

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

AXEL ARIEL MANGE

**AS PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES NA TEORIA
DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES**

Porto Alegre

2011

AXEL ARIEL MANGE

**AS PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES NA TEORIA
DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador:

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo

Porto Alegre

2011

AXEL ARIEL MANGE

AS PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES NA TEORIA DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título Bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovado em: Porto Alegre, de de 2011.

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Gilberto de Oliveira Kloeckner
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Ronald Otto Hillbrecht
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer à minha família. Conteí com a presença deles em muitos dos momentos mais marcantes de minha vida. Meu pai, Rodolfo, sempre me aconselhou sabiamente nas horas mais críticas. Minha mãe, Monica, nunca deixou de se preocupar com meu bem-estar e permaneceu do meu lado em qualquer situação. Minha irmã, Mayra, minha verdadeira companheira desde a infância, com quem eu passei inúmeros momentos memoráveis. Minha avó, Clara, quem me ensinou as lições básicas da vida. Minha avó, Rita, que cresceu no meu coração. Meus dois falecidos avôs, descansem em paz; sem eles nada seria possível.

Quero também deixar clara minha imensa gratidão a todos os amigos que conheci durante o período da graduação. Seria impossível citá-los todos aqui. Mas eles foram minha motivação nas horas difíceis e minha alegria nos momentos célebres.

Agradeço ao corpo docente, com destaque a meu orientador, e aos funcionários da Faculdade de Ciências Econômicas, os quais possibilitam a existência do curso.

A meus colegas do Banco J.P. Morgan e ex-colegas do Banco Sicredi.

“If you surrender to the wind, you can ride it.”

Toni Morrison.

Resumo

Este estudo buscar realizar um levantamento sobre as principais contribuições referentes aos modelos de precificação de opções. O assunto é abordado a partir de opções de ações por serem os papeis mais negociados dentre a família das opções. Em primeiro lugar, são revisados os fundamentos matemáticos que foram utilizados posteriormente, com destaque para os martingales e para o Lema de Ito. Logo depois, apresenta-se a dedução da equação diferencial de Black-Merton-Scholes e a solução desta equação, que gerará a fórmula básica para precificação de opções. Por fim, são resumidas as principais contribuições para aprimorar o modelo, através de relaxamento das premissas e de aplicações para opções de outros ativos subjacentes.

Palavras-chave: Precificação de opções. Opções. Black-Scholes. Merton.

Abstract

The purpose of this paper is to briefly exhibit the main contributions to option pricing theories. This work is limited to consider vanilla stock options, facing the fact of being the most traded kind of security within the options family. On first place there is a review on mathematical tools that would be used later, with emphasis on martingales and on Ito's Lemma. After that, the Black-Merton-Scholes partial differential equation is presented and demonstrated. The solution of that equation is proved to be the closed-form basic option pricing formula. Finally a brief approach on the formula's extensions is presented.

Keywords: Option pricing. Options. Black and Scholes. Merton.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama do <i>payoff</i> (esq.) e diagrama de lucros para o tomador (dir.)	12
1.2	Evolução das linhas teóricas para apreçamento de opções	13
2.1	Representação gráfica da árvore binomial recombinante do ativo subjacente em dois períodos	19
3.1	Decomposição da PDE de Black-Scholes em difusão, convecção e reação . . .	39
4.1	Comportamento do preço de uma opção antes e depois da data <i>ex-dividendo</i> . .	58
4.2	Comportamento de uma opção americana vs. a ação subjacente	62
4.3	<i>Notional</i> negociado em mercados de opções contra PIB mundial (Valores em trilhões de dólares correntes)	74

Lista de Tabelas

1.1	Principais tipos de opções	11
3.1	As principais Gregas	46
4.1	Modelos para determinação de volatilidade estocástica	67
4.2	Principais modelos <i>single factor</i> para determinação da taxa de juros	69

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Objetivo deste Trabalho	14
1.2	Estrutura da Monografia	14
2	Desenvolvimento teórico antes do modelo Black-Scholes	16
2.1	Premissas	16
2.2	Os primórdios da modelagem de opções	18
2.2.1	O modelo binomial	18
2.2.2	Cálculo estocástico	21
2.2.3	Martingales e Submartingales	28
2.2.4	Processos de Poisson	30
2.2.5	Lema e Integral de Itô	31
2.3	Breve revisão da teoria financeira	33
3	O modelo de Black-Scholes e suas abordagens	35
3.1	Equações diferenciais parciais e a PDE de Black-Merton-Scholes	36
3.1.1	PDEs	36
3.1.2	A PDE em Black-Scholes	37
3.1.3	Uma abordagem para a PDE de Black-Scholes a partir do modelo CAPM	39
3.1.4	Black-Scholes e o modelo Binomial	40
3.2	A solução da PDE - a fórmula de Black-Scholes - e as Gregas	42
3.3	Abordagem de Black-Scholes a partir de Martingales	47

3.3.1	Derivação da PDE	47
3.3.2	Derivação da fórmula	49
3.4	Relevância do Modelo em Finanças Corporativas e em outras áreas correlatas .	52
3.4.1	Finanças Corporativas	52
3.4.2	Outras áreas de conhecimento	55
4	Depois do modelo: extensões, críticas e impactos	56
4.1	Extensões	57
4.1.1	Dividendos	57
4.1.2	A paridade entre Puts e Calls	58
4.1.3	Opções americanas e exercício antecipado	60
4.1.4	Extensões na volatilidade	65
4.1.5	Taxas de juros	68
4.2	Críticas à precificação por Black e Scholes	70
4.3	Impactos	73
5	Considerações Finais	76
	Referências	78

1 Introdução

Os mercados de derivativos têm assumido crescente importância nos sistemas financeiros internacional e nacional. A denominação "derivativo" decorre do fato de serem papéis negociados com base em características de outro ativo, ao contrário dos ativos reais, como as ações, que têm um lastro diretamente ligado a variáveis reais. As principais classes de derivativos existentes são os contratos futuros, os *swaps* e as opções. Esta última classe de derivativo vem ganhando importância por ter uma característica especial. Uma opção é um papel que representa literalmente o direito da compra ou da venda de um ativo-objeto, ou ativo subjacente. De forma geral, estes derivativos têm um prazo de vencimento. Porém o que diferencia as opções de seus "parentes" é o fato de atribuir poderes assimétricos aos dois agentes envolvidos numa transação. O vendedor - ou lançador - de uma opção se compromete à possibilidade de comprar ou vender o ativo subjacente no futuro. Pelo outro lado, o comprador - ou tomador - da mesma opção detém um *direito* de comprar ou vender tal ativo-objeto na data futura e dependerá apenas dele se o direito negociado será exercido. Esta característica assimétrica faz com que o vendedor da opção deva receber um *prêmio* por estar lançando o derivativo. Para determinar o prêmio, contudo, é necessário saber que tipo de opção será negociada e qual será seu ativo subjacente.

Em princípio, uma opção pode ser lançada com base em qualquer ativo-objeto. Inclusive há linhas teóricas que utilizam o apreçamento de opções sobre ativos não financeiros para avaliar custos de oportunidade¹. Entretanto, a maior parte das opções negociadas são lançadas a partir de:

- ações;
- títulos de renda fixa;
- índices, principalmente índices de ações ou ETFs²;
- *commodities*;

¹Esta abordagem será detalhada na página 54

²*Exchange Traded Funds*

- contratos futuros;
- *swaps*³.

Já o tipo da opção determina se o ativo subjacente será comprado ou vendido pelo tomador na data de exercício. Na opção de compra, o *tomador* tem o direito no futuro de comprar o ativo-objeto; e na de venda, de vendê-lo⁴. Outra classificação determina a *condição terminal* ou *condição de fronteira*⁵ no exercício da opção. Os principais tipos de opções estão relacionados na tabela a seguir:

Tabela 1.1: Principais tipos de opções

Denominação	Característica
Europeia	Esta opção só poderá ser exercida na data de vencimento com base na cotação à vista do seu ativo subjacente.
Americana	Opção dependente do preço à vista do seu ativo-objeto, mas pode ser exercida em qualquer ponto no tempo.
Bermudense	Idem à opção europeia, mas com várias possíveis datas de exercício.
Asiática	O critério de exercício não é o preço à vista, mas a média de preços em um certo intervalo.
<i>Barrier options</i>	A opção só será válida, ou deixará de ser, se ultrapassar uma certa barreira.
Binária	Se o subjacente ultrapassa um certo nível, pagará um valor fixo.
Arco-iris	Opções cujo subjacente é uma cesta de ativos e cujo <i>payoff</i> será determinado com base na rentabilidade dos componentes da cesta.
<i>Lookback options</i>	O <i>payoff</i> é determinado pelo máximo ou mínimo que o subjacente teve numa janela de tempo.

Depois de ter as informações básicas que caracterizam a opção, pode-se prosseguir para encontrar um modelo que determine qual seria o prêmio justo a ser pago na negociação do papel. O presente trabalho irá se delimitar quase que exclusivamente nas opções de ações de compra e de venda do tipo europeias e americanas, comumente designadas como *vanilla options*. O *payoff* deste grupo de opções é simples de ser expresso matematicamente. Independente de uma opção ser americana ou europeia, no exercício do papel este sempre pagará ao tomador $\max(S - K; 0)$ para *calls* ou $\max(K - S; 0)$ para *puts*, sendo que aqui representa a letra *S* o preço

³Estas opções comumente são denominadas de *swaptions*.

⁴Opções de compra são chamadas de *calls*; as de venda, de *puts*.

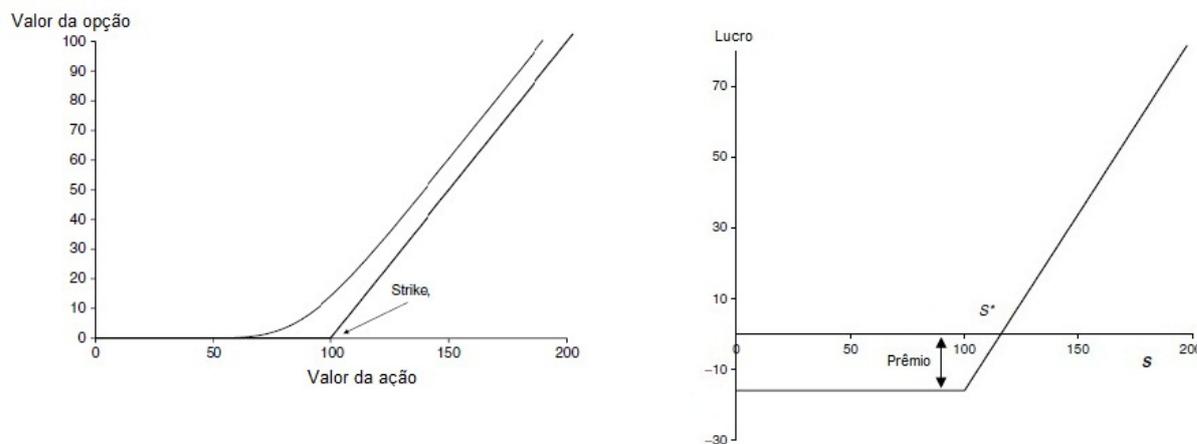
⁵Em inglês: *Boundary Condition*

à vista da ação subjacente e K , o preço de exercício. Não obstante, antes da data de maturidade, o preço do contrato é composto pelos seguintes valores:

1. seu valor intrínseco, sendo este o valor que o tomador da opção receberia caso exercesse naquele instante. Portanto o valor intrínseco é $\max(S - K; 0)$ para *calls* e $\max(K - S; 0)$ para *puts*, em qualquer ponto no tempo⁶;
2. seu valor no tempo, representando o prêmio que o tomador assume por não poder ou não estar exercendo o derivativo naquele momento;
3. no caso de opções americanas, um prêmio *vis-à-vis* as europeias pela possibilidade de o tomador exercer em qualquer instante.

Graficamente o comportamento do *payoff* das opções tratadas é simples de ser demonstrado. A figura abaixo ilustra o exemplo de uma opção de compra:

Figura 1.1: Diagrama do *payoff* (esq.) e diagrama de lucros para o tomador (dir.)



Fonte: Wilmott (2006), modificado pelo autor

Nos gráficos da figura 1.1, o da esquerda descreve o *payoff* da opção no vencimento caracterizado pela reta; a curva é o valor da opção em algum ponto no tempo antes do vencimento. Para um preço fixo da ação-objeto, a diferença entre o *payoff* no vencimento e a curva do preço antes do vencimento descreve o valor no tempo da opção. Posto isso, fica evidente que a curva se aproxima da reta com o passar do tempo. Já do lado direito, o diagrama de lucros incorpora o prêmio pago pelo tomador, resultando numa saída de caixa no instante do pagamento do prê-

⁶No jargão financeiro, costuma-se dizer que uma opção está dentro do dinheiro (*in the money*) quando o valor intrínseco é positivo, no dinheiro (*at the money*) quando $S = K$ e fora do dinheiro (*out of the money*) nos demais casos em que a opção não possui valor intrínseco.

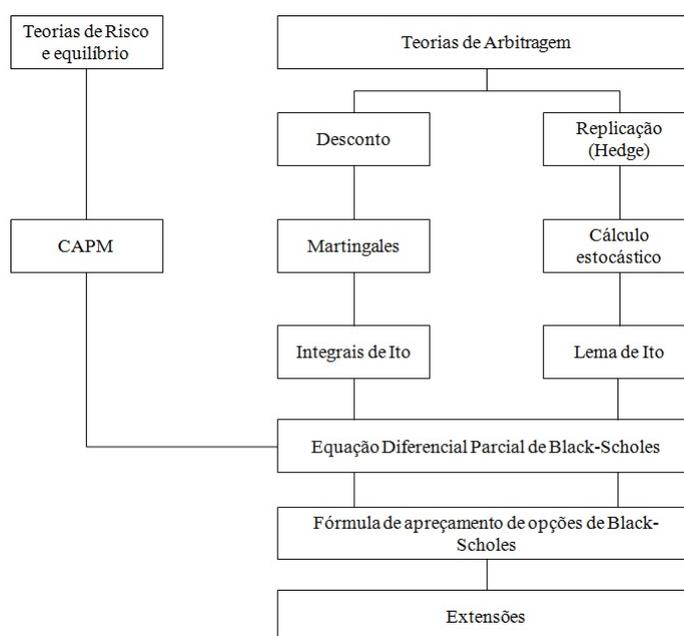
mio. Um problema desta ilustração é que ela não considera o valor do dinheiro no tempo, pois o prêmio é pago na data da compra ou venda da opção e não na sua maturidade⁷.

O problema a ser resolvido, dadas as características supracitadas das *vanilla options*, é de elaborar um modelo que inclua as variáveis necessárias para precificar estes papéis da forma mais acurada possível. Segundo Neftci (2000, p. 38), todo modelo de precificação de opções deve, mas não está limitado, a incorporar os requisitos a seguir:

1. Obter um modelo que identifique a dinâmica do movimento do preço do ativo subjacente;
2. Determinar como a opção se comporta em relação ao ativo subjacente no vencimento ou em outra condição terminal (*boundary condition*);
3. Obter probabilidades ajustadas pelo risco;
4. Calcular retornos esperados dos derivativos no vencimento, utilizando probabilidades ajustadas pelo risco;
5. Descontar o retorno esperado a uma taxa livre de risco.

Como será visto mais adiante, torna-se necessário recorrer à matemática moderna do século XX para modelar trajetórias de preços que se movem de forma aleatória. A evolução do instrumental para precificação de opções pode ser visualizada na figura a seguir.

Figura 1.2: Evolução das linhas teóricas para apreçamento de opções



⁷Existem contratos em que o prêmio é pago no vencimento da opção, porém são raros. Em tais casos, a representação gráfica dos lucros seria mais acurada.

1.1 Objetivo deste Trabalho

Este trabalho tem como objetivo levantar a evolução do apreçamento de opções, com foco nas opções de ações, avaliando como o modelo de Black e Scholes (1973), referência hoje na área aqui tratada, foi criado e como são as principais abordagens do modelo. Além disso, procura-se aqui evidenciar algumas das principais extensões ao modelo recém citado e como eles satisfazem melhor as necessidades dos agentes no mercado financeiro.

Objetivos específicos:

1. Fazer uma breve revisão da evolução do cálculo estocástico, necessário para modelar preços de ativos no mercado financeiro;
2. Explicar o contexto em que se encontra o modelo e porque surge nessa época;
3. Avaliar as deficiências existentes e desafios para as próximas gerações na modelagem dos preços de opções.

1.2 Estrutura da Monografia

No capítulo 2 são demonstrados modelos mais simples para determinar trajetórias de preços futuros de ativos financeiros e como podem ser incorporados posteriormente no modelo de Black-Scholes. Também se realiza uma revisão do cálculo estocástico, comparando este com o cálculo convencional, o cálculo determinístico.

No capítulo 3 é demonstrada a relevância das equações diferenciais parciais para chegar à condição *sine qua non*⁸ do *hedge* contínuo, para depois concluir a fórmula fechada encontrada no artigo de 1973 para opções de ações europeias de compra. Além disso, demonstra que é possível chegar à equação final sem a utilização da equação diferencial parcial, mas através da equivalência de martingales e até mesmo via o modelo CAPM. Finalmente, é demonstrada a visão utilizada por Black, Merton e Scholes de que opções podem ser utilizadas da mesma forma em outros assuntos, como na estrutura de capital das empresas, e também fora da área de estudo das Finanças.

O capítulo 4 busca evidenciar as contribuições mais importantes após Black-Scholes e Merton, contribuições estas que aconteceram principalmente em duas frentes: (i) relaxamento das premissas existentes anteriormente, como volatilidade constante; e (ii) aplicação do modelo

⁸Condição sem a qual não seria possível formular a teoria.

para outros tipos de opções, expondo aqui a aplicação no caso das opções do tipo americano. Outrossim, procura-se encontrar as principais críticas à linha de pensamento utilizada pelos autores supracitados, demonstrando a argumentação existente em outras linhas de pensamento. Por fim, é feita uma breve análise do mercado de opções depois do estabelecimento do modelo, demonstrando o crescimento exponencial que houve após implantação de uma metodologia relativamente simples de apreçamento.

O capítulo 5 contém as conclusões que podem ser extraídas do trabalho através de considerações finais e cita desafios no futuro para os atuantes na área a ser tratada.

2 Desenvolvimento teórico antes do modelo Black-Scholes

2.1 Premissas

Assim como na maioria das teorias em Finanças, os modelos de precificação de ativos, e mais especificamente de precificação de opções, partem de certas premissas. Uma das mais importantes que rege em qualquer teoria na área a ser tratada é a da ausência de oportunidades de arbitragem. Na literatura encontra-se esse termo denominado como *arbitrage-free environment*. Há diversos autores que buscam expressar uma definição formal de arbitragem. Todos estes definem arbitragem como a oportunidade de que algum agente no mercado seja capaz de obter retornos acima da taxa livre de risco, mas com risco nulo, agindo em dois ou mais mercados distintos. Teorias modernas em finanças já utilizam conceitos mais abrangentes, tais como a dos mercados eficientes definida em Fama (1970)¹. A premissa básica da ausência de tais oportunidades é necessária por um motivo muito simples: a existência de retornos esperados para um determinado nível fixo de risco implicaria que inúmeros agentes comprassem um determinado ativo por ser fracamente preferível a um ativo de retorno esperado inferior mas com mesmo risco. A lei da ausência arbitragem determina que preços de ativos no mercado financeiro se equilibram de forma que oportunidades de arbitragem sejam inexistentes. Portanto os preços dos ativos são tais que os agentes não são capazes de auferir ganhos com tais oportunidades². Segundo Sharpe e Brito (1975, p. 280), em “mercados eficientes, sejam de títulos ou de bens, as possibilidades de arbitragem são inexistentes; títulos com idênticas características devem ser cotados ao mesmo preço em equilíbrio”. Por isso, o *preço justo* de um ativo é aquele que não garante oportunidades de arbitragem. Segundo Neftci (2000, p. 13), a arbitragem pode acontecer principalmente de duas formas. A primeira seria uma na qual o agente detém uma posição líquida nula, como, por exemplo, comprando uma opção de compra e se colocando

¹Neste aspecto é pouco relevante analisar se mercados são eficientes da forma fraca, forte ou semi-forte. As premissas dos modelos não se modificam significativamente para cada tipo de mercado assumido.

²Na prática, é possível observar divergências entre os preços de ativos. Por exemplo uma ação no mercado local pode ter um preço diferente de seu ADR (American Depositary Receipt), convertido em dólares. Da mesma forma, é possível observar retornos aparentemente superiores à taxa livre de risco entre um ativo “spot” e seu derivado no mercado futuro. Isto se deve geralmente aos custos de transação para a operação de arbitragem, e, portanto, não pode ser considerado uma oportunidade para tal operação.

numa posição vendida na ação subjacente para financiar a compra da opção. Na segunda forma, o agente poderia se situar numa posição líquida vendida para auferir ganhos não negativos. Um exemplo seria quando um agente toma recursos emprestados à taxa livre de risco e compra um contrato futuro cuja rentabilidade é mais alta que a "taxa de custo" incorrida. Ainda, conforme este autor, já é possível elaborar um simples modelo de precificação de opções com a premissa de não arbitragem. O modelo sugerido aqui é da seguinte forma: Seja R_1 o retorno de um ativo qualquer no caso otimista e R_2 , o retorno do mesmo ativo no caso pessimista; e r , a taxa livre de risco³. Temos que:

$$((1+r) - R_1)\psi_1 + ((1+r) - R_2)\psi_2 = 0, \quad (2.1)$$

onde ψ_1 e ψ_2 podem ser interpretados como *state prices*. Em suma, estas duas variáveis compõem a probabilidade neutra de risco⁴, tal que $(1+r)(\psi_1 + \psi_2) = 1$, ou seja, a soma das probabilidades no futuro devem igualar a totalidade.

Sendo $\psi_1, \psi_2 \geq 0$, a equação (2.1) só pode ser satisfeita se, e somente se, $R_1 \geq 1+r \geq R_2$. A expressão em (2.1) satisfaz a teoria da não existência de arbitragem, pois, à medida que um ativo possui expectativas de retornos maiores no caso otimista, ele tem que estar intrinsecamente conectado à possibilidade de retornos inferiores à taxa livre de risco. Claramente, no caso de ambas as situações de retorno superiores à taxa livre de risco, constitui-se uma oportunidade de arbitragem, pois significaria em teoria a possibilidade de tomar recursos emprestados à taxa de juros r e auferindo na outra ponta retornos R_1 ou R_2 , sem possibilidade de perdas.

Estes pressupostos já alcançam para elaborar um simples modelo de precificação de opções. Admitindo tempo discreto e dois possíveis estados do mundo no futuro, um deles em que se espera um resultado otimista do ativo e o outro onde haverá um retorno pessimista, o seguinte sistema de equações simultâneas deve ser satisfeito:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r & 1+r \\ S_1(t+1) & S_2(t+1) \\ C_1(t+1) & C_2(t+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde $C(\cdot)$ representa o preço da opção cujo ativo subjacente é S . Neste sistema, as incógnitas são ψ_1, ψ_2 e $C(t)$. As variáveis $C_1(t+1)$ e $C_2(t+1)$ representam os preços nas duas possíveis situações futuras e podem ser obtidos a partir dos preços futuros assumidos para o ativo subjacente a esta opção, recordando que, para opções de compra europeias, a condição terminal válida é $C_T = \max(S_T - K; 0)$, mas pode ser utilizada qualquer outra condição terminal para

³Sendo que $R = \frac{S(t+1)}{S(t)}$

⁴Este conceito é explicado mais adiante.

outro tipo de opção.

Os três principais problemas deste modelo são

1. a existência de tempo discreto;
2. a existência de apenas uma etapa no tempo, isto é, as cotações dos ativos só se alteram uma vez; e
3. a incapacidade de expandir o modelo para mais de dois estados do mundo no futuro. Isto se dá pelo fato de que, no caso de haver três ou mais estados, o sistema de equações levará a uma indeterminação no conjunto de soluções.

No entanto, para o terceiro problema, a solução é adotar o modelo binomial, que será visto na próxima seção.

2.2 Os primórdios da modelagem de opções

2.2.1 O modelo binomial

Como descrito no capítulo anterior, um modelo com apenas uma fase não é satisfatório para modelar ativos de forma relativamente leal à realidade. Apesar de haver uma vasta literatura sobre tais modelos e haver diferentes abordagens, a ideia de todos eles é a mesma. O modelo binomial procura descrever um número finito de fases onde o ativo subjacente pode variar para cima ou para baixo. Sendo assim, o modelo de árvores binomiais apresenta um custo-benefício mais vantajoso dado o seu baixo esforço de implementação. Descrevendo o espaço de tempo ocupado por uma etapa discreta pela letra h , tem-se que:

$$S_{t+h} = \begin{cases} S_t + \sigma\sqrt{h} \\ S_t - \sigma\sqrt{h} \end{cases} \quad (2.3)$$

De acordo com Neftci (2000), este modelo é resolvido de forma retroativa. A cada etapa discreta de comprimento temporal h , temos que:

$$S_t = \frac{1}{1+r} (\tilde{P}_{up}(S_t + \sigma\sqrt{h}) + \tilde{P}_{down}(S_t - \sigma\sqrt{h})) \quad (2.4)$$

onde \tilde{P}_{up} representa a probabilidade ajustada pelo risco de a ação subir e $\tilde{P}_{down} = 1 - \tilde{P}_{up}$ é a probabilidade de a ação cair. Segundo Baxter e Rennie (1996, p. 120), probabilidades ajustadas

pelo risco ou também neutras de risco são medidas de probabilidade onde o risco do ativo não está precificado. Isto significa que a expectativa de crescimento da cotação de um ativo qualquer é idêntica à aquela de um título que rende à taxa livre de risco. Neste caso, \tilde{P}_{up} é dado por:

$$\tilde{P}_{up} = \frac{e^{rh}S_t - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}. \quad (2.5)$$

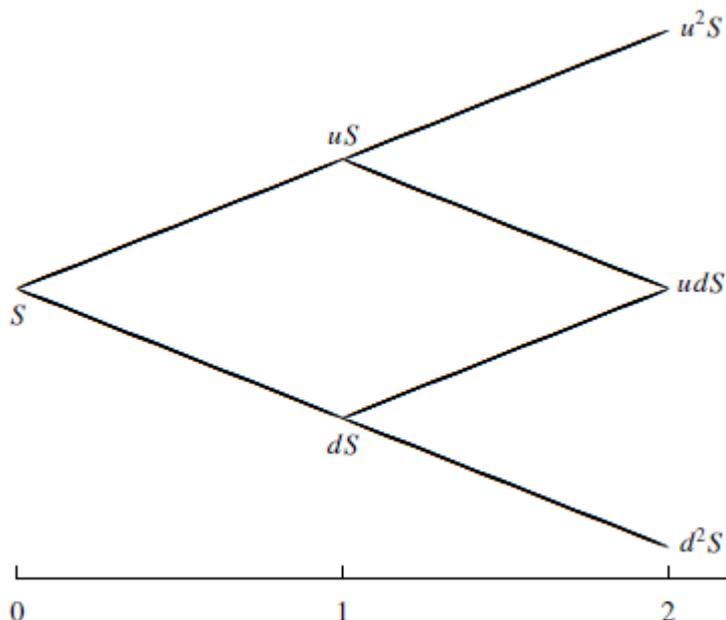
O conceito de probabilidades neutras de risco, no entanto, geralmente é meramente teórico e adquire pouca relevância na prática.

A fórmula (2.4) nada mais é que uma média do preço esperado de uma ação, ponderado pela sua probabilidade e descontado à taxa livre de risco. Se as probabilidades estão dadas, segundo o autor, não seria difícil determinar o preço das opções com aquela ação como ativo-objeto:

$$C_t = \frac{1}{1+r} (\tilde{P}_{up} C_{t+h}^{up} + \tilde{P}_{down} C_{t+h}^{down}), \quad (2.6)$$

onde C representa o preço da opção em caso que a ação suba ou caia. Desta forma é possível encontrar a solução retroativamente, partindo da maturidade da opção, onde vigoram as condições terminais do derivativo. Como pode ser observado na figura 2.1, é de se observar que um movimento para cima seguido de um movimento para baixo equivale a um movimento para baixo seguido de um movimento para cima. A equivalência é válida para qualquer etapa do processo e diminui o número de nós a cada etapa comparado a um processo onde não houvesse tal característica. Esta propriedade costuma ser designada de *árvore recombinante*.

Figura 2.1: Representação gráfica da árvore binomial recombinante do ativo subjacente em dois períodos



Na figura 2.1, u representa o multiplicador do valor inicial para o caso onde a ação sobe e d , para onde a ação cai. É correto assumir que u é maior que 1 e que d é menor que 1 e maior que zero, mas não é uma condição necessária. Levando isto em consideração, é interessante descobrir o comportamento da distribuição de probabilidades à medida que o número de etapas tende a infinito, e, opcionalmente, à medida que o espaço de tempo entre cada etapa limita a zero. A hipótese dominante nesse aspecto é aquela postulada por Cox, Ross e Rubinstein (1979), os quais afirmam que

$$u = e^{r\sqrt{h}} \quad (2.7)$$

$$d = e^{-r\sqrt{h}} \quad (2.8)$$

$$p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{\sigma} \sqrt{h} \right) \quad (2.9)$$

aproxima um movimento browniano geométrico à medida que tende a um processo contínuo. Podemos concluir que, no limite, a distribuição dos preços é normal em torno do preço inicial e possui variância $\sigma^2 nh$, onde n é o número de etapas. Assim, podemos descobrir a função de densidade de probabilidades após um grande número de etapas, onde a distribuição se aproxima da normal. Denominemos S o preço do ativo após um grande número de etapas e S_0 , o preço inicial do mesmo ativo. A função de densidade $g(\cdot)$ será:

$$g(S - S_0 = s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2nh}} \exp\left(-\frac{1}{2\pi\sigma^2nh} s^2\right). \quad (2.10)$$

A árvore binomial recombinante justamente possui as características acima citadas pois no processo discreto ela segue a distribuição binomial, onde o preço da opção pode ser determinado por

$$C = \frac{1}{1+r} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \tilde{P}_{up}^j \tilde{P}_{down}^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S_0 - K; 0). \quad (2.11)$$

Mas outras abordagens, como as de Jarrow e Rudd (1983) chegaram a conclusões levemente diferentes mas com o mesmo resultado de um movimento browniano geométrico. Além disso, modelos propostos são os de Trigeorgis (1991), um modelo mais complexo onde são levados em conta os logaritmos dos preços, e o de Hull e White (1988).

Existem diversas extensões para estes tipos de modelo, tais como a implementação de ações subjacentes que podem pagar dividendos em valores absolutos ou em valores proporcionais à cotização da ação. Além disso, há modelos que pagam dividendos continuamente.

O modelo binomial é fundamental para entender processos estocásticos contínuos. Dado o preço futuro de uma ação S_{t+1} e partindo das premissas em (2.3), podemos afirmar que:

$$E(S_{t+1} - S_t) = p(\sigma\sqrt{h}) + (1-p)(-\sigma\sqrt{h}) \quad (2.12)$$

$$\text{VAR}(S_{t+1} - S_t) = p \left(\sigma \sqrt{h} \right)^2 + (1 - p) \left(-\sigma \sqrt{h} \right)^2 - [E(S_{t+1} - S_t)]^2. \quad (2.13)$$

Além de podermos observar que a variância é proporcional a h , temos quando $p = 0,5$ que $E(\cdot) = 0$ e $\text{VAR}(\cdot) = \sigma^2 h$. A propriedade de a variância possuir o termo h como grau 1 em vez de 2 se torna de extrema importância quando este processo limita a um processo contínuo. Acontece que, se tivéssemos S_t variando em função de h em vez de sua raiz quadrada, a variância obteria o termo h^2 . Sendo esta a situação, a variância do processo tenderia muito mais rápido a zero à medida que as etapas vão ficando cada vez mais próximas ($h \rightarrow 0$) uma da outra, isto é, à medida que vai tendendo à continuidade.⁵ Isto faria com que sua variância se tornasse negligível e perdesse a propriedade de ser um processo estocástico, como desejamos.

2.2.2 Cálculo estocástico

Os primeiros autores sobre modelagem de ativos financeiros se situam no final do século XIX e começo do século XX. Nesta época, a preocupação girava em torno de como prever as cotações futuras dos ativos. Ficou claro que o cálculo convencional, ou determinístico, não seria aplicável para modelos financeiros; seria necessário desenvolver um novo ramo do cálculo. Por isso, o trabalho conjunto com diversos matemáticos e até físicos foi fundamental para alicerçar a base do que viria a ser a moderna teoria do portfólio. Bachelier (1900)⁶ introduz modelos em economia nos quais já estão presentes movimentos Brownianos. Segundo Poitras (2006, p. 226), o movimento Browniano é a versão contínua de um passeio aleatório discreto. É de se destacar que a aplicação dele acontece quase simultaneamente com a aplicação do movimento browniano por parte de Einstein na Física. Especificamente, Bachelier argumenta que flutuações no curto prazo na cotação de ativos não dependem de seu valor justo. Mesmo que o movimento browniano fosse aplicado geralmente às ciências naturais, como na reprodução de bactérias, Bachelier foi pioneiro na aplicação desta teoria a campos alternativos, como Finanças. Nas obras dele, assume também que estas flutuações possuem média e distribuição normal. Da mesma forma, foi pioneiro em aplicar, talvez de forma inconsciente, a equação de Chapman-Kolmogorov, em que as flutuações de curtíssimo prazo não dependeriam de valores passados. Bachelier também fez uso informal de processos markovianos, desenvolvidos a posteriori, em 1906. Cadeias de Markov não dependem de valores passados; são séries estocásticas cujo decorrer sempre depende de apenas um ponto ao longo do tempo. Formalmente, um processo é

⁵Como a variância é uma variável dependente do espaço de tempo e o espaço de tempo tende a zero, esta variável levada a uma potência ao quadrado automaticamente será menor que a variável em si assim que ela seja menor que 1.

⁶Esta obra foi traduzida em Cootner (1964, p. 17-78).

dito de Markov quando:

$$P(X_{t+s} \leq x_{t+s} \mid x_t, x_{t-1}, \dots, x_1) = P(X_{t+s} \leq x_{t+s} \mid x_t) \quad (2.14)$$

Na matemática financeira, a cadeia de Markov é de grande utilidade, pois a teoria dos mercados eficientes justamente define que o preço de um ativo reflete todas as informações sobre o mesmo, em qualquer ponto do tempo. Das cadeias de Markov, surgiram os movimentos brownianos como suas convergências contínuas. Segundo Baxter e Rennie (1996, p. 48), um processo W é movimento browniano se e somente se:

- W_t é contínuo e $W_0 = 0$;
- Sob o conjunto probabilístico P , os valores de W_t estão distribuídos de acordo com a distribuição normal $N(0, t)$;
- O incremento dW_t sob P é independente do conjunto de informações anteriores a W_t .

Além de usar o movimento browniano, Bachelier também faz referência à chamada equação do calor, uma teoria derivada da física que descreve a difusão do calor em metais, desenvolvida no início do século XX por Einstein (1906), e que foi fundamental para entender o comportamento futuro de derivativos dependendo do seu ativo subjacente. Courtault et al. (2000) argumentam que a teoria de Bachelier se insere no mercado financeiro da França na época, que lida com opções européias e que, a princípio, seriam fatores simplificadores pois não há necessidade de descontar o valor da opção do futuro. Segundo este autor, Bachelier usara um axioma fundamental: a premissa que especuladores intrinsecamente estariam utilizando martingales⁷.

Bachelier passou despercebido pela comunidade científica, talvez pela falta de formalidade. Osborne (1959) desenvolve um modelo igual ao dele, independentemente, 50 anos depois. A redescoberta da obra de Bachelier é creditada a Samuelson (1965a). O pioneirismo de Bachelier se destaca pela falta de formalização utilizada na teoria dele, a qual ele acaba aprimorando em obras posteriores.

Wiener pode ser considerado o primeiro autor relevante a tratar formalmente o cálculo estocástico em tempo contínuo. Em Wiener (1923), verifica que, em todo movimento browniano,

⁷Segundo Courtault et al. (2000, p. 343): "Bachelier begins the mathematical modeling of stock price movements and formulates the principle that 'the expectation of the speculator is zero.' Obviously, he understands here by expectation the conditional expectation given the past information. In other words, he implicitly accepts as an axiom that the market evaluates assets using a martingale measure." A noção de "esperança zero" implicou na estratégia especulativa hoje em dia chamada de *método do martingale*, utilizada na prática em jogos de azar e no mercado financeiro. A estratégia consiste na ideia de que o jogador não perderá sempre. Por isso, quando ele incorrer em perdas no mercado ou numa aposta, ele deverá aumentar a exposição nesse ativo ou aposta, fazendo com que a esperança de retornos desde o começo permaneça nula. Mais informações em Ethier (2010).

para um ponto fixo t , a probabilidade de diferenciabilidade em t é zero. Além disso, formaliza o movimento browniano com distribuição normal e variância constante. Graças às constatações dele, o processo às vezes é denominado também “série de Wiener”. É comum o uso dos termos “série de Wiener” e “processo browniano” como sinônimos. No entanto, há uma diferença sutil entre os dois. Define-se um processo de Wiener W_t como sendo um martingale⁸, logo tendo incrementos futuros imprevisíveis. Já uma série browniana B_t é dita como tendo uma função de probabilidades com distribuição normal nos incrementos futuros, sendo sua média zero. Resulta que os dois processos são equivalentes sempre e quando o conjunto de informações disponível seja completo até o tempo t , que é geralmente o caso. Isto significa que um processo W_t adaptado a I_t terá incrementos com densidade probabilística normal.

Na publicação de Wiener, ele formaliza a equação diferencial estocástica (SDE), da forma⁹:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t \quad (2.15)$$

Este tipo de equação é o mais utilizado para expressar um processo estocástico, cuja formulação genérica pode ser expressa da forma:

$$dS_t = a_t dt + b_t dW_t \quad (2.16)$$

ou seja, uma equação diferencial estocástica como em (2.15) é um processo onde a média e a volatilidade dependem apenas do preço do ativo e do tempo, ou seja, $a_t = a(S_t, t)$ e $b_t = b(S_t, t)$. Estas duas representações da média e da variância são determinísticas. Isto significa que a única fonte estocástica na representação por SDE é W_t . Portanto esta equação basicamente significa que uma variável aleatória ao longo do tempo depende de um coeficiente determinístico, a , comumente chamado de *drift* na literatura, sendo ela a média da distribuição que a variável possui, em cada ponto do tempo. Na equação de Wiener, a variável a representa a média, e W representa uma série de Wiener de média zero e variância unitária. Sendo assim, a variável S_t tem média $a(S_t, t)dt$ e variância $b(S_t, t)$. Ambos os termos estão adaptados ao conjunto de informação disponível até o ponto t , isto é, as duas variáveis estão adaptadas a I_t , representando esta variável o conjunto de informações disponíveis até t . Outrossim, é importante destacar que soluções de SDE e de integrais em ambientes estocásticos são, de forma geral, alcançadas por métodos numéricos. Soluções explícitas são a exceção. Há diversos pontos para comentar sobre esta equação que representa genericamente um processo estocástico.

Em primeiro lugar, as equações diferenciais estocásticas decorrem de uma integral originariamente. De acordo com a demonstração de Neftci (2000, p. 205), equações diferenciais

⁸Definição de martingale na seção 2.2.3

⁹A notação está diferente que na obra de Wiener, com finalidade de manter uma notação padronizada

estocásticas derivam de integrais de Itô, que serão vistas mais adiante.

Em segundo lugar, cálculo em ambiente estocástico tem diferenças relevantes *vis-à-vis* o cálculo determinístico. Por exemplo Neftci (2000, p.58) afirma que a regra da cadeia em geral não é mais válida no cálculo estocástico. Além disso, a aproximação de Riemann para Integrais não funciona nestes processos. A aproximação utilizada no cálculo determinístico usa retângulos, onde o resultado final não se altera se utilizamos como altura do retângulo o ponto inicial, o ponto médio ou o ponto final em cada intervalo. Aplicando a aproximação de Riemann para cálculo estocástico, evidencia-se que, na maioria dos casos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(W_t)(W_t - W_{t-h}) \neq \lim_{h \rightarrow 0} f(W_{t-1})(W_t - W_{t-h}). \quad (2.17)$$

Isto é simples de ser constatado se é tirada a Esperança dos termos nos dois lados da desigualdade. Pelo fato de W representar um processo estocástico, obteremos do lado esquerdo um valor em função de W_t e do lado direito em função de W_{t-1} . Essa é a prova da ineficácia do método do Riemann.¹⁰

Em terceiro lugar, é de se destacar a unicidade de um processo estocástico. De acordo com a decomposição de Doob-Meyer e segundo Baxter e Rennie (1996, p. 56): "... given the process X , there is only one pair of volatility σ_t and drift μ_t which satisfies $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$ (for all t). This uniqueness (...) given X comes from the Doob-Meyer decomposition of semimartingales".

Retomando ao cálculo determinístico devemos levantar um ponto importante para a discussão de processos estocásticos. Costuma-se usar a seguinte equação para aproximar diferenciais:

$$dF_t = \frac{dF}{dS} dS_t \quad (2.18)$$

Esta equação é claramente uma simplificação da série de Taylor para uma variável, onde os termos de grau maiores que 1 são considerados negligíveis. Mas é possível utilizar esta importante ferramenta desta forma no cálculo estocástico? Não. Para isto devemos resgatar a série:

$$f(x) = f(x_0) + f_x(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f_{xxx}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (2.19)$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i, \quad (2.20)$$

¹⁰A aproximação similar de Stieltjes, como apontado por Neftci, também será ineficiente.

ou

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) (x - x_0)^i. \quad (2.21)$$

Como nos interessam pequenos espaços de variação, devemos considerar que x está bastante próximo de x_0 e que, portanto, $x - x_0 = \Delta x \rightarrow 0$. Mesmo assim, é importante ressaltar que o segundo termo da série de Taylor é impossível de ser negligenciado já que ele é elemento essencial da variância. Relembrando que a variância para qualquer variável X de distribuição normal padrão é dada por $E(X^2) - E^2(X) = E(X^2)$.¹¹ A aproximação de Taylor deverá ser reescrita de outra forma, pois para obtermos um processo estocástico é evidente que $E((\Delta x)^2) > 0$. Para solucionar este problema, Neftci (2000, p. 160) sugere duas soluções bastante similares. A primeira é a de simplesmente inserir a esperança de $(\Delta x)^2$, de forma que a aproximação por séries de Taylor se torne:

$$f(x) - f(x_0) \cong f_x \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx} [E(\Delta x)^2]. \quad (2.22)$$

A segunda solução é a de utilizar um limite para Δx no sentido de quadrados médios, como definido pelo autor. Uma sequência de variáveis aleatórias X_0, X_1, \dots, X_n é dita convergir no sentido de quadrados médios¹², quando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0, \quad (2.23)$$

onde X representa uma distribuição já conhecida. Desta forma, a série de Taylor, quando observada num espaço de tempo $h \rightarrow 0$, faz com que a variável aleatória x convirja para a expressão:

$$f(x) - f(x_0) \cong f_x \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx} [x^*], \quad (2.24)$$

sendo x^* o limite no sentido de quadrados médios de $(\Delta x)^2$.

Importantes avanços na representação das equações diferenciais estocásticas aconteceram a partir da década de 50. Principalmente porque o modelo sugerido até então não observava dois fatores muito importantes:

- A função observada como SDE “padrão” considera mudanças no preço como um número absoluto. Participantes no mercado não estão interessados em variações absolutas, mas sim em ganhos ou perdas percentuais (relativas) que acontecem com ativos, o que representa o verdadeiro retorno financeiro.
- Este tipo de função pode acarretar num grave erro, qual seja a possibilidade de existên-

¹¹ Pois X é uma variável com média zero. Logo seu quadrado também é zero.

¹² Em inglês: *mean square convergence*

cia de preços negativos na cotação do ativo. Como a maioria das opções negociadas em mercado têm como ativo subjacente ações, é fora da realidade assumir que uma ação seja negociada a valores abaixo de zero. Isto é um problema importante, pois movimentos Brownianos assumem com probabilidade de 1 qualquer valor, positivo ou negativo, quando $t \rightarrow \infty$.

Os dois impasses já foram percebidos por Samuelson (1965a), de acordo com ele (p. 13):

The anomaly apparently came because Bachelier had forgotten that stocks possess limited liability and thus cannot become negative, as is implied by the arithmetic Brownian Process. To correct this, I introduced the “geometric” or “economic Brownian motion”, with the property that every dollar of market value is subject to the same multiplicative or percentage fluctuations per unit time regardless of the absolute price of the stock. This led to the log-normal process for which the value of a call or warrant has these two desired properties: for short times, the \sqrt{t} law holds with good approximation; and for $t \rightarrow \infty$ the value of the call approaches the value of the common stock.

O modelo de SDE proposto por Samuelson¹³ é o mais utilizado por agentes de mercado. Isto não é nada surpreendente quando se percebe que a equação diferencial pode ser derivada para a expressão

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \quad 0 \leq t \quad (2.25)$$

ou, equivalentemente,

$$S_T = S_t \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma W_t \right), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.26)$$

que assume distribuição log-normal dos rendimentos. Outra sugestão dele em dita obra foi a de incluir parâmetros α e β representando o retorno percentual esperado da ação e da opção, respectivamente¹⁴. Esta sugestão foi fracassada para o uso empírico de apreçamento de opções, de acordo com o que é afirmado em Samuelson e Merton (1969), onde eles colocam que não é possível descontar os possíveis valores na distribuição de resultados para o presente. Em vez disto, utilizaria-se uma função de utilidade para o investidor “representativo” com diferentes prêmios por risco para opções de ações subjacentes diferentes. Isto não leva em consideração que, ao incluir tais variáveis, o modelo também deverá incorporar o fato que o investidor carrega outros ativos, de forma que a taxa de desconto contenha implicitamente o risco não-diversificável, ocasionando resultados indesejáveis Black e Scholes (1973). De acordo com Jarrow (1999, p. 231), “the first difficulty is that risk premia shift according to changing tastes and changing economic fundamentals in an economy, which makes modeling the risk premia and its estimation

¹³vide “SDE Geométrica” no Anexo A.

¹⁴Pode ser interpretado como a taxa de desconto

problematic (...). The second difficulty (...) was that the valuation formulae offered no sense of how to hedge an option using a portfolio of the underlying stock and riskless borrowing or lending”.

De acordo com o grau de complexidade e de fidelidade à realidade desejado, existem diversos tipos de equações diferenciais estocásticas para descrever mudanças nos preços de ativos financeiros. As principais SDEs estão descritas no Apêndice A.

Indo um pouco além dos modelos com presença de parâmetros em função de variáveis determinísticas, encontra-se um modelo bastante utilizado no mercado financeiro, e de bastante utilidade para precificação de derivativos. Trata-se de modelos com volatilidade estocástica. Fará-se aqui uma breve abordagem deste modelo.

A volatilidade estocástica está presente nestes modelos quando temos duas diferentes fontes de incerteza. No mercado financeiro, a adição de uma variável estocástica para a volatilidade parece ser útil, já que ela, na maioria dos casos, não depende apenas do tempo ou de uma função determinística do ativo em questão.¹⁵ Segundo Neftci (2000, p. 272), um modelo de volatilidade estocástica segue uma distribuição bivariada, da seguinte forma:

$$dS_t = \mu dt + \sigma_t dW_{1t} \quad (2.27)$$

onde

$$d\sigma_t = \lambda(\sigma_0 - \sigma_t)dt + \alpha\sigma_t dW_{2t} \quad (2.28)$$

Os parâmetros σ_0 , α e λ estão para volatilidade de longo prazo, impacto da volatilidade atual sobre a volatilidade futura e velocidade de reajustamento da volatilidade, respectivamente. Note-se que o primeiro termo do lado direito da equação é muito similar aos *Mean Reverting* SDEs. Modelos com volatilidade estocástica trazem diversos problemas. Em primeiro lugar, é de se observar que a volatilidade das duas variáveis aleatórias podem estar fortemente correlacionadas. Portanto, seriam necessárias correções econométricas para viabilizar o modelo. Em segundo lugar, carteiras constituídas sob tais modelos teriam uma complexidade bastante maior, dada a necessidade de um hedge na volatilidade que acarretaria num aumento substancial de custos, como será brevemente explicado no Capítulo 4.

¹⁵Para estimação de volatilidade de preços, o método tradicional é o uso de modelos econométricos como o ARCH e o GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*).

2.2.3 Martingales e Submartingales

O fato de estar lidando com processos estocásticos que, por sua vez, lidam com probabilidades, traz novos conceitos à tona. Harrison e Pliska (1981) e Harrison e Kreps (1979) formulam seu modelo de precificação a partir de arbitragem usando martingales, e definem estes como sendo processos em que

$$E(S_T | I_t) = E_t(S_T) = S_t \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.29)$$

Em palavras, um martingale significa que a esperança do valor da variável, no caso o preço de uma ação, num tempo T maior que t , é o valor da variável no momento, dado o conjunto de informações sobre futuros estados do mundo em t . Premissas, portanto, são (i) que S_t é conhecido com probabilidade 1, dado I_t , ou seja $E_t(S_t) = S_t$ com certeza; (ii) que $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_t$, isto é, que todas as informações em t englobam informações contidas no passado, implicando que o mercado não esquece quaisquer eventos anteriores, não importando há quanto tempo aconteceram; e (iii) que essa esperança é com respeito a um conjunto probabilístico determinado.

É possível reparar que a caracterização de um martingale é a de um processo que, na média, não possui tendência; ou seja, cujas flutuações são imprevisíveis. A definição de um martingale é importante para caracterizar a premissa da ausência de arbitragem. Por exemplo, a cotação, descontada adequadamente, de um ativo deve seguir o padrão de um martingale para demonstrar que não há informações que um arbitrador possa utilizar, e que futuras variações no preço são aleatórias com o conjunto de informações disponíveis na data t . A premissa de mercados completos, em que um ativo pode ser sintetizado por uma combinação de outros, é formalizada por martingales também. Isso é demonstrado através da unicidade do preço de uma opção, dado o preço de um ativo subjacente e dada uma taxa livre de risco. Desta forma, a distribuição de probabilidade do martingale é única.

Na medida em que os preços de ativos não possuem a propriedade de um martingale, pois a esperança do ativo é render à taxa livre de risco mais um prêmio, decorre o conceito de submartingale. Define-se este como sendo um processo com tendência de alta, onde $E_t(S_T) > S_t$. A decomposição de Doob-Meyer parte de um modelo binomial onde a probabilidade de queda é menor que a probabilidade de alta. Limitando esta série a um processo contínuo,

observa-se que¹⁶

$$S_t = M_t + A_t, \quad (2.30)$$

onde os dois termos da direita representam um martingale e um processo crescente com respeito às informações disponíveis em t . Esta fórmula num primeiro olhar parece intuitiva. Contudo, traz uma conclusão muito importante: é possível converter submartingales em martingales, descontando deste processo a esperança de A_t . O problema de utilizar este método é que este elemento pode conter implicitamente prêmio pelo risco do ativo que não desejamos remover.

Existe uma segunda forma de transformar submartingales em martingales: modificando o conjunto e/ou a distribuição de probabilidades utilizada para a esperança da mudança nos preços. Girsanov (1960) introduziu o modelo mais utilizado para transformações das probabilidades. A grande vantagem deste modelo é a possibilidade de sempre poder retornar à distribuição anterior. Portanto, é possível utilizar probabilidades que gerem um martingale, e, depois, retornar a outra distribuição desejada.

A intuição introduzida pelo método de Girsanov é simples, no entanto pode se tornar complexa quando aplicada à prática. Acontece que uma função de densidade de probabilidade de um determinado processo S_t em um ponto fixo no tempo pode ser multiplicado por um termo $\xi(S_t)$, de forma que a distribuição passe a ter esperança de incrementos nulos no futuro, como ilustrado em Neftci (2000, p. 334). Desta forma obteríamos um novo processo $\bar{S}_t = f(\bar{W}_t)$, sendo que \bar{W}_t está em função de uma probabilidade \bar{P}_t :

$$d\bar{P}_t = \xi(S_t)dP. \quad (2.31)$$

Um exemplo ilustrativo mostrado é o do processo mais simples $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$, que não é um martingale, dado que $\mu \neq 0$ dá tendência ao processo. Para tornar este processo um martingale podemos observar que a função densidade de probabilidade f_s é

$$f_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t}(S_t - \mu t)^2\right). \quad (2.32)$$

Neste caso, o valor de $\xi(S_t)$ é

$$\xi(S_t) = \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\left(\mu S_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)\right). \quad (2.33)$$

Multiplicando ambas as densidades obteremos uma nova função de distribuição de probabilidade \bar{P}_t , onde o termo μ desaparecerá, tirando o viés do processo e se tornando um martingale.

¹⁶É curioso notar que, apesar do fato de ativos como ações serem submartingales, as opções constituem, de forma geral e *ceteris paribus*, supermartingales. Isto se dá devido à constante queda no tempo até maturidade e com isso a queda do risco implícito do papel.

2.2.4 Processos de Poisson

Na modelagem de preços de ativos financeiros nem sempre é suficiente assumir que as cotações possam subir ou cair em uma unidade padrão a cada espaço de tempo infinitamente pequeno, o espaço dt . A premissa de comportamentos regulares é válida, mas apenas para épocas “normais”, onde não acontece algum evento raro de mercado. Por isso há autores que acreditam ser importante incluir no modelo uma variável que consiga replicar processos anormais de mercado, onde as cotações dos ativos possam mudar abruptamente. Merton (1990) demonstra, utilizando processos discretos, que séries de Wiener não conseguem simular eventos raros. Segundo ele, isto aconteceria porque, à medida que o espaço de observação limita a zero, o tamanho do movimento nos preços se torna cada vez menor¹⁷, mas a probabilidade de que estes movimentos aconteçam permanece constante e não varia com o espaço de observação¹⁸.

No entanto, eventos raros não são caracterizados desta forma. Estes movimentos, na verdade, possuem movimentos independentes do espaço de tempo. É fácil de ser visualizado quando se pensa numa crise sistêmica, onde cotações pulam de um nível a outro. Porém, ao contrário de movimentos “normais”, a probabilidade de acontecimento raros diminui significativamente à medida que o intervalo de observação diminui.

Para tais eventos, o método mais utilizado é o modelo de Poisson. Seja N_t o número de choques extremos que aconteceram até t . Além disso,

$$dN_t = \begin{cases} 1 & P(dN_t = 1) = \lambda dt \\ 0 & P(dN_t = 0) = 1 - \lambda dt \end{cases}. \quad (2.34)$$

O símbolo λ pode ser interpretado como a taxa ou frequência em que eventos raros acontecem, num período fixo de tempo. Para incluir este processo numa SDE, é necessário considerar dois problemas:

1. O modelo considera que a frequência de acontecimentos raros é constante. Na prática, nos deparamos com períodos de tempo onde tais eventos são mais frequentes que em outros;
2. O processo tem esperança de incrementos diferente de zero¹⁹. Para poder incluir “saltos” numa SDE, é necessário que transformemos a equação em um martingale descontínuo²⁰.

¹⁷pois a variância é diretamente proporcional ao intervalo de observação

¹⁸Poderia pensar-se que choques extremos estariam precificados num série de Wiener, posto que este tipo de movimento está representado nas caudas da distribuição de incrementos. No entanto, à medida que o espaço de observação limita a zero, os incrementos nas caudas da distribuição são negligíveis.

¹⁹Porque $E(dN_t) = 1(\lambda dt) + 0(1 - \lambda dt) = \lambda dt \neq 0$

²⁰Significa que não é uma função suave.

Como demonstrado na seção anterior podemos subtrair a tendência do processo. Como a tendência possui o valor λt e o novo processo modificado é

$$M_t = N_t - \lambda t, \quad (2.35)$$

e costuma ser denominado processo de Poisson compensado. Agora temos que $E(M_t) = 0$ e que $VAR(M_t) = E(M_t^2) = \lambda t$.

Agora, juntando eventos comuns de mercado com “saltos” decorrentes de eventos isolados, podemos escrever uma SDE mais completa que aquela da equação (2.15):²¹

$$dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma_1(S_t, t)dW_t + \sigma_2(S_t, t)dM_t \quad (2.36)$$

2.2.5 Lema e Integral de Itô

Ito (1951) teve contribuições importantes na área de equações diferenciais estocásticas que foram de muita utilidade principalmente na área da matemática financeira. As duas principais contribuições dele podem ser considerados a Integral de Itô e o Lema de Itô. O primeiro é a versão estocástica das integrais que encontramos em cálculo determinístico, já que, a aproximação de integral por áreas de retângulos não nos ajuda neste ambiente. O Lema de Itô, pelo outro lado, pode ser considerada a regra da cadeia para equações estocásticas e é de grande valor para apreçamento de opções, pois o preço delas é função do preço de um ativo subjacente que, por sua vez, depende de outra variáveis.

As SDEs foram desenvolvidas através de integrais. Na verdade, elas podem ser escritas da forma

$$S_{t+h} - S_t = \int_t^{t+h} a(S_u, u)du + \int_t^{t+h} \sigma(S_u, u)dW_u. \quad (2.37)$$

Quando se observa a equação desta forma, podemos assumir que com $h \rightarrow 0$, os parâmetros a e σ podem ser considerados constantes e levados para fora da integral. Além disso, a primeira integral pode ser calculada pelo método convencional, sempre que esteja adaptada a I_t . Não podemos, contudo, afirmar o mesmo sobre a segunda integral, já que nos deparamos com uma variável aleatória e sem nenhuma previsibilidade.

Por isso, é necessário introduzir uma nova definição para integrais estocásticas. A noção da

²¹É importante que a correlação instantânea entre dW_t e dM_t seja insignificante. Caso contrário ajustes devem ser feitos.

Integral de Ito é a de um limite no sentido de convergência quadrática média²², de forma que

$$\sum_{k=1}^n \sigma(S_{k-1}, k)(W_k - W_{k-1}) \rightarrow \int_0^t \sigma(S_u, u) dW_u \quad (2.38)$$

à medida que $n \rightarrow \infty$. Ou seja, quando particionamos a função em intervalos infinitamente pequenos, a soma limitará a uma variável estocástica representada pelo integral de Ito. Esta definição a princípio não parece ser muito diferente da de Riemann, mas há quatro diferenças significantes (NEFTCI, 2000, p. 214):

1. Aqui se usa a noção de limite no sentido de quadrados médios. Isto significa que o limite deve ser pensando da seguinte forma: a soma discreta das partes infinitamente pequenas tende à integral de Ito, pois a variância da diferença entre a soma e a integral tende a ser zero conforme os intervalos se tornam menores;
2. A função $\sigma(\cdot)$ deve ser não-antecipativa, ou seja, não pode depender do futuro;
3. A integral resultará em outra variável estocástica e não será um resultado determinístico. Isto costuma ser chamado de equivalência estocástica;
4. Integrais de Ito sempre serão martingales.

No artigo de Ito, ele chegou a uma conclusão bastante impactante através da integral recém desenvolvida. Foi provada uma igualdade pouco intuitiva, que vale no sentido de quadrados médios:

$$(dW_t)^2 = dt. \quad (2.39)$$

Outra constatação muito importante foi o Lema de Ito. Esta teoria deriva de uma série de Taylor para duas variáveis em uma função que tenha diferenciabilidade em duas variáveis, no caso $F(S_t, t)$. Usando um termo h que tende a zero, podemos afirmar que

$$F(S_t, t) = F(S_{t-h}, t-h) + F_s(\cdot)[S_t - S_{t-h}] + F_t(\cdot)[h] + \frac{1}{2}F_{ss}(\cdot)[S_t - S_{t-h}]^2 + \frac{1}{2}F_{tt}(\cdot)[h]^2 + F_{st}(\cdot)[h(S_t - S_{t-h})] + R, \quad (2.40)$$

onde R representa o resto e pode ser considerado desprezível²³ por constituir termos de grau maiores que 2. Agora, descartam-se os demais termos negligíveis quando $h \rightarrow 0$, sendo eles $\frac{1}{2}F_{tt}(\cdot)[h]^2$, $F_{st}(\cdot)[h(S_t - S_{t-h})]$ e certos termos de²⁴ $\frac{1}{2}F_{ss}(\cdot)[S_t - S_{t-h}]^2$, conforme o critério

²²Ou convergência de quadrados médios. Em inglês: *mean square convergence*

²³Consideram-se negligíveis os termos que decrescem mais rapidamente que h quando $h \rightarrow 0$. Isto significa que uma função arbitrária G é negligível quando a razão $\frac{G}{h} \rightarrow 0$ à medida que h se torna menor.

²⁴São apenas certos termos pois deve-se abrir a expressão $(S_t - S_{t-h})^2 = (dS_t)^2 = (adt + \sigma dW_t)^2 = a^2(dt)^2 + \sigma^2(dW_t)^2 + 2a\sigma dt dW_t$. Após isto, podemos observar que apenas $\sigma^2(dW_t)^2 = \sigma^2 dt$ não é negligível.

adotado o qual consta na nota de rodapé 23. Levando o primeiro termo para o outro lado e utilizando a expressão de processos contínuos, chegamos ao Lema de Ito, no qual²⁵

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 dt, \quad (2.41)$$

ou abrindo $dS_t = a_t dt + \sigma_t dW_t$ e rearranjando os termos, uma expressão mais confortável:

$$dF_t = \left(\frac{\partial F}{\partial S_t} a_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma_t dW_t. \quad (2.42)$$

Nesta expressão é fácil observar como a fórmula de Ito constitui da mesma forma uma SDE com *drift* sendo igual ao valor em parênteses, e a difusão igual à fórmula que precede dW_t . Também fica claro que esta fórmula é de extrema utilidade para o mercado financeiro, já que F_t pode explicar o comportamento do preço de um derivativo em função do ativo subjacente (a ação) S_t . Esta fórmula possui diversas extensões, como o caso multivariado.²⁶

2.3 Breve revisão da teoria financeira

Antes do modelo Black-Scholes, o estoque de pesquisa na teoria financeira propriamente dita era bastante escasso. Como citado por Merton, Simons e Wilkie (1994, p. 452):

Finance theory was little more than a collection of anecdotes, rules of thumb, and shufflings of accounting data. Mathematical models of finance were focused on the time value of money and the most sophisticated tool of analysis was present value. Application of these models by practitioners in non-financial firms was largely confined to staff who set guidelines for capital-budgeting decisions.

Ainda, para os autores, a teoria financeira moderna começa no final da década de 50. A teoria de portfólio desenvolvida por Markowitz (1952) e importante para o desenvolvimento do modelo Black-Scholes posteriormente determina que os investidores podem determinar todas as carteiras “ótimas”, no sentido de risco e retorno, e formar a fronteira eficiente a partir da curva de indiferença entre estes dois fatores para determinado investidor. A fronteira eficiente pode ser descrita como o melhor conjunto possível de carteiras, isto é, todas as carteiras têm o mínimo nível de risco para dado nível de retorno. Os investidores se concentrariam na seleção de uma melhor carteira na fronteira eficiente e ignorariam as demais consideradas inferiores. Esta teoria levou ao desenvolvimento do famoso modelo CAPM, introduzido por diversos autores independentemente, mas com maior destaque permaneceu o artigo de Sharpe (1964), e que rendeu um Prêmio Nobel de Economia a ele, junto com Markowitz e Merton Miller. A

²⁵Esta equação apenas vale para equações em ambientes estocásticos, evidentemente.

²⁶Ver Øksendal (2000)

idéia essencial da teoria deles foi a de criar um modelo no qual o mercado em equilíbrio é tal que a fronteira eficiente descreva as combinações de ativos que fornecem a melhor expectativa de retorno, dado um determinado nível de risco (desvio-padrão do portfólio). A tangência da fronteira com a Linha do Mercado de Capitais, que reflete o retorno esperado para cada nível de risco, determinaria a carteira ótima. O modelo CAPM com fronteira eficiente constitui a linha de pensamento neoclássico em finanças mas também pode ser utilizado para derivação do modelo Black-Scholes, apesar de dito modelo seguir a linha alternativa à de ausência de arbitragem²⁷.

Paralelamente, foi desenvolvida a teoria de mercados eficientes como já mencionada anteriormente. Pesquisas empíricas realizadas por Samuelson (1965b) provam que as cotações são compostas de martingales e submartingales, como sustentado na teoria anteriormente e formalizado por Paul Lévy em 1934. Harrison e Pliska (1981, p. 5-6), em um breve resumo histórico pré Black-Scholes, comentaram: “But these theories, developed between 1950 and 1970, all contained ad-hoc elements, and they left even their creators feeling vaguely dissatisfied”. Com isso, o autor provavelmente estava se referindo à falta de aplicabilidade no mercado financeiro e, especificamente de derivativos.

Robert Merton foi o primeiro a conectar os cálculos de Itô a estratégias de investimento. Estes foram os primeiros passos ao modelo que mudaria a forma de pensar precificação de opções. Contudo, segundo Davis (2006, p. 11): “Option valuers were (...) looking at utility functions, economic equilibrium, the Capital Asset Pricing Model and so on. In the context of ‘complete markets’ - the Black-Scholes world – all of these are simply irrelevant”.

As contribuições pré-Black Scholes foram de extrema importância para o desenvolvimento de futuros modelos. De acordo com Jarrow (1999):

(...) These investigations, without the knowledge of their common lineage, separately influenced the development of the Nobel prize winning work. Ito’s investigations generated the fundamental theorem of stochastic calculus, known as Ito’s lemma, which provides an essential step in the derivation of the Black-Merton-Scholes formula. In addition (...) Samuelson’s work was the precipitating source for Merton’s studies on option valuation and for the initial derivation by Black and Scholes of the option pricing formula.

²⁷Vide pág. 39 para a prova.

3 O modelo de Black-Scholes e suas abordagens

O final da década de 60 e toda a década de 70 representaram uma época muito marcante para a teoria das finanças em geral, inculindo a teoria de precificação de opções. Não é coincidência que esta época seja caracterizada por tal fato. A conjuntura econômica dada na época contribuiu fortemente para o desenvolvimento de novos modelos e um aprimoramento da teoria financeira. Desde a desregulamentação do Sistema Monetário Internacional que aconteceu devido à crise do petróleo nesta época, decorrente do ressurgimento de correntes liberais e do chamado Novo Consenso Macroeconômico, a Economia experimentou um processo de financeirização, levando ao crescimento generalizado tanto do mercado monetário quanto do mercado de capitais. Isto trouxe consigo igualmente um aumento da volatilidade nos mercados financeiros, ocasionado principalmente pela desregulamentação na atuação dos mercados.

Os agentes se sentiam livres de se alavancar mais agressivamente e de securitizar ativos, gerando mercados “fictícios”. Isto pode ser observado ao analisar o volume de negociações anual nos mercados financeiros e comparar este número com o PIB mundial. A crescente volatilidade dos ativos financeiros gerou forte demanda dos agentes por mecanismos que pudessem mitigar o risco de futuras flutuações nas cotações dos ativos em questão. Como exemplos podem ser citados simples contratos agrícolas, onde o agricultor não sabe a quanto vai poder vender sua safra no futuro; ou operações de agentes que não querem perder dinheiro com a perspectiva de desvalorização de uma ação. De acordo com Scholes (1997, p. 127):

The trading of financial derivatives on organized exchanged has exploded since the early 1970. The trading of off-exchange financial derivatives on the so-called 'Over-the-Counter' or 'OTC' market has exploded since the mid-1980s. Academic and applied research on financial derivatives, which was initiated by the Black-Scholes and Merton option-pricing research in the late 1960s and early 1970s, also has exploded.(...) The Chicago Board of Trade and Chicago Mercantile Exchange initiated the exchange industry by developing financial options and futures contracts on securities; they have spawned the growth of many new derivative exchanges around the world.

Esta demanda por proteção junto com o processo de financeirização inevitavelmente levou ao surgimento de mercados de derivativos. Apesar de haver registros de derivativos muito tempo

atrás, é neste período que a negociação destes papéis cresceu exponencialmente.

3.1 Equações diferenciais parciais e a PDE de Black-Merton-Scholes

Pode-se considerar que o divisor de águas para os novos modelos de precificação de derivativos está no artigo de Black e Scholes (1973). Nele, o modelo ainda assumia diversas premissas explícitas e implícitas quais sejam o uso de:

- Opções de compra europeias;
- Opções de ações que não pagam proventos;
- Volatilidade constante do ativo subjacente;
- Taxa livre de risco constante;
- Ausência de oportunidades de arbitragem;
- Mercados completos;¹
- Possibilidade de ter quantidades negativas de um ativo, via venda a descoberto;
- Ausência de impostos e de custos de transação;
- Possibilidade de dividir quantidades infinitamente.

A ideia básica de Black e Scholes ao elaborar o modelo pela primeira vez é a de utilizar uma perspectiva na qual o endividamento corporativo pode ser encarado como uma combinação de opções (p. 637). Para isso foi desenvolvida uma equação diferencial parcial, cuja solução é a fórmula final de precificação de opções.

3.1.1 PDEs

As duas principais maneiras de precificar derivativos na atualidade são (i) através da resolução de Equações diferenciais parciais e (ii) através da transformação de processos em martingales².

¹Mercados completos são mercados onde é possível *replicar* o comportamento de um ativo através da construção de um portfólio com outros ativos.

²Em inglês: *Equivalent martingale measures*.

É necessário definir o que é e como se tratam matematicamente as Equações Diferenciais Parciais, ou PDEs.³ Neftci (2000, p. 283) define as PDEs como equações onde a incógnita, ao invés de ser um escalar ou um vetor, é uma função. Esta função incógnita é encontrada através de uma equação que utiliza combinações lineares de diferentes níveis de derivação da mesma. Isso significa que a solução de uma equação diferencial parcial é aquela que soluciona uma combinação de diferentes derivadas da incógnita. Wilmott (2006, p. 101) afirma que tanto em outras áreas de conhecimento quanto em finanças, as equações com uma derivada parcial de ordem 1 e outra de ordem 2 são muito comuns e receberam a denominação "equações de calor" ou "equações de difusão", por ter muita presença no estudo da termodinâmica.

É importante destacar que a maioria das PDEs pode apresentar uma infinidade de soluções. Por isso, é necessário incluir uma *boundary condition*, condição terminal, para garantir solução única. Além disso, é importante ressaltar que na maioria dos casos, tais equações não possuem solução *fechada* e, portanto, devem ser utilizados métodos numéricos. A PDE de Black-Scholes padrão tem a importante propriedade de possuir uma solução fechada e única. Sua relativa simplicidade de aplicação na prática levou a ser o método preferido de precificação para o apreçamento de opções.

3.1.2 A PDE em Black-Scholes

A PDE desenvolvida por Black e Scholes e demonstrada pela primeira vez em Black e Scholes (1973) é uma PDE que pode ser interpretada como de reação-convecção-difusão segundo Wilmott (2006, p. 102) e expressa a igualdade⁴

$$-rV + r \frac{\partial V}{\partial S} S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 = 0, \quad (3.1)$$

onde V é a função que soluciona a equação e portanto descreve o preço de equilíbrio da ação-objeto, exposto aqui pela letra S . Além disso, considera-se, para uma opção de compra, que a *boundary condition*

$$V(T) = \max(S_T - K; 0) \quad T \geq t, \forall t \quad (3.2)$$

deva ser satisfeita. Qual foi o racional que Black e Scholes utilizaram para chegar a esta PDE?⁵ O objetivo é elaborar um portfólio sem correlação com a trajetória de preços do ativo subjacente, ou seja, que não tenha como fonte de aleatoriedade o preço da ação-objeto. Isto pode ser obtido criando um *hedge* em que variações positivas de um ativo que constitui o portfólio se cancelem

³ *Partial Differential Equations*

⁴ A notação é diferente daquela utilizada no artigo de Black e Scholes.

⁵ Hoje costuma ser chamada de PDE de Black-Scholes.

com variações negativas de mesma magnitude em outro ativo deste portfólio.

Para isso podemos assumir um portfólio P composto de ações e de opções de compra lançadas nesta ação. O portfólio possui θ_1 opções e θ_2 ações subjacentes, e nada mais. A partir disto, é fácil constatar que

$$P_t = \theta_1 V_t + \theta_2 S_t \quad (3.3)$$

e, portanto, que

$$dP_t = \theta_1 dV_t + \theta_2 dS_t. \quad (3.4)$$

Utilizando a fórmula de Ito para dV_t ⁶, como versão estocástica da regra da cadeia, e substituindo na equação (3.4), podemos escrever da forma⁷

$$dP_t = \theta_1 \left[\frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt \right] + \theta_2 dS_t. \quad (3.5)$$

Para espaços de tempo pequenos, os ajustes serão feitos nas quantidades, ou pesos, dos componentes do portfólio. Uma combinação de resultados possível seria $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = -\frac{\partial V}{\partial S}$.⁸ Desta forma, futuras variações no preço da ação não afetarão o patrimônio do portfólio. Assim, variações em espaços pequenos de tempo serão previsíveis.⁹ Por ter retornos previsíveis, devemos lembrar a condição de equilíbrio na qual não há oportunidades de arbitragem. Logo, a variação do portfólio descrita acima deve igualar-se à variação que o portfólio teria caso tivesse rendimentos à taxa livre de risco. Nesse caso podemos substituir o lado esquerdo de (3.5) pela expressão no lado direito da igualdade na equação (3.4) multiplicado por esta taxa e teríamos, com os parâmetros mencionados, que

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt = \left[V_t - \frac{\partial V}{\partial S} S_t \right] r dt, \quad (3.6)$$

onde r é a taxa livre de risco. Por isso $r dt$ equivale ao retorno obtido num título rendendo a esta taxa durante o período dt .

Na equação (3.6) podemos simplificar retirando o termo dt . Rearranjando a fórmula, obtemos a expressão em (3.1).

Wilmott faz um comparativo da PDE de Black-Scholes com equações da física, decompondo os diferentes termos. Segundo ele podemos interpretar a expressão $\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt$

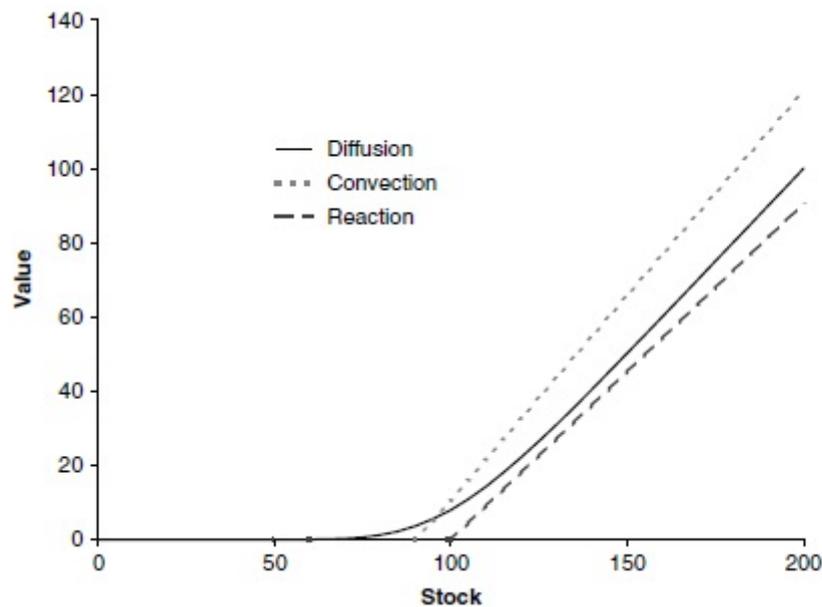
⁶ V_t é um derivativo em função de um movimento browniano geométrico do tipo $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Por isso, o termo $\sigma = \sigma(S_t, t)$ na expressão 2.41 assume aqui o valor de σS_t .

⁷Entende-se por σ o desvio-padrão do ativo (da ação) subjacente para uma unidade de tempo. Geralmente uma unidade de tempo compreende um dia na prática. A volatilidade anualizada é calculada multiplicando o desvio-padrão diário por $\sqrt{252}$, pois utiliza-se a convenção de um ano com 252 dias úteis.

⁸Ou, mais genericamente, $\theta_1 = n$ e $\theta_2 = -n \frac{\partial V}{\partial S}$. O coeficiente $\frac{\partial V}{\partial S}$ costuma ser chamado de *delta* da opção.

⁹Reiterando que estamos assumindo um processo que está adaptado ao conjunto de informação I_t .

Figura 3.1: Decomposição da PDE de Black-Scholes em difusão, convecção e reação



Fonte: Wilmott (2006, p. 103)

como o componente de difusão, por ser similar à expressão da difusão de calor em corpos metálicos.¹⁰ O termo $r \frac{\partial V}{\partial S} S_t$ pode ser interpretado como o termo de convecção, parecido ao movimento da fumaça de um cigarro. Por último, $-rV$ é a reação, onde pode ser comparado à decomposição de um material radioativo, e r representaria a meia-vida da radioatividade.

3.1.3 Uma abordagem para a PDE de Black-Scholes a partir do modelo CAPM

Black e Scholes, já no primeiro artigo, fizeram uma abordagem alternativa para o modelo desenvolvido. Utilizando o modelo CAPM, que foi formulado por Sharpe (1964) pela primeira vez, seria possível descontar o valor da opção na maturidade para obter o valor real da opção no presente. Deste modelo pode se estabelecer uma relação direta entre o *beta* da ação subjacente com o *beta* da opção¹¹ da seguinte maneira:¹²

$$\beta_V = \frac{\partial V}{\partial S} \times \frac{S}{V} \times \beta_S = \lambda \beta_S. \quad (3.7)$$

Definindo o prêmio pelo risco sistemático como $a = E(R_m) - r$, pode utilizar-se o modelo

¹⁰Este fato já foi observado desde 1900 por Bachelier.

¹¹Beta (β) é a covariância do retorno de um ativo com o retorno de mercado, dividido pela variância do retorno de mercado. No modelo CAPM, a relação de equilíbrio entre retorno de um ativo e o retorno de mercado se dá por $E(R) = r + \beta(E(R_m) - r)$, sendo R e R_m o retorno do ativo em questão e o retorno de mercado, respectivamente. Na situação demonstrada aqui será usado o modelo CAPM multiperíodo.

¹²Para o símbolo λ ver a próxima seção.

em situação de equilíbrio para expressar o retorno esperado dos dois ativos como:

$$E\left(\frac{dS}{S}\right) = rdt + a\beta_S dt \quad (3.8)$$

e

$$E\left(\frac{dV}{V}\right) = rdt + a\beta_V dt. \quad (3.9)$$

Multiplicando por V em ambos os lados da equação (3.9) e substituindo β_V pela expressão em (3.7), obtemos

$$E(dV) = rVdt + a\beta_S S \frac{\partial V}{\partial S} dt. \quad (3.10)$$

Além disso, podemos usar cálculo estocástico para expandir dV , negligenciando termos de segunda ordem de t e quaisquer termos de ordem maior que 2, obtemos, igual ao termo entre colchetes na equação (3.5),

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt. \quad (3.11)$$

Tirando a esperança dos dois lados e utilizando a equação (3.8) chega-se ao resultado

$$E(dV) = \frac{\partial V}{\partial S} rS dt + \frac{\partial V}{\partial S} aS\beta_S dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt. \quad (3.12)$$

Juntando as equações (3.10) e (3.12) e rearranjando resulta que o termo contendo o termo do prêmio pelo risco e β_S se anula, chegando à resultante (anulando os termos dt)

$$-rV + \frac{\partial V}{\partial S} rS + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = 0, \quad (3.13)$$

igual à equação (3.1).

3.1.4 Black-Scholes e o modelo Binomial

Não é muito contraintuitivo que o modelo binomial tem um forte nexos com o modelo de Black-Scholes. Esta evidência será demonstrada nesta seção. Em primeiro lugar, para fins de notação, no Capítulo 2 foi utilizado u como o multiplicador para movimentos para cima e d como multiplicador movimentos para baixo no ativo. Também denominamos p como a probabilidade de um movimento para cima. Um portfólio em tempo discreto P pode ser construído de forma a resultar em um hedge, onde teríamos que o valor do portfólio independe de um movimento para cima ou para baixo na ação. Desta forma, pode ser expresso da forma

$$P = V - \Delta S. \quad (3.14)$$

Para evitar confusão será alterada a notação do Capítulo 2, de forma que $C^{up} = V_+$ e $C^{down} = V_-$. Além disso, o multiplicador d será descrito pela letra v . O portfólio P citado acima deve satisfazer a condição do *hedge* na medida em que

$$V_+ - \Delta uS = V_- - \Delta vS. \quad (3.15)$$

Em palavras, significa que o valor do portfólio deve ser o mesmo tanto num movimento para cima quanto para baixo. Resolvendo a igualdade para Δ , resulta que

$$\Delta = \frac{V_+ - V_-}{(u - v)S}, \quad (3.16)$$

um resultado pouco surpreendente, pois pode ser interpretado como a versão discreta do *delta* mencionado anteriormente num processo contínuo. Porém, ao conectarmos esta expressão na equação (3.14), obtemos um resultado útil qual seja

$$P = V - \frac{V_+ - V_-}{(u - v)S}S = V - \frac{V_+ - V_-}{u - v}. \quad (3.17)$$

Agora, a condição de ausência de arbitragem nos ajuda para obter um resultado importante, pois $P + \delta P = (1 + rh)P$. A expressão encontrada em (3.17) rendendo à taxa livre de risco deve ser igual à fórmula encontrada em (3.15), tanto faz se for a fórmula do lado esquerdo ou direito, que, no final das contas, é a mesma. Utilizamos aqui o lado direito de (3.15), e substituímos Δ pela expressão em (3.16). Assim, obtém-se que

$$(1 + rh) \left(V - \frac{V_+ - V_-}{u - v} \right) = V_- - \frac{(V_+ - V_-)v}{u - v}, \quad (3.18)$$

simplicifando e resolvendo para V

$$(1 + rh)V = (1 + rh) \frac{V_+ - V_-}{u - v} + \frac{uV_- - vV_+}{u - v}. \quad (3.19)$$

A probabilidade neutra de risco mostrada na expressão (2.9) é tal que a condição de não-arbitragem seja satisfeita na equação acima, que pode ser escrita como uma ponderação entre V_- e V_+ da seguinte forma

$$(1 + rh)V = \tilde{p}V_+ + (1 - \tilde{p})V_-. \quad (3.20)$$

As duas últimas expressões são essencialmente iguais quando a expressão em (2.9) para \tilde{p} é utilizada como probabilidade neutra de risco e se partimos dos pressupostos do modelo binomial descritos anteriormente.

O modelo Binomial utiliza muito mais uma noção de média ponderada utilizando proba-

bilidades neutras de risco, enquanto o modelo Black-Scholes não recorre a probabilidades de forma direta¹³. No entanto, o desenvolvimento dos dois modelos surge basicamente da mesma expressão. Na equação (3.20), para fins de Black-Scholes, podem ser modificadas as expressões $V = V(S, t)$, $V_+ = V(uS, t + h)$ e $V_- = V(vS, t + h)$ junto com a expressão da probabilidade neutra de risco e $h \rightarrow 0$. Desta forma pode-se chegar a uma PDE muito similar à de Black-Scholes. Além disso, pode ser visualizada uma solução discreta da fórmula de Black-Scholes na equação (2.11).

3.2 A solução da PDE - a fórmula de Black-Scholes¹⁴ - e as Gregas

A PDE deduzida na seção anterior agora precisa ser resolvida. Para isso existem diversos métodos que são bastante complexos, e podem ser vistos por extenso em Wilmott (2006, p. 104). As formas de solução são as que seguem:

- Transformação a uma equação de difusão com coeficiente constante: Este método consiste na transformação da PDE, de forma que ela se torne mais simples de ser solucionada. A intuição é chegar a uma equação de difusão, onde a derivada de uma função U em relação ao tempo se iguala à segunda derivada desta função em relação ao preço da ação, como acontece nas equações de calor. Esta função U , por sua vez, seria multiplicada por um coeficiente para resultar na função V que precifica a opção.
- *Função de Green*: Esta é uma função do tipo Dirac delta. A denominação decorre do fato de que, à medida que $t \rightarrow T$, a função é zero menos no ponto S' onde o valor tende a infinito e a integral a 1. Trata-se de analisar a distribuição de possíveis valores para um intervalo de tempo remanescente. Quando se chega mais perto da maturidade, a distribuição se concentra cada vez mais num ponto, e no limite este ponto terá densidade infinita, e os pontos restantes densidade nula.
- Solução por séries: É comumente utilizada quando há dois valores da ação como *boundary condition*. É o caso de opções com *knockout*¹⁵ duplo, por exemplo.
- Métodos numéricos: É uma forma não-implícita de encontrar as soluções, através de aproximações em diversos pontos da função. Por isso exige desenvolvimento de programas

¹³O desvio-padrão incorpora probabilidades de forma implícita.

¹⁴para opções de compra e de venda

¹⁵*Knockout* é o valor limite que o ativo subjacente pode assumir para que não "vire pó". Ou seja, após este valor, a opção não vale nada.

para utilização deste método.

A primeira vez que se solucionou com sucesso a PDE foi através de uma série de transformações para chegar a uma equação do calor da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad (3.21)$$

com uma *condição de Dirichlet* de forma que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta(x), \quad (3.22)$$

sendo $\delta(x)$ uma função Dirac delta. Originalmente, esta equação representa a propriedade da dispersão do calor em metais, onde u é a função de velocidade de difusão do calor, t , o tempo, e x , o metro de material. Graças à pesquisa anterior na área da física, tal tipo de equação tem uma característica importante que será útil:

$$\int \delta(x' - x)g(x')dx' = g(x), \quad (3.23)$$

onde x' é uma constante arbitrária.

Transformação de variáveis

Para transformar a PDE numa equação, são feitos diversos passos. Em primeiro lugar, adota-se a variável $\tau = T - t$, que representa o tempo restante até maturidade da opção. Tal mudança implica que¹⁶

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \tau}. \quad (3.24)$$

Em segundo lugar, será necessário transformar o preço da ação na esperança de seu preço futuro

$$x = \ln S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau. \quad (3.25)$$

Também é necessário levar o processo modificado $V(x, \tau)$ para o valor no vencimento,

$$V(x, \tau) = e^{-r\tau}H(x, \tau). \quad (3.26)$$

Inserindo todas as transformações na PDE de Black-Scholes, deve ser ressaltado que¹⁷

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{1}{S^2} e$$

¹⁶Como T é constante, $\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial \tau}$.

¹⁷Para chegar nestes resultados foi usada a regra da cadeia univariada do cálculo determinístico.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}(S, \tau) = \frac{\partial V}{\partial \tau}(x, \tau) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, \tau) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)$$

para chegar na equação de calor, após várias modificações:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (3.27)$$

A solução fundamental

Após ter chegado na equação desejada, precisamos recordar a relação em (3.23). Precisamos encontrar uma solução especial que satisfaça dita característica. Esta solução tem a forma

$$H(x, \tau) = \tau^\alpha f\left(\frac{x-x'}{\tau^\beta}\right) = H_f(x, x', \tau). \quad (3.28)$$

A função desconhecida f depende apenas de $(x-x')/\tau^\beta$, termo este que passará a ser designado por η . Por depender de apenas esta variável, f deve ser uma equação diferencial ordinária. Aplicando a expressão (3.28) nos dois lados de (3.27), resulta

$$\tau^{\alpha-1} \left(\alpha f - \beta \eta \frac{df}{d\eta} \right) = \frac{1}{2} \sigma^2 \tau^{\alpha-2\beta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \quad (3.29)$$

A partir de diversas modificações da última equação exibida, Wilmott (2006, p. 112) demonstra que a solução fundamental é

$$H_f(x, x', \tau) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}}. \quad (3.30)$$

Retomando a função Dirac delta, ela pode ser utilizada para a solução (3.30) quando τ limita a zero. Nesta situação, a dita função delta, por ter um valor não nulo apenas num ponto singular, fará com que a relação

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}} g(x') dx' = g(x) \quad (3.31)$$

seja satisfeita, dado o *payoff* quando

$$H(x, 0) = \text{Payoff}(e^x). \quad (3.32)$$

Como estamos procurando a situação em que $\tau \rightarrow 0$, a função $g(x')$ pode ser substituída por $\text{Payoff}(e^{x'})$. Passos adicionais envolvem manipular o expoente para poder transformar o termo contendo e na distribuição normal. A solução final das manipulações é combinada com o *payoff* característico para cada tipo de opção.

Sendo assim obtemos os seguintes resultados, para *calls*:

$$V_{Call} = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (3.33)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (3.34)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.35)$$

$$= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (3.36)$$

para todo $T \geq t \geq 0$. Nesta nomenclatura, V_{Call} é o valor da opção de compra, S equivale a S_t e $N(\cdot)$, à expressão da função de densidade *cumulativa* da distribuição normal, significando a probabilidade de um evento ser menor que o valor. Para um x arbitrário, $N(x)$ é tal que

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi. \quad (3.37)$$

Para *puts*, temos a condição limite $V(T) = \max(K - S_T; 0)$, e a fórmula se altera levemente:

$$V_{put} = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2), \quad (3.38)$$

com d_1 e d_2 assumindo as mesmas expressões. Portanto, a equação é praticamente uma versão espelhada da fórmula para opções de compra.

Estas fórmulas tiveram grande impacto tanto academicamente quanto na prática. Todavia, não foram as equações propriamente ditas as que deram tanto destaque aos trabalhos de Black e Scholes. A fórmula já tinha sido revelada anteriormente por Sprenkle (1961). A revolução está na dedução de uma PDE independente de flutuações no ativo subjacente cuja resolução seria uma fórmula que seja capaz de precificar um derivativo.

A premissa utilizada por Black e Scholes de que o mercado utilizaria derivativos com a finalidade de realizar *hedge* trouxe extensões na terminologia para aperfeiçoar esta técnica. São denominadas as Gregas fórmulas que expressam o comportamento da opção com relação a variações em algum fator específico. Já foi mencionado anteriormente que o *delta* (Δ) é a variação no valor da opção (ou do portfólio) com relação à variação na cotação do ativo subjacente. Em espaços curtos de tempo, o hedge de uma unidade do ativo subjacente é alcançado vendendo Δ posições de ações subjacentes a cada unidade de opção comprada. Desta forma, o *delta* do portfólio se torna nulo. Por isso a estratégia costuma ser chamada de *delta hedging*. Para espaços de tempo não negligíveis, devemos considerar que o *delta* de uma opção se altera com

variações no preço do ativo subjacente e com variações no tempo até maturidade. Costuma ser denominado *hedge dinâmico* quando o portfólio é rebalanceado constantemente com o intuito de manter a carteira *delta-neutra*. As outras Gregas entram em questão quando se faz necessário o *hedge* dinâmico, onde são necessárias derivadas segundas e derivadas com relação a outros fatores para manter uma carteira livre de risco constantemente.

A seguir uma tabela com as principais Gregas: (WILMOTT, 2006, p. 121-129)

Tabela 3.1: As principais Gregas

Nome	Sím.	Fórmula	Descrição
<i>Delta</i>	Δ	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	Variação em relação ao ativo subjacente. Para calls e puts pode ser aproximado por: $\Delta_{Call} = e^{-r(T-t)}N(d_1)$ e $\Delta_{Put} = e^{-r(T-t)}(-N(-d_1)) = e^{-r(T-t)}(N(d_1) - 1)$
<i>Gama</i>	Γ	$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	Variação do <i>delta</i> em relação à variação no preço do subjacente. Com t fixo, sabe-se que o <i>delta</i> da opção não é linear quando varia o preço da ação subjacente. É uma medida de reajustamento do <i>hedge</i> . Na prática, o <i>gama hedging</i> é utilizado quando há altos custos de rebalanceamento. $\Gamma_{Call} = \Gamma_{Put} = \frac{e^{-r(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$, onde N' é a função de densidade não-cumulativa.
<i>Theta</i>	Θ	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	A variação, geralmente negativa, do preço da opção com relação ao tempo. O <i>theta</i> de um portfólio em <i>delta hedge</i> deve ser igual à taxa livre de risco, <i>ceteris paribus</i> .
<i>Vega</i>	v	$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	É uma Grega mais teórica que prática, pois mede a sensibilidade em relação à volatilidade do ativo subjacente. Na fórmula original não entra sequer em questão pois assume volatilidade constante. Opções de <i>puts</i> e <i>calls</i> são monotônicas, de forma que um aumento na volatilidade aumentará em todos os pontos o preço da opção. $v_{Call} = v_{Put} = e^{-r(T-t)}N'(d_1)S\sqrt{T-t}$
<i>Rho</i>	ρ	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$	Mede a sensibilidade da opção em relação a mudanças na taxa livre de risco. Há várias extensões para isto, já que na verdade $r = r(t)$ e a curva de juros pode se deslocar em sua totalidade ou alterar sua declividade.

Outras Gregas existentes mas menos utilizadas são:

- *Charm*: $\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}$, representando a variação instantânea do *delta* com a passagem do tempo;
- *Color*: $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial^3 V}{\partial S^2 \partial t}$, seria a taxa de decadência do *gamma*;
- *Speed*: $\frac{\partial \Gamma}{\partial S} = \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$, é utilizado às vezes para otimizar o rebalanceamento de carteiras quando há variações de grande porte no preço da ação. A aproximação de segundo grau da série de Taylor as vezes não é suficientemente acurada;
- *Lambda* (λ): $\frac{\partial V}{\partial S} \times \frac{S}{V}$, é a elasticidade no ponto da opção, descrevendo a sensibilidade em termos percentuais;
- *Vomma*, *Vanna* e *Última* medem sensibilidades de ordem maior que 1 com relação à volatilidade, com $Vomma = \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}$, $Vanna = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}$ e $Ultima = \frac{\partial Vomma}{\partial \sigma} = \frac{\partial^3 V}{\partial \sigma^3}$.

3.3 Abordagem de Black-Scholes a partir de Martingales

As abordagens utilizadas anteriormente para chegar à PDE utilizam caminhos diferentes mas métodos similares. Uma visão a partir de equivalência de martingales e de probabilidades neutras de risco configura outra forma de se chegar na condição necessária para preços livres de arbitragem em opções europeias.

3.3.1 Derivação da PDE

Para derivar a PDE de Black-Scholes seguiremos a abordagem de Neftci (2000, p. 358)¹⁸. Para chegar na PDE final é importante destacar que a ausência de arbitragem garante que o conjunto probabilístico \bar{P} e o processo \bar{W} podem e devem ser os mesmos para a opção e seu ativo subjacente. Tal afirmativa faz com que seja necessário partir do processo que modela a ação para depois prosseguir com a opção.

O raciocínio começa através de uma regra da cadeia da diferenciação fundamental:

$$d(e^{-rt} S_t) = d(e^{-rt}) S_t + e^{-rt} dS_t. \quad (3.39)$$

¹⁸O problema é que o autor utiliza uma SDE comum para a derivação. São feitas modificações para adaptar o raciocínio a uma SDE geométrica.

Substituindo $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ e sabendo que $d(e^{-rt}) = -re^{-rt} dt$, resulta

$$d(e^{-rt} S_t) = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) = e^{-rt} (\mu - r) S_t dt + e^{-rt} \sigma S_t dW_t. \quad (3.40)$$

A equação acima geralmente não é um martingale, pois o *drift*, $e^{-rt}(\mu - r)S_t$, provavelmente não será nulo. Neste instante é importante inserir uma nova série de Wiener neutra de risco, \bar{W} , tal que

$$d\bar{W}_t = dW_t + dX_t. \quad (3.41)$$

Aplicando em (3.40) e abrindo a expressão, temos

$$d(e^{-rt} S_t) = e^{-rt} (\mu - r) S_t dt - e^{-rt} S_t \sigma dX_t + e^{-rt} \sigma S_t d\bar{W}_t. \quad (3.42)$$

Fica claro que o valor de dX_t tem que ser tal que anule o *drift*. Por isso¹⁹

$$dX_t = \frac{\mu - r}{\sigma} dt, \quad (3.43)$$

fazendo com que o preço da ação descontado não tenha média e adquira a forma de

$$d(e^{-rt} S_t) = e^{-rt} \sigma S_t d\bar{W}_t \quad (3.44)$$

sob conjunto probabilístico neutro de risco.

A manipulação para o processo que modela as opções não é muito diferente. Tendo a função $V(S_t, t) = V$, fazemos aqui o mesmo procedimento, qual seja

$$d(e^{-rt} V) = -re^{-rt} V dt + e^{-rt} dV. \quad (3.45)$$

Fazendo uso do Lema de Ito para dV , a expressão do lado direito se torna

$$-re^{-rt} V dt + e^{-rt} \left(\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt \right). \quad (3.46)$$

O termo dS_t novamente pode ser substituído pela SDE $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Fazendo isto e rearrumando a equação, chega-se ao resultado

$$d(e^{-rt} V) = e^{-rt} \left(-rV + \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + e^{-rt} \sigma \frac{\partial V}{\partial S} S_t dW_t. \quad (3.47)$$

Agora podemos utilizar novamente \bar{W} para tornar a expressão neutra de risco. Aplicando a

¹⁹Note que dX_t é muito similar com a fórmula do Índice de Sharpe. Esta variável pode ser interpretada como o prêmio de rentabilidade a cada unidade de risco assumida por um investidor.

expressão em (3.41), temos que

$$d(e^{-rt}V) = e^{-rt} \left(-rV + \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt - e^{-rt} \sigma \frac{\partial V}{\partial S} S_t dX_t + e^{-rt} \sigma \frac{\partial V}{\partial S} S_t d\bar{W}_t, \quad (3.48)$$

mas a conclusão encontrada em (3.43) ainda é válida. Substituindo o valor encontrado em dita equação se anulam diversos termos, tornando a expressão da forma

$$d(e^{-rt}V) = e^{-rt} \left(-rV + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + r \frac{\partial V}{\partial S} S_t \right) dt + e^{-rt} \sigma \frac{\partial V}{\partial S} S_t d\bar{W}_t. \quad (3.49)$$

Mas o termo entre parênteses do lado direito da última equação deve ser zero para que $d(e^{-rt}V)$ acima se torne um martingale. Isto significa que

$$-rV + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + r \frac{\partial V}{\partial S} S_t = 0 \quad (3.50)$$

deve ser satisfeito. Esta é a PDE de Black-Scholes.

Nesta perspectiva é importante notar como o termo μ se cancela da equação após feitas certas modificações. Tal variável, por ser a que determina a média de incrementos futuros, representa o prêmio pelo risco da ação. Por isso, ela carrega consigo implicitamente as preferências dos agentes sobre esse papel²⁰. Sendo assim, se houvesse hipoteticamente o termo μ na PDE final, estaríamos lidando com uma variável na qual se faria necessário incluir preferências dos investidores. O desaparecimento posterior da média de incrementos demonstra como o preço da opção é completamente objetivo sob a perspectiva das preferências. Kritzman (2002, p. 128) explica a ausência de preferências no *hedge* que é possível criar com a opção e seu subjacente. Como, teoricamente, sempre será possível gerar um *hedge* perfeito com os dois ativos, o retorno esperado de tal portfólio deverá ser uma medida neutra de risco, qual seja r . Consequentemente, investidores poderão avaliar opções como se eles fossem indiferentes ao risco, independente do grau de aversão. Conclui-se daí que o *drift* neutro de risco deve ser a taxa livre de risco.

3.3.2 Derivação da fórmula

A ideia por trás do raciocínio a ser demonstrado se baseia novamente em mudar o conjunto probabilístico, de forma que o processo S_t se torne um martingale. Depois, é possível concluir que o preço de uma opção em qualquer data é a esperança do seu *payoff* no vencimento

²⁰Como μ é uma medida sob probabilidades "reais", os investidores atribuirão naturalmente um risco a cada retorno esperado.

descontado continuamente à taxa livre de risco, de modo que

$$V = E^{\bar{P}} \left[e^{-r(T-t)} \max(S_T - K; 0) \right]. \quad (3.51)$$

No entanto, é necessário descobrir a medida de probabilidade \bar{P} que torne o *payoff* descontado um martingale. Para isso, assume-se um processo geométrico da forma

$$S_t = S_0 e^{Y_t}, \quad (3.52)$$

onde $Y_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, ou seja, a variável segue o processo $dY_t = \mu dt + \sigma dW_t$. Utilizando Ito e após algumas modificações, podemos concluir que o processo de S_t é definido por

$$dS_t = \left(\mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \right) dt + \sigma S_t dW_t. \quad (3.53)$$

Como o processo é sob o conjunto "real" de probabilidades P , ele não é um martingale, e devemos substituir μ por alguma outra variável, digamos ρ , que torne o *drift* constante, de forma que obtenhamos $dS_t = (\rho S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t) dt + \sigma S_t d\bar{W}_t$. Dado que o *drift* da equação (3.53) é $\mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t$, a variável ρ deve ser tal que o prêmio pelo risco seja anulado e o processo varie na média à taxa livre de risco²¹. Portanto, o valor adequado é

$$\rho = r - \frac{1}{2} \sigma^2, \quad (3.54)$$

corroborando o que foi demonstrado na equação (2.26). Assim encontramos uma SDE geométrica e neutra de risco da forma

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\bar{W}_t. \quad (3.55)$$

Em Neftci (2000, p. 346) é demonstrado que se pode chegar a $d\bar{P}_t$ através da função geradora dos momentos no processo geométrico de S_t . Esta função, chamada de $M(\lambda) = E(e^{Y_t \lambda})$ retorna, quando $\lambda = 0$ e a distribuição é normal, que²²

$$d\bar{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T. \quad (3.56)$$

Além disso, a partir de (3.51), sabemos que²³

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \max(S_T - K; 0) d\bar{P}. \quad (3.57)$$

²¹O drift deve ser a taxa livre de risco porque esta taxa será descontada a valor presente para que o processo seja um martingale. Sendo assim, r é o *drift* neutro de risco.

²²Para facilidade notacional, assume-se a partir daqui que nos encontramos no instante zero, de forma que $T - t = T$.

²³Esta expressão nada mais é que a média de cada *payoff* descontado ao presente, ponderada pela sua probabilidade neutra de risco.

Deve ser observado que o preço da opção é, no vencimento, zero quando $S_T < K$. Utilizando esta condição e aquela na expressão (3.52), conclui-se que os valores relevantes a considerar são aqueles onde $S_0 e^{Y_T} \geq K$. Resolvendo a inequação para Y_T temos

$$Y_T \geq \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), \quad (3.58)$$

fazendo com que este seja o novo limite inferior da integral. Com o novo limite, podemos também substituir $\max(S_T - K; 0)$ por $S_0 e^{Y_T} - K$. Agora, juntando as equações (3.56), (3.57), (3.58) e (3.52), chegamos à seguinte solução, após separar a mesma em duas partes, uma envolvendo o preço da ação no momento zero, S_0 , e outra contendo o preço de exercício, K :

$$\begin{aligned} V = & S_0 e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^{Y_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T \\ & - K e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T. \end{aligned} \quad (3.59)$$

A separação é útil pois de cada expressão no lado direito da equação surgirá uma parte da fórmula final de Black-Scholes.

Começando pela segunda parte da equação (3.59), será utilizada a letra Z para simplificar a visualização, de modo que

$$Z = \frac{Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (3.60)$$

Aplicando isto teremos a expressão²⁴

$$K e^{-rT} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ. \quad (3.61)$$

Se a equação acima mencionada for observada atentamente, fica evidente que o limite inferior da integral é muito parecido com o termo d_2 da fórmula final. Por regra de logaritmo,

$$\ln \left(\frac{K}{S_0} \right) = -\ln \left(\frac{S_0}{K} \right).$$

Além disso, a simetria existente na distribuição normal permite trocar os limites da integral, invertendo os sinais, de forma que o inferior seja menos infinito e o superior a expressão encontrada, com sinal invertido. As afirmações até aqui são suficientes para chegar à versão final

$$K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ = K e^{-rT} N(d_2). \quad (3.62)$$

A primeira parte da equação (3.59) não utiliza um raciocínio muito divergente daquele

²⁴O limite inferior da integral se modifica pois deverá ser feita a equivalência tendo em vista a mudança de variável de Y_T para Z . Além disso, o $\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}}$ que estava em $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}$ foi passado para dZ .

recém exposto. A manipulação para a variável Z resultará em

$$S_0 e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma Z \sqrt{T} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Z^2} dZ = S_0 e^{-rT + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) T} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (Z^2 + 2\sigma Z \sqrt{T})} dZ. \quad (3.63)$$

O último expoente é deixado dessa forma para ressaltar que ele é quase um quadrado perfeito. Soma e subtrai $\sigma^2 T / 2$ para obter²⁵

$$S_0 e^{-rT + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) T + \frac{\sigma^2 T}{2}} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (Z^2 + 2\sigma Z \sqrt{T} + \sigma^2 T)} dZ. \quad (3.64)$$

Tivemos sorte que todos os termos no expoente fora da integral de cancelam, ficando apenas S_0 . Como o expoente dentro da integral resulta num quadrado perfeito, a expressão se torna mais simples. Refazendo a mudança de variável, onde

$$L = Z + \sigma \sqrt{T}$$

a expressão final se torna

$$S_0 \int_{-\infty}^{d_2 + \sigma \sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} L^2} dL = S_0 N(d_1), \quad (3.65)$$

com $d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T}$.

A fórmula final será obtida aplicando os resultados obtidos nas equações (3.62) e (3.65) na expressão encontrada em (3.59), corroborando a fórmula final:

$$V = S_0 N(d_1) + K e^{-rT} N(d_2). \quad (3.66)$$

3.4 Relevância do Modelo em Finanças Corporativas e em outras áreas correlatas

3.4.1 Finanças Corporativas

O ponto de vista de análise utilizado por Black, Scholes e Merton para elaborar o método de apreçamento de opções gerou forte impacto nas áreas correlatas de finanças, como as de finanças corporativas e assuntos ligados à estrutura de capital e dívida de empresas e à análise de investimentos. Novas áreas de conhecimento surgiram a partir desta perspectiva, como a Teoria das Opções Reais dentro das análises de orçamento de capital de empresas, e a Teoria

²⁵Na realidade, multiplica-se e divide-se por $e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}$.

dos Ativos Contingentes.²⁶

A teoria dos ativos contingentes modela uma nova forma de pensar sobre os credores da empresa. Esta abordagem já foi pioneira no artigo original de Black e Scholes, mas também em Merton (1973) e em Merton (1974). A teoria pode ser entendida quando se imagina que uma empresa possui apenas um pedaço de dívida em circulação, sem cupom e com data fixa de maturidade.²⁷ Quando o título de dívida chega ao vencimento, o credor tem a opção de receber a dívida ou de "confiscar" do patrimônio líquido da empresa em caso de insolvência. Black, Merton e Scholes reconheceram que esta característica é parecida com a de uma opção europeia cujo ativo subjacente são os bens e direitos da empresa, cujo *strike* é igual ao valor presente da dívida e cujo tempo até maturidade confere com o vencimento da obrigação. A *boundary condition* da opção pode ser definida formalmente como $\max(A_T - B; 0)$, onde A_T é o valor da empresa no vencimento da dívida e B , o valor de exercício, ou seja o valor da dívida. Sob esta perspectiva, os acionistas da empresa estariam detendo esta opção europeia de compra. Mas sob a perspectiva do credor, a condição no vencimento será de receber $\min(A_T; B) = B - \max(B - A_T; 0)$. Esta afirmativa é muito forte, pois, antes do vencimento da dívida, a empresa deve valer o valor presente de B menos a cotação de uma opção de venda europeia que vence na data T e tem valor de exercício B . Dita constatação não é apenas importante para determinar o valor da dívida corporativa, senão é uma forma de provar a paridade entre opções de venda e de compra de mesmo *strike* e data de vencimento.²⁸

A noção de ativos contingentes é simples mas difere da teoria tradicional em finanças que afirma que o único e verdadeiro dono de uma firma serão seus acionistas e não seus credores. Enquanto isso, esta abordagem confere a característica de dono a estes dois tipos de *stakeholders*. Dado que os credores têm prioridade na distribuição de recursos da empresa, os detentores do capital social receberão o "resíduo" dos ativos que compõem a mesma. Esta perspectiva, portanto, permite entender o problema de agência que se estuda na administração. Pelo outro lado, se olhamos os ativos de uma empresa como o ativo subjacente de uma opção, o modelo de Black-Merton-Scholes indica que um aumento na volatilidade do ativo-objeto aumenta o valor de mercado da opção. Como a perda máxima para o detentor de ações é retorno nulo, há um incentivo a aumentar o risco do negócio da empresa, entrando em conflito com os interesses dos credores. Estes por sua vez, anteciparão a atitude e cobrarão uma maior taxa de juros sobre a dívida. O problema aqui descrito é conhecido como os custos de agência da dívida corporativa.

²⁶Em inglês, teoria das opções reais e teoria do orçamento de capital chamam-se *real options theory* e *contingent claims analysis*, respectivamente.

²⁷Estas premissas podem ser amplamente relaxadas.

²⁸A paridade entre *puts* e *calls* será vista no próximo capítulo.

A abordagem discutida anteriormente permite novas formas de abordar a teoria financeira. Olhando a empresa como um ativo contingente houve o desenvolvimento de tecnologias para determinar a razão dívida/capital ótima. Claramente é um contraste em relação à teoria de indiferença de Modigliani e Miller, de 1958, que enxergam a divisão entre dívida e capital como a divisão de um bolo, mas que não alteraria o valor de mercado da firma²⁹. A abordagem introduzida pela visão de ativos contingentes fornece uma boa explicação de por que existe dívida conversível em ações. Mas o modelo de Black-Scholes não ajudou apenas a entender os custos de agência com os credores de uma firma; também desenvolveu o pensamento referente a problemas de agência com seus funcionários, os quais muitas vezes recebem parte do salário através de *stock options* do tipo europeias que podem ser exercidas apenas se estes permanecem em determinado cargo por um prazo de tempo. Jarrow (1998) explica como uma abordagem através de opções também pode ser utilizada para avaliar os *ratings* de crédito da dívida emitida por empresas, da forma que é feito por agências como *Standard & Poors* ou *Moody's*. Atualmente a dívida corporativa em circulação embute uma opção de compra a favor da empresa, de forma que ela possa recomprar seus títulos. Uma metodologia para avaliar o preço da opção é muito importante e está intimamente ligado ao *rating* de crédito atribuído a este título.

É impressionante observar como a perspectiva de opções pode ser aplicado para uma vasta gama de assuntos. Na análise de investimentos que projeta fluxos de caixa descontados, pode ser usada a Teoria das opções reais, também chamadas gerenciais ou estratégicas. Estas opções caracterizam decisões tomadas pela administração de empresas, como a expansão de capacidade instalada, introdução de novos produtos no mercado, aquisição de outras empresas, e muitos outros. Aqui nos deparamos novamente com custos de agência, pois a teoria mostrou que os detentores de capital estão mais dispostos a carregar a opção do que exercê-la. Um exemplo banal é a introdução de um novo produto inovador no mercado. Um administrador tem a opção de não introduzi-lo imediatamente para conhecer melhor a demanda que terá. Mas também pode exercê-la para não correr riscos de que um concorrente seja mais rápido que ele. Muito embora pareça uma análise qualitativa, é possível utilizar aqui também a tecnologia de precificação de Black-Scholes. Brigham e Ehrhardt (2008, p. 593) mostram que é possível usar a teoria do orçamento de capital para obter todos os *inputs* na fórmula fechada de precificação. Assumindo a opção de um projeto de investimento,

1. A taxa livre de risco é um título do governo de cupom nulo com mesma maturidade que o projeto de investimentos;

²⁹Uma extensão desta teoria afirma que deve ser considerada a vantagem tributária em relação à dívida. Isto faria com que empresas procurem mais alavancagem.

2. O preço de exercício é igual aos custos necessários para implementar o projeto;
3. A cotação atual do "ativo subjacente" é o NPV³⁰ do investimento. As ações, como qualquer projeto de investimento, devem valer hoje a expectativa descontada de seus futuros fluxos de caixa. Por isso a analogia é válida. Além disso fica claro que opções reais são opções de compra, pois à medida que o NPV for menor que seu *strike*, ou seja seu custo de implementação, ela não será exercida;
4. O desvio-padrão do ativo subjacente pode ser obtido utilizando uma análise de sensibilidade dos fluxos de caixa. Para isso, pode fazer uso de cenários e atribuir-lhes probabilidades resultando em um NPV esperado com variância e desvio-padrão.

3.4.2 Outras áreas de conhecimento

Merton (1998) cita diversos impactos que a tecnologia de precificação de opções de Black-Merton-Scholes teve na prática. Setores como o mercado interbancário e avaliação de crédito foram diretamente afetados por esta inovação. Bancos tiveram maior facilidade de implementar estratégias financeiras através de derivativos, tendo custos de transação até 20 vezes mais baixos que os custos em *cash markets*, sem mencionar as vantagens tributárias. Além disso, empresas obtiveram métodos mais eficientes de mitigar seu risco em posições credoras ou devedoras no futuro. Uma vasta gama de aplicações pode ser encontrada no sítio eletrônico da Escola de Negócios do MIT (1998), uma base de dados onde consta uma grande listagem de referências para cada aplicação possível no uso de opções e sua precificação. Por exemplo, opções de venda podem ser utilizadas no ramo de seguros. Com base nisso, é interessante lembrar que o FDIC, ou o FGC no Brasil, representam um tipo de seguradoras no mercado financeiro, e, de fato, utilizam modelos de precificação de opções para estimar o valor do risco que estão assumindo. Mas não apenas a nível institucional, senão seguros de vida e fundos de pensão fazem proveito desta tecnologia. Mais amplamente, decisões macroeconômicas, representam tomadas de decisão e portanto podem ser precificadas de forma similar às opções reais. Ainda em Merton (1998, p. 104), ele enumera atividades como a administração de diversos tipos de cotas, a exemplo de cotas ambientais e de exploração de recursos escassos, de garantias mínimas em contratos de crédito e hipotecas, de distribuição de patentes, dentre outros. Inclusive na teoria dos jogos, as opções encontram seu lugar.

³⁰Valor presente líquido: Descontam-se todos os fluxos de caixa esperados de um projeto para o presente, à taxa livre de risco. Geralmente se aceita o projeto se $NPV > 0$.

4 Depois do modelo: extensões, críticas e impactos

O final da década de 1970 e começo da década de 1980 caracterizaram um interregno de alta volatilidade na Economia e nos mercados. As duas crises do petróleo e a decadência do acordo de Bretton-Woods, marcado pelo padrão ouro-dólar, fizeram com que preços e taxas se tornassem mais voláteis e taxas de câmbio passassem para negociação flutuante. Saltos na volatilidade da taxa de juros se deviam à existência de taxas de inflação com dois dígitos levando a mais incerteza. Não há controvérsias de que o contexto econômico da época demandou uma produção acadêmica que relaxasse as premissas do modelo original de Black-Scholes e que criasse extensões para outros tipos de ativos subjacentes, taxas de câmbio e de juros. Além disso, também é necessário incorporar propriedades importantes quando se trata de opções de ações.

Mas não foram apenas as extensões que tomaram lugar no mundo de precificação de derivativos. Determinados fatores fizeram com que o modelo levantasse dúvidas sobre seu funcionamento. Isto se deve principalmente a dois acontecimentos. Do lado acadêmico, testes empíricos tinham demonstrado que distribuições apresentavam caudas mais pesadas do que se assumia no modelo, mesmo utilizando distribuição log-normal. Assim surgiu uma corrente, cujos destaques são Mandelbrot e Taleb, que não acreditava que esse método de precificar opções fosse adequado. Em segundo lugar, e de um ponto de vista prático, o famoso *hedge fund* administrado por Scholes e Merton chamado de *Long Term Capital Management* (LTCM), que obteve tremendo sucesso até o começo de 1997, entrou em crise um pouco antes que estes dois indivíduos fossem laureados com o Prêmio Nobel. O argumento dos gestores, no entanto, foi de que o modelo em si estava correto, mas que o fundo não detinha suficientes recursos para colocar margens de garantia, algo que é obrigatório em bolsas de derivativos. A inevitável chamada de margem fez com que o portfólio do fundo entrasse em colapso.¹

¹Para mais informações sobre o colapso do LTCM, ver Jorion (2000)

4.1 Extensões

4.1.1 Dividendos

Uma das mais importantes extensões do modelo é a incorporação de dividendos. Esta extensão é considerada uma das menos complicadas à medida que se utiliza um dividendo em proporção ao valor da ação. Os métodos mais simples pagam dividendos contínuos e em função do preço corrente do ativo subjacente. Como dividendos são eventos que diminuem o valor da ação, eles devem ser incorporados desta forma no modelo.² Wilmott (2006, p. 97 e 139) explica de forma bastante concisa como devem ser tratados os dividendos. Voltando novamente à equação (3.5) e assumindo $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta$, a equação agora deverá incorporar uma taxa de distribuição de dividendos contínua em função do preço corrente, o *dividend yield* denominado pela letra D , para cada momento no tempo. Desta forma, obtemos:

$$dP_t = \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt - \Delta dS_t - D \Delta S dt. \quad (4.1)$$

O termo $D \Delta S dt$ pode ser interpretado como a quantidade de dividendo por ação por unidade de tempo, multiplicado pela quantidade (pelo peso) de ações no portfólio, ou seja, $-\Delta$. Resolvendo de forma similar ao capítulo passado e destacando que o outro lado da equação permanece constante pois espera-se retornos livres de risco, chegamos a uma PDE bastante parecida:

$$-rV + (r - D) \frac{\partial V}{\partial S} S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 = 0. \quad (4.2)$$

Resolvendo a PDE, acontecem apenas mudanças sutis na fórmula final:

$$V_{Call} = S e^{-D(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4.3)$$

e

$$V_{Put} = -S e^{-D(T-t)} N(-d_1) + K e^{-r(T-t)} N(-d_2), \quad (4.4)$$

onde os parâmetros d_1 e d_2 se alteram nos termos onde aparece a taxa livre de risco, passando a ser $(r-D)$:

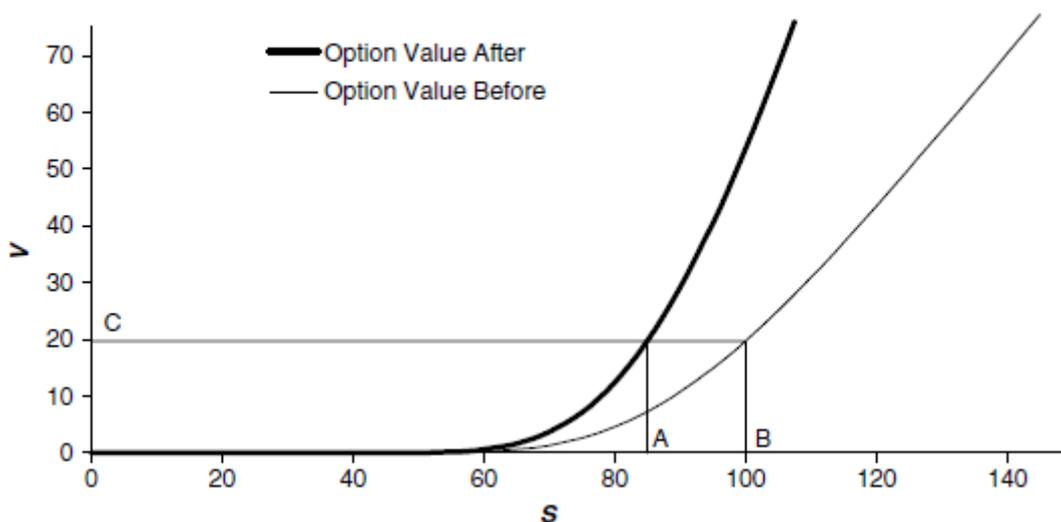
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_2 + \sigma\sqrt{T - t}. \quad (4.5)$$

Assumir, porém, dividendos contínuos e relativamente constantes apenas pode ser considerado realista em raras situações, como quando se lida com opções de índices cuja cesta é

²Na prática podemos observar, porém, que, quando acontece distribuição de dividendos, o *strike* desta opção é diminuído no mesmo montante que o dividendo por ação, algo que a maioria dos modelos não considera. Em vez disto, assume-se um preço de exercício fixo.

bastante diversificada, ou com opções de commodities onde se paga constantemente o custo do carregamento. Para opções de ações específicas deve haver algum tipo de sofisticação. Na prática, dividendos são distribuídos (i) em termos absolutos, independente do preço da ação na data *ex-dividendo*; (ii) de forma discreta, algumas vezes por ano e (iii) o valor não é conhecido muito tempo antes, além de depender dos resultados da empresa. Para que não aconteça arbitragem, o preço da ação deve cair no valor do dividendo imediatamente após sua distribuição. Logo, o que acontece na prática é um "salto" na cotação de um ativo subjacente. Como o detentor da opção não recebe dividendos e a distribuição já tinha sido anunciada, a trajetória do prêmio da opção não deverá ser descontínua. Apenas há um deslocamento no gráfico que descreve o comportamento da ação com o da opção, como demonstra a Figura 4.1, onde o ponto B é a situação antes e A depois do evento.

Figura 4.1: Comportamento do preço de uma opção antes e depois da data *ex-dividendo*



Fonte: Wilmott (2006, p. 142)

4.1.2 A paridade entre Puts e Calls

Que as opções de compra e de venda de mesmo ativo subjacente e mesma maturidade tivessem uma relação não é novidade. De fato, há obras muito anteriores às de Black-Scholes que já estabelecem uma relação entre os dois tipos de derivativos. A obra de Nelson (1904) mais voltada para o mercado da época e com intuito prático já descreve uma relação, apesar de não haver uma formalização do assunto. O primeiro autor conhecido a formalizar a paridade é Stoll (1969). Hull (2009, p. 208) deriva a paridade de uma forma simples. Dado um portfólio A contendo uma opção de compra e títulos livres de risco, rendendo a taxa constante até vencimento,

no montante de $Ke^{-r(T-t)}$, e outro portfólio B com uma estratégia *protective put*, na qual está comprado numa opção de venda e numa ação³. No vencimento das opções, ambos os portfólios terão um patrimônio de $\max(S_T, K)$. No portfólio A porque se a opção estiver no dinheiro, ele vai exercê-la, desembolsando o valor do título e comprando a ação; caso contrário, não exerce e terá o valor do título livre de risco. No portfólio B, se o preço da ação estivesse abaixo de K no momento T , a opção de venda será exercida, e o indivíduo venderá a ação em troca de K em dinheiro; caso contrário, a *put* não terá valor e a ação permanecerá na carteira do portfólio.

Como o valor no vencimento é o mesmo, o portfólio como um todo em qualquer ponto do tempo t tem que ter o mesmo valor. Por isso

$$V_{Call} + Ke^{-r(T-t)} = V_{Put} + S_t \quad (4.6)$$

para qualquer ponto no tempo. A paridade não somente nos mostra a relação entre os preços das duas opções; também demonstra como a volatilidade implícita⁴ de *puts* e *calls* com mesmas características devem ser iguais. Tal fato é simples de ser mostrado: a paridade mostrada na equação (4.6) é válida para qualquer preço de opções. Não foi utilizado nenhum artifício de Black-Scholes para chegar a esta conclusão. A única premissa é a inexistência de arbitragem. Partindo disto, fica evidente que a equação

$$C + Ke^{-r(T-t)} = P + S_t \quad (4.7)$$

deve ser satisfeita, onde C e P são os preços de mercado dos papéis de compra e de venda, respectivamente. Diminuindo (4.7) de (4.6), obtém-se $V_{Call} - C = V_{Put} - P$; ou seja, o erro de precificação de BS com relação ao mercado deve ser o mesmo. Como a volatilidade implícita faz com que o valor da opção segundo BS se iguale ao valor de mercado, isto também deverá acontecer do outro lado da equação. Portanto, o outro lado também deverá ter a mesma volatilidade implícita.

Quando há distribuição de dividendos dentro do período de vida da opção, a essência da paridade não se altera. No vencimento, os dois portfólios terão valor de $\max(S_T + D, K)$.⁵ A equação se torna

$$V_{Call} + Ke^{-r(T-t)} + D = V_{Put} + S_t. \quad (4.8)$$

O lado direito não contém o termo D pois ele ainda está "dentro" do preço da ação. Portanto no momento em que houver a distribuição do provento ele permanecerá como dinheiro no

³Nesta situação, todas as opções devem ser europeias.

⁴Ver seção 4.1.4.

⁵Os dividendos, após distribuídos não são reinvestidos

portfólio B.

Como descrito no capítulo anterior, a paridade também pode ser utilizada na teoria da estrutura de capitais corporativos. Foi demonstrado que o valor junto aos acionistas é o de uma opção de compra cujo ativo subjacente é o valor da empresa (A_T) e cujo strike é o montante de dívida (B) no vencimento. Além disso, o valor da dívida é $\min(A_T; B)$, o que equivale ao valor presente da dívida menos o valor de uma opção europeia. Como o valor total dos ativos da empresa na data atual é dado pela soma de suas fontes de financiamento, quais sejam os acionistas e os credores, pode ser estabelecida a relação:

$$A_t = V_{Call} + PV(B) - V_{Put}. \quad (4.9)$$

Arranjando a fórmula de outra forma, fica claro que a expressão é muito similar à equação (4.6):

$$V_{Call} + PV(B) = V_{Put} + A_t. \quad (4.10)$$

4.1.3 Opções americanas e exercício antecipado

Um problema importante a ser debatido é de que forma o valor de uma opção é afetado quando ela pode ser exercida antecipadamente. O derivativo mais conhecido com essa propriedade é a opção americana, que se iguala em todos os aspectos à opção europeia, exceto pelo fato de poder ser exercida em qualquer pregão até o vencimento. Um resumo das abordagens referentes à precificação de opções americanas pode ser encontrado no artigo de Browdie e Demple (1996). O problema das opções americanas é chamado de *free boundary* por não saber um ponto fixo em que haverá o exercício.

Hull (2009, p. 211) demonstra como o exercício antecipado de *calls* americanas de ações que não pagam dividendos nunca será uma estratégia racional. Esta constatação se deve a dois fatores. Em primeiro lugar ao custo de oportunidade, pois a quantia que o detentor da opção pagaria antecipadamente, equivalente ao valor do *strike*, poderia estar rentabilizando até a maturidade da opção, onde ele pagaria o mesmo valor para comprar a ação mas teria auferido juros sobre tal montante. Em segundo lugar, o exercício antecipado do derivativo acarretaria na perda de proteção para o investidor caso o preço do ativo subjacente chegasse a uma cotação inferior ao preço de exercício. Isto significa que até o vencimento o investidor não vai querer carregar uma ação na qual possa correr o risco de perder patrimônio se tem a possibilidade de se proteger com o derivativo, onde a perda é limitada. Um argumento aparentemente plausível seria que o detentor da opção queira exercer seu ativo para imediatamente vender a ação a valor de mercado e, com isso, auferir o ganho da diferença entre o preço desta e o preço de exercício.

No entanto, tampouco configura uma estratégia ótima à medida que o ganho será maior com a venda da própria opção, pois devemos lembrar que o preço da mesma é constituído por seu valor intrínseco além do valor no tempo. Desta forma, só haverá um eventual exercício na data de vencimento. Formalmente, esta afirmação é simples de ser demonstrada. O preço de uma opção europeia de compra dentro do dinheiro deve satisfazer a inequação $V_{Call} \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$, caso contrário, o retorno de um título de renda fixa seria mais vantajoso. Além disso $U_{Call} \geq V_{Call}$, onde U denota o prêmio para uma opção americana. A opção americana deve valer igual ou mais que uma opção europeia dado o prêmio pelo exercício antecipado. Juntando as duas expressões resulta que $U_{Call} \geq S_t - Ke^{-r(T-t)}$; como a taxa de juros é positiva, K é multiplicado por um número menor que 1 e $U_{Call} > S_t - K$. A última expressão mostra como é mais rentável vender dita opção a exercer e auferir $S_t - K$.

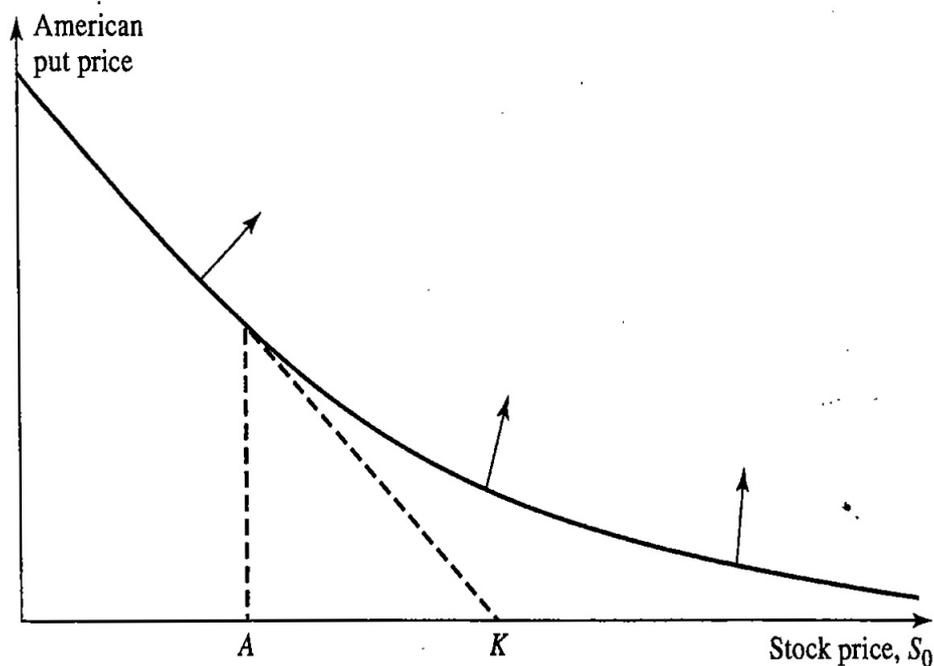
Se a afirmação acima vale para opções americanas de compra, o raciocínio inverso pode ser aplicado para *puts* americanas de ações que não pagam dividendos, porém há certas ressalvas. O limite inferior de uma opção de venda europeia no dinheiro é $V_{Put} \geq Ke^{-r(T-t)} - S_t$, de modo que para opções americanas satisfaz-se $U_{Put} \geq K - S_t$ ⁶. A diferença com estas opções é que a taxa de juros positiva não torna o preço da opção *estritamente* superior à expressão do lado direito, como era o caso anteriormente. Dita particularidade faz com que o exercício possa ser antecipado, tendo em vista que, quando $U_{Put} = K - S_t$, não haveria motivos para não exercer a opção. Desta maneira, o valor da opção se iguala a seu valor intrínseco, como mostrado no ponto A da figura 4.2, onde o gráfico do preço no tempo t tangencia a *boundary condition* da opção. Como citado pelo autor, tais características geram um fenômeno em que uma opção europeia com mesmo strike tenha um valor inferior a seu valor intrínseco, já que, se $U_{Put} = K - S_t$ e U deve ser maior que V por haver prêmio dada a possibilidade de exercício a qualquer momento, V terá de ser menor que $K - S_t$.

As afirmações recém mencionadas não são válidas quando a ação subjacente distribui dividendos. Hull (2009, p. 300) mostra que de forma geral uma opção de compra americana com dividendos provavelmente é exercida imediatamente antes da última data *ex-dividendo* até o vencimento do derivado. Além disso, é provado que uma opção de compra americana merece mesmo tratamento que uma europeia no caso em que $D_1 \leq K(1 - e^{-r(T-t)})$. O problema da demonstração é que há uma severa perda de generalidade e assume também que o último dividendo a ser distribuído é relativamente grande e o prazo até maturidade é curto.

Para precificar opções nestes casos, não é mais possível elaborar uma fórmula fechada. Os métodos tradicionais envolvem o modelo binomial, com respectivas extensões, ou métodos

⁶A possibilidade de exercício a qualquer momento faz com que o termo $e^{-r(T-t)}$ suma. Isto é evidente porque o valor de uma opção de venda *in the money* deve valer pelo menos a diferença entre K e S para evitar arbitragem.

Figura 4.2: Comportamento de uma opção americana vs. a ação subjacente



Fonte: Hull (2009, p. 213)

computacionais recursivos. Estabelecendo a restrição de que haverá apenas uma distribuição, há uma fórmula de apreçamento de opções americanas de compra que utiliza a aproximação de Black⁷, chamado de modelo Roll-Gheske-Whaley (RGW)⁸. A equação utilizada em dito modelo é:

$$U_{Call} = (S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)})N(b_1) + (S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)})M\left(a_1, -b_1; -\sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}M\left(a_2, -b_2; -\sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}}\right) - (K - D_1)e^{-r(t_1-t)}N(b_2), \quad (4.11)$$

sendo:

- $a_1 = \frac{\ln[(S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)})/K] + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$;
- $a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T-t}$;
- $b_1 = \frac{\ln[(S_t - D_1 e^{-r(t_1-t)})/S_*] + (r + \sigma^2/2)(t_1-t)}{\sigma\sqrt{t_1-t}}$;
- $b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t_1-t}$;
- t_1 a data de pagamento do dividendo;

⁷Esta é uma aproximação na qual se utiliza a fórmula de opções europeias tanto na data do vencimento quanto na última data *ex-dividendo*, e o preço final seria o maior dos dois. Para mais informações, vide Black (1975).

⁸Ver Roll (1977) e Barone-Adesi e Whaley (1988)

- D_1 a quantia de dividendo distribuída em t_1 ;
- σ a volatilidade do preço da ação ajustado pelo dividendo;
- $M(a,b;\rho)$ a densidade bivariada cumulativa para a distribuição normal bivariada de a e b e cujo coeficiente de correlação é ρ , de forma que

$$M(a,b;\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b \exp\left(\frac{y^2 - 2\rho xy - x^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy;$$

- S^* o valor da ação no momento *ex-dividendo*, satisfazendo a equação

$$V_{Call}(S^*; K; t_1 - T) = S^* + D_1 - K,$$

onde os parâmetros nos parênteses de V_{Call} são o preço da ação, o *strike* e o tempo a ser utilizados.

O método aqui utilizado é mais genérico do que aparenta. Na existência de diversos dividendos antes do vencimento do papel, um método largamente utilizado é o de descontar os mesmos a valor presente e diminuir-los do preço corrente da ação. Tal metodologia é possível, pois, como acima mencionado, o único ponto no tempo em que exercício antecipado fosse ótimo seria apenas imediatamente antes da última data *ex-dividendo*.

Além do modelo HGW, Browdie e Demple (1996, p. 1238) listam os métodos recursivos para solucionar o problema do preço. Eles partem do modelo binomial ou trinomial⁹ e utilizam um tipo de extensão. Em Wilmott (2006, p. 289), um modelo binomial utiliza a ausência da arbitragem, de modo que, quando o valor teórico da opção americana cai abaixo do payoff naquele mesmo ponto no tempo, o derivativo deva ser exercido. Formalmente, uma ação $S_j^n = Su^j v^{n-j}$, onde j é o número do nó numa etapa, contado de baixo para cima, e n é a n -ésima etapa de tempo no modelo. V_j^n ¹⁰ é o valor teórico da opção para S_j^n . O método procura ir da maturidade até o ponto inicial V_0^0 de forma retroativa. Nos nós em que o valor encontrado da opção é menor que seu payoff, ela será exercida, de forma que o *payoff* será igual ao valor da opção para evitar arbitragem. Formalmente, pode-se dizer que, para qualquer nó:

$$V_j^n = \max\left(\frac{V_{j+1}^{n+1} - V_j^{n+1}}{u - v} + \frac{1}{1 + rh} \frac{uV_j^{n+1} - vV_{j+1}^{n+1}}{u - v}; \text{Payoff}(S_j^n)\right), \quad (4.12)$$

lembrando que o primeiro termo inteiro nos parênteses foi deduzido na seção 3.1.4.

⁹O modelo trinomial se aproxima da realidade à medida em que também é possível que o ativo-objeto mantenha seu preço constante. No modelo binomial recombinante isso pode ser apenas sintetizado com um movimento para cima seguido de um movimento para baixo.

¹⁰Para fins notacionais V_{j+1}^{n+1} equivale a V_+ e V_j^{n+1} , a V_- .

Outro método muito utilizado é o de tempos ótimos de parada¹¹. Define-se um tempo de parada τ como uma variável aleatória tal que $t \leq \tau \leq T$. Sendo assim, τ será o ponto de parada, e com isso o tempo de exercício de uma opção americana. Evidentemente, a variável aleatória τ terá a propriedade

$$P(\tau = T) = 1 \quad (4.13)$$

sempre e quando se lida com opções europeias ou opções americanas que não pagam dividendos. Numa perspectiva de martingales e de probabilidade neutra de risco, o preço de uma opção com exercício antecipado é da forma

$$V(S_t, t, \tau^*) = \sup_{\tau \in \zeta_t, T} E_t^{\bar{P}} \left(e^{-r(\tau-t)} V(S_t, t, \tau) \right), \quad (4.14)$$

onde ζ é o conjunto de valores possíveis para τ , τ^* é o tempo ótimo de parada, e *sup* é o supremo da função, ou seja, o menor valor em τ que maximiza a esperança. Esta tecnologia pode ser embutida dentro da teoria do processo binomial. Desta forma, é possível encontrar um τ^* , através de algoritmos, tal que

$$\tau^* = \min_k (k : S_k > B(k, S_k)) \quad (4.15)$$

de forma que $B(k, S_k)$ é um limite¹² variável a ser determinado. Para a variável B , um método bastante utilizado é a fórmula de Dynkin. Em suma, esta fórmula admite B como um processo estocástico

$$dB_t = o(B_t) + \sigma(B_t) \quad (4.16)$$

e $f(B)$ uma função duplamente diferenciável de B onde

$$E_t^{\bar{P}} (f(B_\tau)) = f(B_t) + E_t^{\bar{P}} \left(\int_t^\tau Af(B_u) du \right) \quad (4.17)$$

e A é o gerador infinitesimal do processo B_t tal que

$$Af(B) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E_t^{\bar{P}} (f(B_s)) - f(B_t)}{s}. \quad (4.18)$$

Também podemos notar que a fórmula de Dynkin é passível de interpretação como sendo a versão estocástica da teoria fundamental do cálculo.¹³

¹¹do inglês: *Optimal Stopping Times*.

¹²*Free Boundary*

¹³Vide Peskir e Shiryaev (2006) para uma abordagem completa sobre tempos ótimos de parada.

4.1.4 Extensões na volatilidade

Uma ferramenta muito utilizada desde que Black-Scholes espalhou-se como método de apreamento de opções é a volatilidade implícita. Basicamente, a volatilidade implícita é quando a fórmula de precificação é resolvida para a o desvio-padrão, em vez de resolver para o preço. Para isso uma premissa é de importância, mas ela não retira de forma alguma generalidade da análise: para haver solução única de volatilidade implícita, o valor de mercado da opção deve ser maior que $\max(S_t - K; 0)$ e menor que S_t . Ela pode fornecer boas informações sobre as expectativas de volatilidade futura no mercado¹⁴. Outra vantagem da volatilidade implícita é que ela é um dado que contém mais informações que o próprio preço da opção. Ela permite comparar opções de diferentes prazos de maturidade, preços de exercício e até mesmo de diferentes ativos subjacentes. Opções de ações e de moedas costumam ser cotadas por sua volatilidade implícita anualizada e não por seu preço. Testes empíricos tem mostrado resultados mistos sobre a eficácia da volatilidade implícita; porém há consenso que ela é mais útil que a volatilidade histórica, através do desvio-padrão (JARROW, 1999).

Ao utilizar a volatilidade implícita, é possível verificar que a volatilidade de jeito algum é constante. Tal constatação derruba a premissa de Black-Scholes de utilização de volatilidade exógena e fixa, ou seja, o uso de volatilidade histórica. Primeiras extensões neste sentido já são encontradas em Merton (1973) sugerindo a variável $\sigma(S)$. Porém, os dois métodos mais utilizados são os de volatilidade dependente do tempo, através de métodos econométricos, e de volatilidade estocástica.

Métodos econométricos

Quanto à volatilidade dependente do tempo, há metodos econométricos bastante usados: o GARCH e o EWMA¹⁵. Por ser uma área muito vasta, será abordado aqui brevemente. Os métodos econométricos citados também são encontrados em áreas correlatas, como as de otimizações de portfólio por Value-at-Risk (VaR). Sem muitas explicações, o EWMA é uma estimativa da volatilidade que utiliza pesos, sendo que os mesmos são atribuídos de forma decrescente para dados mais antigos¹⁶:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) R_n^2. \quad (4.19)$$

¹⁴Wilmott (2006, p. 835) argumenta que a volatilidade implícita nem sempre é um bom indicativo de expectativas, pois meras condições de oferta e demanda alteram a volatilidade, dentre outros fatores.

¹⁵GARCH: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity; EWMA: Exponentially Weighted Moving Average

¹⁶Pode ser demonstrado que a equação (4.19) é uma expressão simplificada de $\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} R_{n-i+1}^2$.

Um modelo particular GARCH(1,1) que ganhou destaque para estimação da volatilidade em finanças é aquele que insere a equação (4.19) no modelo ARCH(1,1) e desta forma simulando um *mean reverting process*, similar ao que foi feito no Capítulo 2. Sendo assim, a equação

$$\sigma_n^2 = \alpha \bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n R_i^2,$$

típica do ARCH, incorpora pesos para informação mais antiga, de forma que

$$\sigma_n^2 = \alpha \bar{\sigma}^2 + (1 - \alpha)(\lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda)R_n^2), \quad (4.20)$$

sendo $\bar{\sigma}^2$ a variância de longo prazo¹⁷ (HULL, 2009, p. 495).

Superfícies de volatilidade determinística

Ao assumir funções de volatilidade do tipo $\sigma = \sigma(S, t)$, deixa de existir uma solução fechada para o problema de Black-Scholes. A ideia neste caso é a de achar, via métodos numéricos, uma estrutura a termo da volatilidade que resulte em preços de opções consistentes com os preços encontrados nos mercados para diferentes prazos. Na fórmula de Black-Scholes devemos substituir o termo σ por

$$\sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma(\tau)^2 d\tau}.$$

Em palavras, isto nada mais significa que a raiz quadrada da variância média observada via Black-Scholes. O princípio de encontrar a volatilidade real a partir da volatilidade implícita não é muito complicado. Dado que a volatilidade implícita é uma medida cumulativa, logo a variância implícita em qualquer ponto no tempo é a média ponderada das variâncias reais até este ponto. Se são conhecidas variâncias implícitas para maturidades anteriores, então é possível interpolar a volatilidade real para o dito ponto no tempo (WILMOTT, 2006, p. 837). O mesmo autor utiliza superfícies de volatilidade, cujos eixos são o preço da ação e os diferentes vencimentos, plotados num gráfico tridimensional. Utilizando o teorema de Fokker-Planck, chega a uma equação que relaciona opções de compra com a volatilidade local, qual seja¹⁸

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{\partial V}{\partial T} + (r - D)K \frac{\partial V}{\partial K} + DV}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}}}. \quad (4.21)$$

¹⁷ $\bar{\sigma}^2$ pode ser calculado através da média de variâncias nos últimos n períodos. Muitas vezes também é atribuído $\bar{\sigma}^2 = 0$.

¹⁸Esta fórmula é conhecida como *Fórmula de Dupire*.

Volatilidade estocástica

O conceito de volatilidade estocástica já foi abordado anteriormente. A dedução da PDE de Black-Scholes para uma opção $V(S, \sigma, t)$ com volatilidade estocástica segue o mesmo raciocínio, mas é um processo bastante mais complexo que quando assumida constante a volatilidade, pois a mesma agora representará uma nova fonte de incerteza, havendo duas. Ao contrário do que foi mostrado no Capítulo 2, é mais conveniente usar aqui uma SDE geométrica sem tendência no longo prazo que satisfaça a equação

$$d\sigma = p(S, \sigma, t)dt + q(S, \sigma, t)dW_{t2} \quad (4.22)$$

Wilmott (2006, p. 854) conclui desta forma que a PDE final será

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma S q \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \frac{1}{2}q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV = 0. \quad (4.23)$$

A solução desta PDE será mais acurada para determinar V . Obviamente o termo $p - \lambda q$ é o *drift* neutro de risco da volatilidade, equivalente à taxa livre de risco (r) para o ativo subjacente. O componente λ também é chamado de preço de mercado da volatilidade, à medida que ajusta a volatilidade para se tornar um martingale. É como se a volatilidade em si fosse uma opção. Além disso ρ representa a correlação entre as duas "opções".

Para modelagem de volatilidade estocástica existem diversos modelos bastante conhecidos, relacionados na tabela a seguir (WILMOTT, 2006, p. 904):

Tabela 4.1: Modelos para determinação de volatilidade estocástica

Nome	Modelo
Modelo de Hull e White	$d\sigma^2 = b_1\sigma^2 dt + b_2\sigma^2 dW_t$
Modelo de Scott, Taylor e Xu	$d \log \sigma = b_1(b_2 - \sigma)dt + b_3 dW_t$
Modelo de Stein e Stein	$\sigma = Z $, onde $dZ = b_1(b_2 - Z)dt + b_3 dW_t$
Modelo de Heston-Ball-Roma	$d\sigma^2 = b_1(b_2 - \sigma^2)dt + b_3\sigma dW_t$
Modelo de Ravanelli	$d\sigma^2 = b_1(b_2 - \sigma^2)dt + b_3\sigma^2 dW_t$

Volatility Smiles

O mercado costuma chamar de *Volatility Smile*¹⁹ a relação que existe entre a volatilidade implícita da opção e seu preço de exercício ou também o preço corrente do ativo subjacente. "Sorriso" pois possui uma forma parecida a uma parábola. Apesar de encontrar esta figura de forma mais clara em opções de moeda, elas também estão presentes em outros tipos de opções. Nas opções de ações costuma ser chamado de *Volatility Skew*, e foi primeiro mencionado apenas em 1996. No caso de ações, a volatilidade implícita não aumenta como uma parábola simétrica. De forma geral, a volatilidade é maior quando as *calls* estão mais dentro do dinheiro e as *puts* mais fora do dinheiro. Uma explicação a isso é que a alavancagem de uma empresa é maior quando o valor de seu patrimônio líquido diminui, de forma que tornem as ações mais voláteis. O contrário vale quando ações aumentam de valor: há mais margem para alavancagem e o mercado não reage tão nervosamente.

4.1.5 Taxas de juros

Outra generalização necessária é a da premissa na constância da taxa de juros livre de risco. Apesar de não ser utilizado em opções de ações, é necessário modelar a estrutura a termo da taxa de juros para opções de títulos e de swaps, dentre outros.

Define-se $R(t, T)$ como a taxa de juros no tempo t composta de forma contínua pela curva até o tempo T . Pode ser provado, através de precificação de títulos de renda fixa que

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln E^{\bar{P}}(e^{-\bar{r}(T-t)}), \quad (4.24)$$

sendo que \bar{r} é a média da taxa entre t e T , determinado pela estrutura a termo. A equação (4.24) é relevante pois demonstra que é possível obter toda a curva de juros se o processo para r foi determinado, a partir da taxa *spot*.

Geralmente utilizam-se processos estocásticos para determinar a trajetória de r . A SDE toma forma de

$$dr = m(r)dt + s(r)dW_t. \quad (4.25)$$

Nos processos mais simples, chamados de fator único, os modelos principais para *drift* e difusão estão relacionados na tabela 4.2. (HULL, 2009, p. 674)

¹⁹"Sorriso de volatilidade"

Tabela 4.2: Principais modelos *single factor* para determinação da taxa de juros

Nome	Modelo
Modelo de Rendleman e Bartter	$dr = b_1 r dt + b_2 r dW_t$
Modelo de Vasicek	$dr = b_1(b_2 - r)dt + b_3 dW_t$
Modelo de Cox, Ingersoll e Ross	$dr = b_1(b_2 - r)dt + b_3 \sqrt{r} dW_t$

Quanto a modelos mais complexos para determinação de estrutura a termo, há destaques para dois. O modelo de Hull e White (1990) pode ser interpretado como uma extensão do modelo de Vasicek. Também caracteriza um processo de reversão a uma tendência de longo prazo. Ele toma a forma através da equação

$$dr = (\theta(t) - b_1 r)dt + b_2 dW_t. \quad (4.26)$$

A diferença entre este modelo e o de Vasicek é o parâmetro $\theta(t)$, fazendo com que a reversão para a média seja dependente do tempo, onde, no tempo t , a taxa reverte para $\frac{\theta(t)}{b_1}$ com velocidade b_1 ²⁰. $\theta(t)$ pode ser descrita como (aproximadamente) a taxa a termo de vencimento t . Mais especificamente,

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0,t)}{\partial t} + b_1 F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2b_1}(1 - e^{-2b_1 t}) \quad (4.27)$$

assumindo que hoje é data 0 e $F(0,t)$ é a taxa a termo para t . O terceiro termo do lado direito da equação pode ser considerado desprezível.

O modelo de Heath, Jarrow e Morton (HJM)

Heath, Jarrow e Morton (1992) desenvolveram um modelo usando uma linha de pensamento bastante distinta do que foi apresentado anteriormente. Nos modelos supracitados, a ideia é a de determinar as taxas de curto prazo para então modelar a curva de juros. Neste modelo, no entanto, a abordagem é a de modelar a curva inteira a partir da estrutura a termo atual disponível de dados do mercado. Sendo assim, o modelo de um fator é definido por

$$dF(t;T) = -\frac{\partial}{\partial T} \sigma(t,T) \left(\int_t^T -\frac{\partial}{\partial T} \sigma(t,s) ds \right) dt - \frac{\partial}{\partial T} \sigma(t,T) dW_t. \quad (4.28)$$

²⁰Isto fica claro se reescrevermos: $(\theta(t) - b_1 r)dt = b_1 \left(\frac{\theta(t)}{b_1} - r \right) dt$.

Uma observação importante deste modelo é que ele não é Markoviano. Significa que ele é *path dependent*; as informações na data de hoje não são suficientes para obter um modelo confiável. Portanto, seria necessário recuperar uma série de dados do passado para calibrar melhor o modelo. Além disso, pode ser observado claramente que o *drift* da SDE recém mostrada contém parâmetros apenas da volatilidade. Portanto, pode ser descrita uma relação entre média e volatilidade tal que

$$m(t, T) = v(t, T) \int_t^T s(t, u) du,$$

sendo $m(t, T)$ e $v(t, T)$, a média e difusão instantâneas, respectivamente.

4.2 Críticas à precificação por Black e Scholes

A teoria desenvolvida desde 1973 para apreçamento de opções que foi demonstrada aqui é a mais utilizada globalmente. Apesar de ter fundamentos sólidos e haver extensões que consigam relaxar as premissas de forma satisfatória, isto é, de forma que elas se adaptem de forma significativa às observações na prática, nos deparamos com algumas correntes de críticos, que podem levantar deficiências do modelo tanto na teoria, com inconsistências técnicas, quanto na prática, através de testes empíricos que demonstram desvios entre o modelo e o mundo real.

Diversas críticas ao modelo puderam ser resolvidas de forma satisfatória através de extensões como as que foram apresentadas na seção anterior. As principais delas são a existência de volatilidade inconstante, de taxa de juros livre de risco variável, de dividendos que podem ser tanto contínuos quanto pontuais no tempo, de custos de transação e de descontinuidades no processo que determina o preço do ativo subjacente. A tecnologia desenvolvida até os dias de hoje encontrou diversas formas de solucionar todos estes problemas e cabe ao gestor de um portfólio decidir qual delas, ou qual combinação delas, é adequada para adaptar o modelo de forma fiel.

As principais críticas em debate na atualidade giram em torno de três pilares. O primeiro questiona a capacidade de poder realizar um hedge perfeito, dado que, no mundo real, tempo é contínuo mas as negociações em pregão acontecem de forma discreta e em quantidades de lotes, ou seja, a quantidade de ativo subjacente não é infinitamente divisível. O segundo gira em torno da distribuição dos retornos das ações, já que está sendo usada distribuição normal ou log-normal nos retornos do ativo-objeto, algo que não foi sempre verificado dessa forma em testes empíricos. Finalmente, o terceiro trata de problemas na liquidez, ou na falta da mesma, ocasionando hiatos entre o preço de compra e de venda, denominado de *bid-offer gap*. Desde logo que, embora sejam três problemas separados, eles são dependentes um do outro. A falta

de liquidez de uma ação-objeto, por exemplo, acarreta em distorções nos preços, levando a problemas em realizar um hedge como desejado idealmente na PDE de Black-Scholes.

A exemplo de Neftci (2000), as premissas de Black-Scholes e as Gregas podem falhar em certos mercados principalmente pelos seguintes motivos:

1. A falta de liquidez em determinado mercado gera fortes diferenças entre a ponta compradora e vendedora, elevando consideravelmente o custo de realizar um *hedge* e, portanto, diminuindo as quantidades de operações desta natureza. Provavelmente, nestes casos, haverá um viés no preço das opções.
2. Às vezes não é possível comprar e vender ativos nas quantidades necessárias por haver negociação em lotes.
3. Às vezes, quantidades necessárias para realização de uma operação de *hedge* podem ser fatias consideráveis de mercado ou até mesmo maiores que o mesmo. Em tal caso, ao vender ou comprar determinado ativo estará se modificando a cotação dos ativos concomitante à compra e venda dos mesmos. Quando a quantidade necessária é maior que o tamanho do mercado, se torna impossível realizar a operação.

Outra crítica do mesmo autor gira em torno da derivação da PDE que originou a fórmula final. De acordo com as premissas expressas nas equações (3.3) e (3.4), as variáveis θ_1 e θ_2 devem ser constantes para poder diferenciar da forma exposta. No entanto, utilizamos para o coeficiente θ_2 o valor de $-\Delta = -\Delta(S, t)$, que evidentemente não é uma constante. Se ditos coeficientes são inseridos *antes* da diferenciação, obtendo um portfólio de forma²¹

$$P_t = V_t - \Delta_t S_t \quad (4.29)$$

e só depois acontece a diferenciação, o resultado difere de (3.4), sendo ele agora

$$dP_t = dV_t - \Delta_t dS_t - d\Delta_t S_t = (\text{Eq. (3.4)}) - d\Delta_t S_t. \quad (4.30)$$

Tal portfólio não se autofinancia²² na maioria dos casos, diferentemente das conclusões anteriores. Utilizando o Lema de Ito para $d\Delta_t$ e igualando a zero, a propriedade autofinanciadora acontecerá se e somente se

$$S_t^2 \Gamma_t (\sigma dW_t + (\mu - r)dt) = 0,$$

²¹É conveniente passar a utilizar a notação Δ_t por não ser mais um termo constante.

²²Define-se que um portfólio se autofinancia quando o mesmo não necessita de entrada ou saída de dinheiro após seu começo, isto é, a compra e venda dos ativos é financiada a partir do patrimônio inicial e dos ganhos obtidos ao longo do tempo. Formalmente significa que $dP_t = \sum_{i=1}^n \theta_{i,t} dA_{i,t}$, onde A representa os ativos do portfólio.

sendo Γ_t a grega definida por $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$. A implicação deste resultado é que haverá certos custos para manter a condição necessária de Black-Scholes. Sob probabilidade neutra de risco é possível assumir a condição recém mencionada. Mas esta expressão é a explicação de por que não é tão simples manter um *hedge* dinâmico perfeito.

Um crítico que teve bastante repercussão após a crise financeira *subprime* de 2008 foi Nassim Taleb. Baseando sua linha teórica a partir da teoria dos fractais de Mandelbrot, a crítica do autor é bastante profunda por acusar uma premissa básica do modelo, qual seja que o desvio padrão é uma medida adequada para mensurar volatilidade em mercados financeiros. Apesar de ser renomado por seus livros destinados ao público em geral, explicando a teoria do "Black Swan", há publicações científicas. Em Goldstein e Taleb (2007) e Haug e Taleb (2009) descreve como o problema das caudas pesadas na distribuição de Gauss e eventos raros de mercados não são levados em consideração no modelo²³. O argumento utilizado por ele pode ser sintetizado como descrito pelo próprio autor em Haug e Taleb (2009):

The Black-Scholes-Merton argument and equation flow a top-down general equilibrium theory, built upon the assumptions of operators working in full knowledge of the probability distribution of future outcomes – in addition to a collection of assumptions that (...) are highly invalid mathematically, the main one being the ability to cut the risks using continuous trading which only works in the very narrowly special case of thin-tailed distributions. But it is not just these flaws that make it inapplicable: option traders do not "buy theories", particularly speculative general equilibrium ones, which they find too risky for them and extremely lacking in standards of reliability. A normative theory is, simply, not good for decision-making under uncertainty (particularly if it is in chronic disagreement with empirical evidence). People may take decisions based on speculative theories, but avoid the fragility of theories in running their risks.

A visão de Taleb é que uma forma muito mais eficiente de precificar opções é utilizando a teoria de ausência de arbitragem, abrindo mão de um modelo concreto²⁴ (DERMAN; TALEB, 2005). Assumir distribuição normal ou log-normal e o desvio padrão como medida de volatilidade seriam medidas inadequadas na observação de retornos de mercado. Tais medidas seriam úteis para medir peso e altura de indivíduos; contudo, em mercados financeiros, eventos raros, chamados de "Black Swans", têm impacto muito maior no retorno esperado de um ativo do que se imagina. O problema gira em torno do fato de que ninguém conhece esse impacto *a priori*, fazendo com que agentes de mercado acabem ignorando *outliers* que reduzem drasticamente o retorno esperado de qualquer ativo.

Tendo em vista tais problemas, a teoria do cálculo estocástico utilizada no âmbito de Black-Merton-Scholes é equivocada por não levar em consideração momentos de ordem maior que

²³Um modelo que incorpore saltos também não é satisfatório na versão do autor.

²⁴Com respeito à ausência de modelos, Taleb costuma fazer referência ao mercado de derivativos na primeira parte do século XX, citando, dentre outros, Keynes e Bachelier.

2.²⁵ Assumir esta propriedade para inúmeros pontos no tempo e quaisquer momentos de ordem superior a 2 seria algo que não acontece no mundo real. Por isso, a alternativa sugerida é a de utilização de fractais. Esta visão parte do princípio de enfatizar a precificação de eventos raros ao invés de assumir os eventos futuros como tendo distribuição conhecida. Um artigo seminar sobre precificação de opções através de fractais é o de Mandelbrot (2001), assumindo uma distribuição tal que

$$P(Z > z) \sim z^{-\alpha} \quad (4.31)$$

onde Z e z são os retornos percentuais do ativo. O fator α é tal que $1 < \alpha < \infty$ mas testes empíricos têm mostrado que 2 é um valor adequado.

4.3 Impactos

Independente de concordar ou não com a metodologia utilizada no modelo de Black-Merton-Scholes, o seu impacto tanto na prática quanto na teoria é irrefutável. Uma análise abrangente feita por Alexander e Marby (1994) que utiliza os jornais mais renomados nos Estados Unidos demonstra que o artigo original de Black e Scholes (1973) é o segundo mais citado na área financeira, utilizando uma amostra bastante ampla que vai até as publicações em 1991. Merton (1973) foi estabelecido como sexto colocado, dentre outros artigos que constam no *ranking*. Além disso os autores Merton, Scholes e Black aparecem como quinto, sétimo e oitavo mais citados nesta área de conhecimento, respectivamente.

Outra análise mais atual feita por Arnold et al. (2003) coloca o artigo original apenas em décimo lugar mas tem uma amostra bastante menor quando comparada com a pesquisa anterior, colocando um impacto maior em revistas de primeira linha. Os autores afirmam porém corretamente que existem muitos artigos que apenas citam o autor como referência, ao invés de criticar ou desenvolver a teoria utilizada pelo artigo anterior, como, por exemplo, artigos econômicos. Sendo assim, o autor subdivide o *ranking* em diversas subáreas. Na categoria que se encontra o artigo original, ele obteve a terceira colocação, demonstrando a importância que o mesmo teve.

Olhando de um ponto de vista prático, os resultados do primeiro modelo que precifica analiticamente opções também são observáveis. De acordo com Scholes (1997, p. 127)

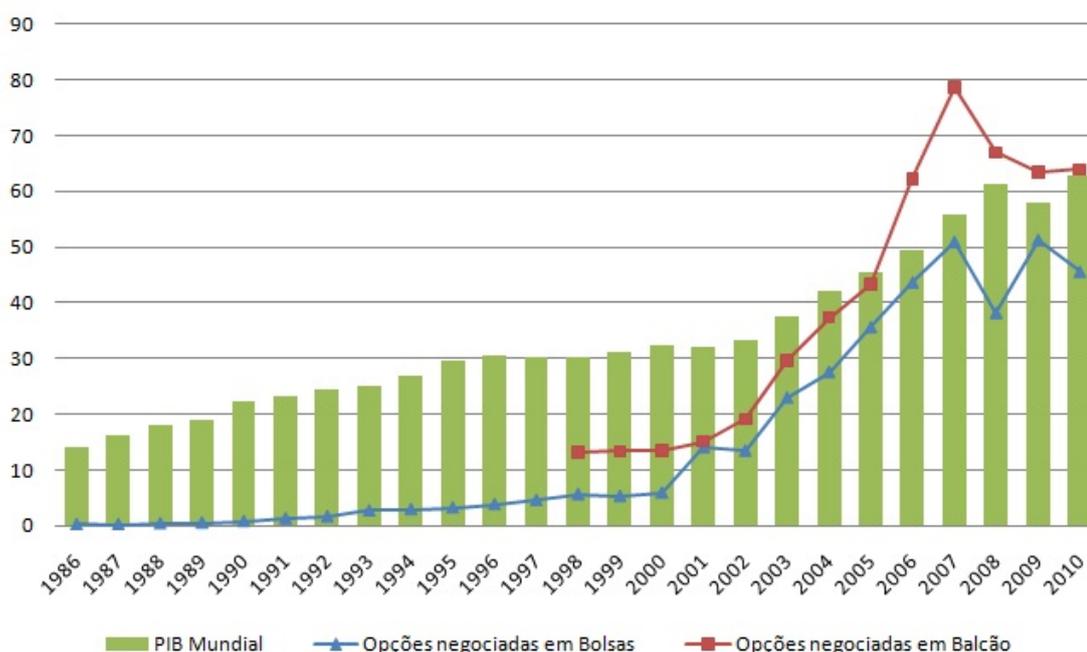
The academic industry has produced myriad innovative research papers following the fundamental insights of Black and Scholes (1973) and Merton (1973). The Chicago Board of Trade

²⁵Como foi visto anteriormente, o Lema de Ito negligencia momentos de ordem superiores que 2 pois estes convergiriam a zero em espaços infinitamente pequenos de tempo

and Chicago Mercantile Exchange initiated the exchange industry by developing financial options and futures contracts on securities; they have spawned the growth of many new derivative exchanges around the world. The first was the Chicago Board of Trade's sponsorship of the Chicago Board Options Exchange in 1973. Moreover, some exchanges such as the Options markets in Stockholm have transported the technology used to trade derivatives to other markets in Europe and Asia.

O surgimento do modelo de forma concomitante ao surgimento da primeira bolsa de derivativos, a CBOE, não é coincidência. Negociações em mercados de balcão²⁶ eram escassas e customizadas, ocasionando altos custos de transação e perda de eficiência. Com os avanços na tecnologia para precificar opções, os agentes exigiram um ambiente que pudesse mitigar riscos de contraparte e onde a liquidez consiga ser aprimorada via padronização dos contratos a serem negociados. Recentemente o volume de opções negociado tanto em bolsas quanto em mercados de balcão organizados contém um *notional*²⁷ que supera o PIB mundial, demonstrando o peso que estes mercados têm.

Figura 4.3: *Notional* negociado em mercados de opções contra PIB mundial (Valores em trilhões de dólares correntes)



Fontes: BIS (2010) para volume de opções e FMI (2011) para o PIB mundial, gráfico gerado pelo autor.

Isto demonstra como o surgimento do modelo pode ser tanto uma causa quanto uma consequência da financeirização das economias. A década de 70 é marcada pelas crises do petróleo,

²⁶ *Over-the-Counter (OTC) markets.*

²⁷ *Notional* é o preço de exercício do contrato multiplicado pela quantidade de contratos.

onde os agentes necessitavam proteção, algo que gerou muita demanda por instrumentos que possam ser utilizados por praticantes para avaliar opções de forma rápida e relativamente simples. A informatização nascente na mesma época contribuiu para que atores de mercados possam enxergar cotações através do modelo em tempo real, concedendo melhores oportunidades para tomada de decisões aos gestores de portfólios.

5 Considerações Finais

O presente trabalho buscou fornecer uma introdução à metodologia para precificar opções, com um foco na evolução do pensamento sobre dito assunto. A abordagem aqui utilizada colocou ênfase em opções de ações, mas podemos encontrar muitos aspectos em comum com a metodologia utilizada para opções de câmbio, de juros, de commodities, de índices e de *swaps*, dentre outros, embora certos ajustes sejam necessários para cada caso.

Tornou-se evidente que é possível chegar à fórmula fechada de precificação através de modelos de arbitragem, ou seja, através dos métodos de equivalência de martingales e de cálculo estocástico; mas o raciocínio é igualmente válido na abordagem neoclássica do CAPM, constituindo, portanto, uma revolução paradigmática na área das Finanças. Consequentemente conclui-se que, na teoria, a fórmula satisfaz as condições necessárias para gerar preços justos e livres de arbitragem para quaisquer tipos de opções. Porém no mundo real nos deparamos com mercados que podem ter baixíssima liquidez, impossibilitando rebalanceamentos contínuos; mercados que têm distribuição de retornos com caudas pesadas, as quais, apesar de ser utilizada a distribuição log-normal, não são consideradas; e mercados em um mundo dinâmico que faz com que a volatilidade da volatilidade seja cada vez maior.

Estes e outros complicadores fazem com que o panorama teórico nesta área de longe não esteja completo. Problemas como a existência de fins de semana e feriados, custos de transação, pregões que não estão abertos 24 horas, mercados muito pequenos, irracionalidade dos agentes, dentre outros, constituem um desafio tanto para acadêmicos quanto para gestores de portfólio e outros interessados no assunto.

Demonstrou-se também brevemente neste trabalho como as opções podem introduzir uma nova forma de pensar outros assuntos nas áreas financeira e econômica. A precificação de projetos e até mesmo de ações através da metodologia das opções reais pode ser encontrada na prática. Também a abordagem da estrutura de capitais provou como uma empresa pode ser enxergada de um ângulo distinto daquele na visão tradicional, onde se considera que o detentor o patrimônio líquido é o beneficiário final de uma firma.

Uma concepção bastante espalhada na sociedade é a de que o mercado de opções é muito

arriscado e que seria um "cassino". Se bem é verdade que é um mercado alavancado¹ e que exige margens de garantia, algo que acarretou problemas na prática para os próprios fundadores da fórmula no *LTCM*, é comum esquecer que derivativos não servem apenas para alavancar ganhos, mas também para amenizar perdas. Os mercados financeiros necessitam dos três agentes - especuladores, arbitradores, e *hedgers* - para seu funcionamento correto. O mito dos riscos inerentes aos derivativos decorrem de fatos isolados, uma observação já notada por Merton (1998, p. 340):

One conjecture attributes this uneasiness [among managers, regulators, politicians, the press and the public over these new derivative securities] to the frequently cited instances of individual costly events that are alleged to be associated with derivatives, such as the failure of Barings Bank, Proctor and Gamble's losses on complex interest rate contracts, the financial distress of Orange County, and so forth. Perhaps. But (...) derivatives are ubiquitous in the financial world and thus, they are likely to be present in any financial circumstance, whether or not their use has anything causal to do with the resulting financial outcomes. However, even if all these allegations were valid, the sheer fact that we are able to associate individual names with these occurrences instead of more numbers ('XYZ company' instead of '475-500 thrifts' as the relevant descriptor) would suggest that these are relatively isolated events - unfortunate pathologies rather than indicators of systemic flaws.

A mesma situação é válida para o mercado financeiro brasileiro, onde são encontrados casos isolados como o da Perdigão e da Aracruz. Olhando de um ponto de vista agregado nenhuma das situações mencionadas constitui uma verdadeira perda por si só. Economicamente as perdas de um agente ocasionam os ganhos de outro, resultando no conhecido jogo de soma-zero. Da forma que a literatura econômica e financeira cita, as verdadeiras perdas são encontradas nos pesos mortos, perdas estas que acontecem quando há incidência de impostos e outros custos de transação.

Como resultante final, conclui-se que o crescimento explosivo dos mercados de opções mostra a grande procura para atender necessidades complexas de firmas e de investidores individuais, tanto nos mercados de bolsa quanto nos de balcão. A crescente demanda por ditos papéis assegurará que no futuro haja a incessante busca pelo método ideal para precificar opções.

¹A variação percentual do prêmio de uma opção é, de forma geral, muito maior que o retorno percentual do ativo subjacente.

Referências

- ALEXANDER, J. C.; MARBY, R. H. Relative significance of journals, authors, and articles cited in financial research. *Journal of Finance*, v. 49, n. 2, p. 697–712, jun 1994.
- ARNOLD, T. et al. Impact: What influences finance research? *Journal of Business*, v. 76, n. 2, p. 343–361, 2003.
- BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, v. 3, n. 17, p. 21–86, 1900. Tradução ao inglês em Cootner (1964).
- BARONE-ADESI, G.; WHALEY, R. E. On the valuation of american put options on dividend-paying stocks. *Advances in Futures and Options Research*, v. 3, p. 1–13, 1988.
- BAXTER, M.; RENNIE, A. *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- BIS. *BIS Statistics*. Dezembro 2010. Acessado em 11.06.2011. Disponível em: <<http://www.bis.org/statistics/index.htm>>.
- BLACK, F. Fact and fantasy in the use of options. *Financial Analysts Journal*, v. 31, p. 36–41, 61–72, jul-ago 1975.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. S. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, p. 637–654, mai-jun 1973.
- BRIGHAM, E. F.; EHRHARDT, M. C. *Administração Financeira: Teoria e Prática*. 1. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2008. Tradução da décima edição.
- BROWDIE, M.; DEMPLE, J. American option valuation: New bounds, approximations and a comparison of existing methods. *Review of Financial Studies*, v. 9, n. 4, p. 1211–1250, 1996.
- COOTNER, P. *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge: MIT Press, 1964.
- COURTAULT, J.-M. et al. Louis Bachelier on the centenary of Theorie de la Speculation. *Mathematical Finance*, v. 10, n. 3, p. 341–353, 2000.
- COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, v. 7, p. 229–263, 1979.
- DAVIS, M. H. A. *Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance*. [S.l.]: Princeton University Press, 2006.
- DERMAN, E.; TALEB, N. N. The illusions of dynamic replication. *Quantitative Finance*, v. 5, n. 4, p. 323–326, aug 2005.

- EINSTEIN, A. Zur Theorie der brownischen Bewegung. *Annalen der Physik*, v. 19, n. 1, p. 371–381, 1906.
- ETHIER, S. N. *The Doctrine of Chances*: Probabilistic aspects of gambling. [S.l.]: Springer, 2010.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.
- FMI. *World Economic Outlook Database*. Abril 2011. Acessado em 11.06.2011. Disponível em: <<http://www.imf.org/external/pubs/ft/weo/2011/01/weodata/index.aspx>>.
- GIRSANOV, I. V. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability and its Applications*, v. 5, n. 3, p. 285–301, 1960.
- GOLDSTEIN, D. G.; TALEB, N. N. We don't quite know what we are talking about when we talk about volatility. *Journal of Portfolio Management*, v. 33, n. 4, p. 84–86, 2007.
- HARRISON, J. M.; KREPS, D. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, v. 20, p. 381–408, 1979.
- HARRISON, J. M.; PLISKA, S. R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, v. 11, n. 454, p. 215–260, Jan 1981.
- HAUG, E. G.; TALEB, N. N. *Why We Have Never Used the Black-Scholes-Merton Option Pricing Formula*. Fev 2009. Working Paper Series. Acesso em 05.06.2011. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1012075>>.
- HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. Contingent claim valuation with a random evolution of interest rates. *Econometrica*, v. 60, n. 1, p. 77–105, 1992.
- HULL, J.; WHITE, A. An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility. *Advances in Futures and Options Research*, JAI Press, Greenwich, v. 3, p. 29–61, 1988.
- HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, v. 3, n. 4, p. 573–592, 1990.
- HULL, J. C. *Options, Futures and Other Derivatives*. 7. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2009.
- ITO, K. On stochastic differential equations. *Memoirs of the American Mathematical Society*, v. 4, p. 1–51, 1951.
- JARROW, R. Current advances in the modeling of credit risk. *Derivatives: Tax, Regulation, Finance*, p. 196–202, mai-jun 1998.
- JARROW, R.; RUDD, A. *Option Pricing*. Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1983.
- JARROW, R. A. In honor of the Nobel laureates Robert C. Merton and Myron S. Scholes: A partial differential equation that changed the world. *Journal of Economic Perspectives*, v. 13, n. 4, p. 229–248, Fall 1999.

- JORION, P. Risk management lessons from Long-Term Capital Management. *European Financial Management*, v. 6, n. 3, p. 277–300, 2000.
- KRITZMAN, M. P. *Puzzles of Finance: Six Practical Problems and Their Remarkable Solutions*. [S.l.]: Wiley, 2002.
- ØKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: An introduction with applications*. 5 ed. [S.l.]: Springer, 2000.
- MANDELBROT, B. Scaling in financial prices: I. Tails and dependence. *Quantitative Finance*, v. 1, p. 113–123, 2001.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, p. 77–91, 1952.
- MERTON, R. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, v. 4, p. 141–183, 1973.
- MERTON, R. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, v. 29, n. 2, p. 449–470, mai 1974.
- MERTON, R. *Continuous Time Finance*. Cambridge: Blackwell, 1990.
- MERTON, R. C. Applications of option-pricing theory: Twenty-five years later. *American Economic Review*, v. 88, n. 3, p. 323–349, jun 1998. Nobel Prize Lecture.
- MERTON, R. C.; SIMONS, R. V.; WILKIE, A. D. Influence of mathematical models in finance on practice: Past, present and future. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, v. 347, n. 1684, p. 451–463, jun 1994.
- MIT. *Derivative Sourcebook*. 1998. Acessado em 23.04.2011. Disponível em: <<http://lfe.mit.edu/dsp/tree.html>>.
- NEFTCI, S. N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. 2. ed. New York: Academic Press Advanced Finance, 2000.
- NELSON, S. A. *The A B C of options and arbitrage*. [S.l.]: University of Toronto, 1904.
- OSBORNE, M. F. M. Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, v. 7, p. 145–173, mar-abr 1959.
- PESKIR, G.; SHIRYAEV, A. *Optimal Stopping and Free Boundary Problems*. Berlin: Birkhäuser, 2006.
- POITRAS, G. *Pioneers of Financial Economics: Contributions prior to Irving Fischer*. Northampton: Edward Elgar Publishing, 2006.
- ROLL, R. An analytical formula for unprotected american call options on stocks with known dividends. *Journal of Financial Economics*, v. 5, p. 251–258, 1977.
- SAMUELSON, P. A. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, v. 6, n. 2, p. 13–39, mar-jun 1965a.
- SAMUELSON, P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, v. 6, p. 41–49, 1965b.

- SAMUELSON, P. A.; MERTON, R. C. A complete model of warrant pricing that maximizes utility. *Industrial Management Review*, v. 10, p. 17–46, Winter 1969.
- SCHOLES, M. S. Derivatives in a dynamic environment. *Les Prix Nobel 1997*, Stockholm, p. 127–154, 1997. Nobel Prize Lecture.
- SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425–442, set 1964.
- SHARPE, W. F.; BRITO, N. O. Mercados de capitais eficientes: preços em equilíbrio sob condições de risco. *Revista Brasileira de Mercado de Capitais*, v. 1, n. 2, p. 275–287, 1975.
- SPRENKLE, C. Warrant prices as indications of expectations. *Yale Economic Essays*, v. 1, p. 179–232, 1961.
- STOLL, H. R. The relationship between put and call option prices. *Journal of Finance*, v. 24, n. 5, p. 801–824, 1969.
- TRIGEORGIS, L. A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 26, p. 309–326, 1991.
- WIENER, N. Differential space. *Journal of Mathematical Physics*, v. 2, p. 127–146, 1923.
- WILMOTT, P. *Paul Wilmott on quantitative finance*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.

Apêndice A - Principais modelos de Equações Diferenciais Estocásticas

Nome do modelo	Fórmula	Descrição
SDE de coeficientes constantes e lineares	$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$	É o caso mais simples, onde os coeficientes são invariáveis ao longo do tempo. Sendo h um intervalo de observação discreto, temos que $E_t(\Delta S_t) = \mu h \text{ e } VAR(\Delta S_t) = \sigma^2 h.$
SDE geométrica, desenvolvida em Samuelson (1965a)	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	Neste, caso o “drift” e a difusão não são constantes pois $a(S_t, t) = \mu S_t$ e $b(S_t, t) = \sigma S_t$ através de uma função determinística. Dividindo ambos os lados por S_t , fica claro que $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$, ou seja, que a taxa de variação ou retorno percentual dos ativos possuem média e variância constante. A trajetória dos preços, no entanto, é explosiva. Este é o processo utilizado por Black e Scholes (1973).
<i>Square Root Process</i>	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t$	Similar ao anterior. Porém, testes empíricos demonstraram maior volatilidade do que a observada. A raiz quadrada no termo da variância procura eliminar a trajetória explosiva.
Processo de reversão à média	$dS_t = \lambda(\mu - S_t) dt + \sigma S_t dW_t$	Este modelo é útil quando o preço do ativo tem um preço fixo no longo prazo, mas, no curto prazo, ele desvia desse preço (por exemplo, decorrente de sazonalidades ou para modelos com taxas de juros). O parâmetro $\lambda > 0$ determina a velocidade à qual o ativo volta ao preço de longo prazo. Quanto menor, mais devagar.
Processo de Ornstein-Uhlenbeck	$dS_t = -\lambda S_t dt + \sigma S_t dW_t$	Caso especial do processo anterior, onde $\mu = 0$, portanto pouco útil para modelar ações.