três métodos.

No exemplo apresentado aqui, para o método da representação espectral tomou-se  $M = 50$ , (os primeiros 50 modos), e  $N_f = 1$  (somente um cosseno é adicionado à série). As seguintes comparações podem ser estabelecidas entre as diferentes formulações: o método de decomposição de Cholesky parece ser mais atrativo quando o campo estocástico é muito pouco correlacionado, ou os elementos de fora da diagonal da matriz de coeficiente de correlação são muito pequenos quando comparados com os elementos diagonais. Por outro lado, o método da decomposição modal parece ser mais vantajoso quando o método de decomposição de Cholesky não funciona adequadamente (o algoritmo de fatorização Cholesky falha), isto é, quando o campo é altamente correlacionado ou os elementos fora da diagonal da matriz de coeficientes de correlação são da mesma magnitude dos elementos diagonais. Uma vez que o método da representação espectral depende dos autovalores e autovetores da matriz de coeficiente de correlação, este método tem as mesmas vantagens e desvantagens que o método da decomposição modal. Entretanto deve ser enfatizado que não é necessário avaliar todos os autovalores-autovetores, uma vez que grande parte dos campos reais são moderadamente correlacionados, sendo necessário apenas alguns modos para uma geração precisa. Na Figura 4.6 os correspondentes campos gerados são mostrados.

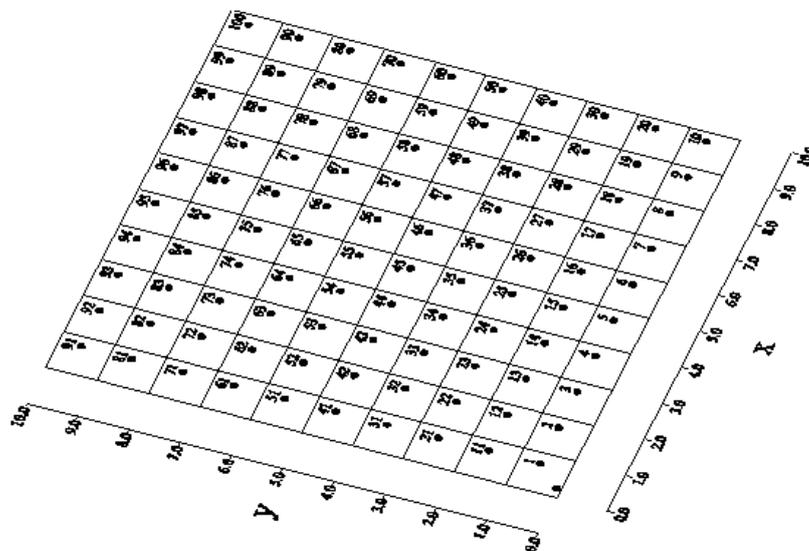


Figura 4.1 - Discretização da placa quadrada em 100 elementos finitos iguais.

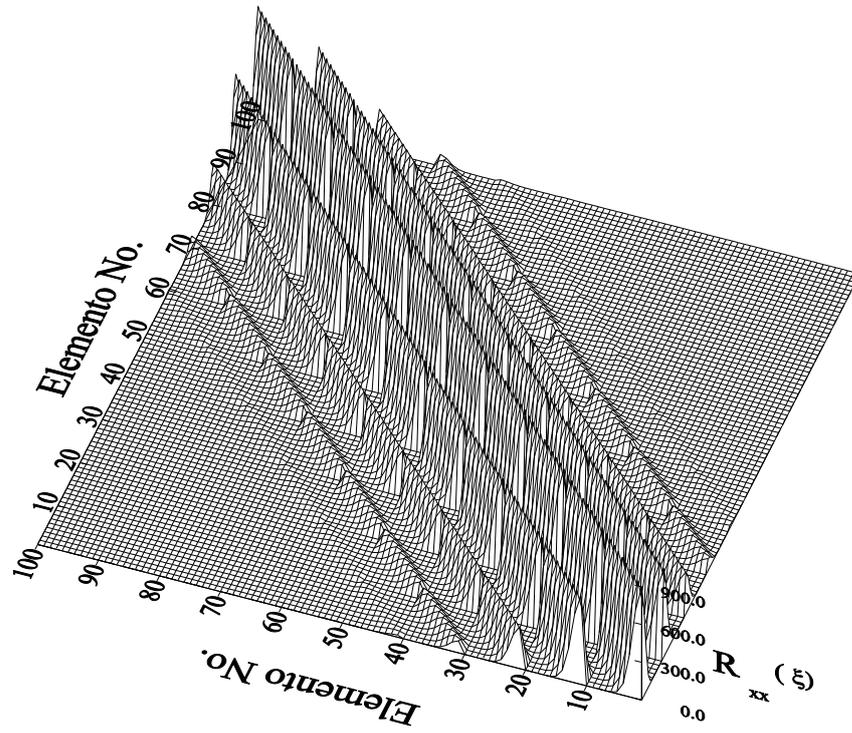


Figura 4.2 - Matriz de autocorrelação original.

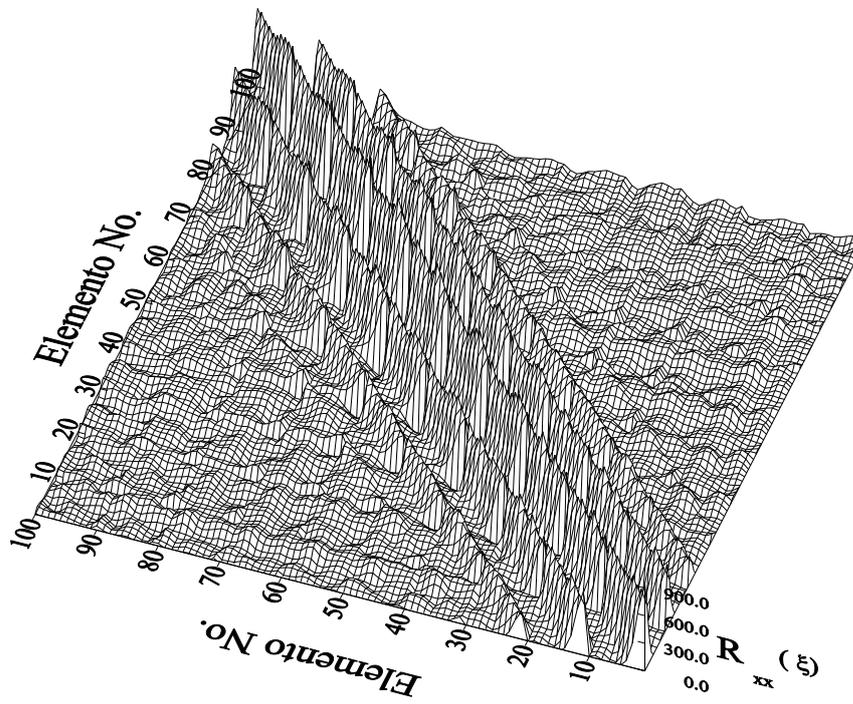


Figura 4.3 - Função de autocorrelação para o método de decomposição Cholesky.

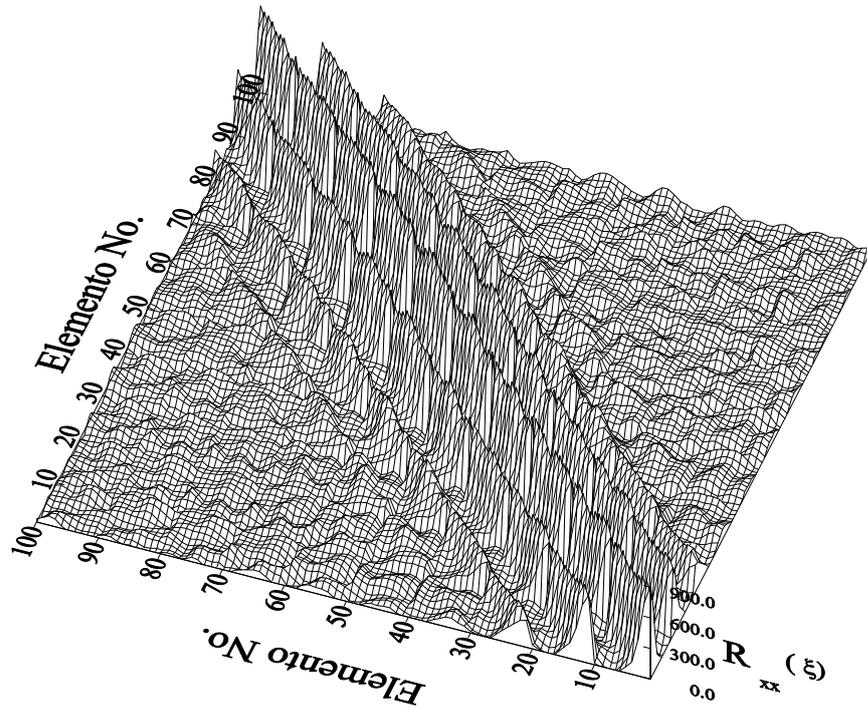


Figura 4.4 - Função de autocorrelação para o método de decomposição modal.

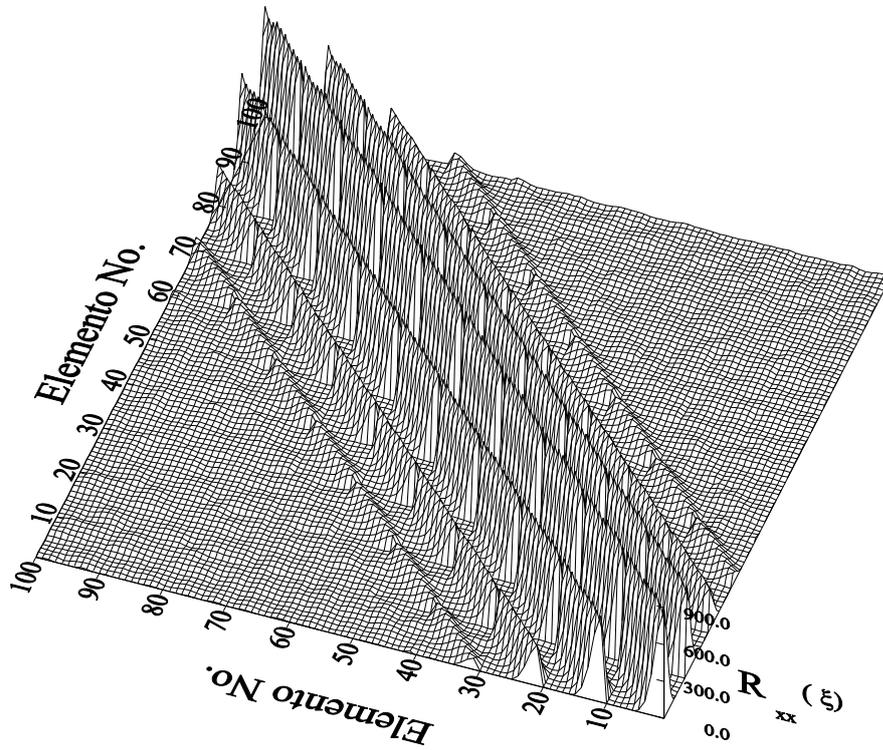


Figura 4.5 - Função de autocorrelação para o método da representação espectral.

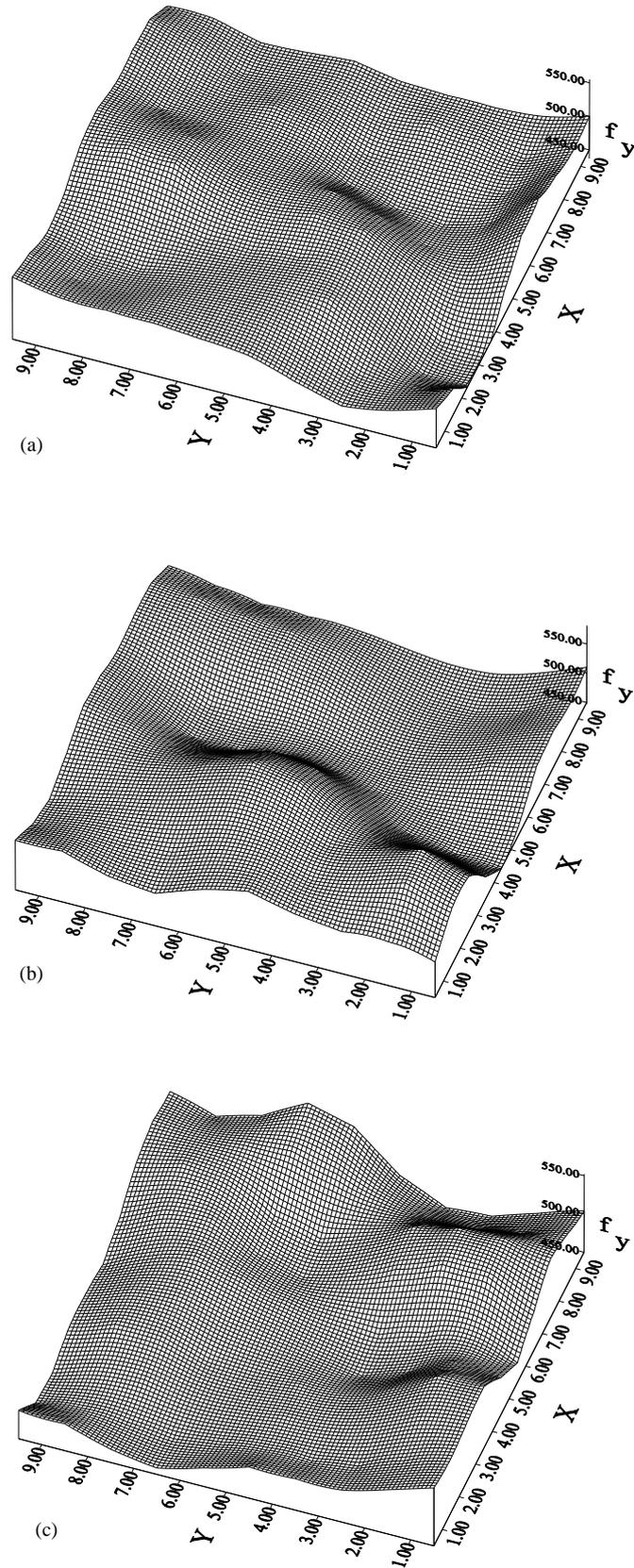


Figura 4.6 - Campos gerados: (a)Decomposição Cholesky; (b)Decomposição modal e (c)Representação espectral por séries de cosseno.

O tempo de CPU relativo requerido para gerar o campo estocástico, para cada um dos diferentes métodos, para três tamanhos de amostras é mostrado na Tabela 4.1 abaixo:

Tabela 4.1 - Tempo de CPU relativo para diferentes métodos e número de amostras.

Número de amostras	500	1000	2000
Método			
Decomp. Cholesky	1.00	1.62	3.14
Decomp. Modal	1.77	2.70	4.60
Repres. Espectral	1.18	1.18	1.22

### 4.2.1 Comentários

Analisando as figuras anteriores é possível realizar uma avaliação mais precisa da matriz de autocovariância pelo Método da Representação Espectral, ainda que para pequenos tamanhos de amostras. Resultados mais precisos podem ser alcançados pelos Métodos da Decomposição de Cholesky e da Decomposição Modal, aumentando-se o tamanho da amostra, obviamente em detrimento do aumento do tempo de processamento necessário para a geração destas amostras. Como indicado na Tabela 4.1, para o tamanho da amostra pequeno, os três métodos são aproximadamente equivalentes em termos de tempo necessário para geração dos campos. Entretanto para grandes amostras é evidente a vantagem do Método da Representação Espectral com respeito aos outros métodos.

## 4.3 Expansão em séries de Neumann da matriz de rigidez

Quando no método direto Monte Carlo, as variáveis aleatórias representam alguma propriedade que entra na formação da matriz de rigidez, por exemplo, o módulo de elasticidade, as dimensões geométricas, o coeficiente de Poisson, etc., constituindo um campo aleatório, então a matriz precisa ser montada e decomposta para cada amostra simulada, uma vez que cada nova simulação representa uma nova análise estrutural para os valores simulados. Uma alternativa que evita esta decomposição e que pode ser utilizada para acelerar o processo de solução para diversas simulações é baseado na expansão de Neumann da matriz de rigidez.

A matriz de rigidez é decomposta em duas parcelas na forma(Araújo *et al*,1995):

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K} \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{K}_0$  é a matriz de rigidez obtida com os valores médios das propriedades envolvidas e  $\Delta\mathbf{K}$  representa a mesma matriz formada para a parte flutuante do valor médio das propriedades. A expansão de Neumann da inversa da matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{-1}$ , toma a seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots) \mathbf{K}_0^{-1} \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{P} = \mathbf{K}_0^{-1} \Delta\mathbf{K}$  e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Os deslocamentos nodais podem ser obtidos através da série:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots) \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F} \quad (4.17)$$

A solução  $\mathbf{U}_0$  correspondente a  $\mathbf{K}_0$  é:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F} \quad (4.18)$$

de forma que os deslocamentos nodais são dados também pela série:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{P}\mathbf{U}_0 + \mathbf{P}^2\mathbf{U}_0 - \mathbf{P}^3\mathbf{U}_0 \dots \quad (4.19)$$

A equação anterior pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_3 \dots \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{P}\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{U}_2 = \mathbf{P}\mathbf{U}_1$ , etc. Então, levando-se em conta (4.16) e (4.17), tem-se que:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{K}_0^{-1} (\Delta\mathbf{K} \mathbf{U}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Observe-se que a equação (4.18) é apenas resolvida uma vez para os valores médios das variáveis envolvidas (uma montagem, uma decomposição e uma retro substituição), enquanto que a equação (4.21) é usada iterativamente até a ordem desejada nas outras simulações para a obtenção da resposta determinística (multiplicações e retro substituições quantos forem os termos da série). A ordem da série pode ser truncada até determinado número fixo de termos ou automaticamente, como indicado em Papadrakis (1996), de acordo com a norma do erro dos deslocamentos, que vem dada por:

$$\|\mathbf{U}_i\| / \left\| \sum_{k=0}^i (-1)^k \mathbf{U}_k \right\| \leq \varepsilon_1 \quad (4.22)$$

ou ainda pela norma do erro das forças, que vem dada por:

$$\|\mathbf{F} - (\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})\mathbf{U}_i\| / \|\mathbf{F}\| \leq \varepsilon_2 \quad (4.23)$$

sendo  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  dois valores representativos da tolerância desejada. Esta avaliação deve ser feita quando se calcula cada termo  $\mathbf{U}_i$  da série. O único requerimento de convergência da série de Neumann para o valor exato é a de que os valores absolutos de todos os autovalores de  $\mathbf{P}$  devam ser inferiores a 1, assegurando-se a convergência inclusive para grandes variações em

torno do valor médio das variáveis (coeficientes de variação superiores a 0.3). Segundo Yamazaki (1988)[231], isto pode ser sempre satisfeito através da introdução de um parâmetro  $m$  que satisfaz a desigualdade  $m < (\lambda_k + 1)/2$  onde  $\lambda_k$  é o maior autovalor positivo da matriz  $\mathbf{P}$ . Então a série da equação (4.21) é reescrita na forma:

$$\mathbf{U}_i^* = \mathbf{K}_0^{-1} \left( \frac{1}{m} \Delta \mathbf{K}^* \mathbf{U}_{i-1}^* \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{com } \mathbf{U}_i^* = \frac{1}{m} \mathbf{U}_i \text{ e } \Delta \mathbf{K}^* = (\mathbf{K} - m \mathbf{K}_0) \quad (4.24)$$

### 4.3.1 Exemplo numérico

Neste item será apresentado uma série de testes de simulação da resposta estrutural, que visam comparar a eficiência e precisão dos métodos de geração de campos estocásticos e a expansão em séries de Neumann para a análise estática linear de uma viga bi-apoiada, submetida a duas cargas concentradas e equidistantes dos apoios, como indica a Figura 4.7 abaixo:

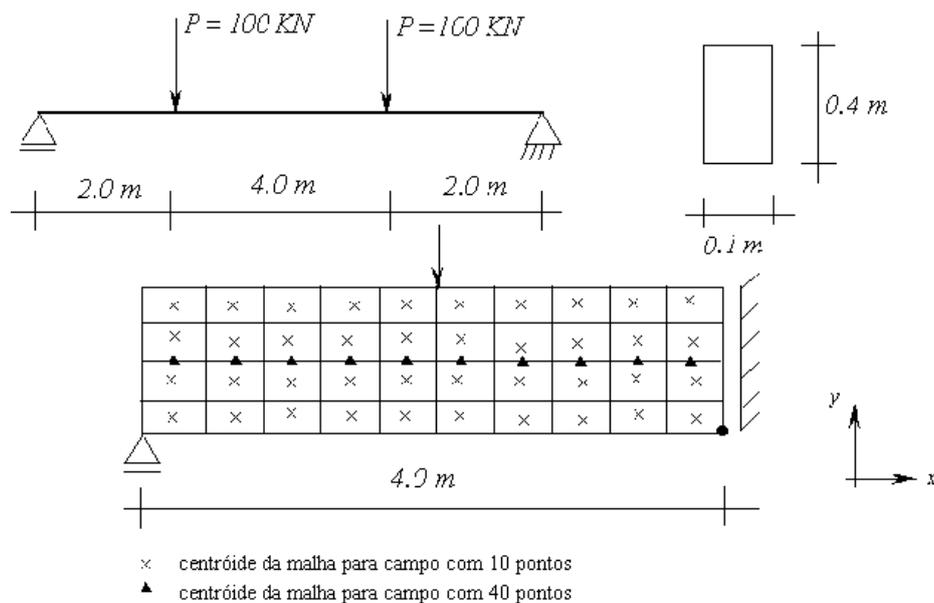


Figura 4.7 - Esboço da geometria da viga, da malha de elementos finitos e do campo estocástico.

Nesta análise, metade da viga é discretizada em 40 elementos de 20 nós, conforme indicado na figura. Os resultados referem-se ao deslocamento transversal  $w$  no meio do vão e na fibra mais tracionada e à tensão normal  $\sigma_x$ . Estes valores serão comparados com aqueles calculados por Araújo *et al.* (1992) utilizando-se elementos isoparamétricos de 8 nós em estado plano de tensões.

Admite-se um campo estocástico Gaussiano para o módulo de elasticidade representado no centróide de cada elemento com valor médio de  $E=30.000$  MPa, com função de autocorrelação do tipo exponencial, comprimento de correlação, adotado apenas para comparação, de  $d=0.8$  m (desta forma pode-se admitir que a malha de elementos finitos é pequena o suficiente para a representação do campo) e com coeficientes de variação que assumem os valores de  $\delta_E=0.1$ ,  $\delta_E=0.2$  e  $\delta_E=0.3$ . Tanto o coeficiente de Poisson quanto a geometria e as cargas são consideradas como variáveis determinísticas.

As seguintes seqüências de testes, indicadas na Tabela 4.2 e na Tabela 4.3, foram feitas. Para salientar a capacidade de geração de malhas do campo estocástico independente da malha de elementos finitos desenvolvido neste trabalho, alguns outros testes foram feitos para um campo de 10 pontos equidistantes na linha neutra da viga.

Tabela 4.2 - Seqüência de testes para os métodos de geração de campos para o exemplo da viga com campo do módulo de elasticidade discretizado no centróide de cada elemento (40 pontos).

Método de Simulação	Monte Carlo Direto		Expansão de Neumann n=2		Expansão de Neumann n=3		Expansão de Neumann n=5	
Coeficiente de Variação de $E$	Método Geração de Campo							
	Decomp. Cholesky	Repres. Espectral						
$\delta_E=0.1$	x	x	x	x	x	x	x	x
$\delta_E=0.2$	x	x	x	x	x	x	x	x
$\delta_E=0.3$	x	x	x	x	x	x	x	x

Tabela 4.3 - Seqüência de testes para os métodos de geração de campos para o exemplo da viga com campo do módulo de elasticidade discretizado em 10 pontos equidistantes na linha neutra da viga.

Método de Simulação	Monte Carlo Direto		Expansão de Neumann n=2		Expansão de Neumann n=3		Expansão de Neumann n=5	
Coeficiente de Variação de $E$	Método Geração de Campo							
	Decomp. Cholesky	Repres. Espectral						
$\delta_E=0.1$	x						x	x
$\delta_E=0.2$								
$\delta_E=0.3$	x						x	x

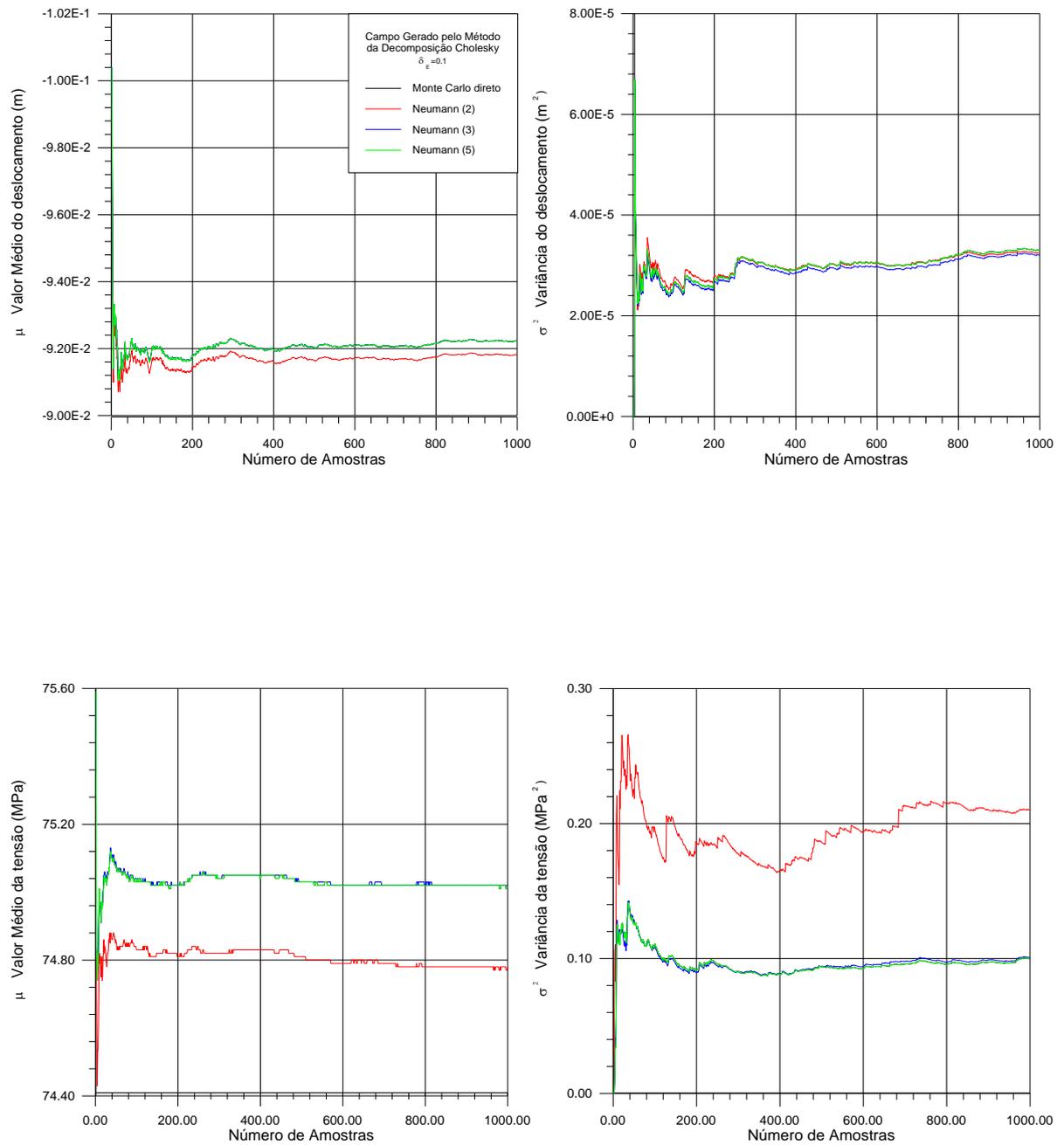


Figura 4.8 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Cholesky e  $\delta_E=0.1$ .

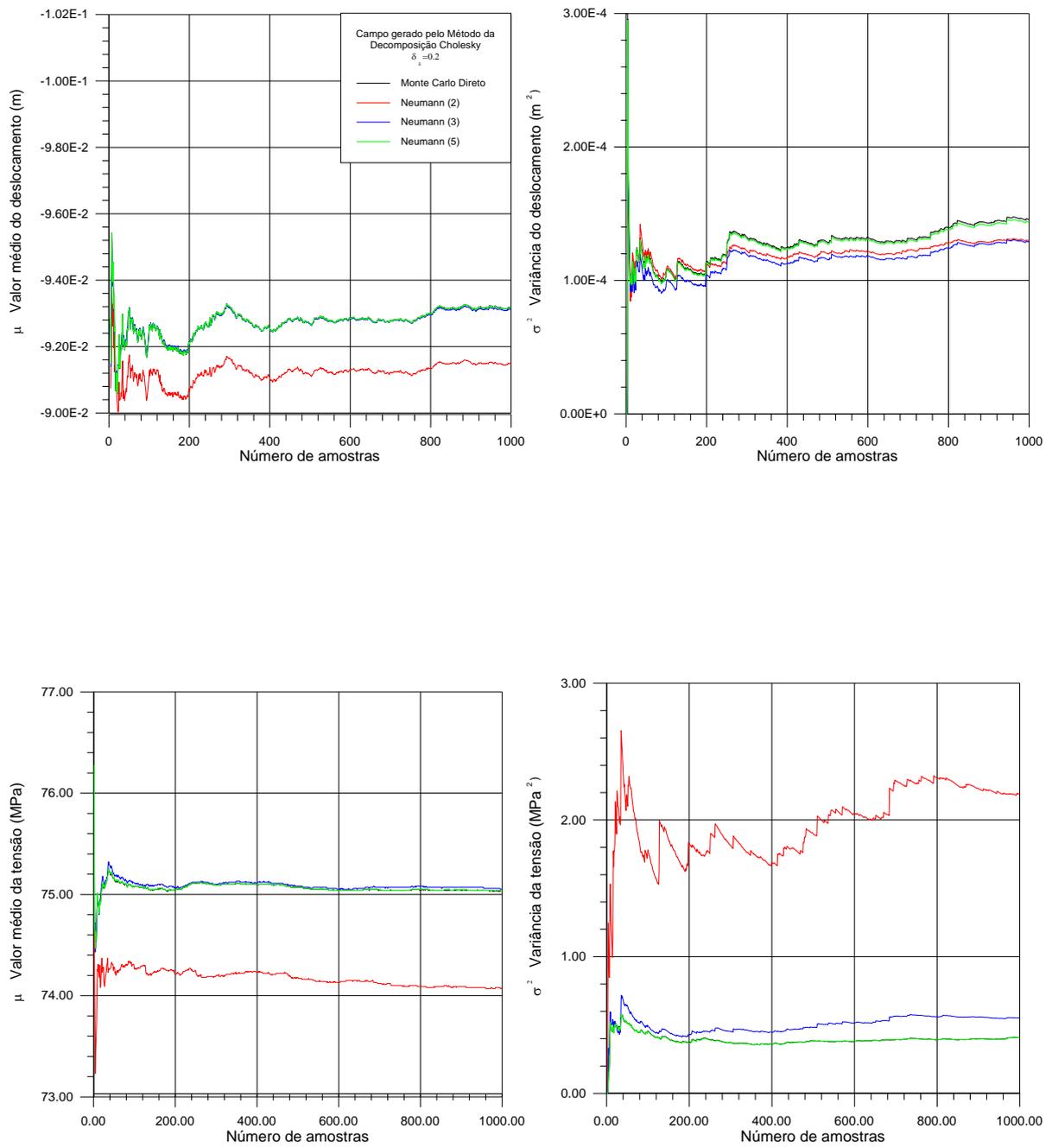


Figura 4.9 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Cholesky e  $\delta_E=0.2$ .

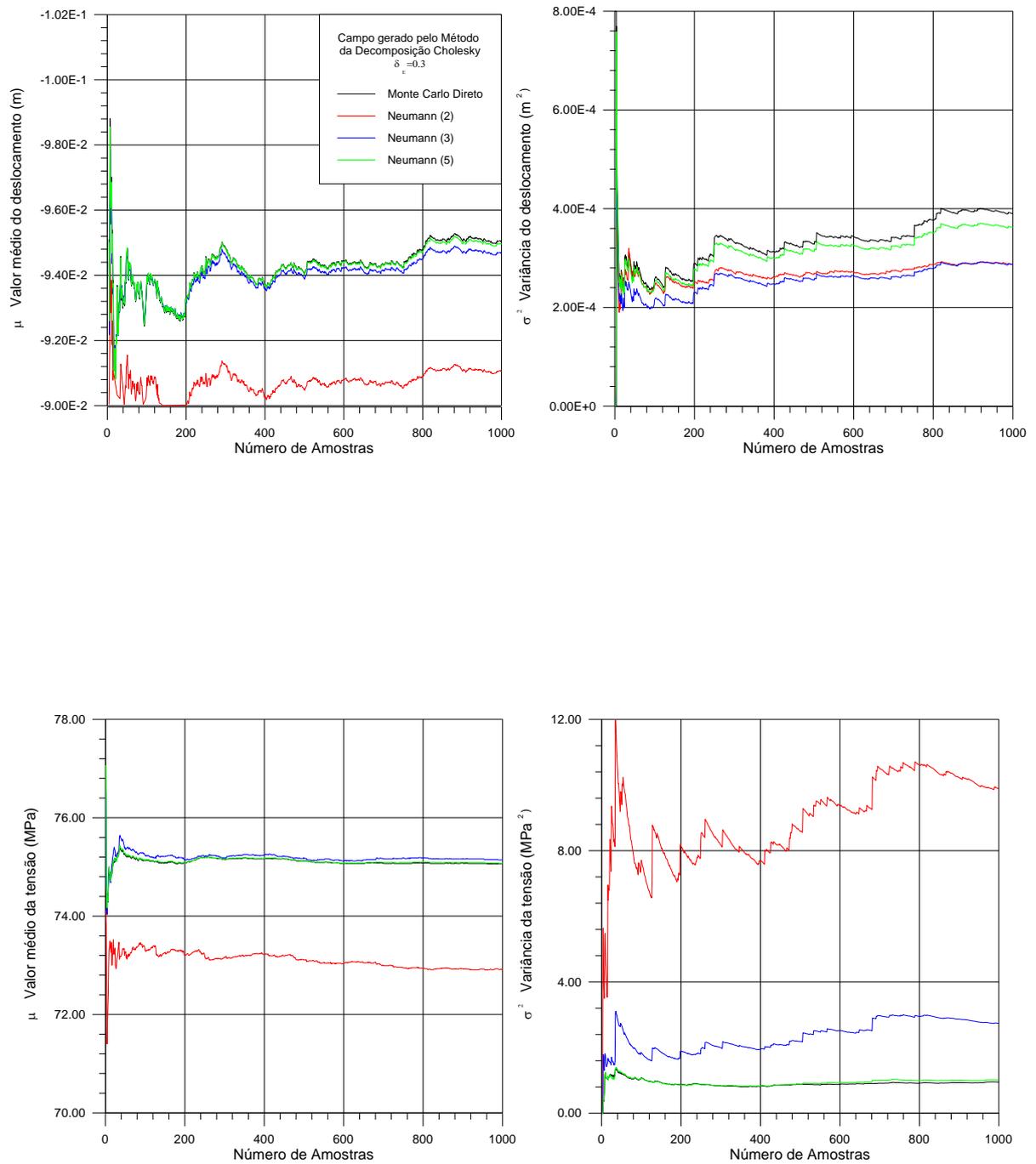


Figura 4.10 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Cholesky e  $\delta_E=0.3$ .

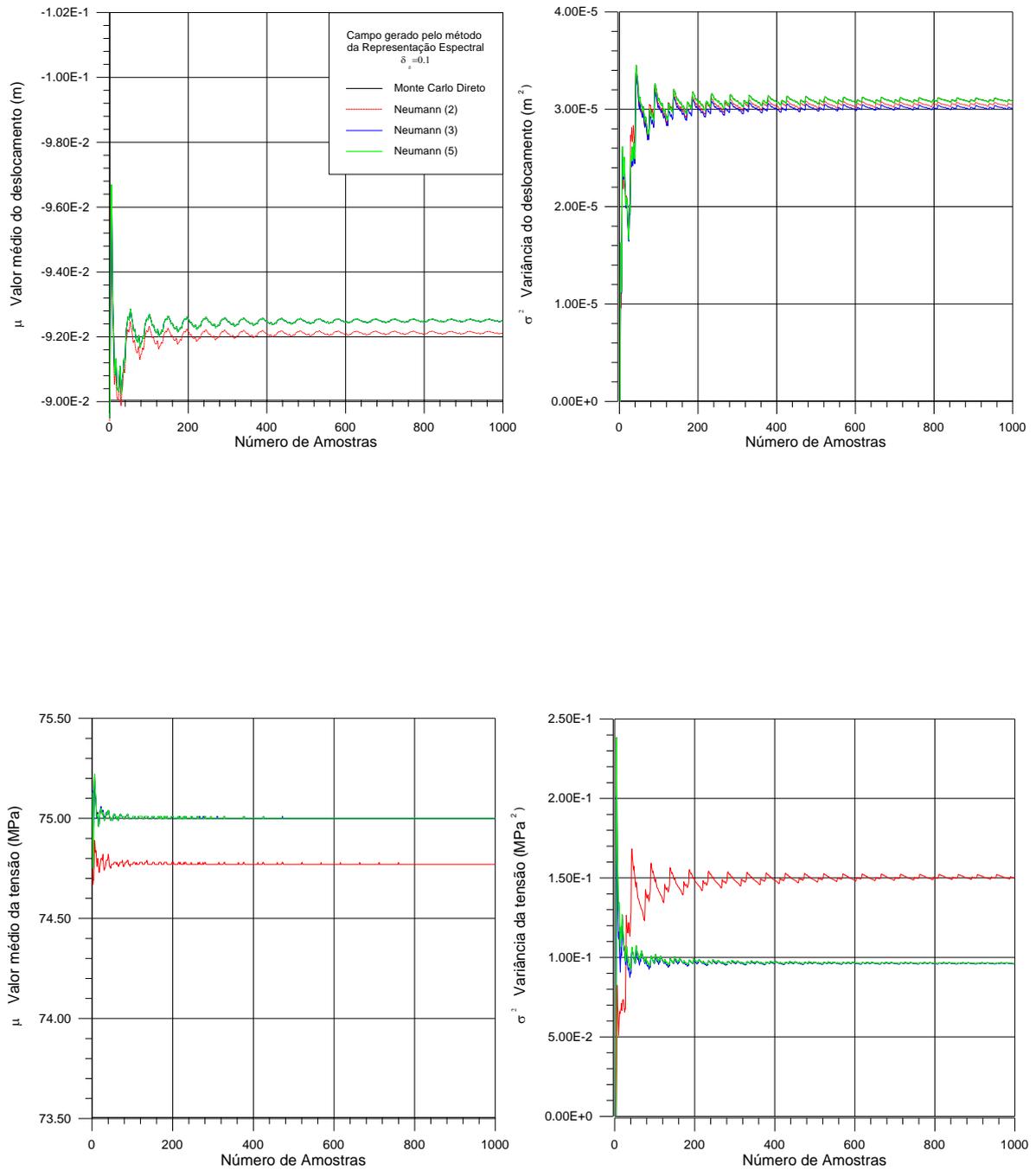


Figura 4.11 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral e  $\delta_E=0.1$ .

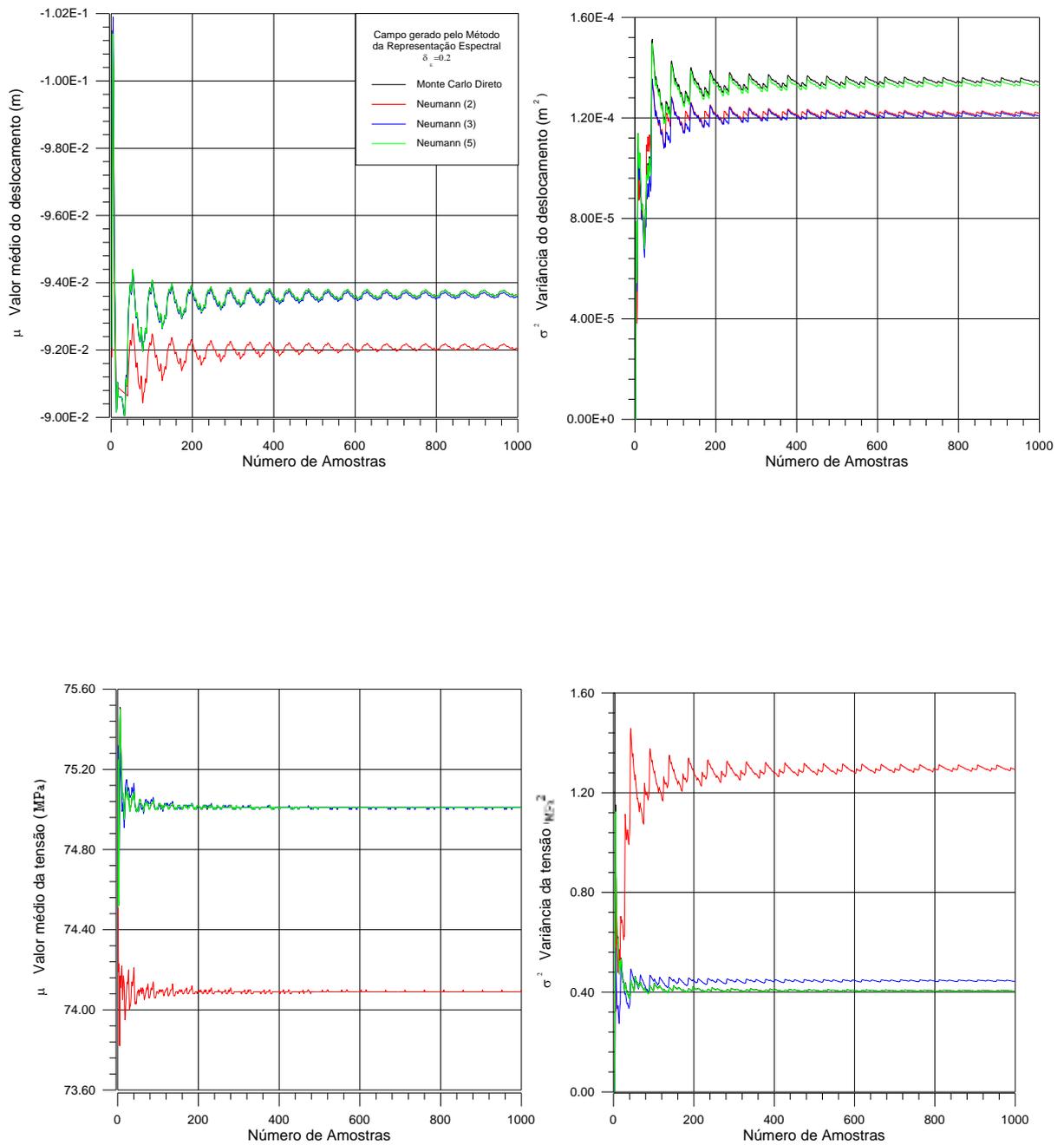


Figura 4.12 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral e  $\delta_E=0.2$ .

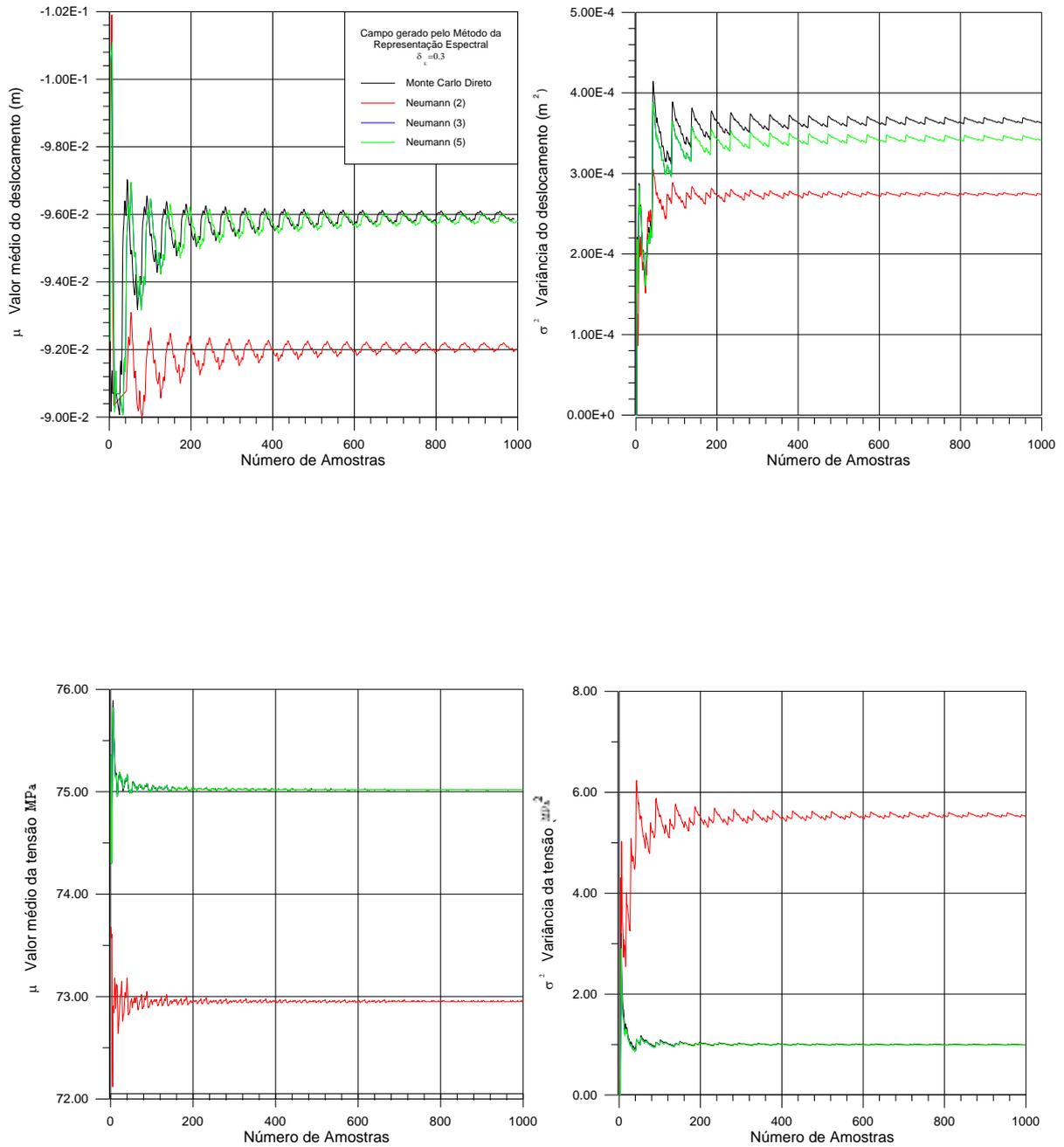


Figura 4.13 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral e  $\delta_E=0.3$ .

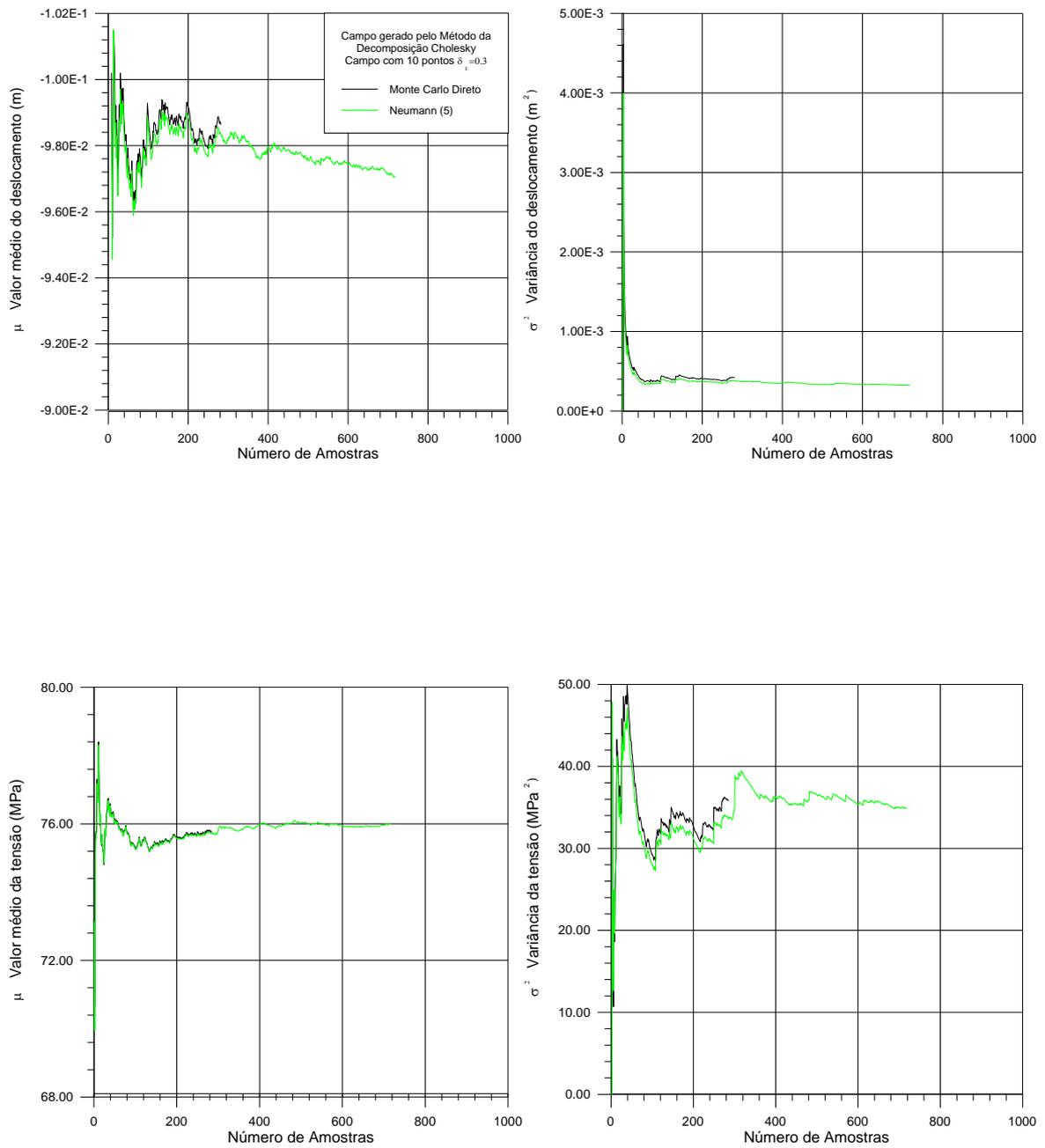


Figura 4.14 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Decomposição Cholesky,  $\delta_E=0.3$  e campo com 10 pontos.

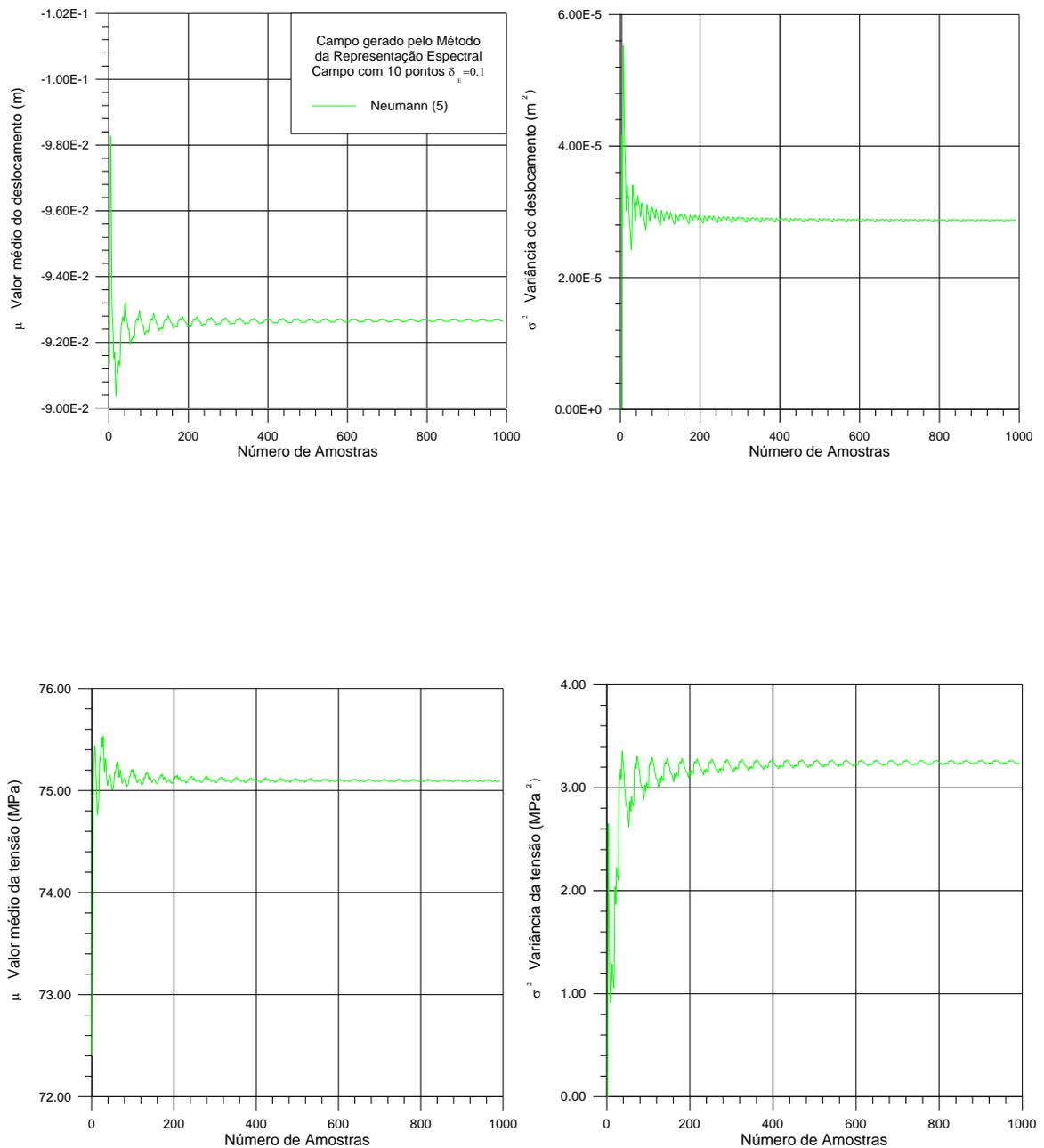


Figura 4.15 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método de Decomposição Cholesky,  $\delta_E=0.1$  e campo com 10 pontos.

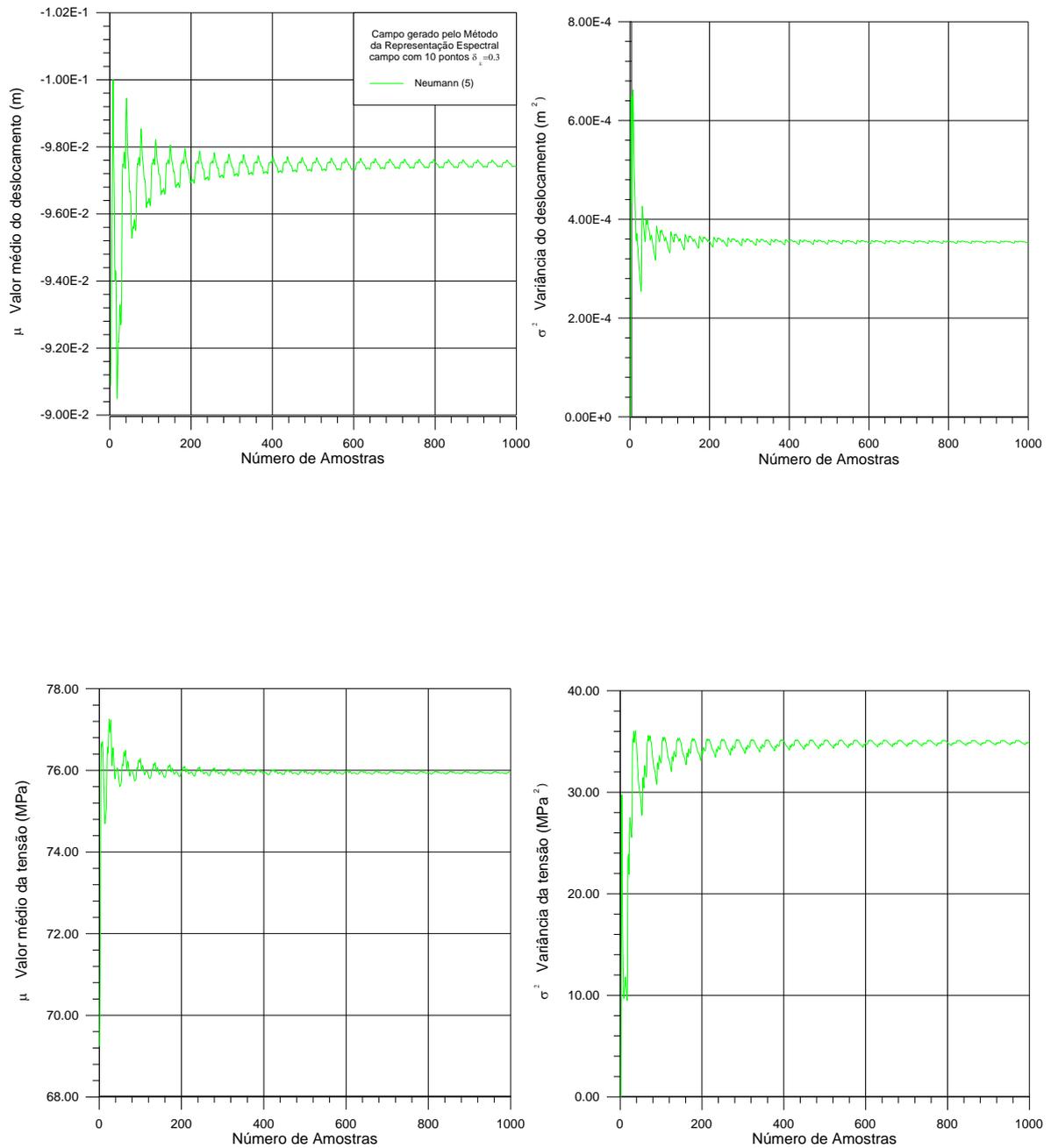


Figura 4.16 - Resultados para valor médio e variâncias dos deslocamentos e tensões para método da Representação Espectral,  $\delta_E=0.3$  e campo com 10 pontos.

Podem-se tecer alguns comentários a respeito dos resultados apresentados:

- Para campos com coeficiente de variação de  $E$  igual a 0.1, o método de Neumann de ordem 2, 3 ou 5 fornece praticamente os mesmos resultados que o método Monte Carlo Direto, levando a crer que nestes casos é mais vantajoso utilizar Neumann a Monte Carlo. Já para coeficiente de variação de  $E$  igual a 0.3, o método de Neumann de ordem 2 fornece valores bastante diferentes daqueles obtidos com Monte Carlo. O método de Neumann de ordem 3 ou superior é o que sempre apresentou resultados mais próximos daqueles obtidos montando e fatorando-se a matriz de rigidez a cada simulação. Em todos os exemplos com a simulação direta Monte Carlo, os valores esperados da flecha e da tensão estão bastante próximos daqueles obtidos por Araújo *et al.*(1992), utilizando elementos finitos planos de 8 nós. Os valores para médias e desvio padrão para flecha e tensão não diferem em mais de 3%;
- Dentre os métodos de geração de campos, o método da decomposição Cholesky foi o que levou a um maior tempo para atingir a convergência para os valores médio e variâncias. Já o método da representação Espectral mais rapidamente chegou à estabilização dos valores médios e variâncias para deslocamento e tensão;
- O uso do método da Representação Espectral em conjunto com a utilização da série de Neumann para a solução determinística em cada simulação parece ser o mais indicado, devido à qualidade das amostras geradas com o primeiro método e a rapidez na solução alcançada com a segunda técnica;
- A possibilidade da geração do campo estocástico independente da malha de elementos finitos é de grande importância, principalmente quando se deseja diminuir o número de variáveis aleatórias em um determinado problema sem entretanto reformular sua malha de elementos finitos. Como se pode ver pelos testes, ela deve ser criteriosa, pois a adoção da malha do campo de uma forma diferente pode levar a comportamentos bastante diferentes, apesar de ainda se estar trabalhando dentro dos limites da metade do comprimento de correlação como é de praxe. Na verdade, uma análise da sensibilidade da grandeza avaliada em relação ao campo é que dirá a importância deste no comportamento estrutural. Em interessante trabalho, Liu *et al.*(1993) mostra que para uma viga bi-engastada, respeitados os respectivos comprimentos de correlação, uma discretização do campo mais refinada nos apoios e no vão central fornece melhores resultados para a análise da confiabilidade que uma malha uniforme do campo em todo o vão da viga.

## 4.4 Variabilidade das propriedades dos materiais, cargas e geometria

### 4.4.1 Resistência à compressão do concreto

Como foi visto, para o diagrama tensão deformação uniaxial do concreto, os parâmetros relevantes que definem a curva são a resistência à compressão  $f_c$ , o módulo de elasticidade tangente  $E_c$ , a deformação sob máxima tensão  $\varepsilon_{cl}$  e a deformação que define o ramo descendente  $\varepsilon_{c,lim}$ . Para valores da resistência à compressão em MPa, o CEB90(1990) sugere a seguinte formulação para avaliar o valor médio da resistência à compressão:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa} \quad (4.25)$$

onde  $f_{ck}$  é a resistência característica à compressão. Já a NBR 6118(1980), sugere para cálculo do valor médio a seguinte fórmula:

$$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{1 - 1.645 V_{f_c}} \quad (4.26)$$

onde supõe-se que  $f_c$  assuma uma distribuição Normal, sendo  $V_{f_c}$ , o coeficiente de variação ( $\sigma_{f_c}/f_{cm}$ ) e  $f_{ck}$  é o valor característico correspondente a um quantil de 5%, no sentido desfavorável, da respectiva distribuição.

A literatura fornece valores para o coeficiente de variação para a resistência à compressão do concreto bastante variados, os quais dependem do tipo de controle efetivamente empregado na sua produção. A Norma Brasileira NBR 6118 (1980) sugere, que na falta de dados estatísticos adote-se um de três valores para o desvio padrão da resistência à compressão ( $\sigma_{f_c}$ ), 4 MPa, 5.5 MPa ou 7 MPa de acordo com o controle na produção, o que fornece valores de  $V_{f_c}$  que podem oscilar, para  $f_{cm}$  variando entre 20 MPa a 50 MPa, da ordem de 0.08 até 0.35.

Segundo o CEB 90(1990), admitindo que  $f_{ck}$  represente o quantil de 5% de uma distribuição Normal, então o valor do coeficiente de variação para a resistência à compressão do concreto vem dada por:

$$V_{f_c} = \frac{8}{1.645 f_{cm}} \quad (4.27)$$

### 4.4.2 Módulo de elasticidade do concreto à compressão

Para o módulo de elasticidade tangente  $E_c$  em MPa, o CEB 90 (1990) propõe a seguinte formulação com respeito ao seu valor médio:

$$E_{cm} = 2.15 \times 10^4 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \quad (4.28)$$

Já a NBR 6118 (1980), propõe a seguinte fórmula:

$$E_{cm} = 6600 \left( f_{cm} (1 - 1.645 V_{f_c}) + 3.5 \right)^{1/2} \quad (4.29)$$

De acordo com os autores Mirza (1979) e Ostlund (1991),  $V_{E_c}$  pode variar entre 0.08 e 0.1. Em vista do alto grau de correlação entre  $E_c$  e  $f_c$ , este mesmo coeficiente de variação pode ser estimado através da relação existente entre estas duas variáveis. Por exemplo, considerando a formulação proposta pelo CEB 90 (1990), e admitindo uma relação da forma:

$$E_c = \alpha_{E_c} \left( \frac{f_c}{10} \right)^{1/3} \quad (4.30)$$

então, o coeficiente de variação da equação anterior pode ser expressa convenientemente através da variabilidade dos coeficientes  $\alpha$  e  $f_c$ . Se adotarmos que estas variáveis aleatórias sejam independentes e utilizarmos uma aproximação de primeira ordem, a seguinte relação é obtida:

$$V_{E_c} \approx \sqrt{V_{\alpha_{E_c}}^2 + \left( \frac{V_{f_c}}{3} \right)^2} \quad (4.31)$$

onde  $V_{\alpha_{E_c}}$  representa o coeficiente de variação do fator de proporção da relação entre módulo de elasticidade e a resistência à compressão do concreto.

### 4.4.3 Resistência à tração do concreto

A NBR 6118(1980) admite que a resistência característica à tração do concreto  $f_{ctk}$  seja dada aproximadamente pela seguinte equação:

$$f_{ctk} = \begin{cases} \frac{f_{ck}}{10} & \text{para } f_{ck} \leq 18 \text{ MPa} \\ 0.06 f_{ck} + 0.7 & \text{para } f_{ck} > 18 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.32)$$

sendo seu valor médio avaliado segundo uma distribuição Normal e adotando um quantil de 5% no sentido desfavorável. Assim:

$$f_{ctm} = \frac{f_{ctk}}{1 - 1.645 V_{f_c}} \quad (4.33)$$

Para o CEB 90 (1990), esta relação vem dada por:

$$f_{ctm} = 1.4 \left( \frac{f_{cm} - 8}{10} \right)^{2/3} \quad (4.34)$$

De acordo com McGregor (1983), pode-se assumir esta variável com tipo de distribuição Normal e com coeficiente de variação de  $V_{f_{ct}}$  igual a 0.18. De uma forma mais geral, como foi feito para o módulo de elasticidade tangente, fazendo-se hipóteses semelhantes e uma aproximação de primeira ordem, este mesmo coeficiente de variação pode ser posto em função da variabilidade de  $\alpha_{f_{ct}}$  e de  $f_{ct}$ , de forma que se tem:

$$V_{f_{ct}} \approx \sqrt{V_{\alpha_{f_{ct}}}^2 + \left( \frac{2 V_{f_c}}{3} \right)^2} \quad (4.35)$$

onde  $\alpha_{f_{ct}}$  é a constante que relaciona a resistência à tração com a resistência à compressão na equação do CEB 90 (1990).

#### 4.4.4 Deformação máxima e deformação limite à compressão no concreto

O valor nominal proposto para  $\varepsilon_{c1}$  pelo CEB 90 para concretos não confinados é de  $-2.2\%$ . Para a NBR 6118 este valor é sugerido como  $-2.0\%$ . Observações do valor médio de  $\varepsilon_{c1}$  para concretos com  $f_{ck}$  entre 25 MPa e 105 MPa, mostram um aumento de cerca de 10% do seu valor, sugerindo uma correlação com esta variável. Para a formulação proposta pelo CEB 90,  $\varepsilon_{c,lim}$  fica implicitamente definido para um dado  $f_{ck}$ , sendo de difícil obtenção uma fórmula para cálculo do seu coeficiente de variação. Para as variáveis  $\varepsilon_{c1}$  e  $\varepsilon_{c,lim}$ , Kappos *et al* (1999) traz interessante compilação de dados a respeito destas variáveis para concretos confinados. Segundo o autor, os coeficientes de variação destas variáveis situam-se entre 0.30 e 0.36. Entretanto, não se encontraram dados estatísticos confiáveis na literatura a respeito da variabilidade para concretos não confinados. Neste trabalho assumiu-se que para concretos não confinados, valores semelhantes se apliquem.

#### 4.4.5 Módulo de elasticidade do aço

Para o aço de construção empregado como barras de reforço, o coeficiente de variação para o módulo de elasticidade é no máximo da ordem de 0.033 como constataram os auto-

res Mirza (1979) e Val (1997). Para aços Brasileiros valores semelhantes se aplicam, de forma que não se incorre em grande erro assumir tal variável como determinística.

#### 4.4.6 Tensão máxima de escoamento para o aço

Para o aço de construção o valor médio poderá ser avaliado através do quantil de 5% mais desfavorável para uma distribuição Normal, de forma que se tem:

$$f_{ym} = \frac{f_{yk}}{1 - 1.645 V_{fy}} \quad (4.36)$$

onde  $f_{ym}$  é o valor médio da tensão de escoamento do aço,  $f_{yk}$  é o valor característico correspondente a um quantil de 5% da respectiva distribuição e  $V_{fy}$  é o coeficiente de variação para a variável. Estudos têm mostrado que devido ao processo industrial de fabricação das armaduras de aço, estas apresentam um baixo coeficiente de variação para a tensão de escoamento, os quais chegam no máximo a 0.11. Não há dados encontrados a respeito das estatísticas dos outros parâmetros que definem a curva de tensão deformação, entretanto de acordo com Val (1997) a ordem do coeficiente de variação é de 0.05 para os aços norte-americanos, sugerindo também que se assumam tais parâmetros como determinísticos.

#### 4.4.7 Energia de fratura no concreto

Segundo CEB 90 (1990), a energia de fratura  $Gf$  para o concreto, em MN/m, pode ser avaliada segundo a formulação abaixo:

$$Gf_m = \begin{cases} 25 \times 10^{-6} \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.7} & \text{para } d_{\max} = 8 \text{ mm} \\ 30 \times 10^{-6} \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.7} & \text{para } d_{\max} = 16 \text{ mm} \\ 58 \times 10^{-6} \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.7} & \text{para } d_{\max} = 32 \text{ mm} \end{cases} \quad (4.37)$$

Pode-se, da mesma forma que se fez para o módulo de elasticidade e para a resistência à tração, colocar o coeficiente de variação da energia de fratura em função do coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto e de uma constante, de forma que se tem:

$$V_{Gf} \approx \sqrt{V_{\alpha_{Gf}}^2 + \left( \frac{10 V_{fc}}{7} \right)^2} \quad (4.38)$$

onde  $V_{\alpha_{Gf}}$  é o coeficiente de variação da constante presente na relação entre energia de fratura e resistência à compressão.

#### 4.4.8 Erro de modelagem

O erro de modelagem é aqui modelado através de uma variável aleatória ( $\xi$ ) que represente a relação entre resultados obtidos com o modelo numérico e os resultados experimentais. Esta variável é resultado das simplificações que foram adotadas bem como do desconhecimento do comportamento real de uma estrutura, as quais originam resultados numéricos diferentes, ainda que próximos, dos observados experimentalmente. Obviamente, para cada variável presente (deslocamento em um ponto, tensão em uma certa região, reação de apoio, etc.), haverá um valor de erro associado. Através das diversas análises determinísticas anteriormente feitas e a experiência adquirida com o modelo numérico aqui empregado, levando-se em conta apenas as variáveis e posições presentes nos resultados experimentais utilizados para comparação (curvas carga deslocamento no vão central de vigas, curvas tensão deformação para fibras comprimidas e tracionadas), para análises práticas, pode-se adotar um valor médio para  $\xi_m = 1.0$  e um coeficiente de variação de  $V_\xi = 0.05$ , o qual irá multiplicar os valores oriundos da análise numérica antes de ser computado o valor final da função de estado limite correspondente.

#### 4.4.9 Geometria da peça

Neste trabalho assume-se que as três dimensões da peça possuam características aleatórias. Em muitos trabalhos encontrados na literatura, os valores médios são definidos através dos valores nominais, ou mesmo dos valores nominais somado a uma constante. Em geral, no que aplicar, serão usados os dados estatísticos publicados por Scanlon (1995) o qual fornece valores específicos para cada tipo estrutural (viga, laje, pilar) e dimensão característica (largura, altura, comprimento, recobrimento, espaçamento de barras e estribos etc.), assumindo-se um tipo de distribuição Normal.

#### 4.4.10 Cargas aplicadas

Não há muitos dados a respeito das características de distribuição para as cargas, até porque estas são de difícil avaliação. Para a NBR 6118 (1980), quando se dispuser de dados

estatísticos relativos à dispersão dos valores das ações consideradas, deve-se assumir que o valor característico represente um quantil de 5 % da distribuição em questão (não necessariamente do tipo Normal) e do lado que conduzir à solicitação mais desfavorável. Para cargas usuais esta afirmação pode ser posta como:

$$F_m = \frac{F_k}{1 \pm k V_F} \quad (4.39)$$

onde  $F$  representa a ação,  $F_m$  seu valor médio,  $k$  o fator para a distribuição adotado para a ação que fornece um quantil de 5% (para a maioria das cargas, onde um aumento em seu valor significa um aumento na solicitação desfavorável, o sinal “+” deverá ser empregado) e  $V_k$  representa o coeficiente de variação para esta carga. Esta mesma norma recomenda que na falta de dados estatísticos reais, deve-se admitir o valor médio como sendo igual ao valor nominal fixado pelas outras normas existentes para cargas.

Ellingwood (1980), através de pesquisa sistemática em estruturas reais, afirma que a relação entre o valor médio e o valor nominal ( $G_m/G_n$ ) para o peso próprio seja aproximadamente de 1.05, sendo o valor nominal aquele que vem dado nas respectivas normas para cargas com um tempo de recorrência de 50 anos. O coeficiente de variação para o peso próprio é da ordem de  $V_G=0.10$ , assumindo-se também tipo de distribuição Normal.

Para o carregamento variável  $Q$ , Ostlund (1991) adota um quantil de 98% (2% no sentido desfavorável) para a definição do valor característico com um coeficiente de variação da ordem de  $V_Q=0.4$ , assim:

$$Q_m = \frac{Q_k}{1 + k \cdot 0.4} \quad (4.40)$$

com tipo de distribuição Normal para a carga variável. Já Ellingwood (1980) adota uma distribuição do Tipo III (por exemplo Weibull), sendo também comum o uso da distribuição Gama. Há diversos modelos para definição das características das ações, principalmente quando estas são de diferentes origens (vento, neve, sismo, longa duração, etc.), os quais não serão vistos por excederem as propostas deste trabalho.

De uma forma aproximada caso se deseje trabalhar com um carregamento equivalente ao peso próprio e à carga variável  $P=G+Q$ , o coeficiente de variação para este carregamento poderá ser calculado como:

$$V_P = \frac{\sqrt{G_m^2 V_G^2 + Q_m^2 V_Q^2}}{P_m} \quad (4.41)$$

sendo  $P_m$  o valor médio do carregamento equivalente.

### 4.4.11 Exemplo numérico

Neste exemplo analisa-se o comportamento de uma viga de concreto armado sujeita a um carregamento uniforme sobre seu vão considerando-se a aleatoriedade da sua resistência à compressão  $f_c$ , da sua resistência à tração, do seu módulo de elasticidade  $E_c$ , da sua energia de fratura  $G_f$ , do seu coeficiente de definição do fim do comportamento elástico  $\alpha$ , da intensidade de carga  $I$  e da variabilidade espacial de suas dimensões ao longo das três direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ .

Este objetiva demonstrar a capacidade de geração de campos não Gaussianos mutuamente correlacionados e com comprimentos de correlação diferentes juntamente com variáveis aleatórias simples para a simulação direta Monte Carlo. As dimensões da viga estudada são dadas na figura abaixo. Discretizou-se toda a viga com 20 elementos de 20 nós (2 na altura e 10 no comprimento). O campo foi discretizado no centróide de cada elemento. Assumiu-se que o campo para carga distribuída aplicada seja totalmente correlacionado, mas que sua intensidade seja uma variável aleatória.

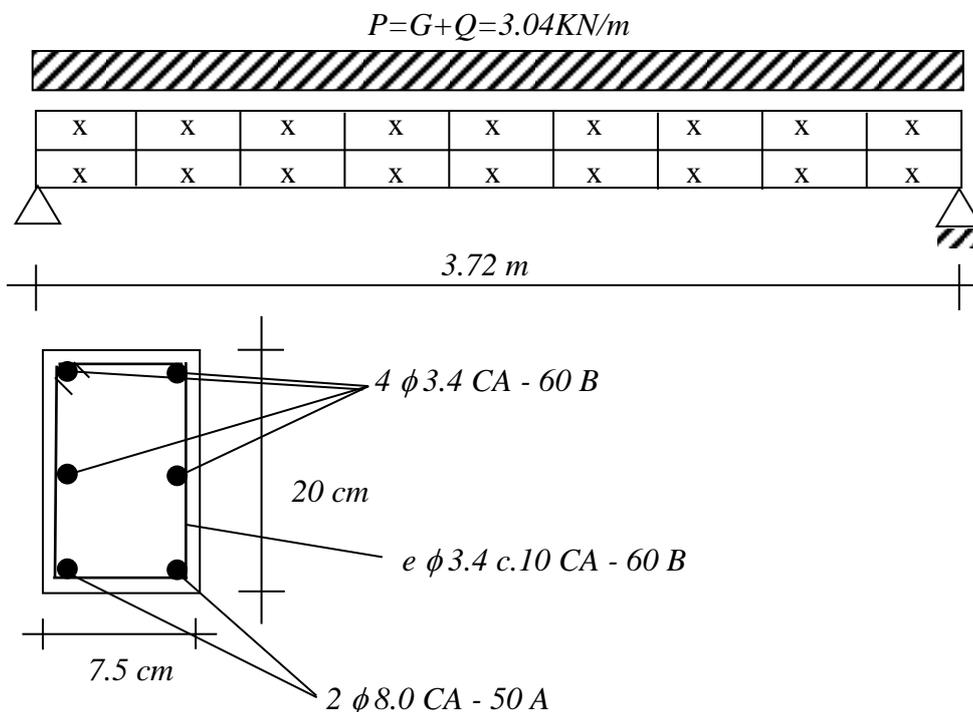


Figura 4.17 - Dados geométricos para a viga de concreto armado estudada.

Para o cálculo dos coeficientes de variação/ desvios padrões das variáveis aleatórias dependentes do valor da resistência do concreto, admite-se que  $f_{ck}=17.8 \text{ MPa}$ ,  $V_{fc}=0.1$ ,

$V_{\alpha f_i}=0.2$  e que  $V_{\alpha E_c}=0.1$ . Para as variáveis com campos, assumiu-se também uma função de autocorrelação do tipo exponencial. Um esquema desta viga é apresentado na Figura 4.17.

Na Tabela 4.4 é apresentado as características estatísticas tipos de distribuição para as variáveis consideradas no problema e na Tabela 4.5 é apresentada a matriz de coeficientes correlação entre os campos e variáveis aleatórias. Estes dados seguem os recomendados por Mirza (1989)(1996).

Tabela 4.4 - Parâmetros estatísticos e tipos de distribuição para o exemplo da viga de concreto armado.

Variável aleatória	Unidade	Tipo de variável aleatória	Comprimento de correlação (m)	Tipo de distribuição	Valor médio $\mu$	Coefficiente de variação $V$	Desvio padrão $\sigma$
$f_c$	MPa	campo	0.6	lognormal	21.20	0.100	2.12
$f_t$	MPa	campo	0.6	lognormal	2.722	0.211	0.574
$E_c$	MPa	campo	0.6	lognormal	$3.045 \times 10^4$	0.105	$3.197 \times 10^3$
$G_f$	MN/m	campo	0.6	lognormal	$5.821 \times 10^{-5}$	0.341	$1.98 \times 10^{-5}$
$\alpha$	-	campo	0.6	lognormal	0.3	0.050	0.015
$P$	MN/m	variável	-	normal	$3.04 \times 10^{-3}$	0.311	$9.46 \times 10^{-4}$
$l$	-	variável	-	normal	1.0	0.050	0.05
$b$	-	variável	-	normal	1.0	0.050	0.05
$h$	-	variável	-	normal	1.0	0.100	0.1

Tabela 4.5 - Coeficientes de correlação linear adotados entre variáveis dependentes para o exemplo da viga de concreto armado.

Variável aleatória	$f_c$	$f_t$	$E_c$	$G_f$	$\alpha$	$P$	$l$	$b$	$h$
$f_c$	1.0	0.7	0.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$f_t$	0.7	1.0	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$E_c$	0.9	0.6	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$G_f$	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\alpha$	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$P$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
$l$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
$b$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
$h$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

Adotou-se o método da representação espectral para a geração das amostras para a simulação. Com este método, verifica-se que apenas 26% dos modos da matriz de coeficientes de correlação são necessários para assegurar que mais de 95% do espectro de potência original. Como no total são 104 variáveis aleatórias (5 campos discretizados nos 20 centróides mais 4 variáveis aleatórias simples), apenas os 26% modos iniciais serão empregados juntamente com 3 séries de cossenos. A carga total aplicada à viga é de  $P=3.04$  KN/m com 26% correspondentes ao peso próprio(G) e os restantes correspondentes à carga variável(Q). As-

sumiu-se um coeficiente de variação para a carga permanente de  $V_G=0.1$  e para a carga variável de  $V_Q=0.4$ . Chega-se então a um coeficiente de variação da carga total P de  $V_P=0.311$ .

Na Figura 4.18 são apresentados os coeficientes de correlação original para os campos a serem gerados. Na Figura 4.19 são apresentados os mesmos coeficientes de correlação recompostos utilizando-se as primeiras 100 amostras geradas do campo. Como pode ser observado, ainda que com poucas amostras, os coeficientes de correlação obtidos representam relativamente bem os valores originais prescritos.

Na Figura 4.20 é apresentada uma amostra tomada aleatoriamente do conjunto gerado, representando os campos da resistência à compressão, resistência à tração, módulo de elasticidade, energia de fratura e fator alfa para o concreto ao longo do vão da viga.

O histórico das simulações para o valor médio e variâncias do deslocamento no vão central da viga é mostrado na Figura 4.21. Também nesta mesma figura é indicado o valor para a mesma flecha caso se analise a mesma viga utilizando os valores médios das propriedades e cargas.

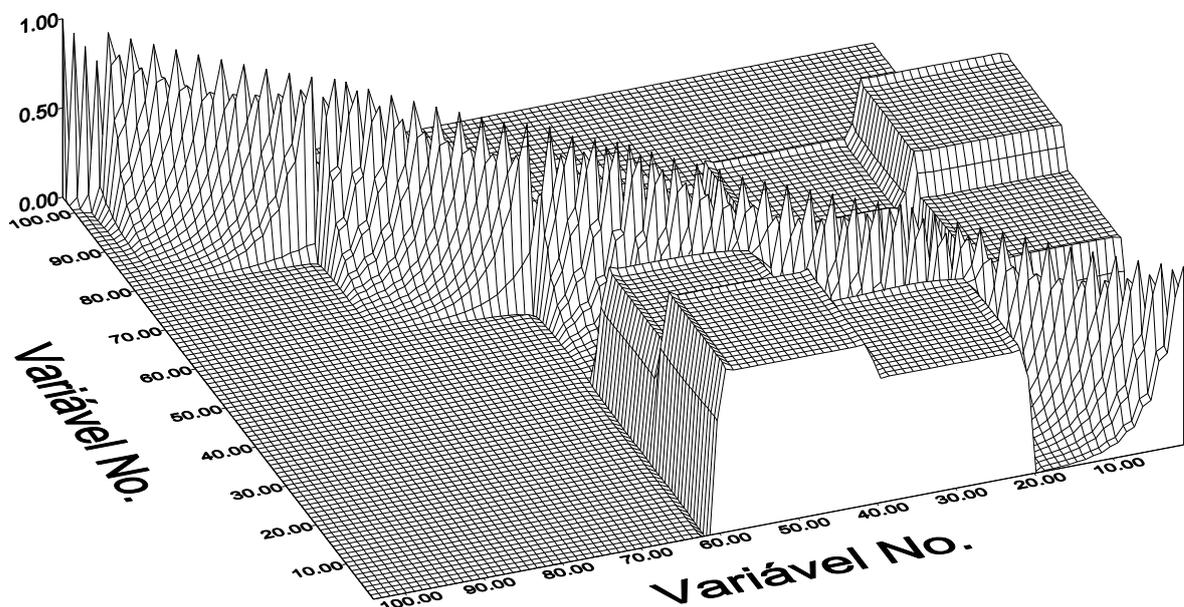


Figura 4.18 - Coeficientes de correlação original dos campos para exemplo da viga de concreto armado.

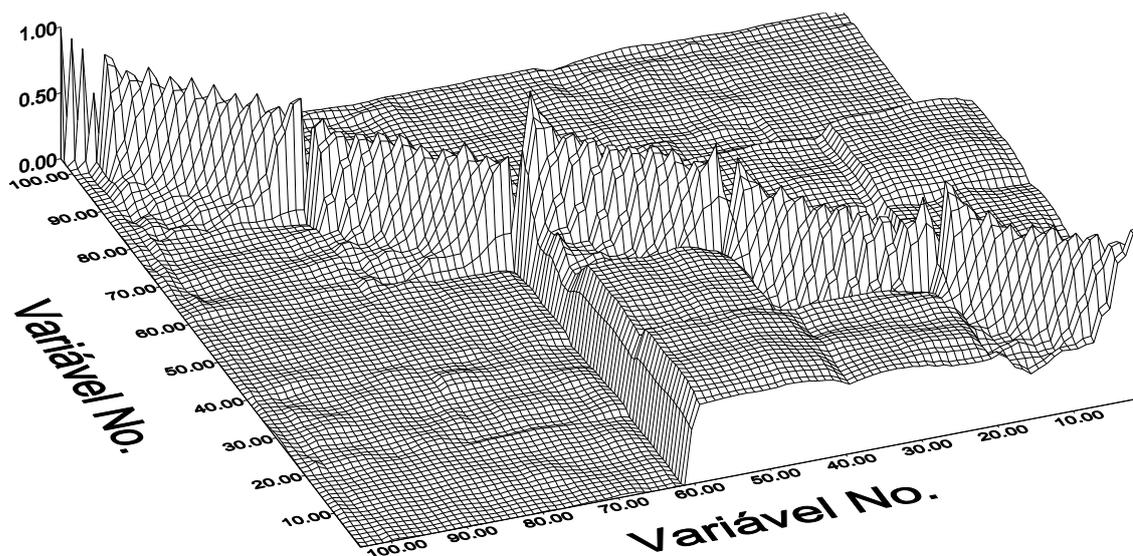


Figura 4.19 - Coeficientes de correlação dos campos recomposto com 100 amostras com o método da representação espectral para o exemplo da viga de concreto armado.

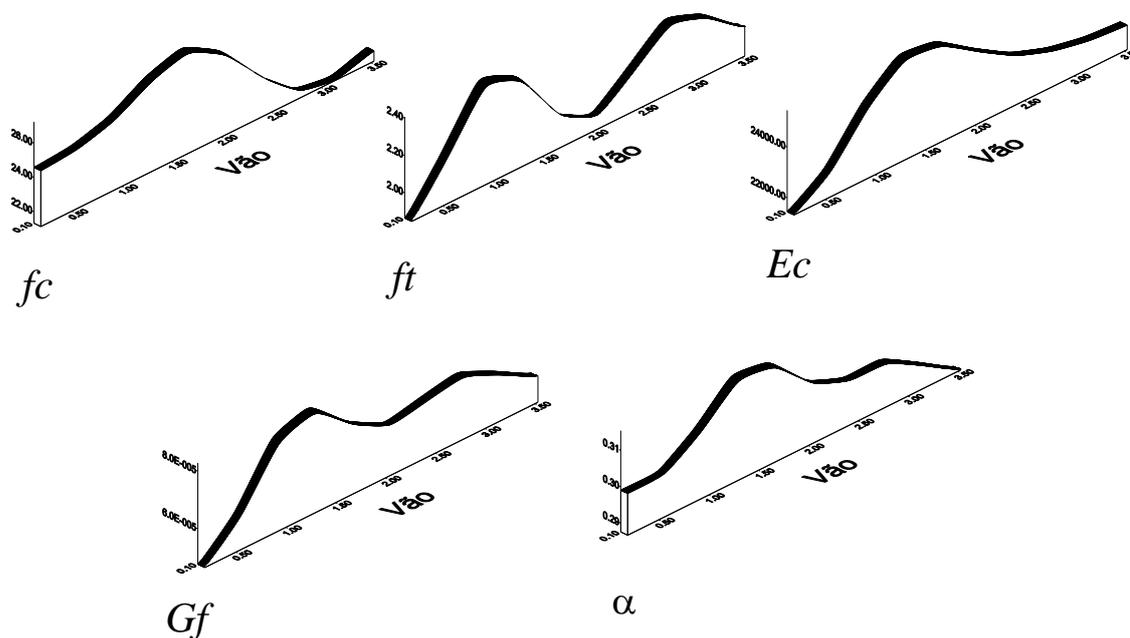


Figura 4.20 - Amostra aleatória dos campos correlacionados gerados ao longo do vão da viga de concreto armado.

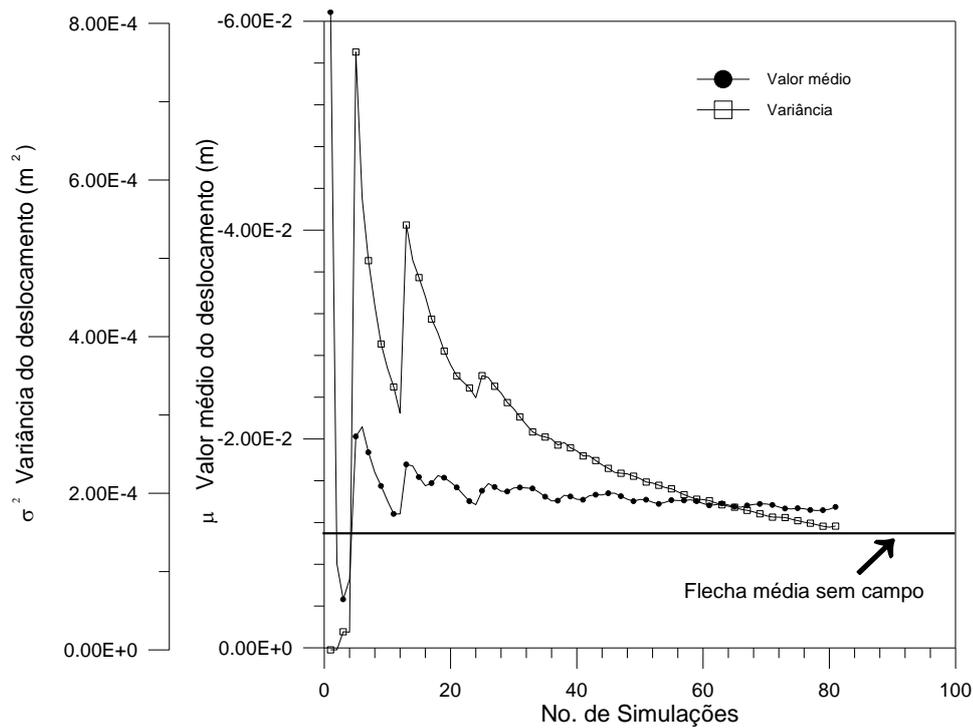


Figura 4.21 - Convergência para o valor médio e variância da flecha no vão central da viga de concreto armado.

#### 4.4.11.1 Comentários

Alguns comentários podem ser feitos a respeito destes resultados:

- a inclusão da aleatoriedade das propriedades, geometria e intensidade de cargas levaram a um aumento no valor médio final da flecha no meio do vão;
- a utilização do Método da Representação Espectral induziu a uma rápida convergência para o valor médio e para a variância da flecha ainda que com poucas amostras;
- Devido as características dos campos, apenas 26% dos modos da matriz de coeficientes de correlação foram necessários para a geração das amostras, reduzindo também o esforço para a geração destas.

## Capítulo 5

# 5. Confiabilidade Estrutural: Métodos FORM e Monte Carlo

*“The ultimate goal of reliability calculation is of course, by quantifying the probability of failure, the optimization of the construction of structures.”*

*Brener, C. E.*

1991

Neste Capítulo é feita uma breve revisão sobre alguns dos métodos de avaliação da confiabilidade empregados nesta Tese, quais sejam FORM, Monte Carlo e Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa.

### 5.1 Introdução

Todo sistema estrutural é projetado e idealizado para trabalhar ao longo de sua vida útil de acordo com as condições de serviço que lhe foram atribuídas e desejadas pelo projetista. Entretanto, devido ao fato das variáveis básicas envolvidas no seu projeto (cargas, materiais, ambiente, simplificações do modelo, etc.) serem de caráter aleatório, o sistema muitas vezes fornece comportamentos estruturais diferentes daqueles idealizados ou desejados. Desta forma, para cada situação de operação do sistema, podemos supor que haja no espaço das variáveis duas regiões, uma que caracteriza a falha (aqui entendida como a não observância de determinado comportamento desejado) e outra de segurança. Na confiabilidade estrutural, objetiva-se quantificar quais as chances de ocorrência de situação de operação de segurança (entendida como confiabilidade do sistema), ou de forma complementar, quais as chances de ocorrência da situação de operação de falha (entendida como probabilidade de falha).

O termo confiabilidade estrutural é geralmente empregado para designar a medida de segurança de determinado sistema estrutural frente a um determinado desempenho esperado. Alternativamente, a confiabilidade pode ser entendida como o complemento da probabilidade

de falha, ou seja, as chances ou a propensão de determinado sistema em violar um estado limite, quer seja por falha ou por não atender a seu desempenho esperado. Obviamente, a confiabilidade estrutural está relacionada com as variáveis que descrevem o sistema estrutural, e mais precisamente com a variabilidade das mesmas. Particularmente, esta variabilidade está presente nos sistemas estruturais sob a forma de incertezas. De acordo com Melchers (1987), estas incertezas podem ser divididas nos seguintes tipos:

- Incertezas físicas: geralmente presentes nas avaliações de dimensões, valores de ações, valores de propriedades de materiais, etc.;
- Incertezas estatísticas: provenientes da extrapolação de parâmetros estatísticos extraídos de populações finitas do modelo empregado;
- Incertezas devido a fatores humanos: provenientes de ação do homem, quer seja intencional ou não, no comportamento do sistema estrutural;
- Incertezas de cunho fenomenológico: provenientes da existência de eventos não previsíveis e levados em consideração;
- Incertezas de modelamento: provenientes das simplificações e das hipóteses adotadas para o modelamento do comportamento estrutural, o emprego de novos materiais, de novas técnicas construtivas, etc.

É certo que nem todas as incertezas levantadas anteriormente podem ser levadas em conta prontamente numa análise, de forma que fala-se em confiabilidade “formal”, ou seja, uma confiabilidade condicionada à quantidade de incertezas adotada. Portanto, esta confiabilidade “formal” não é “exata”, fazendo apenas sentido comparações entre confiabilidades de sistemas com mesmas incertezas. Desta forma, a avaliação da confiabilidade estrutural surge como ferramenta de comparação entre procedimentos existentes de projeto estrutural, servindo também para a avaliação da validade de regras de projeto estabelecidas em códigos.

A resposta de uma estrutura pode ser definida por um vetor de variáveis aleatórias básicas  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , que pode incluir parâmetros que definem ações, propriedades do material, tamanho das seções, etc. Para poder calcular a probabilidade de falha deve-se formular uma função de estado limite  $g(\mathbf{X})$  que depende das variáveis aleatórias, e tal que:

$$g(\mathbf{X}) \geq 0 \tag{5.1}$$

seja satisfeita toda vez que haja segurança.

Uma função de estado limite como  $g(\mathbf{X})$ , separa duas situações: uma de segurança e outra de falha. Se  $g(\mathbf{X}) \geq 0$ , considera-se que os requerimentos de projeto têm sido devida-

mente satisfeitos e corresponde a um ponto da região de segurança. Se  $g(\mathbf{X}) < 0$ , os requerimentos de projeto não foram satisfeitos e corresponde a um ponto da região de falha.

A probabilidade de falha  $P_f$  é dada por:

$$P_f = \int_{\{\mathbf{X}|g(\mathbf{X})\leq 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5.2)$$

onde,  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  é a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias.

A avaliação da integral da equação (5.2) é freqüentemente impossível de se obter pois  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  não é conhecida ou devido ao enorme trabalho que demanda em resolver a mesma para funções de estado limite gerais com a dimensão do espaço muito grande (superiores a 10 variáveis aleatórias para computadores pessoais, veja Haldar (1995) e Oliveira (1997)).

## 5.2 Método de confiabilidade de 1ª ordem (FORM)

### 5.2.1 Problema de otimização com restrição

Para a análise de confiabilidade de 1ª ordem, o cálculo do índice de confiabilidade é feito no espaço Gaussiano padrão não correlacionado. Assim uma transformação probabilística  $S$  é feita nas variáveis básicas  $\mathbf{X}$  de forma a transformá-las ao espaço Gaussiano padrão não correlacionado  $\mathbf{Z}$  (por conveniência  $\mathbf{Z}=S(\mathbf{X})$ ; definido  $\mathbf{X}=T(\mathbf{Z})$ , então  $S=T^{-1}$ ).

Assim o problema fica resumido ao problema de otimização com uma restrição:

$$\text{Minimizar } \beta = \|\mathbf{Z}\| \quad \text{sujeito a } G(\mathbf{Z})=0 \quad (5.3)$$

onde  $\beta$  é a distância mínima da origem deste espaço à função de estado limite, conhecido também como Índice de Confiabilidade,  $\mathbf{Z}$  é a variável transformada,  $G(\mathbf{Z})$  é a função de estado limite transformada ao espaço Gaussiano padrão não correlacionado e  $\|\cdot\|$  indica a distância (norma) Euclidiana. A Probabilidade de Falha se relaciona com o Índice de Confiabilidade aproximadamente através da relação:

$$P_f \approx \phi(-\beta) \quad (5.4)$$

onde  $\phi$  é a função de distribuição acumulada Gaussiana.

No método modificado de Hasofer e Lind - Rackwitz e Fiessler (MHL-RF), para se resolver o problema de otimização com uma restrição colocado na equação (5.3) e obter o valor do índice de confiabilidade  $\beta$  (e as correspondentes coordenadas do ponto de projeto  $\mathbf{Z}^*$  - *design point*), uma seqüência de aproximações para este ponto são geradas na seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{Z}_k + s \mathbf{d}_k \quad (5.5)$$

onde  $\mathbf{Z}_k$  é o vetor que contém as coordenadas do ponto de projeto numa iteração  $k$ ,  $\mathbf{d}_k$  é o vetor de direção de procura e  $s$  é um parâmetro que define o comprimento do passo. Para o cálculo do vetor de direção de procura, a seguinte equação é empregada, na qual implicitamente está imposta a restrição  $\mathbf{G}(\mathbf{Z})=0$ :

$$\mathbf{d}_k = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{Z}_k)\|^2} [\mathbf{Z}_k^T \nabla G(\mathbf{Z}_k) - \nabla G(\mathbf{Z}_k)] \nabla G(\mathbf{Z}_k) - \mathbf{Z}_k \quad (5.6)$$

Uma função de mérito não negativa  $m(\mathbf{Z})$  é construída a fim de monitorar a convergência da seqüência de soluções  $\mathbf{Z}_k$ , a qual deve decrescer em cada iteração, de forma que a mesma possua um mínimo global no ponto de projeto  $\mathbf{Z}^*$ . Esta função de mérito está descrita na seguinte equação:

$$m(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{Z} - \frac{\nabla G(\mathbf{Z}_k)^T \mathbf{Z}}{\|\nabla G(\mathbf{Z}_k)\|^2} \nabla G(\mathbf{Z}_k) \right\|^2 + \frac{1}{2} c G(\mathbf{Z})^2 \quad (5.7)$$

onde  $c$  é uma constante positiva.

Assim é feita uma procura linear no vetor de direção de procura  $\mathbf{d}_k$ , até que a função de mérito  $m(\mathbf{Z})$  satisfaça a condição  $m(\mathbf{Z}_{k+1}) < m(\mathbf{Z}_k)$ , encontrando-se desta forma o parâmetro  $s$  que define o comprimento do passo. Ainda assim, a convergência do método para um mínimo global não é garantida (Val *et al.*(1995)).

## 5.2.2 Problema de otimização em Coordenadas Polares

A equação (5.3) pode ser posta em termos dos cossenos diretores das coordenadas transformadas Gaussianas padrão não correlacionadas, de forma que se tem:

$$\text{Minimizar } \beta = \|\mathbf{Z}\| = \|\cos(\alpha_i) \cdot r\| = \|\Phi \cdot r\| \text{ sujeito a } G(r, \Phi) = 0 \quad (5.8)$$

Se, de alguma forma conseguirmos resolver para  $r$ ,  $G(r, \Phi) = 0$ , com um dado  $\Phi$ , de forma que  $r - F(\Phi) = G(r, \Phi) = 0$ , sendo  $F$  uma função explícita ou mesmo implícita das variáveis aleatórias, então a equação (5.8) se transforma em um problema de otimização sem restrições:

$$\text{Minimizar } r = F(\Phi) \quad (5.9)$$

o qual pode ser facilmente resolvido pelo método das direções conjugadas, que é um dos mais eficientes algoritmos de otimização que dispensam as derivadas da função a ser otimizada. Neste trabalho, o método da bisseção é utilizado para avaliar a distância  $r$  até a função de es-

tado limite sob determinada direção  $\Phi$ , o qual também não requer a avaliação das derivadas da função de estado limite. Segundo Val *et al.* (1995), este método é mais robusto que o método MHL-RF, tendo sido aplicado com êxito ao cálculo da confiabilidade em pórticos de concreto armado em situações onde o método MRL-RF não obtinha convergência. Segundo Val. *et al.* (1995) seu único inconveniente é o maior tempo de processamento necessário quando comparado com o método MRL-RF.

### 5.2.3 Medidas de sensibilidade

Uma importante característica do método de primeira ordem é a facilidade de se calcular medidas de sensibilidade com respeito a algum parâmetro desejado. Uma importante medida de sensibilidade é a sensibilidade do índice de confiabilidade  $\beta$  com respeito às variáveis aleatórias no espaço Gaussiano não correlacionado, avaliada no ponto de projeto  $\partial\beta/\partial\mathbf{Z}^*$ . Estes valores fornecem uma expressiva medida da importância que cada variável tem na composição do valor do índice de confiabilidade. Assim, a sensibilidade do índice  $\beta$  com respeito às variáveis aleatórias no espaço Gaussiano não correlacionado é definida como:

$$\alpha = \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{Z}^*} = - \frac{\partial G/\partial\mathbf{Z}^*}{\|\partial G/\partial\mathbf{Z}^*\|} \quad (5.10)$$

Este mesmo índice pode ser posto em termo das variáveis aleatórias básicas no espaço real, de forma que se tem:

$$\alpha' = \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{X}^*} = \alpha \mathbf{J}_{\mathbf{Z},\mathbf{X}} = \alpha \mathbf{J}_{\mathbf{X},\mathbf{Z}}^{-1} \quad (5.11)$$

onde  $\mathbf{J}_{\mathbf{Z},\mathbf{X}}$  é o Jacobiano da transformação probabilística  $\mathbf{Z}=S(\mathbf{X})$ , como será visto posteriormente.

### 5.2.4 Cálculo da função de estado limite e derivadas no espaço Gaussiano padrão.

Considerando-se que as  $n$  variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , possam ser transformadas ao espaço Gaussiano padrão não correlacionado  $\mathbf{Z}$  e vice-versa univocamente através da transformação probabilística  $T$ , então as seguintes expressões são válidas :

$$\mathbf{X} = T(\mathbf{Z}) \quad \text{e} \quad \mathbf{Z} = T^{-1}(\mathbf{X}) \quad (5.12)$$

Definindo-se a função de estado limite como  $g(\mathbf{X})$ , e como  $G(\mathbf{Z})$  a mesma função de estado limite transformada ao espaço Gaussiano padrão não correlacionado, então as seguintes expressões também se aplicam:

$$g(\mathbf{X}) = g(T(\mathbf{Z})) = G(\mathbf{Z}) \quad (5.13)$$

A transformação probabilística  $T$  dependerá do tipo de distribuição de cada variável aleatória básica. Para variáveis que possuam uma correlação definida pela matriz de coeficientes de correlação  $\rho_{ij}$  no espaço real é possível, através da transformação de Nataf, obter a matriz de coeficientes de correlação no espaço Gaussiano padrão não correlacionado  $\rho'_{ij}$ . Assim, através de algum dos métodos de decomposição da matriz de coeficientes de correlação do espaço Gaussiano padrão não correlacionado vistos anteriormente, obtém-se um operador  $C$ , o qual irá impor uma correlação às variáveis Gaussianas padrão, de forma que a transformação fica então definida como:

$$\mathbf{X} = F_{x_i}^{-1}[\Phi(C(\mathbf{Z}))] \text{ ou } \mathbf{Z} = C^{-1}\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(\mathbf{X})]\} \quad (5.14)$$

onde  $\Phi$  é a função de distribuição acumulada Gaussiana padrão e  $F_{x_i}$  a função de distribuição acumulada para a variável  $x_i$ . Por exemplo, caso se empregue a decomposição de Cholesky, a equação (5.14) se transforma em:

$$\mathbf{X} = F_{x_i}^{-1}[\Phi(\mathbf{L}_Z \mathbf{Z})] \text{ ou } \mathbf{Z} = \mathbf{L}_Z^{-1}\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(\mathbf{X})]\} \quad (5.15)$$

onde  $\mathbf{L}_Z$  é a matriz triangular inferior originada da decomposição de Cholesky da matriz de coeficientes de correlação no espaço Gaussiano padrão não correlacionado.

Para o cálculo das derivadas da função de estado limite no espaço Gaussiano padrão não correlacionado com respeito às variáveis transformadas  $\partial G(\mathbf{Z})/\partial \mathbf{Z}$ , há duas possibilidades, as quais dependem basicamente da existência de informações a respeito das derivadas da função de estado limite com respeito às variáveis básicas. De uma maneira geral, caso não se tenha informações a respeito das derivadas da função de estado limite, pode-se proceder de uma maneira diferencial:

$$\frac{\partial G(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial g(T(\mathbf{Z}))}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{Z}} = \lim_{\partial \mathbf{Z} \rightarrow 0} \frac{g(T(\mathbf{Z})) - g(T(\mathbf{Z} + \partial \mathbf{Z}))}{\partial \mathbf{Z}} \quad (5.16)$$

Através do método das diferenças finitas à frente, o cálculo das derivadas é feito avaliando-se incrementos infinitesimais em cada uma das componentes de  $\mathbf{Z}$  por vez e os respectivos valores da função de estado limite aplicando-se o resultado à equação (5.16).

Caso se tenha a informação a respeito das derivadas da função de estado limite com respeito às variáveis básicas, pode-se empregar a regra da cadeia e então obter:

$$\frac{\partial G(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Z}} \quad (5.17)$$

Para a transformação probabilística  $T$ , anteriormente referida, a derivada  $\partial \mathbf{X}/\partial \mathbf{Z}$  pode ser avaliada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x,z}} = \mathbf{L}_{\mathbf{z}} \overrightarrow{\frac{1}{\left\{ \Phi^{-1} [F_{x_i}(\mathbf{X})] \cdot f_{x_i}(\mathbf{X}) \right\}}} \quad (5.18)$$

onde  $\dot{\Phi}^{-1}$  é a derivada da inversa da função de distribuição acumulada Gaussiana padrão,  $f_{x_i}$  é a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $x_i$ , e o símbolo  $\overrightarrow{\quad}$  significa que a operação é vetorizada, ou seja, cada elemento de uma linha da matriz  $\mathbf{L}_{\mathbf{z}}$  será dividido pelo correspondente elemento, originando a matriz Jacobiana da transformação,  $\mathbf{J}_{\mathbf{x,z}}$ . Uma transformação similar pode ser facilmente encontrada para os outros tipos de decomposição da matriz de coeficientes de correlação, as quais também estão implementadas.

Neste trabalho, ambas as formulações para o cálculo das derivadas da função de estado limite no espaço Gaussiano padrão não correlacionado ( $\partial G(\mathbf{Z})/\partial \mathbf{Z}$ ) estão implementadas. Caso não se tenha informações a respeito das derivadas da função de estado limite ( $\partial g(\mathbf{X})/\partial \mathbf{X}$ ) emprega-se o método das diferenças finitas à frente para o cálculo das derivadas, caso contrário a equação (5.17) é empregada.

## 5.2.5 Eliminação de iterações excessivas

Devido a imprecisões na avaliação das derivadas da função de estado limite, os algoritmos de avaliação do índice de confiabilidade baseados em gradientes ficam sujeitos a erros que podem tornar a suas taxas de convergência bastante lentas. Baseado em três valores de iterações subsequentes da análise de confiabilidade via FORM, como mostrado na Figura 5.1, um algoritmo para detectar e remover iterações em forma de “zig-zag” tais como na Figura 5.1(a) foi implementado de acordo com as indicações de Yang *et al.* (1999).

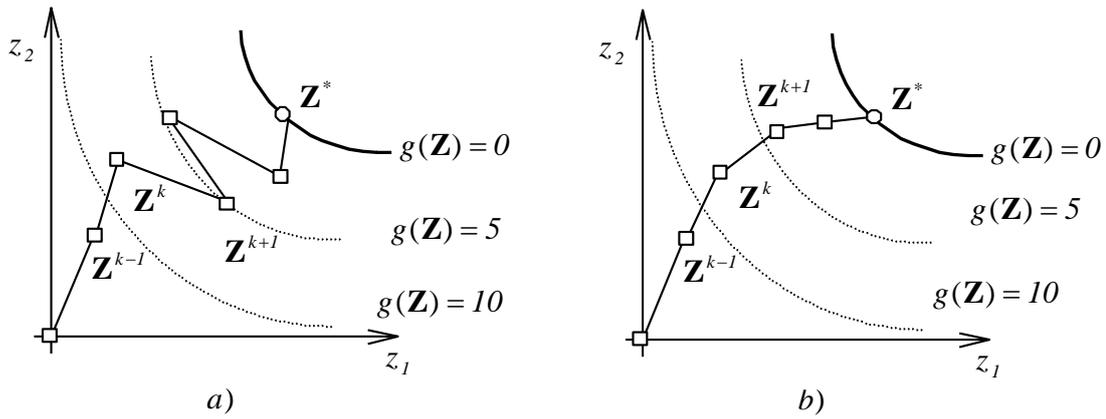


Figura 5.1 - Esboço no espaço Gaussiano padrão não correlacionado a) das iterações excessivas para a procura do ponto de projeto e b) do método proposto por Yang *et al.*

As iterações excessivas são detectadas de acordo com o seguinte critério:

$$\frac{\mathbf{Z}^{k-1T} \mathbf{Z}^{k+1}}{\|\mathbf{Z}^{k-1}\| \|\mathbf{Z}^{k+1}\|} > \frac{\mathbf{Z}^k T \mathbf{Z}^{k+1}}{\|\mathbf{Z}^k\| \|\mathbf{Z}^{k+1}\|} \quad (5.19)$$

onde  $\mathbf{Z}^{k-1}$ ,  $\mathbf{Z}^k$  e  $\mathbf{Z}^{k+1}$  são respectivamente os valores para os pontos de projeto em três iterações sucessivas  $k-1$ ,  $k$  e  $k+1$ , como descrito na mesma figura. Caso se detecte iterações excessivas, o valor de  $\mathbf{Z}^{k+1}$  é atualizado para:

$$\mathbf{Z}_{\text{nov}}^{k+1} = \frac{\beta^k g(\mathbf{Z}^{k-1}) - \beta^{k-1} g(\mathbf{Z}^k)}{g(\mathbf{Z}^{k-1}) - g(\mathbf{Z}^k)} \frac{\mathbf{Z}^{k-1} + \mathbf{Z}^k}{\|\mathbf{Z}^{k-1} + \mathbf{Z}^k\|} \quad (5.20)$$

### 5.3 Método de simulação direta Monte Carlo

Dado um conjunto de  $n$  variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , cada uma delas completamente caracterizada pela sua respectiva função de densidade de probabilidade marginal (FDP)  $f_{x_i}(x_i)$  e respectiva função de probabilidade acumulada marginal (FPA)  $F_{x_i}(x_i)$  (com parâmetros - média  $\mu_{x_i}$ , desvio padrão  $\sigma_{x_i}$ , valor máximo  $x_{\text{máx}}$ , valor mínimo  $x_{\text{mín}}$ ), então a probabilidade de falha, associada a uma função de estado limite  $g(\mathbf{X})$  que inclui estas variáveis aleatórias e que define uma região de falha e outra de segurança, vem dada por:

$$P_f = \int_{\{\mathbf{X}|g(\mathbf{X}) \leq 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5.21)$$

onde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  é a função de distribuição de probabilidades conjunta das variáveis, e  $I[g(\mathbf{X})]$  é a função indicadora, que vem dada por:

$$I[g(\mathbf{X})] = \begin{cases} 1 & \text{se } g(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ falha} \\ 0 & \text{se } g(\mathbf{X}) > 0 \text{ segurança} \end{cases} \quad (5.22)$$

Desta forma, a integral da função de densidade de probabilidade conjunta apenas no domínio de falha é trocada pela integral sobre todo o domínio ponderada pela função indicadora. Pela teoria da estatística, a integral da equação (5.21) representa o valor esperado (valor médio) da função indicadora. Então, um estimador para a probabilidade de falha pode ser escrito na seguinte forma:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{ns} \sum_j^{ns} I[g(\mathbf{X}^j)] \quad (5.23)$$

onde  $ns$  é o número de simulações e  $\mathbf{X}^j$  é o  $j$ -ésimo vetor de amostras simulado contendo as  $n$  variáveis. Uma estimativa para o desvio padrão da probabilidade de falha pode ser feita assumindo que cada simulação se constitua em um processo de Bernoulli. Portanto, o número de falhas em  $ns$  simulações pode ser considerado seguindo uma distribuição Binomial. Assim, o desvio padrão pode ser avaliado aproximadamente por:

$$\hat{\sigma}_{P_f} \cong \sqrt{\frac{(1 - \hat{P}_f)\hat{P}_f}{ns}} \quad (5.24)$$

Para a avaliação da precisão estatística do estimador da probabilidade de falha, o respectivo coeficiente de variação é uma boa medida. Ele vem definido como:

$$\hat{\delta}_{\hat{P}_f} = \frac{\hat{\sigma}_{P_f}}{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f}{ns \cdot \hat{P}_f}} \quad (5.25)$$

Valores da ordem de 0.05 para o coeficiente de variação são um bom indicativo da precisão alcançada no estimador da probabilidade de falha.

### 5.3.1 Geração de amostras para simulação

Para a geração das amostras utilizadas na simulação direta Monte Carlo, emprega-se a técnica da transformação inversa. Basicamente, faz-se necessário saber as características estatísticas das variáveis, quer seja sua função de densidade de probabilidade marginal  $f_{x_i}(x_i)$  (FDP), a função de probabilidade acumulada marginal  $F_{x_i}(x_i)$  (FPA), a sua inversa  $F_{x_i}^{-1}(x_i)$  e, caso haja correlação entre as variáveis, a matriz de coeficientes de correlação entre as variáveis  $\rho_{\mathbf{x}}$ .

Começa-se por gerar um número de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo de  $[0,1]$  igual ao número de simulações pelo número de variáveis básicas a serem

geradas ( $ns*nv$ ) designadas por  $\mathbf{U}^j$ , onde  $\mathbf{U}^j$  representa o vetor da  $j$ -ésima simulação contendo os valores das  $i$  variáveis básicas.

Variáveis Gaussianas padrão (média zero e desvio padrão unitário) não correlacionadas são geradas a partir do vetor de números aleatórios uniformemente distribuídos utilizando-se a inversa da distribuição acumulada da função Gaussiana padrão como segue:

$$\mathbf{Z}^j = \Phi^{-1}(\mathbf{U}^j) \quad (5.26)$$

Através da transformação de Nataf (neste trabalho resolvida através de integração numérica da equação (4.2)) encontra-se a matriz  $\rho_z$  que será função da matriz  $\rho_x$  das variáveis básicas bem como de suas médias e desvios padrão. Esta matriz ( $\rho_z$ ) poderá ser decomposta por qualquer um dos métodos explicados para a geração de campos estocásticos (quais sejam, (a) decomposição Cholesky e (b) decomposição modal) o qual dependerá do grau de correlação existente entre as variáveis. A seguir, utilizando-se o resultado da decomposição Cholesky ou o resultado da decomposição modal, a correlação poderá ser aplicada às variáveis Gaussianas padrão não correlacionadas por um dos três métodos explicados anteriormente obtendo-se as variáveis Gaussianas padrão correlacionadas  $\mathbf{Z}'^j$ .

Então, as variáveis aleatórias geradas com função de distribuição de probabilidades requerida vêm dadas por:

$$\mathbf{X}^j = F_{x_i}^{-1}(\mathbf{Z}'^j) \quad (5.27)$$

onde  $F_{x_i}^{-1}$  e  $\mathbf{X}^j$  são a função inversa acumulada da variável aleatória  $i$  e  $\mathbf{X}^j$  é o vetor das variáveis aleatórias básicas para a  $j$ -ésima simulação.

### 5.3.1.1 Variáveis Antitéticas

A técnica das variáveis antitéticas é empregada para a redução da variância da estimativa da probabilidade de falha na Simulação Direta Monte Carlo. Uma correlação negativa é induzida entre diferentes ciclos de simulação de forma a diminuir a variância do estimador da probabilidade de falha. Se  $\mathbf{u}$  é um vetor de números aleatórios uniformemente distribuídos entre  $[0,1]$  (de dimensão  $n$ ) e é utilizado num primeiro estágio para gerar amostras das variáveis no espaço real  $\mathbf{X}$  e calcular uma estimativa da probabilidade de falha  $\hat{P}_f^{\mathbf{u}}$ , então o vetor de mesma dimensão  $1-\mathbf{u}$  pode ser usado para avaliar a estimativa da probabilidade de falha  $\hat{P}_f^{1-\mathbf{u}}$ . Portanto, após  $2n$  simulações, a estimativa da probabilidade de falha pode ser calculada como:

$$\hat{P}_f = \frac{\hat{P}_f^u + \hat{P}_f^{1-u}}{2} \quad (5.28)$$

cuja variância é:

$$\sigma_{\hat{P}_f}^2 = \frac{\sigma_{\hat{P}_f^u}^2 + \sigma_{\hat{P}_f^{1-u}}^2 + 2Cov(\hat{P}_f^u, \hat{P}_f^{1-u})}{4} \quad (5.29)$$

A covariância entre as duas estimativas da probabilidade de falha ( $Cov(\hat{P}_f^u, \hat{P}_f^{1-u}) < 0$ ) certamente será negativa uma vez que assim é a covariância entre os vetores aleatórios ( $Cov(\mathbf{u}, \mathbf{1} - \mathbf{u}) < 0$ ), reduzindo assim a variância na estimativa da probabilidade de falha.

## 5.4 Método de simulação Monte Carlo com amostragem por importância adaptativa

A probabilidade de falha de acordo com a função de estado limite é fornecida pela equação (5.21). O grande inconveniente da simulação direta Monte Carlo recai no fato de ter-se de realizar muitas simulações para se conseguir uma diminuição no coeficiente de variação do estimador da probabilidade de falha como atesta a equação (5.25). Então a equação (5.21) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_f = \int_{\mathbf{X}} I[g(\mathbf{X})] \cdot \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{W}}^k(\mathbf{X})} \cdot f_{\mathbf{W}}^k(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5.30)$$

onde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  é a função de distribuição de probabilidades conjunta original das variáveis aleatórias e  $f_{\mathbf{W}}^k(\mathbf{X})$  é a função de distribuição de probabilidade conjunta de amostragem, sendo  $k$  um índice para diferenciar diversas funções de amostragem utilizadas. Esta função de distribuição deve ser criteriosamente escolhida de forma a trazer as simulações para próximo da superfície de falha. Teoricamente, o ponto de projeto, ou seja, o ponto da superfície de falha que mais contribui para o valor final da probabilidade de falha é o local mais indicado para o posicionamento da função de distribuição de probabilidade de amostragem, assegurando que quase toda a totalidade das amostras recairão no domínio de falha. Entretanto, para problemas com mais de um ponto de projeto, tal fato não se verifica. Uma solução bastante utilizada é a avaliação prévia dos “prováveis” pontos de mínimo existentes e a posterior utilização de diversas funções de amostragem posicionadas em cada um destes pontos. Uma outra solução é a utilização do conceito de *IFM-point* (*Iterative Fast Monte-Carlo point*; Bucher (1988)). Utilizando-se apenas “uma” função de amostragem, criteriosamente posicionada no “centro de

massa ponderado” dos pontos de uma simulação pertencentes ao domínio de falha e com uma matriz de correlação representativa destes pontos, é possível obter-se reduções significativas na variância do estimador da probabilidade de falha. Uma outra solução bastante empregada é a de diminuir a ordem de integração da equação (5.30) em um grau, também conhecido como o método da Esperança Condicionada. A equação que explicita a função de estado limite é resolvida para uma de suas variáveis, geralmente a que possui maior variabilidade e que seja estatisticamente independente das demais, de forma a se obter uma equação para a função de estado limite da forma:

$$g(\mathbf{X})=0 \Rightarrow x_i = \bar{g}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (5.31)$$

sendo a equação para o cálculo da probabilidade de falha posta na seguinte forma:

$$P_f = P[x_i < \bar{g}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)] = \int_{\{\bar{\mathbf{X}} | \bar{g}(\bar{\mathbf{X}}) \leq 0\}} F_{x_i}(\bar{g}(\bar{\mathbf{X}})) \cdot f_{\bar{g}}(\bar{\mathbf{X}}) \cdot d\bar{\mathbf{X}} \quad (5.32)$$

onde  $\bar{\mathbf{X}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . A equação (5.32) pode ser facilmente resolvida uma vez que com amostras de  $\bar{\mathbf{X}}$  obtém-se dados para  $F_{x_i}(\bar{g}(\bar{\mathbf{X}}))$ , sendo a probabilidade de falha simplesmente calculada como uma média simples da seguinte forma:

$$P_f = \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} F_{x_i}(\bar{g}(\bar{\mathbf{X}}^j)) \quad (5.33)$$

Funções de estado limite explícitas são dificilmente encontradas na prática, principalmente com uma das variáveis não correlacionada com as demais. Sendo assim esta solução é bastante restrita a problemas específicos.

Neste trabalho, apenas a segunda solução (conceito de *IFM-Point*) é adotada. Sendo assim, a probabilidade de falha pode ser avaliada pela integral:

$$P_f = \int_{\mathbf{X}} I_{\mathbf{w}}^k[g(\mathbf{X})] f_{\mathbf{w}}^k(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5.34)$$

onde  $I_{\mathbf{w}}^k[g(\mathbf{X})] = I[g(\mathbf{X})] \cdot \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{w}}^k(\mathbf{X})}$

Um estimador para a probabilidade de falha pode ser posto na seguinte forma:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{\sum_{k=1}^{nadp} ns_k} \sum_{k=1}^{nadp} \sum_{j=1}^{ns_k} I_{\mathbf{w}}^k[g(\mathbf{X}^j)] \quad (5.35)$$

onde *nadp* é o número de vezes em que a função de amostragem é atualizada, *ns<sub>k</sub>* é o número de simulações feitas com a função de amostragem  $f_{\mathbf{w}}^k$  para a atualização *k*.

O coeficiente de variação da probabilidade de falha pode ser calculado de uma maneira semelhante à utilizada para Monte Carlo Direto, sendo uma indicação do grau de aproximação do estimador da probabilidade de falha. O limite de 5% para o coeficiente de variação da probabilidade de falha ( $\hat{\delta}_{Pf}$ ) pode ser utilizado como critério de parada para as simulações com amostragem por importância adaptativa.

Inicialmente, para um conjunto de simulações que não possuam pontos no domínio de falha ou mesmo poucos pontos (da ordem de 3 ou menos), é empregado o antigo critério utilizado na amostragem por importância para a translação do centro da função de amostragem: quando não se tem amostras no domínio de falha, avalia-se o menor valor assumido por  $g(\mathbf{X})$  nas simulações, adotando-o como centro da função de amostragem; caso contrário, avalia-se o maior valor assumido pela função de densidade de probabilidade de amostragem  $f_w^k$  para aqueles pontos que estejam dentro do domínio de falha (pontos do domínio de falha próximos ao ponto de projeto), utilizando-o para reposicionar a função de amostragem. Desta forma evita-se que se tenha de procurar por múltiplos pontos de mínimo, adotando-se apenas um centro para a amostragem por importância. Nos outros casos, *IFM points* são avaliados através da expressão:

$$x_i^{IFM} = \frac{\sum_{k=1}^{nadp} \sum_{j=1}^{ns_k} I_w^k [g(\mathbf{X}^j)] \cdot x_i^j}{\sum_{k=1}^{nadp} \sum_{j=1}^{ns_k} I_w^k [g(\mathbf{X}^j)]} \quad (5.36)$$

onde  $x_i^{IFM}$  são as coordenadas do *IFM point*,  $x_i^j$  são as coordenadas da amostra  $j$  e  $I_w^k$  é a função indicadora ponderada para a atualização  $k$ .

### 5.4.1 Geração das amostras para simulação

Para a geração das amostras  $\mathbf{X}$  no caso de trabalhar com amostragem por importância (*importance sampling*) tem-se um procedimento idêntico ao de simulação direta Monte Carlo, lembrando-se que as amostras são geradas a partir da função de amostragem e não da função original. Para as amostras que caírem no domínio de falha, a expressão  $I[g(\mathbf{X})]f_x(\mathbf{X})/f_w^k(\mathbf{X})$  deverá ser avaliada, ou seja, deverá se calcular a razão entre as funções de distribuição de probabilidades conjuntas originais e da função de amostragem. Pela transformação de Nataf (1986), a função de densidade de distribuição de probabilidade conjunta das variáveis  $f_x(\mathbf{X})$  vem dada pela seguinte equação

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) \cdot \frac{\varphi_n(\mathbf{Z}, \rho'_{\mathbf{Z}})}{\prod_{i=1}^n \varphi(z_i)} \quad (5.37)$$

sendo  $\varphi_n(\mathbf{Z}, \rho_{\mathbf{Z}})$  a função de densidade de probabilidade  $n$ -dimensional de médias zero e matriz de coeficientes de correlação  $\rho'_{\mathbf{Z}}$ , obtida através da integração da equação (4.2), e  $z_i = \Phi^{-1}(F_{x_i}(x_i))$  e  $\varphi(\cdot)$  são respectivamente as variáveis Gaussianas padrão e a função de densidade de distribuição Gaussiana padrão. Para aumentar a precisão das avaliações feitas, optou-se por obter o logaritmo natural da expressão desejada, de forma que, dada a expressão:

$$\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})} = \frac{\prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) \cdot \frac{\varphi_n(\mathbf{Z}_1, \rho'_{\mathbf{Z}_1})}{\prod_{i=1}^n \varphi(z_{1i})}}{\prod_{i=1}^n f_{w_i}(x_i) \cdot \frac{\varphi_n(\mathbf{Z}_2, \rho'_{\mathbf{Z}_2})}{\prod_{i=1}^n \varphi(z_{2i})}} \quad (5.38)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})}\right) &= \ln\left(\prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) \cdot \frac{\varphi_n(\mathbf{Z}_1, \rho'_{\mathbf{Z}_1})}{\prod_{i=1}^n \varphi(z_{1i})}\right) - \ln\left(\prod_{i=1}^n f_{w_i}(x_i) \cdot \frac{\varphi_n(\mathbf{Z}_2, \rho'_{\mathbf{Z}_2})}{\prod_{i=1}^n \varphi(z_{2i})}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \ln(f_{x_i}(x_i)) + \ln(\varphi_n(\mathbf{Z}_1, \rho'_{\mathbf{Z}_1})) - \sum_{i=1}^n \ln(\varphi(z_{1i})) - \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \ln(f_{w_i}(x_i)) + \ln(\varphi_n(\mathbf{Z}_2, \rho'_{\mathbf{Z}_2})) - \sum_{i=1}^n \ln(\varphi(z_{2i})) \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde

$$\ln(\varphi_n(\mathbf{Z}_1, \rho'_{\mathbf{Z}_1})) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\exp(-1/2(z_{1i})^2)}{(2\pi)^{1/2}}\right) - \ln(\det \rho'_{\mathbf{Z}_1})^{1/2} \quad (5.40)$$

e

$$\ln(\varphi_n(\mathbf{Z}_2, \rho'_{\mathbf{Z}_2})) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\exp(-1/2(z_{2i})^2)}{(2\pi)^{1/2}}\right) - \ln(\det \rho'_{\mathbf{Z}_2})^{1/2} \quad (5.41)$$

Desta forma, uma vez avaliados os somatórios, o valor final de  $I[g(\mathbf{X})]f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})/f_{\mathbf{W}}^k(\mathbf{X})$  é dado pela exponencial deste resultado, conseguindo-se desta forma evitar erros de truncamento caso se avaliassem produtórios e não somatórios, alcançando-se uma maior precisão.

## Capítulo 6

# 6. Superfícies de Resposta e Redes Neurais Aplicadas à Análise de Confiabilidade

*“...The major advantage of a trained Neural Network over the conventional process, under the provision that the predicted results fall within acceptable tolerances, is that results can be produced in a few clock cycles, representing orders of magnitude less computational effort than conventional computational process...”*

*Papadrakakis, M. et al,  
1996*

Neste capítulo é explicado o método da superfície de resposta. Também é dada uma breve revisão a respeito de redes neurais artificiais, mais precisamente as redes percéptron multicamada e as redes com função de base radial. Apresentam-se também os algoritmos de aplicação de redes e superfícies de resposta para a análise da confiabilidade.

## 6.1 Método da superfície de resposta

### 6.1.1 Introdução

Para a maior parte das estruturas reais, a resposta estrutural tem de ser avaliada através de um procedimento numérico como por exemplo uma análise via elementos finitos. Todos os métodos existentes para o cálculo da confiabilidade estrutural podem de certa forma ser adaptados a funções de estado limite implícitas definidas por algum tipo de algoritmo. Entretanto, aqueles métodos que requerem o cálculo de derivadas da função de estado limite com respeito às variáveis básicas, como por exemplo FORM e SORM, obviamente têm sua performance comprometida quando do tratamento de problemas desta natureza ou quando não é possível a

diferenciação da função de estado limite. Tentativas de implementação da avaliação das derivadas da função de estado limite concomitante à formação da matriz de rigidez têm sido feitas, por exemplo, nos trabalhos de Guan *et al* (1994) e Frangopol *et al*(1996), tendo estes alcançado êxito, porém às custas de um procedimento mais complexo. Ainda assim, empregando-se métodos que usam a simulação, o custo necessário para cada avaliação da resposta estrutural em grandes estruturas é bastante alto e às vezes proibitivo, ainda que se utilize recursos de aceleração das avaliações como a expansão em séries de Neumann.

Assim, o método da aproximação por Superfícies de Resposta surge como uma alternativa. Basicamente o princípio é o de aproximar a função de estado limite implícita, não em todo espaço, mas apenas próxima ao ponto de projeto real, na região em que ela mais contribui para a probabilidade de falha total. Deste modo, troca-se a função de estado limite implícita pela Superfície de Resposta a fim de diminuir o custo computacional envolvido nas operações sobre a função de estado limite, uma vez que a superfície de resposta apresenta uma formulação bastante simples, algumas vezes até mesmo explícita. Sobre a Superfície de Resposta então, pode-se aplicar qualquer dos métodos existentes de avaliação da confiabilidade estrutural. Para a aplicação das funções aproximadoras, existem diversas alternativas já estudadas e implementadas como por exemplo: (a) Uso de métodos de regressão, (b) uso de funções de interpolações simples, (c) uso de funções de interpolação inversas, ou seja funções racionais, (c) uso de redes neurais artificiais.

## 6.1.2 Formulação para análise de confiabilidade por superfícies de resposta

As superfícies de resposta, na sua forma conceitual original, tomam geralmente a forma de polinômios. Análises de regressão são feitas de forma a se obter a Superfície de Resposta através, por exemplo, do método dos mínimos quadrados. Uma vez que a superfície de resposta tenha sido ajustada à uma seqüência de pontos amostrais, a análise de confiabilidade pode ser feita. O ponto chave para o método da Superfície de Resposta é alcançar um bom ajuste dos pontos amostrais, particularmente nas vizinhanças dos pontos de projeto. Diversos métodos de amostragens têm sido propostos para o ajuste dos polinômios e dentre eles podem-se citar: a amostragem compósita central (*central composite design*), a amostragem fatorial fracional total e parcial (*fractional factorial design*), a amostragem aleatória (*random design*), a amostragem incompleta parcialmente balanceada (*partially balanced incomplete box*

*design*), etc. Alguns destes métodos de amostragens estão esquematizados na figura abaixo para o caso bidimensional:

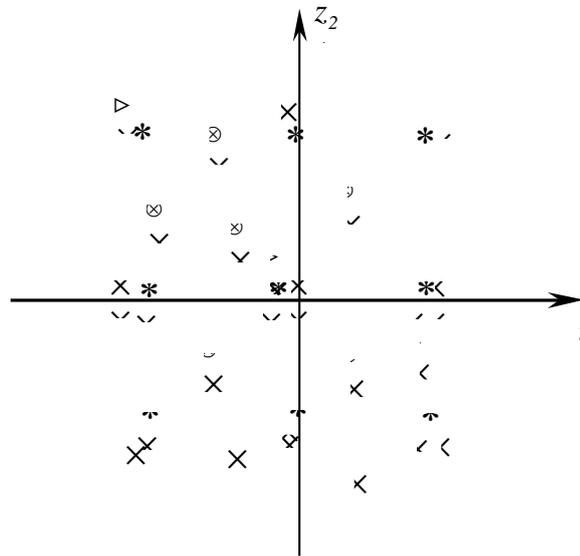


Figura 6.1 - Localização no espaço Normal não correlacionado para geração de amostras para duas variáveis segundo diversos métodos: \* fatorial fracional total; X amostragem proposta por Bucher(1990)[38]; ⊗ aleatória; ∇ incompleta parcialmente balanceada.

No método da amostragem aleatória, um número aleatório de amostras é gerado para as variáveis, dentro de certo limite, geralmente estabelecido pelas características estatísticas de cada uma das variáveis (geralmente 2 desvios padrões para mais e para menos do valor médio da variável,  $\mu \pm 2\sigma$ ). No método da amostragem fatorial  $p^n$  amostras (onde  $p$  é o número de níveis ou intervalos, permitido para a variação de cada variável e  $n$  é o número de variáveis) são geradas. Por exemplo, caso se queira para cada variável, um intervalo de variação de três valores ( $\mu - 2\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\mu + 2\sigma$ ), então  $p=3$ . Caso se acrescente ao método da amostragem fatorial de 2 níveis,  $n_2$  pontos centrais e  $2n$  pontos localizados nas coordenadas  $-\alpha$  e  $+\alpha$  ao longo dos eixos, obtém-se o método da amostragem central compósita. Logo são  $(2^n + n_2 + 2n)$  pontos amostrais. Para o modelo proposto por Bucher(1990), apenas  $2n+1$  amostras são geradas, sendo  $2n$  localizados nas coordenadas  $-\alpha$  e  $+\alpha$  e 1 amostra no ponto central das variáveis. A amostragem fatorial fracional parece ser a mais completa pois permite a geração em quase todo o domínio de variação, entretanto, por exemplo, para 25 variáveis e 3 níveis o número de amostras é de aproximadamente  $8.5 \times 10^{11}$  o que é praticamente inviável. O método da amostragem incompleta parcialmente balanceada permite gerar amostras em quantidade intermediária entre o método de Bucher e a amostragem fatorial fracional. Basicamente um conjunto de blocos são criados de forma a conterem uma certa fração do número total de variáveis. Cada uma das variáveis dentro deste bloco são avaliadas em seus níveis enquanto que as que se

encontram fora do bloco são mantidas fixas em um certo nível por vez. Além do mais, cada conjunto de bloco contém uma, duas, etc. variáveis além do ponto central. Desta forma, o número de amostras a serem geradas é dado por:

$$n^{\text{o}} \text{ amostras} = 1 + \sum_{i=1}^{nbpat} p^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (6.1)$$

onde  $nbpat$  é o número de blocos a serem gerados,  $n$  o número de variáveis,  $p$  o número de níveis que cada variável assumirá. Por exemplo, para 25 variáveis, 2 blocos e 3 níveis são geradas 2776 amostras, bem menos que na amostragem fracional fatorial.

Todos os métodos de amostragens têm suas vantagens e desvantagens, entretanto eles surgiram na esperança de poder diminuir o número de amostras a serem geradas para o ajuste do polinômio. Neste trabalho todos estes métodos (e alguns novos) foram implementados para a posterior avaliação do comportamento no ajuste polinomial.

As superfícies de resposta polinomiais são empregadas geralmente na sua forma quadrática. Polinômios de alta ordem geralmente não são utilizados pois geram muitos coeficientes a serem ajustados e apresentam formas muitas vezes irregulares, causando sérias dificuldades numéricas. Alguns autores como Bucher e Bourgund (1990) os utilizam sem os termos cruzados correspondentes, gerando os polinômios incompletos. Estes mesmos autores propuseram uma aproximação rápida e eficiente por superfícies de respostas em conjunto com o método Monte Carlo com Amostragem por Importância. Os termos constantes, lineares e quadráticos são incluídos no polinômio. Somente  $4n+3$  pontos amostrais são necessários para o ajuste da superfície de resposta, a qual toma a forma:

$$\hat{G}(\mathbf{X}) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \quad (6.2)$$

onde  $\hat{G}$  é o polinômio quadrático sem os termos cruzados utilizado para representar a função de estado limite real e  $a$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são as constantes deste polinômio a serem determinadas. Como se vê pela equação anterior na verdade apenas  $2n+1$  amostras seriam necessárias para a determinação única do polinômio. As amostras são tomadas ao longo dos eixos coordenados de cada uma das variáveis a uma distância de  $x_i = T_i(\pm h)$ , onde  $T_i$  é a transformação probabilística para a variável  $i$  com valor médio de  $\mu_i$  e desvio padrão de  $\sigma_i$ , e  $h$  é um fator arbitrário, geralmente em torno de 2. Também é tomado um ponto no valor médio das variáveis  $x = T(0,0)$ . Uma vez ajustada a Superfície de Resposta (por qualquer um dos métodos clássicos conhecidos: Método dos Mínimos Quadrados, Método da Decomposição do Valor Singular, etc.), faz-se uma procura no espaço Gaussiano padrão não correlacionado da menor distância (índice de

confiabilidade) para esta função de estado limite aproximada. Entretanto, o ponto de projeto encontrado correspondente a esta mínima distância  $\mathbf{X}_i^*$  (utilizando-se o primeiro polinômio com  $2n+1$  amostras) é melhorado através da interpolação (ou extrapolação) do novo ponto central para amostragem, através da fórmula:

$$\mu_{\mathbf{X}}^{i+1} = \mu_{\mathbf{X}}^i + (\mathbf{X}_i^* - \mu_{\mathbf{X}}^i) \frac{G(\mu_{\mathbf{X}}^i)}{[G(\mu_{\mathbf{X}}^i) - G(\mathbf{X}_i^*)]} \quad (6.3)$$

onde  $\mathbf{X}_i^*$  representa o ponto de projeto e  $\mu_{\mathbf{X}}^i$  representa o valor médio das variáveis no ponto central de amostragem na iteração  $i$ . Então novas  $2n+1$  amostras são geradas, tomando-se este novo ponto de amostragem como centro, para a interpolação do novo polinômio, perfazendo um total de  $4n+3$  amostras. Caso se utilize o polinômio quadrático com os termos cruzados, o qual toma a forma:

$$\hat{G}(\mathbf{X}) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq i=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (6.4)$$

o número de amostras necessárias para cada ajuste sobe para  $(n+1)(n+2)/2$ , ou seja um aumento de  $n(n-1)/2$ , o que para muitas variáveis pode representar uma quantidade extraordinariamente maior de novas amostras necessárias.

Neste trabalho, esta solução para a interpolação do novo ponto central de amostragem foi implementada no espaço das variáveis Normais não correlacionadas o qual tem a forma bem semelhante à da equação (6.3). Também as recomendações de Rajashekhar *et al* (1993) foram tomadas. Não apenas  $4n+3$  amostras são geradas mas quantas forem necessárias até que a distância entre os pontos de projeto no espaço das variáveis Normais não correlacionadas ( $i\delta$ ) de iterações subsequentes sejam inferiores a tolerâncias preestabelecidas como indicado na Figura 6.2.

Também a variável  $h$  é tomada decrescente ao longo das iterações, de acordo com as indicações de Rajashekhar *et al* (1993). Quando, após iterações sucessivas, o valor da distância entre pontos de projeto sucessivos ( $i\delta$ ) seja inferior a  $1 \times 10^{-3}$ , o valor de  $h$  é reduzido à metade até que fique inferior a 0.5, quando então é dito que houve convergência e o processo de aproximação é finalizado.

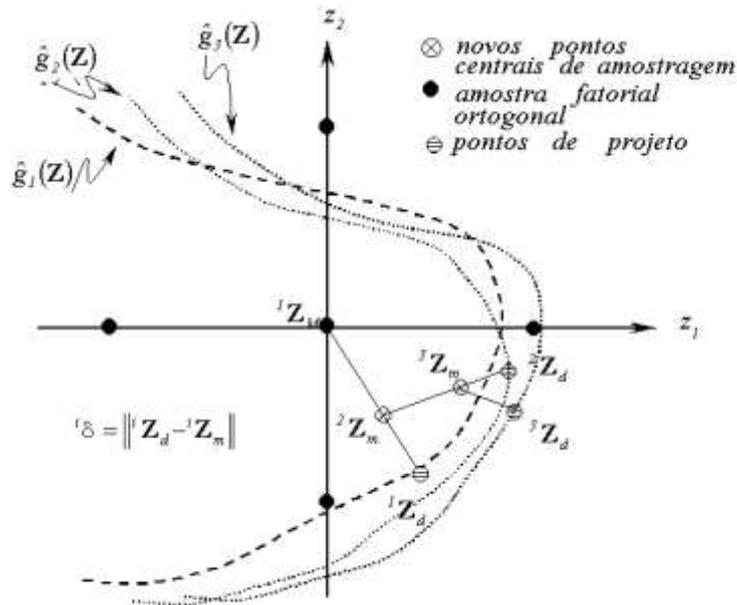


Figura 6.2 - Esquema do algoritmo para adaptação da superfície de resposta à função de estado limite.

A fim de evitar que em cada iteração se avaliem todas as amostras para o ajuste polinomial, pode-se ir diminuindo estas amostras ao longo das iterações. Por exemplo, pode-se começar por utilizar um polinômio completo com seus termos cruzados e reter aqueles termos que realmente têm importância na precisão do cálculo do índice de confiabilidade e ir eliminando os termos que não tenham importância. Uma forma de se fazer isto elegantemente é utilizar a técnica ANOVA (*Analysis of Variance*), ou utilizando uma forma simplificada como a indicada em Rajashekhar *et al* (1993) nos casos em que o número de amostras é igual ao número de coeficientes do ajuste polinomial a ser feito. Em seu trabalho, este autor sugere que ao se prosseguir nas iterações, a resposta computada no ponto central de amostragem  $G(\mu_{\mathbf{X}}^i)$  e as outras respostas computadas  $G^i(\mathbf{X})$  (onde  $i$  indica uma amostra para aquela iteração) devem ser comparadas através do quadrado da diferença normalizada com respeito a  $G(\mu_{\mathbf{X}}^i)$ . Assim:

$$\left( \frac{G^i(\mathbf{X}) - G(\mu_{\mathbf{X}}^i)}{G(\mu_{\mathbf{X}}^i)} \right)^2 < \varepsilon \quad (6.5)$$

caso este valor seja inferior a certa tolerância especificada  $\varepsilon$  (geralmente  $1 \times 10^{-3}$ ) então o correspondente termo do ajuste polinomial pode ser descartado nos ajustes nas iterações seguintes, diminuindo-se assim tanto o número de amostras a serem geradas a cada nova iteração quanto o número de termos do polinômio a serem encontrados. Este termo pode ser um termo linear, quadrático ou um termo cruzado, sendo portanto esta abordagem mais realista, por

exemplo, do que retirar todos os termos cruzados ou mesmo adotar todos nos ajustes polinomiais.

De uma forma bastante genérica, digamos que  $n$  seja o número de amostras das respostas da função de estado limite ( $Y_i, i=1, \dots, n$ ) que se possua em uma dada iteração correspondentes a distintas amostras das variáveis ( $\mathbf{X}^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_p^i)^T$  sendo  $p$  o número de variáveis), seja também  $\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X}), \varphi_3(\mathbf{X}), \dots, \varphi_m(\mathbf{X})$  as correspondentes funções de base para a regressão a ser feita. O correspondente modelo de regressão é :

$$y \approx c_1 \varphi_1(\mathbf{X}) + \dots + c_m \varphi_m(\mathbf{X}) \quad (6.6)$$

para funções de base do tipo polinômio quadrático, as funções  $\varphi_i(\mathbf{X})$  serão:

$$1, x_1, x_2, \dots, x_p, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_p^2 \quad (6.7)$$

o qual leva, caso o número de amostras seja maior ou igual ao número de termos a serem ajustados, ao seguinte sistema sobredeterminado:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{c} \quad (6.8)$$

onde  $\mathbf{Y}=(Y_1, \dots, Y_n)$ ,  $\mathbf{c}=(c_1, \dots, c_m)$  e  $\mathbf{X}$  a matriz  $n \times m$  ( $n \geq m$ ) da forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{X}^1) & \dots & \varphi_m(\mathbf{X}^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(\mathbf{X}^n) & \dots & \varphi_m(\mathbf{X}^n) \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Através de algum método de regressão (Mínimos Quadrados, Decomposição do Valor Singular, etc.) que minimize a norma Euclidiana  $\|\mathbf{Y} - \mathbf{X} \mathbf{c}\|$ , a solução do sistema fornece os valores aproximados para  $\hat{\mathbf{c}}$ , ou em outros termos, a superfície de resposta aproximada:

$$\hat{y} \approx \hat{c}_1 \varphi_1(\mathbf{X}) + \dots + \hat{c}_m \varphi_m(\mathbf{X}) \quad (6.10)$$

A matriz  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  é chamada de matriz de variância-covariância, cujos elementos diagonais representam os valores da variâncias de cada um dos coeficientes ajustados do polinômio. A Análise de Variâncias (ANOVA) utiliza esta matriz para ter uma estimativa da variâncias dos coeficientes polinomiais ajustados. Os termos diagonais desta matriz ( $\sigma_i^2$ ) multiplicados pela variâncias dos valores da função a ser aproximada ( $\sigma_{Y_i}^2$ ) avaliados são as variâncias dos respectivos coeficientes  $c_i$  do modelo polinomial da superfície de resposta ( $V_{c_i}$ ). Assim, os coeficientes de variação destes termos podem ser avaliados como:

$$V_{c_i} = \begin{cases} \frac{|\sigma_i| \sqrt{\sigma_{Y_i}^2}}{c_i} & \text{para } c_i \neq 0 \\ 1 & \text{para } c_i = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

onde o valor  $\sigma_{y_i}^2$  é um subproduto do ajuste polinomial feito (inclusive, um indicativo de que o ajuste com as funções de base escolhidas teve sucesso - coeficiente de determinação  $R^2$  próximo a 1). Se o coeficiente de variação de algum termo do ajuste ( $V_c$ ) for superior a 0.10 este termo pode ser eliminado do polinômio sem maiores conseqüências para a precisão do ajuste feito. Neste trabalho apenas este último método, a Análise de Variância (ANOVA), está implementado.

### 6.1.3 Método da projeção de vetor

De forma a melhorar o método da superfície de resposta, as amostras geradas para o ajuste da superfície devem ser posicionadas o mais próximas da função de estado limite original. Segundo Kim *et al* (1997), este posicionamento é obtido através da projeção destes pontos sobre a superfície que tangencia a função de estado limite no ponto de projeto em questão. De forma a manter vantajoso o processo, a informação a respeito do gradiente da função de estado limite pode ser também obtido através da superfície de resposta aproximada, aproveitando-se a informação do gradiente disponível no processo de Hasofer-Lind Rackwitz-Fiesler de procura do índice  $\beta$ .

Na Figura 6.3 mostra-se um esboço das diferenças encontradas quando se geram as amostras pelos processos tradicionais e através da técnica da projeção de vetor. A idéia é que as amostras sejam posicionadas de uma maneira racional mais próximas da função de estado limite, melhor capturando o seu comportamento no limiar de passagem entre os domínios de falha e segurança. Observe-se que esta técnica poderá ser utilizada com qualquer umas das outras técnicas de amostragem já mencionadas (amostragem de Bucher(1990), amostragem aleatória, amostragem compósita central, etc.), entretanto só poderá ser utilizada após a primeira iteração do processo de ajuste da superfície de resposta, quando só então as informações a respeito dos gradientes da função de estado limite estarão disponíveis, como indicado na Figura 6.3.

Observe-se também que, diferentemente da literatura (Kim *et al* (1997); Das *et al* (2000); Zheng *et al* (2000)), nesta Tese está se trabalhando sempre no espaço Normal não correlacionado, onde se obtém uma maior estabilidade nos algoritmos empregados bem como estimadores, os quais são objetivos, ou seja, independentes do tipo de distribuição das variáveis. Isto permite a formulação de critérios para parada do algoritmo mais consistentes.

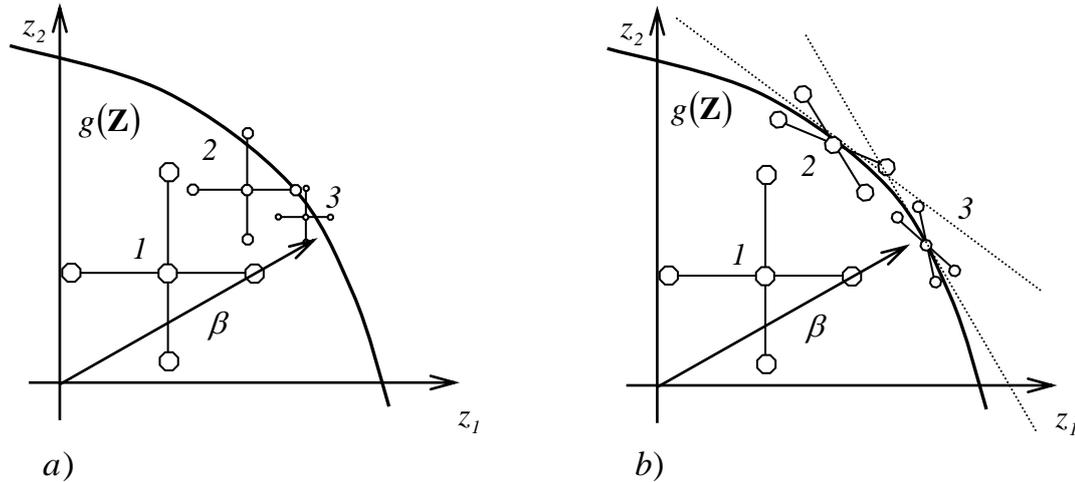


Figura 6.3 - Esquema comparativo no espaço Gaussiano padrão não correlacionado entre amostras geradas a) pelos métodos tradicionais e b) pela técnica da projeção de vetor.  $\circ$  representa a amostra.

Como descrito em Zheng *et al* (2000), a projeção em si é bastante simples. Para uma dada amostra gerada originalmente por um dos métodos anteriores, define-se o vetor posição  $\vec{e}$  e o vetor normal à superfície de resposta  $\vec{\alpha}$  no ponto de projeto  $\mathbf{Z}^*$  em questão, como descrito na

Figura 6.4. Desta forma, tem-se definidos:

$$\vec{\alpha} = \frac{\nabla \hat{g}}{\|\nabla \hat{g}\|} \quad \text{e} \quad \vec{e} = \mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*$$

sendo  $\nabla \hat{g}$  definido através de:

$$\nabla \hat{g} = \frac{\partial \hat{g}}{\partial \mathbf{Z}} \Big|_{\mathbf{z}^*} = \left\{ \frac{\partial \hat{g}}{\partial Z_1}, \frac{\partial \hat{g}}{\partial Z_2}, \dots, \frac{\partial \hat{g}}{\partial Z_n} \right\} \quad (6.13)$$

Então, calcula-se o vetor diferença unitário  $\vec{t}$ :

$$\vec{T} = \vec{e} - (\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) \vec{\alpha} \quad \text{e} \quad \vec{t} = \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|} \quad (6.14)$$

onde  $\vec{e} \cdot \vec{\alpha}$  significa o produto interno entre vetores. A amostra projetada vem então dada por:

$$\vec{P} = [\vec{t} + \text{sign}(\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) \arctan(\varepsilon_p) \vec{\alpha}] \omega + (1 - \omega) \vec{e} \quad \text{e} \quad \vec{p} = \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} \quad (6.15)$$

onde  $\varepsilon_p$  é um pequeno ângulo que o vetor tangente gira da tangente à superfície de resposta e  $\omega$  é um fator de peso que varia entre 0 e 1, correspondendo respectivamente à amostragem convencional e à amostragem com projeção completa do vetor. Neste trabalho são adotados  $\varepsilon_p = 0.01$  e  $\omega = 0.99$ .

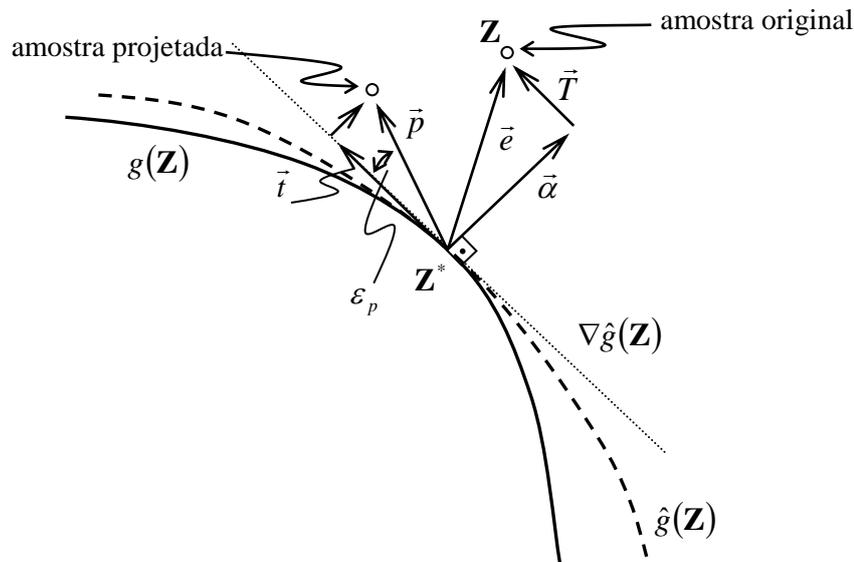


Figura 6.4 - Esquema no espaço Gaussiano padrão não correlacionado da transformação das amostras pela técnica da projeção de vetor.

## 6.2 Redes neurais artificiais

### 6.2.1 Introdução

Não há um conceito universalmente aceito sobre a definição de redes neurais artificiais. De acordo com Haykin (1994), uma rede neural é um processador distribuído, massivamente paralelo que tem a capacidade natural de adquirir conhecimento experimental e torná-lo disponível para uso. Elas lembram o cérebro em dois aspectos:

- As redes neurais, através do processo de aprendizado, adquirem conhecimento;
- As conexões inter-neurônios, conhecidas como pesos sinápticos, são usados para guardar o conhecimento.

De acordo com Nigrin(1993), a rede neural é um circuito composto de um grande número de elementos de processamento simples. Cada elemento opera somente localmente sua informação recebida. Além do mais, cada elemento opera assincronamente. Portanto não há um tempo de processamento para o sistema em geral (o tempo do sistema não depende do tempo das unidades).

Mas talvez a maioria das pessoas na área irá concordar que as redes neurais são compostas de muitos processadores simples (unidades), cada um tendo possivelmente uma pequena porção de memória. Os canais de comunicações (conexões), as quais usualmente transportam dados numéricos, estão inter-conectados de várias maneiras possíveis, ligando as unidades. As unidades somente operam sobre seus dados de entrada recebidos através das conexões.

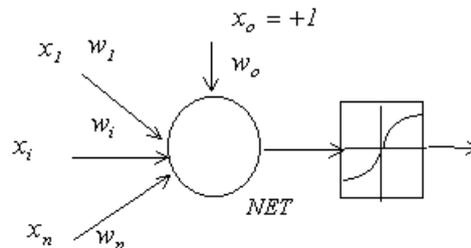


Figura 6.5 - Neurônio, a unidade de processamento neural mais simples.

Na Figura 6.2, um esquema da unidade de processamento neural mais simples, o neurônio, é apresentada. O neurônio é a mais básica unidade de uma rede neural e, como uma unidade de processamento, irá receber entradas ( $x_i$ ) via as conexões dos axônios. Então, algum processamento será feito aos dados de entrada para obter o dado de saída. Esta transformação é feita em dois estágios. Primeiro, usualmente é empregada uma combinação linear com todos os dados de entrada para obter um escalar, chamado de *NET*. Os coeficientes da transformação linear são chamados de "pesos", definidos como  $w_i$ . Num segundo estágio, é usada uma transformação não-linear (ou linear) com o escalar *NET*. A função não-linear é geralmente chamada de "função de ativação" e denotada como  $f$ . Como no comportamento dos neurônios naturais, a função de ativação irá decidir quando, como e se o neurônio irá disparar a saída ( $i$ ). Como indicado na Figura 6.1, há uma entrada com um valor constante ( $x_0 = +1$ ) e seu respectivo peso ( $w_0$ ), o qual está relacionado com um parâmetro na função de ativação chamado de limiar. Por conveniência, o limiar foi posto como uma incógnita na equação a qual fornece a correspondente saída. O limiar define uma translação no eixo  $x$  na função de ativação original. Resumidamente, todo o processo pode ser escrito como:

$$i = f(NE T) = f\left(\sum_{k=0}^n w_k x_k\right) \quad (6.16)$$

Há diversos tipos de função de ativação usados para a transformação tais como a linear ( $f(x)=x$ ), função sinal ( $f(x)=SIGN(x)$ ), função sigmóide ( $f(x)=1/(1+e^{-x})$ ), função passo unitário ( $f(x)=H(x-x_0)$ ), tangente hiperbólica ( $f(x)=tanh(x)$ ), etc. As unidades de processamento simples podem ser conectadas cada uma entre si para formarem a rede neural. As diversas maneiras e

formas como as unidades básicas se conectam e operam são muitos diferentes, originando uma grande variedade de redes neurais.

A maior parte das redes neurais tem algum tipo de regra de treinamento onde os pesos das conexões são ajustados com base nos dados de treinamento. Em outras palavras, as redes neurais aprendem através dos exemplos e exibem alguma capacidade de generalização além dos dados de treinamento.

As redes neurais normalmente têm um grande potencial para o paralelismo, uma vez que a computação das unidades é grandemente independente uma das outras. Algumas pessoas associam o paralelismo e alta conectividade para definirem as características das redes neurais, mas estas características não são verdadeiras para vários modelos simples, tais como o modelo de regressão linear simples (uma rede mínima *feedforward* com apenas dois neurônios mais o limiar), o qual é reconhecidamente um caso especial de rede neural.

## 6.2.2 Modelo geral para redes multicamada

Agora será descrito brevemente a arquitetura da rede percéptron multicamada. A arquitetura de rede percéptron multicamada é o tipo de rede mais amplamente utilizado. A Figura 6.6 mostra a arquitetura generalizada de uma rede percéptron multicamada. Ela consiste em uma rede com camadas totalmente conectadas, isto é, todos os neurônios pertencentes a uma camada são cada um conectados com a camada anterior e a seguinte. Obviamente, a camada de entrada e de saída somente injetam ou recebem dados na rede. Além disso, o número de camadas escondidas e o número de neurônios em cada camada necessita ser determinada. Ela depende da complexidade do sistema a ser modelado. Para sistemas mais complexos, uma maior quantidade de camadas escondidas é necessário.

A capacidade de redes neurais multicamada como aproximadores universais de funções arbitrárias contínuas e limitadas tem sido assunto de muitos trabalhos. O teorema de *Kolmogorov-Nielsen* tem sido usado diretamente a redes neurais para a determinação do número de neurônios e camadas escondidas. O teorema diz que, dada uma função arbitrária contínua  $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathfrak{R}^m \mid f(x) = y$ , há uma implementação exata para  $f$  com uma arquitetura de rede neural de três camadas, onde o vetor de dados na camada de entrada tem dimensão  $n$ , a camada escondida tem  $2n + 1$  neurônios, e a camada de saída tem  $m$  neurônios representando a função a ser avaliada. Na prática, o número ótimo de neurônios e camadas escondidas é determinado por tentativa e erro.

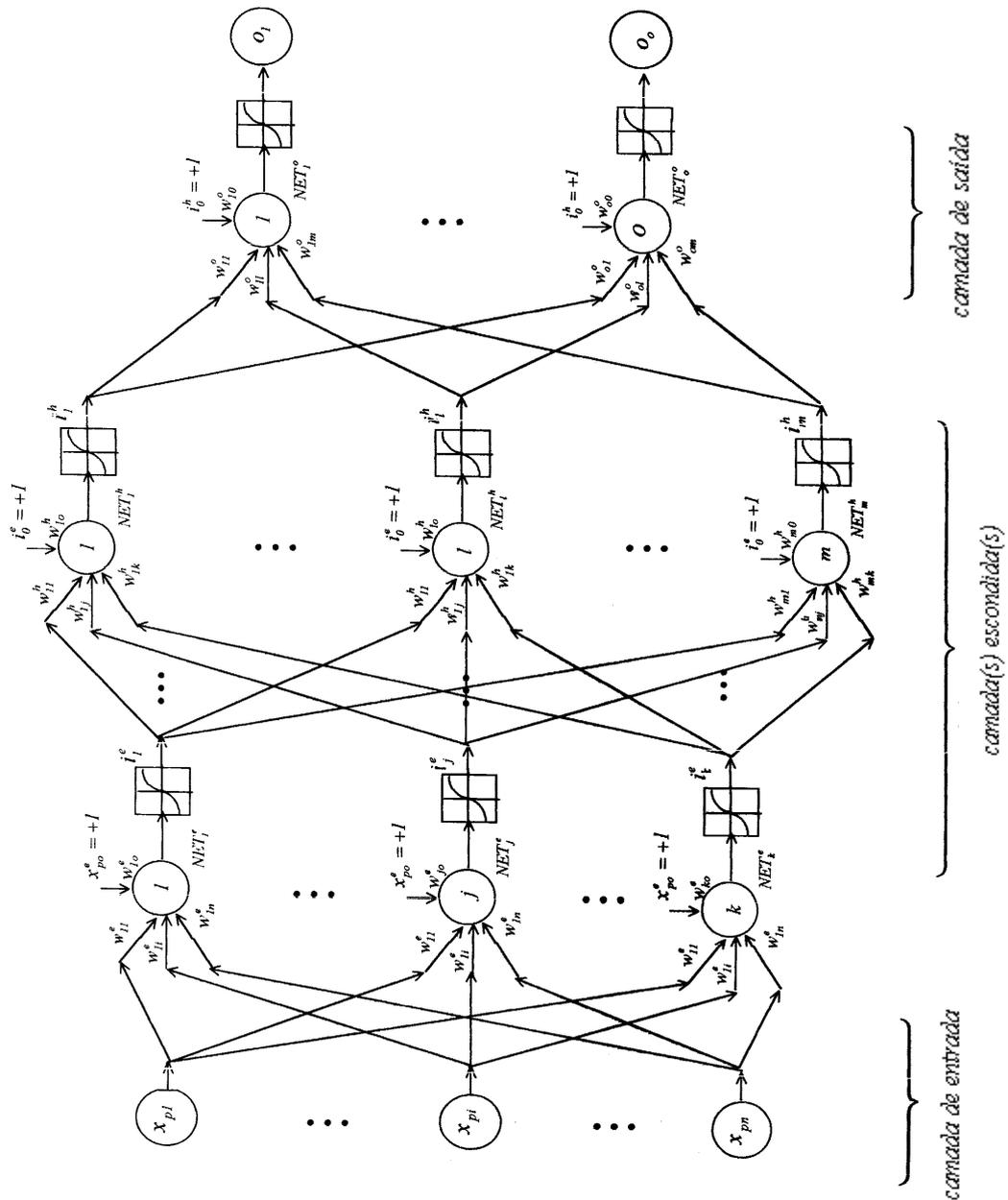


Figura 6.6 - Arquitetura generalizada de uma rede perceptron multicamada.

### 6.2.3 Algoritmo de retropropagação padrão

O Erro Quadrático Instantâneo ( $E_p$ ), para uma dada amostra de treinamento  $p$  pode ser definido como função do somatório do quadrado da diferença entre as saídas dos neurônios na camada de saída  $o$  e as saídas desejadas  $y$ :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{no} (y_{pi} - o_{pi})^2 \quad (6.17)$$

Onde  $no$  é o número de neurônios na camada de saída e  $p$  identifica a amostra.

O Erro Quadrático Médio ( $E_{ms}$ ) pode ser então definido como o valor médio dos erros instantâneos  $E_p$  sobre o número de amostras de treinamento  $np$ :

$$E_{ms} = \frac{1}{np} \sum_{p=1}^{np} E_p \quad (6.18)$$

No algoritmo do Gradiente Descendente de ajuste dos pesos sinápticos, assume-se uma proporcionalidade entre o ajuste dos pesos e o gradiente do Erro Quadrático Instantâneo com relação a estes pesos, no sentido oposto a este gradiente:

$$\Delta w = -\eta \frac{\partial E_p}{\partial w} \quad (6.19)$$

de forma que o ajuste dos pesos é dado pela seguinte fórmula incremental

$$w(t + \Delta t) = w(t) + \Delta w(t) \quad (6.20)$$

Por exemplo, para os neurônios na camada de saída, a derivada do Erro Quadrático Instantâneo com respeito a estes pesos é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^o} &= \frac{\partial}{\partial w_{ji}^o} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{no} (y_{pi} - o_{pi})^2 \right] = \sum_{i=1}^{no} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (y_{pi} - o_{pi}) \cdot (-1) \cdot \frac{\partial o_{pi}}{\partial w_{ji}^o} = \\ &= -(y_{pi} - o_{pi}) \cdot \frac{\partial o_{pi}}{\partial w_{ji}^o} \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde  $i$  indica o número do neurônio na camada de saída e  $j$  indica o índice do peso naquele neurônio. O fato do somatório ter desaparecido é porque  $o_{pi} = f_i(net_i^o)$ , ou seja,  $w_{ji}$  é apenas função do  $net$  do seu neurônio, sendo as outras derivadas nulas. Lembrando que  $net_i^o = \sum_{j=0}^{nh} w_{ji}^o i_j$ , onde o índice  $j$  varia de 0 até o número de neurônios da camada anterior es-

condida  $nh$  (pois deve-se acrescentar o termo do peso do limiar), a equação anterior fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_{ji}^o} &= -(y_{pi} - o_{pi}) \cdot \frac{\partial f_i(net_i^o)}{\partial w_{ji}^o} = -(y_{pi} - o_{pi}) \cdot \frac{\partial f_i(net_i^o)}{\partial net_i^o} \cdot \frac{\partial net_i^o}{\partial w_{ji}^o} = \\ &= -(y_{pi} - o_{pi}) \cdot f_i'(net_i^o) \cdot i_j \end{aligned} \quad (6.22)$$

Então a correção dos pesos dos neurônios na camada de saída fica:

$$\Delta w_{ji}^o = \eta \left[ (y_{pi} - o_{pi}) f_i'(net_i^o) \cdot i_j \right] = \eta \cdot \delta_{pi} \cdot i_j \quad (6.23)$$

onde

$$\delta_{pi} = (y_{pi} - o_{pi}) f_i'(net_i^o) \quad (6.24)$$

Para cada peso na camada de saída, a correção é dada pela equação anterior. Mas ainda fica a questão de como corrigir os pesos nas camadas escondidas. Podemos calcular a correção no pesos com o mesmo procedimento, para uma camada escondida anterior à camada de saída. Começamos por escrever a equação da derivada do Erro Quadrático Instantâneo com respeito ao peso deste neurônio (o superíndice  $h$  indica escondida):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_{lm}^h} &= \frac{\partial}{\partial w_{lm}^h} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{no} (y_{pi} - o_{pi})^2 \right] = \sum_{i=1}^{no} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (y_{pi} - o_{pi}) \cdot (-1) \cdot \frac{\partial o_{pi}}{\partial w_{lm}^h} = \\ &= - \sum_{i=1}^{no} (y_{pi} - o_{pi}) \cdot \frac{\partial o_{pi}}{\partial w_{lm}^h} = - \sum_{i=1}^{no} (y_{pi} - o_{pi}) \cdot f'_i(net_i^o) \cdot \frac{\partial net_i^o}{\partial w_{lm}^h} \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde  $m$  indica o número do neurônio na camada escondida e  $l$  indica o índice do peso naquele neurônio. Na equação anterior, o somatório sobre os neurônios na camada de saída deve permanecer uma vez que a rede é do tipo totalmente interconectada, e portanto todos eles serão função do peso na camada anterior. Assim, lembrando-se que  $net_i^o = \sum_{j=0}^{NH} w_{ji}^o i_j$  então

$\frac{\partial net_i^o}{\partial w_{lm}^h} = w_{mi}^o \cdot \frac{\partial i_m}{\partial w_{lm}^h}$ . Mais uma vez, aqui o somatório desaparece pois a derivada só existirá quando o  $i_j$  for função do peso do neurônio da camada escondida, ou seja quando  $j=m$ . Então, lembrando-se de que:

$$i_m = f_m(net_m^h) \text{ e } \frac{\partial i_m}{\partial w_{lm}^h} = f'_m(net_m^h) \cdot \frac{\partial net_m^h}{\partial w_{lm}^h} = f'_m(net_m^h) \cdot i_l \quad (6.26)$$

a derivada da equação (6.25) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial w_{lm}^h} &= - \sum_{i=1}^{no} (y_{pi} - o_{pi}) \cdot f'_i(net_i^o) \cdot w_{mi}^o \cdot f'_m(net_m^h) \cdot i_l = \\ &= - f'_m(net_m^h) \cdot i_l \cdot \sum_{i=1}^{NO} \delta_{pi} \cdot w_{mi}^o \end{aligned} \quad (6.27)$$

e a correção dos pesos para os neurônios na camada escondida anterior à de saída vem dada por:

$$\Delta w_{lm}^h = \eta \left[ \sum_{i=1}^{no} \delta_{pi} \cdot w_{mi}^o \right] f'_m(net_m^h) \cdot i_l = \eta \cdot \delta_m \cdot i_l \quad (6.28)$$

onde

$$\delta_m = \left[ \sum_{i=1}^{no} \delta_{pi} \cdot w_{mi}^o \right] f'_m(net_m^h) \quad (6.29)$$

Pode-se assim generalizar as equações anteriores ((6.23), (6.28)) para as outras camadas da rede. Assim numa primeira etapa, os dados de entrada são “propagados à frente”, cal-

culando-se os valores para os *net* e os valores das funções de ativação *f* e suas respectivas derivadas *f'* até chegar-se à camada de saída. Numa segunda etapa, os dados de saída são comparados com os dados de treinamento respectivos e esta diferença é então “propagada à ré” através do cálculo dos parâmetros  $\delta$  de cada neurônio, uma camada por vez, já que os valores das camadas escondidas dependem dos valores das camadas mais adiantes, até chegar-se à primeira camada da rede. Então os pesos sinápticos são corrigidos segundo a taxa de aprendizagem, os parâmetros  $\delta$  e as saídas *i*.

O algoritmo de retropropagação é basicamente um algoritmo de gradiente descendente. Numa rede multicamada, as superfícies de erro são complexas, com diversos mínimos locais. É possível que o algoritmo baseado no gradiente descendente possa não alcançar o mínimo global. Uma forma de diminuir o tempo de aprendizado sem levar a oscilações é modificar o algoritmo original adicionando um termo de momento  $\alpha$  como descrito abaixo:

$$\Delta w(t + \Delta t) = \Delta w(t) + \alpha \Delta w(t - \Delta t) \quad (6.30)$$

onde  $\alpha$  é uma constante que determina o efeito que os valores anteriores das variações do peso afetam a direção atual de movimento da correção dos pesos no espaço dos pesos. Isto fornece um tipo de "inércia" no espaço dos pesos que efetivamente filtra as variações de alta frequência, da superfície de erro no espaço dos pesos.

## 6.2.4 Algoritmo de retropropagação com a regra de aprendizado delta-barra-delta.

Com o intuito de acelerar o algoritmo de aprendizado por retropropagação padrão anteriormente discutido, Jacobs (1988), citado em Haykin(1994) enumerou quatro heurísticas que servem como diretrizes para confecção da regra de aprendizado delta-barra-delta. São elas:

**Heurística 1.** Cada parâmetro ajustável da rede neural presente implicitamente na função de custo deve ter sua própria taxa de aprendizado.

**Heurística 2.** Para cada taxa de aprendizado deve-se possibilitar a variação no algoritmo de uma iteração para outra.

**Heurística 3.** Quando a derivada da função de custo com respeito a um peso sináptico tem o mesmo sinal algébrico por várias iterações consecutivas do algoritmo, a taxa de aprendizagem para aquele peso em particular deve ser aumentada.

**Heurística 4.** Quando o sinal algébrico da derivada da função de custo com respeito a um

*peso sináptico em particular, alterna seu sinal algébrico em iterações consecutivas do algoritmo, a taxa de aprendizado para aquele peso deve diminuir.*

Para avaliar as modificações necessárias no algoritmo padrão retropropagação, comece-se por definir a função de custo como sendo o Erro Quadrático Instantâneo, como na equação (6.17). Assim:

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{no} (y_{pi} - o_{pi}(t))^2 \quad (6.31)$$

onde  $no$  é o número de neurônios na camada de saída e  $p$  identifica a amostra. Embora a definição do Erro Quadrático Instantâneo seja matematicamente similar ao da equação (6.17), o espaço de parâmetro da nova função de custo é admitido como possuindo diferentes taxas de aprendizado. Seja  $\eta_{ji}(t)$  a taxa de aprendizado correspondente ao peso sináptico  $w_{ji}(t)$  em uma iteração  $t$ . Aplicando a regra da cadeia à equação (6.31), pode-se escrever (o subíndice  $p$  foi intencionalmente retirado para maior clareza do desenvolvimento):

$$\frac{\partial E(t)}{\partial \eta_{ji}(t)} = \frac{\partial E(t)}{\partial o_j(t)} \cdot \frac{\partial o_j(t)}{\partial v_j(t)} \cdot \frac{\partial v_j(t)}{\partial \eta_{ji}(t)} \quad (6.32)$$

onde

$$v_j(t) = \sum_i w_{ji}(t) \cdot o_i(t) \quad (6.33)$$

e também,

$$w_{ji}(t) = w_{ji}(t - \Delta t) - \eta_{ji}(t) \frac{\partial E(t - \Delta t)}{\partial w_{ji}(t - \Delta t)} \quad (6.34)$$

Substituindo a equação (6.34) na equação (6.33), tem-se então:

$$v_j(t) = \sum_i o_i(t) \left[ w_{ji}(t - \Delta t) - \eta_{ji}(t) \frac{\partial E(t - \Delta t)}{\partial w_{ji}(t - \Delta t)} \right] \quad (6.35)$$

portanto diferenciando a equação (6.35) com respeito a  $\eta_{ji}(t)$  e reescrevendo a equação (6.16), tem-se:

$$\frac{\partial v_j(t)}{\partial \eta_{ji}(t)} = -o_i(t) \frac{\partial E(t - \Delta t)}{\partial w_{ji}(t - \Delta t)} \quad (6.36)$$

e

$$\frac{\partial o_j(t)}{\partial v_j(t)} = f_j'(v_j(t)) \quad (6.37)$$

Em seguida avalia-se a derivada parcial  $\partial E(t)/\partial o_j(t)$ . Quando o neurônio  $j$  estiver da camada de saída, a resposta desejada  $y_j$  é fornecida externamente. Então diferenciando a equação(6.31) com respeito a  $o_j(t)$ , obtém-se o resultado:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial o_j(t)} = -[y_j - o_j(t)] = -e_j(t) \quad (6.38)$$

onde  $e_j(t)$  é o sinal de erro instantâneo. Portanto usando as derivadas parciais das equações (6.36), (6.37) e (6.38) na equação (6.32), obtém-se:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial \eta_{ji}(t)} = -f_j'(v_j(t)) \cdot e_j(t) \cdot o_j(t) \cdot \left[ -\frac{\partial E(t-\Delta t)}{\partial w_{ji}(t-\Delta t)} \right] \quad (6.39)$$

observe-se que a derivada parcial que ainda aparece na equação anterior refere-se a derivada da função Erro Quadrático Instantâneo no tempo anterior  $t - \Delta t$ . Observando-se mais atentamente o fator  $-f_j'(v_j(t)) \cdot e_j(t) \cdot o_j(t)$ , vê-se que ele é igual à derivada parcial  $\partial E(t)/\partial w_{ji}(t)$ , então pode-se redefinir a equação anterior como:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial \eta_{ji}(t)} = -\frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)} \cdot \frac{\partial E(t-\Delta t)}{\partial w_{ji}(t-\Delta t)} \quad (6.40)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento pode-se chegar aos mesmo resultados para neurônios que estejam em uma camada escondida, ou seja a equação aplica-se à todas as conexões sinápticas da rede. A regra atualizada da taxa de aprendizado que utiliza o algoritmo do gradiente descendente para atualizar a taxa de aprendizado pode ser enunciada como:

$$\Delta \eta_{ji}(t+\Delta t) = -\gamma \frac{\partial E(t)}{\partial \eta_{ji}(t)} = -\gamma \frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)} \cdot \frac{\partial E(t-\Delta t)}{\partial w_{ji}(t-\Delta t)} \quad (6.41)$$

onde  $\gamma$  é um parâmetro positivo, chamado parâmetro de controle do tamanho do passo para o procedimento de adaptação da taxa de aprendizagem. Para assegurar que as heurísticas 3 e 4 anteriormente apresentadas sejam atendidas e devido ao fato do valor do parâmetro  $\gamma$  ser de difícil escolhida, as seguintes formulações são aplicadas, atendendo a todas as heurísticas apresentadas por Jacobs (veja Haykin(1994)):

$$\Delta \eta_{ji}(t+\Delta t) = \begin{cases} \kappa & \text{se } S_{ji}(t-\Delta t) \cdot D_{ji}(t) > 0 \\ -\beta \Delta \eta_{ji}(t) & \text{se } S_{ji}(t-\Delta t) \cdot D_{ji}(t) < 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.42)$$

com  $D_{ji}(t)$  e  $S_{ji}(t)$  definidos como seguem:

$$D_{ji}(t) = \frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)} \quad (6.43)$$

e

$$S_{ji}(t) = (1 - \xi)D_{ji}(t - \Delta t) + \xi S_{ji}(t - \Delta t) \quad (6.44)$$

onde o único que se exige dos parâmetros  $\xi$ ,  $\beta$  e  $\kappa$  é que sejam valores positivos e constantes, preferencialmente menores que 1. Assim, de acordo com a regra delta-barra-delta de aprendizado, cada peso sináptico terá sua própria taxa de aprendizado que variará de iteração para iteração, ganhando-se tempo no aprendizado. A taxa de aprendizado  $\eta_{ji}(t)$  é incrementado linearmente mas é decrementado exponencialmente. Um incremento linear previne que a taxa de aprendizado cresça muito rápido, enquanto que um decremento exponencial significa que a taxa de aprendizado permanece positiva e decresce rapidamente.

Neste trabalho tanto o algoritmo de retropropagação padrão quanto a regra delta-barra-delta estão implementadas. Todas as atualizações de pesos e taxas de aprendizagens podem ser feitas após a apresentação de cada amostra de treinamento (treinamento supervisionado por amostras) ou mesmo após a apresentação de todas as amostras (treinamento supervisionado em lote), quando então é feita a correção dos erros. Neste trabalho ambas as formas de treinamento foram implementadas, sendo empregado como padrão o treinamento em lote devido às vantagens que oferece quando do aumento do número de amostras para treinamento.

## 6.2.5 Diferenciação da rede neural percéptron multicamada

Como um aproximador universal de funções, com a rede neural percéptron multicamada, da mesma forma que para funções, pode-se também obter as derivadas da função aproximada com respeito às variáveis básicas. Neste item será mostrado como obter as primeiras derivadas da rede neural percéptron multicamada com respeito aos dados de entrada, as quais serão utilizadas na análise da confiabilidade de 1ª ordem com FORM. O mesmo processo pode ser estendido facilmente para diferenciações de maior grau ou mesmo para diferenciações cruzadas.

O que se deseja obter é  $\partial o_i / \partial x_j$ , onde  $i$  indica o índice do neurônio na camada de saída e  $j$  o índice do elemento do vetor de entrada. Lembrando que

$$o_i = f_i \left( \sum_{k=0}^{nh} w_{ki} \cdot i_k \right) \text{ e } i_k = f_k \left( \sum_{l=0}^{nhl} w_{lk} \cdot i_l \right) \quad (6.45)$$

onde  $nh$  indica o número de neurônios na camada imediatamente anterior à de saída e  $nhl$  indica o número de neurônios na antepenúltima camada, pode-se através de operações algébricas chegar à seguinte equação, a qual fornece a derivada de uma saída de uma rede perceptron multicamada com respeito a um elemento do vetor de entrada:

$$\frac{\partial o_i}{\partial x_j} = f_i' (net_i^o) \cdot \sum_{k=1}^{nh} w_{ki} \omega_k \quad (6.46)$$

onde

$$\omega_m = f_m' (net_m^o) \cdot \sum_{l=1}^{nhl} w_{lk} \omega_l \quad (6.47)$$

e o valor de  $\omega$  para a camada de entrada deve ser  $\omega = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$  com o valor não nulo no elemento de índice  $j$ . A implementação da diferenciação acima descrita é facilmente feita com o algoritmo de retropropagação empregado.

## 6.2.6 Seleção da arquitetura da rede

Nas redes neurais os pesos podem ser imaginados como incógnitas de um sistema de equações e o número de equações é igual ao número de pares de treinamento multiplicado pelo número de neurônios na camada de saída. Se o número de equações é maior que o número de incógnitas, a rede é dita como sobredeterminada. Por outro lado, se o número de equações é menor que o número de incógnitas, então a rede é dita subdeterminada. Muitos autores afirmam que para uma boa aproximação a rede neural deve ser determinada. Entretanto, alguns investigadores concluem que esta afirmação não é verdadeira e ao contrário mostram que algumas redes subdeterminadas apresentam melhor desempenho que redes determinadas e sobredeterminadas.

Pode-se utilizar o teorema de Kolmogorov-Nielsen como uma boa estimativa inicial, entretanto o teorema não fornece nenhuma informação a respeito da escolha da função de ativação ou do algoritmo de treinamento. Além do mais, se uma rede de quatro ou mais camadas for escolhida, o teorema não pode ser aplicado diretamente. Finalmente, há algumas fórmulas empíricas tais como aquela descrita por Rogers(1994), sugerindo que o número de neurônios na camada escondida deva ser algo em torno da média entre o número de neurônios da camada de entrada e na camada de saída, ou aquele critério usado por alguns programas comerciais para redes neurais e que propõe uma relação entre neurônios da camada de entrada ( $i$ ), neurô-

nios da camada de saída ( $o$ ), número de padrões (amostras) de treinamento ( $p$ ) e número de camadas escondidas ( $h$ ) como descrito na equação a seguir:

$$nh = \frac{(i+o) + \sqrt{p}}{2h} \quad (6.48)$$

onde  $nh$  é o número de neurônios nas camadas escondidas. Em geral, como afirmado anteriormente, o número de camadas escondidas e o número de neurônios são determinados na prática por um procedimento de tentativa e erro.

## 6.2.7 Definição do uso da aproximação por rede neural

Para a correta estimativa do tempo de CPU requerido por uma análise exata e por uma rede neural treinada devem ser descritos os tempos parciais envolvidos em cada procedimento. Suponha que seja necessário um certo número de re-análises estruturais  $n$ , e que o tempo necessário para cada re-análise estrutural exata seja  $T^E$ . O tempo total necessário para as re-análises é então  $(n T^E)$ . Assuma-se que a arquitetura da rede seja conhecida a priori e que  $(m T^G)$ ,  $(m T^E)$ ,  $T^T$ ,  $(n T^{NA})$  sejam o tempo gasto na geração de  $m$  amostras de entrada, o tempo gasto na avaliação de  $m$  dados de saída, o tempo requerido para o treinamento da rede neural e o tempo gasto em  $n$  re-análises pela rede neural, respectivamente. Como enfatizado por Rogers(1994), há uma relação de custo-benefício a ser considerada ao tomar a decisão em simular a análise estrutural exata por uma rede neural. Pode ser afirmado que a rede neural será vantajosa quando:

$$(n T^E) \gg (m T^G) + (m T^E) + (n T^{NA}) + T^T \quad (6.49)$$

O tempo necessário para a geração dos dados de entrada é independente do tipo de problema e também assim pode ser assumido o tempo necessário para a avaliação via rede neural ( $T^{NA}$ ). Na análise de confiabilidade com amostragem por importância, por exemplo, a quantidade de re-análises pode ser assumida da mesma magnitude do número de pares de treinamento (da ordem de centenas), portanto o tempo requerido para uma análise exata irá decidir quando a aproximação pela rede neural será mais atrativa. Na análise de confiabilidade com simulação direta Monte Carlo, dependendo da probabilidade de falha, o número de re-análises ( $n$ ) será muito maior que o número de pares de treinamento, enfatizando assim a necessidade do uso da rede neural. É óbvio que a melhor arquitetura de rede neural não é conhecida a priori, entretanto algumas técnicas podem ser usadas para este tipo de problema no momento do treinamento.

## 6.3 Redes neurais com funções de base radial

O projeto de uma rede neural pode ser visto como um problema de adaptação (aproximação) de hipersuperfícies em um espaço multidimensional. Assim, o aprendizado da rede é equivalente a encontrar as características da superfície multidimensional que melhor se ajustam aos dados de treinamento. De forma correspondente, a generalização pode ser entendida como o uso da superfície multidimensional ajustada para a interpolação (ou extrapolação) de dados de validação ou teste. Tal ponto de vista na verdade é a motivação que está por trás do método das funções de base radial de forma que ele remete à trabalhos tradicionais de pesquisa de interpolação em espaços multidimensionais.

A construção de redes neurais com funções de base radial na sua forma mais básica envolve apenas três camadas, as quais são inteiramente diferentes entre si. A camada de entrada é composta por neurônios de entrada (sensores). A segunda camada é uma camada escondida de dimensão suficiente e que serve para propósitos diferentes que daqueles presentes nas redes percéptrons multicamada. Esta camada é composta por modelos de neurônios diferentes dos usualmente empregados. Na Figura 6.7 é apresentado um esquema de um neurônio com função de base radial, na sua forma mais simples.

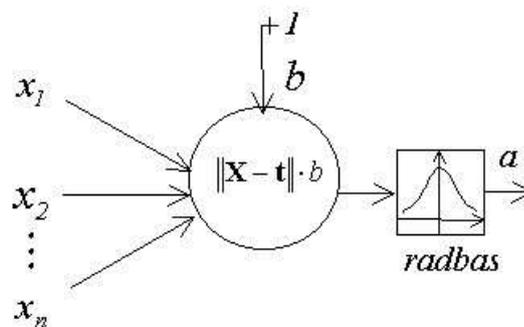


Figura 6.7 - Esquema geral de um neurônio de base radial.

Assim como nos neurônios das redes percéptrons, o neurônio com função de base radial recebe o vetor de entrada  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$  pelos seus axônios, os quais não possuem pesos sinápticos como nos percéptrons. No corpo do neurônio é então calculada a norma Euclidiana da distância entre o vetor de entrada e o centro fixo  $\mathbf{t}$  do neurônio. Então este resultado é multiplicado pelo limiar  $b$  o qual tem valor de entrada constante e igual a  $+1$ . O valor do limiar  $b$  permite que a sensibilidade do neurônio seja ajustada de forma que responda a vetores de entrada que estejam mais ou menos distantes de seu centro, possibilitando que outros neurônios com centros próximos àquele também respondam ao vetores de entrada. O produto

resultante é passado por uma função não linear de base radial  $G$  (função de ativação) para então resultar na saída  $a$ , de forma que a saída tem valor máximo quando o vetor de entrada for igual ao centro do neurônio. Todo o processo pode ser resumido como se segue:

$$a = G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| \cdot b) \quad (6.50)$$

Devido ao fato de utilizar-se funções de ativação não lineares, a transformação do espaço de entrada para o espaço das unidades escondidas é dita do tipo não linear.

A terceira camada é a camada de saída e fornece a resposta da rede aos padrões apresentados à mesma. A transformação do espaço das unidades escondidas para o espaço das unidades de saída é dita do tipo linear uma vez que esta camada é composta por neurônios que possuem função de ativação do tipo linear. Assim como os percéptrons, nesta camada cada neurônio possui associado aos seus axônios tanto pesos sinápticos quanto limiares. Assim, a camada de saída apenas soma ponderadamente as saídas da camada anterior escondida, formada por funções de bases radiais, pelos pesos sinápticos correspondentes e fornece o valor da saída. Na Figura 6.8 é mostrada uma arquitetura geral de uma rede com função de base radial para um vetor de entrada de dimensão  $n$  e  $p$  amostras de treinamento, uma camada escondida com  $m$  neurônios com função de base radial, sendo  $m \leq n$ , e uma camada de saída com  $o$  neurônios do tipo lineares.

### 6.3.1 Projeto de uma rede generalizada com funções de base radial

Dado um conjunto de  $N$  diferentes pontos  $\{\mathbf{x}_i \in \mathfrak{R}^p \mid i = 1, 2, \dots, N\}$  que representam os vetores de entrada e um correspondente número de  $N$  números reais  $\{\mathbf{d}_i \in \mathfrak{R}^o \mid i = 1, 2, \dots, N\}$  que representam as saídas desejadas, constituindo uma amostra de treinamento, então com uma rede com funções de base radial é possível encontrar uma função  $F: \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^o$ , tal que satisfaça a seguinte condição de interpolação:

$$F(\mathbf{x}_i) = \mathbf{d}_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.51)$$

A solução da equação anterior utilizando as funções de Green como funções de base remetem às “redes de regularização” que constituem uma classe de redes com funções de base radial cuja camada escondida contém um número de neurônios igual ao número  $N$  de pontos da amostra, centrados cada um em cada amostra  $\mathbf{x}_i$ . Este tipo de solução é quase sempre evi-

tado pois é proibitivamente dispendioso para implementar em termos computacionais para o caso de grandes valores de  $N$ .

Utilizando a técnica padrão variacional do Método de Galerkin, uma solução aproximada  $F^*(\mathbf{x})$  pode ser encontrada para contornar a solução regularizada, anteriormente mencionada. De acordo com esta técnica, a solução aproximada é expandida em termos de uma base finita, como descrito a seguir:

$$F^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (6.52)$$

onde  $\{\varphi_i(\mathbf{x}) \mid i = 1, 2, \dots, M\}$  é um novo conjunto de funções de base que assume-se, sem perda de generalidade, que sejam linearmente independentes. Tipicamente o número de funções de base é menor que o número de pontos da amostra ( $M \leq N$ ) e os  $w_i$  constituem um novo conjunto de pesos. Por motivos que serão óbvios mais tarde as funções de base não lineares  $\varphi_i$  devem atender a certa condição. A propriedade a que deve obedecer a função de base radial é aquela definida pelo enunciado a seguir:

*Sejam  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  pontos distintos em  $\mathcal{R}^p$ . Então, a matriz de interpolação  $\Phi$ ,  $N$  por  $N$ , cujos elementos são  $\varphi_{ij} = G(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)$ , sendo  $G$  uma função de base radial, deverá ser positivo definida.*

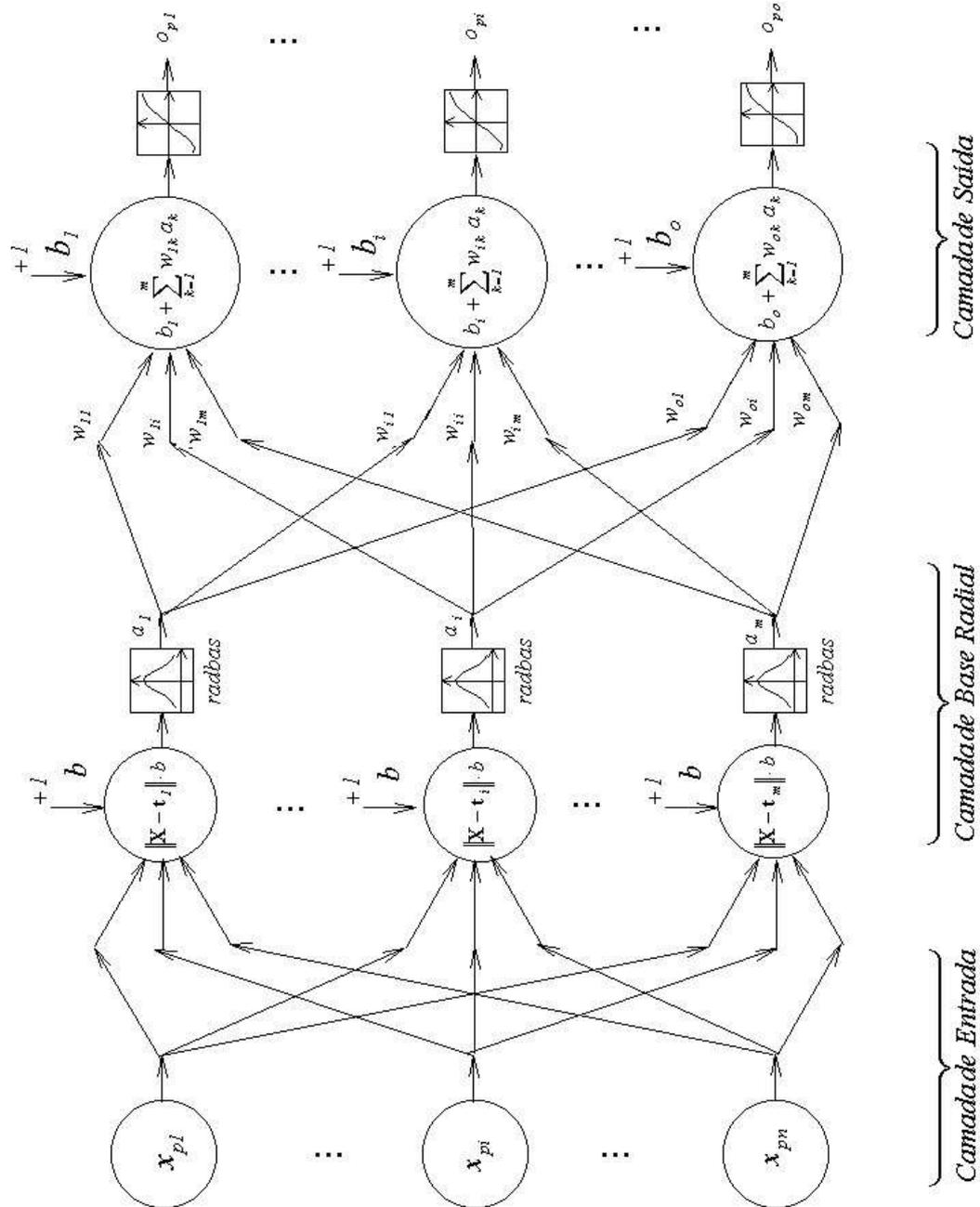


Figura 6.8 - Esquema geral de uma rede neural de base radial.

Funções que satisfazem tal condição e que são geralmente empregadas em redes na forma de funções de base radial são citadas a seguir:

- Função multi quadrática inversa

$$G(r) = \frac{1}{(r^2 + c^2)^{1/2}}, \text{ para } c > 0 \text{ e } r \geq 0 \quad (6.53)$$

- Função *spline* de placa fina

$$G(r) = (pr)^2 \ln(pr), \text{ para } p > 0 \text{ e } r \geq 0 \quad (6.54)$$

e

$$G(r) = (qr)^t \ln(qr), \text{ para } q > 0 \text{ e } r \geq 0 \quad (6.55)$$

- Função Gaussiana

$$G(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \text{ para } \sigma > 0 \text{ e } r \geq 0 \quad (6.56)$$

Assim, utilizando-se alguma das funções de base radial anteriormente enunciadas, pode-se escrever que:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, M \quad (6.57)$$

onde o conjunto de centros  $\{\mathbf{t}_i | i = 1, 2, \dots, M\}$  devem ser determinados. Esta escolha particular para o centro das funções de base radial deve ser tal que garanta que no caso em que  $M=N$ , fazendo-se:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, M \quad (6.58)$$

ao menos a solução pontual será obtida. Pode-se então redefinir  $F^*(\mathbf{x})$  como sendo:

$$F^*(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w_i G(\mathbf{x}, \mathbf{t}_i) = \sum_{i=1}^M w_i G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_i\|) \quad (6.59)$$

Então tem-se que determinar o novo conjunto de pesos  $\{w_i | i = 1, 2, \dots, M\}$  de forma a minimizar a nova função de custo  $\mathfrak{J}(F^*)$  definida por:

$$\mathfrak{J}(F^*) = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{d}_i - \sum_{j=1}^M w_j G(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{t}_j\|) \right)^2 + \lambda \|\mathbf{P}\mathbf{F}^*\|^2 \quad (6.60)$$

onde  $\mathbf{P}$  é um operador diferencial invariante tanto a rotações quanto a translações. A solução do problema de minimização sem restrições anteriormente definido pode ser obtido chegando-se à seguinte equação que minimiza a função custo:

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{G}_0) \mathbf{w} = \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (6.61)$$

onde,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_2) & \dots & G(\mathbf{x}_1, \mathbf{t}_M) \\ G(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2) & \dots & G(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(\mathbf{x}_N, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{x}_N, \mathbf{t}_2) & \dots & G(\mathbf{x}_N, \mathbf{t}_M) \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

e

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} G(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) & \dots & G(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_M) \\ G(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_2) & \dots & G(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(\mathbf{t}_M, \mathbf{t}_1) & G(\mathbf{t}_M, \mathbf{t}_2) & \dots & G(\mathbf{t}_M, \mathbf{t}_M) \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

com

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T \quad (6.64)$$

e

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T \quad (6.65)$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro de regularização. Note-se que quando o parâmetro de regularização  $\lambda$  aproxima-se a zero, o vetor de pesos  $\mathbf{w}$  converge para a solução de norma mínima (pseudo-inversa) do problema de aproximação pelos mínimos quadrados do sistema de equações sobredeterminado, assim:

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^+ \mathbf{d} \quad \text{para } \lambda = 0 \quad (6.66)$$

onde a pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{G}$ , é definida como:

$$\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \quad (6.67)$$

Note-se que no vetor  $\mathbf{w}$  deve estar incluído os pesos sinápticos da camada de saída bem como seus limiares. No algoritmo implementado, um neurônio de base radial é adicionado por vez na camada escondida. O neurônio adicionado é centrado na amostra do vetor de entrada que produz maior erro quadrático na saída. O erro quadrático é monitorado até atingir uma certa tolerância assim como o número máximos de neurônios da camada escondida (que no máximo será igual à dimensão da amostra - solução regularizada) quando então para-se o processo e é dito que a rede está treinada.

### 6.3.2 Diferenciação da rede neural com função de base radial

Neste item será mostrado como obter as primeiras derivadas da rede neural com funções de base radial com respeito aos dados de entrada, para utilização posterior no cálculo da confiabilidade pelo método de 1ª ordem FORM.

O que desejamos obter é  $\partial o_i / \partial x_j$ , onde  $i$  indica o índice do neurônio na camada de saída e  $j$  o índice do elemento do vetor de entrada. Lembrando que

$$o_i = \sum_{k=1}^{nh} (w_{ki} \cdot a_k + b_i) \text{ e } a_k = G(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_k\|b) \quad (6.68)$$

onde  $nh$  indica o número de neurônios na camada escondida, pode-se através de operações algébricas chegar à seguinte equação que nos fornece a derivada de uma saída de uma rede com função de base radial com respeito a um elemento do vetor de entrada:

$$\frac{\partial o_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{nh} w_{ki} G'(\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_k\|b) \cdot b \frac{(x_j - t_j^k)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_k\|} \quad (6.69)$$

onde o índice  $k$  indica o neurônio da camada escondida. A implementação do cálculo da derivada de uma saída da rede com função de base radial com respeito a um elemento do vetor de entrada é bastante simples, aproveitando-se inclusive o próprio algoritmo utilizado para a rede com função de base radial.

### 6.3.3 Comparações entre redes de base radial e redes percéptron multicamada

Redes com funções de base radial (RFBR) e redes percéptrons multi camada são exemplos de redes não lineares, em camadas e alimentadas à vante. Ambas são aproximadores universais de funções. Pode-se dizer que para cada rede percéptron multi camada existe uma correspondente rede com funções de base radial capaz de “emular” precisamente o comportamento da rede percéptron. Entretanto estas duas redes diferem entre si em alguns importantes aspectos:

- Uma rede com funções de base radial (na sua forma mais simples) tem uma única camada escondida, enquanto que uma rede percéptron multi camada pode ter uma ou mais camadas escondidas;
- Tipicamente, os neurônios que efetuam o trabalho computacional numa rede percéptron, estejam eles numa camada escondida ou numa camada de saída, compartilham um modelo neural comum (tanh, sigmoidal etc.). Por outro lado nas redes com funções de base radial, os neurônios da camada escondida possuem um modelo de neurônio completamente diferente daquele encontrado na sua camada de saída e que servem diferentemente para outros propósitos;
- O argumento da função de ativação de cada neurônio na camada escondida numa rede com funções de base radial avaliam a norma Euclidiana (distância) entre vetores de entra-

da e o centro daquele neurônio. Por outro lado, cada neurônio em uma rede perceptron multi camada avalia o produto interno entre os vetores e os pesos sinápticos daquele neurônio;

- Em geral, redes perceptron multi camada constroem melhor aproximadores globais para mapeamentos não lineares entrada-saída. Consequentemente, elas são capazes de generalizar em regiões do espaço de entrada onde pouco, ou nenhum, dado de treinamento esteja disponível. Diferentemente, redes com funções de base radial que utilizem funções não lineares com decaimento exponencial (por exemplo funções Gaussianas) constroem melhor aproximadores locais, resultando que estas redes são capazes de uma rápida aprendizagem e reduzida sensibilidade à ordem de apresentação dos dados de treinamento.

## 6.4 Algoritmo de aprendizado ativo para redes neurais

Shao *et al* (1997) desenvolveram um algoritmo de aprendizado ativo da função de estado limite para redes neurais do tipo de retropropagação que também é válido para alguns outros tipo de redes neurais. Obviamente, qualquer que seja o algoritmo de aprendizado, quanto mais avaliações da função de estado limite real ele exigir, mais custo computacional estará envolvido, podendo inclusive tornar o procedimento pouco atrativo computacionalmente ou, até mesmo, menos eficiente que o método de simulação direta Monte Carlo. O algoritmo proposto parte do princípio que para a análise de confiabilidade, o que mais interessa é o contorno  $g(\mathbf{X})=0$ . Desta forma não é necessário aproximar com relativa precisão pontos fora do contorno  $g(\mathbf{X})=0$  no domínio de  $\mathbf{X}$ , mas sim aqueles que estão na vizinhança dos domínios de falha e segurança. Shao então propôs um algoritmo, que também foi implementado neste trabalho, no qual a rede neural por si só procura o contorno  $g(\mathbf{X})=0$  e os pontos de projeto. Ela começa por aprender um conjunto limitado de dados representativos dos pares variáveis básicas *versus* valor da função de estado limite. Ao longo do treinamento, o algoritmo decide quais as regiões do espaço  $\mathbf{X}$  são importantes e então adiciona mais pontos amostrais para um futuro aprendizado. Tal procedimento é repetido até que uma certa precisão seja alcançada na área de interesse. Desta forma, a geração de amostras (dados para treinamento da rede) em regiões de pouco importância fica evitada.

O algoritmo começa por gerar um conjunto de amostras segundo algum dos métodos já expostos de geração de amostras: amostragem de Bucher, amostragem aleatória, amostragem

compósita central, etc. Estas amostras servirão como dados para treinamento inicial da rede. Então, no espaço Normal não correlacionado verifica-se o comportamento da função de estado limite  $\hat{g}(\mathbf{Z})=0$  aproximada pela rede. Caso ela tenha uma forma tal que distribua-se ao redor da origem (ver Figura 6.8), um novo conjunto de dados é gerado a partir de  $\hat{g}(\mathbf{Z})=0$  e das direções dos eixos coordenados (ou mais direções, ou direções aleatórias). Desta forma o conjunto de dados para treinamento é aumentado. Deve-se observar que para a rede já treinada inicialmente, a inclusão de novas amostras para aprendizado fica bastante facilitada, principalmente quando emprega-se o algoritmo de aprendizado da rede em seu modo de lote (*batch mode*) e não em seu modo de amostras (*pattern mode*), de forma que o maior esforço concentra-se nas aprendizagens iniciais, sendo este esforço diminuído ao longo do processo. Caso a função de estado limite concentre-se em uma área crítica, novas amostras são geradas a partir da aproximação da rede  $\hat{g}(\mathbf{Z})=0$  e das bissetrizes do quadrante da área em questão. Desta forma, o novo conjunto de dados é adicionado às amostras antigas (ver Figura 6.10).

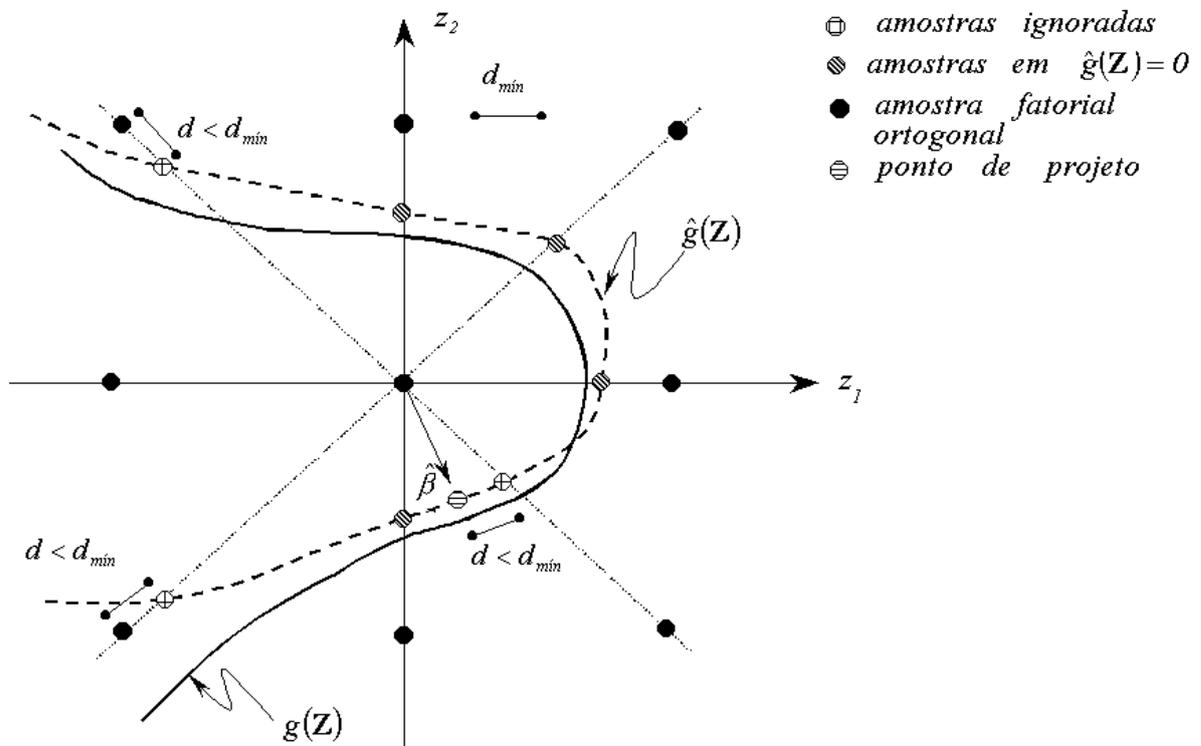


Figura 6.9 - Região de falha distribuída no domínio.

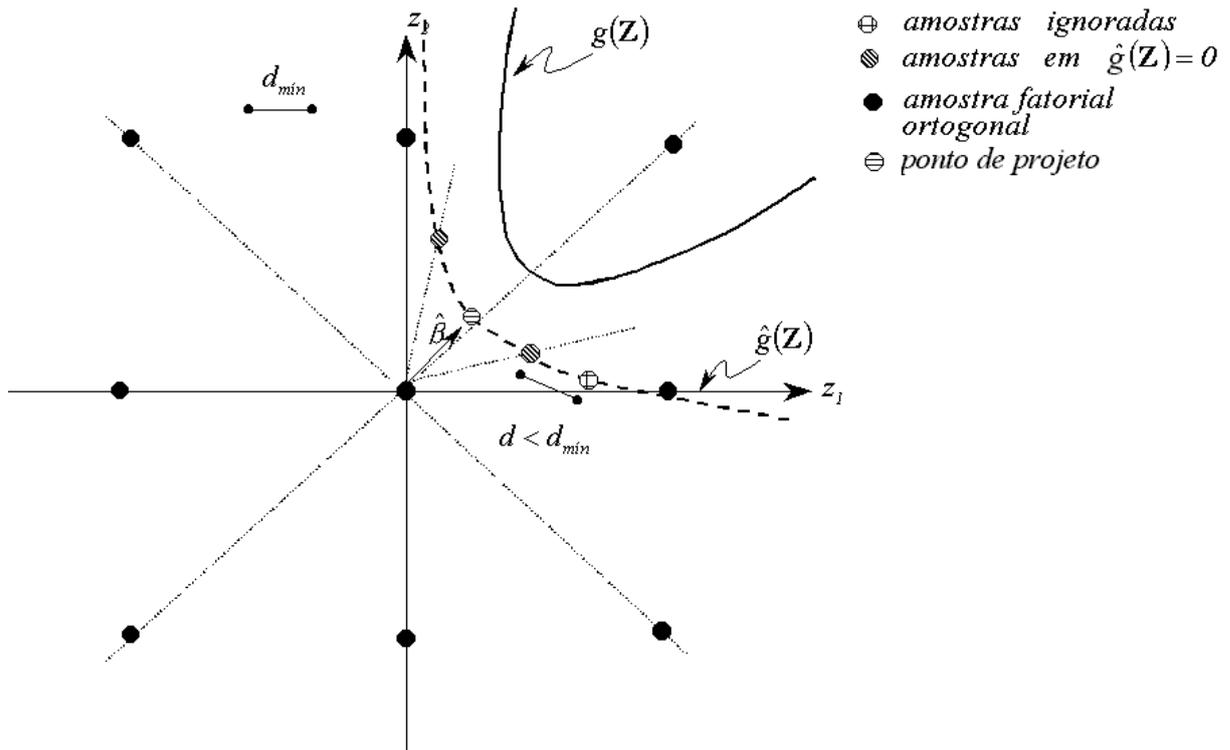


Figura 6.10 - Região de falha concentrada no domínio.

O controle do nível de precisão em determinada área, para as amostras para treinamento, é feito através da definição de um parâmetro  $d_{min}$  no espaço das variáveis Normais reduzidas (neste trabalho adotou-se  $d_{min}=0.1$ ). Caso as novas amostras sugeridas (inclusive os pontos de projeto intermediários obtidos no processo iterativo) pela rede estejam a uma distância inferior à mínima dos pontos amostrais já utilizados, estes pontos são desconsiderados.

# Capítulo 7

## 7. Aplicações das Diferentes Técnicas na Confiabilidade Estrutural

Neste capítulo são mostrados alguns exemplos, em ordem crescente de dificuldade, da aplicação das técnicas existentes de avaliação de confiabilidade. Também são apresentados resultados referentes à proposta sugerida nesta Tese do uso de redes neurais para a avaliação da confiabilidade em estruturas de concreto armado incluindo campos estocásticos.

### 7.1 Exemplos com funções de estado limite explícitas

#### 7.1.1 Viga em balanço em regime elástico linear

Neste exemplo é analisada a confiabilidade de uma viga em balanço de seção transversal retangular, com carregamento uniformemente distribuído e em regime elástico linear quanto à função de estado limite de serviço da flecha máxima no extremo livre, a qual não deve exceder o valor limite de  $l/325$ .

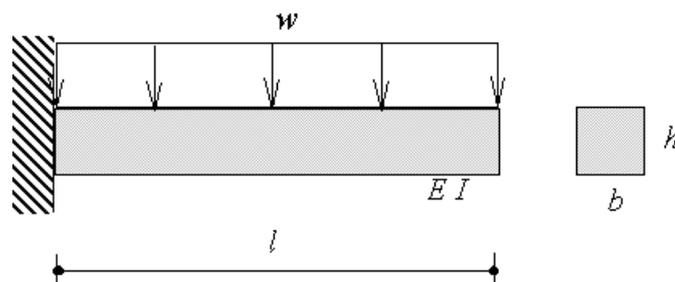


Figura 7.1 - Viga bi-engastada de seção transversal retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

Para este caso, o valor da função de estado limite pode ser explicitado pela equação:

$$f.e.l = \frac{l}{325} - \frac{wbl^4}{8EI} \quad (7.1)$$

onde  $E$ ,  $w$ ,  $I$ ,  $b$ ,  $l$  são respectivamente o módulo de elasticidade, o valor da carga uniformemente distribuída por unidade de área, o momento de inércia da seção transversal, a largura da viga e o comprimento do vão. Admite-se que  $E$  e  $l$  sejam variáveis determinísticas de valores iguais a  $E=2.6 \times 10^4$  MPa e  $l=6$  m, a função de estado limite então reduz-se a:

$$f.e.l = 0.01846154 - 74.76923 \frac{x_1}{x_2^3} \quad (7.2)$$

sendo  $x_1$  a carga  $w$  em MPa e  $x_2$  a altura  $h$  em mm. As características destas duas variáveis aleatórias, que consideram-se serem Gaussianas e não correlacionadas, são dadas na tabela abaixo:

Tabela 7.1 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para a viga em balanço.

Variável	Denominação	Unidade	Média $\mu$	Coefficiente de Variação V
$w$	$x_1$	MPa	1000.0	0.20
$h$	$x_2$	m	0.250	0.15

A solução “exata” para este problema, indicada por Rajashekhar (1993) utilizando Monte Carlo com Amostragem por Importância e 1000 simulações da função de estado limite real, é de  $P_f = 0.9607 \times 10^{-2}$  ( $\beta = 2.341$ ). Neste mesmo trabalho, nenhuma referência é dada a respeito do coeficiente de variação desta estimativa.

Neste trabalho obtiveram-se os seguintes resultados:

1. Solução utilizando-se Simulação Direta Monte Carlo com variáveis antitéticas e a função de estado limite real.

$$P_f = 0.96900 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.338) \quad \delta_{P_f} = 0.3197 \times 10^{-1}$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 100000

Tempo relativo de CPU: 1.00

2. Solução utilizando-se simulação Monte Carlo com amostragem por importância e variáveis antitéticas e função de estado limite real (atualização da função de amostragem a cada 150 simulações).

$$P_f = 0.964276 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.340) \quad \delta_{P_f} = 0.9964 \times 10^{-2}$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 17850

Tempo relativo de CPU: 0.44

Na Figura 7.2 é mostrado a história de simulações para o exemplo tanto para Monte Carlo quanto para Amostragem por Importância. Na mesma figura, é mostrada a evolução da estimativa do valor médio da probabilidade de falha e do seu coeficiente de variação.

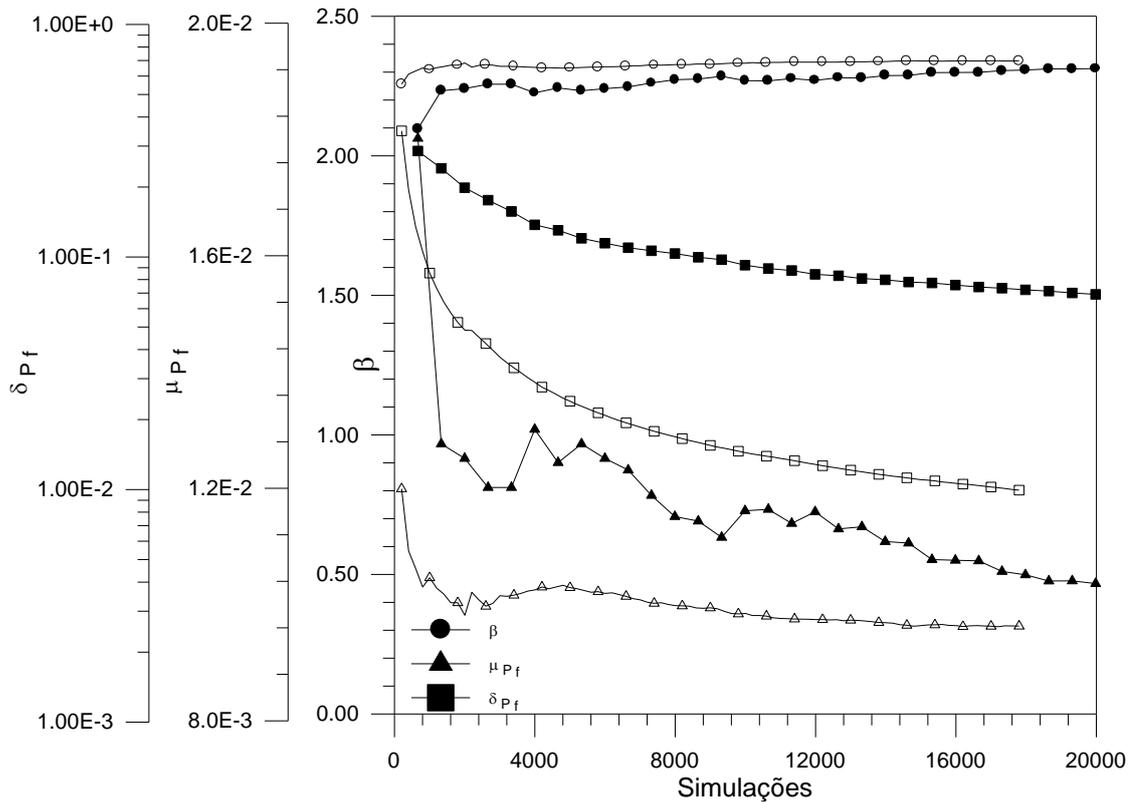


Figura 7.2 - Valor do índice de Confiabilidade  $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha  $\mu_{Pf}$  e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha  $\delta_{Pf}$ , versus número de simulações para o exemplo da viga em balanço (símbolos claros - amostragem por Importância; símbolos escuros - Monte Carlo direto).

3. Solução utilizando método FORM com derivadas da função de estado limite explicitamente dadas.

$$P_f = 0.9789 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.334)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 33

Tempo relativo de CPU: 0.044

4. Solução utilizando-se polinômios quadráticos sem termos cruzados com amostragem de Bucher e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

$$P_f = 0.9731 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.337)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 35

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 32

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.1754 - 0.1712x10^{-4} x_1 + 0.1965x10^{-2} x_2 + 0.9426x10^{-18} x_1^2 - 0.4767x10^{-5} x_2^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.035

5. Solução utilizando-se polinômios quadráticos completos, amostragem central compósita e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

$$P_f = 0.9601x10^{-2} (\beta=2.341)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 44

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 26

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.1080 + 0.1547x10^{-2} x_2 - 0.4689x10^{-5} x_2^2 - 0.7337x10^{-4} x_1 + 0.3571x10^{-6} x_1 x_2 - 0.2784x10^{-8} x_1^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.033

6. Solução utilizando-se polinômios cúbicos sem termos cruzados, amostragem central compósita e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

$$P_f = 0.9676x10^{-2} (\beta=2.339)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 110

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 5166

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.3438 + 0.5661x10^{-4} x_1 + 0.4437x10^{-2} x_2 - 0.9270x10^{-7} x_1^2 - 0.1806x10^{-4} x_2^2 + 0.3345x10^{-10} x_2^3 + 0.2430x10^{-7} x_1^3$$

Tempo relativo de CPU: 0.059

7. Solução utilizando-se polinômios quadráticos sem termos cruzados, amostragem central compósita e algoritmo de ajuste pelo método da decomposição do valor singular.

$$P_f = 0.9713x10^{-2} (\beta=2.337)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 35

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 44

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.1754 - 0.1712x10^{-4} x_1 + 0.1965x10^{-2} x_2 + 0.5949x10^{-18} x_1^2 - 0.4767x10^{-5} x_2^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.046

8. Solução utilizando-se redes neurais com funções de base radial e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita).

$$P_f = 0.9605 \times 10^{-2} (\beta = 2.341)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 28

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 113

Arquitetura Final atingida: (2:13:1)

Número de pontos amostrais para treinamento: 18

Tempo relativo de CPU: 0.15

9. Solução utilizando-se redes neurais percéptrons multicamada e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita e arquitetura sugerida de 2:7:1).

$$P_f = 0.9888 \times 10^{-2} (\beta = 2.331)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 26

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 109

Arquitetura Inicial Sugerida: (2:7:1)

Número de pontos amostrais para treinamento: 16

Tempo relativo de CPU: 0.257

10. Solução utilizando-se redes neurais percéptrons multicamada e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita e arquitetura sugerida de 2:12:1).

$$P_f = 0.9607 \times 10^{-2} (\beta = 2.341)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 24

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 87

Arquitetura Inicial Sugerida: (2:12:1)

Número de pontos amostrais para treinamento: 16

Tempo relativo de CPU: 0.299

11. Solução utilizando-se polinômios quadráticos sem termos cruzados com amostragem de Bucher, algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados e técnica de projeção de vetor.

$$P_f = 0.9607 \times 10^{-2} (\beta = 2.341)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 21

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 26

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.9137 - 0.3354 \times 10^{-4} x_1 + 0.1102 \times 10^{-2} x_2 + 0.7473 \times 10^{-8} x_1^2 - 0.2291 \times 10^{-5} x_2^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.010

12. Solução utilizando-se Simulação Direta Monte Carlo com variáveis antitéticas e a função de estado limite aproximada com rede neural perceptron multicada.

$$P_f = 0.9163 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.358) \quad \delta_{P_f} = 0.4651 \times 10^{-1}$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 50000

Tempo relativo de CPU: 0.55

13. Solução utilizando-se simulação Monte Carlo com amostragem por importância e variáveis antitéticas e função de estado limite real (atualização da função de amostragem a cada 150 simulações).

$$P_f = 0.9394 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.35) \quad \delta_{P_f} = 0.9965 \times 10^{-2}$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 17850

Tempo relativo de CPU: 0.44

Na Figura 7.3 é mostrado a história de simulações para estes dois últimos exemplos tanto para Monte Carlo quanto para Amostragem por Importância com função de estado limite representado por uma rede neural treinada (perceptron multicamada). Na mesma figura, é mostrado a evolução da estimativa do valor médio da probabilidade de falha e do seu coeficiente de variação.

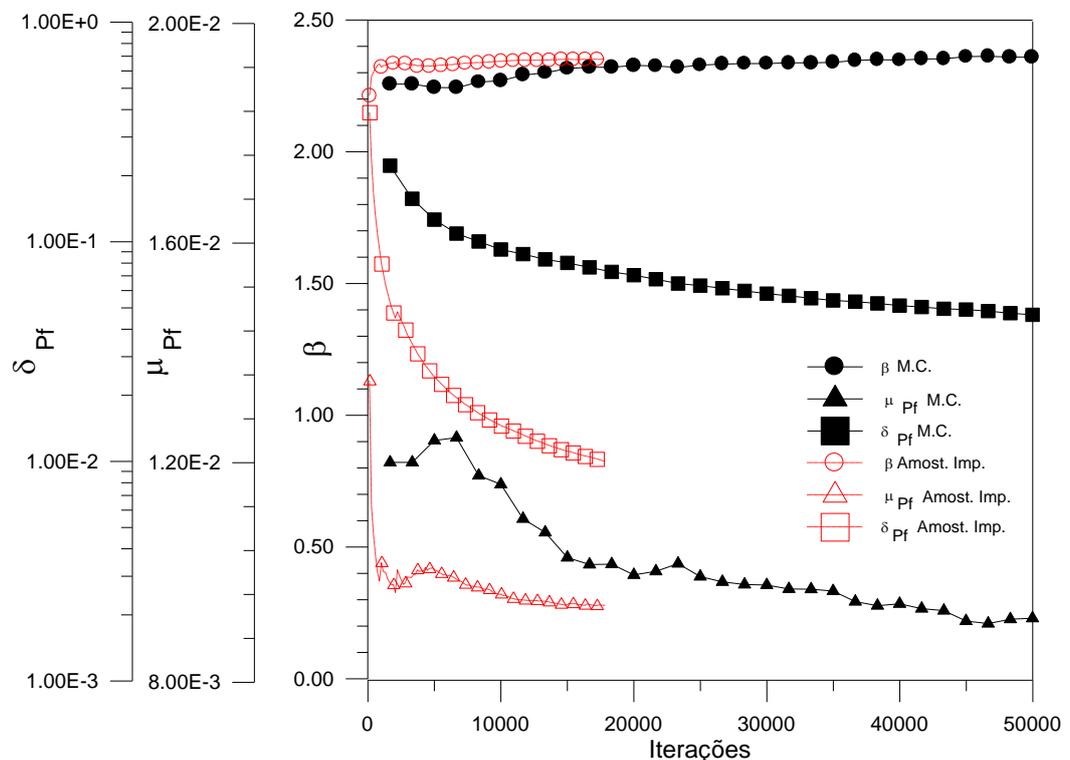


Figura 7.3 - Valor do índice de Confiabilidade  $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha  $\mu_{P_f}$  e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha  $\delta_{P_f}$ , versus número de simulações para o exemplo da

barra com carga uniaxial concentrada e função de estado limite representado por uma rede neural treinada.

Na Tabela 7.2 é indicado um resumo para os testes feitos com os diversos métodos indicando os valores do índice de confiabilidade para cada caso, o número de avaliações da FEL, bem como o tempo relativo de CPU. Na Figura 7.4 é apresentada a função de estado limite analisada bem como as aproximações feitas para o cálculo da probabilidade de falha. As aproximações na figura se referem ao último ajuste feito pelas aproximações por polinômios quadráticos sem e com termos cruzados, redes neurais percéptrons e com função de base radial. A Figura 7.5 mostra as amostras geradas no espaço Gaussiano padrão não correlacionado juntamente com a função de estado limite para diversas técnicas de amostragem empregadas neste exemplo. Para este exemplo a unidade de tempo relativo de CPU num computador Intel Celeron 433 MHz foi de aproximadamente 27 s.

Tabela 7.2 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga em balanço.

Técnicas	Índice de Confiabilidade $\beta$	Probabilidade de Falha $P_f$	Coefficiente de Variação $\delta_{P_f}$	Número de Avaliações da F.E.L.	Tempo relativo de CPU
	2.341	0.009607	?	1000	?
1	2.338	0.009690	0.03197	100000	1.000
2	2.340	0.009642	0.00996	17850	0.440
3	2.334	0.009789	-	33	0.044
4	2.337	0.009731	-	35	0.035
5	2.341	0.009601	-	44	0.033
6	2.339	0.009676	-	110	0.059
7	2.337	0.009713	-	35	0.046
8	2.341	0.009605	-	28	0.150
9	2.331	0.009888	-	16	0.257
10	2.341	0.009607	-	24	0.299
11	2.341	0.009607	-	21	0.010
12	2.358	0.009163	0.04651	50000	0.550
13	2.350	0.009394	0.00996	17850	0.440

### 7.1.1.1 Comentários

- No exemplo em questão, o método da decomposição do valor singular não apresentou melhoria significativa na precisão do ajuste polinomial, tendo levado, em alguns casos, a valores menos precisos do índice de confiabilidade final que aqueles obtidos com o método do ajuste linear por mínimos quadrados;
- O aumento do número de termos no polinômio aproximador (não necessariamente o seu grau) melhorou significativamente a precisão no valor final do índice de confiabilidade

calculado, apesar de ser necessário um maior número de chamadas à função de estado limite real (amostras de treinamento) quando comparado com o uso de polinômios sem termos cruzados;

- Apesar do tempo necessário para o cálculo de  $P_f$  ter sido superior para a formulação com redes neurais (quer seja percéptrons multicamada ou redes de base radial), estas formulações apresentaram menor número de amostras para treinamento comparando-se com as outras formulações que aplicam polinômios aproximadores. No caso das redes percéptron multicamada, a precisão alcançada é da mesma ordem de grandeza que o melhor dos resultados obtidos com polinômios quadráticos completos;
- Na Figura 7.4 pode-se perceber claramente a grande capacidade de generalização das redes neurais percéptrons multicamada, mostrando sua vocação como uma boa função aproximadora global. Também percebe-se o bom ajuste local da rede com base radial próximo ao ponto de projeto, evidenciando sua vocação como uma boa função aproximadora local, sem entretanto invalidar ou mesmo diminuir a precisão dos resultados desejados para o cálculo do índice de confiabilidade;
- Na Figura 7.5 percebe-se a menor quantidade de amostras requeridas pelas formulações por redes neurais quer seja rede percéptrons multicamada ou rede com base radial. Percebe-se inclusive que a geração e posicionamento das amostras segundo o algoritmo de Shao é bem mais racional que o utilizado na amostragem central compósita, sendo geradas amostras apenas nas proximidades na função de estado limite, o que de fato interessa em uma análise de confiabilidade;
- O melhor resultado (valor de  $\beta$  mais próximo do exato, menor número de avaliações da função aproximada e menor tempo para confecção da superfície de resposta) foi alcançado pelo algoritmo utilizando-se a amostragem de Bucher com polinômios quadráticos sem termos cruzados e a técnica de projeção de vetor;
- Neste exemplo, o uso da função de estado limite aproximada, juntamente com as técnicas de simulação de direta Monte Carlo e Amostragem por importância adaptativa não trouxeram melhorias significativas de precisão ou ganho de tempo computacional. Isto se deve talvez pelo fato da avaliação da função de estado limite ser tão simples e rápida quanto o é para as funções aproximadas (no caso Rede Neural perceptron multicamada). Entretanto para exemplos onde este custo for maior, certamente estas técnicas irão se sobressair.

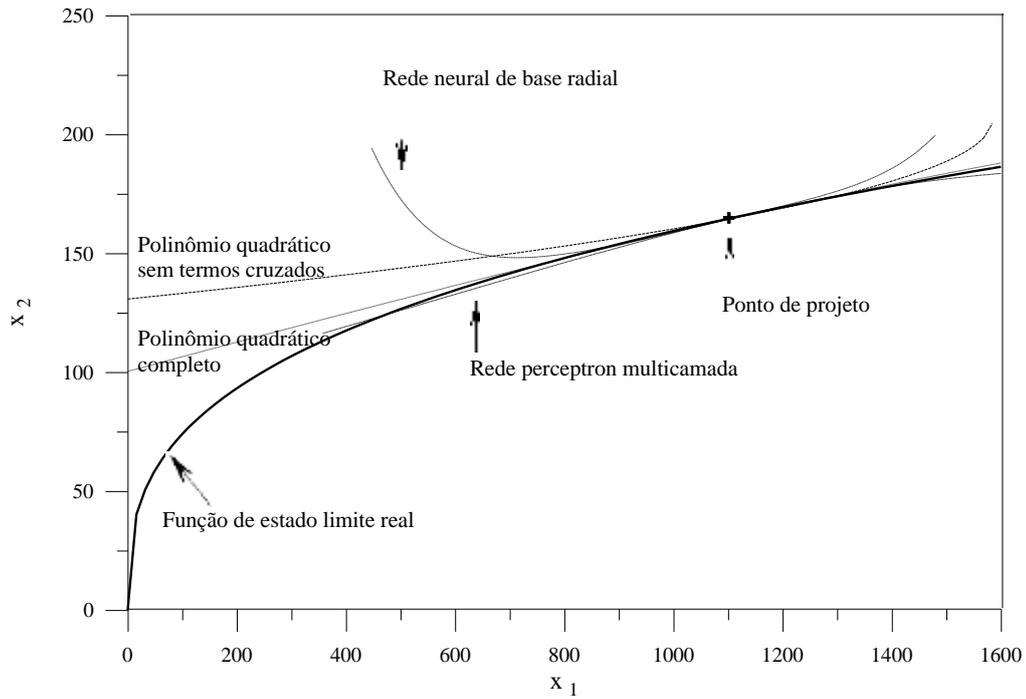


Figura 7.4 - Função de Estado limite real e diversas aproximações para o cálculo da confiabilidade (as curvas ajustadas referem-se à última aproximação utilizada para o cálculo do índice de confiabilidade).

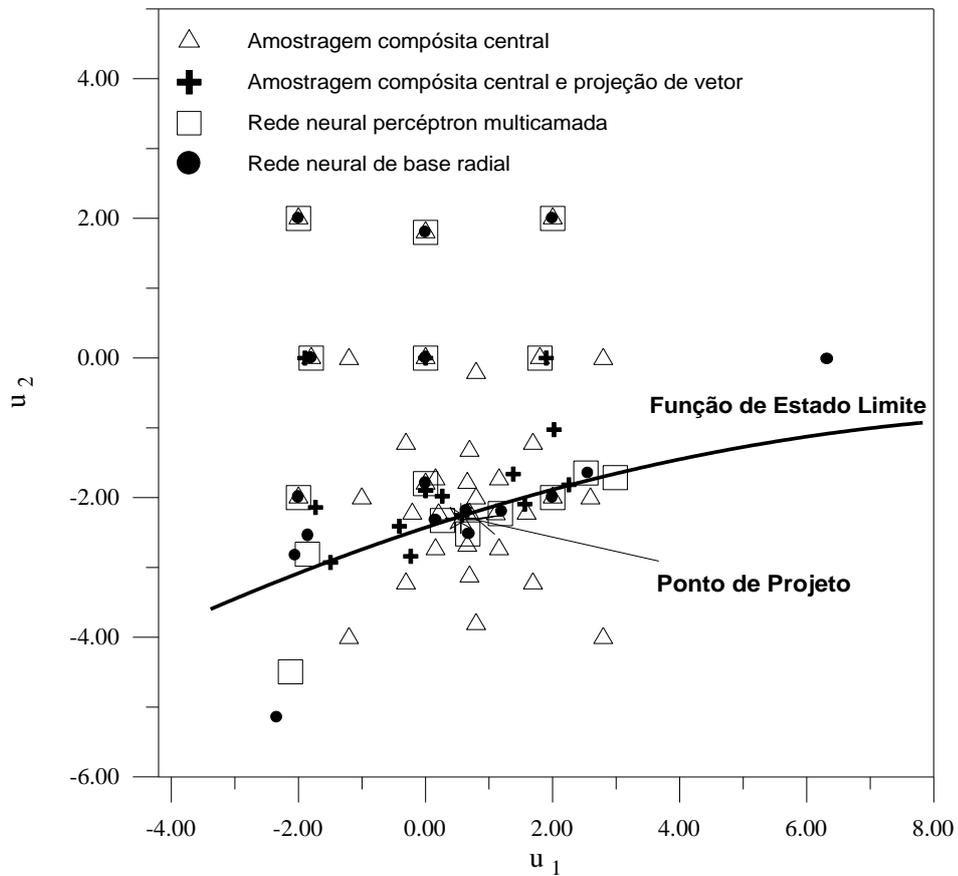


Figura 7.5 - Amostras no espaço Gaussiano padrão não correlacionado para rede com base radial, rede percéptron multicamada, amostragem compósita central sem e com a técnica de projeção de vetor.

## 7.1.2 Barra sujeita a carga concentrada uniaxial

Neste exemplo é analisada a confiabilidade de uma barra sujeita a uma carga uniaxial centrada, no regime elástico linear, quanto à função de estado limite último da ultrapassagem da capacidade de carga da seção transversal quanto à plastificação do material.

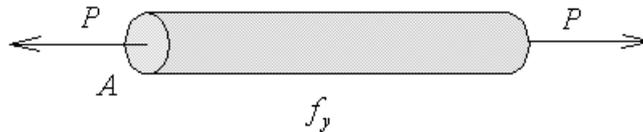


Figura 7.6 - Barra sujeita a carga uniaxial aplicada.

Para este exemplo a função de estado limite vem dada por:

$$f.e.l = A f_y - P \quad (7.3)$$

onde,  $A$  é a área da seção transversal da barra,  $f_y$  é a tensão de plastificação do material e  $P$  é a carga uniaxial aplicada. As características estatísticas destas três variáveis aleatórias básicas, admitidas como Gaussianas, são dadas na tabela a seguir:

Tabela 7.3 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para a barra e carregamento.

Variável	Denominação	Unidade	Média $\mu$	Coefficiente de Variação V
$A$	$x_1$	cm <sup>2</sup>	40.0	0.125
$f_y$	$x_2$	kgf/cm <sup>2</sup>	50.0	0.050
$P$	$x_3$	kgf	1000.0	0.200

A solução analítica exata para este problema, dada em Ang *et al.* (1984), é  $P_f = 0.1148 \times 10^{-2}$  ( $\beta = 3.049$ ).

Neste trabalho obteve-se os seguintes resultados:

1. Solução utilizando-se simulação Monte Carlo Direto com variáveis antitéticas e a função de estado limite real.

$$P_f = 0.1050 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.075) \quad \delta_{P_f} = 0.9753 \times 10^{-1}$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 100000

Tempo relativo de CPU: 1.00

2. Solução utilizando-se simulação Monte Carlo com amostragem por importância, variáveis antitéticas e função de estado limite real (atualização da função de amostragem a cada 500 simulações).

$$P_f = 0.11312 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.05) \quad \delta_{P_f} = 0.9885 \times 10^{-2}$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 14000

Tempo relativo de CPU: 0.260

Na Figura 7.7 é mostrado a história de simulações para o exemplo tanto para Monte Carlo quanto para Amostragem por Importância. Na mesma figura é mostrada a evolução da estimativa do valor médio da probabilidade de falha e do seu coeficiente de variação.

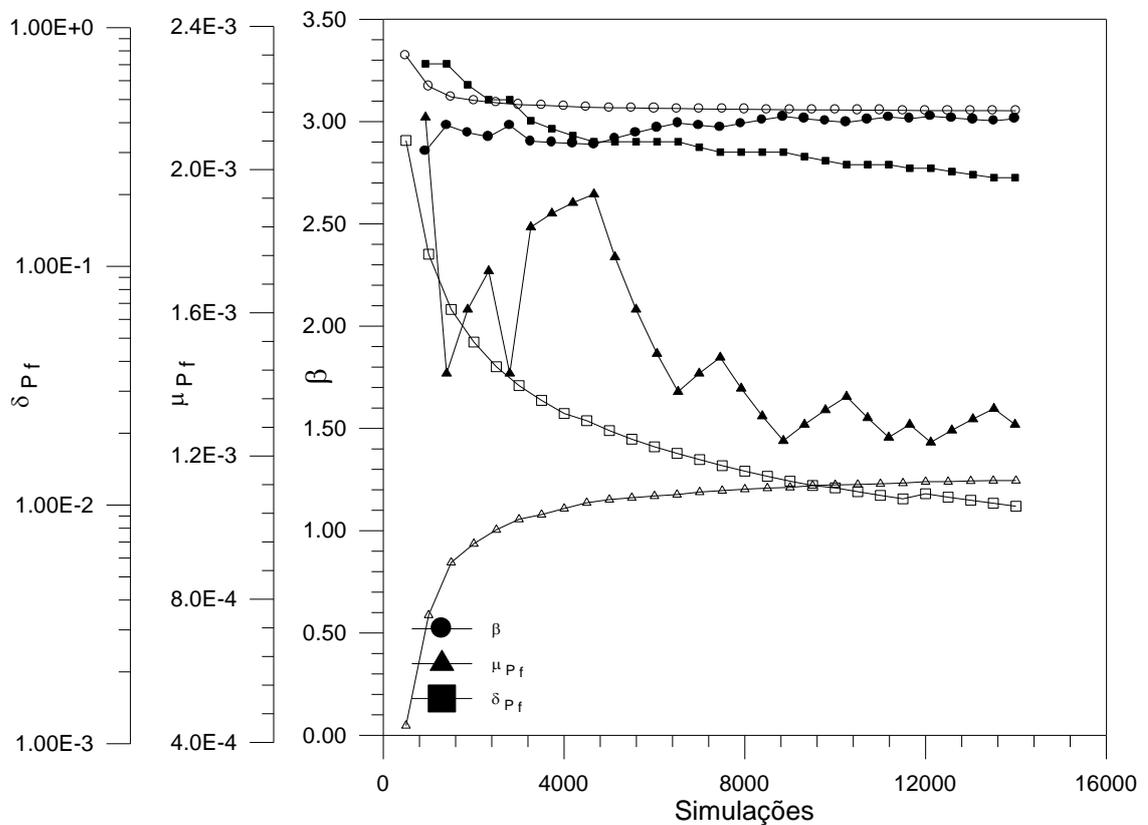


Figura 7.7 - Valor do índice de Confiabilidade  $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha  $\mu_{P_f}$  e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha  $\delta_{P_f}$ , versus número de simulações para o exemplo da barra com carga uniaxial concentrada (símbolos claros - amostragem por importância; símbolos escuros - Monte Carlo direto).

3. Solução utilizando método FORM com derivadas da função de estado limite dadas explicitamente.

$$P_f = 0.11477 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.049)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 7

Tempo relativo de CPU: 0.006

4. Solução utilizando-se polinômios quadráticos sem termos cruzados com amostragem de Bucher e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

$$P_f = 0.11478 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.049)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 36

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 24

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.1381 \times 10^4 + 0.4830 \times 10^2 x_1 + 0.2858 \times 10^2 x_2 - 0.1000 \times 10^1 x_3 + 0.1292 \times 10^{-9} x_1^2 + 0.7579 \times 10^{-9} x_2^2 + 0.7932 \times 10^{-13} x_3^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.024

5. Solução utilizando-se polinômios quadráticos completos e amostragem central compósita, algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

$$P_f = 0.11478 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.049)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 51

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 20

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.5440 \times 10^{-6} - 0.1000 \times 10^1 x_3 + 0.8053 \times 10^{-14} x_3^2 + 0.2357 \times 10^{-7} x_2 - 0.3846 \times 10^{-12} x_2 x_3 - 0.2379 \times 10^{-9} x_2^2 - 0.1581 \times 10^{-8} x_1 + 0.6636 \times 10^{-14} x_1 x_3 + 0.1000 \times 10^1 x_1 x_2 + 0.2903 \times 10^{-10} x_1^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.012

6. Solução utilizando-se polinômios cúbicos sem termos cruzados, amostragem central compósita e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

$$P_f = 0.11478 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.049)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 68

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 24

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.1381 \times 10^4 + 0.4830 \times 10^2 x_1 + 0.2858 \times 10^2 x_2 - 0.1000 \times 10^1 x_3 + 0.3505 \times 10^{-5} x_1^2 - 0.1002 \times 10^{-4} x_2^2 + 0.1046 \times 10^{-9} x_3^2 - 0.4088 \times 10^{-7} x_2^3 + 0.6917 \times 10^{-7} x_2^3 - 0.2523 \times 10^{-13} x_3^3$$

Tempo relativo de CPU: 0.019

7. Solução utilizando-se polinômios quadráticos sem termos cruzados, amostragem central compósita e algoritmo de ajuste pelo método da decomposição do valor singular.

$$P_f = 0.11478 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.049)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 68

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 24

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.1381x10^4 + 0.4830x10^2 x_1 + 0.2858x10^2 x_2 - 0.1000x10^1 x_3 - 0.5798x10^{-10} x_1^2 \\ + 0.2001x10^{-9} x_2^2 + 0.4434x10^{-12} x_3^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.024

8. Solução utilizando-se redes neurais com funções de base radial e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita).

$$P_f = 0.1147 \times 10^{-2} (\beta = 3.049)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 28

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 77

Arquitetura Final atingida: (3:9:1)

Número de pontos amostrais para treinamento: 22

Tempo relativo de CPU: 0.027

9. Solução utilizando-se redes neurais percéptrons multicamada e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita e arquitetura sugerida de 3:7:1).

$$P_f = 0.1165 \times 10^{-2} (\beta = 3.046)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 32

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 138

Número de pontos amostrais para treinamento: 24

Tempo relativo de CPU: 0.50

10. Solução utilizando-se redes neurais percéptrons multi camada e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita e arquitetura sugerida de 3:12:1).

$$P_f = 0.1141 \times 10^{-2} (\beta = 3.050)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 32

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 143

Arquitetura Inicial Sugerida: (3:12:1)

Número de pontos amostrais para treinamento: 24

Tempo relativo de CPU: 0.926

11. Solução utilizando-se polinômios quadráticos sem termos cruzados com amostragem de Bucher, algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados e técnica de projeção de vetor.

$$P_f = 0.11478 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.049)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 27

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 22

Polinômio ajustado:

$$f.e.l. = -0.1834 \times 10^4 + 0.6061 \times 10^2 x_1 + 0.4618 \times 10^2 x_2 - 0.1216 \times 10^1 x_3 - 0.2135 x_1^2 \\ - 0.1818 x_2^2 + 0.7801 \times 10^{-4} x_3^2$$

Tempo relativo de CPU: 0.006

12. Solução utilizando-se simulação Monte Carlo Direto com variáveis antitéticas e a função de estado limite aproximada por polinômio quadrático.

$$P_f = 0.1040 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.078) \quad \delta_{P_f} = 0.1386 \times 10^0$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 50000

Tempo relativo de CPU: 0.55

13. Solução utilizando-se simulação Monte Carlo com amostragem por importância, variáveis antitéticas e função de estado limite antitéticas e a função de estado limite aproximada por polinômio quadrático com atualização da função de amostragem a cada 500 simulações.

$$P_f = 0.1129 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.055) \quad \delta_{P_f} = 0.1019 \times 10^{-2}$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 15000

Tempo relativo de CPU: 0.250

Na Tabela 7.4 é indicado um resumo para os testes feitos com os diversos métodos indicando os valores do índice de confiabilidade para cada caso, o número de avaliações da FEL, bem como o tempo relativo de CPU. Na Figura 7.9 é mostrado a história de simulações para estes dois últimos exemplos tanto para Monte Carlo quanto para Amostragem por Importância com função de estado limite representado por um polinômio quadrático. Na mesma figura, é mostrado a evolução da estimativa do valor médio da probabilidade de falha e do seu coeficiente de variação. Para este exemplo a unidade de tempo relativo de CPU num computador Intel Celeron 433 MHz foi de aproximadamente 36 s.

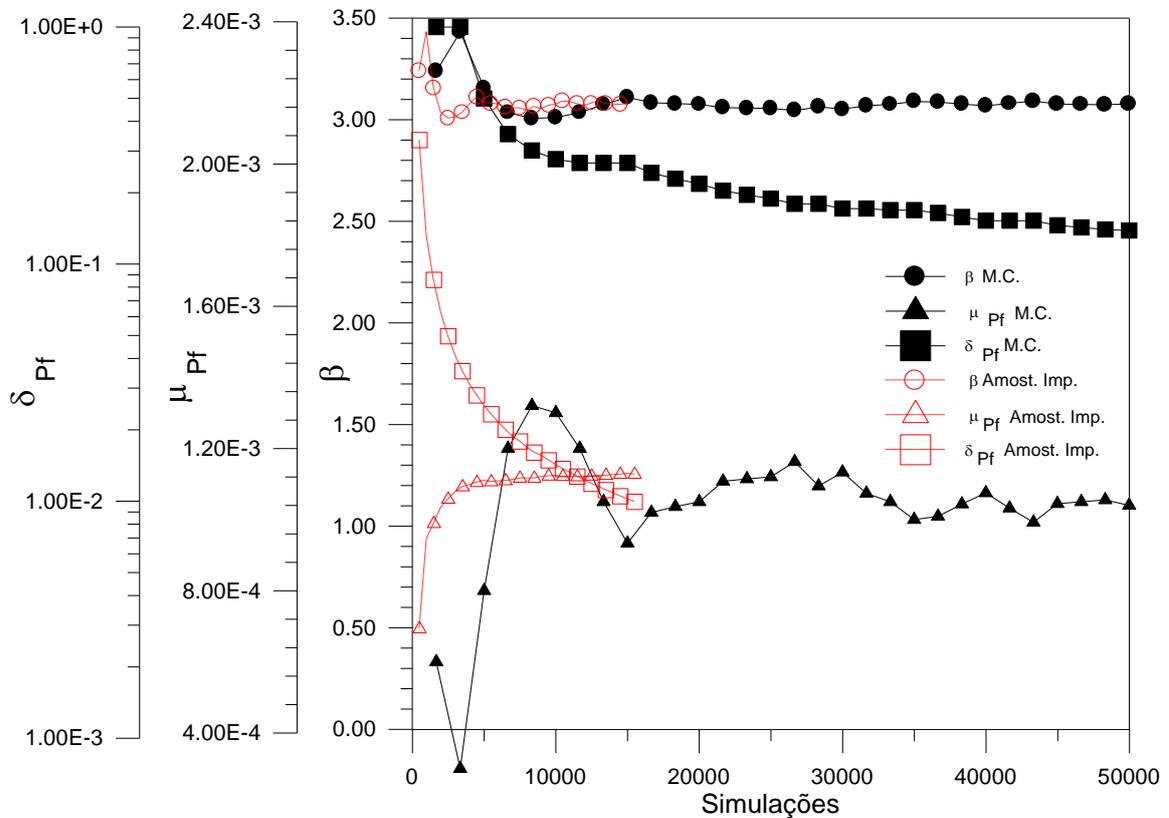


Figura 7.8 - Valor do índice de Confiabilidade  $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha  $\mu_{Pf}$  e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha  $\delta_{Pf}$ , versus número de simulações para o exemplo da barra com carga uniaxial concentrada e função de estado limite representado por um polinômio quadrático.

Tabela 7.4 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da barra sob carga axial.

Técnicas	Índice de Confiabilidade $\beta$	Probabilidade de Falha $P_f$	Coeficiente de Variação $\delta_{Pf}$	Número de Avaliações da F.E.L.	Tempo relativo de CPU
	3.049	0.001148	-	10	-
1	3.075	0.001050	0.09753	100000	1.000
2	3.050	0.001131	0.00988	14000	0.260
3	3.049	0.001147	-	7	0.006
4	3.049	0.001147	-	36	0.024
5	3.049	0.001147	-	51	0.012
6	3.049	0.001147	-	68	0.019
7	3.049	0.001147	-	68	0.024
8	3.049	0.001147	-	28	0.027
9	3.046	0.001165	-	32	0.500
10	3.050	0.001141	-	32	0.926
11	3.049	0.001147	-	27	0.006
12	3.078	0.001040	0.13860	50000	0.550

13	3.055	0.001129	0.00102	15000	0.250
----	-------	----------	---------	-------	-------

### 7.1.2.1 Comentários

- Assim como no caso do exemplo anterior, o uso do método da decomposição do valor singular para o ajuste polinomial também não trouxe vantagens significativas para a melhoria do ajuste, fornecendo inclusive, para polinômio de mesmo grau, valores dos coeficientes de ajuste bastante próximos;
- Praticamente todos os modelos empregados forneceram precisão e desempenho equivalentes, salvo os modelos que empregaram redes neurais artificiais como função aproximadora da função de estado limite, as quais tiveram seus tempos bastante aumentados (cerca do dobro do tempo levado pelos modelos de ajuste polinomial). Entretanto este fato não invalida o uso das redes neurais artificiais como função aproximadora, uma vez que neste caso o número de amostras necessárias para treinamento e avaliação são inferiores àqueles empregados no ajuste polinomial linear, indicando que deve haver uma relação custo-benefício para estes modelos no que se refere ao tempo necessário para avaliar o índice de confiabilidade e o número de amostras necessárias para o correto treinamento;
- O melhor resultado (valor de  $\beta$  mais próximo do exato, menor número de avaliações da função aproximada e menor tempo para treinamento da superfície de resposta) foi alcançado pela técnica FORM, apesar do exemplo que utiliza a amostragem de Bucher com polinômios quadráticos sem termos cruzados e a técnica de projeção de vetor ter apresentado o mesmo tempo relativo de CPU e precisão, embora com um maior número de chamadas à função de estado limite real.
- Neste exemplo, o uso da função de estado limite aproximada, juntamente com as técnicas de simulação de direta Monte Carlo e Amostragem por importância adaptativa não trouxeram melhorias significativas de precisão ou ganho de tempo computacional. isto se deve talvez pelo fato da avaliação da função de estado limite ser tão simples e rápida quanto o é para as funções aproximadas (no caso Superfície de Resposta). Entretanto para exemplos onde este custo for maior, certamente estas técnicas irão se sobressair.

### 7.1.3 Barra sujeita a carga concentrada uniaxial com correlação entre variáveis

Neste exemplo analisa-se o problema anterior (ver Figura 7.6), impondo-se uma correlação entre duas das variáveis aleatórias. Como os polinômios e redes são treinados sem considerar a correlação entre as variáveis, este exemplo visa avaliar a precisão alcançada com estas aproximações quando se impõe correlações entre variáveis.

As características estatísticas das variáveis aleatórias são as mesmas do exemplo anterior, como dadas na Tabela 7.3. A função de estado limite permanece sendo a capacidade de carga da seção transversal da barra quanto à plastificação do material (ver equação (7.3)). Admiti-se que há uma correlação positiva entre a área da seção transversal e a tensão de plastificação do material, e que não há nenhuma correlação entre a carga aplicada e as outras duas variáveis aleatórias. O valor desta correlação foi feita variar a fim de se poder avaliar a precisão alcançada com a técnica da superfície de resposta e redes neurais artificiais.

Na Figura 7.9 é mostrada a variação do índice de confiabilidade e probabilidade de falha, com respeito à variação do coeficiente de correlação linear entre as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ . Na mesma Figura, os métodos FORM, Superfície de Resposta, Redes Neurais Artificiais (percéptrons multicamada) e o Método de Simulação Direta Monte Carlo são comparados. As aproximações correspondem aos melhores resultados alcançados no item anterior. Não incluiu-se na Figura a aproximação por Rede Neural com Função de Base Radial pois os resultados foram praticamente idênticos ao da aproximação com Rede Neural com percéptrons multicamada. Para as análises através de Simulação Direta Monte Carlo, 500000 simulações foram tomadas alcançando-se em todos os casos, coeficientes de variação não superiores a 4%. O custo computacional para a avaliação do índice de confiabilidade para cada valor do coeficiente de correlação no gráfico utilizando-se Monte Carlo foi de aproximadamente 100 vezes o custo de avaliação através de FORM, Superfície de Resposta ou Rede Neural Artificial.

Na Figura 7.10 é apresentado uma comparação para a medida de sensibilidade  $\partial\beta/\partial\mathbf{Z}$  (em última instância valor do ponto de projeto  $\mathbf{Z}^*$ ), entre os métodos FORM, Superfície de Resposta e Rede Neural (percéptron multicamada). A perfeita correlação entre os gráficos indicam a boa aproximação para o caso em que há correlação entre as variáveis. Uma vez que no treinamento através da Superfície de Resposta ou Rede Neural Artificial, nenhuma consideração é necessária a respeito da correlação entre as variáveis, o uso destas técnicas se

mostra vantajoso em análises paramétricas para o coeficiente de correlação. Desta forma uma vez treinado o polinômio ou Rede Neural, a inclusão da correlação e a posterior avaliação do índice de confiabilidade é imediata.

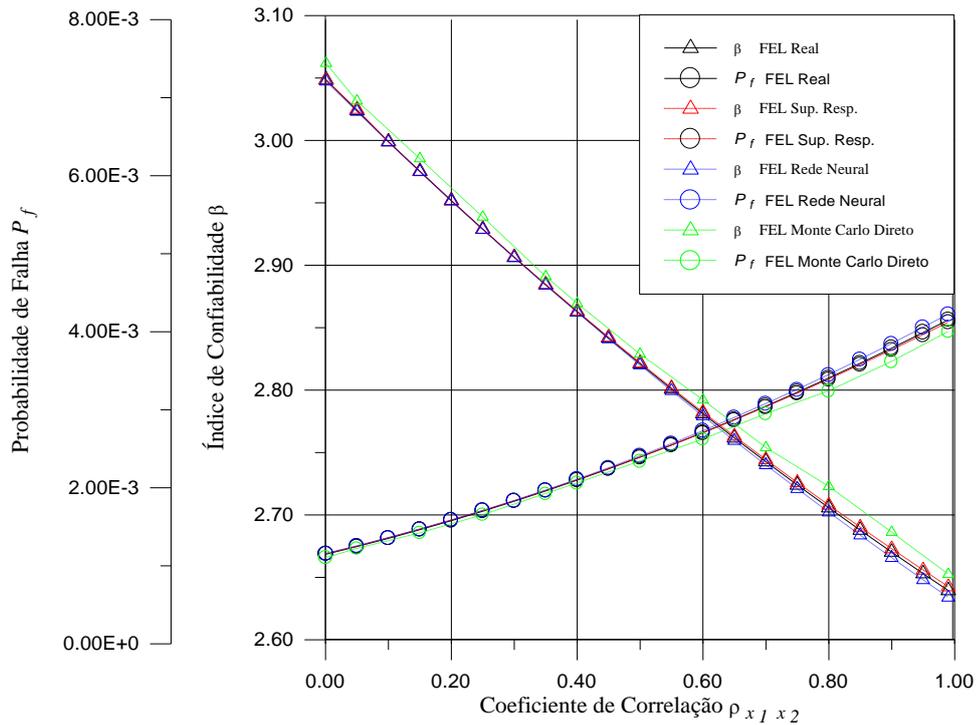


Figura 7.9 – Índice de Confiabilidade  $\beta$  e Probabilidade de falha  $P_f$  versus coeficiente de correlação entre as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

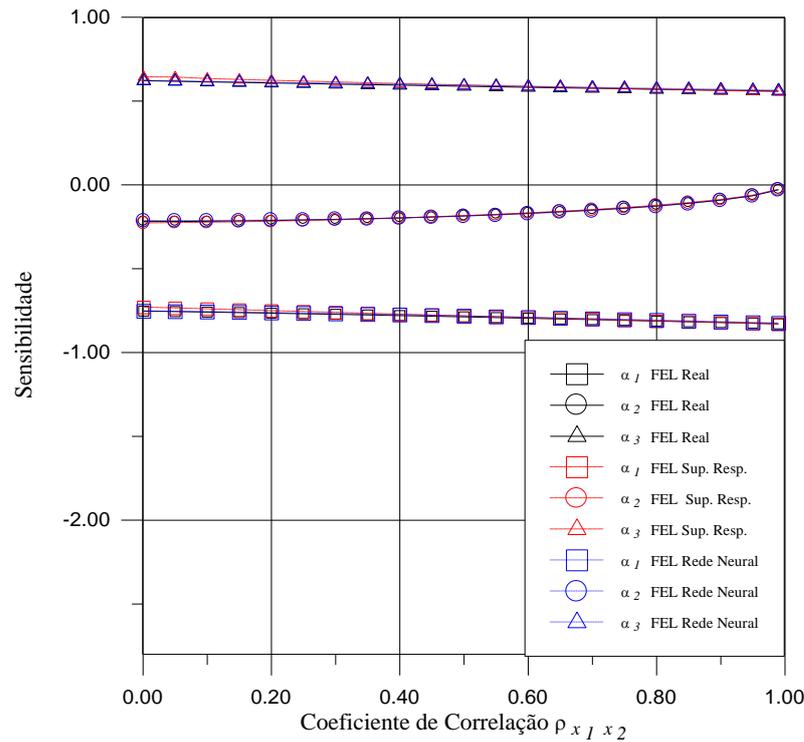


Figura 7.10 – Medida de Sensibilidade  $\partial\beta/\partial\mathbf{Z}$  versus coeficiente de correlação entre as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

## 7.2 Exemplos com funções de estado limite implícitas

### 7.2.1 Viga bi-engastada com campos estocásticos de rigidez e carga

Neste exemplo analisa-se a confiabilidade de uma viga bi-engastada, de dimensão 9.75 m (32 ft), sujeita a um carregamento linear. A função de estado limite de utilização da ultrapassagem da flecha máxima no vão central de um limite preestabelecido de 1.52 cm (0.6 in) (Liu *et al*, (1988)) é empregada. São assumidos como variáveis aleatórias básicas a rigidez da viga ( $EI$ ) e o valor da carga distribuída ( $W$ ). Assume-se também que ambas variáveis são representadas por um campo estocástico unidimensional ao longo do comprimento da viga. O tipo de correlação adotado para cada um destes campos foi do tipo exponencial como descrito pelas equações abaixo:

$$\rho_{EI,EI}(\Delta x) \exp\left(-\frac{|\Delta x|}{a_{EI} L}\right) \quad (7.4)$$

e

$$\rho_{w,w}(\Delta x) \exp\left(-\frac{|\Delta x|}{a_w L}\right) \quad (7.5)$$

onde  $\rho$  significa a matriz de coeficientes de correlação entre as variáveis,  $\Delta x$  é a distância entre dois pontos,  $L$  é o vão da viga, com valor igual a 9.75 m (32 ft) e  $a_{EI}$  e  $a_w$  são os parâmetros de correlação adimensionais os quais multiplicados pelo comprimento total da viga nos fornecem os comprimentos de correlação  $d_{EI}$  e  $d_w$  referentes à rigidez e ao carregamento respectivamente.

Não há correlação alguma entre o campo das cargas e o campo da rigidez. Vários comprimentos de correlação são adotados e os respectivos índices de confiabilidade são calculados. O problema foi discretizado utilizando-se elementos finitos tridimensionais de 20 nós, num total de 64 elementos (32 ao longo do comprimento e duas camadas de elementos na altura). O campo é discretizado ao longo da linha neutra para a rigidez e igualmente espaçado de 30.48 cm (1 ft). Para o carregamento na face superior da viga, é igualmente espaçado também de 30.48 cm (1 ft). No total tem-se 64 variáveis aleatórias.

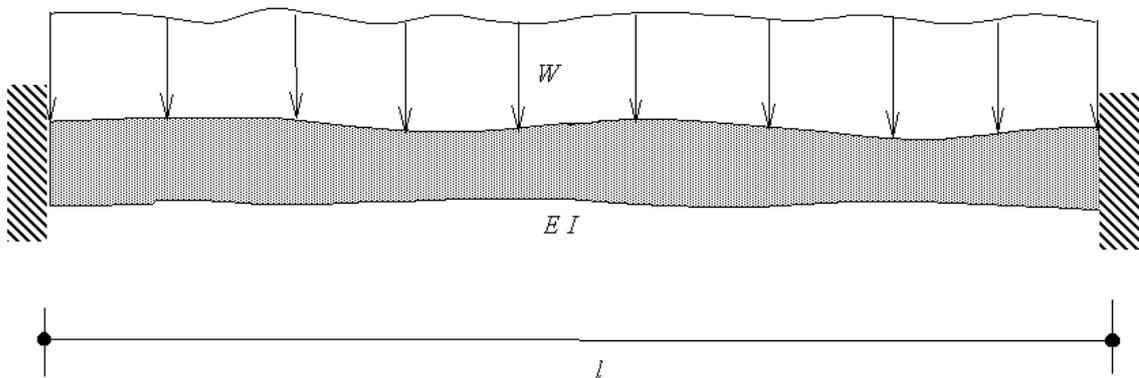


Figura 7.11 - Viga bi-engastada de rigidez aleatória, sujeita a um carregamento linear aleatório ao longo do seu vão.

As características das duas variáveis aleatórias presentes no problema, admitidas como Gaussianas, são indicadas na tabela abaixo:

Tabela 7.5 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para viga bi-engastada e carregamento.

Variável	Denominação	Unidade	Média $\mu$	Coefficiente de Variação $V$
$EI$	$x_1$	Nm <sup>2</sup> (kips ft <sup>2</sup> )	$4.649 \times 10^8$ ( $1.125 \times 10^6$ )	0.20
$W$	$x_2$	N/m (kips/ft)	$1.168 \times 10^5$ (8.0)	0.30

A solução para este problema, indicada em Liu e Kiureghian(1988) utilizando FORM, é dada através de gráficos onde se relacionam o comprimento de correlação de cada um dos campos (rigidez e carga) com o índice de confiabilidade. Neste mesmo trabalho é feito um estudo sobre a dimensão do campo estocástico com respeito ao comprimento de correlação do mesmo e a utilização de dois métodos para discretização do campo (método do ponto médio e método da média espacial). A conclusão a que se chega é a de que o tamanho da malha utilizada na discretização do campo deve ser de um quarto até a metade do comprimento de correlação do campo. Neste exemplo utilizou-se a técnica do ponto médio para discretização dos campos e como não se analisou campos com comprimento de correlação inferiores a 1.22 m (4 ft), a mesma malha de elementos finitos pôde ser utilizada como malha de discretização dos superelementos do campo. Para o caso de comprimentos de correlação bastante elevados, da ordem do vão da viga ( $>9.75$  m - 32ft), ainda assim utilizou-se a mesma malha uma vez que a decomposição da matriz de coeficientes de correlação pôde ser feita através da representação espectral sem maiores problemas numéricos. Para este caso, no trabalho de Liu e Kiureghian (1988) contornou-se o problema decomposição utilizando-se uma malha menos refinada para o campo (malha uniforme de 16 elementos com 61 cm - 2 ft de comprimento), uma vez que se trabalhava com a decomposição Cholesky e para campos com comprimentos de correlação de superiores a 9.75 m (32 ft) houve problemas numéricos com a decomposição da matriz de coeficientes de correlação.

Para comparação entre os algoritmos aqui propostos tomamos como base o valor do índice de confiabilidade avaliado para  $d_{EI}=32$  ft e  $d_W=\infty$ , cujo valor dado em Liu e Kiureghian (1988) é de  $\beta=3.05$ .

1. Solução utilizando-se FORM com as derivadas da função de estado limite calculadas através de diferenças finitas à frente.

Número de chamadas à função de estado limite real = 910

Índice de Confiabilidade para  $d_{EI}=32.0$  ft e  $d_W=\infty$   $\beta=3.05$

Tempo relativo de CPU requerido: 0.86

2. Solução utilizando-se polinômio linear com amostragem de Bucher, técnica de projeção de vetor e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

Número de chamadas à função de estado limite real para treinamento = 655

Número de chamadas à função de estado limite ajustada para treinamento = 296

Número de amostras geradas para treinamento = 645

Índice de Confiabilidade para  $d_{EI}=32.0$  ft e  $d_W=\infty$   $\beta=3.32$

Tempo relativo de CPU requerido para treinamento: 0.37

3. Solução utilizando-se polinômio quadráticos sem termos cruzados com amostragem de Bucher, técnica de projeção de vetor e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados.

Número de chamadas à função de estado limite real para treinamento = 655

Número de chamadas à função de estado limite ajustada para treinamento = 296

Número de amostras geradas para treinamento = 645

Índice de Confiabilidade para  $d_{EI}=32.0$  ft e  $d_W=\infty$   $\beta=3.01$

Tempo relativo de CPU requerido para treinamento: 1.00

4. Solução utilizando-se rede neural de base radial com amostragem de Bucher, técnica de projeção de vetor e algoritmo de treinamento para redes neurais.

Número de chamadas à função de estado limite real para treinamento = 655

Número de chamadas à função de estado limite ajustada para treinamento = 143

Número de amostras geradas para treinamento = 645

Índice de Confiabilidade para  $d_{EI}=32.0$  ft e  $d_W=\infty$   $\beta=3.04$

Tempo relativo de CPU requerido para treinamento: 0.44

Na Tabela 7.6 é indicado um resumo para os testes feitos com os diversos métodos indicando os valores do índice de confiabilidade para cada caso, o número de avaliações da FEL, bem como o tempo relativo de CPU. Na Figura 7.12 é indicado a sensibilidade do índice de confiabilidade quanto as variáveis aleatórias (Gaussianas padrão) rigidez e carga ao longo do vão para o método FORM.

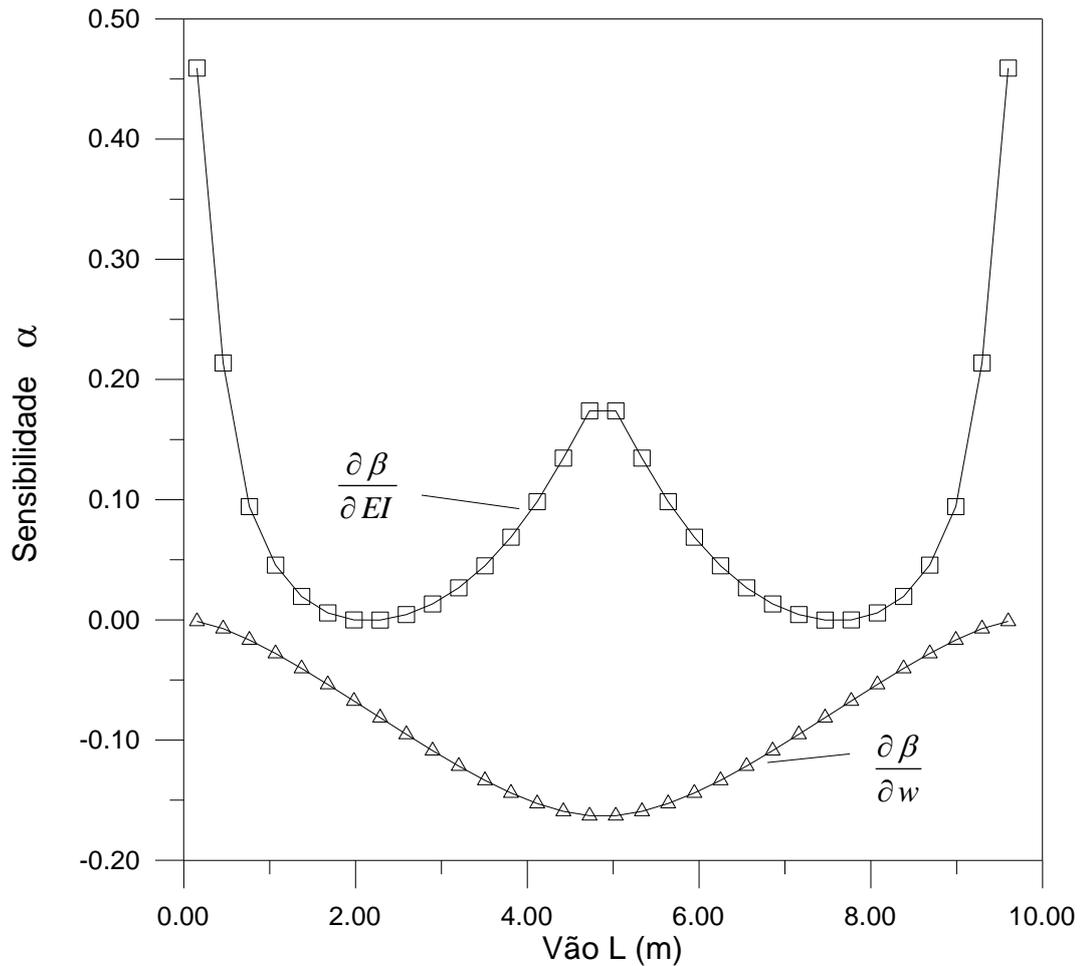


Figura 7.12 - Sensibilidade do índice de confiabilidade com respeito às variáveis aleatórias Gaussianas padrão ao longo do vão.

A influência do comprimento de correlação (fator de correlação) para a rigidez e para o carregamento, no índice de confiabilidade é apresentado na Figura 7.13. Nesta mesma figura são colocados os gráficos dos resultados obtidos por Liu de Kiureghian (1988) utilizando-se o método FORM. A proximidade de ambos os gráficos indicam a boa avaliação por parte da Rede Neural com Função de Base Radial.

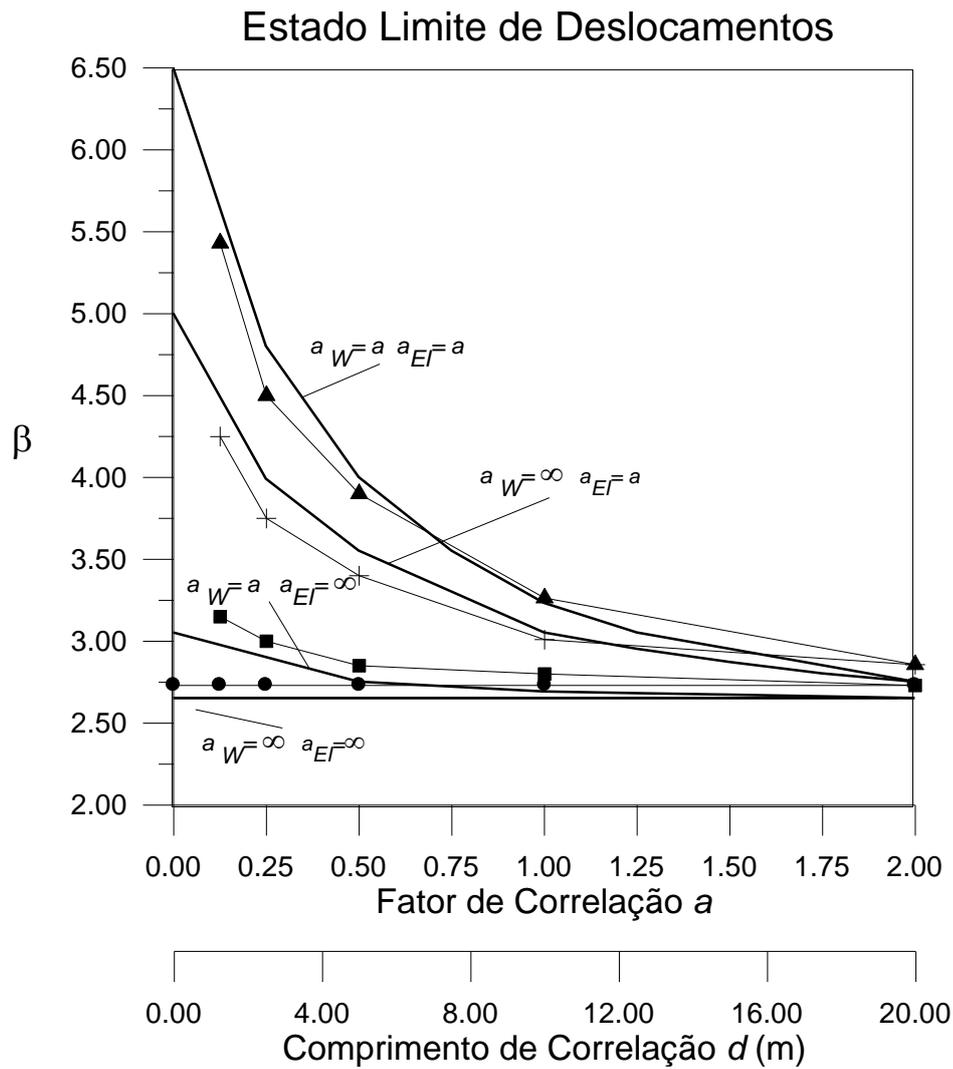


Figura 7.13 - Influência do comprimento de correlação no índice de confiabilidade: comparações entre os resultados obtidos por Kiureghian *et al* (1988) (curvas com símbolos) e os resultados obtidos utilizando-se uma rede de base radial (curvas sem símbolos).

Tabela 7.6 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga biengastada.

Técnicas	Índice de Confiabilidade $\beta$	Probabilidade de Falha $P_f$	Número de Avaliações da F.E.L.	Tempo relativo de CPU
	3.05	0.001144	?	?
1	3.05	0.001144	910	0.86
2	3.32	0.000450	655	0.37
3	3.01	0.001306	655	1.00
4	3.04	0.001182	143	0.44

### 7.2.1.1 Comentários

- O índice de confiabilidade para a função de estado limite da flecha máxima no meio do vão é mais sensível à rigidez no meio do vão da viga ( $\alpha=0.18$ ) e em seus dois extremos ( $\alpha=0.45$ ) que em cada um dos quartos de vão ( $\alpha \approx 0.0$ ) (Figura 7.12);

- Para a carga aleatória, o índice de confiabilidade é mais sensível para regiões próximas ao meio do vão ( $\alpha=-0.16$ ) (ver Figura 7.12);
- Para este caso, maior importância deve ser dada à rigidez, pois esta propriedade material tem um maior peso na composição do valor do índice de confiabilidade (a rigidez da viga possui maior índice de sensibilidade, em módulo, que a carga linear);
- De acordo com a Figura 7.13, o índice de confiabilidade aumenta quando as flutuações aleatórias tornam-se mais localizadas tanto nas propriedades do material (rigidez) quanto nas cargas, ou seja, o comprimento de correlação torna-se menor. O mesmo índice de confiabilidade tende a se estabilizar para comprimentos de correlação da ordem do dobro do vão da viga independentemente se haja correlação em um campo ou não, convergindo para o valor do caso em que os campos podem ser substituídos por variáveis aleatórias únicas;
- O comprimento de correlação para as flutuações da rigidez tem um maior impacto nas flechas da viga que as cargas. As maiores variações do valor do índice de confiabilidade são observadas quando o comprimento de correlação torna-se menor que a metade do vão da viga, isto tanto para a rigidez quanto para as cargas;
- Resultados para este caso levam a crer que para materiais não homogêneos, com comprimento de correlação inferiores ao comprimento do vão da viga, uma análise de confiabilidade sem campos estocásticos levaria a valores do índice de confiabilidade abaixo dos valores realmente esperados, estando-se portanto, por uma lado, fazendo-se uma estimativa conservativa e talvez, por outro, um dimensionamento pouco econômico;
- Para a confecção do gráfico da Figura 7.13, utilizando-se a rede treinada com função de base radial, cada combinação de comprimento de correlação para cargas e rigidez correspondentes aos gráficos de Kiureghian *et al*, gastou-se um tempo relativo de CPU de aproximadamente  $6 \times 10^{-4}$ . Como foram 23 combinações, totaliza-se um tempo relativo de  $1.4 \times 10^{-2}$  para a confecção de todo o gráfico (desconsiderando o tempo relativo de 0.44 gastos no treinamento da rede. Uma única análise via FORM de uma das combinações de comprimento de correlação para carga e rigidez, consome aproximadamente um tempo relativo de CPU de 0.86, portanto para o todo o gráfico seria necessário um tempo relativo de 19.79. Neste problema, a unidade de tempo relativo de CPU é de aproximadamente 51 min em um computador Intel Celeron 433 MHz.

## 7.2.2 Corpo de prova de concreto com campo estocástico da resistência à compressão

Neste exemplo analisar-se-á a confiabilidade de um corpo de prova paralelepípedo de concreto de dimensões 15cm x 15cm x 30cm quanto à probabilidade de que sua carga limite de ruína seja inferior a 70% de seu valor médio esperado (aqui a carga limite é igual à resistência média do corpo multiplicada por sua seção transversal). Neste exemplo se tomará como variável aleatória apenas o parâmetro resistência à compressão simples do concreto, a qual será representado por um campo estocástico Gaussiano no interior do corpo de prova, como esquematizado na figura abaixo:

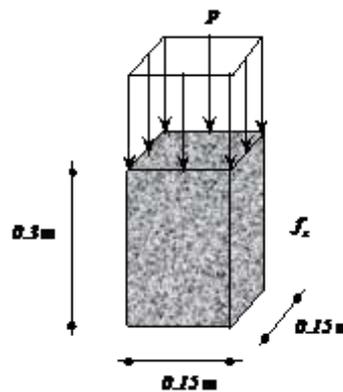


Figura 7.14 - Corpo de prova paralelepípedo de concreto com carregamento determinístico ( $P$ ) e campo estocástico da resistência à compressão  $f_c$ .

Tabela 7.7 - Características estatísticas das variáveis aleatórias.

Variável	Denominação	Unidade	Média $\mu$	Coefficiente de Variação $V$
$f_c$	$X$	MPa	21.3	0.10
$P$	-	MN	0.479	-

As demais propriedades dependentes da resistência à compressão são assumidas totalmente correlacionadas e avaliadas através de relações determinísticas. Como parâmetro para comparações, a solução para este problema com comprimento de correlação infinito, ou seja, um campo totalmente correlacionado, será tomada como base. Neste caso, o problema se resume a uma variável aleatória apenas e a probabilidade de que a carga limite seja inferior a 70% do valor médio se resume a:

$$Prob(P_u < 0.7P_m) = Prob(f_c < 0.7f_{cm}) = F_x(0.7f_{cm}) = 1.35 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.0) \quad (7.6)$$

onde  $F_x$  é a função de distribuição acumulada de  $f_c$ . Foi utilizado um único elemento finito de 20 nós. O campo estocástico foi representado nos pontos de integração deste mesmo corpo de prova. Utilizou-se regras de integração de  $2 \times 2 \times 2$ ,  $3 \times 2 \times 2$ ,  $3 \times 3 \times 2$ ,  $3 \times 3 \times 3$ , gerando campos com 8, 12, 18 e 27 valores. A correlação utilizado foi do tipo exponencial. A seguir são apresentados os resultados para o cálculo da confiabilidade utilizando FORM, Superfície de Resposta e Rede Neural.

1. Solução utilizando FORM e a função de estado limite real ( $2 \times 2 \times 2$ )

$$d=0 \quad P_f = 0.1251 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.662)$$

$$p/ d=\infty \quad P_f = 0.1451 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.978)$$

Tempo relativo de CPU: 0.11

- Solução utilizando FORM e função de estado limite real ( $3 \times 2 \times 2$ )

$$d=0 \quad P_f = 0.2486 \times 10^{-9} \quad (\beta = 6.22)$$

$$d=\infty \quad P_f = 0.1345 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.001)$$

Tempo relativo de CPU: 0.17

- Solução utilizando FORM e função de estado limite real ( $3 \times 3 \times 2$ )

$$d=0 \quad P_f = 0.5231 \times 10^{-11} \quad (\beta = 6.80)$$

$$d=\infty \quad P_f = 0.1345 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.001)$$

Tempo relativo de CPU: 0.30

- Solução utilizando FORM e função de estado limite real ( $3 \times 3 \times 3$ )

$$d=0 \quad P_f < 0.1 \times 10^{-13} \quad (\beta = 7.72)$$

$$d=\infty \quad P_f = 0.1345 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.001)$$

Tempo relativo de CPU: 1.0

2. Solução utilizando-se polinômios simples com amostragem de Bucher e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados e método de projeção de vetor ( $2 \times 2 \times 2$ ).

$$d=0 \quad P_f = 0.13891 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.635)$$

$$d=\infty \quad P_f = 0.4500 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.612)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 68

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 130

Tempo relativo de CPU: 0.06

3. Solução utilizando-se polinômios quadráticos sem termos cruzados com amostragem de Bucher e algoritmo de ajuste linear por mínimos quadrados e método da projeção de vetor (2x2x2).

$$d=0 \quad P_f = 0.1238 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.664)$$

$$d=\infty \quad P_f = 0.1498 \times 10^{-2} \quad (\beta = 2.968)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 95

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 198

Tempo relativo de CPU: 0.06

4. Solução utilizando-se redes neurais perceptron multicamada e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita).

$$d=0 \quad P_f = 0.1109 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.693)$$

$$d=\infty \quad P_f = 0.1325 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.005)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 133

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 148

Arquitetura sugerida: (8:17:1)

Número de pontos amostrais para treinamento: 102

Tempo relativo de CPU: 0.1

5. Solução utilizando-se redes neurais com funções de base radial e algoritmo de Shao (iniciando-se com algoritmo de amostragem central compósita).

$$d=0 \quad P_f = 0.1918 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.551)$$

$$d=\infty \quad P_f = 0.1327 \times 10^{-2} \quad (\beta = 3.005)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 84

Número de chamadas à função de estado limite ajustada = 602

Arquitetura Final atingida: (8:50:1)

Número de pontos amostrais para treinamento: 72

Tempo relativo de CPU: 0.09

Na Figura 7.16 são mostradas curvas entre o comprimento de correlação e o índice de confiabilidade (probabilidade de falha) para o exemplo do corpo de prova de concreto com campo da resistência à compressão discretizado sobre os pontos de integração e regra de integração de 2x2x2. Na Tabela 7.8 é indicado um resumo para os testes feitos com os diversos

métodos indicando os valores do índice de confiabilidade para cada caso, o número de avaliações da FEL, bem como o tempo relativo de CPU.

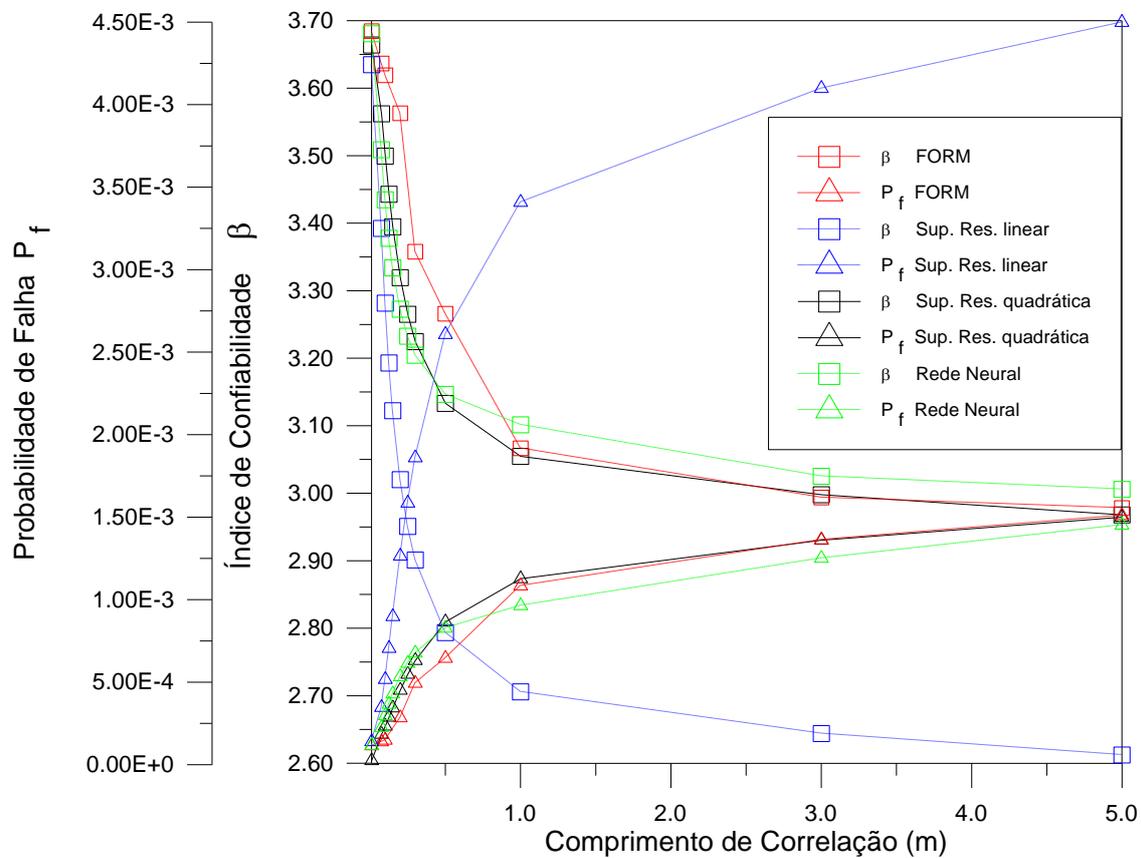


Figura 7.15 - Curvas de comprimento de correlação *versus* índice de confiabilidade e probabilidade de falha entre diversas técnicas para exemplo do corpo de prova com campo discretizado nos pontos de integração (2x2x2).

Tabela 7.8 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo do corpo de prova de concreto.

Técnicas	Índice de Confiabilidade $\beta$ p/ d=0	Probabilidade de Falha $P_f$ p/ d=0	Índice de Confiabilidade $\beta$ p/ d= $\infty$	Probabilidade de Falha $P_f$ p/ d= $\infty$	Número de Avaliações da F.E.L.	Tempo relativo de CPU
			3.00	0.001350	-	-
1	3.662	0.0001251	2.978	0.001450	84	0.11
2	3.635	0.0001389	2.612	0.004500	68	0.06
3	3.664	0.0001241	2.968	0.001498	95	0.06
4	3.693	0.0001108	3.005	0.001328	133	0.10
5	3.551	0.0001918	3.005	0.001328	84	0.09

### 7.2.2.1 Comentários

Os seguintes comentários podem ser feitos a respeito deste exemplo:

- Excetuando-se os métodos baseados em simulação (simulação Direta Monte Carlo e Simulação com Amostragem por Importância), os quais, neste exemplo, não foram usados

devido ao seu alto custo computacional, todas as outras técnicas aqui estudadas (FORM, Superfície de Resposta e Rede Neural) obtiveram desempenho bastante próximos, inclusive com igual nível de precisão no caso do campo estar totalmente não correlacionado ( $d=0$ );

- A discretização do campo no interior do corpo de prova em um crescente número de pontos de integração, considerando-se o campo não correlacionado ( $d=0$ ), forneceu valores crescentes do índice de confiabilidade, não obstante o valor para este índice com a correlação total do campo ( $d=\infty$ ) convergiu para o valor teórico esperado de  $\beta = 3.00$ . Isto era esperado uma vez que sendo o corpo de prova um sistema complexo, quanto mais variáveis aleatórias são consideradas, menores são as chances de que a resistência à compressão em uma certa região contígua seja baixa, impedindo que a carga última seja afetada. Isto será mais pronunciado quanto maior for a dispersão (desvio padrão) da propriedade;
- O comentário anterior fornece uma luz sobre o que se deve investigar mais pormenorizadamente. Como para corpos reais o índice de confiabilidade não deve ser exageradamente elevado, como levam a crer os resultados aqui indicados, haverá uma certo comprimento de correlação para o campo que melhor representará o comportamento deste sistema. Portanto o índice de confiabilidade frente a certa função de estado limite pode fornecer um indicativo do valor para o comprimento de correlação do campo;
- A aproximação por superfície de resposta usando polinômios simples apesar de ter levado a uma boa aproximação para o caso do campo sem correlação ( $d=0$ ), como indica a Figura 7.15, apresentou uma deterioração inaceitável nos resultados para comprimentos de correlação crescentes;
- Neste problema, a unidade de tempo relativo de CPU é de aproximadamente 18 min em um computador Intel Celeron 433 MHz.

### **7.2.3 Viga simplesmente apoiada de C.A. sujeita a carga uniforme ao longo do vão com um campo estocástico bidimensional do módulo de elasticidade.**

Neste exemplo será analisada a confiabilidade de uma viga simplesmente apoiada de concreto armado ( $f_c=21.14$  MPa,  $f_t=1.67$  MPa,  $G_f=0.506 \times 10^{-4}$  MN/m,  $E_c=227565$  MPa) sujeita a um carregamento determinístico uniforme ao longo de seu vão de  $(Q+G)=3.04$  KN/m. A viga foi discretizada até a metade de seu vão com 10 elementos de 20 nós (cinco no compri-

mento e dois na altura) e também completamente com 20 elementos (dez no comprimento e dois na altura).

Foi especificado para esta viga um campo estocástico bidimensional para seu módulo de elasticidade, representado no centróide de cada elemento utilizado na discretização da viga. A função de estado limite é a ultrapassagem de um valor máximo admitido para a flecha no vão central de  $\delta < 1.219 \times 10^{-2}$  m. Um esquema da viga analisada é mostrada na Figura 7.16.

Na Tabela 7.9 são apresentadas as características estatísticas para o campo considerado do módulo de elasticidade (admitido como log-normal). As demais propriedades relacionadas com o módulo de elasticidade foram postas totalmente correlacionadas através da avaliação de seu valor por relações determinísticas. A correlação utilizado foi do tipo exponencial.

Tabela 7.9 - Características estatísticas das variáveis aleatórias para a viga de concreto armado.

Variável	Denominação	Unidade	Média $\mu$	Coefficiente de Variação V
$E_c$	$x$	MPa	227565	0.10

Na Figura 7.17 é mostrada a configuração final das fissuras correspondentes ao fator de carga de 1.0. Na Figura 7.18 é apresentado a curva fator de carga *versus* flecha no vão central.

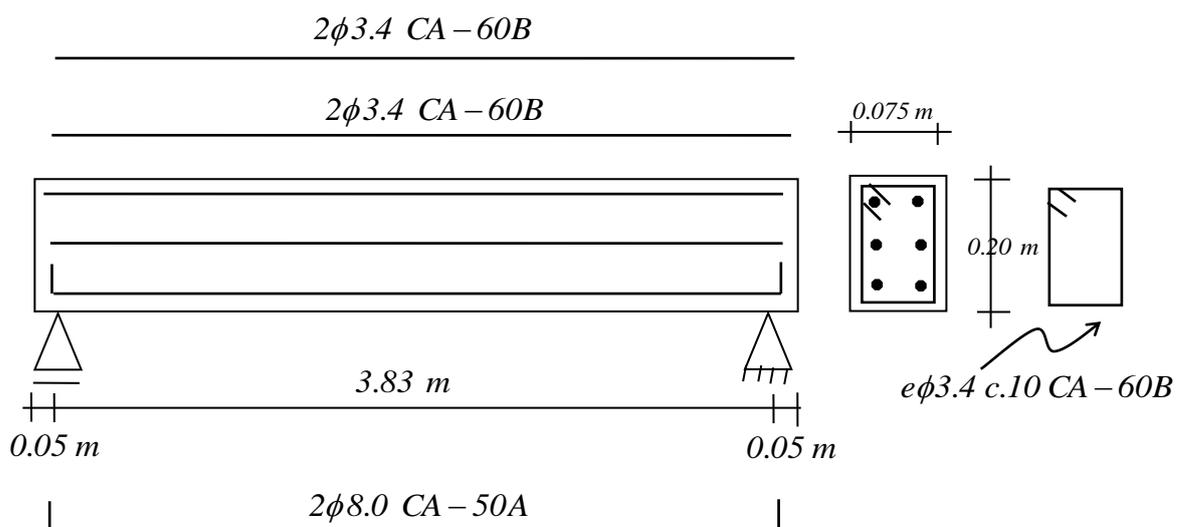


Figura 7.16 - Dados geométricos da viga simplesmente apoiada de concreto armado.

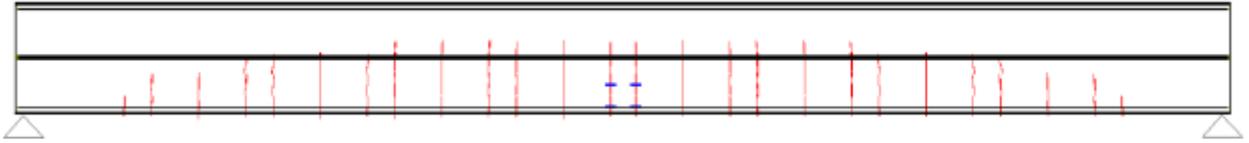


Figura 7.17 - Configuração final das fissuras para carga de serviço, representada pelo fator de carga de  $\lambda=1.0$ .

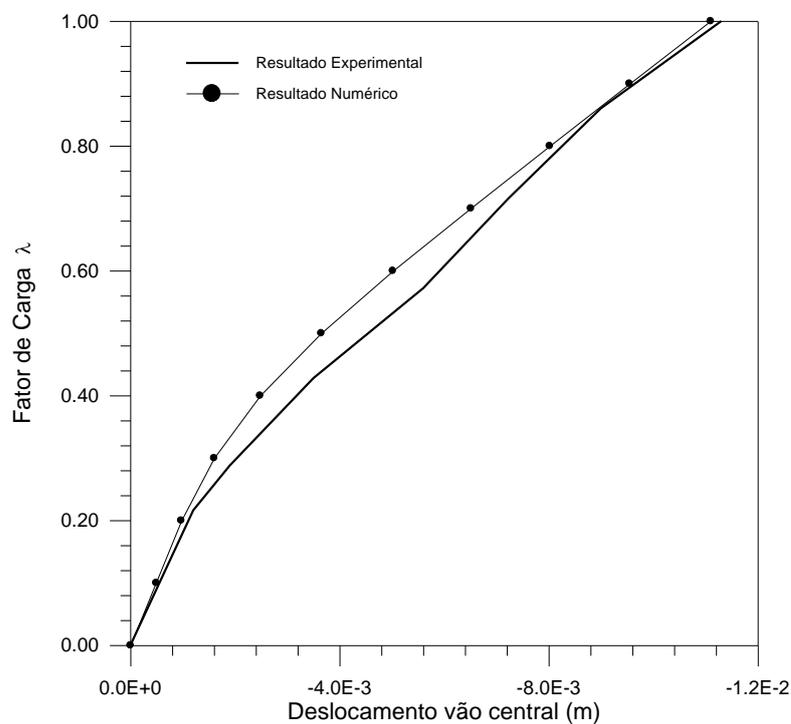


Figura 7.18 - Comparação entre resultados numérico e experimental da flecha no vão central da viga.

A seguir são apresentados alguns resultados referentes à análise desta viga sob o enfoque das técnicas de FORM, Superfície de Resposta e Rede Neural. Primeiramente são apresentadas as soluções para o caso da discretização da metade da viga (10 variáveis aleatórias representando o campo do módulo de elasticidade).

1. Solução utilizando FORM, função de estado limite real e derivadas avaliadas por diferenças finitas à frente (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 0.2619 \times 10^{-7} \quad (\beta = 5.443)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 121

Tempo relativo de CPU: 0.287

2. Solução utilizando Superfície de resposta, polinômio linear, ajuste linear dos mínimos quadrados e amostragem de Bucher (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 0.2969 \times 10^{-7} \quad (\beta = 5.421)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 138

Número de chamadas à função de estado aproximada = 196

Tempo relativo de CPU: 0.354

3. Solução utilizando Superfície de resposta com polinômio quadrático, ajuste linear dos mínimos quadrados e amostragem de Bucher (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 0.2375 \times 10^{-7} \quad (\beta = 5.461)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 138

Número de chamadas à função de estado limite aproximada = 306

Tempo relativo de CPU : 0.2147

4. Solução utilizando redes neurais percéptron multicamada, algoritmo de Shao para procura de raízes, amostragem de Bucher para inicializar o processo (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 0.2652 \times 10^{-7} \quad (\beta = 5.4408)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 180

Número de chamadas à função de estado limite aproximada = 2576

Arquitetura sugerida: 10:25:1

Tempo de CPU: 1.00

- Solução utilizando Monte Carlo Direto, variáveis antitéticas e com função de estado limite aproximada por polinômio quadrático ( $d=100$ )

$$P_f = 0.2600 \times 10^{-3} \quad (\beta = 3.47) \quad \delta_{P_f} = 0.277$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 5000

Tempo de CPU: 0.001

Na Figura 7.19 é apresentado um gráfico do índice de confiabilidade *versus* comprimento de correlação do campo entre as diversas técnicas utilizadas (viga pela metade). Na Figura 7.21 é apresentado um histórico do valor do índice de confiabilidade ao longo das si-

mulações para a função de estado limite aproximada por um polinômio quadrático (viga pela metade).

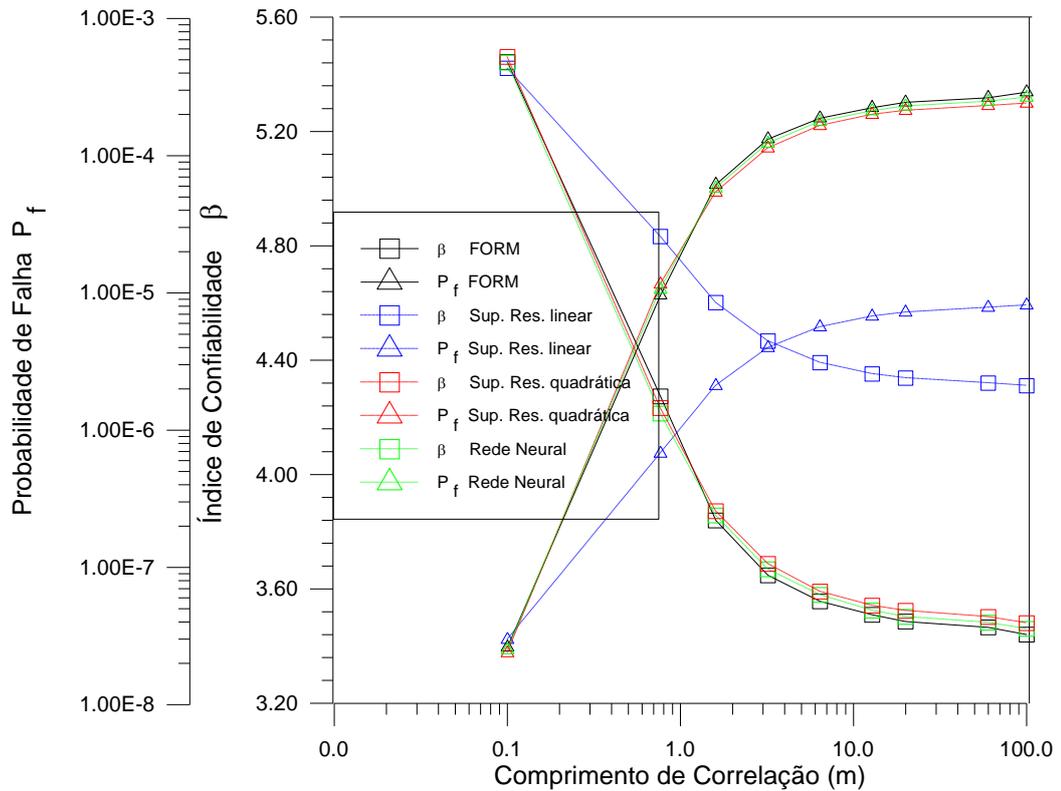


Figura 7.19 - Curvas de comprimento de correlação *versus* índice de confiabilidade e probabilidade de falha entre diversas técnicas para exemplo da viga discretizada pela metade.

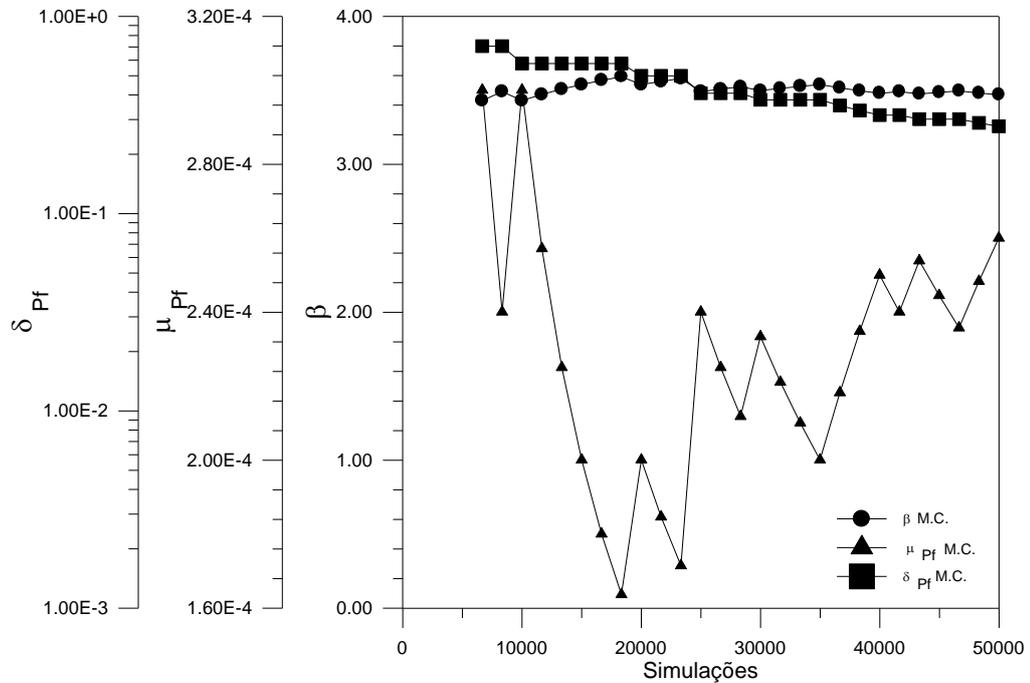


Figura 7.20 - Valor do índice de Confiabilidade  $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha  $\mu_{Pf}$  e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha  $\delta_{Pf}$ , *versus* número de simulações para o exemplo da viga de concreto armado pela metade e função de estado limite representada por um polinômio quadrático ( $d=100$ ).

Nestes exemplos o tempo relativo de CPU foi de aproximadamente 1 hora para um computador Intel Celeron 433 MHz. Na Tabela 7.10 é indicado um resumo para os testes feitos com os diversos métodos indicando os valores do índice de confiabilidade para cada caso, o número de avaliações da FEL, bem como o tempo relativo de CPU.

Tabela 7.10 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga de concreto armado (discretizada pela metade).

Técnicas	Índice de Confiabilidade $\beta$	Probabilidade de Falha $P_f$	Número de Avaliações da F.E.L.	Tempo relativo de CPU
1	5.443	$0.2619 \times 10^{-7}$	121	0.287
2	5.421	$0.2969 \times 10^{-7}$	138	0.354
3	5.461	$0.2375 \times 10^{-7}$	138	0.214
4	5.441	$0.2652 \times 10^{-7}$	180	1.00

A seguir são apresentados os resultados para a discretização da viga completamente (20 variáveis aleatórias representando o campo do módulo de elasticidade).

1. Solução utilizando FORM, função de estado limite real e derivadas avaliadas por diferenças finitas à frente (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 0.1800 \times 10^{-12} \quad (\beta = 6.95)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 273

Tempo relativo de CPU: 0.121

2. Solução utilizando Superfície de Resposta, polinômio linear, ajuste linear dos mínimos quadrados e amostragem de Bucher (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 0.1915 \times 10^{-15} \quad (\beta = 7.86)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 574

Número de chamadas à função de estado limite aproximada = 66

Tempo relativo de CPU: 0.314

3. Solução utilizando Superfície de resposta com polinômio quadrático, ajuste linear dos mínimos quadrados e amostragem de Bucher (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 0.1858 \times 10^{-10} \quad (\beta = 6.61)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 387

Número de chamadas à função de estado limite aproximada = 366

Tempo relativo de CPU: 0.094

4. Solução utilizando redes neurais perceptron multicamada, algoritmo de Shao para procura de raízes, amostragem aleatória para inicializar o processo (comprimento de correlação  $d=0$ )

$$P_f = 7.207 \times 10^{-14} \quad (\beta = 7.08)$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 1809

Número de chamadas à função de estado limite aproximada = 610

Tempo de CPU: 1.00

- Solução utilizando Monte Carlo Direto, variáveis antitéticas e com função de estado limite aproximada por polinômio quadrático ( $d=100$ )

$$P_f = 0.900 \times 10^{-4} \quad (\beta = 3.745) \quad \delta_{pf} = 0.333$$

Número de chamadas à função de estado limite real = 100000

Tempo de CPU: 0.004

Na Tabela 7.11 é indicado um resumo para os testes feitos com os diversos métodos indicando os valores do índice de confiabilidade para cada caso, o número de avaliações da FEL, bem como o tempo relativo de CPU. Na Figura 7.21 é apresentada a seqüência de convergência no exemplo da viga completa para o índice de confiabilidade e do parâmetro  $\delta^i$  representativo da distância entre pontos de projeto sucessivos no caso de se utilizar rede neural perceptron multicamada.

Tabela 7.11 - Tabela resumo dos testes efetuados para o exemplo da viga de concreto armado (discretizada completamente).

Técnicas	Índice de Confiabilidade $\beta$	Probabilidade de Falha $P_f$	Número de Avaliações da F.E.L.	Tempo relativo de CPU
1	6.95	$0.1800 \times 10^{-12}$	273	0.121
2	7.86	$0.1915 \times 10^{-12}$	574	0.314
3	6.61	$0.1858 \times 10^{-10}$	387	0.094
4	7.08	$0.7207 \times 10^{-14}$	1809	1.000

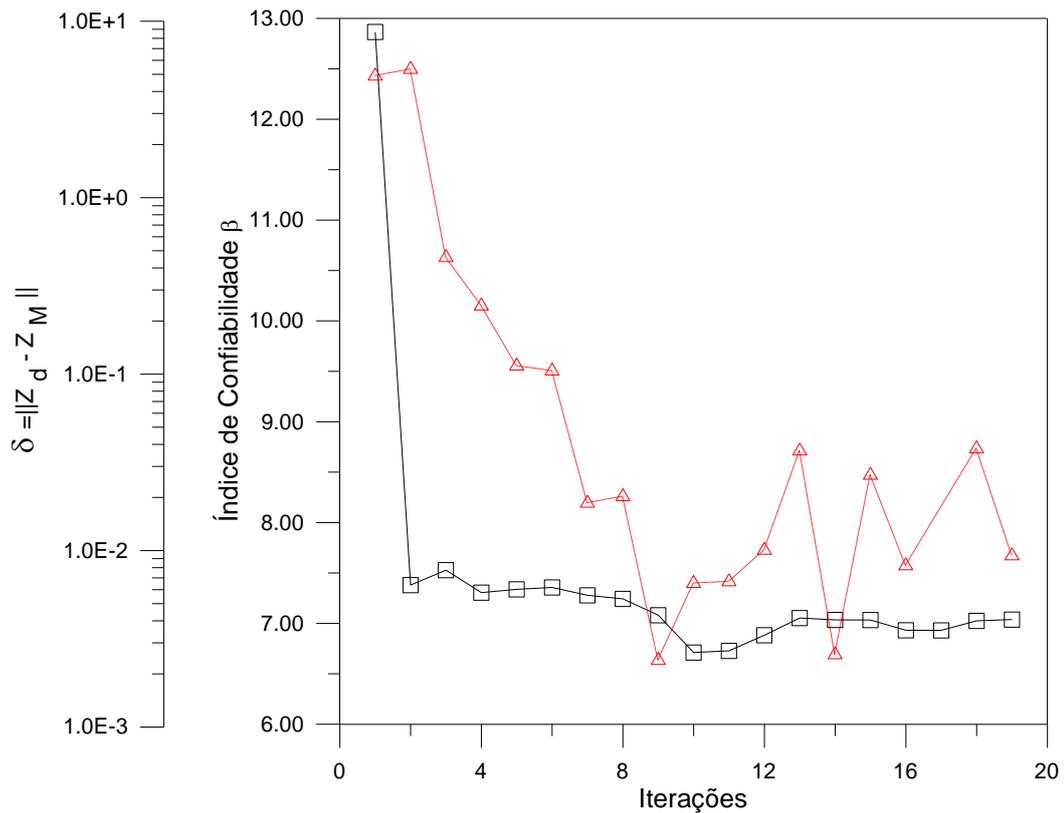


Figura 7.21 - Iterações e parâmetro de distância sucessivos *versus* índice de confiabilidade para o exemplo da viga completa e técnica de rede neural perceptron multicada.

Nestes exemplos o tempo relativo de CPU foi de aproximadamente 8 horas e 16 minutos para um computador Intel Celeron 433 MHz. Na Figura 7.22 é apresentado um gráfico do índice de confiabilidade *versus* comprimento de correlação do campo entre as diversas técnicas utilizadas (viga completa). Na Figura 7.23 é apresentado um histórico do valor do índice de confiabilidade ao longo das simulações para a função de estado limite aproximada por um polinômio quadrático.

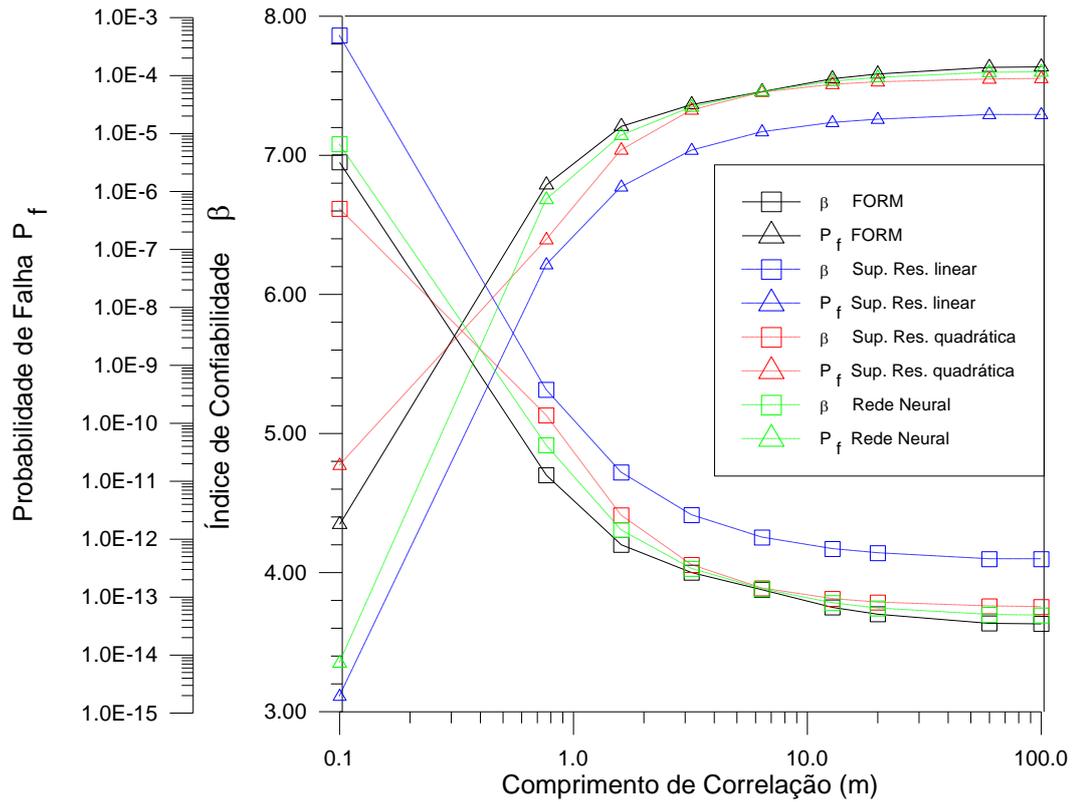


Figura 7.22 - Curvas de comprimento de correlação *versus* índice de confiabilidade e probabilidade de falha entre diversas técnicas para exemplo da viga discretizada completa.

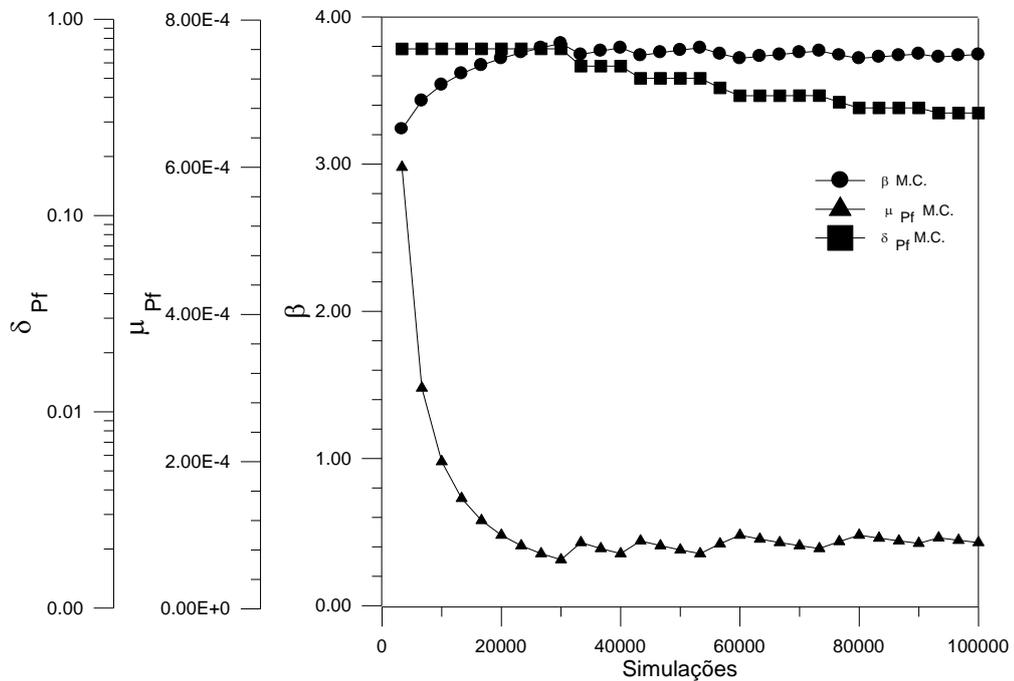


Figura 7.23 - Valor do índice de Confiabilidade  $\beta$ , valor médio da Probabilidade de Falha  $\mu_{Pf}$  e Coeficiente de Variação da Probabilidade de Falha  $\delta_{Pf}$ , versus número de simulações para o exemplo da viga de concreto armado completa e função de estado limite representada por um polinômio quadrático ( $d=100$ ).

### 7.2.3.1 Comentários

- Analisando-se os resultados do índice de confiabilidade, por exemplo, para o caso de campo sem correlação ( $d=0$ ), com discretização da metade e de toda a viga, percebe-se que há uma diferença significativa nos valores. Este tipo de hipótese, discretização da metade da viga, deve ser descartada, pois devido à presença do campo, não pode haver simetria para o problema. O fato do valor ser maior com a discretização de toda a viga, indica uma situação semelhante ao do caso do corpo de prova. Um sistema com maior quantidade de propriedades aleatórias, induz a uma menor chance de ocorrência de falha, devido à sua complexa interrelação;
- Nos exemplos apresentados (tanto da viga discretizada pela metade quanto ela completa), a técnica de Rede Neural apresentou resultados mais próximos daqueles obtidos com a técnica FORM. Em seguida, em termos de precisão numérica, encontra-se a técnica da superfície de resposta com polinômios quadráticos e por último com polinômios simples;
- O uso da técnica de simulação Monte Carlo, utilizando uma função de estado limite aproximada é viável desde que as probabilidades de falha não sejam muito pequenas;
- Para o exemplo da viga completa e técnica de rede neural perceptron multicamada, só se conseguiu uma boa aproximação inicial para a função de estado limite pela rede com a amostragem aleatória inicial 1800 amostras, pois com a amostragem de Bucher original (41 amostras) e até 800 amostras aleatórias, a primeira aproximação para a rede não fornecia bons resultados para o índice de confiabilidade (havia divergência no processo de solução). Devido a este exagerado número inicial de amostras, o processo tornou-se menos vantajoso que os outros.

# Capítulo 8

## 8. Conclusões e Sugestões

Neste Capítulo são apresentadas as conclusões para este trabalho. Também, neste capítulo, são dadas algumas sugestões para futuras pesquisas que possam vir a dar prosseguimento a este campo de estudo.

### 8.1 Conclusões

Como principais conclusões a que se chegou neste trabalho, pode-se citar:

- O uso de técnicas aproximadas para a avaliação de estruturas de concreto armado é uma boa solução, principalmente quando não se têm informações a respeito das características aleatórias das propriedades dos materiais como o seu comprimento de correlação. Estes tipos de técnicas podem fornecer soluções rápidas e confiáveis com relativa precisão, facilitando estudos paramétricos que venham a ser feitos com o elemento estrutural;
- A geração de campos estocásticos, respeitados os limites impostos pelos comprimentos de correlação para o método do ponto médio, com malha independente da malha de elementos finitos é importante. Desta forma pode-se diminuir bastante o número de variáveis aleatórias do problema sem perda de precisão na representação das características aleatórias do problema;
- O método da simulação direta Monte Carlo é viável em termos de tempo de CPU apenas em problemas com muito poucas variáveis e valores do índice de confiabilidade não superiores a 5.0;
- O método da simulação Monte Carlo com Amostragem por Importância, embora seja superior ao anterior, mostrou deficiências de convergência a medida que o número de variáveis cresce, inclusive quando se utiliza uma solução aproximada como função de estado limite;
- FORM e o método da superfície de resposta funcionaram bem em todos os casos;

- RNA apresentaram dificuldades em problemas com muitas variáveis, especialmente da determinação do número de amostras e de arquitetura conveniente em cada caso; e
- Elaborou-se uma ferramenta capaz de avaliar de forma precisa e genérica a confiabilidade de estruturas em geral e em particular estruturas de concreto armado incluindo campos estocásticos, quer seja através dos métodos clássico de FORM, simulação direta Monte Carlo e simulação Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa (embora que para grandes problemas não seja viáveis), quer seja através dos métodos aproximados da superfície de resposta e de redes neurais artificiais.

## 8.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros que possam vir a dar prosseguimento a este tema de pesquisa, podemos citar os seguintes itens:

- Estudos para a implementação do comportamento da aderência entre o concreto e as armaduras devem ser feitos nos casos em que este modo de falha seja importante, com vistas a uma melhor caracterização do comportamento do material;
- Implementação no algoritmo de elementos finitos para concreto de uma formulação para grandes deslocamentos a fim de possibilitar a análise de estruturas esbeltas onde estes tipos de efeitos são importantes;
- Coletar dados reais a respeito das propriedades estatísticas dos materiais concreto, aço e dos carregamentos (incluindo modelos para geração de cargas), geometria e erro de modelamento. Especial atenção deve ser dada ao parâmetro “comprimento de correlação”, o qual pode, ao menos teoricamente, ser avaliado através de análises inversas utilizando-se por exemplo redes neurais artificiais;
- Deve ser dada maior atenção à precisão numérica alcançada com os algoritmos e códigos que avaliam as funções de estado limite. Eles devem ser robustos o suficiente para admitirem pequenas variações em seus dados de entrada e fornecer corretamente as respectivas respostas. Certamente a utilização das derivadas calculadas numericamente juntamente com a avaliação estrutural deve melhorar a taxa de convergência dos métodos que utilizem os gradientes da função de estado limite. Uma alternativa é o emprego do método Adjunto indicado em Guan *et al.* (1994)[92], o qual pode reduzir ainda mais o tempo para a avaliação das derivadas da função de estado limite e por conseguinte o tempo para a avaliação da probabilidade de falha;

- 
- Estudar métodos de projeto de arquitetura de redes neurais automáticos, de forma a evitar a procura de arquiteturas ótimas através de tentativa e erro, bem como avaliar o número de amostras ideal para o treinamento destas redes;
  - Estender estes estudos para a análise da confiabilidade de estruturas em concreto protendido.

# Referências Bibliográficas

- [1] ADELI, H.; PARK, H. S., *Counterpropagation neural networks in structural engineering*, **Journal of Structural Engineering**, V. 121, No. 8, pp. 1205-1212, 1995.
- [2] ALTES, J.; RACKWITZ, R.; SCHULZ, U., *Time variant reliability for realistic structures with nonlinear behavior*, In: **Transactions of the 14<sup>th</sup>. International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology**, Lyon, France, August, pp.55-62, 1997.
- [3] ANDERSON, D.; HINES, E. L.; ARTHUR, S. J.; EIAP, E. L., *Application of artificial neural networks to prediction of minor axis steel connections*, In: **Neural Networks and Combinatorial Optimization in Civil and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping and A.I. Khan, pp.31-37, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1993.
- [4] ANG, A. H. S.; TANG, W. H., *Probability concepts in engineering planning and design: basic principles*. John Wiley, New York, V. 2, 1975.
- [5] ARAÚJO, J. M.; AWRUCH, A. M., *Análise estrutural probabilística pelo método dos elementos finitos*. **Caderno Técnico** No. 104, CPGEC / UFRGS, Porto Alegre, 63p., 1995.
- [6] ARAÚJO, J. M.; AWRUCH, A. M., *On stochastic finite elements for structural analysis*. **Computers and Structures**, V. 52, No. 3, pp.461-469, 1994.
- [7] ARAÚJO, J. M., *Análise de barragens de gravidade de concreto considerando a fase construtiva e a interação dinâmica barragem - reservatório - fundação*. **Tese de Doutorado em Engenharia**, CPGEC / UFRGS, Porto Alegre, 1995.
- [8] ARNBJERG N. T.; BJERAGER, P., *Finite element reliability method with improved efficiency by sensitivity analysis*. **Computational Probabilistic Methods**, Edited by Liu, Belytchko, Lawrence and Cruse, ASME, AMD-V.93, pp.15-25, 1988.

- [9] ARSLAN, A.; INCE, R., *The neural network based design of edge supported reinforced concrete slabs*, In: **Artificial Intelligence and Object Oriented Approaches for Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis., pp.91-97, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1994.
- [10] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Cálculo e execução de obras de concreto armado*. **NBR 6118**. Rio de Janeiro, 1980.
- [11] BAFFES, P. T., *Nets user's guide, version 2.01*, **NASA**, Lyndon B. Johnson Space Center, USA, 1989.
- [12] BALAKRISHNAN, S.; MURRAY, D. W., *Finite element prediction of reinforced concrete behaviour*. **Structural Engineering Report No.138**, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 1986.
- [13] BARAI, S. V.; PANDEY, P. C., *Performance of the generalized delta rule in structural damage detection*, **Engineering Application of Artificial Intelligence**, V.8, No.2, pp. 211-221, 1995.
- [14] BARAI, S. V.; PANDEY, P. C., *Vibration signature analysis using artificial neural networks*, **Journal of Computing in Civil Engineering**, V. 9, No.4, pp.259-265, 1995.
- [15] BARZEGAR, F.; ISENBERG, J.; AKTAN, *Generic problems*. In: **Proceedings of the international workshop in finite element analysis of reinforced concrete structures II**, New York, pp.490-569, 1991.
- [16] BARZEGAR, F.; MADDIPUDI, S., *Three-dimensional modelling of concrete structures. I: plain concrete, II: reinforced concrete*. **Journal of Structural Engineering**, V. 123, No.10, pp.1339-1356, 1997.
- [17] BARZEGAR, F.; MANDDIPUDI, S., *Generating reinforcement in FE modelling of concrete structures*. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, V.120, No.5, pp.1656-1662, 1994.
- [18] BATHE, K. J., *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1996.
- [19] BEALE, R.; JACKSON, T., *Neural computing: an introduction*, TOP Publishing Ltd., Bristol, England, 1990.

- [20] BECK, A. T.; DA ROSA, E., *Implementation of a finite element reliability method*. In: **Proceedings of the 15° Brazilian congress of mechanical engineering-COBEM 99**, CD-ROM, Águas de Lindóia, São Paulo, SP, 1999.
- [21] BEGUM, R.; CHAMBERLAIN, D.; HIRSON, A., *Integrity testing of concrete surfaces using artificial neural networks*, In: **Proceedings of developments in neural networks and evolutionary computing for civil and structural engineering**, Edited by B.H.V. Topping, pp.1-6, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1995.
- [22] BERKE, L.; HAJELA, P., *Application of artificial neural nets in structural mechanics*, **Journal of Structural Optimization**, V. 4, pp. 90-98, 1992.
- [23] BERKE, L.; HAJELA, P., *Application of neural nets in structural optimization*, In: **Proceeding of optimization of large structural systems**, Edited by G. Rozvany, V.II, NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1993.
- [24] BERKE, L.; HAJELA, P., *Neurobiological computational models in structural analysis and design*, **Computers and Structures**, V. 41, No.4, pp. 657- 667, 1991.
- [25] BERKE, L.; PATNAIK, N.; MURTHY, P. L. N., *Optimum design of aerospace structural components using neural networks*, **Journal of Computers and Structures**, V. 48, No.6, pp.1001-1010, 1993.
- [26] BERNARDO, T .R . R.; VETURINI, W. S., *Considerações sobre o coeficiente de minoração da resistência à compressão do concretoo  $\gamma_c$  usando a teoria da confiabilidade estrutural*. In: **Proceedings of 41º congresso Brasileiro do concreto**, CD-ROM, Salvador, Bahia, 1999.
- [27] BHATT, P.; BARJ, M. S.; ELNOUNU, G. F.; MEMON, M., *Non-linear finite element analysis of shearwall-floor slab junction*, In: **Proceedings of the second international conference on computational plasticity**, Edited by D. R. Owen, E. Hinton, Oñate, Pineridge Press, Swansea, Wales, pp.1319-1330, 1989.
- [28] BICANIC, N.; BORST, R.; GERSTLE, W., *Computational aspects of structures*. In: **Proceedings of the international workshop in finite elements analysis of reinforced concrete structures II**, New York, pp.367-489, 1991.
- [29] BIEDERMAUN, J. D.; GRIERSON, D. E., *Representing heuristic design knowledge using artificial neural networks*, In: **Proceedings of the Artificial Intelligence**

- and object oriented approaches for structural engineering**, Edited by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis, pp.83-90, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1994.
- [30] BJERAGER, P., *On computational methods for structural reliability analysis*. **Structural Safety**, V. 9, pp.79-96, 1990.
- [31] BLJUGER, E., *Models of r.c. structures for probabilistic serviceability analysis*, **Computers and Structures**, No.67, pp.19-27, 1998.
- [32] BOURGUND, U. ; BUCHER, C. G., *ISPUD V3.0 - Importance sampling procedure using design points - an efficient, accurate and easy-to-use multi-porpose computer code to determine structural reliability*. **Internal Working Report -** , Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1986.
- [33] BOURGUND, U.; OUYPORNPRASERT, W.; PRENNINGER, P. H. W., *Advanced simulations methods for the estimation of systems reliability*. **Internal Working Report No. 19**, Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1986.
- [34] BRENNER, C. E., *Stochastic finite element methods (literature review)*. **Internal Working Report No.35-91**, Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1991.
- [35] BRESLER, B.; SCORDELIS, C., *Shear strength of reinforced concrete beams*, **Journal of the American Concrete Institute**, V.60, No.1, pp.51-73, 1963.
- [36] BUCHER, C. G. ; NIENSTEDT, J. ; OUYPORNPRASERT, W., *Adaptative strategies in ISPUD v3.0 - an efficient, accurate and easy-to-use multi-porpose computer code to determine structural reliability*. **Internal Working Report No. 25**, Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1989.
- [37] BUCHER, C. G., *Adaptive sampling - an iterative fast Monte Carlo procedure*, **Structural Safety**, V. 5, No. 2, Amsterdan: Elsevier Science, pp.119-126, 1988.
- [38] BUCHER, C. G.; BOUGUND, U., *A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems*, **Structural Safety**, V. 7, pp.57-66, 1990.
- [39] BUCHER, C. G.; SCHUËLLER., *Systems reliability: revisted*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'94** , Innsbruck, Austria, pp.1227-1231, 1994.

- [40] CARPENTER, G. A.; GROSSBERG, S., *The ART of adaptive pattern recognition*, **IEEE Computer**, V. 21, No.3, 1988.
- [41] CAUVIN, A., *Use of neural networks for preliminary structural design*, In: **Proceedings of Computing in Civil and Building Engineering**. Edited by Pahl and Werner, Rotterdam, pp.261-266, 1995.
- [42] CERVENKA, J., *Discrete crack modelling in concrete structures*, **Doctor in Philosophy Thesis**, University of Colorado, Boulder, 1994.
- [43] CERVERA, M.; HINTON, E.; BONET, J.; BICANIC, N., *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*, Swansea, U.K., Pineridge Press, pp. 320-504, 1988.
- [44] CHANG, T. Y.; TANIGUCHI, H., CHEN, W. F., *Non linear finite element analysis of reinforced concrete panels*, **Journal of Structural Engineering**, ASCE, V.113, No.1, pp.122-140, 1987.
- [45] CHASSIAKOS, A. G.; MASRI, S. F., *Identification of the internal forces of structural systems by feedforward multilayer networks*, **Computing Systems in Engineering**, Special Issue on Computational Structures Technology, 1991.
- [46] CHASSIAKOS, A. G.; MASRI, S. F., *Neural net based identification of structural systems*, **Parallel and Distributed Computing in Engineering Systems**, pp.371-375, Elsevier Science Publishers, Holland, 1992.
- [47] CHEN, W. F.; HUN, D. J., *Plasticity for structural engineers*. Springer Verlag, New York, 606p., 1988.
- [48] CIAMPOLI, M., *A probabilistic methodology to assess the reliability of deteriorating structural elements*, **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, No.168, pp.207-220, 1999.
- [49] COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, *Behavior and analysis of reinforced concrete structures under alternate actions inducing inelastic response*. **CEB Bulletin d'Information No. 210**, 296 p., 1991.
- [50] COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, *CEB-FIP model code 1990*. **CEB Bulletin d'Information No. 213/214**, 437 p., 1993.

- [51] COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, *General principles on reliability for structures*. **CEB Bulletin d'Information No. 191**, 51 p., 1988.
- [52] COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON, *New developments in non-linear analysis methods*. **CEB Bulletin d'Information No. 210**, 1991.
- [53] DARWIN, D., *Reinforced concrete*, In: **Proceedings of the international workshop in finite elements analysis of reinforced concrete structures II**, New York, pp.203-232, 1991.
- [54] DAS, P. K.; ZHENG, Y., *Cumulative formation of response surface and its use in reliability analysis*, **Probabilistic Engineering Mechanics**, V.15, pp.309-315, 2000.
- [55] DER KIUREGHIAN, A., *A finite element reliability of frame structures: structural safety and reliability*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'85**. Edited by Konish, Ang and Shinozuka, Kobe, Japan, V.1, pp.395-404, 1985.
- [56] DER KIUREGHIAN, A.; KE, J-B., *The stochastic finite element method*. **Probabilistic Engineering Mechanics**, V.3, No.2, pp.83-91, 1987.
- [57] DINIZ, S. M. C.; FRANGOPOL, D. M., *Reliability bases for high-strength concrete columns*, **Journal of Structural Engineering**, V.123, No.10, pp.1375-1381, 1997.
- [58] DINIZ, S. M. C.; FRANGOPOL, D. M., *Reliability bases for high-strength concrete columns*, **Journal of Structural Engineering**, V.123, No.10, pp.1375-1381, 1997.
- [59] ELKORDY, M. F.; CHANG, K. C.; LEE, G. C., *Neural networks trained by analytically simulated damage states*, **Journal of Computing in Civil Engineering**, V.7, No.2, pp.103-145, 1993.
- [60] ELWI, A.; HRUDEY, M., *Finite element model for curved embedding reinforcement*. **Journal of Engineering Mechanics**, ASCE, V.115, No.4, pp.740-757, 1989.
- [61] ESTES, A. C.; FRANGOPOL, D. M., *Repair optimization of highway bridges using system reliability approach*, **Journal of Structural Engineering**, V.25, No.7, pp.766-775, 1999.

- [62] ELLINGWOOD, B.; GALAMBOS, T. V.; MACGREGOR, J. G.; CORNELL, C. A., *Development of a probability based load criterion for American National Standard A58*, **NBS Special Publications**, No.577, Washington, D.C., National Bureau of Standards.
- [63] FAIRBAIRN, E. M. R.; EBECKEN, N. F. F.; PAZ, C. N. M.; ULM, F.-J., *Determination of probabilistic parameters of concrete: solving the inverse analysis problem by using artificial neural networks*, **Computers and Structures**, V.78, pp.497-503, 2000.
- [64] FAIRBAIRN, E. M. R.; GOULART, E.; COUTINHO, A. L. G. A.; EBECKEN, N. F. F.; VIANA, D. M.; GUEDES, Q. M., *Aplicações de redes neurais e do MEF para a retroanálise do concreto em barragens*. In: **Computational Methods in Engineering'99**, Edited by P. M. Pimenta; R. M. L. F. Brasil; E. S. Almeida N., pp.248.1-248.12, 1999.
- [65] FAIRBAIRN, E. M. R.; GOULART, E.; COUTINHO, A. L. G. A.; EBECKEN, N. F. F., *Durability assessment of an arch dam using inverse analysis with neural networks and high performance computing*. In: **Proceedings of the 13th ASCE-Engineering Mechanics Division Conference**. Baltimore, MD, USA, ASCE, pp.1-6, 1999.
- [66] FAIRBAIRN, E. M. R.; PAZ, C. N. M.; EBECKEN, N. F. F.; ULM, F.-J., *Use of neural networks for fitting of FE probabilistic scaling model parameters*. **International Journal of Fracture**, V. 95, pp.314-324, 1999.
- [67] FARAVELLI, L. *Response surface approach for reliability analysis*. **Journal of the Engineering Mechanics**, V. 115, No. 12, pp.2763-2781, 1989.
- [68] FRANGOPOL, D. M.; IDE, Y.; SPACONE, E.; IWAKI, I., *A new look at reliability of reinforced concrete columns*, **Structural Safety**, V.18, No.2/3, pp.123-150, 1996.
- [69] FRANGOPOL, D. M.; LEE, Y.-H.; WILLAM, K. J., *Nonlinear finite element reliability analysis of concrete*. **Journal of Engineering Mechanics**, V. 122, No. 12, pp. 1174-1182, 1996.

- [70] FREUDENTHAL, A. M. *The safety of structures*, **ASCE Transactions**, V. 112, No. 2296, pp.125-180, 1947.
- [71] FREUDENTHAL, A. M.; GERRELTS, J. M.; SHINOZUKA, M. *The analysis of structural safety*, **ASCE Transactions**, V.92, pp.267-325, 1966.
- [72] FU, B.; HAJELA, P., *Minimizing distortion in truss structures - a hopfield network solution*, **Computing Systems in Engineering**, V. 4, No.1, pp.69-74, 1993.
- [73] GERSTLE, K. H.; NIWA, J. *Finite element analysis as design tool*, In: **Proceedings of the international workshop in finite elements analysis of reinforced concrete structures II**, New York, pp.692-714, 1991.
- [74] GOMES, H. M., *Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado usando o método dos elementos finitos e processos de simulação*, **Dissertação de Mestrado**, CPGEC / UFRGS, Porto Alegre, 118p., 1997.
- [75] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado incluindo o efeito da corrosão*, In: **Proceedings of 40°-REIBRAC- Instituto Brasileiro do Concreto**, CD-ROM, Salvador, Bahia, 1999.
- [76] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado incluindo o efeito da corrosão*, In: **Proceedings of 1º Congresso Internacional sobre Estruturas Danificadas**, CD-ROM, Rio de Janeiro, RJ, 1998.
- [77] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Análise da confiabilidade de seções de concreto armado submetidas à flexo-compressão normal e oblíqua*, **Relatório de Pesquisa No. 120**, PPGEC / UFRGS, Porto Alegre, RS, 1996.
- [78] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Analysis of reinforced concrete structures subjected to impact loads*, In: **Proceedings of the PACAMVI - 6th Pan American Congress of Applied Mechanics / DINAME-8th International Congress on Dynamic Problems in Mechanics**, Rio de Janeiro, RJ, pp.365-367, 1999.
- [79] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Confiabilidade de seções de concreto armado submetidas à flexo-compressão*, In: **Proceedings of 40°-REIBRAC-Instituto Brasileiro do Concreto**, CD-ROM, Salvador, Bahia, 1999.

- [80] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Estudo da confiabilidade na análise dinâmica em estruturas de concreto armado*, In: **Proceedings of the XVIII CILAMCE - Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Numéricos em Engenharia**, CD-ROM, Brasília, v.2., pp.651-659, 1997.
- [81] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Estudo dos efeitos de longa duração na confiabilidade de estruturas de concreto armado*, **Proceedings of 40º-REIBRAC- Instituto Brasileiro do Concreto**, CD-ROM, Salvador, Bahia, 1999.
- [82] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Estudo dos efeitos de longa duração na confiabilidade de estruturas de concreto armado*. In: **Proceedings of X-ENIEF - Congress on Numerical Methods and its Applications**, San Carlos de Bariloche, Argentina, v.1., pp.175-184, 1997.
- [83] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Geração multidimensional de campos estocásticos não gaussianos para a análise estrutural via elementos finitos*. In: **Proceedings of the XXIX-Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural**, Punta del Este, Uruguay, CD-ROM, 2000.
- [84] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Neural networks for structural analysis*, In: **Proceedings of the XIX CILAMCE-Congresso Íbero Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia**, São Paulo, SP, CD-ROM, 1999.
- [85] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *On multidimensional non-Gaussian random fields generation for finite element structural analysis*, In: **Proceedings of the COBEM-Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Águas de Lindóia, SP, CD-ROM, Universidade Estadual de Campinas, 1999.
- [86] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Redes neurais artificiais para análise estrutural*, In: **Proceeding of the XXIX-Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural**, Punta del Este, Uruguay, CD-ROM, 2000.
- [87] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Reliability analysis of reinforced concrete structures*, In: **Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Congress of Concrete Technology (I.C.C.T.)**, Buenos Aires, Argentina, v.1, pp.173-182, 1998.

- [88] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M., *Some aspects on three-dimensional numerical modelling of reinforced concrete structures using the finite element method*, **Advances in Engineering Software**, v.32, n.4, p.257-277, 2001.
- [89] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M.; ROCHA, M. M., *Análise de confiabilidade no projeto de estruturas de concreto armado*, In: **Proceedings of the XXVIII-Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural**, São Carlos, SP, V.1, p.99-108, 1997.
- [90] GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M.; ROCHA, M. M., *Reliability analysis of reinforced concrete structures*, In: **Proceedings of the structural mechanics in reactor technology conference (SMIRT 14)**, Lyon, França, V.10, pp.47-54, 1997.
- [91] GRABE, W. VON; TWORUSCHKA., *An interface algorithm for nonlinear reliability analysis of reinforced concrete structures using ADINA*. **Computers and Structures**, V. 64, No. 5/6, pp. 949-958, 1997.
- [92] GUAN, X. L. ; MELCHERS, R. E., *An efficient formulation for limit state functions gradient calculation*, **Computers and Structures**, V. 53, No. 4, pp. 929-935, 1994.
- [93] HAFTKA, R. T.; VITALI, R.; SANKAR, B. V., *Optimization of composite structures using response surface approximations*, **Internal Working Report**. Department of Aerospace Engineering, University of Florida, 1996.
- [94] HAJELA, P.; BERKE, L., *Neural network based decomposition in optimal structural synthesis*, **Computing Systems in Engineering**, V. 2, No.5/6, pp.473-481, 1991.
- [95] HAJELA, P.; BERKE, L., *Neural networks in structural analysis and design: an overview*, **Computing Systems in Engineering**, V. 3, No.1/4, pp. 525-538, 1992.
- [96] HAJELA, P.; BERKE, L., *Neurobiological computational models in structural analysis and design*, **Computers and Structures**, V.41, No.4, pp.657-667, 1991.
- [97] HAJELA, P.; FU, B.; BERKE, L., *ART networks in automated conceptual design of structural systems*, In: **Proceedings of Artificial Intelligence and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping, pp.263-271, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1991.

- [98] HAJELA, P.; SZEWCZYK, Z., *On the use of neural network interconnection weights in multidisciplinary design*, In: **Proceedings of the 1th AIAA/ NASA/ Air Force Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization**, Ohio, USA, 1992.
- [99] HAJELA, P.; TEBOUB, Y., *A neural network based damage analysis of smart composite beams*, In: **Proceedings of the 1th AIAA/NASA/Air Force Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization**, Ohio, USA, 1992.
- [100] HALDAR, A.; HUH, J.; GAO, L., *Reliability of nonlinear structures with uncertain support conditions using SFEM*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'98**, Edited by Shiraishi, Shinozuka & Wen, pp. 843-849, 1998.
- [101] HALDAR, A.; MAHADEVAN, S., *First-order and second-order reliability methods*. **Probabilistic Structural Mechanics Handbook**, Edited by C. Sundararajan, Chapman & Hall Ltd., New York, pp.27-52, 1995.
- [102] HARTLE, S. L.; JAMBUNATHAN, K. *A feasibility study into neural networks grid generation*, **Internal Working Report**, The Nottingham Trent University, U.K., 1996.
- [103] HARTMAN, E. J.; KEELER, J. D.; KOWALSKI, J. M., *Layered neural networks with Gaussian hidden units as universal approximations*, **Neural Computation**, V.2, pp.210-215, 1990.
- [104] HASOFER, A. M.; LIND, N. C., *Exact and invariant second moment code format*, **Journal of Engineering Mechanics Division**, New York, ASCE. V.100, No.1, pp.111-121, 1984.
- [105] HAYKIN, S., *Neural networks: a comprehensive foundation*, NY: Macmillan, 1994.
- [106] HOHENBICHLER, M; GOLIWITZER, S.; KRUSE, W.; RACKWITZ, R., *New light on first and second order reliability methods*, **Structural Safety**, V.4, pp.267-284, 1987.
- [107] HOIT, M.; OLSEN, C., *Renumbering heuristics using neural networks*, In: **Proceedings of Artificial Intelligence and Object Oriented Approaches for Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis, pp.69-81, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1994.

- [108] HOIT, M.; STOKER, D.; CONSOLAZIO, G., *Neural networks for equation renumbering*, **Computers and Structures**, V. 52, No.5, pp.1011-1021, 1994.
- [109] HONG, H. P.; LIND, N. C., *Approximate reliability analysis using normal polynomial and simulation results*, **Structural Safety**, V.18, No. 4, pp.329-339, 1996.
- [110] HONG, H. P.; ZHOU, W., *Reliability evaluation of rc columns*, **Journal of Structural Engineering**, V.125, No.7, pp.784-790, 1999.
- [111] HOPFIELD, J. J., *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*, In: **Proceedings of the National Academic Science**, USA, V. 79, pp.2554- 2558, 1982.
- [112] HOPFIELD, J. J., *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*, In: **Proceedings of the National Academic Science**, USA, V. 81, pp. 3088-3092, 1984.
- [113] ISENBERG, J.; LEVINE, H. S., *Analysis of reinforced concrete under shock loading*. In: **Finite element analysis of reinforced concrete structures**, ASCE Task Committee on Concrete and Masonry Structures, ASCE, pp.444-464, 1985.
- [114] JENKINS, W. M., *Neural network-based approximation for structural analysis*, In: **Developments in Neural Networks and Evolutionary Computing for Civil and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping, pp.25-35, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1995.
- [115] JORGE, M.; GARBOW, B.; HILLSTROM, K., *User guide for MINPACK-1*, **Argonne National Labs Report**, ANL-80-74, Argonne, Illinois, USA, 1980.
- [116] KANG, H.; YOON, B., *Neural network approaches to aid simple truss design problems*, **Microcomputers in Civil Engineering**, V. 9, pp. 211-218, Blackwell Publishers, Cambridge, MA, USA, 1994.
- [117] KAPPOS, A. J.; CHRYSSANTHOPOULOS, M. K.; DYMIOTIS, C., *Uncertainty analysis of strength and ductility of confined reinforced concrete members*, **Journal of Engineering Structures**, V.21, pp.195-208, 1999.
- [118] KIM, P.-Y., *Reliability analysis using artificial neural network*, **M.Sc. Thesis**. Seoul National University, 1995 (in Korean).

- [119] KIM, S.-H.; NA, S.-W., *Response surface method using vector projected sampling points*. **Structural Safety**, V. 19, No.1, pp.3-19, 1997.
- [120] KIRKEGAARD, P. H., *Modeling of non-linear structures using recurrent neural networks*, In: **Developments in Neural Networks and Evolutionary Computing for Civil and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping, pp.51-58, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1995.
- [121] KIRKEGAARD, P. H.; RYTTER, A., *The use of neural networks for damage detection and location in a steel member*, In: **Developments in Neural Networks and Evolutionary Computing for Civil and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping, pp.1-9, CivilComp Press, Edinburgh, UK, 1993.
- [122] KISHI, M.; KODERA, T.; IWAO, Y.; HOSODA, R., *Structural optimization by neuro optimizer*, **Reliability and Optimization of Structural Systems**, pp.113-120, Elsevier Science Publishers, 1993.
- [123] KITADA, T.; DOGAKI, M., et al., *Simulation of limit state analysis of box girder bridges*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'94**, Innsbruck, pp. 895-901, 1994.
- [124] KOGUT, G. F.; CHOU, K. C., *Reliability-based design for steel-concrete beam-columns*, In: **Proceedings of the ICOSSAR'94**, Innsbruck, pp.703-708, 1994.
- [125] KOHONEN, T., *Self-organization and associated memory*, Springer Verlag, 1984.
- [126] KORTESIS, S.; Panagiotopoulos, P. D., *Neural networks for computing in structural analysis: methods and prospects of applications*, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V.36, pp.2305-2318, 1993.
- [127] KOSKO, B., *Bidirectional associated memories*, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, V. 18, pp.49-60, 1988.
- [128] LEE , J.-O.; YANG, Y.-S., *An efficient adaptive strategy for reliability based structural design with probabilistic constraints*, In: **Proceedings of the 25<sup>th</sup> special lecture on COSEIK**, pp.8-9, 2001.
- [129] LEE, H.; HAJELA, P., *Neural network based prediction of geometrical properties with reduced mapping nonlinearity*, **AIAA Journal**, pp.901-909, USA, 1994.
- [130] LEE, H.; HAJELA, P., *Prediction of turbine performance using multi layer feedforward networks by reducing mapping nonlinearity*, In: **Proceedings of the artifi-**

- cial intelligence and object oriented approaches for structural engineering**, Edited by B.H.V. Topping and M. Papadrakakis, pp.99-105, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1994.
- [131] LEE, H.; HAJELA, P., *Vector clustering for neural network based prediction of geometrical characteristics*, In: **Proceedings of the Neural Networks and Combinatorial Optimization in Civil and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping and A.I. Khan, pp.19-29, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1993.
- [132] LEE, Y. H.; FRANGOPOL, M.; WILLAM, K., *Probabilistic failure predictions of plain concrete structures on the basis of the extended leon model*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'94**, Innsbruck, Austria, pp.391-394, 1994.
- [133] LI, C. Q., *Computation of the failure probability of deteriorating structural systems*, **Computers and Structures**, V.56, No.6, pp.1073-1079, 1995.
- [134] LI, C. Q.; MELCHERS, R. E., *Failure probability of reinforced concrete columns under stochastic loads*, **Cement and Concrete Research**, 6p., 1995.
- [135] LI, CH. O., *Computation of the failure probability of deteriorating structural systems*, **Computers and Structures**, V.56, No.6, pp.1073-1079, 1995.
- [136] LINDIFIELD, G. R.; PENNY, J. E. T., *Microcomputers in numerical analysis*, Chichester: John Wiley, pp.288-291, 1989.
- [137] LIU, P. L.; DER KIUREGHIAN, A., *Optimization algorithms for structural reliability*, **Computational Probabilistic Mechanics**, V. 933, pp.185-196, 1988.
- [138] LIU, P. L.; DER KIUREGHIAN, A., *Multivariate distribution models with prescribed marginal and covariances*, **Probabilistic Engineering Mechanics**, V.1, No.2, 1986.
- [139] LIU, P.-L.; LIU, K.-G., *Selection of random field mesh in finite element reliability analysis*, **Journal of Engineering Mechanics**, V.199, No.4, 1993.
- [140] LOPES, T. A. P.; EBECKEN, N. F. F., *In-time fatigue monitoring using neural networks*. **Marine Structures**, No.10, pp.363-387, 1997.
- [141] LOU, K-N.; PEREZ, R. A., *On the artificial neural networks for structural analysis*, **Recent Advances in Structural Mechanics**, ASME, PVP-V. 295/NE, V.16, pp. 149-161, 1994.

- [142] LUNDBERG, J. E.; GALAMBOS, T. V., *Load and resistance factor design of composite columns*, **Structural Safety**, V.18, No.2/3, pp.169-177, 1996.
- [143] MAHADEVAN, S.; RAGHOTHAMACHAR, P., *Adaptive simulation for system reliability analysis of large structures*, **Computers and Structures**, V.77, pp.735-734, 2000.
- [144] MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W., *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, **Bulletin of Mathematical Biophysics**, V. 5, pp. 115-133, 1943.
- [145] MELCHERS, R. E., *Structural reliability analysis and prediction*, Chichester: John Wiley, 400p., 1987.
- [146] MEYER, C. *Dinamic loading*. In: **Proceedings of the international workshop in finite elements analysis of reinforced concrete structures II**, New York, pp. 314-366, 1991.
- [147] MCGREGOR, J. G.; MIRZA, S. A. ; ELLINGWOOD, B., *Statistical analysis of resistance of reinforced and prestressed concrete emembers*, **ACI Journal**, pp.167-176, V. 80, 1983.
- [148] MINSKY, M.; PAPERT, S., *Perceptrons: an introduction to computational geometry*, MIT Press, USA, 1969.
- [149] MIRZA, S. A. ; HATZINIKOLAS, M., *Statistical descriptions of strength of concrete*. **Journal of the Structural Division**, ASCE, V. 105, No. ST6, pp.1021-1037, 1979.
- [150] MIRZA, S. A., *Reliability-based design of reinforced concrete columns*, **Structural Safety**, V.18, No.2/3, pp.179-194, 1996.
- [151] MOODY, J.; DARKEN, C. J., *Fast learning in networks of locally tuned processing units*, **Neural Computation**, V. 1, pp. 281-294, 1989.
- [152] MUKHEIJEE, A.; DESHPANDE, J.M., *Modeling initial design process using artificial neural networks*, **Journal of Computing in Civil Engineering**, V.9, No.3, pp.194-200, 1995.
- [153] MUKHERJEE, A.; DESHPANDE, J. M., *Application of artificial neural networks in structural design expert systems*, **Computers and Structures**, V. 54, No.3, pp.367-375, 1995.

- [154] NIGRIN, A., *Neural Networks for Pattern Recognition*, Cambridge, MA: **The MIT Press**, p.11, 1993.
- [155] NELDER, J. A., *Inverse polynomials, a useful group of multifactor response functions*, **Biometrics**, V. 22, pp.128-141, 1996.
- [156] OLIVEIRA, R. A., *Confiabilidade de sistemas estruturais pelo método de integração Monte Carlo com amostragem por importância*, **Tese de Doutorado**, COPPE / UFRJ, março, 77p., 1997.
- [157] OLIVER, J., *A consistent characteristic length for smeared crack models*, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 28, pp. 461-474, 1989.
- [158] ORISSAMOLU, I. R., *Stochastic finite element method for the probabilistic residual strength assessment of corroded structures*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'98**, Edited by Shiraishi, Shinozuka & Wen, Balkema, Rotterdam, pp.875-882, 1998.
- [159] ORISSAMOLU, I. R.; CHERNUKA, M. W., *Probabilistic reliability analysis using general purpose commercial computer programs*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'94**, Innsbruck, Austria, pp.1295-1398, 1994.
- [160] OSTLUND, L., *An estimation of  $\gamma$ -values*, Reliability of Concrete Structures, **CEB Bulletin d'Information** No. 202, Lausanne, Switzerland, 1991.
- [161] OTTOSEN, N. S., *Constitutive model for short-time loading of concrete*. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, V.105, No.1, pp. 127-141, 1979.
- [162] PANDEY, P. C.; BARAL, S. V., *Multilayer perceptron in damage detection of bridge structures*, **Computers and Structures**, V. 54, No. 4, pp. 597-608, 1994.
- [163] PAPADRAKAKIS, M.; PAPADOUPOLIS, V., *Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation*, **Computer Methods in Applied Mechanical Engineering**, V.134, pp.325-340, 1996.
- [164] PAPADRAKAKIS, M.; PAPADOUPOLIS, V., *Stochastic finite-element based reliability analysis of space frames*, **Probabilistic Engineering Mechanics**, V.13, No.1, pp.53-65, 1998.

- [165] PAPADRAKAKIS, M.; PAPADOUPOLIS, V.; LAGAROS, N. D., *Structural reliability of elastic-plastic structures using neural networks and Monte Carlo simulation*. **Computational Methods in Applied Mechanical Engineering**, V.136, pp.145-163, 1996.
- [166] PETERSON, C.; ANDERSON, J. R., *A mean field learning algorithm for neural networks*, **Complex Systems**, V. 1, pp.995-1019, 1987.
- [167] PHILLIPS, D. V.; ZIENKIEWICZ, O. C., *Finite Element non linear analysis of concrete structures*, **Proc. Inst. Civil Engineering**, Part 2, V. 61, No.3, pp.59-88, 1976.
- [168] PILISZEK, J.; CZOMOCH, I., *Probabilistic FEM analysis of reinforced concrete beams*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'94**, Innsbruck, Austria, pp.295-398, 1994.
- [169] PITANGUEIRA, R. L.; SILVA, R. R., *Modelo constitutivo para dano em materiais frágeis*. In: **Proceedings of the XV-Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, CD-ROM, 1999.
- [170] RAJASHEKAHAR, M. R.; ELLINGWOOD, B. R., *Reliability of reinforced concrete cylindrical shells*. **Journal of Structural Engineering**, V. 121, No.2, pp.336-347, 1995.
- [171] RAJASHEKHAR, M. R.; ELLINGWOOD, B. R., *A new look at the response surface approach for reliability analysis*, **Structural Safety**, V. 12, pp.205-220, 1993.
- [172] RANJBARAN, A., *Mathematical formulation of embedded reinforcements in 3D brick elements*. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, V.12, pp. 897-903, 1996.
- [173] REAL, M. V., *Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob o estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos*. **Tese de Doutorado**, PPGEC / UFRGS, Porto Alegre, junho, 2000.
- [174] REAL, M. V.; FILHO, A. C., *Análise estatística de vigas e pilares de concreto armado*. in: **Proceedings of the XXIX Jornadas Sudamericanas de Engenharia Estrutural**, Punta del Este, Uruguay, CD-ROM, 2000.

- [175] REDDY, M. V.; GRANDHI, R. V.; HOPPINKS, P. A., *A reliability based structural optimization: a simplified safety index approach*. **Computers and Structures**, V.53, No.6, pp.1407-1418, 1994.
- [176] REH, S.; BRÜCKNER-FOIT, A.; BÖHM, F., *Reliability analysis of complex structures with random material properties and random geometry*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'94**, Innsbruck, Austria, pp.399-402, 1994.
- [177] REHAK, D. R.; THEWALT, C. R.; DOO, L. B., *Neural network approaches in structural mechanics computations*, In: **Proceedings of the Computer Utilization in Structural Engineering**, Edited by B. K. Nelson, ASCE, New York, USA, pp.168-176, 1989.
- [178] RIPLEY, B. D., *Stochastic simulation*, Willey series in probability and mathematical statistics, 237p., 1987.
- [179] ROCHA, M. M., *Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil*, **Dissertação de Mestrado**, CPGEC / UFRGS, 113p., Porto Alegre, 1989.
- [180] ROGERS, J., *Simulating structural analysis with neural networks*, **Journal of Computing in Civil Engineering**, V. 8, No. 2, pp. 252-265, 1994.
- [181] ROGERS, J.; LAMARSH, W. J., *Application of neural network to simulate analysis in an optimization process*, In: **Proceedings of the Artificial Intelligence in Design Conference**, Sydney, Australia, pp.739-754, 1992.
- [182] ROUX, W. J.; PREZ, R. J. DU., *Design optimization of a semi-solid tyre using response surface approach approximation*, **Engineering Computations**, V.16, No.2, pp.165-184, 1999.
- [183] RUMELHART, D. E.; HINTON, G. E.; WILLIAMS, R. J., *Learning internal representation by error propagation*, In: **Proceedings of the Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition**, Edited by D.E. Rumeihart and J. L. McClelland, V.1, MIT Press, USA, 1986.
- [184] SAMMAN, M. M.; BISWAS, M.; PANDEY, A. K., *Employing pattern recognition for detecting cracks in a bridge model*, **The Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis**, V.6, No.1, pp.35-44, 1991.

- [185] SARAIVA, J. M. F., *A utilização de redes neurais em conjunto com o método Monte Carlo na análise da confiabilidade de estruturas*. **Tese de Doutorado**, UFRJ, Rio de Janeiro, 151 p., 1997.
- [186] SARAIVA, J. M.; EBECKEN, N. F. F., *Aplicação de redes neurais artificiais no estudo da confiabilidade estrutural*, **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, V.14, No.2, pp.167-179, 1998.
- [187] SARVCSWARAN, C.; ROBERTS, M. B., *Reliability analysis of deteriorating structures-the experience and needs of practising engineering*, **Structural Safety**, V.21, pp. 357-372, 1999.
- [188] SARZEAUD, O.; STEPHAN, Y.; TOUZET, C., *Finite element meshing using kohonen's selforganizing maps*, In: **Proceedings of the Artificial Neural Networks**, Edited by T. Kohonen, K. Makisara, O. Simula and J. Kangas, pp.1313-1317, Elsevier Science Publishers, 1991.
- [189] SCANLON, A., *Applications in concrete structures*, **Probabilistic Structural Mechanics Handbook**, Edited by C. Sundararajan, Chapman & Hall Ltd., New York, pp.663-683, 1995.
- [190] SCHÜELLER G. I.; STIX, R., *A critical appraisal of methods to determine failure probabilities*, **Structural Safety**, V.4, pp.293-309, 1987.
- [191] SELLIER, A.; PINGLOT, M., *A comparative study of probabilistic methods in structural safety analysis*, In: **Proceedings of the ICOSSAR'94**, Innsbruck, Austria, pp. 1329-1336, 1994.
- [192] SHAO, S.; MUROTSO, Y., *Structural reliability analysis using a neural network*. **Japanese Society in Mechanical Engineering**, V.62, No.603, pp.2628-2634, 1997.
- [193] SHEGG, A.; DECANINI, L., *Sobre las deformaciones en elementos de hormigón armado*. In: **Proceedings of the XV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural**, CPGEC / UFRGS, Porto Alegre, RS, V.2, pp.1070-1120, 1971.
- [194] SHIEH, R., *Massively parallel structural design using stochastic optimization and mixed neural net/finite element analysis methods*, **Computing Systems in Engineering**, V.5, No.4-6, pp.455-467, 1994.

- [195] SHIEH, R., *Neural network assisted large-scale structural analysis/reanalysis in a massively parallel environment*, In: **Proceedings of the 35th AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC SDM Conference**, pp.1533-1545, Hilton Head, SC, USA, 1994.
- [196] SHINOZUKA, M., *Basic analysis of structural safety*. **Journal of Structural Engineering**, V.109, No.3, pp.721-740, 1983.
- [197] SHINOZUKA, M.; DEODATIS, G., *Simulation of multi-dimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation*, **Applied Mechanics**, V.49, No.1, 1996.
- [198] SMERDA, Z.; KRÍSTEC, V., *Creep and shrinkage of concrete elements and structures*, **Developments in Civil Engineering**, New York, Elsevier Ed., 296p., 1988.
- [199] SOARES, R. C.; VENTURINI, W. S., *Análise estatística de colunas de concreto armado*, In: **Proceedings of the Computational Methods in Engineering'99 (COBEM)**, Edited by P. M. Pimenta; R. M. L. R. F. Brasil; E. S. Almeida, pp.218.2-218, 1999.
- [200] SOUZA, L. A.; DE LIMA, E. C. P.; EBECKEN, N. F. F., *Reliability analysis of defective tubular joints*, In: Proceedings of the ISOPE'93 – The third international offshore and polar engineering conference, Singapura, Japão, pp.363-376, 1996.
- [201] SPANOS, P.; ZELDIN, B., *Discretization aspects of stochastic finite elements*. In: **Proceedings of the ICOSSAR'98**, Edited by Shiraishi, Shinozuka & Wen, Balkema, Rotterdam, pp.835-842, 1998.
- [202] SRIDVIDYA, A.; RANGANATHAN, R., *Reliability based optimal design of reinforced concrete frames*, **Computers and Structures**, V.57, No.4, pp.651-661, 1995.
- [203] SRIDVIDJA, A.; RANZMATHON, R., *Reliability concrete based optimal design of reinforced concrete frames*, **Computers and Structures**, V.57, No.4, pp.651-661, 1994.
- [204] STEWART, M. G., *Serviceability reliability analysis of reinforced concrete structures*. **Journal of Structural Engineering**, V.122, No.7, 1996.

- [205] SWIFT, R.; BATILL, S. M., *Application of neural networks to preliminary structural design*, In: **Proceedings of the 2<sup>th</sup> AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC SDM Conference**, V.1, pp.335-343, New York, USA, 1991.
- [206] SZEWCZYK, Z.; HAJELA, P., *Damage detection in structures based on feature sensitive neural networks*, **Journal of Computing in Civil Engineering.**, V.8, No.2, 1994.
- [207] SZEWCZYK, Z.; HAJELA, P., *Feature sensitive neural networks in structural response estimation*, In: **Proceedings of the ANNIE'92, Artificial Neural Networks in Engineering Conference**, November, 1992.
- [208] SZEWCZYK, Z.; HAJELA, P., *Function extrapolation in structural reanalysis using neural networks*, In: **Proceedings of the 3<sup>th</sup> AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC SDM Conference**, pp.2247-2256, Hilton Head, SC, USA, 1994.
- [209] SZEWCZYK, Z.; HAJELA, P., *Neural network approximation in a simulated annealing based optimal structural design*, In: **Proceedings of the 28<sup>th</sup> Society of Engineering Science Meeting**, Florida, USA, 1991.
- [210] SZEWCZYK, Z.; HAJELA, P., *Neural network based damage detection in structures*, In: **Proceedings of the ASCE 8th Computing in Civil Engineering Conference**, Texas, USA, June, 1992.
- [211] SZEWCZYK, Z.; HAJELA, P., *Neural network based selection of dynamic system parameters*, In: **Proceedings of the CSME 1992 Forum**, Montreal, Canada, June, 1992.
- [212] TAKAHASHI, I.; YOSHIOKA, T., *Use of artificial neural networks for fault identification in a beam structure*, In: **Proceedings of Developments in Neural Networks and Evolutionary Computing for Civil and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping, pp.15-23, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1995.
- [213] TANDJIRIA, V.; LOW, B. K., *Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods*, **Structural Safety**, V. 22, pp.335-355, 2000.
- [214] THEOCARIS, P. S.; PANAGIOTOPOULOS, P. D., *Generalized hardening plasticity approximated via anisotropic elasticity: a neural network approach*, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, V.125, pp.123-139, 1995.

- [215] THEOCARIS, P. S.; PANAGIOTOPOULOS, P. D., *Hardening plasticity approximated via anisotropic elasticity*, **Mathematical Mechanics**, The Fokker-Planck Equation in a Neural Network Environment, Edited by Zamm Z. angew., V.75, pp.889-900, 1995.
- [216] THEOCARIS, P. S.; PANAGIOTOPOULOS, P. D., *Neural networks for computing in fracture mechanics: methods and prospects of applications*, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, V.103, pp.213-228, 1993.
- [217] THEOCARIS, P. S.; PANAGIOTOPOULOS, P. D., *Plasticity including the Bauschinger effect, studied by a neural network approach*, **Acta Mechanica**, V.113, pp.63-75, 1995.
- [218] THOFT-CHRISTENSEN, P., *Assessment of the reliability profiles for concrete bridges*. **Cement and Concrete Research**, pp.141-296, 1998.
- [219] THOFT-CHRISTENSEN, P.; MUROTSO, Y., *Applications of structural systems reliability theory*. Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [220] VAL. D.; BLJUGER, F.; YANKELEVSKY, D., *Optimization problem solution in reliability analysis of reinforced concrete structures*, **Computers and Structures**, V.60, No.3, pp.351-355, 1997.
- [221] VAL. D.; BLJUGER, F.; YANKELEVSKY, D., *Reliability evaluation in nonlinear analysis of reinforced concrete structures*, **Structural Safety**, V.19, No.2, pp.203-217, 1997.
- [222] VANLUCHENE, R. D.; SUN, R., *Neural networks in structural engineering*, **Microcomputers in Civil Engineering**, V.5, pp.207-215, 1990.
- [223] VISMANN, U.; ZILCH, K., *Non-linear and safety evaluation by finite element reliability method*. **CEB Bulletin d'Information No.229**, pp.49-73, 1991.
- [224] VITALI, R.; PARK, O.; HAFTKA, R. T.; SHANKAR, B. V., *Structural optimization of a hat-stiffened panel by response surface techniques*, In: **Proceedings of the 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference**, Kissimmee, Florida, USA, Part 4, pp. 2983-2993, 1997.

- [225] WANG, D.; CHOWDHURY, M. R.; HALDAR, A., *System reliability evaluation considering strength and serviceability requirements*. **Computers and Structures**, V.62, No.5, pp.883-896, 1997.
- [226] WASSERMAN, P. D., *Neural computing: theory and practice*, Van Nostrand Reinhold Int. Company Ltd., New York, USA, 1989.
- [227] WINSTON, P. H., *Artificial intelligence*, Third Edition, AddisonWesley Publishing Company, USA, 1992.
- [228] WITTMANN, F. H.; MARTINOLA, G., *Optimization of concrete properties by neural networks*, In: **Proceedings of the International Conference of Concrete 2000 - Economic and Durable Constructions, Through Excellence**, Dundee, UK, V.2, pp.1889-1898, 1993.
- [229] WONG, F. S. *Slope reliability and response surface method*. **Journal of Geotechnical Engineering**, V. 111, No.1, pp.32-53, 1985.
- [230] WU, X., GHABOUSSI, B.; GARRETT, J. H., *Use of neural networks in detection of structural damage*, **Computers and Structures**, V.42, No.4, pp.649-659, 1992.
- [231] YAMAZAKI, F.; SHINOZUKA, M., *Digital generation of non-Gaussian stochastic fields*. **Journal of Engineering Mechanics**, V.114, No.7, 1988.
- [232] YAMAZAKI, F.; SHINOZUKA, M., *Simulation of stochastic fields by statistical preconditioning*. **Journal of Engineering Mechanics**, V.116, No.2, 1990.
- [233] YANG, Y.-B.; SHIEH, M.-S., *Solution method for nonlinear problems with multiple critical points*, **AIAA Journal**, V.28, No.12, pp.2110-2116, 1990.
- [234] YANG, Y.-S.; LEE, J.-O., *Importance sampling combined with variance reduction techniques and its application to response surface method*. **Internal Working Report** - lecture notes, INSDel, NAOE, Seoul National University, Korea, 1999.
- [235] YAO, T. H.-J.; WEN, Y.-K., *Response surface method for time-variant reliability analysis*. **Journal of Structural Engineering**, V.122, No.2, pp.193-201, 1996,
- [236] YEN, G. G., *Identification and control of large structures using neural networks*, **Computers and Structures**, V. 52, No. 5, pp.859-870, 1994.

- [237] ZENG, P., *Artificial neural network computing in structural engineering*, In: **Proceedings of the Developments in Neural Networks and Evolutionary Computing for Civil and Structural Engineering**, Edited by B.H.V. Topping, pp.37-50, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, 1995.
- [238] ZHANG, J.; ELLINGWOOD, B., *SFEM in nonlinear structural reliability analysis*, In: **Proceedings of the ICOSSAR'98**, Edited by Shiraishi, Shinozuka & Wen, Balkema, Rotterdam, pp.867-874, 1998.
- [239] ZHENG, Y.; DAS P. K., *Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis*, **Engineering Structures**, V.22, pp.544-551, 2000.
- [240] ZIENKIEWICZ, O. C.; OWEN, D. R. J.; PHILLIPS, D. V.; NAYAK, G. C., *Finite element methods in the analysis of reactor vessels*, **Nuclear Engineering and Design**, V.20, pp. 507-541, 1972.
- [241] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L., *The finite element method: solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*. 4 ed., Mc. Graw Hill, V. 2, 1989.
- [242] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L., *The finite element method: basic formulation and linear problems*. 4 ed. New York: Mc. Graw Hill, V. 1, 1989.

# Apêndice I

## Formulação Geral para Superfícies de Falha-Plastificação para o Concreto

### A-I.1 Introdução

Uma superfície de falha para o concreto pode ser expressa genericamente da seguinte forma:

$$f(\rho, \sigma_m, \theta) = \rho - \rho_f(\sigma_m, \theta) = 0 \quad |\theta| \leq 60^\circ \quad (\text{I-1})$$

onde  $\rho = \sqrt{2J_2} / f_{cm}$  é a componente de tensão perpendicular ao eixo hidrostático  $\sigma_m = \frac{I_1}{3}$  no espaço das tensões principais ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) normalizada pela tensão média uniaxial a compressão e  $\rho_f(\sigma_m, \theta)$  define a envoltória de falha no plano desviador e que é dada por diferentes expressões para diferentes modelos de falha. Ao considerar-se a viscoplasticidade, deve-se levar em consideração o aumento ou diminuição da superfície no espaço das tensões principais. Desta forma a equação da superfície de carregamento fica na forma:

$$f(\rho, \sigma_m, \theta) = \rho - k\rho_f(\sigma_m, \theta) = 0 \quad |\theta| \leq 60^\circ \quad (\text{I-2})$$

onde o parâmetro  $k = k(I_1, \varepsilon_{vp}^{eq})$  representa a função para a dilatação ou encolhimento da superfície. Este parâmetro pode ser definido através de ensaios experimentais uniaxiais, podendo ser extrapolado para estados triaxiais através do uso de tensões e deformações equivalentes. Pode-se colocar a expressão para este fator como  $k = k_0(\varepsilon_{vp}^{eq})k_1(I_1)$ . A forma da relação  $k_1(I_1)$ , empregada neste trabalho é a mesma que descrita em Chen *et al.*(1988) e que é dada pela seguinte expressão:

$$k_1(I_1, \varepsilon_{vp}^{eq}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{I_1}{3} \geq \xi_t \\ 1 + \frac{(1 - k_0(\varepsilon_{vp}^{eq}))[-\xi_t(-2\xi_c + \xi_t) - 2\xi_c \frac{I_1}{3} + \frac{I_1^2}{9}]}{(\xi_c - \xi_t)^2} & \text{se } \xi_t \geq \frac{I_1}{3} \geq \xi_c \\ \frac{k_0(\varepsilon_{vp}^{eq})(\bar{\xi} - \frac{I_1}{3})(\bar{\xi} + \frac{I_1}{3} - 2\xi_c)}{(\bar{\xi} - \xi_c)^2} & \text{se } \frac{I_1}{3} < \xi_c \end{cases} \quad (\text{I-3})$$

Para a determinação do vetor normal à superfície de carregamento, deve-se diferenciar a função da superfície de carregamento em relação ao estado de tensões, chegando-se às seguintes expressões:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial I_1}}_{B_0} \underbrace{\frac{\partial I_1}{\partial \sigma}}_{A_0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial J_2}}_{B_1} \underbrace{\frac{\partial J_2}{\partial \sigma}}_{A_1} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial J_3}}_{B_2} \underbrace{\frac{\partial J_3}{\partial \sigma}}_{A_2} \quad (\text{I-4})$$

onde

$$A_0 = \delta_{ij} \quad A_1 = s_{ij} \quad A_2 = s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij} \quad (\text{I-5})$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $A_0$  é a matriz identidade,  $A_1$  é o tensor de tensões desviadoras e  $A_2$  é o tensor do quadrado das tensões desviadoras. Os outros termos  $B_0$ ,  $B_1$  e  $B_2$  vêm dados por:

$$B_0 = -\frac{\partial k}{\partial I_1} \rho_f - \underbrace{\frac{\partial \rho_f}{\partial I_1}}_{C_0} k \quad B_1 = \frac{1}{\rho} - k \underbrace{\frac{\partial \rho_f}{\partial J_2}}_{C_1} \quad B_2 = -k \underbrace{\frac{\partial \rho_f}{\partial J_3}}_{C_2} \quad (\text{I-6})$$

com

$$\frac{\partial k}{\partial I_1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{I_1}{3} \geq \xi_t \\ \frac{(1 - k_0(\varepsilon_{vp}^{eq}))[-\frac{2}{3}\xi_c + \frac{2}{9}I_1]}{(\xi_c - \xi_t)^2} & \text{se } \xi_t \geq \frac{I_1}{3} \geq \xi_c \\ -\frac{2}{9}k_0(\varepsilon_{vp}^{eq})\frac{(I_1 - 3\xi_c)}{(\bar{\xi} - \xi_c)^2} & \text{se } \frac{I_1}{3} < \xi_c \end{cases} \quad (\text{I-7})$$

As derivadas  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são definidas dependendo da forma específica que assume a função  $\rho_f$ .

Assim,  $f(\rho, \sigma_m, \theta) > 0$  define a região de falha e/ou carregamento. A expressão para os diferentes modos de falha existentes serão explicitados a seguir:

## A-I.2 Critérios de Falha

### A-I.2.1 Critério de Von-Mises

Este critério envolve apenas o invariante  $J_2$  da seguinte forma:

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (\text{I-8})$$

com  $k = f_{cm} / \sqrt{3}$ . Na sua forma geral a superfície fica na forma:

$$f(\rho) = \rho - \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{I-9})$$

e os parâmetros para as derivadas  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  ficam portanto:

$$C_0 = 0 \quad C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = 0 \quad (\text{I-10})$$

### A-I.2.2 Critério de dois parâmetros de Cervera

O critério de dois parâmetros de Cervera(1988) é baseado nos dois invariantes  $I_1$  e  $J_2$ , combinados da seguinte forma:

$$f(I_1, J_2) = cI_1 + \sqrt{c^2 I_1^2 + 3\beta J_2} - f_{cm} = 0 \quad (\text{I-11})$$

Os dois parâmetros  $c$  e  $\beta$  foram determinados em função de dados experimentais de Kupfer e valores característicos são dados por:

$$c = 0.1775 \quad \beta = 1.355 \quad (\text{I-12})$$

A superfície em sua forma geral fica na forma:

$$f(\rho, I_1) = \rho - \sqrt{\frac{-2}{3b} \cdot \left( \frac{2cI_1}{f_{cm}} - 1 \right)} \quad (\text{I-13})$$

e as derivadas  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  ficam portanto:

$$C_0 = -\frac{c\sqrt{6}}{3f_{cm}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{2I_1cb}{f_{cm}} + b}} \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \quad (\text{I-14})$$

### A-I.2.3 Critério de quatro parâmetros de Ottosen

Ottosen em 1977, propôs o seguinte critério de falha o qual envolve os três invariantes  $I_1$ ,  $J_2$ ,  $\theta$ :

$$f(I_1, J_2, \theta) = \alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (\text{I-15})$$

onde  $\lambda$  é uma função de  $\cos(3\theta)$  da seguinte forma:

$$\lambda = \begin{cases} c_1 \cos\left[\frac{1}{3} \operatorname{acos}(c_2 \cos 3\theta)\right] & \text{para } \cos 3\theta \geq 0 \\ c_2 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{acos}(-c_2 \cos 3\theta)\right] & \text{para } \cos 3\theta < 0 \end{cases} \quad (\text{I-16})$$

Sendo que os quatro parâmetros  $\alpha, \beta, c_1, c_2$  são determinados experimentalmente. Uma boa correlação destes parâmetros com a relação  $k = f_{tm} / f_{cm}$  é dada por (CEB-FIP model, 1990):

$$\alpha = \frac{1}{1.9k^{1.4}} \quad \beta = \frac{1}{3.7k^{1.1}} \quad c_1 = \frac{1}{0.7k^{0.9}} \quad c_2 = 1 - 6.8(k - 0.07)^2 \quad (\text{I-17})$$

Na sua forma geral, a superfície de falha de Ottosen fica:

$$f(\rho, I_1, \theta) = \rho - \frac{1}{2\alpha} \left[ -\sqrt{2}\lambda + \sqrt{2\lambda^2 - 8\alpha\left(\beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1\right)} \right] = 0 \quad (\text{I-18})$$

As derivadas  $C_0, C_1$  e  $C_2$  ficam portanto:

$$C_0 = -\frac{2b}{f_{cm} \sqrt{2\lambda^2 - 8a\left(b \frac{I_1}{f_{cm}} - 1\right)}}$$

$$C_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2a} + \frac{\lambda}{a \sqrt{2\lambda^2 - 8\left(b \frac{I_1}{f_{cm}} - 1\right)}} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial J_2} \quad (\text{I-19})$$

$$C_2 = \frac{1}{2a} \left[ -\sqrt{2} + \frac{2\lambda}{\sqrt{2\lambda^2 - 8a\left(b \frac{I_1}{f_{cm}} - 1\right)}} \right] \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial J_3}$$

onde,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \begin{cases} -\frac{c_1 c_2 \sin 3\theta \sin\left[\frac{1}{3} \operatorname{acos}(c_2 \cos 3\theta)\right]}{\sin[\operatorname{acos}(c_2 \cos 3\theta)]} & \cos 3\theta \geq 0 \\ -\frac{c_1 c_2 \sin 3\theta \sin\left\{\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{acos}[-c_2 \cos 3\theta]\right\}}{\sin[\operatorname{acos}(-c_2 \cos 3\theta)]} & \cos 3\theta < 0 \end{cases} \quad (\text{I-20})$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \sin 3\theta} \cdot \frac{J_3}{J_2^{5/2}} \cdot f_{cm}^2 \quad (\text{I-21})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_3} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \sin 3\theta} \cdot \frac{f_{cm}^3}{J_2^{3/2}} \quad (\text{I-22})$$

#### A-I.2.4 Critério de quatro parâmetros de Hsieh-Ting-Chen

Hsieh *et al.* (citado em Chen, 1988) em 1982 propôs uma expressão para a função  $\lambda$  do modelo de Ottosen mais simples, o qual também ajusta-se bem aos dados experimentais. Na sua forma geral, o modelo de Hsieh *et al.* fica:

$$f(\rho, I_1, \theta) = \rho - \frac{I}{2a} \left[ -(b \cos \theta + c) + \sqrt{(b \cos \theta + c)^2 - 4a \left( \sqrt{3} d \frac{I_1}{3} - I \right)} \right] = 0 \quad (\text{I-23})$$

onde os quatro parâmetros  $a, b, c$  e  $d$  são obtidos experimentalmente de forma semelhante aos obtidos para a superfície de Ottosen, chegando-se aos valores aproximados para qualquer relação  $k$ , que melhor se aproximam aos resultados de ensaios biaxiais de Kupfer *et al.* (1969) e os resultados de ensaios triaxiais de Mills e Zimmerman (1970):

$$a = 1.0054 \quad b = 7.4638 \quad c = 0.6869 \quad d = 5.678 \quad (\text{I-24})$$

As derivadas  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são dadas por:

$$C_0 = -\frac{d\sqrt{3}}{3f_{cm} \sqrt{(b \cos \theta + c)^2 - 4a \left( \frac{\sqrt{3} I_1 d}{3f_{cm}} - I \right)}} \quad (\text{I-25})$$

$$C_1 = \frac{b \sin \theta}{2a} \left[ 1 - \frac{b \cos \theta + c}{\sqrt{(b \cos \theta + c)^2 - 4a \left( \frac{\sqrt{3} I_1 d}{3f_{cm}} - I \right)}} \right] \cdot \frac{\partial \theta}{\partial J_2} \quad (\text{I-26})$$

$$C_1 = \frac{b \sin \theta}{2a} \left[ 1 - \frac{b \cos \theta + c}{\sqrt{(b \cos \theta + c)^2 - 4a \left( \frac{\sqrt{3} I_1 d}{3f_{cm}} - I \right)}} \right] \cdot \frac{\partial \theta}{\partial J_3} \quad (\text{I-27})$$

#### A-I.2.5 Critério de cinco parâmetros de Willam-Warnke

Os critérios de falha de quatro parâmetros de Ottosen e de Hsieh-Ting-Chen apesar de satisfazerem os critérios de convexidade para a superfície de falha para todos os estados de tensões, ainda assim possuem cantos nos meridianos de compressão onde matematicamente as derivadas não existem. Embora não se utilize as derivadas da superfície de falha, geralmente adota-se como superfície de plastificação uma superfície da mesma forma que a da superfície de falha. Então para que haja continuidade das derivadas ao longo da superfície de plastificação em todos os estados de tensão e que se tenha uma melhor convergência durante iterações na análise numérica, é desejável que haja suavidade em toda a superfície de plastificação. A superfície de Willam-Warnke possui esta propriedade, uma vez que seu modelamento é feito a partir da hipótese de ter-se meridianos de compressão e de tração na forma de parábolas quadráticas que são perpendiculares à superfície.

$$f(\rho, I_1, \theta) = \rho - \frac{s(I_1, \theta) + t(I_1, \theta)}{v(I_1, \theta)} = 0 \quad (\text{I-28})$$

onde

$$\begin{aligned} s(I_1, \theta) &= 2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos\theta \\ u(I_1, \theta) &= 4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_c\rho_t \\ t(I_1, \theta) &= \rho_c(2\rho_t - \rho_c)\sqrt{u} \\ v(I_1, \theta) &= 4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2 \end{aligned} \quad (\text{I-29})$$

Com  $\rho_c$  e  $\rho_t$  dados por:

$$\begin{aligned} \rho_c &= -\frac{I_1}{2b_2} \left[ b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - \frac{I_1}{3})} \right] \\ \rho_t &= -\frac{I_1}{2a_2} \left[ a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2(a_0 - \frac{I_1}{3})} \right] \end{aligned} \quad (\text{I-30})$$

As cinco constantes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são calculadas a partir dos resultados biaxiais de Kupfer *et al.* (1969) e outros resultados triaxiais, chegando-se aos valores abaixo, que infelizmente também são independentes da relação  $k$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.1025 & a_1 &= -0.8403 & a_2 &= -0.0910 \\ b_0 &= a_0 & b_1 &= -0.4507 & b_2 &= -0.1018 \end{aligned} \quad (\text{I-31})$$

As derivadas  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  vêm dadas por:

$$C_2 = \frac{\sqrt{3}(\rho_c^2 - \rho_t^2)}{v(4\cos^2\theta - 1)J_2^{3/2}} \{ 4\rho_c\cos\theta - \rho_c [1 + 2u^{-1/2}(2\rho_t - \rho_c)\cos\theta] \} \quad (\text{I-32})$$

$$C_1 = -\frac{3J_3}{2J_2} A_2 \quad (\text{I-33})$$

$$\begin{aligned} C_0 = & -\frac{\dot{\rho}_t}{3\nu} \{4\rho(\rho_c - 2\rho_{tc}) + 8\rho\rho_t \cos^2\theta - \\ & - [4\rho_c\rho_t \cos\theta - 2\rho_c u^{1/2} + \rho_c(2\rho_t - \rho_c)u^{-1/2}(4\rho_t \cos^2\theta - 5\rho_t + 2\rho_c)]\} \\ & + \frac{\dot{\rho}_c}{3\nu} \{2\rho(\rho_c - 2\rho_{tc}) + 8\rho\rho_t \cos^2\theta - \\ & - [2(3\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos\theta + 2(\rho_t - \rho_c)u^{1/2} \\ & + 2\rho_c(2\rho_t - \rho_c)u^{-1/2}(2\rho_c \cos^2\theta - \rho_t)]\} \end{aligned} \quad (\text{I-34})$$

com  $\dot{\rho}_c$  e  $\dot{\rho}_t$  dados por:

$$\dot{\rho}_c = \frac{1}{b_1 + 2b_2\rho_{ct}} \quad \dot{\rho}_t = \frac{1}{a_1 + 2a_2\rho_t} \quad (\text{I-35})$$