

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução Analítica da Equação da Difusão de  
Nêutrons Multi-Grupo em Cilindro Infinito  
pela Técnica da Transformada de Hankel**

por

Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Marco Tullio Menna B. de Vilhena  
Orientador

Porto Alegre, Julho de 2011.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Lombaldo Fernandes, Julio Cesar

Solução Analítica da Equação da Difusão de Nêutrons Multi-Grupo em Cilindro Infinito pela Técnica da Transformada de Hankel / Julio Cesar Lombaldo Fernandes.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2011.

55 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2011.

Orientador: Menna B. de Vilhena, Marco Tullio

Dissertação: Fenômenos de Transporte  
Fenômenos de transporte, Equação de difusão, coordenadas cilíndricas, Transformada de Hankel

# Solução Analítica da Equação da Difusão de Nêutrons Multi-Grupo em Cilindro Infinito pela Técnica da Transformada de Hankel

por

Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna B. de Vilhena

Banca examinadora:

Dr. Antonio Carlos Alvim  
COPPE - UFRJ

Dr. Bardo Ernest Bodmann  
ProMec - UFRGS

Dr. Mark Thompson  
PPGMAp - UFRGS

Dr. Fabio Souto Azevedo  
DMPA - UFRGS

Dissertação apresentada  
22/07/2011.

Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Cristina Varrialle  
Coordenador

## Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	vi
LISTA DE TABELAS . . . . .	ix
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	x
RESUMO . . . . .	xi
ABSTRACT . . . . .	xii
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO . . . . .	5
3 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA MAIS DE UM GRUPO DE EN- ERGIA . . . . .	8
3.1 Formulação do Problema . . . . .	8
3.2 Aplicando a Transformada de Hankel . . . . .	9
3.3 Solução Particular do Fluxo Rápido . . . . .	11
3.4 Solução Particular do Fluxo Térmico . . . . .	13
3.5 Solução Homogênea Associada . . . . .	14
3.6 O termo Fonte . . . . .	16
3.7 Resultados . . . . .	17
3.8 Conclusões do Capítulo . . . . .	21

<b>4 SOLUÇÃO RECURSIVA PARA UM PROBLEMA DE MULTI-REGIÃO . . . . .</b>	<b>22</b>
4.1 Formulação do Problema . . . . .	22
4.2 Formulação para o caso de N regiões . . . . .	28
4.3 Simulações para o caso de 2 regiões . . . . .	28
4.4 Resultados . . . . .	31
4.5 Conclusões do capítulo . . . . .	32
<b>5 SOLUÇÃO ANALÍTICA MONOERGÉTICA DEPENDENTE DO TEMPO . . . . .</b>	<b>33</b>
5.1 Formulação do Problema . . . . .	33
5.2 Definição da Transformada Finita de Hankel . . . . .	34
5.3 Aplicando a Transformada Finita de Hankel . . . . .	34
5.4 Fonte Estacionária . . . . .	36
5.5 Solução Estacionária . . . . .	37
5.5.1 Análise Assintótica . . . . .	38
5.6 Aplicação ao cálculo do fator Build-up . . . . .	44
5.6.1 Fonte Delta Dirac . . . . .	44
5.6.2 Fator de Build-up . . . . .	49
5.7 Conclusões do Capítulo . . . . .	50
<b>6 CONCLUSÃO E PROBLEMAS EM ABERTO . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>53</b>

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1: Representação de uma partícula neutra no espaço.
- Figura 3.1: Gráfico do fluxo de nêutrons rápidos em um reator nuclear cilíndrico homogêneo com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(1)}$ .
- Figura 3.2: Gráfico do fluxo de nêutrons térmicos em um reator nuclear cilíndrico homogêneo com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(1)}$ .
- Figura 3.3: Gráfico do fluxo de nêutrons rápidos em um reator nuclear cilíndrico homogêneo com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(2)}$ .
- Figura 3.4: Gráfico do fluxo de nêutrons térmicos em um reator nuclear cilíndrico homogêneo com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(2)}$ .
- Figura 3.5: Gráfico do fluxo de nêutrons rápidos em um reator nuclear cilíndrico homogêneo com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(3)}$ .
- Figura 3.6: Gráfico do fluxo de nêutrons térmicos em um reator nuclear cilíndrico homogêneo com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(3)}$ .
- Figura 3.7: Gráfico de  $\frac{C}{A(\xi)B(\xi)}$  para diferentes parâmetros nucleares.
- Figura 4.1: Cilindro Heterogêneo com  $N$  regiões.
- Figura 4.2: Cilindro Heterogêneo com 2 regiões.
- Figura 4.3: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.2$  e  $D_1 > D_2$ .
- Figura 4.4: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.45$  e  $D_1 > D_2$ .
- Figura 4.5: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.5$  e  $D_1 > D_2$ .

- Figura 4.6: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.75$  e  $D_1 > D_2$ .
- Figura 4.7: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.25$  e  $D_1 < D_2$ .
- Figura 4.8: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.5$  e  $D_1 < D_2$ .
- Figura 4.9: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.75$  e  $D_1 < D_2$ .
- Figura 4.10: Gráfico do fluxo de nêutrons em cilindro heterogêneo, para duas regiões com interface em  $r = 0.5$  e parâmetros idênticos.
- Figura 5.1: Gráfico do Fluxo de Nêutrons por  $r$  para diferentes valores de  $t$ .
- Figura 5.2: Gráfico do Fluxo de Nêutrons, solução estacionária.
- Figura 5.3: Gráfico do fluxo de nêutrons com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(1)}$  e fonte Delta Dirac.
- Figura 5.4: Gráfico do fluxo de nêutrons com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(2)}$  e fonte Delta Dirac.
- Figura 5.5: Gráfico do fluxo de nêutrons com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(3)}$  e fonte Delta Dirac.
- Figura 5.6: Gráfico do fluxo de nêutrons com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(4)}$  e fonte Delta Dirac.
- Figura 5.7: Gráfico do fluxo de nêutrons com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(5)}$  e fonte Delta Dirac.
- Figura 5.8: Gráfico do fluxo de nêutrons com parâmetros nucleares definidos por  $P^{(6)}$  e fonte Delta Dirac.

- Figura 5.9: Gráfico do fator de Buildup para diferentes valores de  $t$ .



## LISTA DE TABELAS

- Tabela 3.1: Conjuntos de parâmetros utilizados para cálculo de fluxo de nêutrons.
- Tabela 3.2: Resultados Normalizados para o Fluxo Rápido.
- Tabela 3.3: Resultados Normalizados para o Fluxo Térmico.
- Tabela 5.1: Conjuntos de parâmetros utilizados para cálculo de fluxo de nêutrons dependente do tempo com fonte Delta Dirac.

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $D_g^{(R)}$  é coeficiente de difusão de nêutrons do grupo  $g$ , na região  $(R)$ .
- $\phi_g^{(R)}$  é fluxo de nêutrons no grupo  $g$ , na região  $(R)$ .
- $\Sigma_{Rg}^{(R)}$  é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo  $g$ , na região  $(R)$ .
- $\chi_g$  é o espectro integrado de nêutrons do grupo  $g$ .
- $\nu\Sigma_{fg}^{(R)}$  é o produto do número médio de nêutrons acrescidos na fissão pela seção de choque macroscópica de fissão do grupo  $g$ , na região  $(R)$ .
- $\Sigma_{gg'}^{(R)}$  é a seção de choque macroscópica do grupo  $g'$  para o grupo  $g$ , na região  $(R)$ .
- $\Delta_{r,z}$  é o operador elíptico de segunda ordem descrito por  $(1/r) (\partial_r (r\partial_r)) + \partial_{zz}$ .
- $\Delta_r$  é o operador elíptico de segunda ordem descrito por  $(1/r) (\partial_r (r\partial_r))$ .

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma solução analítica para equações difusivas unidimensionais em geometria cilíndrica da Teoria geral de Perturbação em um cilindro homogêneo pela transformada de Hankel. Apresentamos soluções analíticas para o problema de fonte fixa. Resolvemos também um caso monoenergético em um cilindro heterogêneo utilizando uma formulação recursiva e também usando a Transformada de Hankel. Foi obtida também uma solução analítica dependente do tempo utilizando a Transformada Finita de Hankel. Conhecendo o fluxo de nêutrons, exceto por constantes de integração aplicamos condições de contorno e de interface, após avaliar estas constantes de integração, obtemos a formulação final para o fluxo nestes casos. Os resultados obtidos neste trabalho foram comparados com a literatura, bem como algumas aproximações especificadas e devidamente explicadas ao longo deste.

## ABSTRACT

In this work we present an analytical solution for the one-dimensional diffusion equation in cylindrical geometry from Perturbation Theory inside a homogeneous cylinder by the Hankel Transform. We present analytical solutions for fixed source problem. We solved also a monoenergetic case inside a heterogeneous cylinder using a recursive formulation together with the Hankel Transform. We obtained an analytical solution for the time-dependent diffusion equation using the Finite Hankel Transform. Once the flux of neutrons except for a constant of integration, we apply boundary and interface conditions. After evaluating this constants we obtain the final flux. The obtained results of this work are compared with the literature, as well as some specific approximations are explain throughout this work.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, aos meus pais, Mara e Julio, por todo amor, cuidado, educação e carinho ao longo desses anos. A minha irmã, Ana Paula, a minha família inteira, a minha madrinha Elizabeth, e a minha tia Leidi, o anjo da minha vida. Aos meus amigos de faculdade e outros tantos amigos que fiz ao longo da vida. A minha namorada, Taíne, pelo amor, carinho e apoio incondicional. Ao meu orientador, Prof. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena, pelo exemplo de profissional da área, por sempre estar disposto a me ajudar e pela grande contribuição para o término dessa dissertação. A todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão dessa etapa em minha formação. As agências de fomento pelo apoio financeiro e a UFRGS pelo ensino sério, público e de qualidade ao longo da minha carreira.

# 1 INTRODUÇÃO

A aplicação de Teoria de Perturbação em física de reatores nucleares iniciou com o trabalho de Wigner [15]. Para estudar valores de reatividade e a formulação que ele desenvolveu para este fim é hoje conhecida como Teoria de Perturbação Convencional (CPT). Todavia, devemos ressaltar que os outros autores deram significativas contribuições a teoria. Relembramos, em particular, Soodak [14]. Pioneiro na tentativa de interpretar fisicamente o fluxo adjunto de nêutrons e Usachev [12] que desenvolveu uma nova formulação da teoria incluindo os nêutrons retardados. Além disso, mesmo fora do domínio da Física de Reatores, outros autores também contribuíram de forma significativa para consolidar a Teoria de Perturbação. Mas com o conceito de importância, introduzido por Lewis, isto é, ele identificou o fluxo adjunto como sendo a importância associada a um detetor. Outros formalismos da Teoria de Perturbação foram desenvolvidos. Mencionamos, em particular, o trabalho de Usachev que fez uso do conceito de ciclos de geração de nêutrons, e aquele de Lewis que, através do uso de técnicas variacionais, estendeu o formalismo da Teoria da Perturbação para incluir problemas não lineares. Significantes contribuições foram dadas por Pomraning, Gandini, Komata, Stacey, Seki, Ronen, Becker, Greenspan et al, Oblow, Harris e Backer, Willianse Cacuci et al. No Brasil, em particular na COPPE, os primeiros trabalhos que fizeram uso do formalismo da GPT foram desenvolvidos nas teses de mestrado e doutorados.

A teoria da difusão de nêutrons é amplamente utilizada na análise de criticalidade de reatores cujo conhecimento é fundamental em projetos neutrônicos para o funcionamento e manutenção dos mesmos. O problema de criticalidade, tratado através da equação de difusão é um problema de autovalor, cuja solução fornece o fator de multiplicação (autovalor) e o fluxo de nêutrons, a partir do qual podemos obter a distribuição de potência no núcleo do reator. A solução deste problema de autovalor, ou problema homogêneo, é utilizada para definir o problema de fonte fixa (problema não homogêneo). A fonte fixa nestes casos pode depender

tanto do fluxo de nêutrons quanto do fluxo adjunto, ambos soluções de problema de autovalor. Temos, então, três classes de problemas não-homogêneos: o problema de fonte fixa, de funções auxiliares e de importância.

Podemos aplicar os métodos de diferenças finitas e dos elementos finitos ou métodos nodais para discretizar as equações de fonte fixa, obter um sistema de equações lineares e algébricas e aplicar uma das técnicas iterativas bem estabelecidas para resolver tal sistema. Vale citar como exemplos os esquemas iterativos SOR (Successive Overrelaxation) de Wachspress [13] ou ADI(Alternating Direction Implicit) Bell e Glasstone [20]. Entretanto, estas técnicas iterativas necessitam de pelo menos um parâmetro de aceleração e os seus valores ótimos geralmente são difíceis de serem obtidos.

Todos os métodos de discretização citados anteriormente vêm sendo utilizados de modo eficiente na solução de problemas de criticalidade. O método de diferenças finitas vêm sendo aplicado na equação de difusão de nêutrons em duas dimensões desde a década de 50, Wachspress [13] e até os dias atuais ainda é muito utilizado. No entanto, este método deixa de ser eficiente quando o problema envolve um número muito alto de pontos de malha, aumentando o tempo de execução e consumindo espaço em memória para a sua execução. Essas dificuldades motivaram a pesquisa por métodos que utilizassem um número menor de pontos de malha sem reduzir a precisão nos cálculos. Objetivando essas propriedades, foram desenvolvidos os métodos nodais, Lawrence [21]. Tais métodos apresentam um espaçamento de malha maior do que aquele que se faz necessário no método de diferenças finitas.

Os métodos nodais podem ser classificados em métodos analíticos e métodos polinomiais. Os métodos nodais analíticos estão baseados nas soluções analíticas das equações integradas transversalmente. Como exemplos desta classe de métodos podemos citar ANM (Analytic Nodal Method) Shober [23], o NGFM (Nodal Green's Function Method) Lawrence [21] e o SNM(Spectral Nodal Method) Barros [24]. Já os métodos nodais polinomiais usam polinômios para representar o fluxo. Dentro desta classe temos como exemplos o NEM (Nodal Expansion Method)

Bennewitz [26], um método de correntes de interface, que usa polinômios do quarto grau como solução das equações integradas transversalmente e FEM (Flux Expansion Method), para grandezas médias Montagnini [22], que usa um polinômio do terceiro grau para representar o próprio fluxo de nêutrons.

O método dos pseudos-harmônicos foi criado com o objetivo de contornar certas dificuldades na aplicação dos tradicionais métodos da Teoria da Perturbação. Esta metodologia tem mostrado a sua eficiência e é muito utilizada em Física de Reatores, Gomit [17]. De Abreu [18], propôs uma versão alternativa do método dos pseudo-harmônicos e a mesma foi aplicada em duas dimensões, utilizando-se a discretização em diferenças finitas.

Do formalismo do método dos pseudos-harmônicos decorre um sistema de equações não-homogêneas e os pseudos-harmônicos são usados para resolver tais equações. Devido a esta característica do método dos pseudos-harmônicos, surgiu a idéia de utiliza-lo na solução de problemas de fonte fixa, que são problemas não-homogêneos. Recentemente no trabalho de Lima [16], o problema de fonte fixa foi resolvido combinando-se o método de expansão em pseudo-harmônicos com a discretização nodal FEM. Tratando-se ainda da solução do problema de criticalidade, no trabalho de Derivi [19], foi utilizado o método  $LTS_N$  em meio heterogêneo com multi-grupos de energia em geometria cartesiana unidimensional (placas planas) e espalhamento isotrópico.

Recentemente, Lemos [7], resolveu de forma analítica o problema de autovalor para o fluxo de nêutrons. A idéia básica consiste em aplicar a Transformada de Laplace no conjunto de equações de difusão numa placa plana em um meio heterogêneo considerado um modelo de multigrupo de energia. O fluxo escalar transformado é obtido resolvendo um sistema de equações algébricas e é recuperado através da inversão da transformada de Laplace utilizando a técnica da expansão Heaviside. Aplicando as condições de contorno e de continuidade do fluxo nas interfaces obtemos um sistema linear algébrico homogêneo cujo valor que anula o determinante da matriz associada a este sistema é o valor do fator de multiplicação



efetivo procurado. Tal valor é encontrado ao aplicarmos o método da bissecção na equação transcendental obtida para o fator de multiplicação efetivo.

Dentre os métodos determinísticos aplicados à equação do transporte de Boltzmann em geometria cilíndrica, Mitsis [25] trabalhou um problema com simetria azimutal, num cilindro de altura infinita e espalhamento isotrópico.

Nossa idéia é utilizar a Transformada de Hankel clássica e a Transformada de Hankel Finita para obtenção do fluxo de nêutrons dentro de um cilindro homogêneo. Utilizando esta técnica podemos inverter o problema conhecendo a matriz do sistema para o caso de dois grupos de energia, esta matriz contém os parâmetros nucleares envolvidos e também a variável que representa o espaço transformado. Ao isolarmos ambos fluxos pela técnica de diagonalização da matriz em questão, obtemos a solução do sistema transformado. Utilizamos alguns teoremas, entre eles a relação de parseval, para que possamos inverter estes fluxos, e definitivamente encontrar a solução unidimensional em uma fórmula fechada envolvendo a variável  $r$ .

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos a derivação da equação da difusão de nêutrons através a equação de Boltzman linearizada, a equação do transporte. E explicitamos as equações que governam sistemas multi-grupos e heterogêneos. No capítulo 3, apresentamos a metodologia proposta para resolver o problema de dois grupos de energia em um cilindro homogêneo. No capítulo 4, descrevemos um formulação recursiva para obter a solução em um cilindro heterogêneo em um caso mono-energético. No capítulo 5, apresentamos um problema em um cilindro dependente do tempo, com algumas aplicações, entre elas o caso de build-up em reatores nucleares.

## 2 DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

Considerando um volume arbitrário  $V$  contendo nêutrons monoenergéticos que serão espalhados e absorvidos ao interagir (consideramos a notação  $\int_{\mathbf{V}} = \iiint_{VE\Omega}$ ).

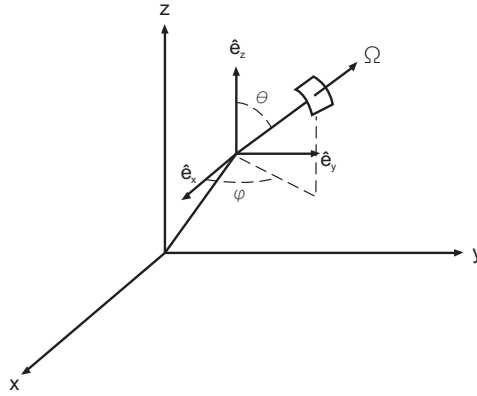


Figura 2.1: Partícula Neutra no espaço.

Integrando no volume infinitesimal  $dE$  para todas energias  $E$  e para todas direções  $\Omega$ . A taxa de variação de nêutrons no volume  $V$  é igual a taxa com que os nêutrons são produzidos menos a taxa com que são absorvidos ou escapam de  $V$ . Vamos considerar  $n(\mathbf{r}, t)$  a densidade de nêutrons no ponto  $\mathbf{r}$  e no tempo  $t$ , o número total de nêutrons em  $V$  é simplesmente  $\int_{\mathbf{V}} n(\mathbf{r}, t) dV$ . Podemos escrever então

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VE\Omega} n(\mathbf{r}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}} n(\mathbf{r}, t) dV = \text{Produção} - \text{Absorção} - \text{Fuga} \quad (2.1)$$

A produção pode ser representada com um termo de fonte  $S(\mathbf{r}, t)$ . De modo que

$$\text{Produção} = \int_{\mathbf{V}} S(\mathbf{r}, t) dV \quad (2.2)$$

A taxa de absorção de nêutrons em  $V$  pode ser escrita como

$$\text{Absorção} = \int_{\mathbf{V}} \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t)dV \quad (2.3)$$

onde  $\Sigma_a$  é a seção de choque de absorção.

A fuga de nêutrons do volume  $V$  pode ser expressada em termos da densidade de corrente e do vetor normal ao volume  $V$ , de forma que teremos

$$\text{Fuga} = \int_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}dA \quad (2.4)$$

Substituindo estas equações em (2.1), temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}} n(\mathbf{r}, t)dV = \int_{\mathbf{V}} S(\mathbf{r}, t)dV - \int_{\mathbf{V}} \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t)dV - \int_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}dA \quad (2.5)$$

Porém, se usarmos o teorema da divergência no último termo, teremos todas taxas com sendo relacionadas no volume  $V$ . Isto é, seja

$$\int_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}dA = \int_{\mathbf{V}} \text{div}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)dV \quad (2.6)$$

Sendo assim, temos a equação

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{V}} n(\mathbf{r}, t)dV = \int_{\mathbf{V}} S(\mathbf{r}, t)dV - \int_{\mathbf{V}} \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t)dV - \int_{\mathbf{V}} \text{div}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)dV \quad (2.7)$$

Como todas integrais nesta equação estão relacionadas no volume  $V$ , o integrandos também tem de ser iguais, e portanto temos

$$\frac{d}{dt}n(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) - \text{div}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

Como  $n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v}\phi(\mathbf{r}, t)$ , podemos substituir em (2.8) que teremos a equação da continuidade

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) - \text{div}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

Tratando-se de um meio uniforme, podemos aplicar a Lei de Fick, isto é, se as seções de choque são constantes, e o espalhamento é isotrópico em sistema laboratório, podemos considerar válida então a lei de Fick, que é dada por

$$\mathbf{J} = -D\nabla\phi \quad (2.10)$$

Como a lei de Fick trata de uma relação entre fluxo e corrente. Podemos utilizar a equação da continuidade e aplicar a Lei de Fick, teremos então que

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}, t) + \text{div}D\nabla\phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

Como pela teoria da difusão estamos considerando sistemas em que consistem de materiais uniformes, teremos que para este caso o coeficiente  $D$  é constante, e portanto  $\text{div}D\nabla\phi = D\Delta\phi$ . Desta maneira temos

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a\phi(\mathbf{r}, t) + D\Delta\phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

que é conhecida como a equação da difusão.

### 3 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA MAIS DE UM GRUPO DE ENERGIA

O estudo do transporte de nêutrons é assunto central em teoria de reatores nucleares e muitas vezes abordado por modelos da teoria de difusão que combina aspectos realísticos com um formalismo mais simples e apropriado. A derivação da equação da difusão como mostrada no capítulo 2 vem da equação do transporte de Boltzmann juntamente com a lei de Fick. Além do mais, consideramos as seções de choque como constantes, independente de posição, implicando em um meio uniforme. Consideramos também um espalhamento isotrópico no sistema laboratório. No caso que será abordado a seguir, o fluxo de nêutrons varia com a posição e independente do tempo (para o estado estacionário). Assumimos neste capítulo um caso com dois grupos de energia e com uma fonte descrita pela fissão.

Recentemente, os autores de [7] solucionaram a equação da difusão de nêutrons em geometria cartesiana para um modelo de dois grupos de energia pela técnica da Transformada de Laplace. Além disso em [5], [6], [8] resolve a equação do transporte de nêutrons em geometria cilíndrica considerando espalhamento isotrópico e usando a transformada de Hankel. Tendo em vista os bons resultados destes trabalhos e que a aproximação  $S_2$  da equação do transporte é a equação da difusão. Neste capítulo vamos focar nossa atenção na derivação da formulação analítica para o modelo de dois grupos de energia, rápido e térmico. A principal idéia é resolver a equação da difusão unidimensional de nêutrons em um cilindro homogêneo através da Transformada de Hankel no caso de um espalhamento isotrópico.

#### 3.1 Formulação do Problema

Para solucionar o problema mencionado com uma fonte definida e com dois grupos de energia, começaremos com o caso estacionário da difusão e aplicare-

mos a transformada de Hankel em coordenadas cilíndricas. A equação da difusão de nêutrons em um sub-domínio  $[0, R]$  para os grupos 1 e 2 é dada por

$$\begin{aligned} -D_1^{(R)} \Delta_{r,z} \phi_1^{(R)} + \Sigma_{R1} \phi_1^{(R)} &= \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg} \phi_g + \Sigma_{12} \phi_2^{(R)} , \\ -D_2^{(R)} \Delta_{r,z} \phi_2^{(R)} + \Sigma_{R2} \phi_2^{(R)} &= \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg} \phi_g + \Sigma_{21} \phi_1^{(R)} , \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sujeita as seguintes condições,

$$\frac{\partial \phi_g^{(R)}}{\partial r}(0) = 0 , \quad \phi_g(R) = 0 , \quad (3.2)$$

juntamente com condições de fluxo e corrente nas interfaces do problema,

$$\phi_g^{(i)}(r_i) = \phi_g^{(i+1)}(r_i) \quad \text{e} \quad -D_g^{(i)} \frac{\partial \phi_g^{(i)}(r_i)}{\partial r} = -D_g^{(i+1)} \frac{\partial \phi_g^{(i+1)}(r_i)}{\partial r} . \quad (3.3)$$

Neste capítulo abordaremos um problema homogêneo, isto é, apenas uma região no cilindro. Desta forma, omitiremos por ora, a notação que especifica a região  $(R)$  com intenção de facilitá-la. Uma extensão aproximada para um caso de multi-região, e uma implementação em geometria cartesiana pode ser encontrada em [3].

## 3.2 Aplicando a Transformada de Hankel

Lembramos que a definição da Transformada de Hankel de ordem zero é  $H_n[f(r); r \rightarrow \xi] = \int_0^\infty r f(r) J_n(r\xi) dr$  (com  $n = 0$ ) em (3.1) e usando a notação

$$\Delta_{r,z} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \Delta_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (3.4)$$

Vamos considerar um reator nuclear com altura  $z$  muito maior que o diâmetro, nesse caso, assumimos  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ . Assim, as equações (3.1) tomam a forma

$$\begin{aligned} -D_1 \Delta_r \phi_1 + \Sigma_{R1} \phi_1 &= \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg} \phi_g + \Sigma_{12} \phi_2 , \\ -D_2 \Delta_r \phi_2 + \Sigma_{R2} \phi_2 &= \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg} \phi_g + \Sigma_{21} \phi_1 . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Definiremos os termos fontes  $S_{(1)}$  e  $S_{(2)}$  substituindo respectivamente

$$\frac{1}{k_{eff}}\nu\chi_1\Sigma_{f1}\phi_1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{k_{eff}}\nu\chi_2\Sigma_{f2}\phi_2 . \quad (3.6)$$

Então teremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} -D_1\Delta_r\phi_1 + \Sigma_{R1}\phi_1 &= S_{(1)} + \frac{1}{k_{eff}}\nu\chi_1\Sigma_{f2}\phi_2 + \Sigma_{12}\phi_2 , \\ -D_2\Delta_r\phi_2 + \Sigma_{R2}\phi_2 &= \frac{1}{k_{eff}}\nu\chi_2\Sigma_{f1}\phi_1 + S_{(2)} + \Sigma_{21}\phi_1 . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Organizando os nêutrons por grupos de energia, nós não consideramos reentrância de nêutrons do segundo grupo para o primeiro, isto é,  $\Sigma_{21} = 0$ , além do mais, a fonte é somente diferente de zero dentro do primeiro grupo de energia. Para aplicarmos a Transformada de Hankel nos termos contendo a derivada, é necessário lembrar que a Transformada de Hankel possui a seguinte propriedade:  $H_0\{\Delta_r\phi\} = -\xi^2 H_0\{\phi\} = -\xi^2 \bar{\phi}$  que leva o nosso sistema de equações a ser escrito de forma matricial, como segue

$$\begin{bmatrix} D_1\xi^2 + \Sigma_{R1} & -\left(\frac{1}{k_{eff}}\chi_1\nu\Sigma_{f2} + \Sigma_{12}\right) \\ -\left(\frac{1}{k_{eff}}\chi_2\nu\Sigma_{f1}\right) & D_2\xi^2 + \Sigma_{R2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{(1)} \\ \bar{S}_{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Usando notação vetorial, temos  $\mathbf{M}(\xi)\bar{\Phi} = H_0\{\mathbf{S}\} = \bar{\mathbf{S}}$ . Para que  $\mathbf{M}(\xi)$  seja invertível e não admita somente soluções triviais, o determinante  $\text{Det}(\mathbf{M}(\xi))$  necessariamente precisa ser não-nulo. Definindo  $A(\xi) = D_1\xi^2 + \Sigma_{R1}$ ,  $B(\xi) = D_2\xi^2 + \Sigma_{R2}$  e  $C = \left(\frac{1}{k_{eff}}\chi_1\nu\Sigma_{f2} + \Sigma_{12}\right) \left(\frac{1}{k_{eff}}\chi_2\nu\Sigma_{f1}\right)$ , a solução para este sistema no espaço transformado é dada por

$$\bar{\Phi} = \mathbf{M}^{-1}(\xi)\bar{\mathbf{S}} , \quad (3.9)$$

onde

$$M^{-1}(\xi) = (\text{Det}(M(\xi)))^{-1} \begin{bmatrix} B(\xi) & \frac{1}{k_{eff}}\chi_1\nu\Sigma_{f2} + \Sigma_{12} \\ \frac{1}{k_{eff}}\chi_2\nu\Sigma_{f1} & A(\xi) \end{bmatrix} . \quad (3.10)$$

A expressão explícita para a solução no espaço transformado é

$$\bar{\Phi} = (\text{Det}(M(\xi)))^{-1} \begin{bmatrix} B(\xi)\bar{S}_1 + \left(\frac{1}{k_{eff}}\chi_1\nu\Sigma_{f2} + \Sigma_{12}\right)\bar{S}_2 \\ \frac{1}{k_{eff}}\chi_2\nu\Sigma_{f1}\bar{S}_1 + A(\xi)\bar{S}_2 \end{bmatrix} . \quad (3.11)$$

Salientamos que, o termo fonte no segundo grupo de energia é zero, isto é, ( $S_2 = 0$  e conseqüentemente  $\bar{S}_2 = 0$ ) a expressão final fica simplificada, e portanto

$$\bar{\phi}_1 = \frac{B(\xi)\bar{S}_1}{Det(M(\xi))} \quad (3.12)$$

$$\bar{\phi}_2 = \frac{\chi_2\nu\Sigma_{f1}}{k_{eff}} \frac{\bar{S}_1}{Det(M(\xi))} \quad (3.13)$$

É necessário agora, invertermos o problema do espaço transformado para o espaço de interesse.

### 3.3 Solução Particular do Fluxo Rápido

Primeiramente, vamos calcular a inversão do fluxo rápido ( $g = 1$ ),

$$\phi_1 = \int_0^\infty \xi \frac{B(\xi)J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \bar{S}_1 d\xi, \quad (3.14)$$

o qual precisaremos utilizar a relação de Parseval. Seja o seguinte teorema

**Theorem 1** (Teorema da Inversão e Hankel [4]). *Se  $\sqrt{r'}f(r')$  é seccionalmente contínua e absolutamente integrável ao longo da reta real positiva, então se  $\gamma \geq -\frac{1}{2}$ ,  $\bar{f}_\gamma(\xi) = H_\gamma[f(r'); r' \rightarrow \xi]$  existe e*

$$\int_0^\infty \xi \bar{f}_\gamma(\xi) J_\gamma(\xi r') d\xi = \frac{1}{2}[f(r'+) + f(r'-)] \quad (3.15)$$

**Theorem 2** (Relação de Parseval [4]). *Se as funções  $f(r')$  e  $g(r')$  satisfazem as condições do teorema 1 e se  $\bar{f}_\gamma(\xi)$  e  $\bar{g}_\gamma(\xi)$  denotam suas respectivas transformadas de Hankel de ordem  $\gamma \geq -\frac{1}{2}$ , então*

$$\int_0^\infty r' f(r') g(r') dr' = \int_0^\infty \xi \bar{f}_\gamma(\xi) \bar{g}_\gamma(\xi) d\xi \quad (3.16)$$



Usando estes dois teoremas, identificamos  $\bar{f}_0(\xi)$  e  $\bar{g}_0(\xi)$  como  $\frac{B(\xi)J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))}$  e  $\bar{S}_1$ , respectivamente, obtemos

$$\int_0^\infty \xi \frac{B(\xi)J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \bar{S}_1 d\xi = \int_0^\infty r' H_0^{-1} \left\{ \frac{B(\xi)J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \right\} S_1(r') dr'. \quad (3.17)$$

Precisamos calcular  $f(r')$ , que é

$$H_0^{-1} \left\{ \frac{B(\xi)J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \right\} = \int_0^\infty \xi \frac{B(\xi)J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} J_0(r'\xi) d\xi. \quad (3.18)$$

Neste ponto, faremos uma análise mais detalhada do núcleo desta transformada inversa. Muitas vezes pode ser difícil calcular integrais contento produtos de polinômios por mais de uma função de Bessel, mas neste caso desde que  $0 < \frac{C}{A(\xi)B(\xi)} < 1$ , podemos expandir o último fator do lado direito da primeira equação.

$$\frac{B(\xi)}{A(\xi)B(\xi) - C} = \frac{1}{A(\xi)} \frac{1}{1 - \frac{C}{A(\xi)B(\xi)}} = \frac{1}{A(\xi)} \left[ 1 + \left( \frac{C}{A(\xi)B(\xi)} \right) + \left( \frac{C}{A(\xi)B(\xi)} \right)^2 + \dots \right] \quad (3.19)$$

$$\frac{B(\xi)}{A(\xi)B(\xi) - C} = \frac{1}{A(\xi)} \frac{1}{1 - \frac{C}{A(\xi)B(\xi)}} = \frac{1}{A(\xi)} \left[ 1 + \left( \frac{C}{A(\xi)B(\xi)} \right) + O\left( \left( \frac{C}{A(\xi)B(\xi)} \right)^2 \right) \right] \quad (3.20)$$

Avaliamos numericamente a magnitude destes termos da expansão, e verificamos que o primeiro termo é dominante perante os demais desde que  $O\left(\frac{C}{A(\xi)B(\xi)}\right) \sim 10^{-5}$ , consideraremos somente  $\frac{1}{A(\xi)}$ , como sendo a melhor aproximação para este caso. Posteriormente podemos corrigir os demais termos por Adomian [1].

Do teorema da inversão de Hankel podemos usar outra forma para  $f(r')$ , a qual é dada por

$$\begin{aligned} f(r') &= \int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{A(\xi)} J_0(r'\xi) d\xi = \frac{1}{D_1} \int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + (\sqrt{\alpha_1})^2} J_0(r'\xi) d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{1}{D_1} I_0(\sqrt{\alpha_1} r') K_0(\sqrt{\alpha_1} r) & \text{para } 0 < r' < r \\ \frac{1}{D_1} I_0(\sqrt{\alpha_1} r) K_0(\sqrt{\alpha_1} r') & \text{para } r < r' < \infty \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\alpha_1 = \frac{\Sigma_{f1}}{D_1}$ . A última igualdade está demonstrada em [2] onde  $I_0$  e  $K_0$  denotam as funções de Bessel modificadas. Juntamente com a condição de que não existe fonte fora do cilindro, teremos

$$S_1(r) = \begin{cases} S_1(r) & \text{para } r < R \\ 0 & \text{para } R \leq r < \infty \end{cases} \quad (3.22)$$

Finalmente, chegamos na expressão para o fluxo rápido, dada por

$$\phi_1 = \frac{K_0(\sqrt{\alpha_1}r)}{D_1} \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_1}r') S_1(r') dr' + \frac{I_0(\sqrt{\alpha_1}r)}{D_1} \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_1}r') S_1(r') dr' \quad (3.23)$$

### 3.4 Solução Particular do Fluxo Térmico

Agora, resolveremos para o fluxo térmico usando a expressão dada por

$$\phi_2 = \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \nu \Sigma_{f1} \int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \bar{S}_1 d\xi, \quad (3.24)$$

e usando novamente a Realção de Parseval para calcular o seguinte termo

$$\int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \bar{S}_1 d\xi = \int_0^\infty r' H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \right\} S_1(r') dr'$$

e por definição

$$H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \right\} = \int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} J_0(r'\xi) d\xi. \quad (3.25)$$

Usando argumentos análogos aos das seções anteriores determinamos que

$$Det(M(\xi)) \simeq A(\xi)B(\xi) = D_1 D_2 \left( \xi^4 + \left( \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{R2}}{D_2} \right) \xi^2 + \frac{\Sigma_{R1}\Sigma_{R2}}{D_1 D_2} \right). \quad (3.26)$$

Por uma conveniência de notação, introduziremos que  $\alpha_1 = \frac{\Sigma_{R1}}{D_1}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\Sigma_{R2}}{D_2}$  e faremos a mudança de variável  $\mu = \xi^2$  Então

$$f(r') = H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{Det(M(\xi))} \right\} = \frac{1}{2D_1 D_2} \int_0^\infty \frac{J_0(r\sqrt{\mu})}{\mu^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\mu + \alpha_1\alpha_2} J_0(r'\sqrt{\mu}) d\mu. \quad (3.27)$$

O termo integral, pode ser decomposto em dois termos, tais que após a substituição pela variável original  $\mu \rightarrow \xi$  obteremos

$$f(r') = \frac{1}{2} \frac{1}{(\Sigma_{R2}D_1 - \Sigma_{R1}D_2)} \int_0^\infty \frac{J_0(r\sqrt{\mu})}{\mu + \alpha_1} J_0(r'\sqrt{\mu}) d\mu - \frac{1}{2} \frac{1}{(\Sigma_{R2}D_1 - \Sigma_{R1}D_2)} \int_0^\infty \frac{J_0(r\sqrt{\mu})}{\mu + \alpha_2} J_0(r'\sqrt{\mu}) d\mu . \quad (3.28)$$

Onde novamente usando a identidade encontrada na referência [2], descrevemos a função  $f(r')$  por

$$f(r') = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{I_0(\sqrt{\alpha_1}r')K_0(\sqrt{\alpha_1}r) - I_0(\sqrt{\alpha_2}r')K_0(\sqrt{\alpha_2}r)}{(\Sigma_{R2}D_1 - \Sigma_{R1}D_2)} & \text{para } 0 < r' < r \\ \frac{1}{2} \frac{I_0(\sqrt{\alpha_1}r)K_0(\sqrt{\alpha_1}r') - I_0(\sqrt{\alpha_2}r)K_0(\sqrt{\alpha_2}r')}{(\Sigma_{R2}D_1 - \Sigma_{R1}D_2)} & \text{para } r < r' < \infty \end{cases} \quad (3.29)$$

Olhando novamente para expressão do fluxo térmico  $\phi_2$  que torna-se

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{\chi_2 \nu \Sigma_{f1}}{k_{eff}} \int_0^\infty r' f(r') S_1(r') dr' \\ &= c_1 \left( K_0(\sqrt{\alpha_1}r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_1}r') S_1(r') dr' - K_0(\sqrt{\alpha_2}r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_2}r') S_1(r') dr' \right. \\ &\quad \left. + I_0(\sqrt{\alpha_1}r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_1}r') S_1(r') dr' - I_0(\sqrt{\alpha_2}r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_2}r') S_1(r') dr' \right) \end{aligned}$$

Onde a última igualdade foi obtida usando como fonte (3.22) e  $c_1 =$

$$\frac{1}{2} \frac{\chi_2 \nu \Sigma_{f1}}{k_{eff}} \frac{1}{(\Sigma_{R2}D_1 - \Sigma_{R1}D_2)} .$$

### 3.5 Solução Homogênea Associada

As equações da última seção, representam a solução analítica particular para o fluxo rápido e para o fluxo térmico do nosso problema original. Para determinarmos a solução final, precisamos da solução homogênea associada. O sistema original de equações para o problema homogêneo associado é

$$\begin{aligned} \Delta_r \phi_1 - \left( \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} \right) \phi_1 + \frac{1}{D_1} \left( \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \nu \Sigma_{f2} + \Sigma_{12} \right) \phi_2 &= 0 , \\ \Delta_r \phi_2 - \left( \frac{\Sigma_{R2}}{D_2} \right) \phi_2 + \frac{1}{D_2} \left( \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \nu \Sigma_{f1} + \Sigma_{21} \right) \phi_1 &= 0 , \end{aligned} \quad (3.30)$$

que na forma matricial fica

$$\Delta_r \Phi - \mathbf{P} \Phi = 0, \quad (3.31)$$

onde  $\mathbf{P}$  tem a forma

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{R1}}{D_1} & -\frac{1}{D_1} \left( \frac{1}{k_{eff}} \chi_1 \nu \Sigma_{f2} + \Sigma_{12} \right) \\ -\frac{1}{D_2} \left( \frac{1}{k_{eff}} \chi_2 \nu \Sigma_{f1} + \Sigma_{21} \right) & \frac{\Sigma_{R2}}{D_2} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Podemos fatorar a matriz  $\mathbf{P}$  por  $\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^{-1}$  com  $\mathbf{D}$  diagonal. Os coeficientes de  $\mathbf{P}$  são constantes e depois de diagonalizada esta matriz,  $\Delta_r$  e  $\mathbf{D}$  comutam com  $\mathbf{U}^{-1}$  tornam se um problema de autovalor

$$\Delta_r \mathbf{W} - \mathbf{D} \mathbf{W} = 0 \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{W} = \mathbf{U}^{-1} \Phi$  e  $\mathbf{D}$  e a matriz diagonal dos autovalores. A solução deste sistema homogêneo é dada por

$$\mathbf{W}(r) = \mathbf{B} \mathbf{I}_0(\beta_n r) + \mathbf{F} \mathbf{K}_0(\beta_n r) \quad (3.34)$$

com  $B$  e  $F$  matrizes diagonais com coeficientes constantes e onde  $\mathbf{I}_0(\beta_n r)$  e  $\mathbf{K}_0(\beta_n r)$  são respectivamente

$$\mathbf{I}_0(\beta_n r) = \begin{bmatrix} I_0(\beta_1 r) \\ I_0(\beta_2 r) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_0(\beta_n r) = \begin{bmatrix} K_0(\beta_1 r) \\ K_0(\beta_2 r) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

e onde  $\beta_n = \sqrt{\lambda_n}$  e  $\lambda_n$  é um autovalor de  $\mathbf{P}$ . O fluxo total (nêutrons rápidos e térmicos) é finito, de forma que precisamos de uma solução regular em  $r = 0$ , logo  $\mathbf{F}$  necessita ser nulo. Então (3.34) torna-se

$$\Phi(r) = \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{I}_0(\beta_n r). \quad (3.36)$$

Assim, temos as expressões para solução homogênea do fluxo rápido e térmico, respectivamente

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^2 u_{1j} I_0(\beta_j r) b_{jj} \quad \phi_2 = \sum_{j=1}^2 u_{2j} I_0(\beta_j r) b_{jj} \quad (3.37)$$

onde os coeficientes  $b$ 's da matriz  $\mathbf{B}$  são determinados ao aplicarmos as condições de contorno.

De forma que, juntamente com as soluções particulares, podemos agora descrever a solução final para o fluxo rápido e térmico, respectivamente.

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \sum_{j=1}^2 u_{1j} I_0(\beta_j r) b_{jj} + \frac{K_0(\alpha r)}{D_1} \int_0^r r' I_0(\alpha r') S_1(r') dr' \\ & + \frac{I_0(\alpha r)}{D_1} \int_r^R r' K_0(\alpha r') S_1(r') dr' \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \sum_{j=1}^2 u_{2j} I_0(\beta_j r) b_{jj} + c_1 \left( K_0(\sqrt{\alpha_1} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_1} r') S_1(r') dr' \right. \\ & - K_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_2} r') S_1(r') dr' + I_0(\sqrt{\alpha_1} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_1} r') S_1(r') dr' \\ & \left. - I_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_2} r') S_1(r') dr' \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.6 O termo Fonte

Para termos uma solução explícita com uma fonte especificada  $S_1(r)$  restringiremos nosso problema por uma função Heaviside.

$$S_1(r) = S_0 H(R - r) \quad \text{onde} \quad H(R - r) = \begin{cases} 1 & \text{para } r \leq R \\ 0 & \text{para } R < r \end{cases} \quad (3.40)$$

Assumindo isso, temos como determinar o fluxo rápido e térmico em qualquer ponto do domínio de interesse, através das equações (3.38) e (3.39) com fonte (3.40).

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \sum_{j=1}^2 u_{1j} I_0(\beta_j r) b_{jj} + \frac{S_0}{D_1} K_0(\alpha r) \int_0^r r' I_0(\alpha r') dr' + \frac{S_0}{D_1} I_0(\alpha r) \int_r^R r' K_0(\alpha r') dr' \\ \phi_2 = & \sum_{j=1}^2 u_{2j} I_0(\beta_j r) b_{jj} + c_1 S_0 \left( K_0(\sqrt{\alpha_1} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_1} r') dr' \right. \\ & - K_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_2} r') dr' + I_0(\sqrt{\alpha_1} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_1} r') dr' \\ & \left. - I_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_2} r') dr' \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

### 3.7 Resultados

Utilizamos um conjunto de parâmetros para poder avaliar alguns casos para ambos fluxos, rápido e térmico. Na tabela 3.1 podemos verificar estes parâmetros, assumimos  $k_{eff} = 0.95$  durante as simulações. Os fluxos rápido e térmico são mostrados nas figuras a seguir. Como esperado, obtemos resultados satisfatórios em relação a literatura citada, em particular Siewert et al [9].

Tabela 3.1: Conjunto de Parâmetros.

$P^{(n)}$	$D_1$	$D_2$	$\Sigma_{R1}$	$\Sigma_{R2}$	$\Sigma_{12}$	$\Sigma_{f1}$	$\Sigma_{f2}$	$R(cm)$	$S_0$
$P^{(1)}$	1.43	0.39	0.029	0.104	0.015	0.0041	0.0077	5.0	4.0
$P^{(2)}$	1.43	0.39	0.029	0.104	0.015	0.0038	0.0071	6.5	5.0
$P^{(3)}$	1.12	0.44	0.029	0.104	0.015	0.0033	0.0067	4.0	4.0
$P^{(4)}$	1.12	0.44	0.029	0.104	0.015	0.0031	0.0056	2.0	5.0
$P^{(5)}$	0.77	0.52	0.029	0.101	0.015	0.0028	0.0056	3.0	4.0
$P^{(6)}$	0.77	0.52	0.029	0.101	0.015	0.0022	0.0056	3.0	2.0

Os seguintes resultados foram obtidos para diferentes conjuntos de parâmetros

$r/R$	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	$P^{(3)}$	$P^{(4)}$	$P^{(5)}$	$P^{(6)}$
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.990253	0.985691	0.985691	0.986111	0.986111	0.985594
0.2	0.943312	0.943214	0.943214	0.944102	0.944102	0.942999
0.3	0.885213	0.874131	0.874131	0.875030	0.875030	0.874051
0.4	0.791032	0.781801	0.781802	0.782201	0.782201	0.781712
0.5	0.670122	0.660010	0.660011	0.661033	0.661033	0.669930
0.6	0.543311	0.533512	0.533512	0.534211	0.534211	0.543448
0.7	0.407630	0.407622	0.407623	0.407711	0.407711	0.407580
0.8	0.281963	0.267960	0.267961	0.268210	0.268210	0.267960
0.9	0.149313	0.130312	0.130312	0.131137	0.131137	0.130274
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabela 3.2: Fluxo Rápido Normalizado.

$r/R$	$P^{(1)}$	$P^{(2)}$	$P^{(3)}$	$P^{(4)}$	$P^{(5)}$	$P^{(6)}$
0.0	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000	0.500000
0.1	0.492797	0.492797	0.492831	0.492831	0.492612	0.492611
0.2	0.471499	0.471499	0.471513	0.471513	0.471433	0.471432
0.3	0.437025	0.437025	0.438030	0.438030	0.437932	0.437931
0.4	0.390856	0.390856	0.390936	0.390936	0.390860	0.390860
0.5	0.334965	0.334965	0.335021	0.335021	0.334987	0.334984
0.6	0.271724	0.271724	0.271821	0.271821	0.271711	0.271711
0.7	0.203790	0.203790	0.203802	0.203802	0.203720	0.203719
0.8	0.133980	0.133980	0.134023	0.134023	0.133990	0.133989
0.9	0.065136	0.065136	0.066123	0.066123	0.066012	0.066011
1.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tabela 3.3: Fluxo Térmico Normalizado.

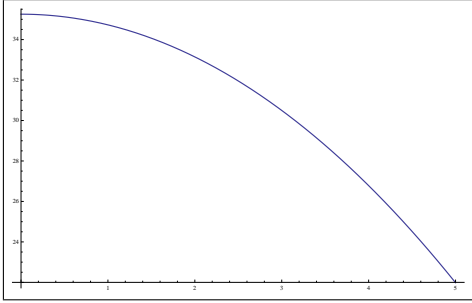


Figura 3.1: Fluxo Rápido usando  $P^{(1)}$ .

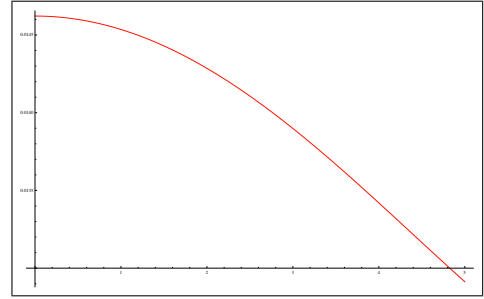


Figura 3.2: Fluxo Térmico usando  $P^{(1)}$ .

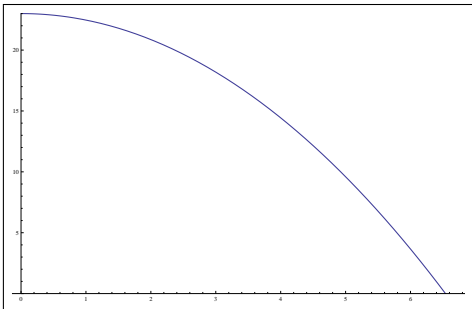


Figura 3.3: Fluxo Rápido usando  $P^{(2)}$ .

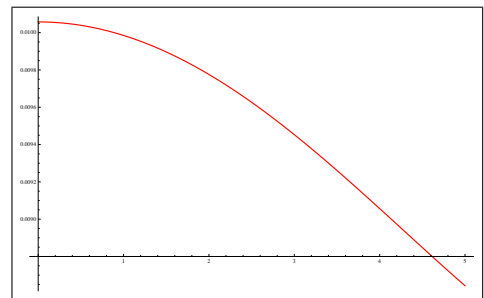


Figura 3.4: Fluxo Térmico usando  $P^{(2)}$ .

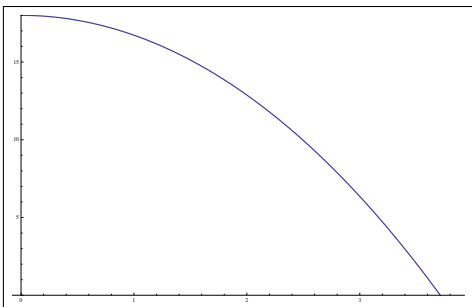


Figura 3.5: Fluxo Rápido usando  $P^{(3)}$ .

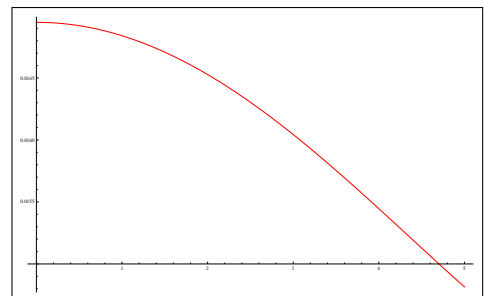


Figura 3.6: Fluxo Térmico usando  $P^{(3)}$ .



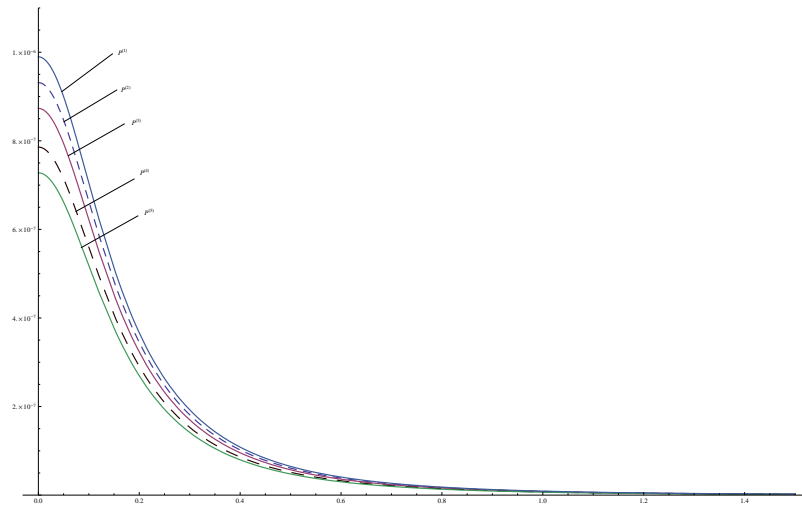


Figura 3.7:  $C/A(\xi)B(\xi)$  por  $\xi$  para diferentes parâmetros.

### 3.8 Conclusões do Capítulo

Neste capítulo apresentamos uma solução analítica para a equação da difusão de nêutrons com dois grupos de energia em geometria cilíndrica homogênea. Encontramos na literatura apenas casos em que o problema especificado é resolvido numericamente, com solução analítica apenas em um grupo de energia. Podemos, pelo teorema de Cauchy-Kowalewski, garantir a existência e unicidade da presente derivação baseado na solução da transformação integral de Hankel sujeita às condições de densidade de corrente e condições de contorno nulas. As soluções encontradas reproduzem as soluções numéricas de [9].

Pela derivação, é aparente que a solução não é restrita às condições de contorno específicas que foram impostas, mas sim tendo um caráter mais geral, tal que a solução aplicada em problemas homogêneos e em especificados subdomínios, mas não necessariamente com o mesmo conjunto de parâmetros. As condições de interface entre subdomínios adjacentes são tratadas como as condições de contorno de um problema global homogêneo, significando que não é necessário modificações na solução quando o fluxo escalar é calculado, e nesse sentido a solução é mais geral.

Motivados pelos convincentes resultados obtidos por essa metodologia, pretendemos estender o caso explorando uma problema com mais regiões, bem como o erro estimado para difusão de nêutrons em geometria cilíndrica. Além do mais, focaremos em tentar solucionar problemas de criticalidade para o núcleo do reator, aplicando condições de continuidade na interface. Estes resultados apresentados são um primeiro passo para uma futura implementação de cálculo do fluxo em células equivalentes em geometrias mais gerais.

## 4 SOLUÇÃO RECURSIVA PARA UM PROBLEMA DE MULTI-REGIÃO

Neste capítulo, pretendemos estabelecer uma metodologia para resolver analiticamente a equação de difusão de nêutrons em um cilindro heterogêneo. Utilizaremos a Transformada de Hankel para solucionar este problema. A técnica utilizada consiste em expandir o fluxo como uma soma para diferentes fluxos das regiões especificadas, considerando o fluxo da região seguinte como sendo resolvido tendo uma fonte a qual é descrita pela diferença entre as seções de choque da região em questão com a região anterior.

### 4.1 Formulação do Problema

Para descrevermos este problema, vamos considerar a seguinte equação em geometria cilíndrica. Seja a equação da difusão dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_g^{(R)} - \Delta_r D_g^{(R)} \phi_g^{(R)} + \Sigma_{Rg}^{(R)} \phi_g^{(R)} = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{fg}^{(R)} \phi_g^{(R)} \quad (4.1)$$

Consideraremos neste caso, o termo  $D_g^{(R)}$  constante em relação a  $r$ , de forma que  $\Delta_r D_g^{(R)} \phi_g(r, t)$  pode ser reescrito como  $D_g^{(R)} \Delta_r \phi_g(r, t)$ . Consideraremos aqui o caso estacionário. Assim, reescrevemos (4.1) como

$$-D_g^{(R)} \Delta_r \phi_g^{(R)}(r) + \sigma^{(R)} \phi_g^{(R)} = 0, \text{ com } \sigma^{(R)} = \Sigma_{Rg}^{(R)} - \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_{fg}^{(R)} \quad (4.2)$$

A principal idéia consiste em que podemos considerar  $\phi$ , como sendo uma soma da forma

$$\phi_g = \sum_{j=1}^N \phi_g^{(j)} = \phi_g^{(1)} + \phi_g^{(2)} + \dots + \phi_g^{(N)} \quad (4.3)$$

Para este caso, consideraremos também apenas um grupo de energia, e podemos escrever  $\phi^{(R)}$  ao invés de  $\phi_g^{(R)}$ . Sendo que na primeira região a equação para  $\phi^{(1)}$  obedece

$$-D^{(1)} \Delta_r \phi^{(1)} + \sigma^{(1)} \phi^{(1)} = 0 \quad (4.4)$$

onde  $\sigma^{(1)} = \Sigma_R^{(1)} - \frac{\nu}{k_{eff}} \Sigma_f^{(1)}$ , como visto anteriormente. As regiões deste cilindro são limitadas por  $R_i$  o qual representa os pontos de interface entre cada uma destas regiões, isto é,  $R_i$  é o valor do raio na interface que limita as regiões  $(i)$  e  $(i + 1)$ . Considerando que este cilindro tem um valor limite como raio  $R$  e que  $0 < R_1 < R_2 < R_3 < \dots < R_N = R$ , conforme a figura abaixo

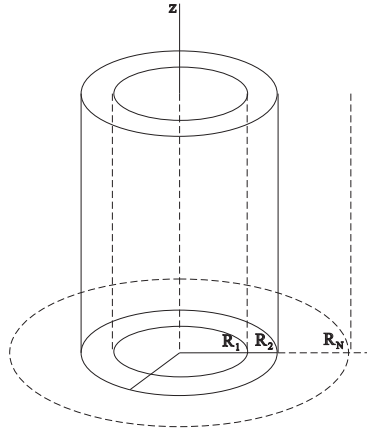


Figura 4.1: Cilindro Heterogêneo com  $N$  regiões.

$$-D^{(2)} \Delta_r \phi^{(2)} + \sigma^{(2)} \phi^{(2)} = (\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}) \phi^{(1)} \quad (4.5)$$

Seguindo a mesma idéia, podemos encontrar a equação que governa o fluxo em cada região  $(i + 1)$ , como sendo

$$-D^{(i+1)}\Delta_r\phi^{(i+1)} + \sigma^{(i+1)}\phi^{(i+1)} = (\sigma^{(i+1)} - \sum_{j=1}^i \sigma^{(j)})\phi^{(i)} \quad (4.6)$$

E desta maneira, podemos resolver este sistema de forma recursiva tendo a solução para a primeira região. Agora, precisamos resolver a equação (4.4), que tem como solução geral

$$\phi^{(1)}(r) = AJ_0(\lambda_1 r) + BY_0(\lambda_1 r) \quad (4.7)$$

Onde  $A$  e  $B$  são constante e  $\lambda_1 = \sqrt{\sigma^{(1)}/D^{(1)}}$ . Como queremos soluções limitadas, o valor de  $B$  é nulo, pois  $Y_0$  é não limitado em  $r \rightarrow 0$ . Então

$$\phi^{(1)}(r) = AJ_0(\lambda_1 r) \quad (4.8)$$

Pensando numa solução global, temos

$$\phi^{(i+1)} = \phi_{HOM}^{(i+1)} + \phi_{PART}^{(i+1)} \quad (4.9)$$

onde  $\phi_{HOM}^{(i+1)}$  representa a solução homogênea e  $\phi_{PART}^{(i+1)}$  representa a solução particular  $\phi^{(i+1)}$ , mas sabemos que

$$\phi_{HOM}^{(i+1)} = A_{i+1}J_0(\lambda_{i+1}r) \quad (4.10)$$

onde  $A_{i+1}$  é um termo constante e  $\lambda_i = \sqrt{\sigma^{(i)}/D^{(i)}}$ . Como (4.6) é da forma

$$-D^{(i+1)}\Delta_r\phi^{(i+1)} + \sigma^{(i+1)}\phi^{(i+1)} = \gamma_{i+1}\phi^{(i)} \quad (4.11)$$

onde

$$\gamma_{i+1} = (\sigma^{(i+1)} - \sum_{j=1}^i \sigma^{(j)}) \quad (4.12)$$

A solução homogênea é conhecida. Precisamos encontrar a solução particular para (4.11). Aplicando a transformada de Hankel para este caso, teremos que

$$H_0\{-\Delta_r D^{(i+1)}\phi^{(i+1)}\} + \sigma^{(i+1)} H_0\{\phi^{(i+1)}\} = \gamma_{i+1} H_0\{\phi^{(i)}\} \quad (4.13)$$

que tem como resultado

$$D^{(i+1)}\xi^2\bar{\phi}^{(i+1)} + \sigma^{(i+1)}\bar{\phi}^{(i+1)} = \gamma_{i+1}\bar{\phi}^{(i)} \quad (4.14)$$

De forma que, teremos um simples sistema de recorrência, dado por

$$\begin{aligned} D^{(2)}\xi^2\bar{\phi}^{(2)} + \sigma^{(2)}\bar{\phi}^{(2)} &= \gamma_2\bar{\phi}^{(1)} \\ D^{(3)}\xi^2\bar{\phi}^{(3)} + \sigma^{(3)}\bar{\phi}^{(3)} &= \gamma_3\bar{\phi}^{(2)} \\ &\vdots \\ D^{(N)}\xi^2\bar{\phi}^{(N)} + \sigma^{(N)}\bar{\phi}^{(N)} &= \gamma_N\bar{\phi}^{(N-1)} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \left[ \frac{D^{(2)}\xi^2 + \sigma^{(2)}}{\gamma_2} \right] \bar{\phi}^{(2)} &= \bar{\phi}^{(1)} \\ \left[ \frac{D^{(3)}\xi^2 + \sigma^{(3)}}{\gamma_3} \right] \bar{\phi}^{(3)} &= \bar{\phi}^{(2)} \\ &\vdots \\ \left[ \frac{D^{(N)}\xi^2 + \sigma^{(N)}}{\gamma_N} \right] \bar{\phi}^{(N)} &= \bar{\phi}^{(N-1)} \end{aligned}$$

Onde  $G_i(\xi)$  é dado por

$$G_i(\xi) = \left[ \frac{D^{(i)}\xi^2 + \sigma^{(i)}}{\gamma_i} \right] \quad (4.15)$$

Assumindo isso, podemos representar o seguinte sistema de forma mais apropriada

$$\begin{bmatrix} G_2(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_3(\xi) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G_N(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{\phi}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{\phi}^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

E logo teremos,

$$\bar{\phi}^{(i+1)} = \left[ \frac{\gamma_{i+1}}{D^{(i+1)}\xi^2 + \sigma^{(i+1)}} \right] \bar{\phi}^{(i)} \quad (4.17)$$

Assim, podemos avaliar o termo  $i$ -ésimo, seja

$$H_0^{-1}\{\bar{\phi}^{(i+1)}\} = \phi^{(i+1)} = \int_0^\infty \xi \frac{\gamma_{i+1}}{D^{(i+1)}\xi^2 + \sigma^{(i+1)}} \bar{\phi}^{(i)} J_0(r\xi) d\xi \quad (4.18)$$

Para invertermos este valor usaremos novamente a relação de Parseval descrita pelos teoremas (1) e (2). Aplicando estes teoremas a este caso, podemos tomar  $\bar{f}_0(\xi)$  e  $\bar{g}_0(\xi)$  como  $\frac{J_0(r\xi)}{D^{(i+1)}\xi^2 + \sigma^{(i+1)}}$  e  $\bar{\phi}^{(i)}$  respectivamente. Logo, teremos

$$\begin{aligned} \phi^{(i+1)} &= \gamma_{i+1} \int_0^\infty \xi \left[ \frac{J_0(r\xi)}{D^{(i+1)}\xi^2 + \sigma^{(i+1)}} \right] \bar{\phi}^{(i)} d\xi \\ &= \gamma_{i+1} \int_0^\infty r' H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{D^{(i+1)}\xi^2 + \sigma^{(i+1)}} \right\} \phi^{(i)}(r') dr' \end{aligned}$$

$$f(r') = H_0^{-1} \left\{ \frac{J_0(r\xi)}{D^{(i+1)}\xi^2 + \sigma^{(i)}} \right\} = \frac{1}{D^{(i+1)}} \int_0^\infty \xi \frac{J_0(r\xi)}{\xi^2 + (\sqrt{\alpha_{i+1}})^2} J_0(r'\xi) d\xi$$

Onde

$$\alpha_i = \frac{\sigma^{(i)}}{D^{(i)}} \quad (4.19)$$

Agora, para calcular este termo, temos por [2] a seguinte forma fechada dada por

$$f_{i+1}(r') = \begin{cases} \frac{1}{D^{(i+1)}} I_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r') K_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r) , & 0 < r' < r \\ \frac{1}{D^{(i+1)}} I_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r) K_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r') , & r < r' < \infty \end{cases} \quad (4.20)$$

Onde  $I_0$  e  $K_0$  são as funções de Bessel modificadas. Outra importante condição é que não temos fonte fora do cilindro, e portanto, temos uma expressão para o fluxo, dada por

$$\begin{aligned} \phi^{(i+1)} = & \frac{\gamma_{i+1}}{D^{(i+1)}} K_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r') \phi^{(i)}(r') dr' + \\ & \frac{\gamma_{i+1}}{D^{(i+1)}} I_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r') \phi^{(i)}(r') dr' \end{aligned} \quad (4.21)$$

Desta maneira temos uma solução particular para o fluxo  $\phi^{(i+1)}$  que juntamente com a solução homogênea dada por (4.10) formam a solução final para (4.11).

$$\begin{aligned} \phi^{(i+1)} = & \frac{\gamma_{i+1}}{D^{(i+1)}} K_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r') \phi^{(i)}(r') dr' \\ & + \frac{\gamma_{i+1}}{D^{(i+1)}} I_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_{i+1}} r') \phi^{(i)}(r') dr' \\ & + A_{i+1} J_0(\lambda_{i+1} r) \end{aligned} \quad (4.22)$$



## 4.2 Formulação para o caso de N regiões

Considerando que estamos trabalhando com um domínio descrito por  $[0, R]$ , de forma que podemos subdividir este domínio em  $[0, R_1] \cup [R_1, R_2] \cup \dots \cup [R_{N-2}, R_{N-1}] \cup [R_{N-1}, R] = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{N-1} \cup \Omega_N$ , e definindo as soluções para o fluxo em diferentes regiões dadas por

$$\phi = \begin{cases} \phi^{(1)}, r \in \Omega_1 \\ \phi^{(2)}, r \in \Omega_2 \\ \vdots \\ \phi^{(N)}, r \in \Omega_N \end{cases} \quad (4.23)$$

onde cada  $\phi^{(n)}$  foi descrito na seção anterior. Ainda podemos escrever o fluxo final como sendo

$$\phi = \sum_{i=1}^N h_i \phi^{(i)} \quad (4.24)$$

onde  $h_i = H(r - R_i) - H(r - R_{i-1})$  e  $R_0 = 0, R_N = R$ .

## 4.3 Simulações para o caso de 2 regiões

Ao considerarmos apenas duas regiões em  $[0, R]$ , e subdomínio  $[0, R_1] \cup [R_1, R] = \Omega_1 \cup \Omega_2$  e fluxo dado por  $\phi$  e cilindro descrito pela figura (4.11)

$$\phi = \begin{cases} \phi^{(1)}, r \in \Omega_1 \\ \phi^{(2)}, r \in \Omega_2 \end{cases} \quad (4.25)$$

De forma que pode calcular o termo  $\phi^{(2)}$  recursivamente por (4.22), como sendo

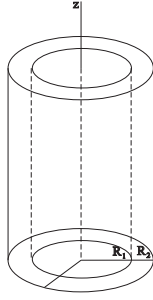


Figura 4.2: Cilindro Heterogêneo com 2 regiões.

$$\begin{aligned}
\phi^{(2)} &= \frac{\gamma_2}{D^{(2)}} K_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_2} r') \phi^{(1)}(r') dr' \\
&+ \frac{\gamma_2}{D^{(2)}} I_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_2} r') \phi^{(1)}(r') dr' \\
&+ A_1 J_0(\lambda_1 r)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Substituindo  $\phi^{(1)}$ , temos

$$\begin{aligned}
\phi^{(2)} &= \frac{A_1 \gamma_2}{D^{(2)}} K_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_0^r r' I_0(\sqrt{\alpha_2} r') J_0(\lambda_1 r') dr' \\
&+ \frac{A_1 \gamma_2}{D^{(2)}} I_0(\sqrt{\alpha_2} r) \int_r^R r' K_0(\sqrt{\alpha_2} r') J_0(\lambda_1 r') dr' \\
&+ A_2 J_0(\lambda_2 r)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Ao usarmos a condição de continuidade do fluxo nos valores de interface, neste caso  $R_1$ , teremos que

$$\phi^{(1)}(R_1) = \phi^{(2)}(R_1) \tag{4.28}$$

o que nos leva a seguinte correlação entre os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$

$$A_2 = \frac{A_1}{J_0(\lambda_2 R_1)} \left( J_0(\lambda_1 R_1) - \frac{\gamma_1}{D_1} K_0(\sqrt{\alpha_1} R_1) \int_0^{R_1} r' I_0(\sqrt{\alpha_1} r') J_0(\lambda_0 r') dr' \right. \\ \left. + \frac{\gamma_1}{D_1} I_0(\sqrt{\alpha_1} R_1) \int_{R_1}^R r' K_0(\sqrt{\alpha_1} r') J_0(\lambda_0 r') dr' \right)$$

e podemos encontrar esses coeficientes ao usarmos a condição de densidade de corrente (Lei de Fick). A expressão final deste fluxo é dada por

$$\phi = \sum_{i=1}^2 h_i \phi^{(i)} \tag{4.29}$$

onde  $h_i$  foi descrita anteriormente.

## 4.4 Resultados

Os seguintes resultados foram obtidos para diferentes valores de interface para o problema mencionado,

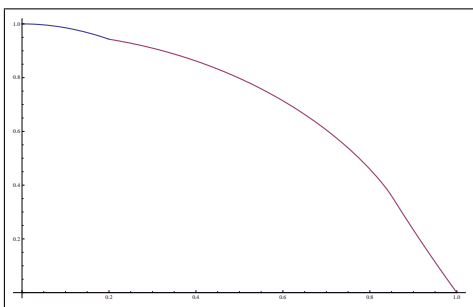


Figura 4.3: Fluxo com Interface em  $r = 0.2$  e  $D_1 > D_2$ .

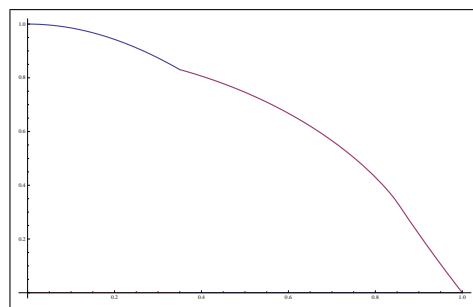


Figura 4.4: Fluxo com Interface em  $r = 0.45$  e  $D_1 > D_2$ .

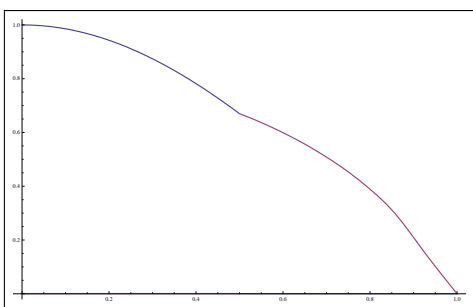


Figura 4.5: Fluxo com Interface em  $r = 0.5$  e  $D_1 > D_2$ .

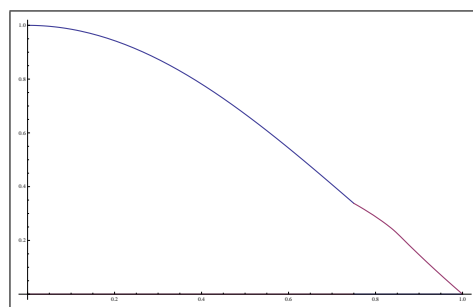


Figura 4.6: Fluxo com Interface em  $r = 0.75$  e  $D_1 > D_2$ .

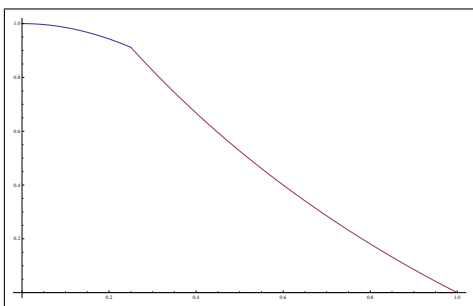


Figura 4.7: Fluxo com Interface em  $r = 0.25$  e  $D_1 < D_2$ .

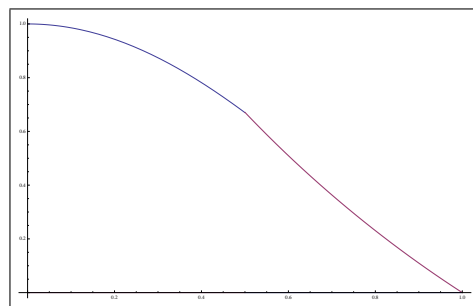


Figura 4.8: Fluxo com Interface em  $r = 0.5$  e  $D_1 < D_2$ .

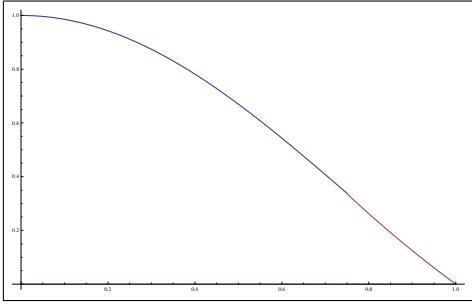


Figura 4.9: Fluxo com Interface em  $r = 0.75$  e  $D_1 < D_2$ .

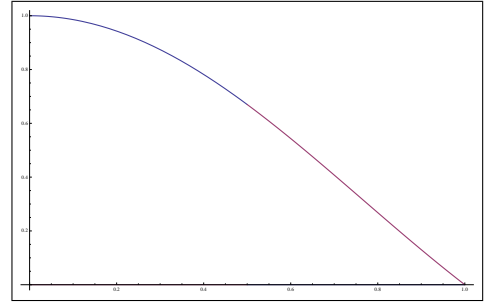


Figura 4.10: Fluxo com interface em  $r = 0.5$  e parâmetros idênticos.

## 4.5 Conclusões do capítulo

Neste capítulo apresentamos uma solução analítica para a equação da difusão em coordenadas cilíndricas monoenergética em um cilindro heterogêneo. Obtivemos esta solução ao assumirmos que a partir do cálculo do fluxo na primeira região podemos utilizar esse resultado para fazermos uma correção no cálculo da região seguinte, criando assim, uma formulação de recorrência para o cálculo do fluxo em diferentes regiões, limitadas por valores de raios crescentes. As constantes inicialmente não conhecidas deste problema, puderam ser especificadas utilizando as condições de fluxo e corrente na interface. Utilizamos a transformação integral na variável espacial bem como no capítulo anterior. De forma que podemos calcular o fluxo para diferentes valores de  $r \in [0, R]$ . Para um caso mais realístico em física de reatores nucleares, podemos pensar nessas regiões como sendo combustível e moderador.

## 5 SOLUÇÃO ANALÍTICA MONOERGÉTICA DEPENDENTE DO TEMPO

A idéia básica deste capítulo é desenvolver um método analítico para resolver a equação da difusão de nêutrons dependente do tempo. Tomamos aqui o caso monoenergético como abordagem inicial. Para fazer a modelagem matemática deste problema, tomamos a equação da difusão considerando inicialmente uma fonte arbitrária. A equação representa o balanço entre produção e perda dessas partículas. Na seção seguinte, descrevemos o modelo incluindo as condições de contorno e condição inicial para este problema. Na seção 3 e 4 mostraremos as vantagens de resolver este problema analiticamente usando a Transformada Finita de Hankel, a qual se aplica perfeitamente ao sistema de coordenadas cilíndricas.

### 5.1 Formulação do Problema

Para resolvermos este problema para um específico grupo de energia, vamos considerar a equação da difusão de nêutrons em geometria cilíndrica em um dado grupo de energia  $g$  descrita por

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g = D_g \Delta_r \phi_g - \Sigma_{Rg} \phi_g + S(r, t) \quad (5.1)$$

onde  $S(r, t)$  é o termo fonte do problema, dependendo de  $r$  e  $t$  e consideraremos  $v = 1$ . Com as seguintes, condições de contorno

$$\frac{\partial \phi_g}{\partial r}(0, t) = 0, \quad \phi_g(R, t) = 0 \quad (5.2)$$

## 5.2 Definição da Transformada Finita de Hankel

Vamos aplicar agora, a Transformada Finita de Hankel de ordem zero em (5.1). Lembrando que a Transformada Finita de Hankel de ordem  $p$ , tem por definição

$$H_p[f(r); r \rightarrow \alpha_n] = \int_0^a r f(r) J_p(r\alpha_n) dr \quad (5.3)$$

onde  $\alpha_n$  são os valores tais que  $J_p(\alpha_n a) = 0$  para  $n \in \mathbf{N}$ , e sua inversão é descrita como

$$f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}(\alpha_n) \frac{J_p(\alpha_n r)}{[J_p'(\alpha_n a)]^2} \quad (5.4)$$

## 5.3 Aplicando a Transformada Finita de Hankel

Aplicaremos a Transformada Finita de Hankel neste problema, pois não consideraremos fluxo fora do cilindro limitado por  $R$ . Para estabelecermos as condições de contorno, tomaremos  $\phi_g(R, t) = 0$  e  $\phi_g(0, t)$  limitado. A única condição inicial é dada por  $\phi_g(r, 0) = 0$ .

Se multiplicarmos ambos lados de (5.1) por  $r J_0(\alpha_n r)$ , tomando  $a = R$  e integrando de 0 a  $R$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial}{\partial t} \phi_g r J_0(\alpha_n r) dr &= D_g \int_0^R r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \phi_g}{\partial r} \right] \right) J_0(\alpha_n r) dr \\ &+ \int_0^R \Sigma_{Rg} \phi_g r J_0(\alpha_n r) dr + \int_0^R r S(r, t) J_0(\alpha_n r) dr \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dessa maneira, (5.5) pode ser reescrita por

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi}_g(\alpha_n, t) = D_g \int_0^R r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \phi_g}{\partial r} \right] \right) J_0(\alpha_n r) dr$$

$$\Sigma_{Rg} \bar{\phi}_g + \bar{S}(\alpha_n, t) \quad (5.6)$$

Tomando somente o primeiro termo do lado direito desta equação, e integrando por partes, obtemos

$$\int_0^R r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \phi_g}{\partial r} \right] \right) J_0(\alpha_n r) dr =$$

$$r J_0(\alpha_n r) \frac{\partial}{\partial r} \phi_g \Big|_0^R + \int_0^R \alpha_n r J_1(\alpha_n r) \frac{\partial}{\partial r} \phi_g dr \quad (5.7)$$

mas como escolhemos  $\alpha_n$  tal que  $J_0(\alpha_n R) = 0$ , implica que o primeiro termo do lado direito em (5.7) desaparece, logo

$$\int_0^R r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \phi_g}{\partial r} \right] \right) J_0(\alpha_n r) dr =$$

$$\int_0^R \alpha_n r J_1(\alpha_n r) \frac{\partial}{\partial r} \phi_g dr \quad (5.8)$$

e integrando por partes novamente, teremos

$$\int_0^R \alpha_n r J_1(\alpha_n r) \frac{\partial}{\partial r} \phi_g dr =$$

$$\phi_g \alpha_n r J_0(\alpha_n r) \Big|_0^R - \alpha_n^2 \int_0^R r \phi_g J_0(\alpha_n r) dr = -\alpha_n^2 \bar{\phi}_g \quad (5.9)$$

o que implica que

$$\frac{d}{dt} \bar{\phi}_g(\alpha_n, t) + (D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg}) \bar{\phi}_g(\alpha_n, t) = \bar{S}(\alpha_n, t) \quad (5.10)$$



Essa equação está sujeita a condição inicial  $\bar{\phi}(\alpha_n, 0) = 0$  pois  $\phi(r, 0) = 0$ , e desta maneira temos uma solução expressa por

$$\bar{\phi}_g(\alpha_n, t) = \int_0^t \bar{S}(\alpha_n, t') e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(t-t')} dt' \quad (5.11)$$

com

$$\bar{S}(\alpha_n, t) = \int_0^R r S(r, t) J_0(\alpha_n r) dr \quad (5.12)$$

Para fazermos a inversão, precisamos aplicar a equação (5.11) em (5.4), obtendo como resultado

$$\phi_g(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_g(\alpha_n, t) \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_0'(\alpha_n R)]^2} \quad (5.13)$$

expresso em termos da equação (5.11), assim

$$\phi_g(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \bar{S}(\alpha_n, t') e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(t-t')} dt' \right\} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.14)$$

que é solução mais geral para o fluxo com uma dada fonte  $S(r, t)$ .

## 5.4 Fonte Estacionária

Analizaremos o caso em que temos uma fonte estacionária, isto é, quando a nossa fonte  $S$  não depende do tempo. Precisamos olhar para a expressão  $S(r, t)$  e conseqüentemente para sua transformada  $\bar{S}(\alpha_n, t)$  dada por

$$\bar{S}_g(r, t) = \int_0^R r S_g(r, t) J_0(\alpha_n r) dr \quad (5.15)$$

Porém temos que

$$S_g(r, t) = S_g(r) \text{ e conseqüentemente } \bar{S}_g(\alpha_n, t) = \bar{S}_g(\alpha_n) \quad (5.16)$$

Nesse caso, a expressão (5.14), pode ser representada por

$$\phi_g(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{S}(\alpha_n) \int_0^t e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(t-t')} dt' \right\} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.17)$$

mas, como sabemos que

$$\int_0^t e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(t-t')} dt' = \frac{1 - e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})t}}{(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})} \quad (5.18)$$

e logo, a expressão final para o fluxo

$$\phi_g(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{S}(\alpha_n) \frac{1 - e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})t}}{D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg}} \right\} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.19)$$

## 5.5 Solução Estacionária

Para encontrarmos a solução estacionária, desconsideraremos o termo  $\frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi}_g$ . A equação (5.10) fica descrita da forma

$$(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg}) \bar{\phi}_g = \bar{S}(\alpha_n) \quad (5.20)$$

Assim

$$\bar{\phi}_g = \frac{\bar{S}(\alpha_n)}{D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg}} \quad (5.21)$$

Ao aplicarmos a fórmula inversão, teremos

$$\phi_g(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{S}(\alpha_n)}{D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg}} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.22)$$

como  $\bar{S}(\alpha_n)$  é dada por

$$\bar{S}(\alpha_n) = \int_0^R r S(r) J_0(\alpha_n r) dr \quad (5.23)$$

Então

$$\phi_g(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg}} \left\{ \int_0^R r S(r) J_0(\alpha_n r) dr \right\} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.24)$$

que descreve a solução para o caso estacionário.

### 5.5.1 Análise Assintótica

Para fazer uma análise assintótica sobre as equações diferenciais originais, podemos analisar diretamente as equações de ambos casos (estacionário e não estacionário) para concluir que o fluxo dependente do tempo pode ser assintótico ao caso estacionário. Para isso, definiremos uma função auxiliar  $\Phi$  como sendo  $\Phi = \phi - \phi_s$ , onde  $\phi$  e  $\phi_s$  são as soluções para o caso dependente do tempo e estacionário, respectivamente. Sabemos que  $\phi$ ,  $\phi_s$  e  $\Phi$  são funções pertencentes ao espaço  $L^2(C)$ . Também temos que estes problemas possuem condições de contorno da forma :

$$\phi(R, t) = 0 \text{ e } , \phi_s(R, t) = 0 \quad (5.25)$$

Implicando que

$$\Phi(R, t) = \phi(R, t) - \phi_s(R, t) = 0 \quad (5.26)$$

e como temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi &= \Delta_r\phi - \Sigma_{Rg}\phi + S \\ 0 &= \Delta_r\phi_s - \Sigma_{Rg}\phi_s + S\end{aligned}$$

Agora, neste caso estamos considerando como fonte o termo de fissão, tornando a expressão para  $S$  a seguinte

$$S(r, t) = \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\phi \quad (5.27)$$

$$S(r) = \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\phi_s \quad (5.28)$$

Desta maneira, podemos reescrever as primeiras equações, tendo agora

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi &= \Delta_r\phi - \Sigma_{Rg}\phi + \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\phi \\ 0 &= \Delta_r\phi_s - \Sigma_{Rg}\phi_s + \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\phi_s\end{aligned}$$

e substraindo uma de outra, teremos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\phi_s &= \Delta_r\phi - \Delta_r\phi_s - \Sigma_{Rg}\phi + \Sigma_{Rg}\phi_s + \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\phi - \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\phi_s \\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi &= \Delta_r\Phi - \Sigma_{Rg}\Phi + \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\Phi\end{aligned}$$

Assim chegando a uma expressão para função auxiliar  $\Phi$  dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \Delta_r\Phi - \left(\Sigma_{Rg} - \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\right)\Phi \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \Delta_r\Phi - \gamma\Phi \quad (5.30)$$

onde  $\gamma = (\Sigma_{Rg} - \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f)$ . Porém, se decompuzermos  $\Phi$  da seguinte forma

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^{(i)}\xi_i \quad (5.31)$$

onde  $\xi_i$  são as autofunções que satisfazem  $\Delta_r\xi_i = \lambda_i\xi_i$  e sendo  $\lambda_i \in \Lambda$ , com  $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  o conjunto dos autovalores do operador elíptico  $\Delta_r$ , ordenados por  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ , e como estas funções estão no espaço  $L^2$ , podemos representar

$$\|\Phi\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^{(i)2} \quad (5.32)$$

$$-\Delta_r\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\xi_i \quad (5.33)$$

ou ainda, na forma de produto interno

$$-\langle\Phi, \Delta_r\Phi\rangle = \|\nabla\Phi\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\Phi^{(i)2} \quad (5.34)$$

Desta maneira,

$$\|\nabla\Phi\|_2^2 \geq \min\{\lambda_i\} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^{(i)2} \quad (5.35)$$

Como  $\lambda_0 = \min\{\lambda_i\}$ , logo

$$-\|\nabla\Phi\|_2^2 \leq -\lambda_0\|\Phi\|_2^2 \quad (5.36)$$

Multiplicando por  $\Phi$  e integrando por partes a equação diferencial original, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi\|_2^2 = -\|\nabla\Phi\|_2^2 - \gamma\|\Phi\|_2^2 \quad (5.37)$$

usando (5.36), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi\|_2^2 &\leq -\lambda_0 \|\Phi\|_2^2 - \gamma \|\Phi\|_2^2 \\ &\leq -(\lambda_0 + \gamma) \|\Phi\|_2^2 \\ \frac{d}{dt} \|\Phi\|_2^2 &\leq -2(\lambda_0 + \gamma) \|\Phi\|_2^2 \end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Gronwall, temos

$$\|\Phi\|_2^2 \leq \|\Phi(0)\|_2^2 e^{-2(\lambda_0 + \gamma)t} \quad (5.38)$$

$$\|\Phi\|_2 \leq \|\Phi(0)\|_2^{\frac{1}{2}} e^{-(\lambda_0 + \gamma)t} \quad (5.39)$$

Como  $\Phi(0)$  é limitada, temos que quando  $t$  tende ao infinito e desde de que a seguinte condição seja satisfeita

$$\lambda_0 + \gamma = \lambda_0 + \Sigma_{Rg} - \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f > 0 \quad (5.40)$$

condição esta que chamamos de subcrítica. Assim, temos que

$$\|\Phi\|_2 \rightarrow 0 \quad (5.41)$$

Em outras palavras, a norma da diferença destas funções tende a zero.

Logo,

$$\|\phi - \phi_s\|_2 \rightarrow 0 \quad (5.42)$$

Assim, podemos concluir que estas funções são assintóticas, desde que a condição (5.40) seja satisfeita.

Uma outra possibilidade de provar que estas duas funções são assintóticas, é fazermos uma mudança de variável e definir uma outra função auxiliar. Seja

$$\psi = \Phi e^{\gamma t} \quad (5.43)$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} e^{\gamma t} + \gamma \Phi e^{\gamma t} \quad (5.44)$$

Como temos  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta_r \Phi - \gamma \Phi$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi &= (\Delta_r \Phi - \gamma \Phi) e^{\gamma t} + \gamma \Phi e^{\gamma t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \Delta_r \Phi e^{\gamma t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \Delta_r \psi \end{aligned} \quad (5.45)$$

Mas (5.45) é conhecida como a equação do calor, a qual satisfaz o princípio do máximo, em outras palavras

$$|\psi| \leq \max \{ \sup |\psi(0)|, \sup |\psi(R)| \} \quad (5.46)$$

Como temos a condição de contorno  $\Phi(R) = 0$  implicando que  $\psi(R) = 0$ , logo

$$|\psi| \leq \sup |\psi(0)| \quad (5.47)$$

Finalmente

$$|\Phi| \leq \gamma e^{\gamma t} \quad (5.48)$$

Como definimos anteriormente que  $\Phi$  é a função diferença entre  $\phi$  e  $\phi_s$ , então está provado que  $\phi$  e  $\phi_s$  são assintóticas. Podemos verificar este fato ao plotarmos diversos gráficos do fluxo, com fonte especificada, variando os valores de  $t$ , conforme a figura abaixo,

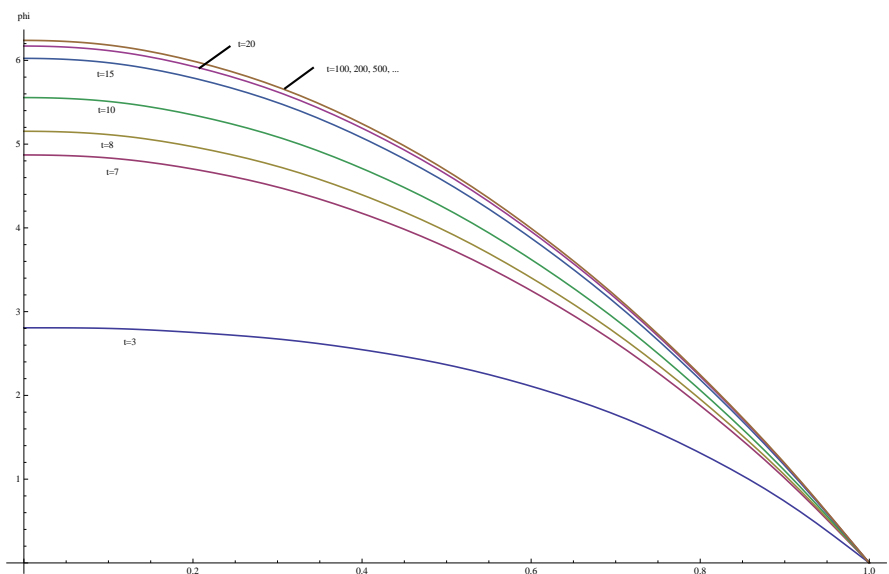


Figura 5.1: Fluxo usando  $t = 3, 7, 8, 10, 15, 20, 100, \dots$



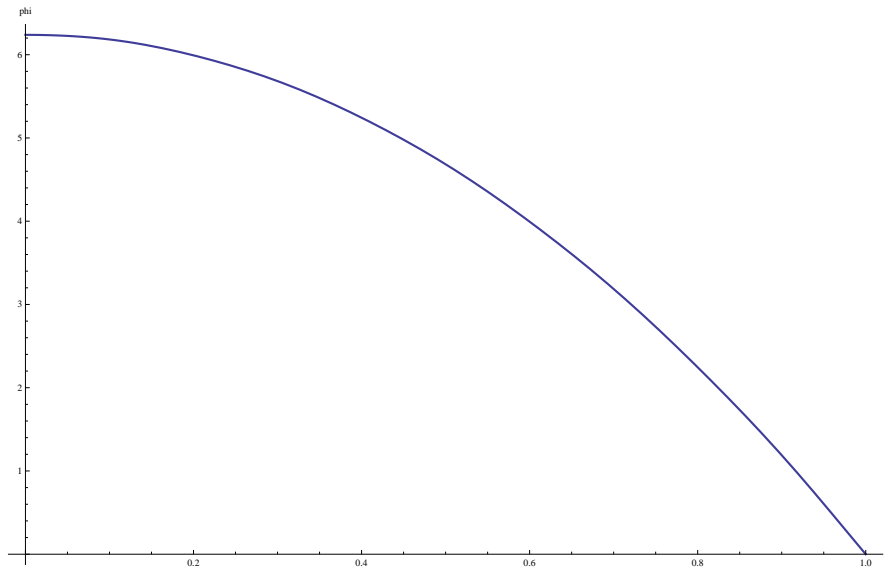


Figura 5.2: Fluxo Estacionário.

## 5.6 Aplicação ao cálculo do fator Build-up

A descrição da migração de nêutrons dentro de um reator nuclear é um fenômeno que é caracterizado através do fator build-up. Para fazer o modelo matemático deste problema, nos concentramos na idéia básica de que, podemos descrever o termo fonte  $S(r, t)$  como um funcional Delta Dirac para podermos modelar um problema de blindagem, bem como descrever o fator de buildup deste problema em coordenadas cilíndricas.

### 5.6.1 Fonte Delta Dirac

A distribuição Delta Dirac, escrita  $\delta(r)$  (no caso cilíndrico), é definida com sendo zero para todos valores de  $r$  exceto em  $r = 0$ . A integral de  $\delta(r)$  é finita, e o valor desta integral é a unidade. Resumidamente,

$$\delta(r) = \begin{cases} +\infty, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

Simbolicamente, podemos escrever que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r) dr = 1 \quad (5.50)$$

Agora, seja  $[a, b]$  um conjunto compacto com  $a < 0 < b$ . Considerando  $[a, b]$  um suporte compacto para  $(-\infty, \infty)$ , assumimos

$$\int_{[a,b]} \delta(r) dr = 1 \quad (5.51)$$

Por definição,  $\delta(r)$  é um funcional linear que avalia uma função contínua  $f(r)$  em zero, de maneira que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(r) \delta(r) dr = \int_{[a,b]} f(r) \delta(r) dr = f(0) \quad (5.52)$$

A última equação é válida para qualquer domínio de integração que contém  $r = 0$ , de modo que é possível chegarmos a conclusão de que

$$\int_{[0,b]} f(r) \delta(r) dr = \frac{1}{2} f(0) \quad (5.53)$$

Como teremos uma fonte conhecida, precisamos transformar usando a Transformada Finita de Hankel, que é

$$\bar{S}_g(r, t) = \int_0^R r S_g(r, t) J_0(\alpha_n r) dr \quad (5.54)$$

Considerando uma fonte com dependência no tempo, como descrito em Lamarsh [11], seja

$$S(r, t) = e^{-\lambda t} \frac{S_0 \delta(r)}{\pi r} \quad (5.55)$$

Onde  $S_0$  é o valor inicial para fonte,  $\lambda$  é uma constante de decaimento no tempo. Assim, tomando  $b = R$

$$\bar{S}_g(\alpha_n, t) = \int_{[0,R]} r e^{-\lambda t} \frac{S_0 \delta(r)}{\pi r} J_0(\alpha_n r) dr \quad (5.56)$$

No nosso caso, considerando a expressão (5.54) com  $f(r) = \frac{S_0 e^{-\lambda t} J_0(\alpha_n r)}{\pi}$ ,  
ficando

$$\int_{[0,R]} r e^{-\lambda t} \frac{S_0 \delta(r)}{\pi r} J_0(\alpha_n r) dr = \frac{1}{2} f(0) = \frac{S_0 e^{-\lambda t}}{2\pi} \quad (5.57)$$

Finalmente, podemos expressar a solução final para o fluxo

$$\phi_g(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \bar{S}(\alpha_n, t') e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(t-t')} dt' \right\} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.58)$$

usando (5.57), torna-se

$$\phi_g(r, t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} S_0 \left\{ \int_0^t e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(t-(1+\lambda)t')} dt' \right\} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.59)$$

Sabemos que a seguinte integral tem como resultado

$$\int_0^t e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(t-(1+\lambda)t')} dt' = \frac{e^{(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})\lambda t} - e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})t}}{(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(1 + \lambda)} \quad (5.60)$$

Temos como solução final

$$\phi_g(r, t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} S_0 \frac{e^{(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})\lambda t} - e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})t}}{(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(1 + \lambda)} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.61)$$

Fica evidente que ao fazermos  $\lambda$  tender a zero, teremos um caso praticamente igual ao de fonte fixa, isto é, não dependente do tempo, descrito por (5.19).

Realizamos algumas simulações do fluxo com fonte definida por (5.55). Os seguintes resultados foram obtidos para diferentes conjuntos de parâmetros com a série truncada em  $N$ . A soluções mostradas a seguir, representadas por

$$\phi_g(r, t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=1}^N S_0 \frac{e^{(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})\lambda t} - e^{-(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})t}}{(D_g \alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(1 + \lambda)} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.62)$$

Tabela dos parâmetros escolhidos para aplicação em blindagem:

$P^{(n)}$	$D_1$	$\Sigma_{R1}$	$\lambda$	$R$	$S_0$	$N$	$t = [0, T]$
$P^{(1)}$	1.43	0.39	0.99	2.0	5	10	[0,10]
$P^{(2)}$	1.43	0.39	0.58	1.0	5	10	[0,10]
$P^{(3)}$	1.43	0.39	0.58	2.0	5	10	[0,30]
$P^{(4)}$	1.43	0.39	0.58	1.0	5	10	[0,10]
$P^{(5)}$	1.43	0.39	0.44	1.0	5	10	[0,30]
$P^{(6)}$	1.43	0.39	0.37	1.0	5	10	[0,30]

Tabela 5.1: Conjunto de Parâmetros, com fonte (5.55).

Foram obtidos os seguintes resultados:

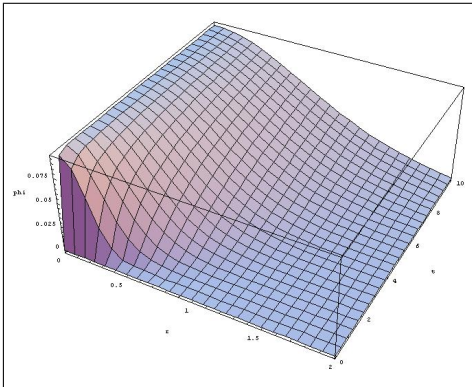


Figura 5.3: Fluxo usando os parâmetros  $P^{(1)}$ .

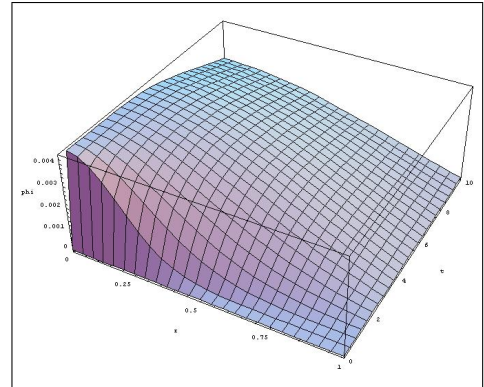


Figura 5.4: Fluxo usando os parâmetros  $P^{(2)}$ .

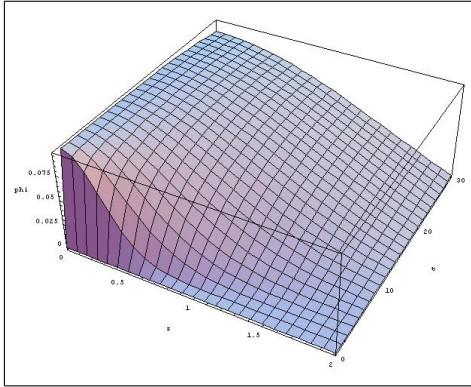


Figura 5.5: Fluxo usando os parâmetros  $P^{(3)}$ .

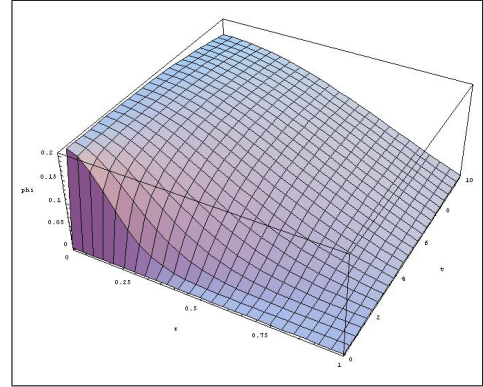


Figura 5.6: Fluxo usando os parâmetros  $P^{(4)}$ .

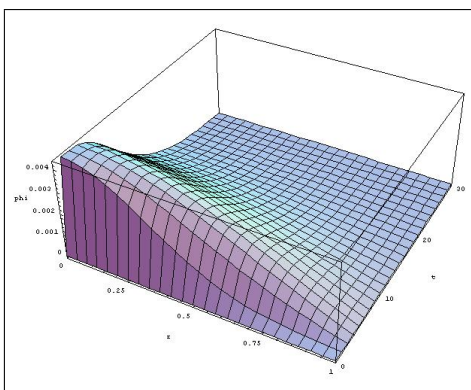


Figura 5.7: Fluxo usando os parâmetros  $P^{(5)}$ .

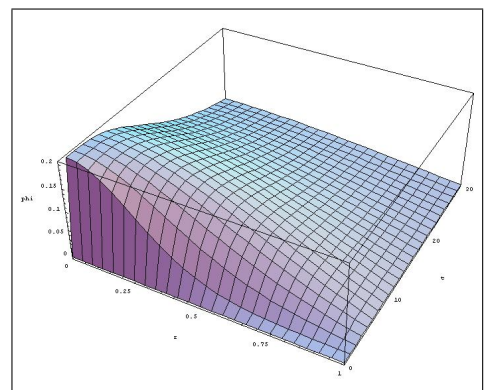


Figura 5.8: Fluxo usando os parâmetros  $P^{(6)}$ .

### 5.6.2 Fator de Build-up

Para fazermos uma análise do fator build-up, lembramos que este fator pode ser calculado para diferentes magnitudes de Fluxo. O Fator buildup para este caso em coordenadas cilíndricas, com uma fonte definida como em (5.55), é dado por

$$B_p(r\Sigma_t, t) = \frac{R_\phi(r, t)}{e^{-r\Sigma_t}/2\pi r} \quad (5.63)$$

Neste caso, consideraremos a função  $R_\phi(r, t)$  como sendo o fluxo dentro do cilindro, isto é  $R_\phi(r, t) = \phi(r, t)/\lambda$ , dessa maneira

$$B_p(r\Sigma_t, t) = \frac{\phi(r, t)/\lambda}{e^{-r\Sigma_t}/2\pi r} \quad (5.64)$$

onde  $\Sigma_t$  é a seção de choque macroscópica total. Logo, o fator buildup expresso em termos do fluxo é

$$B_p(r\Sigma_t, t) = \frac{2S_0}{r e^{-r\Sigma_t}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(D_g\alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})\lambda t} - e^{-(D_g\alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})t}}{(D_g\alpha_n^2 + \Sigma_{Rg})(1 + \lambda)} \frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_1(\alpha_n R)]^2} \quad (5.65)$$

Como a espessura de blindagem cresce de zero até alguns livres caminhos médios, o espectro de energia de nêutrons muda consideravelmente. Diferentes fatores de buildup são obtidos para diferentes funções  $R_\phi(r, t)$  que também varia com  $\lambda$ , dependendo da energia e das seções de choque para essas diferentes funções. Os resultados mostram que após alguns livres caminhos médios, o espectro de nêutrons assume um valor fixo. Isso vem do fato de que o livre caminho médio para uma fonte de nêutrons rápidos é maior do que nêutrons de baixa energia. Resultando no mesmo fator de buildup variando com a espessura.

Mostramos a seguir alguns resultados: a correlação entre o fator buildup com o raio do cilindro, obtendo o seguinte perfil para diferentes valores de  $t$ ,

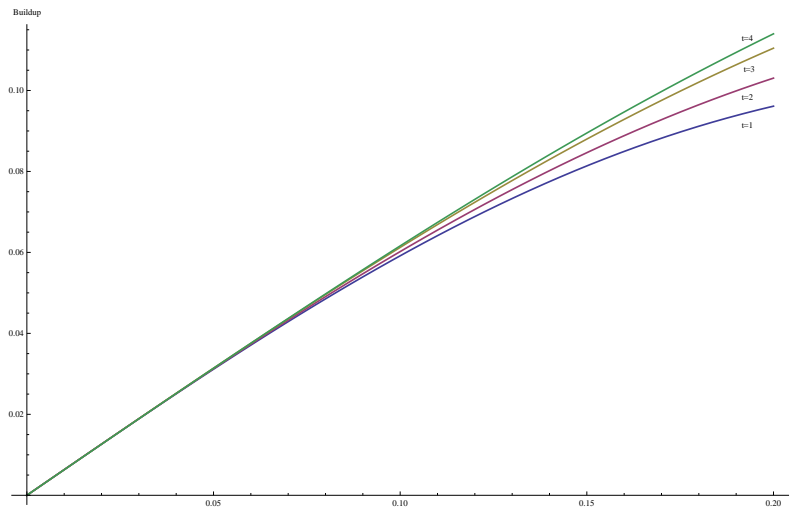


Figura 5.9: Fator Buildup para diferentes valores de  $t = 1, 2, 3, 4$ .

## 5.7 Conclusões do Capítulo

Neste capítulo apresentamos uma solução analítica dependente do tempo para a equação da difusão em coordenadas cilíndricas com uma fonte arbitrária. Está solução mais uma vez, bem como no capítulo 3 foi obtida através da técnica de transformadas integrais, neste caso, através da transformada finita de Hankel, mostrando como esse tipo de técnica pode ser útil em cálculos de fluxo em reatores nucleares. Usando está solução podemos calcular o fluxo dependente da variável espacial e temporal dentro do cilindro de raio  $R$ . Apresentamos uma aplicação a cálculo de blindagem em reatores nucleares, bem como fatores de buildup dependentes do tempo para o caso em que temos uma fonte descrita pelo funcional linear Delta Dirac. Exploramos estes resultados para diferentes valores da constante de decaimento  $\lambda$ . Como esperado, concluímos que quando esta constante tende a zero, temos o caso de fonte fixa visto anteriormente. Estudamos o caso em que temos uma fonte fixa, isto é, não dependente da variável temporal. A análise assintótica nos mostra que em condições de que  $\Sigma_R - \frac{\nu}{k_{eff}}\Sigma_f > 0$ , teremos que a solução dependente do tempo tende à solução estacionária, como também era esperado. Está condição se faz necessária para que possamos assumir isso.

## 6 CONCLUSÃO E PROBLEMAS EM ABERTO

Analizando os resultados obtidos neste trabalho, podemos concluir que é possível construir uma solução analítica válida para problemas multi-grupo e multi-região em coordenadas cilíndricas em se tratando do Fluxo de Nêutrons. Encontramos na literatura apenas casos em que o problema especificado é resolvido numericamente, com solução analítica apenas em um grupo de energia Dababneh et al [10]. Podemos pelo teorema de Cauchy-Kowalewski garantir a existência e unicidade da presente derivação baseado na solução da transformação integral de Hankel sujeita as condições de densidade de corrente e condições de contorno.

No caso do problema multi-grupo, na derivação é aparente que a solução não é restrita as condições de contorno específicas que foram impostas, mas sim tendo um caráter mais geral, tal que a solução aplicada em problemas homogêneos e em especificados subdomínios, mas não necessariamente com o mesmo conjunto de parâmetros. As condições de interface entre subdomínios adjacentes são tratadas como as condições de contorno de um problema global homogêneo, significando que não é necessário modificações na solução quando o fluxo escalar é calculado, e nesse sentido a solução é mais geral.

Pretendemos estender para um caso de mais regiões usando a metodologia do capítulo 4. Além do mais, focaremos em tentar solucionar problemas de criticidade para o núcleo do reator, aplicando condições de continuidade na interface. Estes resultados apresentados são um primeiro passo para uma futura implementação de cálculo do fluxo em células equivalentes em geometrias mais gerais.

Apresentamos também, uma solução analítica para a equação da difusão em coordenadas cilíndricas monoenergética em um cilindro heterogêneo. Obtivemos esta solução ao assumirmos que a partir do cálculo do fluxo na primeira região podemos utilizar esse resultado para fazermos uma correção no cálculo da região seguinte, criando assim, uma formulação de recorrência para o cálculo do fluxo em diferentes



regiões, limitadas por valores de raios crescentes. Utilizamos a transformação integral na variável espacial bem como no capítulo anterior. De forma que podemos calcular o fluxo para diferentes valores de  $r \in [0, R]$ .

Tendo em vista a solução obtida no capítulo 5, para um problema de fluxo de nêutrons dependente do tempo, em coordenadas cilíndricas, o qual mostramos analiticamente que a solução inicial tende a solução estacionária, considerando  $\gamma > 0$ . Pretendemos estudar futuramente problemas em cinética de reatores e avaliar o comportamento não só do fluxo, mas também das concentrações de precursores nesses sistemas de coordenadas usando está técnica, como por exemplo, cinética de reatores em geometria esférica.

Este trabalho, de modo geral, foi construído e desenvolvido utilizando a técnica de transformadas integrais, neste caso, através da Transformada de Hankel, mostrando como esse tipo de técnica pode ser útil em cálculos de fluxo em reatores nucleares. Acreditamos também, que este é um método promissor para solucionar diferentes classes de problemas relacionadas à Teoria Geral de Perturbação. Usando está solução podemos calcular o fluxo dependente da variável espacial e temporal dentro do cilindro de raio  $R$ . Apresentamos uma aplicação a cálculo do fator buildup em reatores nucleares, bem como fatores de buildup dependentes do tempo para o caso em que temos uma fonte descrita pelo funcional linear Delta Dirac.

## Referências Bibliográficas

- [1] G. Adomian, Solving Frontier problems of Physics: The decomposition method, *Kluwer Academic Publishers*, 1994.
- [2] H. Bateman, Tables of Integral Transforms, *McGraw-Hill company.*, New York, 1954.
- [3] B. E.J. Bodmann, M. T. Vilhena, L. S.Ferreira, J. B.Bardaji. An analytical solver for the multi-group tw dimensional neutron-diffusion equation by integral transform techniques,*Il Nuovo Cimento della Societ Italiana di Fisica. C* **33**, pp. 1-10, 2010.
- [4] I. A. Sneddon, The use of integral transforms, *McGraw-Hill company.*, New York, 1972.
- [5] G. A. Goncalves, M. T. Vilhena, B. E.J. Bodmann, Heuristic Geometric "Eigenvalue universaly" in a one-dimensional neutron transport problem with anisotropic scattering, *Kertechnik*, **75**, pp.50-52, 2010.
- [6] G. A. Goncalves, S. B. Leite, M. T. Vilhena, Solution of the neutron transport equation problem with anysotropic scattering, *Annals of Nuclear Energy* **36**, pp. 98-102, 2009.
- [7] R. Lemos, M. T. Vilhena, F. C. da Sila, S. Wortmann, Analytic Solution for Two-Group Diffusion equations in a Multilayered Slab using Laplace Transform Technique, *Progress in Nuclear Energy*, **50**, pp. 747-756, 2008.
- [8] M. T. Vilhena, C. Segatto, H. Velho, G. A. Goncalves, Analytical Solution of the one-dimensional discrete ordinates equation by the Laplace and Hnakerl integral Transform, *Integral Methods in Science and Engineering.*, pp. 267-272, 2004.
- [9] C. E. Siewert, J. R. Thomas, Neutron Transport Calculations in Cylindrical Geometry, *Nuclear Science and Engineering.*, pp. 107-112, 1984.

- [10] S. Dababneh, K. Khasawneh, Z. Odibat, An alternative solution of the neutron diffusion equation in cylindrical symmetry, *Annals of Nuclear Energy.*, pp. 1140-1143, 2011.
- [11] J. Lamarsh, Introduction to Nuclear Reactor Theory , *McGraw-Hill company.*, New York, 1966.
- [12] L. Usachev, Perturbation Theory for the Breeding Ratio and for Other Number Ratios Pertaining to Various Reacor Processes , *Journal of Nuclear Energy.*, vol. 18, 1964.
- [13] E. Wachspress, Iterative Solution of Elliptic Systemsand Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics , *Prentice-hall.*, New Jersey, 1966.
- [14] H. Soodak, The Science and Engineering of Nuclear Power , *United Nations.*, New York, 1948.
- [15] E. Wigner, Effect of Small Perturbation on Pile Period , *ReportCP-G Nations.*, 1945.
- [16] Z. Lima, Solution of the Fixed Souce Neutron Diffusion Equation by Using the Pseudo-Harmonics Method , *Annals of Nuclear Energy.*, pp. 1649-1666, 2004.
- [17] J. Gomit, LaMéthode des Pseudo-Harmoniques Théories et Application , *Bulletin de la Direction des Études et Recherches.*, pp. 61-66, 1985.
- [18] M. P. de Abreu, Uma Metodologia Alternativa de Pseudo-Harminicos: Aplicação ao Cálculo Bidimensional de Reatores , *Dissertação de Mestrdo COOPE/UFRJ*, Rio de Janeiro, Rj, Brasil, 1988.
- [19] A. Derivi, Código Computacional para Cálculos de Criticalidade em Placas Planaspelo Método LTSN , *PROMECC/UFRGS*, Porto Alegre, RS, Brasil, 2000.

- [20] G. I. Bell and S. Glasstone, Nuclear Reactor Theory , *Van Nostrand Reinhold.*, New York, 1970.
- [21] R. D. Lawrence, Progress in Nodal Methods for The Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations , *Progress in Nuclear Energy.*, vol. 17(3), pp. 271-301, 1986.
- [22] B. Montagnini, A Well-Balance Coarse-Mesh Flux xpansion Method , *Annals of Nuclear Energy.*,vol. 21(1), pp. 45-53, 1994.
- [23] R. A. Shober, Two Nodal Methods for solving Time-Dependent Group Diffusion Equation , *Nuclear Science and Engineering.*,vol. 64, pp. 582-592, 1977.
- [24] R. C. Barros, Um Método Numérico Livre de Erro de Truncamento Espacial para Cálculos Unidimensionais de Multigrupo Difusão, *IV Congresso Geral de Energia Nuclear.*,vol. 1, pp. 377-382, 1992.
- [25] G. J. Mitsis, Transport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems , PhD Tesis, Argonne, Illinois, USA, 1963.
- [26] F. Bennewitz, Higher-Order Crections n Nodal Reactor Calculations , *Trans. American Nuclear.*,vol. 22, pp. 250-251, 1975.