

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**FORMULAÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO
TRANSFORMADA RESULTANTE DA APLICAÇÃO DA GITT EM
PROBLEMAS DIFUSIVOS-ADVECTIVOS**

por

Sérgio Wortmann

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2003

**FORMULAÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO
TRANSFORMADA RESULTANTE DA APLICAÇÃO DA GITT EM
PROBLEMAS DIFUSIVOS-ADVECTIVOS**

por

Sérgio Wortmann

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Mena Barreto de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dr. Paulo Schneider (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral do Santos (UFPB/PB)

Prof. Dr. Mikail D. Mikhailov(UFRJ/RJ)

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 29 de Janeiro de 2003

Aos meus filhos Peu e Tata

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Marco Tullio M. B. de Vilhena pela amizade e conhecimento tantas vezes manifestados durante estes anos.

Aos Professors Jorge Zabadal e Cynthia Feijó Segatto pela generosidade e pelas sugestões que foram decisivas para finalização deste trabalho.

Aos meus pais Günther e Neyla e minha irmã Suzi que desde os primeiros tempos despertaram em mim o gosto pelo saber.

A minha esposa Ana Rejane pela compreensão e companherismo.

Ao CNPQ pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.

24 de Fevereiro de 2003

RESUMO

FORMULAÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO TRANSFORMADA RESULTANTE DA APLICAÇÃO DA GITT EM PROBLEMAS DIFUSIVOS-ADVECTIVOS

Neste trabalho se propõe um avanço para a Técnica Transformada Integral Generalizada, **GITT**. O problema transformado, usualmente resolvido por subrotinas numéricas, é aqui abordado analiticamente fazendo-se uso da Transformada de Laplace. Para exemplificar o uso associado destas duas transformadas integrais, resolvem-se dois problemas. Um de concentração de poluentes na atmosfera e outro de convecção forçada com escoamento laminar, entre placas planas paralelas, com desenvolvimento simultâneo dos perfis térmico e hidrodinâmico. O primeiro é difusivo, transiente e com coeficientes variáveis. Sua solução é obtida de forma totalmente analítica. Além de mostrar o uso da técnica, este exemplo apesar de ter coeficientes variáveis, é resolvido com o auxílio de um problema de autovalores associado com coeficientes constantes. No segundo, obtém-se a solução da Equação da Energia analiticamente. Já a Equação da Conservação do Momentum é linearizada e resolvida de forma iterativa. A solução de cada iteração é obtida analiticamente.

Autor: Sérgio Wortmann

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Mena Barreto de Vilhena

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2003.

ABSTRACT

GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM WITH LAPLACE TRANSFORM IN SOLUTION OF APPLIED PROBLEMS

In this work the Generalized Integral Transform Technic, **GITT**, is used in a nonconventional way. The transformed problem, usually solved by numerical subroutines, is here analytically approached by Laplace Transform. To show the associated use of this two integrals transforms, are presented two problems. One is a vertical dispersion of pollutants in a stable atmospheric boundary layer and the other is a laminar inside of parallel plates simultaneously developed of thermal and hydrodynamic fields flow. The first one has variable coefficients and is a diffusive transient problem. Its solution is found in analytical form. In addition to show the technic's use, this example in despite of its variable coefficients, is solved by the use of an auxiliary eigenvalue problem with constants coefficients. In the second one, the solution of Energy Equation is obtained analytically. On the other hand, the Momentum Equation is linearized and solved in iterative form. The solution of each iteration is find analytically.

Author: Sérgio Wortmann

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Mena Barreto de Vilhena

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2003.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	O MÉTODO UTILIZADO	6
2.1	A GITT	6
2.2	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EDO TRANSFORMADO	10
2.2.1	Solução Analítica de Sistemas EDO Lineares - Coeficientes Constantes	12
2.2.2	Solução Analítica de Sistemas EDO Lineares - Coeficientes Variáveis..	16
2.2.3	Solução de Sistemas EDO não Lineares - Método Iterativo	20
2.3	DISPOSITIVOS ADAPTATIVOS	21
2.3.1	Procedimento Adaptativo para os Autovalores	22
2.3.2	Procedimento Adaptativo para o Tamanho do Incremento na Variável não Transformada.	23
2.4	FÓRMULA DA INVERSA MODIFICADA.	24
3	PROBLEMA DIFUSIVO	29
3.1	O MODELO MATEMÁTICO	29
3.2	MÉTODO DE SOLUÇÃO	31
3.2.1	GITT	31
3.2.2	Solução do Sistema EDO Transformado	36
3.3	RESULTADOS	36
4	PROBLEMA DIFUSIVO-ADVECTIVO	42
4.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	42
4.2	CAMPO DE VELOCIDADE	45
4.2.1	GITT Aplicada às Equações da Velocidade	47
4.2.2	Solução do Sistema EDO Transformado	51

4.3	CAMPO DA TEMPERATURA	53
4.3.1	GITT Aplicada à Equação da Temperatura	53
4.3.2	Solução do Sistema EDO Transformado	57
4.4	RESULTADOS	58
5	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70
	APÊNDICES	77
I	Determinação de $V(X, Y)$	77
II	Determinação de $\frac{dP^*}{dX}$	79
III	Transformação Integral da Equação do Momentum	84
IV	Determinação da Condição de Entrada para o Sistema EDO Transformado do Problema da Velocidade	88
V	Transformação Integral da Equação da Energia	90
VI	Determinação da Condição de Entrada para o Sistema EDO Transformado do Problema da Temperatura	92

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Arábicos

A :	operador diferencial genérico.
$A(y(t))$:	matriz de coeficientes do problema transformado não linear.
B :	operador diferencial genérico.
$B(y(t))$:	matriz de coeficientes do problema transformado não linear.
$C(t)$:	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes variáveis.
C_m :	matriz constante com os valores médios de $C(t)$.
$D(t)$:	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes variáveis.
D_{av} :	matriz diagonal de autovalores da matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes constantes.
D_m :	matriz constante com os valores médios de $D(t)$.
E :	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes constantes.
$E_{av}(t)$:	matriz análoga à matriz $E_{av}(t)$ mas usada em problemas transformados com coeficientes variáveis.
$E_{av}(t)$:	matriz definida pela equação 4.29.
F :	matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes constantes.
$K_{zz}(z)$:	coeficiente difusivo da Teoria K.
L :	operador diferencial associado ao problema de Sturm-Liouville.
$N_{\theta,i}(y)$:	quadrado da norma do problema da temperatura do fluido.
N_m :	quadrado da norma $L^{(a,b)}$.
$N_{v,i}(y)$:	quadrado da norma do problema da velocidade do fluido.
P :	pressão dimensional.
P^* :	pressão adimensional.
Pe :	número de Pecklet $Pe = Re Pr$.
Pr :	número de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$.
Re :	número de Reynolds $Re = \frac{u_0 r_w}{\nu}$.
$T(x, y)$:	temperatura dimensional.
$U(X, Y)$:	componente longitudinal da velocidade adimensional.

$U^*(X, Y)$:	componente da velocidade $U(X, Y)$ para a região de entrada hidrodinâmica.
$U_\infty(Y)$:	perfil de velocidades adimensionais para escoamento plenamente desenvolvido.
$V(X, Y)$:	componente transversal da velocidade adimensional.
X :	matriz de autovetores da matriz de coeficientes do problema transformado com coeficientes constantes.
$\bar{c}(z, t)$:	concentração de poluentes do problema difusivo.
$\bar{v}_i(t)$:	variável dependente transformada.
r_w :	distância do centro do escoamento até a placa, dimensional.
$u(x, y)$:	componente longitudinal da velocidade dimensional.
u_0 :	condição de entrada para a velocidade dimensional.
$v(x, t)$:	variável dependente original.
$v(x, y)$:	componente transversal da velocidade dimensional.

1. Caracteres Gregos

Δ :	matriz diagonal de autovalores da matriz do problema transformado da velocidade.
Γ :	matriz de autovetores da matriz do problema transformado da velocidade.
α :	difusividade.
$\beta_i(Y)$:	autovalor do problema auxiliar da temperatura.
$\delta_{i,k}(y)$:	delta de Kronecker.
$\nu_i(z)$:	autovalores do problema auxiliar do problema difusivo.
λ ou λ_m :	autovalor do problema de Sturm-Liouville.
μ :	viscosidade do fluido.
$\mu_i(y)$:	autovalor do problema da velocidade do fluido.
ν :	viscosidade cinemática.
$\phi_i(Y)$:	autovetor do problema auxiliar da temperatura.
ψ ou ψ_m :	autovetor do problema de Sturm-Liouville.
ρ :	densidade do fluido.
$\theta(X, Y)$:	temperatura adimensional.
$\varphi_i(y)$:	autovetor do problema da velocidade do fluido.

$\xi_i(z)$: autovetores do problema auxiliar do problema difusivo.

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Comparação das aproximações da expressão 4.2(d, e) usando a fórmula da inversa com somatório truncado em 99 e 100 termos.	25
2.2	Comparação das aproximações da expressão 4.4 usando a fórmula da inversa com somatório truncado em 9 e 10 termos.	25
2.3	Erro das aproximações da expressão 4.2(d, e) usando as fórmulas da inversa e da inversa modificada com somatórios truncados em 100 termos.	26
2.4	Erro das aproximações da expressão 4.4 usando as fórmulas da inversa e da inversa modificada com somatórios truncados em 10 termos.	27
3.1	Tempo de Processamento em função do número de autovalores para o cálculo da concentração na altura adimensionalizada de 0,2 e tempo 6700s.	38
3.2	Perfil médio de $K_{zz}(z)$ [Degrazia e Moraes, 1992] com dados experimentais de Cabauw e Minnesota.	38
3.3	Perfil vertical da concentração para diferentes tempos, com fonte área a 12,5m e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Minnesota.	39
3.4	Perfil vertical da concentração para diferentes tempos, com fonte área a 12,5m e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Cabauw.	39
3.5	Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a 12,5m e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Minnesota.	40
3.6	Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a 12,5m e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Cabauw.	40
3.7	Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a 300m e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Minnesota.	41
4.1	Definição do problema - convecção permanente	43
4.2	Velocidade do fluido para $Re = 2000$	62

4.3	Velocidade do fluido para $Re = 2$	62
4.4	Temperatura do fluido para $Pr = 0,72$	63
4.5	Temperatura do fluido para $Pr = 10$	63
4.6	Temperatura de mistura do fluido para $Pr = 0.72$	64
4.7	Temperatura de mistura do fluido para $Pr = 10$	64
4.8	Tamanho do passo ao longo de X	65
4.9	Número de iterações da convergência da linearização.	65
4.10	Quantidade de autovalores para velocidade do fluido.	66
4.11	Quantidade de autovalores para temperatura do fluido.	66

ÍNDICE DE TABELAS

2.1	Erro das aproximações, usando as equações 2.8 e 2.61, para as funções representadas pelas equações 4.2(d, e) e 4.4.	27
3.1	Concentração em função do tempo e do número de autovalores (AV) e altura adimensionalizada ($Z = \frac{z}{h}$) de 0, 2.	37
3.2	Concentração em função do número de autovalores(AV) para várias alturas adimensionalizadas com a altura da camada limite e um tempo de 6700s.	37
4.1	Resultados para a velocidade do fluido no centro do canal obtido com o presente procedimento, com solução totalmente numérica [Shah e London, 1978] e usando a GITT [Cotta, 1993].	58
4.2	Comparação da temperatura de mistura obtida com a referência [Cotta, 1993].	59
4.3	Análise da convergência para a velocidade central do fluido.	60
4.4	Análise da convergência para a temperatura central do fluido.	61

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A miniaturização de artefatos industrializados, a crescente demanda por melhores eficiências térmicas, a refrigeração de componentes eletrônicos, os projetos de veículos espaciais e de seus propulsores, entre outros, têm motivado grande número de trabalhos referentes a problemas de Transferência de Calor e Massa. Nas últimas décadas, foram obtidos importantes avanços nestas áreas graças, principalmente, a abordagens numéricas. Mais recentemente, métodos analíticos ou híbridos analítico-numéricos vêm sendo usados com frequência cada vez maior. Dentre os híbridos, um dos mais importantes é a Técnica Transformada Integral Generalizada (Generalized Integral Transform Technique, **GITT**) [Cotta, 1993].

Para a solução de problemas diferenciais parciais, esta técnica de transformação integral combina uma expansão em série com uma integração. Na expansão, é usada uma base trigonométrica determinada com o auxílio de um problema auxiliar. A integração é feita em todo o intervalo da variável transformada fazendo proveito da propriedade de ortogonalidade da base usada na expansão. Este procedimento resulta em um problema transformado que, uma vez solucionado, é facilmente invertido para a obtenção do resultado da equação original.

A característica analítico-numérica desta técnica vem do fato de que o problema transformado é resolvido numericamente. Isso se deve a limitações particulares da própria transformação integral. Nem sempre se pode transformar todas as variáveis de um determinado domínio. O detalhamento destas impossibilidades não é o objetivo desta introdução. Assim, equações diferenciais parciais (**EDP**), transformadas pela **GITT**, resultam em sistemas de equações diferenciais ordinárias (**EDO**). A variável independente destes sistemas **EDO** é justamente aquela que não é transformável pela **GITT**.

Se um determinado problema possuir mais de uma variável que não pode ser transformada pela **GITT**, o sistema transformado não é ordinário. Casos assim não são comuns. Os sistemas transformados parciais seriam praticamente tão difíceis de se resolver quanto a equação original.

É vasta a literatura a respeito de **GITT**. Em todos os trabalhos consultados pelo autor (dos quais pode-se citar algumas [Cheroto et al., 1999], [Figueira da Silva et al., 1999], [Pimentel et al., 1999],[Machado e Cotta, 1999], [Guerrero e Cotta, 1996], [Cotta, 1994a], [Cotta, 1994b], [Guerrero e Cotta, 1992], [Machado e Cotta, 1994], [Cotta et al., 1992], [Gerrero e Cotta, 1995], [Mikhailov e Cotta, 1994], [dos Santos,], [Wortmann, 1995], etc) o sistema **EDO** transformado é resolvido com o auxílio de pacotes de subrotinas numéricas. Como regra geral, pode-se resumir a abordagem usada nas referências citadas acima nos seguintes passos: 1) Transformação integral das equações de governo do problema estudado. 2) Solução numérica do sistema de equações resultante da transformação integral. 3) Inversão da transformação integral para a reconstituição dos potenciais originais.

Entretanto, a transformada de Laplace associada à diagonalização de matrizes vem sendo aplicada com sucesso na solução analítica de sistemas **EDO**. São muitos os trabalhos publicados a este respeito, dentre os quais podem ser citados os que tratam das aproximações S_N da Equação do Transporte ($\mathcal{L}TS_N$) (referências [Barichello e Vilhena, 1993], [Brancher et al., 1998], [Brancher et al., 1999], [Cardona e Vilhena, 1994], [Cardona e Vilhena, 1997], [Gonçalves et al., 2000], [Segatto et al., 1999b], [Segatto e Vilhena, 1999], [Segatto et al., 1999a], [Zabadal et al., 1995], [Barichello, 1992], [Gonçalves, 1999], [Oliveira, 1993], etc) bem como em suas variações: $\mathcal{L}TP_N$, $\mathcal{L}TW_N$, $\mathcal{L}TCh_N$, $\mathcal{L}TA_N$ e $\mathcal{L}TLD_N$. A generalização deste método é resumida nas seguintes etapas: 1) A transformação de Laplace é aplicada no sistema **EDO** resultando em um sistema algébrico. 2) A matriz de coeficientes do sistema transformado é decomposta nos seus autovalores e autovetores. 3) Esta matriz, uma vez fatorada, é invertida para se obter a solução do sistema algébrico. A inversão é obtida analiticamente e sem custo computacional por se tratar de matriz diagonalizada. 4) A transformada de Laplace é também e a solução analítica do sistema **EDO** é finalmente encontrada.

O que está exposto sugere que alguns problemas regidos por **EDP** podem ser resolvidos por uma nova técnica totalmente analítica. Neste caso deve-se substituir a etapa

numérica da **GITT** pelo método usado na Teoria do Transporte resumido acima. Para isso ser possível, como se sugere aqui, entre outras limitações ao problema estudado, deve ser possível construir um problema de Sturm-Liouville associado em cuja solução se fará uso da Transformada de Laplace. A Equação do Calor transiente [Wortmann, 1995], a Equação da Energia e a Equação da Conservação das Espécies Químicas são exemplos de problemas cujas soluções podem ser obtidas desta forma. Nos exemplos citados, as formulações têm operadores lineares com coeficientes constantes ou variáveis.

Equações não lineares como as de *Navier-Stokes* também podem ser resolvidas com o auxílio desta técnica. A principal diferença em relação aos casos lineares é que a não linearidade da **EDP** original gera um sistema **EDO** também não linear quando da aplicação da **GITT**. A solução deste sistema pode ser obtida iterativamente. Os principais passos, neste caso, são resumidos como: 1) Procede-se a Transformação Integral Generalizada normalmente até a obtenção do sistema **EDO** (neste caso com operadores diferenciais não lineares). 2) Lineariza-se o sistema **EDO** admitindo-se valores para os coeficientes não lineares. 3) Resolve-se o sistema **EDO** linearizado utilizando-se a técnica da transformada de Laplace e Diagonalização conforme descrito acima. 4) Com a solução obtida no passo dois recalculam-se os coeficientes não lineares para uma nova linearização. 5) Repete-se os passos dois e três até que a solução encontrada seja igual ao valor admitido no cálculo dos coeficientes. 6) Uma vez solucionado o sistema **EDO** não linear, a **GITT** pode ser invertida como nos casos de problemas lineares.

A principal motivação deste trabalho reside na possibilidade de associar o uso de duas poderosas ferramentas analíticas para a solução de problemas aplicados: **GITT** e \mathcal{LTS}_N . A primeira consagradamente utilizada em Transferência de Calor e Massa e a segunda na Teoria do Transporte. No caso de equações lineares, o método aqui proposto permite a obtenção de soluções totalmente analíticas de problemas como o da temperatura de um fluido em convecção forçada ou concentração de poluentes na atmosfera. Em problemas não lineares como os de escoamentos governados pelas equações de *Navier-Stokes*, o método avança significativamente no tratamento analítico, quando comparado ao uso típico da **GITT**. Pode-se dizer que na aplicação não linear, é obtida uma solução analítica a menos do processo iterativo de linearização.

A literatura costuma apontar como principais características no uso da **GITT** o

menor custo computacional e a boa acuidade dos resultados quando comparada aos métodos puramente numéricos. Isso se deve, principalmente, a maior manipulação analítica do problema e a não necessidade de discretização do domínio [Cotta, 1993]. Estes dois fatores contribuem para diminuir o erro numérico acumulado. Como aqui se avança analiticamente na obtenção da solução do problema, na mesma medida em que se diminui o tratamento numérico, é de se esperar que as conhecidas vantagens desta técnica se tornem ainda mais evidentes.

Para exemplificar o uso associado destas duas transformadas integrais, resolvem-se dois problemas. Um de concentração de poluentes na atmosfera e outro de convecção forçada com escoamento laminar, entre placas planas paralelas, com desenvolvimento simultâneo dos perfis térmico e hidrodinâmico. O primeiro é difusivo, transiente e com coeficientes variáveis. Sua solução é obtida de forma totalmente analítica. Além de mostrar o uso da técnica, este exemplo, apesar de ter coeficientes variáveis, é resolvido com o auxílio de um problema de autovalores associados com coeficientes constantes. O segundo, tem equações lineares e não lineares. A Equação da Energia tem solução analítica. A Equação da Conservação do Momentum é linearizada e resolvida iterativamente. A solução de cada iteração é obtida analiticamente também.

No capítulo 2 é descrita toda a teoria dos métodos utilizados. É apresentada uma breve revisão da **GITT** e a solução do problema transformado com o auxílio da transformada de Laplace para três situações: sistema **EDO**, com coeficientes constantes, coeficientes variáveis e não lineares. Em seguida, são apresentados dois sistemas adaptativos para melhorar da performance do código computacional. Um para a quantidade de autovalores usados nas fórmulas das transformações inversas da **GITT** e outro para a otimização dos intervalos da coordenada não transformada, para os quais se obtém os perfis de velocidade. Este último, importante para o processo de linearização utilizado. O capítulo termina com uma modificação para a fórmula da inversa da **GITT** que permite uma melhora considerável na precisão dos resultados.

O capítulo 3 apresenta o primeiro exemplo do uso da técnica deste trabalho: a solução de um problema difusivo transiente unidimensional de concentração de poluentes na atmosfera. Neste item, houve uma preocupação didática. Procurou-se manter apenas procedimentos extritamente necessários à obtenção da solução, de forma que ela seja alcançada

da maneira mais direta possível. Além disso, é demonstrado a obtenção de um problema de autovalor associado com coeficientes constantes sendo que o problema original apresenta um operador laplaciano de coeficientes variáveis.

Outro exemplo de aplicação dos procedimentos propostos aqui, pode ser visto no capítulo 4. Trata-se da solução de um problema de convecção forçada entre placas planas paralelas em regime permanente. São determinados os perfis de velocidade e temperatura na região de entrada térmica e hidrodinâmica. Este caso mostra o uso da técnica para equações não lineares, como no caso da equação do Momentum e de coeficientes variáveis, como a equação da Energia.

Os resultados são comparados com referências de *benchmark* para validação do método e do código computacional. São ainda apresentados estudos de tempos de processamento e avaliação numérica da convergência.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO UTILIZADO

2.1 A GITT

A seguir serão mostrados, resumidamente, os passos básicos para obtenção da solução de um problema unidimensional dependente do tempo pela técnica da **GITT**. Para problemas multidimensionais, o procedimento é análogo. A análise será restrita à geometria cartesiana.

Seja a equação

$$Av(x, t) = S, \quad \text{em} \quad a < x < b \quad \text{e} \quad t > 0, \quad (2.1)$$

sujeita às condições de contorno homogêneas,

$$a_1 \frac{dv(a, t)}{dx} + a_2 v(a, t) = 0, \quad (2.1a)$$

$$b_1 \frac{dv(b, t)}{dx} + b_2 v(b, t) = 0, \quad (2.1b)$$

onde A é o operador diferencial parcial associado a problema unidimensional dependente do tempo, S é o termo fonte e as a_1 , a_2 , b_1 e b_2 constantes dependentes das propriedades físicas.

A primeira providência é expandir a variável $v(x, t)$ em uma base adequada. Para se determinar esta base, o operador A é reescrito na seguinte forma

$$Av(x, t) = Bv(x, t) + Lv(x, t), \quad (2.2)$$

onde L é um operador associado ao problema de Sturm-Liouville e B é o operador associado aos termos restantes. Assim, L tem a forma

$$L\psi(\lambda, x) \equiv \nabla \cdot [p(x)\nabla \psi(\lambda, x)] + q(x) \psi(\lambda, x). \quad (2.3)$$

As funções $p(x)$, $q(x)$, e $p(x)$ devem ser reais e contínuas, e ainda $p(x) > 0$ em todo o intervalo (a, b) , definido nos problemas representados pelas equações 2.1 e 2.4

$$L\psi(\lambda, x) + \lambda^2 \psi(\lambda, x) = 0 \quad em \ a < x < b, \quad (2.4)$$

$$a_1 \frac{\partial \psi(\lambda, a)}{\partial x} + a_2 \psi(\lambda, a) = 0 \quad e \quad (2.4a)$$

$$b_1 \frac{\partial \psi(\lambda, b)}{\partial x} + b_2 \psi(\lambda, b) = 0. \quad (2.4b)$$

O problema 2.4 é chamado de Problema de Sturm-Liouville e é a forma geral dos chamados problemas auxiliares, na teoria da **GITT**. As constantes a_1 , a_2 , b_1 e b_2 devem ser as mesmas do problema original 2.1. A equação 2.4 pode ser escrita para um λ_m qualquer, uma vez que o parâmetro λ é independente das constantes a_1 , a_2 , b_1 e b_2 .

$$L\psi_m(x) + \lambda_m^2 \psi_m(x) = 0 \quad (2.5)$$

onde: $\psi_m(x) \equiv \psi(\lambda_m, x)$. As funções $\psi_m(x)$ e os valores λ_m são conhecidos, respectivamente, como as autofunções e autovalores do operador L . Elas formam uma base para o espaço onde o operador L está contido, cuja ortogonalidade é definida da seguinte forma [Özisik, 1980]

$$\frac{1}{N_m^{\frac{1}{2}} N_n^{\frac{1}{2}}} \int_v \psi_m(x) \psi_n(x) dv = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Onde N_m é o quadrado da norma $L^2(a, b)$ expressa por

$$N_m = \int_v \psi_m^2(x) dv. \quad (2.7)$$

Esta base de autofunções (também conhecidas como autovetores) será usada para expandir a variável $v(x, t)$ da equação 2.1 na seguinte forma

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.8)$$

Seria pertinente perguntar: Como uma base definida a partir dos autovetores e autovalores do operador L pode ser adequada para expandir a variável dependente do operador A ? Isto implicaria em que esta base também deveria servir ao operador B . Ora, os operadores L e B são parcelas do operador A (eq 2.2). Logo os operadores A , B e L pertencem ao mesmo espaço operacional. Portanto toda base de L , também o é para A e B . Caso contrário a equação 2.1 seria incoerente.

Uma vez determinado o problema de autovalores associado ao problema original e expandida a sua variável dependente, deve-se aplicar na equação 2.1 o seguinte operador

$$\frac{1}{N_i^{\frac{1}{2}}} \int_v \psi_i(x) dv, \quad (2.9)$$

que é a transformação integral propriamente dita. Executadas todas as integrações, o resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias, **EDO**, cuja variável dependente é $\overline{v_i(t)}$. A obtenção desta variável e dos autovetores $\psi_i(x)$ é feita solucionando-se este sistema de equações e o problema de autovalores associado, respectivamente. Conhecendo-se estas duas grandezas, o somatório da equação 2.8 pode ser truncado em um número de termos suficientemente grande para a determinação do potencial original $v(x, t)$.

Cada termo do somatório da equação 2.8 corresponde a uma equação no sistema de equações transformado. Por isso, sua ordem de truncamento é muito importante. Se ela for muito alta, o custo computacional da solução do problema é sensivelmente comprometido. Uma maior quantidade de autovalores também dificulta a convergência do algoritmo iterativo. Por outro lado, se esta ordem for muito baixa, a precisão dos resultados ficará pre-

judicada. Oportunamente um controle adaptativo para o número de autovalores usados na solução será discutido [Machado, 1992]. Com isso pode-se determinar automaticamente um número de autovalores grande o suficiente para garantir a precisão requerida e que implique no menor custo computacional possível.

Observação: Não necessariamente as equações resultantes da transformação integral são diferenciais e ordinárias. Elas tanto podem ser algébricas como diferenciais parciais. No primeiro caso, $\overline{v_i(t)}$ deveria ser $\overline{v_i(t)} \equiv C_i$, onde os valores C_i são constantes. No segundo a variável independente t deveria ser $t \equiv \{a, b, \dots\}$. Estas duas particularidades estão fora do objetivo deste trabalho. Uma pela sua simplicidade e a outra pela complexidade, uma vez que, aqui, se propõe uma abordagem analítica para a solução do sistema de equações transformado.

Por uma questão didática, a seguir serão resumidos os principais passos para se obter a solução de uma equação pela **GITT**:

- a) Determina-se o problema auxiliar identificando-se o operador L na equação que se quer resolver. Na equação 2.3 este operador está representado na sua forma mais completa. Entretanto, algumas de suas parcelas podem ser nulas dependendo do problema a ser resolvido. Porém, deve-se ter em mente que:
 - a.1) A função $p(x)$ não pode ser nula, ainda que seja uma função identidade.
 - a.2) Deve-se procurar levar para o problema auxiliar o máximo de informações do problema original. Em última análise, quanto mais informação se consegue carregar para a base de autovalores, menor será o número de termos necessários para o truncamento da equação 2.8. A base carregará mais informação na medida em que menos termos do operador L forem nulos.

As condições de contorno aplicadas às variáveis dependentes do problema auxiliar devem ser as mesmas que aquelas aplicadas às variáveis dependentes do problema principal. Obs: caso o problema principal não tenha condições de contorno homogêneas deve-se fazer o uso de filtros.

- b) Resolve-se o o problema auxiliar.

- c) Usa-se o operador definido na equação 2.9 para transformar a equação original resultando em um sistema de equações transformado.
- d) Resolve-se o sistema de equações transformado.
- e) Trunca-se a equação 2.8, também conhecida na literatura como Fórmula da Inversa da **GITT**, em um valor suficientemente grande de termos para a obtenção da solução final do problema.

Para finalizar esta seção, serão feitas algumas observações sobre quais os problemas que podem ser solucionados pela **GITT**. Existem duas condições básicas:

- a) O operador diferencial da equação que se quer resolver tem que ter um termo laplaciano. Isto equivale a dizer que a função $p(x)$ da equação 2.3 é não nula.
- b) As variáveis que se quer transformar têm que ter dimensão finita, ou seja, têm que estar contidas dentro do intervalo $a < x < b$ citado na equação 2.4. Esta limitação pode ser contornada em, alguns casos, com a utilização de uma formulação parabólica. Este artifício é usado em escoamentos viscosos, cuja coordenada axial tem dimensão semi-finita. Nestes casos estima-se um valor de b grande o suficiente para se admitir que o comportamento da solução seja aproximadamente o mesmo que para x no infinito.

2.2 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EDO TRANSFORMADO

Nesta seção é que reside a principal novidade deste trabalho. Nas aplicações típicas da **GITT**, a solução do sistema **EDO** transformado é obtida numericamente. O que se pretende aqui é que ela seja encontrada analiticamente ou ainda, no caso de sistemas de equações transformados não lineares, de forma semi-analítica. Para alcançar este objetivo, é apresentada a idéia do uso da Transformada de Laplace juntamente com a diagonalização.

O que se pretende é mostrar um algoritmo capaz de resolver um sistema de equações do tipo

$$A(y(t)).y'(t) + B(y(t)).y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.10)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = f(x). \quad (2.10a)$$

Onde $A(y(t))$ e $B(y(t))$ são matrizes, $y(t)$ vetor de incógnitas e $f(x)$ a condição inicial para $t = 0$.

Sistemas de equações deste tipo são muito comuns na literatura aberta sobre a **GITT**. São os chamados problemas transformados e resultam da transformação integral propriamente dita. Por questão de organização, aqui eles serão separados em três grupos:

- a) não lineares, como o mostrado na equação 2.10;
- b) lineares de coeficientes variáveis, ou seja, quando

$$A(y(t)) \equiv C(t) \quad e \quad B(y(t)) \equiv D(t); \quad (2.11)$$

onde $C(t)$ e $D(t)$ são funções conhecidas;

- c) e, por último, ainda podem ser lineares com coeficientes em que

$$A(y(t)) \equiv E \quad e \quad B(y(t)) \equiv F, \quad (2.12)$$

sendo E e F , constantes.

Estas características são inerentes ao tipo de equação que esteja sendo transformada. Isto é, problemas originais não lineares carregam suas não linearidades para os seus respectivos problemas transformados. A transformação de problemas com coeficientes variáveis pode gerar sistemas transformados também com coeficientes variáveis. Se a(s) variável(eis) independente(s) dos coeficientes variáveis for(em) aquela(s) em que a **GITT** foi aplicada, o problema transformado terá coeficientes constantes. Este é o caso do exemplo estudado no capítulo 3. Se não for(em) transformada(s) pela **GITT** (a variável t na equação 2.1, por exemplo), o sistema **EDO** resultante é de coeficientes variáveis.

Problemas cuja solução pode ser obtida analiticamente são aqueles formados por sistemas de **EDO** lineares. Neste trabalho, eles são resolvidos com o uso da Transformada

de Laplace, e diagonalização conforme pode ser visto nas seções 2.2.1 e 2.2.2. Em se tratando de problemas transformados pela **GITT**, eles podem ocorrer em duas situações:

- a) Transformação de problemas lineares.
- b) Linearização de sistemas **EDO** transformados não lineares que exigem métodos híbridos de solução.

O primeiro item acima pode ser exemplificado com a equação difusiva resolvida no capítulo 3 ou mesmo a Equação da Energia do capítulo 4. No segundo, o problema **EDO** transformado resultante da aplicação da **GITT** nas equações de Navier-Stokes do capítulo 4.

Os sistemas não lineares não têm solução analítica. São abordados aqui por um algoritmo iterativo (seção 2.2.3), onde em cada iteração resolve-se um sistema linear de coeficientes constantes. Portanto, cada passo do algoritmo iterativo mostrado no item 2.2.3 é resolvido analiticamente fazendo-se uso do exposto em 2.2.1.

Na seção 2.2.2 será usado um artifício para facilitar o uso da Transformada de Laplace e principalmente a obtenção da sua inversa. Este procedimento tornará o problema não homogêneo. Assim, ainda que a equação geral 2.10 seja homogênea, nesta seção poderá ser visto como se obter a solução de um sistema de **EDO** com fonte.

2.2.1 Solução Analítica de Sistemas EDO Lineares - Coeficientes Constantes

O objetivo deste tópico é mostrar o uso da Transformada de Laplace juntamente com a diagonalização para solução de sistemas de equações. Esta é a mesma ferramenta matemática amplamente utilizada na Teoria do Transporte, nas aplicações conhecidas na literatura como \mathcal{LTS}_N e suas variações.

Dado o seguinte problema escrito em notação matricial

$$E.y'(t) + F.y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.13)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = f(x). \quad (2.52a)$$

Todos os seus termos já foram comentados no início da seção 2.2. Primeiramente, faz-se

$$y'(t) + G.y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.14)$$

$$y(0) = f(x). \quad (2.14a)$$

em que $G \equiv E^{-1}.F$. Ao aplicar-se a Transformada de Laplace, obtém-se

$$s \overline{y(s)} - y(0) + G.\overline{y(s)} = 0. \quad (2.15)$$

Ou

$$s \overline{y(s)} + G.\overline{y(s)} = y(0). \quad (2.16)$$

A barra superior indica potencial transformado e s é a variável independente transformada. O passo seguinte é decompor a matriz G em seus autovetores e autovalores da seguinte forma

$$G = X.D_{av}.X^{-1}, \quad (2.17)$$

onde X é a matriz de autovetores e D_{av} a matriz diagonal de autovalores de G . Este fatoramento pode ser aplicado toda vez que os autovalores da matriz C sejam distintos. Ainda que se tenha certeza que, para os casos aqui estudados eles o são, é conveniente que o código numérico verifique a equação 2.17. Este controle é muito útil na depuração de erros de programação ou mesmo na identificação de possíveis erros nos cálculos.

Aplica-se a equação 2.17 em 2.16

$$s \overline{y(s)} + X.D_{av}.X^{-1}.\overline{y(s)} = y(0), \quad (2.18)$$

e ainda faz-se

$$(s I + X.D_{av}.X^{-1}).\overline{y(s)} = y(0). \quad (2.19)$$

Sendo I a matriz identidade. Como $I = X.X^{-1}$, pode-se colocar a matriz dos autovetores e sua inversa em evidência fazendo

$$(s X.X^{-1} + X.D_{av}.X^{-1}).\overline{y(s)} = y(0) \quad (2.20)$$

e então

$$X.(s I + D_{av}).X^{-1}.\overline{y(s)} = y(0). \quad (2.21)$$

Multiplicando-se os dois lados da equação 2.21 por X^{-1} , em seguida por $(s I + D_{av})^{-1}$ e finalmente por X pode se isolar a variável $\overline{y(s)}$ e a equação passa a ser

$$\overline{y(s)} = X.(s I + D_{av})^{-1}.X^{-1}.y(0). \quad (2.22)$$

Aplicando-se a Transformada Inversa de Laplace, representada aqui pelo operador L^{-1} , obtém-se

$$L^{-1}y(s) = L^{-1}\{X.(s I + D_{av})^{-1}.X^{-1}.y(0)\}. \quad (2.23)$$

Sendo a matriz X e o vetor $y(0)$ constantes, pode-se escrever

$$y(t) = X.L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\}.X^{-1}.y(0). \quad (2.24)$$

Finalmente faz-se

$$y(t) = X.E_{av}(t).X^{-1}.y(0), \quad (2.25)$$

onde

$$E_{av}(t) = L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\}. \quad (2.26)$$

Para melhor poder avaliar a matriz $E_{av}(t)$, primeiramente a matriz $(s I + D_{av})$ será escrita em notação explícita. Em seguida se proceder-se-á sua inversão e a obtenção da Transformada Inversa de Laplace. Portanto

$$(s I + D_{av}) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_N \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

em que d_i são os autovalores da matriz G (eq 2.14) ou ainda os elementos da matriz diagonal D_{av} . A equação acima pode ser reescrita na forma

$$(s I + D_{av}) = \begin{bmatrix} s + d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s + d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s + d_N \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Da álgebra matricial, a inversa de uma matriz diagonal é a inversa dos seus elementos, então

$$(s I + D_{av})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s+d_N} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Falta apenas a Transformada Inversa de Laplace

$$E_{av}(t) = L^{-1}(s I + D_{av})^{-1} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s+d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s+d_N} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.30)$$

ou

$$E_{av}(t) = L^{-1}\{(s I + D_{av})^{-1}\} = \begin{bmatrix} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+d_1}\right\} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L^{-1}\left\{\frac{1}{s+d_2}\right\} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L^{-1}\left\{\frac{1}{s+d_N}\right\} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

A transformada inversa dos elementos é

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+d_i}\right\} = e^{-t d_i}. \quad (2.32)$$

Finalmente, a matriz $E_{av}(t)$ é escrita como

$$E_{av}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-t d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-t d_N} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

e a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, representada pela equação 4.29, fica detalhada em todos os seu termos.

2.2.2 Solução Analítica de Sistemas EDO Lineares - Coeficientes Variáveis

O problema para o qual este tópico foi escrito é do tipo

$$C(t).y'(t) + D(t).y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.34)$$

com

$$y(0) = f(x). \quad (2.34a)$$

Já foi dito no item 2.2 que $C(t)$ e $D(t)$ são funções quaisquer, admitidas como conhecidas. Elas não sofrem nenhum tipo de restrição para facilitar a generalidade do método proposto que, como se sabe, fará uso da Transformada de Laplace. Mas é justamente esta liberdade para $C(t)$ e $D(t)$ que pode gerar problemas transformados de difícil inversão. Além do mais, a escolha do método de inversão depende da função transformada que por sua vez depende da função original. Ora, isso obrigaria a criação de imposições para $C(t)$ e $D(t)$, o que se quer evitar. Portanto, para garantir a liberdade para $C(t)$ e $D(t)$, se fez uso do seguinte artifício: somar nos dois membros da equação 2.34 a seguinte expressão

$$C_m.y'(t) + D_m.y(t), \quad (2.35)$$

onde C_m e D_m são constantes que representam os valores médios de $C(t)$ e $D(t)$, respectivamente. Portanto a equação 2.34 fica

$$C(t).y'(t) + D(t).y(t) + C_m.y'(t) + D_m.y(t) = C_m.y'(t) + D_m.y(t) \quad (2.36)$$

ou, após algumas manipulações algébricas

$$C_m.y'(t) + D_m.y(t) = (C_m - C(t)).y'(t) + (D_m - D(t)).y(t). \quad (2.37)$$

Finalmente, fazendo $S(y'(t), y(t), t) = (C_m - C(t)).y'(t) + (D_m - D(t)).y(t)$, o problema 2.34 é então reescrito

$$C_m \cdot y'(t) + D_m \cdot y(t) = S(y'(t), y(t), t) \quad 0 < t < \infty, \quad (2.38)$$

com

$$y(0) = f(x). \quad (2.38a)$$

A solução do problema 2.38 é

$$y(t) = H(t) \cdot y(0) + H(t) * S(y'(t), y(t), t), \quad (2.39)$$

onde $H(t) \cdot y(0)$ é a solução do problema 2.38 homogêneo e "*" representa uma convolução definida na equação 2.42. Em outras palavras, $H(t) \cdot y(0)$ é a solução de

$$C_m \cdot y'(t) + D_m \cdot y(t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (2.40)$$

e

$$y(0) = f(x), \quad (2.40a)$$

obtida conforme mostrado em 2.2.1. Portanto

$$H(t) = X_m \cdot E_{av,m}(t) \cdot X_m^{-1} \quad (2.41)$$

em que $E_{av,m}(t)$ é a matriz diagonal, cujos elementos valem $e^{-t d_{i,m}}$; X_m é a matriz de autovetores e $d_{i,m}$ os autovalores da matriz $C_m^{-1} \cdot D_m$.

A convolução para os casos estudados aqui é definida por

$$H(t) * S(y'(t), y(t), t) = \int_0^t (H(t - \tau) * S(y'(\tau), y(\tau), \tau)) d\tau. \quad (2.42)$$

A solução 2.39 do problema 2.34 é reescrita explicitando-se $S(y'(t), y(t), t)$ para produzir

$$y(t) = H(t).y(0) + H(t) * ((C_m - C(t)).y'(t) + (D_m - D(t)).y(t)). \quad (2.43)$$

A expressão acima, (eq 2.43), não pode ser usada da forma que está, porque explicita $y(t)$ em função dele próprio e da sua derivada. Para resolver esta dificuldade, será usado o chamado Método da Decomposição [Adomian, 1988], cujo primeiro passo consiste em expandir $y(t)$ na seguinte forma

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t). \quad (2.44)$$

Usando a equação 2.44 na equação 2.43

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) = H(t).y(0) + H(t) * \left((C_m - C(t)). \sum_{i=1}^{\infty} v_i'(t) + (D_m - D(t)). \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) \right) \quad (2.45)$$

e expandindo os somatórios tem-se

$$\begin{aligned} v_1(t) + v_2(t) + \dots &= H(t).y(0) + \\ &+ H(t) * ((C_m - C(t)).(v_1'(t) + v_2'(t) + \dots) + (D_m - D(t)).(v_1(t) + v_2(t) + \dots)). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Igualando o primeiro termo do primeiro membro com o primeiro termo do segundo membro, pode-se escrever que v_1 vale

$$v_1(t) = H(t).y(0); \quad (2.47)$$

que para v_2

$$v_2(t) = H(t) * ((C_m - C(t)) \cdot v_1'(t) + (D_m - D(t)) \cdot v_1(t)); \quad (2.48)$$

para v_3

$$v_3(t) = H(t) * ((C_m - C(t)) \cdot v_2'(t) + (D_m - D(t)) \cdot v_2(t)); \quad (2.49)$$

etc.

Generalizando v_i , para $i > 1$

$$v_i(t) = H(t) * ((C_m - C(t)) \cdot v_{i-1}'(t) + (D_m - D(t)) \cdot v_{i-1}(t)). \quad (2.50)$$

Assim, $y(t)$ pode ser determinado truncando-se o somatório da equação 2.44 em uma ordem suficientemente grande de termos para garantir a precisão dos resultados. Está, então, mostrado como se obtém a solução de um sistema **EDO** com coeficientes variáveis, objetivo desta seção.

2.2.3 Solução de Sistemas EDO não Lineares - Método Iterativo

Neste tópico mostra-se os passos para solução de sistemas **EDP** resultantes da transformação integral generalizada de problemas não lineares. A primeira etapa, da técnica que se pretende apresentar aqui, é escrever os coeficientes A e B em função de y_i^{ap} que é uma aproximação de y para um valor t_i qualquer de t . Ou seja, admite-se que

$$A(y(t_i)) \cong A(y_i^{ap}) \quad e \quad B(y(t_i)) \cong B(y_i^{ap}) \quad (2.51)$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots$ e $t_0 = 0$. Em seguida, resolve-se analiticamente (ver seção 2.2.1) o seguinte sistema de equações.

$$A(y_1^{ap}) \cdot y'(t) + B(y_1^{ap}) \cdot y(t) = 0 \quad 0 < t < t_1 \quad (2.52)$$

sujeita à condição inicial

$$y(0) = y(t_0) \quad (2.52a)$$

para $t = t_1$. A solução $y(t_1)$ obtida é usada para corrigir o valor de y_1^{ap} . Novos coeficientes $A(y_1^{ap})$ e $B(y_1^{ap})$ são calculados e o sistema de equações 2.52 é resolvido outra vez. Este procedimento é repetido tantas vezes quantas forem necessárias até que

$$y(t_1) - y_1^{ap} \leq \epsilon_{cv}, \quad (2.53)$$

onde ϵ_{cv} é a tolerância de convergência admitida. Com a solução convergida para t_1 , repete-se o mesmo processo para outros valores de t . A expressão geral para o i -ésimo valor de t , é

$$A(y_i^{ap}) \cdot y'(t) + B(y_i^{ap}) \cdot y(t) = 0 \quad 0 < t < (t_i - t_{i-1}) \quad (2.54)$$

e

$$y(0) = y(t_{i-1}) \quad (2.52a)$$

2.3 DISPOSITIVOS ADAPTATIVOS

A convergência de um algoritmo iterativo deste tipo é extremamente dependente dos valores admitidos para y_i^{ap} na primeira iteração. Nos exemplos aqui resolvidos, a estimativa inicial para y_i^{ap} é feita com o valor da solução a montante. Isto é, para a primeira iteração do i -ésimo passo fez-se $y_i^{ap} \equiv y(t_{i-1})$. Para o primeiro passo, esta estimativa inicial é feita a partir da própria condição inicial: $y_1^{ap} \equiv y(0)$. Isto implica em que o tamanho do passo, ou seja $(t_i - t_{i-1})$, tenha importância fundamental na convergência do algoritmo. Passos muito longos o fazem divergir, porque a estimativa inicial é muito diferente do valor convergido. Muito curtos, encarecem a solução.

Nos problemas estudados neste trabalho, a dificuldade de convergência foi particularmente importante em duas situações:

- a) para gradientes grandes;
- b) para altas ordens de truncamento do somatório da equação 2.8.

Estas duas situações ocorrem justamente para pequenos valores de t . Conforme se avança no domínio, os gradientes tendem a ser nulos e o dispositivo adaptativo para os autovalores atua no sentido de diminuir o seu número. A consequência disto, é que próximo a entrada, os passos em t devem ser pequenos e, na medida em que vai se avançando no domínio, eles podem crescer consideravelmente.

O código escrito tem, portanto, dois dispositivos adaptativos: Um para o tamanho do passo, comentado no parágrafo anterior. Outro para o número de autovalores, citado na seção 2.1. A seguir serão apresentados seus mecanismos de atuação.

2.3.1 Procedimento Adaptativo para os Autovalores

Conforme foi visto na seção 2.1, o potencial original é calculado truncando-se o somatório da fórmula da inversa (eq 2.8) em um valor N pré-definido. Em outras palavras, assume-se que a solução final é

$$v(x, t) \simeq \sum_{i=1}^N \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.55)$$

Uma vez que a solução do i -ésimo passo em t seja alcançada, pode-se determinar o valor otimizado de N para o passo seguinte. A primeira coisa a ser feita é calcular a expressão

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}} - \sum_{i=1}^{N-j} \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}}}{\sum_{i=1}^N \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}}}, \quad (2.56)$$

onde $j = 1, 2, \dots$. Para $j = 1$, E é a diferença relativa entre os resultados da equação truncada em N e $(N - 1)$; para $j = 2$, em N e $(N - 2)$ e assim sucessivamente. O código computacional é escrito de forma a determinar o maior j que verifique a desigualdade

$$E \leq \epsilon_{av}, \quad (2.57)$$

onde ϵ_{av} é a precisão relativa admitida para os resultados. Um novo N é então determinado para o próximo passo em t fazendo

$$N_{i+1} = N_i - j, \quad (2.58)$$

onde os índices i e $i + 1$ significam passo atual e próximo passo, respectivamente.

Este procedimento adaptativo garante que N seja grande o suficiente para que se alcance a precisão requerida sem prejudicar desnecessariamente o custo computacional para todos os passos em t , exceto o primeiro. A estimativa de N_1 deve ser feita por tentativas. O critério aqui utilizado foi o de aumentar seu valor até que o dispositivo adaptativo atuasse fazendo com que o valor de N_2 fosse menor que N_1 , o que garante um valor otimizado para o último.

É importante observar que este esquema é bastante conservativo em termos de precisão. Conforme será visto adiante, N diminui na medida em que se avança em t . Como pode se ver acima, o algoritmo determina seu valor para o passo t_{i+1} baseado nos resultados do passo t_i . Ou seja, N usado em um determinado t é aquele que seria necessário para o passo anterior. Isto faz com que ele seja dimensionado para uma situação mais crítica do que aquela em que ele é usado.

2.3.2 Procedimento Adaptativo para o Tamanho do Incremento na Variável não Transformada.

Para otimizar o tamanho do passo, o código atua de forma similar ao outro procedimento adaptativo. O incremento em t é determinado baseado no comportamento da convergência do algoritmo no passo anterior.

Em primeiro lugar é estimado o passo inicial. Da mesma forma que para o número de autovalores, esta grandeza deve ser indicada como dado de entrada no programa. Sua determinação também é feita por tentativas. Conforme já foi dito, passos muito grandes fazem o algoritmo divergir e, passos muito pequenos, prejudicam o custo computacional. Deve-se fazer uma tentativa inicial com um valor qualquer para o passo. Se o algoritmo convergir, aumenta-se o passo até que ele divirja. Se divergir, diminui-se até ele convergir.

Uma vez determinado o passo inicial, o algoritmo se encarregará de otimizar o passo

para os próximos valores de t . Isto é feito baseado no número de iterações necessárias para convergência na seguinte forma

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= P_i * C & \text{para} & \quad It < It_{inf} \\ P_{i+1} &= P_i & \text{para} & \quad It \geq It_{inf}, \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde P_{i+1} é o passo da iteração seguinte, P_i o passo atual, C um coeficiente de correção, It o número de iterações, It_{inf} o número de iterações abaixo do qual o valor do passo deve ser incrementado. Os valores C e It_{inf} são definidos como dados de entrada, sendo que $C > 1$.

O valor de C também deve ser determinado por tentativas em procedimento parecido com aquele que determina o passo inicial. Se o algoritmo divergir ele deve ser diminuído até que passe a convergir e vice e versa. A única diferença é que C é avaliado para outros passos que não o passo inicial.

Já It_{inf} é avaliado conforme o custo computacional. Quando baixo, o passo é raramente incrementado de valor, da outra forma ele o é com mais freqüência. A primeira situação dá mais passos no domínio com poucas iterações, a segunda o oposto. Todas duas, nos seus extremos, muitos passos ou muitas iterações por passo, encarecem o custo computacional. Em algumas tentativas o usuário consegue determinar um valor razoável para este parâmetro.

2.4 FÓRMULA DA INVERSA MODIFICADA.

Neste trabalho também se usou uma pequena alteração na fórmula da inversa, equação 2.8, que logra uma diminuição considerável na quantidade de autovalores necessários para se obter a precisão requerida em bases senoidais e cossenoidais.

O erro na aproximação de funções por expansões como o da equação equação 2.8, cujo somatório foi truncado, pode ser visto nas figuras 2.1 e 2.2. A primeira mostra a condição de entrada da velocidade adimensional (eq. 4.2(d, e)) para o problema do capítulo 4, ou seja, $U(X, Y) = 1$, e duas aproximações. Uma para o truncamento do somatório da fórmula da inversa, equação 2.8, em 100 termos e outra para 99 termos. A outra, a condição no infinito para o mesmo caso (eq. 4.4), ou seja, $U(Y) = \frac{3}{2}(1 - Y^2)$ e, da mesma forma, duas aproximações como na figura 2.1. Para este segundo caso, o somatório foi truncado em 10

e 9 termos, respectivamente. Em todas as figuras mostradas nesta seção, os gráficos são plotados para pequenos intervalos em Y de forma que se possa evidenciar as características típicas da aproximação de funções em séries que utilizam este tipo de base.

Figura 2.1 – Comparação das aproximações da expressão 4.2(d, e) usando a fórmula da inversa com somatório truncado em 99 e 100 termos.

Figura 2.2 – Comparação das aproximações da expressão 4.4 usando a fórmula da inversa com somatório truncado em 9 e 10 termos.

Pode-se ver que, para pequenos valores de Y , o erro das curvas das aproximações para N e $N - 1$ oscilam de forma alternada numa defasagem muito próxima de 180° . Quanto maior o N , mais próximo de 180° é a defasagem. Isso sugere que a média entre as duas aproximações é muito mais próxima da curva que se quer aproximar do que cada uma delas individualmente. Ou seja, ao invés de se usar a fórmula 2.8 com o somatório truncado em

N , se fez

Figura 2.3 – Erro das aproximações da expressão 4.2(d, e) usando as fórmulas da inversa e da inversa modificada com somatórios truncados em 100 termos.

$$v(x, t) \simeq \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}}}{2}, \quad (2.60)$$

ou simplesmente,

$$v(x, t) \simeq \left(\sum_{i=1}^N \frac{\overline{v_i(t)} \psi_i(x)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\overline{v_N(t)} \psi_N(x)}{2 N_N^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.61)$$

Como nos exemplos dados as funções expandidas são conhecidas, pode-se determinar e plotar os erros das aproximações. Nas figuras 2.3 e 2.4 é possível comparar os erros para cada uma das funções aproximadas pelas equações 2.8 e 2.61. Na primeira usou-se os somatórios truncados em 100 termos e na segunda, em 10 termos.

É possível perceber que para a expansão modificada, veja equação 2.61, o erro de aproximação das funções escolhidas é menor na maior parte de interesse do domínio.

Para se ter uma idéia das vantagens da fórmula da inversa modificada, as equações 4.4 e 4.2(d, e) foram aproximadas para $Y = 0; 0,25; 0,5$ e $0,75$ pela fórmula da inversa (eq. 2.8) e pela fórmula da inversa modificada (eq. 2.61). Em ambos os casos, usou-se $N = 100$. Os resultados podem ser vistos na tabela 2.1.

Figura 2.4 – Erro das aproximações da expressão 4.4 usando as fórmulas da inversa e da inversa modificada com somatórios truncados em 10 termos.

		$Y = 0$	$Y = 0.25$	$Y = 0.5$	$Y = 0.75$
U de entrada	inv. normal	0,031302	0,034452	0,004501	0,008315
	inv. mod.	0,000161	0,000490	0,002239	0,007091
U desenvolv.	inv. normal	$0,97 * 10^{-7}$	$0,104 * 10^{-6}$	$0,138 * 10^{-6}$	$0,2523 * 10^{-6}$
	inv. mod.	$0,1 * 10^{-8}$	$0,130 * 10^{-7}$	$0,685 * 10^{-7}$	$0,2147 * 10^{-6}$

Tabela 2.1 – Erro das aproximações, usando as equações 2.8 e 2.61, para as funções representadas pelas equações 4.2(d, e) e 4.4.

Os gráficos e valores apresentados aqui são apenas ilustrativos. Na verdade foram feitos vários de testes, com muitas funções conhecidas para diferentes ordens de truncamento dos somatórios. Na grande maioria o erro da fórmula da inversa modificada 2.61 foi menor que o erro da fórmula da inversa 2.8. É preciso registrar, porém, que para baixo número de autovalores ($N \leq 10$), valores de Y maiores que 0.95 e regiões bem próximas ao escoamento plenamente desenvolvido, no caso de escoamento entre placas planas paralelas (cap. 4), as vantagens não foram importantes ou houve até mesmo alguma pequena desvantagem no uso da fórmula da inversa modificada. Ocorre que esta é uma pequena parte do domínio, e o erro, quando houve, foi mínimo. Além do que, ainda que a diferença tenha sido levemente maior sua amplitude era tão pequena que não teve efeito prático.

Outro fator relevante é que a separação dos campos desenvolvidos e em desenvolvimento da velocidade (vista no início da seção 4.2) anula totalmente a tendência de aumento de erro de aproximação de truncamento, uma vez que a solução do campo em desenvolvimento da velocidade tende para zero.

Por outro lado, a fórmula da inversa modificada diminuiu sensivelmente o erro de aproximação próximo da região de entrada, onde as oscilações são muito mais críticas.

CAPÍTULO 3

PROBLEMA DIFUSIVO

Este capítulo mostra o uso da técnica proposta em um modelo de dispersão atmosférico capaz de reproduzir os principais padrões das distribuições espaciais de concentrações de poluentes. Seu equacionamento matemático clássico é fornecido pela equação de difusão advecção [Moura et al., 1995]. Nesta aproximação, os termos associados à dispersão turbulenta são parametrizados pela hipótese de transferência do gradiente (ou Teoria K), onde os fluxos turbulentos de concentração são relacionados à concentração média via um coeficiente de difusão turbulento. Para fluxos turbulentos na camada limite planetária (CLP), estes coeficientes são funções do espaço e devem encerrar obrigatoriamente os principais parâmetros meteorológicos descrevendo a estrutura física da baixa atmosfera.

O objetivo da inclusão deste exemplo é didático. Nele poderão ser vistos todos os passos do algoritmo proposto em um problema linear, ainda que com coeficientes variáveis. Uma vez entendido o método básico aqui, fica mais fácil de se estender as idéias para problemas não lineares. Além disso, apresenta-se um artifício que permite o uso de um problema de autovalores associado com coeficientes constantes. Este problema auxiliar tem solução muito mais simples que o outro de coeficientes variáveis determinado pelo formalismo da **GITT** para este caso.

3.1 O MODELO MATEMÁTICO

De acordo com a teoria K, é considerado o seguinte modelo transiente, unidimensional, escrito em coordenadas cartesianas de dispersão de poluentes passivos

$$\frac{\partial}{\partial z}(K_{zz}(z)\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z}) = \frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t} \quad 0 < z < h; \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad (3.1)$$

sujeito às condições inicial e de contorno, respectivamente

$$\bar{c}(z, t) = Q\delta(z - hf) \quad em \ t = 0, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \bar{c}(z, t)}{\partial z} = 0 \quad em \ z = 0 \ e \ z = h. \quad (3.1b)$$

No sistema acima $\bar{c}(z, t)$ denota a concentração média de um poluente passivo com função de uma altura z e do tempo t ; Q é a intensidade da fonte, h é a altura da camada limite estável noturna, $\delta(z - hf)$ é a função delta de Dirac e hf é a altura da fonte.

O coeficiente de difusão turbulento vertical assumido aqui foi deduzido a partir da teoria de similaridade local e da teoria da difusão estatística [Degrazia e Moraes, 1992]. A sua forma, adimensionalizada pela altura h e pela velocidade de fricção $u*$, é

$$\frac{K_{zz}(z)}{u*hz} = \frac{0.33(1 - \frac{z}{h})^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{z}{h}}{1 + 3.7(\frac{z}{h})(\frac{h}{\Lambda})} \quad (3.2)$$

onde Λ é o comprimento local de Monin-Obukhov, α_1 e α_2 são constantes que dependem do estado de desenvolvimento temporal, da inclinação do terreno, da baroclinicidade e de outros fatores que influenciam a estrutura da CLE. A escala de comprimento h , que é fixada como a altura da CLE, expressa a profundidade da camada estável turbulenta, ou seja, a turbulência existe mesmo na presença de um fluxo negativo de calor sensível.

As medidas realizadas logo após o pôr-do-sol em Minnesota, quando processos evolutivos não estacionários na transição ainda existem, e as medidas realizadas duas a três horas após o pôr-do-sol em Cabauw, em condições bem mais estacionárias do que Minnesota, sugerem os valores de $\alpha_1 = 3/2$ e $\alpha_2 = 1$ para Cabauw e $\alpha_1 = 2/2$ e $\alpha_2 = 3$ para Minnesota.

3.2 MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.2.1 GITT

É importante observar que neste exemplo houve preocupação com a simplicidade. O que se pretende é facilitar a compreensão eliminando procedimentos que embora elegantes e muitas vezes importantes não fazem parte do enfoque que se quer dar a este trabalho. Por isso, neste capítulo o modelamento matemático não está adimensionalizado ou seja, z varia de 0 a h e não de 0 a 1 e a formulação não será normalizada. Assim, todas as expressões referentes a aplicação da **GITT** que serão usadas aqui são equivalentes àquelas da seção 2.1, a menos da normalização.

Seguindo os passos da seção 2.1, a primeira providência é identificar o operador L (eq. 2.3) na equação 3.1. Dentre várias formas de se executar esta tarefa, talvez a mais imediata seria fazer $x = z$, $p(x) = K_{zz}(z)$ e $q(x) = 0$ na equação 2.3. O operador L aplicado à variável $\xi_i(z)$ seria então identificado da seguinte forma

$$L\{\xi_i(z)\} = \frac{d}{dz} \left[K_{zz}(z) \frac{d\xi_i(z)}{dz} \right]. \quad (3.3)$$

O termo restante $-\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t}$ da equação 3.1 corresponderia ao operador B da equação 2.2. Usando a equação 2.4 poder-se-ia finalmente definir o problema auxiliar

$$\frac{d}{dz} \left[K_{zz}(z) \frac{d\xi_i(z)}{dz} \right] + l_i^2 \xi_i(z) = 0 \quad em \quad 0 < z < h, \quad (3.4)$$

e também, suas respectivas condições de contorno

$$\frac{d\xi_i(z)}{dz} = 0 \quad em \quad z = 0 \quad e \quad z = h. \quad (3.4a)$$

Ocorre que, da forma que está definido, este problema auxiliar é de difícil solução. Por isso, optou-se pelo uso de um artifício que permite determinar um problema bem mais simples. Para tanto, a equação 3.1 será reescrita aplicando-se a regra da cadeia no termo que tem o coeficiente $K_{zz}(z)$ e posteriormente dividindo toda a equação por este mesmo $K_{zz}(z)$

$$\frac{\partial^2 \bar{c}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{K'_{zz}(z)}{K_{zz}(z)} \frac{\partial \bar{c}(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{K_{zz}(z)} \frac{\partial \bar{c}(z, t)}{\partial t} \quad (3.5)$$

Seguindo novamente os passos do formalismo da **GITT**, agora o operador L aplicado a $\xi_i(z)$ passa a ser identificado como

$$L\{\xi_i(z)\} = \frac{d^2 \xi_i(z)}{dz^2} \quad (3.6)$$

e o novo problema auxiliar é

$$\frac{d^2 \xi_i(z)}{dz^2} + \iota_i^2 \xi_i(z) = 0 \quad em \ 0 < z < h, \quad (3.7)$$

da mesma forma, suas respectivas condições de contorno são

$$\frac{d\xi_i(z)}{dz} = 0 \quad em \ z = 0 \ e \ z = h. \quad (3.7a)$$

Este novo problema auxiliar (eq. 3.7) carrega menos informação da equação original que o obtido anteriormente (eq. 3.4). Isto implica que a base de autovetores, que será usada para expandir o potencial original $\bar{c}(z, t)$, provavelmente precisará de mais termos para alcançar a mesma precisão que no outro caso. Isto é, aqui optou-se pelo uso de um problema auxiliar de solução mais simples, assumindo-se a possibilidade de encarecer um pouco o custo computacional da solução.

O problema auxiliar 3.7 tem a seguinte solução [Özisik, 1980]

$$\xi_i(z) = \cos(\iota_i z), \quad (3.8)$$

onde ι_i são as raízes positivas da expressão

$$\text{sen}(\iota_i h) = 0. \quad (3.9)$$

O próximo passo é expandir a variável $\bar{c}(z, t)$ de forma análoga ao que é feito na equação 2.8, ou seja

$$\bar{c}(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y_i(t)} \xi_i(z). \quad (3.10)$$

Onde a função $\xi_i(x)$ é definida na equação 3.8 e $\overline{y_i(t)}$ é o potencial transformado.

Diferentemente da equação 2.8, que tem o somatório variando de 1 até ∞ , a equação 3.10 o tem de 0 até ∞ . É que, para este problema auxiliar, devido ao tipo de suas condições de contorno (ver [Özsisik, 1980]), os autovalores e as suas respectivas autofunções são indexados de 0 até ∞ .

Usando-se a equação 3.10 na equação 3.5 produz-se

$$\begin{aligned} K_{zz}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\overline{y_i(t)} \xi_i(z) \right) \right] + K'_{zz}(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\overline{y_i(t)} \xi_i(z) \right) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\overline{y_i(t)} \xi_i(z) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou ainda

$$K_{zz}(z) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\overline{y_i(t)} \xi_i''(z) \right) + K'_{zz}(z) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\overline{y_i(t)} \xi_i'(z) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\overline{y_i'(t)} \xi_i(z) \right), \quad (3.12)$$

onde ' e '' representam as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente. Ainda seguindo o formalismo da **GITT** mostrado na seção 2.1, o próximo passo é operar a equação 3.12 com o operador $\int_0^h \xi_i(z) dz$. Após algumas manipulações algébricas, o resultado é

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\overline{y_j(t)} \left(\int_0^h K_{zz}(z) \xi_i(z) \xi_j''(z) dz + \int_0^h K'_{zz}(z) \xi_i(z) \xi_j'(z) dz \right) + \right. \\ \left. - \overline{y_j'(t)} \int_0^h \xi_i(z) \xi_j(z) dz \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Do problema auxiliar (eq. 3.7), pode-se escrever

$$\frac{d^2 \xi_i(z)}{dz^2} = -\iota_i \xi_i(z). \quad (3.14)$$

Substituindo-se, então, a equação 3.14 em 3.13

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[\overline{y_j(t)} \left(\int_0^h K_{zz}(z) \xi_i(z) (-\iota_j \xi_j(z)) dz + \int_0^h K'_{zz}(z) \xi_i(z) \xi_j'(z) dz \right) + \right. \\ \left. - \overline{y_j'(t)} \int_0^h \xi_i(z) \xi_j(z) dz \right] = 0 \quad (3.15)$$

e fazendo

$$Y(t) = \left\{ \overline{y_j(t)} \right\}, \quad (3.16)$$

$$E = \{e_{i,j}\} \quad (3.17)$$

e

$$B = \{b_{i,j}\}; \quad (3.18)$$

onde

$$e_{i,j} = -\iota_j^2 \int_0^h K_{zz}(z) \xi_i(z) \xi_j(z) dz + \int_0^h K'_{zz}(z) \xi_i(z) \xi_j'(z) dz \quad (3.19)$$

e

$$b_{i,j} = - \int_0^h \xi_i(z) \xi_j(z) dz; \quad (3.20)$$

a equação 3.15 pode ser reescrita na sua forma matricial

$$B.Y'(t) + E.Y(t) = 0. \quad (3.21)$$

Para a condição inicial, o procedimento é análogo. Primeiramente a variável $\bar{c}(z, t)$ é expandida usando-se a equação 3.10 na equação 3.1a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{y_i(0)} \xi_i(z) = Q\delta(z - hf). \quad (3.22)$$

Em seguida é usado o operador $\int_0^h \xi_i(z) dz$, produzindo

$$\int_0^h \sum_{j=0}^{\infty} \overline{y_j(0)} \xi_j(z) \xi_i(z) dz = \int_0^h \xi_i(z) Q\delta(z - hf) dz. \quad (3.23)$$

executadas as devidas substituições e integrações obtém-se

$$\overline{y_0(0)} h = \xi_0(hf) \quad (3.24)$$

e

$$\overline{y_i(0)} \frac{h}{2} = \xi_i(hf) \quad \text{para } i > 0. \quad (3.25)$$

Finalmente,

$$Y(0) = \left\{ \overline{y_i(0)} \right\}. \quad (3.26)$$

O que foi apresentado até aqui segue basicamente os passos da **GITT** [Cotta, 1993]. Tipicamente, os problemas transformados como a equação 3.21, são resolvidos numericamente. Neste trabalho esta equação matricial terá um tratamento analítico, conforme pode ser visto a seguir.

3.2.2 Solução do Sistema EDO Transformado

O primeiro passo para solução da equação matricial 3.21 é reescrevê-la na seguinte forma

$$Y'(t) + A.Y(t) = 0, \quad (3.27)$$

onde $A = B^{-1}.E$.

Conforme pode ser visto na seção 2.2.1, a solução é

$$Y(t) = X.G(t).X^{-1}Y(0), \quad (3.28)$$

onde $G(t)$ é a matriz diagonal cujos elementos são $e^{-d_i t}$, d_i são os autovalores e X a matriz de autovetores de A .

Uma vez conhecida a solução do problema transformado (eq. 3.28), o somatório da fórmula da inversa (eq. 3.10) deve ser truncado para a obtenção do potencial original.

3.3 RESULTADOS

Os resultados das simulações da solução analítica do modelo matemático apresentado neste trabalho, empregando os perfis de $K_{zz}(z)$ dados pela equação 3.2 agora são apresentados. Para tanto, em todas as simulações foram usados parâmetros experimentais ($Q = 400 \frac{g}{m^2}$; $h = 400m$; $u^* = 0,31 \frac{m}{s}$ e $\Lambda = 116m$) das medições Cabaw e Minnesota.

Na Tabela 1 é mostrado a convergência dos resultados de concentração obtidos para diferentes tempos e em função de diferentes números de autovalores (AV). Já na tabela 2 é mostrada a convergência em função de diferentes alturas para diferentes números de autovalores (AV).

Estes resultados evidenciam a rápida convergência da solução proposta. Os resultados foram rodados em um microcomputador AMD K6 com 64MB de memória RAM.

Na figura 3.1 é mostrado o gráfico do tempo de processamento em função do número de autovalores para o cálculo da concentração em $Z = 0,2$ e $t = 1h$.

Aqui é importante ressaltar que com a aplicação da Transformada de Laplace o

t	Número de Autovalores							
	5	10	15	20	25	30	40	50
1h	216.285	216.740	216.814	216.830	216.776	216.743	216.672	216.642
2h	175.945	176.224	176.359	176.380	176.361	176.348	176.311	176.295
3h	152.566	152.713	152.839	152.854	152.844	152.840	152.819	152.809
4h	137.783	137.876	137.984	137.995	137.989	137.989	137.976	137.969

Tabela 3.1 – Concentração em função do tempo e do número de autovalores (AV) e altura adimensionalizada ($Z = \frac{z}{h}$) de 0, 2.

Z	Número de Autovalores							
	5	10	15	20	25	30	40	50
0.2	1.80282	1.80592	1.80726	1.80748	1.80726	1.80711	1.80671	1.80654
0.47	1.07376	1.06467	1.06426	1.06401	1.06411	1.06431	1.06441	1.06441
0.73	0.34521	0.33362	0.33394	0.33373	0.33383	0.33414	0.33436	0.33449
1	0.01207	0.32141	0.02227	0.02329	0.02201	0.02147	0.02093	0.02068

Tabela 3.2 – Concentração em função do número de autovalores(AV) para várias alturas adimensionalizadas com a altura da camada limite e um tempo de 6700s.

custo computacional diminui sensivelmente em relação à aplicação clássica da **GITT** que resolve o domínio temporal numericamente.

Na figura 3.2 são representados os perfis verticais de $K_{zz}(z)$ para Cabauw e para Minnesota usados neste trabalho.

As figuras 3.3 e 3.4 mostram o perfil vertical de concentração de poluentes emitidos por uma fonte aérea de altura 12,5m. Estas fontes são localizadas, na camada limite estável de Minnesota e Cabauw respectivamente. Observa-se que a concentração em ambas as figuras não é refletida a partir do topo das CLEs. Com o passar do tempo, o poluente desloca-se de baixo para cima e preenche lentamente a CLE. Este resultado é provocado pelo decréscimo gradual da turbulência à medida que o topo da camada limite é alcançado. As concentrações superficiais são maiores no caso de Cabauw.

Figura 3.1 – Tempo de Processamento em função do número de autovalores para o cálculo da concentração na altura adimensionalizada de 0,2 e tempo 6700s.

Figura 3.2 – Perfil médio de $K_{zz}(z)$ [Degrazia e Moraes, 1992] com dados experimentais de Cabauw e Minnesota.

Este comportamento é provocado pelo fato de existir em Minnesota uma maior mistura turbulenta na metade superior da camada limite, ou seja, em Minnesota, diferentemente de Cabauw, a maior turbulência contribui para que os poluentes alcancem mais rapidamente as regiões superiores da CLP.

As figuras 3.5 e 3.6, que expressam os perfis verticais de concentração para diferentes alturas como função do tempo. Elas indicam claramente que o poluente abandonado na CLP de Minnesota apresenta uma distribuição mais homogênea do que aquele abandonado em Cabauw.

Tanto para a CLP de Cabauw, como para a de Minnesota, o processo de difusão

Figura 3.3 – Perfil vertical da concentração para diferentes tempos, com fonte área a $12,5m$ e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Minnesota.

Figura 3.4 – Perfil vertical da concentração para diferentes tempos, com fonte área a $12,5m$ e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Cabauw.

turbulenta é relativamente lento quando comparado a processos de transporte em camadas limite neutra e instável, onde as escalas de tempo do transporte turbulento são menores. Percebe-se que a mistura vertical limitada no caso da CLE é a principal responsável pelo caráter não estacionário observado nos diferentes parâmetros nesta camada.

Na figura 3.7, mostra-se o perfil vertical de concentração de poluentes abandonados por uma fonte aérea localizada na altura de $300m$ na CLE de Minnesota. Observa-se que mesmo para grandes tempos o poluente tende a se manter na altura da fonte. Este comportamento pode ser atribuído ao pequeno tamanho dos turbilhões e à baixa intensidade da turbulência presente nestas alturas. Os poluentes abandonados difundem-se lentamente sob a influência dos pequenos turbilhões. Estes produzem um campo turbulento quase ho-

Figura 3.5 – Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a $12,5m$ e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Minnesota.

Figura 3.6 – Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a $12,5m$ e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Cabauw.

mogêneo de modo que apenas em grandes tempos, os poluentes podem perceber o caráter mais difusivo e não homogêneo da turbulência presente em regiões mais baixas da CLE.

Na camada limite estável, a simulação analítica da concentração de poluentes abandonados de fontes aéreas, reproduz satisfatoriamente a limitada mistura vertical observada. Os parâmetros de escala locais são consistentes com a descrição da difusão turbulenta em termos de uma teoria K. Embora no regime turbulento estável não exista a presença de transporte organizado de grande escala, o caráter não homogêneo da turbulência vertical influencia fortemente a difusão de poluentes. A altura da fonte em relação à profundidade da mistura turbulenta estável é de crucial importância na avaliação do impacto ambiental causado por poluentes abandonados de fontes elevadas. Esta posição relativa determina a

Figura 3.7 – Evolução temporal da concentração para diferentes alturas, com fonte área a $300m$ e $K_{zz}(z)$ a partir de dados de Minnesota.

evolução da altura da máxima concentração superficial. Finalmente cabe observar que os resultados obtidos por este método apresentam boa coincidência com os resultados numéricos obtidos por diferenças finitas [Campos Velho (1992)] e [Nieustadt (1984)]. O mesmo acontece com o resultado da solução analítica [Moura et al.(1995)], sem a necessidade do emprego de hipóteses simplificativas. Além do mais, como este último, por apresentar uma solução analítica para a concentração em qualquer tempo, elimina deste modo o erro acumulado inerente aos métodos numéricos de integração no tempo. E de forma não menos importante, o emprego da transformada de Laplace no domínio temporal do problema transformado pela **GITT**, representa um importante avanço no sentido de que o tempo computacional foi consideravelmente reduzido.

CAPÍTULO 4

PROBLEMA DIFUSIVO-ADVECTIVO

4.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Seja um canal de placas planas paralelas submetido a um escoamento em desenvolvimento na região de entrada térmica e hidrodinâmica do fluido, cuja temperatura e velocidade de entrada são, respectivamente, u_0 e T_0 , as principais hipóteses simplificadoras são [Cotta, 1993]:

- a) regime permanente,
- b) escoamento laminar,
- c) fluido incompressível,
- d) propriedades físicas constantes,
- e) dissipação viscosa desprezível,
- f) sem condução axial,
- g) aproximação da camada limite e
- h) escoamento bidimensional e simétrico em relação ao eixo central entre as duas placas.

Matematicamente, o problema é representado por um conjunto de equações escritas em coordenadas cartesianas [Cotta, 1993], como a equação da Continuidade

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

Figura 4.1 – Definição do problema - convecção permanente

a equação do Momentum

$$u(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \quad (4.1b)$$

e da Energia

$$u(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2}. \quad (4.1c)$$

Em que $0 < x < r$ e $0 < y < \infty$. As condições iniciais e de contorno são dadas por

$$u(0, y) = u_0, \quad u(x, h_w) = 0, \quad (4.1(d, e))$$

$$v(0, y) = 0, \quad v(x, h_w) = 0, \quad (4.1(f, g))$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad (4.1(h, i))$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad T(0, y) = T_0 \quad (4.1(j, k))$$

e

$$T(x, h_w) = T_w . \quad (4.11)$$

Para uma maior generalização do problema, as equações acima são adimensionalizadas. A equação da Continuidade passa a ser escrita como

$$\frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} + \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} = 0, \quad (4.2)$$

já a equação do Momentum fica

$$U(X, Y) \frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} + V(X, Y) \frac{\partial U(X, Y)}{\partial Y} = -\frac{dP^*}{dX} + Re^{-1} \frac{\partial^2 U(X, Y)}{\partial Y^2} \quad (4.2b)$$

e a equação da Energia

$$U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} + V(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} = Pe^{-1} \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2}. \quad (4.2c)$$

O mesmo para as condições iniciais e de contorno, que se tornam

$$U(0, Y) = 1, \quad U(X, 1) = 0, \quad (4.2(d, e))$$

$$V(0, Y) = 0, \quad V(X, 1) = 0, \quad (4.2(f, g))$$

$$\left. \frac{\partial U(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad V(X, 0) = 0, \quad (4.2(h, i))$$

$$\left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad \theta(0, Y) = 1 \quad (4.2j, k)$$

e

$$\theta(X, 1) = 0. \quad (4.2l)$$

Os grupos adimensionais usados são os seguintes

$$Y = \frac{y}{h_w}, \quad (4.3)$$

$$X = \frac{x}{h_w}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad (4.3(b, c))$$

$$V = \frac{v}{v_0}, \quad P^* = \frac{P}{\rho(u_0)^2}, \quad (4.3(d, e))$$

$$Re = \frac{u_0 h_w}{\nu}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad (4.3(f, g))$$

$$Pe = Re Pr \quad e \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (4.3(h, i))$$

4.2 CAMPO DE VELOCIDADE

Antes de se aplicar o formalismo da GITT nas equações 4.2, a componente longitudinal da velocidade do fluido, $U(X, Y)$, sofrerá uma alteração. Ela passará a ter uma componente dependente de X e Y (em desenvolvimento) e uma componente dependente somente de Y (desenvolvido), ou seja,

$$U(X, Y) = U^*(X, Y) + U_\infty(Y). \quad (4.4)$$

Este procedimento diminui consideravelmente a quantidade de autovalores necessários na solução [Machado, 1992]. Isto implica numa convergência da solução muito mais rápida.

A expressão para o escoamento completamente desenvolvido entre placas planas paralelas é clássica na literatura e a velocidade é dada por

$$U_\infty(Y) = \frac{3}{2}(1 - Y^2). \quad (4.5)$$

As equações que governam o problema devem ser reescritas levando em conta a decomposição definida na equação 4.4. Portanto a equação da Continuidade se torna

$$\frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} + \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} = 0 \quad (4.6)$$

e a equação do Momentum

$$\begin{aligned} (U^*(X, Y) + U_\infty(Y)) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} + V(X, Y) \left(\frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} - 3Y \right) = \\ = - \left(\frac{dP^*}{dX} + \frac{3}{Re} \right) + Re^{-1} \frac{\partial^2 U^*(X, Y)}{\partial Y^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $0 < Y < 1$ e $X > 0$. O mesmo para as condições iniciais e de contorno que envolvam a componente da velocidade decomposta

$$U^*(0, Y) = 1 - U_\infty(Y), \quad U^*(X, 1) = 0, \quad (4.6(a, b))$$

$$\left. \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0, \quad (4.6c)$$

4.2.1 GITT Aplicada às Equações da Velocidade

A transformação integral a ser realizada agora, segue os passos definidos na seção 2.1. O primeiro procedimento é a identificação do operador L , (eq. 2.3), na equação 4.7. Por comparação, fazendo-se $p(x) = 1$ e $q(x) = 0$ na equação 2.3, pode-se dizer que, na equação 4.7, o operador procurado vale

$$L \{U^*(X, Y)\} = \frac{\partial^2 U^*(X, Y)}{\partial Y^2}. \quad (4.8)$$

Usando-se a equação 2.4, pode-se definir, então, o problema auxiliar

$$\frac{d^2 \varphi_i(Y)}{dY^2} + \mu_i^2 \varphi_i(Y) = 0, \quad 0 < Y < 1, \quad (4.9)$$

com as respectivas condições de contorno

$$\left. \frac{d\varphi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=0} = 0 \quad e \quad \varphi_i(1) = 0. \quad (4.9(a, b))$$

O caso acima é um problema de clássico Sturm-Liouville. Sua solução pode ser obtida analiticamente e é dada por [Özisik, 1980]

$$\varphi_i(Y) = \cos(\mu_i Y), \quad (4.10)$$

onde

$$\mu_i = \frac{\pi}{2}(2i - 1) \quad e \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10(a, b))$$

Baseado na equação 2.8, pode-se definir a fórmula da inversa específica para este caso

$$U^*(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X), \quad (4.11)$$

onde $\bar{u}_i(X)$ é o potencial transformado e $N_{v,i}$ o quadrado da norma, definida conforme a equação 2.7 e que neste exemplo particular se torna

$$N_{v,i} = \int_v \varphi_i^2(Y) dY. \quad (4.12)$$

Prosseguindo, a variável dependente, $U^*(X, Y)$, da a equação do momentum (eq. 4.7) é expandida como o auxílio da equação 4.11 produzindo

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X) \right) + U_{\infty}(Y) \right] \frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X) \right) + \\ & + V(X, Y) \left[\frac{\partial}{\partial Y} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X) \right) - 3Y \right] = \\ & = - \left(\frac{dP^*}{dX} + \frac{3}{Re} \right) + Re^{-1} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X) \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

O próximo passo, segundo a seção 2.1, é integrar a equação 4.13 fazendo-se uso do operador definido na equação 2.9, que para este exemplo se torna

$$\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) dY. \quad (4.14)$$

Contudo, ainda antes da integração, é preciso definir $V(X, Y)$ e $\frac{dP^*}{dX}$. Para não prejudicar a seqüência lógica do texto, o detalhamento da determinação das expressões destas duas grandezas é feito nos apêndices I e II, respectivamente. Por hora, elas serão apenas citadas

$$V(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(Y) \frac{d\bar{u}_i(X)}{dX} \quad (4.15)$$

e

$$-\frac{dP^*}{dX} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(2\bar{u}_j(X) \bar{u}'_j(X) - \frac{\varphi'_j(1) \bar{u}_j(X)}{Re N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} + H_j \bar{u}'_j(X) \right) + \frac{3}{Re}. \quad (4.16)$$

Onde

$$F_i(Y) = \frac{1}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_Y^1 \varphi'_i(R) dR, \quad (4.17)$$

$$H_j = H_j^* - 3G_j, \quad (4.18)$$

$$H_j^* = \frac{1}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 U_{\infty}(Y) \varphi_j(Y) dY \quad (4.19)$$

e

$$G_j = \int_0^1 Y F_j(Y) dY. \quad (4.20)$$

Usando as equações 4.15 e 4.16 na equação 4.13, e operando com o operador 4.14, o resultado, escrito na forma matricial, é

$$E(\bar{U}(X)) \cdot \bar{U}'(X) + D \cdot \bar{U}(X) = 0, \quad (4.21)$$

onde

$$E(\bar{U}(X)) = \{e_{i,k}(\bar{U}(X))\}, \quad (4.21a)$$

$$\bar{U}(X) = \{\bar{u}_i(X)\}, \quad (4.21b)$$

$$e_{i,k}(\bar{U}(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} (A_{i,j,k} + B_{i,j,k} - 2F_i(0)\delta_{j,k}) \bar{u}_j(X) + \delta_{j,k}(Q_{i,k} - F_i(0)H_i), \quad (4.21c)$$

$$D = \{d_{i,k}\}, \quad (4.21d)$$

$$d_{i,k} = \frac{F_i(0)\varphi'_k(1)}{Re N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} + \delta_{i,k} \frac{\mu_i^2}{Re}, \quad (4.21e)$$

$$A_{i,j,k} = \frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) dY, \quad (4.21f)$$

$$B_{i,j,k} = \frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi'_j(Y) F_k(Y) dY, \quad (4.21g)$$

$$Q_{i,k} = Q_{i,k}^* - 3S_{i,k}, \quad (4.21h)$$

$$Q_{i,k}^* = \frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 U_{\infty} \varphi_i(Y) \varphi_k(Y) dY, \quad (4.21i)$$

$$S_{i,k} = \frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 Y \varphi_i(Y) F_k(Y) dY, \quad (4.21j)$$

$$H_k = H_k^* - 3G_k, \quad (4.21k)$$

$$H_{i,k}^* = \frac{1}{N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 U_\infty \varphi_k(Y) dY, \quad (4.21l)$$

$$G_k = \int_0^1 Y F_k(Y) dY \quad (4.21m)$$

e

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases} \quad (4.21n)$$

Em que $i, k = 1, 2, \dots$. Todos os detalhes da obtenção da equação 4.21 podem ser vistos no apêndice III.

Para a determinação das condições de entrada,

$$\bar{u}_i(0) = F_i(0) - H_i^*, \quad (4.22)$$

o procedimento é análogo ao da equação 4.21 e pode ser visto no apêndice IV.

O sistema 4.21 é truncado em uma ordem grande o suficiente para garantir a precisão dos resultados (ver seção 2.1) e resolvido conforme pode ser visto na próxima seção.

4.2.2 Solução do Sistema EDO Transformado

Conforme já foi dito, é neste tópico que reside a principal novidade deste trabalho em relação ao uso costumeiro da **GITT**. Aqui o sistema EDO transformado será truncado

e resolvido de forma semi-analítica. Tomando por base a seções 2.2, a primeira providência é reescrever a equação 4.21 na seguinte forma

$$E_m \cdot \bar{U}'(X) + D \cdot \bar{U}(X) = 0, \quad (4.23)$$

onde E_m é uma aproximação da matriz $E(\bar{U}(X))$ para $X = X_1$. A seguir a equação matricial 4.23 é resolvida para $X = X_1$ e um novo valor para E_m será determinado. Este procedimento é repetido até que o critério de convergência para E_m seja alcançado. A solução do problema linearizado 4.23 é obtida de forma análoga ao exposto na seção 2.2.1, porém com uma pequena alteração detalhada a seguir. Naquela seção a matriz de coeficientes do primeiro termo é invertida fazendo

$$\bar{U}'(X) + E_m^{-1} \cdot D \cdot \bar{U}(X) = 0. \quad (4.24)$$

Porém, é preciso lembrar que a cada iteração a matriz E_m será corrigida, enquanto a matriz D é uma matriz constante. Logo, da forma que está posto o problema, cada iteração exigirá a inversão da matriz E_m corrigida. Para evitar este inconveniente, fez-se

$$C \cdot \bar{U}'(X) + \bar{U}(X) = 0, \quad (4.25)$$

onde $C = D^{-1} \cdot E_m$. Fatorando-se a matriz C em seus autovalores e autovetores na forma

$$C = \Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma^{-1}, \quad (4.26)$$

em que Γ é a matriz dos autovetores e Δ a matriz diagonal dos autovalores de C , tem-se

$$\Gamma \cdot \Delta \cdot \Gamma^{-1} \cdot \bar{U}'(X) + \bar{U}(X) = 0. \quad (4.27)$$

Multiplicando-se toda a equação por Γ^{-1} , depois por Δ^{-1} e finalmente por Γ , se obtém

$$\bar{U}'(X) + \Gamma \cdot \Delta^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \bar{U}(X) = 0. \quad (4.28)$$

Agora, resolve-se a equação acima com o uso da transformada de Laplace de forma análoga a seção 2.2.1. A única diferença em relação àquele item é que aqui a matriz diagonal dos autovalores, Δ , é invertida. A solução final, é portanto

$$\bar{U}(X_1) = \Gamma \cdot E_{av^{-1}}(X_1) \cdot \Gamma^{-1} \cdot y(0), \quad (4.29)$$

onde $E_{av^{-1}}(X_1)$ é uma matriz diagonal, cujos elementos valem $e^{-X_1 \frac{1}{d_i}}$.

Com o resultado obtido na equação 4.29, a fórmula da inversa (eq. 4.11) deve ser usada para a obtenção do potencial original $U^*(X_i, Y)$.

Conforme já foi dito no capítulo 2, este procedimento é repetido para outros valores de X , até que se obtenha a solução para toda a área de interesse do domínio. A condição de entrada para cada passo na coordenada axial é a solução do passo a montante. A condição de entrada do primeiro passo é a própria condição de entrada transformada do problema original.

4.3 CAMPO DA TEMPERATURA

Da mesma forma que para as equações da parte hidrodinâmica do problema, a equação 4.4 será usada na equação da energia produzindo

$$(U^*(X, Y) + U_\infty(Y)) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} + V(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} = Pe^{-1} \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2}. \quad (4.30)$$

4.3.1 GITT Aplicada à Equação da Temperatura

Novamente serão seguidos os passos definidos na seção 2.1. Para a identificação do operador L na equação 4.30, faz-se $p(x) = 1$ e $q(x) = 0$ na equação 2.3. Assim

$$L\{\theta(X, Y)\} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2}. \quad (4.31)$$

O problema auxiliar é definido com base na equação 2.4 e para este caso é

$$\frac{d^2 \phi_i(Y)}{dY^2} + \beta_i^2 \phi_i(Y) = 0, \quad 0 < Y < 1, \quad (4.32)$$

com as respectivas condições de contorno

$$\left. \frac{d\phi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=0} = 0 \quad e \quad \phi_i(1) = 0. \quad (4.32(a, b))$$

Sua solução é dada por [Özisik, 1980]

$$\phi_i(Y) = \cos(\beta_i Y), \quad (4.33)$$

onde

$$\beta_i = \frac{\pi}{2}(2i - 1) \quad e \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.32(a, b))$$

Usando-se mais uma vez a equação 2.8, define-se a fórmula da inversa para o problema da temperatura como sendo

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\theta, i}^{\frac{1}{2}}} \phi_i(Y) \bar{t}_i(X), \quad (4.34)$$

onde $\bar{t}_i(X)$ é o potencial transformado e $N_{\theta, i}$ o quadrado da norma, definido conforme a equação 2.7, que para a temperatura do fluido vale

$$N_{\theta, i} = \int_v \phi_i^2(Y) dY. \quad (4.35)$$

As equações 4.34, 4.15 e 4.11 são usadas para expandir, respectivamente, as variáveis

$U^*(X, Y)$, $V(X, Y)$ e $\theta(X, Y)$ da equação 4.30, produzindo

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X) \right) + U_{\infty}(Y) \right] \frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}}} \phi_i(Y) \bar{t}_i(X) \right) \right] + \\
& + \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(F_i(Y) \frac{d\bar{u}_i(X)}{dX} \right) \right] \frac{\partial}{\partial Y} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}}} \phi_i(Y) \bar{t}_i(X) \right) \right] = \quad (4.36) \\
& = Pe^{-1} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}}} \phi_i(Y) \bar{t}_i(X) \right) \right].
\end{aligned}$$

Seguindo os passos da seção 2.1, agora deve-se integrar a equação 4.36 usando-se o operador definido na equação 2.9, cuja expressão para este caso é

$$\frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \phi_i(Y) dY. \quad (4.37)$$

Os detalhes desta transformação integral podem ser vistos no apêndice V e o seu resultado é

$$A(\bar{U}(X)) \cdot \bar{\Theta}'(X) + B(\bar{U}'(X)) \cdot \bar{\Theta}(X) = 0, \quad (4.38)$$

onde

$$A(\bar{U}(X)) = \{a_{i,k}(\bar{U}(X))\}, \quad (4.38a)$$

$$\bar{\Theta}(X) = \{\bar{\theta}_i(X)\}, \quad (4.38b)$$

$$a_{i,j}(\bar{U}(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,j,k}^{\theta} \bar{u}_k(X) + P_{i,j}, \quad (4.38c)$$

$$B = \{b_{i,j}\}, \quad (4.38d)$$

$$b_{i,j} = \frac{\delta_{i,j}}{Pe} \beta_i^2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{i,j,k} \bar{u}_k(X), \quad (4.38e)$$

$$A_{i,j,k}^{\theta} = \frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j(Y) \varphi_k(Y) dY, \quad (4.38f)$$

$$P_{i,j} = \frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 U \infty(Y) \phi_i(Y) \phi_j(Y) dY \quad (4.38g)$$

e

$$C_{i,j,k} = \frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j'(Y) F_k(Y) dY. \quad (4.38h)$$

Em que $i, k = 1, 2, \dots$. A condição de entrada é transformada de forma análoga. Os detalhes de sua transformação podem ser vistos no apêndice VI e o resultado obtido é

$$\bar{t}_i(0) = F_i^{\theta}(0), \quad (4.39)$$

onde

$$F_i^{\theta}(Y) = \frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}}} \int_0^Y \phi_i(Y) dY. \quad (4.40)$$

Uma vez determinado o sistema transformado infinito 4.38, ele deve ser truncado para um número de autovalores adequado (ver seção 2.1) e resolvido conforme mostrado na seção 2.2.1.

4.3.2 Solução do Sistema EDO Transformado

Da mesma forma que a equação do Momentum (eq. 4.7), a equação da Energia (eq. 4.30) será resolvida localmente. O algoritmo primeiro obtém o campo de velocidade do fluido para um determinado valor de X , denominado aqui de X_i . Em seguida são calculados as matrizes de coeficientes $A(\bar{U}(X_i))$ e $B(\bar{U}'(X_i))$ da equação 4.38 que fica

$$A(\bar{U}(X_i)) \cdot \bar{\Theta}'(X) + B(\bar{U}'(X_i)) \cdot \bar{\Theta}(X) = 0. \quad (4.41)$$

Assim, o sistema **EDO**, de coeficientes constantes, é resolvido para X_i conforme descrito na seção 2.2.1. A condição de entrada é a solução do passo anterior e para o primeiro passo, a própria condição de entrada para o problema original. A solução do problema transformado, portanto, fica

$$\bar{\Theta}(X_i) = \Gamma_\theta \cdot E_\theta(X_i) \cdot \Gamma_\theta^{-1} \cdot \Theta(0), \quad (4.42)$$

onde $E_\theta(X_i)$ é uma matriz diagonal, cujos elementos valem $e^{-X_i d_i^\theta}$. Já Γ_θ e d_i^θ são, respectivamente, os autovalores e autovetores da matriz C^θ . Finalmente, esta última matriz é definida por

$$C^\theta = [A(\bar{U}(X_i))]^{-1} \cdot B(\bar{U}'(X_i)). \quad (4.43)$$

Uma vez conhecido o valor de $\bar{\Theta}(X_i)$, a fórmula da inversa (eq. 4.34) é usada para a obtenção do potencial original $\theta(X_i, Y)$.

4.4 RESULTADOS

Primeiramente, para efeito de validação do código computacional, será apresentado a comparação dos resultados para a velocidade do fluido obtidos neste exemplo com duas referências: uma, cuja abordagem é totalmente numérica [Shah e London, 1978] e outra que resolve este mesmo problema utilizando também a **GITT**, porém onde a solução do problema transformado é obtida por subrotinas numéricas [Cotta, 1993]. A tabela 4.1 apresenta os valores para a velocidade no centro do escoamento ($U(X,0)$), obtidos para $Re = 2000$. A estimativa inicial para o número de autovalores foi de 100 termos, as tolerâncias de convergência para o algoritmo de linearização e para o adaptativo do número de autovalores são $2 * 10^{-7}$ e $5 * 10^{-7}$, respectivamente. Ambas são tolerâncias relativas. A primeira em relação ao valor absoluto de cada autovalor e a segunda em relação a velocidade no centro do escoamento. A tabela 4.1 ainda apresenta o valor N , que representa o número de autovalores para os resultados convergidos.

X	N	$U(X,0)$	ref. [Shah e London, 1978]	desvio	ref. [Cotta, 1993]	desvio
12	98	1.12432	1,124	0,00032	1,1242	0,00012
16	90	1.14277	1,144	0,00123	1,1430	0,00023
32	76	1.19910	1,203	0,0039	1,2002	0,0011
48	68	1.24171	1,246	0,00429	1,2435	0,00179
64	62	1.27718	1,282	0,00482	1,2796	0,00242
80	56	1.30765	1,312	0,00435	1,3107	0,00305
160	40	1.40704	1,411	0,00396	1,4226	0,01556
400	12	1.47894	1,490	0,01106	1,4913	0,0013
2000	10	1.49568	1,500	0,00432		

Tabela 4.1 – Resultados para a velocidade do fluido no centro do canal obtido com o presente procedimento, com solução totalmente numérica [Shah e London, 1978] e usando a **GITT** [Cotta, 1993].

Para efeito de precisão dos resultados, seria suficiente que os autovalores convergissem em relação ao autovalor de maior valor absoluto. Assim, os autovalores de menor valor absoluto podem não convergir, mas de qualquer forma não interferem significativamente

nos valores obtidos. Isso se deve ao fato de que a ordem de grandeza do erro de convergência de alguns autovalores é muito menor que a ordem de grandeza do erro assumido nos resultados. Porém, foi estipulado que a convergência deve ser relativa a cada autovalor por questões de estabilidade do algoritmo de linearização. Cada autovalor de uma iteração é função de todos os outros da iteração anterior. Se eles não convergirem um a um, no passo seguinte os que não convergiram vão alimentar todos os autovalores com dados não convergidos e o algoritmo divergirá em poucas iterações.

$Pr = 0.72$					$Pr = 10.0$				
X	nT	$\theta_B(X)$	ref.	desvio	X	nT	$\theta_B(X)$	ref.	desvio
1	50	0,981753	0,98198	0,000227	4	50	0,994120	0,99445	0,00033
10	32	0,938309	0,93836	0,000051	16	50	0,986512	0,98679	0,000278
30	22	0,888779	0,88893	0,000151	40	40	0,977103	0,97734	0,000237
80	16	0,808970	0,80939	0,00042	160	26	0,949264	0,94922	0,000044
200	12	0,677837	0,67910	0,001263	640	18	0,882092	0,88216	0,000068
740	10	0,330184	0,33307	0,002886	3000	12	0,686573	0,68652	0,000247
2170	10	0,050282	0,05082	0,000538	13000	12	0,266611	0,26625	0,000361

Tabela 4.2 – Comparação da temperatura de mistura obtida com a referência [Cotta, 1993].

Da mesma forma que para a velocidade do fluido, o código computacional também é validado para os resultados da temperatura. Na tabela 4.2 pode se ver a comparação dos valores obtidos para a temperatura de mistura (eq. 4.44) com a referência [Cotta, 1993]. O programa foi rodado para um número inicial de 50 autovalores tanto para a velocidade quanto para a temperatura. A tabela apresenta as comparações para dois valores do número de Prandtl: 0.72 e 10.0. Pode-se ver também, o número de autovalores da temperatura, nT , para o qual os resultados foram alcançados. A tolerância para a convergência do algoritmo de linearização foi de $2 * 10^{-7}$ e para os adaptativos do número de autovalores para a velocidade e temperatura foi de $5 * 10^{-7}$. Estas tolerâncias são as mesmas usadas na tabela 4.1 e, portanto, já comentadas anteriormente.

A temperatura de mistura, $\theta_B(X)$, mostrada na tabela 4.2 é definida por

$$\theta_B(X) = \frac{1}{U_m(X)} \int_0^1 U(X, Y) \theta(X, Y) dY \quad (4.44)$$

e a velocidade média, $U_m(X)$, é

$$U_m(X) = \int_0^1 U(X, Y) dY . \quad (4.45)$$

N	$X = 1$	$X = 10$	$X = 100$
10	1,014367	1,089692	1,311860
20	1,024419	1,104008	1,327249
30	1,030757	1,108880	1,333276
40	1,033124	1,110889	1,336828
50	1,034698	1,112560	1,339625
60	1,035757	1,113654	
70	1,036519	1,114416	
80	1,037124	1,115351	
90	1,037066	1,115603	
100	1,037306	1,116206	
110	1,037647		
120	1,037922		
130	1,038168		
140	1,038063		
150	1,038641		
valor convergido	1,039019	1,116206	1,339625
N convergido	156	100	50

Tabela 4.3 – Análise da convergência para a velocidade central do fluido.

A tabela 4.3 apresenta o comportamento da convergência em relação a quantidade de autovalores usados para a velocidade do fluido no centro do escoamento para três valores da

coordenada axial e o valor convergido, com a respectiva quantidade de autovalores necessários à convergência, quando for o caso.

N	$X = 1$	$X = 10$	$X = 100$
5	0,989892045	0,997280536	0,982865615
10	1,001680523	0,999566096	0,983003475
15	1,000017717	1,000141011	0,983253064
20	0,999712740	1,000035249	
25	1,000162685	1,000033089	
30	0,999924319	0,999971132	
35	1,000047564		
40	0,999964341		
45	1,000026430		
50	0,999980714		
55	1,000014264		
60	0,999989176		
65	1,000008430		
70	0,999993287		
75	1,000005447		
valor convergido	0,999995510	0,99987990	0,983253064
NT convergido	76	32	15

Tabela 4.4 – Análise da convergência para a temperatura central do fluido.

Pode-se verificar que é necessário um maior número de autovalores para as regiões mais próximas da entrada do escoamento. Isso se deve à forma do perfil de velocidades admitido como condição de entrada, que como pode ser visto na definição do problema, é constante. É importante lembrar que este perfil é aproximado por uma expansão em cossenos. Bases cossenoidais necessitam de mais termos para aproximar funções constantes do que para aproximar funções não constantes, uma vez que se mantenha o mesmo erro de aproximação. Na medida que se avança no domínio, este perfil tende a se tornar parabólico, portanto não constante e mais facilmente aproximado pela base usada. Este mesmo fenômeno acontece

tanto para a velocidade quanto para a temperatura.

A tabela 4.4 é equivalente à tabela 4.3, porém os valores em questão são os da temperatura no centro do escoamento. Para estas duas tabelas, 4.4 e 4.3, o código obteve resultados para $Re = 2000$; $Pr = 0,72$; tolerância para convergência da linearização de $2 * 10^{-7}$ e para adaptativo do número de autovalores de $5 * 10^{-7}$.

Figura 4.2 – Velocidade do fluido para $Re = 2000$.

A figura 4.2, mostra o campo de velocidade para número de Reynolds, Re , igual a 2000 na região do comprimento de entrada hidrodinâmica.

Figura 4.3 – Velocidade do fluido para $Re = 2$.

Na figura 4.3 pode-se ver a velocidade do fluido na região de entrada hidrodinâmica para $Re = 2$. O campo de temperaturas na região de entrada térmica pode ser visto nas figuras 4.4 e 4.5. A primeira para número de Prandtl, Pr , valendo 0,72 e a outra, 10.

Figura 4.4 – Temperatura do fluido para $Pr = 0,72$.

Figura 4.5 – Temperatura do fluido para $Pr = 10$.

As temperaturas de mistura, também para Pr valendo 0,72 e 10 podem ser vistas, respectivamente nos gráficos 4.6 e 4.7.

A figura 4.8 mostra o passo adaptativo calculado automaticamente pelo algoritmo. A região da coordenada axial escolhida é bem próxima da entrada para que o gráfico tenha uma resolução suficiente a permitir a sua análise. Como pode-se ver os passos são crescentes até o último, quando há uma diminuição. Isso se deve ao fato de que o programa foi ajustado para rodar até $X = 20$. Ou seja, todos os passos a menos do último são determinados automaticamente em função da convergência do algoritmo de linearização. O último é calculado no sentido de alcançar o valor da coordenada axial determinada pelo usuário e sempre deverá ser menor que o passo que permita a convergência para aquele valor.

Figura 4.6 – Temperatura de mistura do fluido para $Pr = 0.72$.

Figura 4.7 – Temperatura de mistura do fluido para $Pr = 10$.

No gráfico 4.9 pode se ver a quantidade de iterações que o algoritmo de linearização precisa para convergir. Este gráfico foi plotado para os mesmos valores de X que a figura 4.8 propositadamente. Comparando as duas curvas, pode-se ver que quando a quantidade de iterações é baixa, o dispositivo adaptativo do tamanho do passo atua no sentido de aumentá-lo. Por outro lado, quando o passo não é aumentado, o número de iterações cai. Para este exemplo, o limite de iterações foi fixado em 20. Ou seja, se o algoritmo precisar menos de 20 iterações para convergir, o passo é incrementado. Se mais, o passo permanece inalterado (ver eq. 2.59).

As figuras 4.10 e 4.11 mostram respectivamente a quantidade de autovalores para a velocidade e temperatura do fluido ao longo da coordenda axial. Nestes gráficos é possível

Figura 4.8 – Tamanho do passo ao longo de X .

Figura 4.9 – Número de iterações da convergência da linearização.

verificar o funcionamento do procedimento adaptativo para a quantidade de autovalores utilizados nas fórmulas da inversa para a equação do Momentum e Temperatura.

Figura 4.10 – Quantidade de autovalores para velocidade do fluido.

Figura 4.11 – Quantidade de autovalores para temperatura do fluido.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

O autor entende que este trabalho contribui para o avanço da Técnica da Transformada Integral Generalizada, **GITT**. Aqui, os esforços sempre foram concentrados no sentido de dar a esta ferramenta matemática um tratamento ainda mais analítico. Para alcançar este objetivo, procurou-se modificar a solução do problema transformado que até a gora era obtida com o uso de subrotinas numéricas.

Para problemas lineares, a única aproximação que se faz é o truncamento do somatório da fórmula da inversa, a equação 2.8. Ainda assim, o procedimento adaptativo para os autovalores, que pode ser visto na seção 2.3.1, garante que esta aproximação seja feita de forma que o erro possa ser controlado. Problemas não lineares têm duas aproximações. Uma, é o truncamento do somatório. Outra, é a linearização do procedimento iterativo.

Para efeito de teste, o algoritmo suportou mais de 200 termos no truncamento dos somatórios, tanto para a equação do Momentum (eq. 4.7), quanto para a da Energia (eq. 4.30). Em cada um dos dois casos citados, existem dificuldades específicas no que diz respeito a grandes ordens de truncamento. No primeiro, o problema é convergência do algoritmo de linearização. Uma grande quantidade de termos implica na necessidade de um maior número de iterações além de exigir passos menores na coordenada axial, X . No outro, os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes do problema transformado são complexos. Portanto, para cada valor de X que se queira obter resultados para a temperatura do fluido, deve-se inverter uma matriz complexa, cuja dimensão é a mesma do truncamento do somatório da fórmula da inversa. Isto é, neste caso, em cada passo em X se inverte uma matriz complexa de mais 200×200 elementos.

Para se ter uma idéia do custo computacional, foi resolvido o problema da ve-

locidade do fluido com o somatório da fórmula da inversa truncado inicialmente em 100 termos. O programa levou 231 segundos para obter resultados em toda a região de entrada hidrodinâmica em um micro computador equipado com processador Pention III, *clock* de 950MHz e memória RAM de 254MB. A tolerância que foi estipulada para a convergência da linearização foi de $2 * 10^{-7}$ e do adaptativo para o número de autovalores de $5 * 10^{-7}$. Nesta situação o programa obteve 27 perfis de velocidade ao longo da coordenada axial X .

Estes valores para o truncamento do somatório da fórmula da inversa são bastante altos. A comprovação disso vem do fato que dispositivo adaptativo diminui o número de autovalores logo nos primeiros passos X , mesmo que a sua tolerância seja de $5 * 10^{-7}$. Isso significa que o erro de truncamento é sempre bem menor que a tolerância citada em qualquer parte de interesse do domínio. No caso acima, a primeira diminuição do número de autovalores ocorreu para aproximadamente 0,5% do comprimento de entrada hidrodinâmico.

Devido a sua não linearidade, o algoritmo resolve o problema da velocidade do fluido localmente, onde os valores de X são determinados automaticamente. Já para o caso da equação da Energia, o usuário pode definir para que valores de X quer os perfis de temperaturas. Para os parâmetros acima, o tempo de processamento de cada perfil de temperaturas é de aproximadamente um segundo. Porém, se forem calculados vários perfis, o adaptativo para o número de autovalores da temperatura poderá atuar e diminuir consideravelmente este tempo.

Os resultados para a velocidade do fluido no centro do escoamento obtidos aqui apresentam boa concordância com a literatura. Comparando com a referência [Cotta, 1993], a diferença percentual máxima foi de 1,094% e a diferença absoluta máxima foi de 0,01106. Quando se compara com a referência [Shah e London, 1978], estas mesmas diferenças são 0,742% e 0,01556; respectivamente.

Para a temperatura de mistura do fluido, θ_B , os resultados são ainda melhores. Os valores foram comparados com a referência [Cotta, 1993]. Com o número de Prandtl, Pr , valendo 0,72; a maior diferença absoluta foi de 0,002886 e a maior diferença percentual foi de 1,059%. Esta diferença percentual não é significativa porque o valor absoluto da temperatura de mistura onde ela foi detectada é próximo de zero. Tanto isso é verdade que para este mesmo local, a diferença absoluta encontrada foi de 0,000538. Para $Pr = 10,0$; a maior diferença percentual foi de 0,200% e a absoluta de 0,000361.

Outras abordagens para a não linearidade devem ser pensadas como sugestão de futuros trabalhos. Existem várias formas de se contornar esta dificuldade. Pode-se tentar procedimentos analíticos, como o Método da Decomposição [Adomian, 1988] ou ainda expansões em séries dos coeficientes não lineares em outras formas de procedimentos iterativos. No primeiro caso, apesar de algumas dificuldades típicas da implementação deste método, a solução se tornaria totalmente analítica. Existiriam apenas duas aproximações: uma do truncamento do somatório da fórmula da inversa da **GITT** e outra do truncamento da quantidade de polinômios de Adomian utilizados. Se a opção para o tratamento da não linearidade forem os procedimentos iterativos citados, o algoritmo desenvolvido neste trabalho poderá ser utilizado como estimativa inicial dos resultados, o que deve contribuir para acelerar a convergência do procedimento de linearização a ser definido no futuro.

Pelo exposto acima, entende-se que os objetivos deste trabalho tenham sido alcançados a contento. Logrou-se uma contribuição à **GITT**, tornado esta técnica mais analítica. As principais conseqüências práticas foram duas: a possibilidade de se aumentar a quantidade de autovalores, o que permite melhor precisão da solução e o baixo custo computacional típico de procedimentos analíticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adomian, G., 1988. "A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics", **Journal Of Mathematical Analysis an Applications**, vol. 1(135), pp. 501 – 544.

Almeida, A. R. and Cotta, R. M. "On the Solution of Convection-Diffusion Problems Within Unbounded Domains Through Integral Transformation", **J. of the Franklin Institute**, vol. 336, pages =.

Almeida, A. R., Cotta, R. M., and Kakaç, S., 1995. "Integral Transform Methodology for Convection-Diffusion Problems in Petroleum Reservoir Engineering", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 38(18), pp. 3359–3367.

Baohua, C. and Cotta, R. M., 1993. "Integral Transform Analysis of Natural Convection in Porous Enclosures", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, vol. 17, pp. 787.

Barichello, L. B., 1992. "**Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional**", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Barichello, L. B. and Vilhena, M. T. M. B., 1993. "A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation", **Kerntechnik**, vol. 58(3), pp. 182–184.

Brancher, J. D., Cardona, A. V., and Vilhena, M. T. M. B., 1998. "A Recursive Method to Invert the LTS_N Matrix", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33(4), pp. 393–401.

Brancher, J. D., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B., 1999. "The LTS_N Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimuthal Symmetry With Severe Anisotropy",

Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 62(-), pp. 743–753.

Campos Velho, H., 1992. "Matriz não modal em integração e inicialização num modelo barotrópico e um estudo numérico da dispersão vertical turbulenta", Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1994. "A Solution of Linear Transport Equation Using Walsh Function and Laplace Transform", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21(8), pp. 495–505.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1997. "Analytical Solution for A_N Approximation", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 31(3), pp. 219–223.

Cardona, A. V. and Vilhena, M. T. M. B., 1998. "A Comparative Study of Analytical Solutions for Some One-Dimensional Transport Equation Approximations", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33(3), pp. 289–300.

Cheroto, S., Mikhailov, M. D., Kakaç, S., and Cotta, R. M., 1999. "Periodic Laminar Forced Convection:- Solution via Symbolic Computation and Integral Transforms", **Int. J. Thermal Sciences - Revue Generale de Thermique**, vol. 38(7), pp. 613–621.

Correa, E. J. and Cotta, R. M., 1998. "Enhanced Lumped-Differential Formulations of Difusion Problemas", **Appl. Math. Modeling**, vol. 22, pp. 137–152.

Cotta, R. M., 1993. "Integral Transforms in Computarional Heat and Fluid Flow". CRC Press, Boca Raton, FL, EUA.

Cotta, R. M., 1994a. "Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: - The Integral Transform Method", **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 37(1), pp. 381–394.

Cotta, R. M., 1994b. "The Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow", **Proc. of the 10th Int. Heat Transfer Conf., Brighton, UK**, vol. 1(SK-3), pp. 43–60.

Cotta, R. M. and Carvalho, T. M., 1991. "Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems", **Proc. of the 7th Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar & Turbulent Flow, Part 1, Stanford, CA**, vol. 1, pp. 106–115.

Cotta, R. M., Guerrero, J. S. P., and Neto, F. S., 1992. "Hybrid Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations via Integral Transformation", **In Proc. of the 2nd Int. Conf. Advanced Comut. Methods in Heat Transfer, Heat Transfer 92, Milan, Italy**, vol. 1, pp. 735–750.

Cotta, R. M. and Mikhailov, M. D., 1997. "**Heat Conduction - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**". John Wiley & Sons, Chichester.

Degrazia, G. and Moraes, O., 1992. "A Model for eddy diffusivity in a stable boundary layer", **Bound.-Layer Meteor.: Dordrecht**, vol. 58, pp. 205–214.

dos Santos, C. A. C. "**Soluções Analíticas para a Convecção Forçada Laminar em Tubos Circulares Externamente Aletados**", PhD thesis, ITA, São José dos Campos.

dos Santos, C. A. C., Cotta, R. M., and Ösizik, M. N., 1988. "Laminar Forced Convection Inside Externally Finned Tubes", **Anais do Segundo Encontro de Ciências Térmicas - ENCIT 88**, vol. 1(1), pp. 87–90.

Figueira da Silva, E., 1994. "**Integral Transformation of the Boundary Layer Equations for Internal Convection in the Streamfunction and Primitive Variables Formulations**", Dissertação de mestrado, Mechanical Engineering Dept. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Figueira da Silva, E. and Cotta, R. M., 1996. "Benchmark Results for Internal Forced Convection Through Integral Transformation", **Int. Comm, Heat & Mass Transfer**, vol. 23(7), pp. 1019–1029.

Figueira da Silva, E., Pérez Guerrero, J. S., and Cotta, R. M., 1999. "Integral Transform Solution of Boundary Layer Equations in Streamfunction-only Formulation", **Int. J. Non-Linear Mechanics**, vol. 34, pp. 51–61.

Gerrero, J. S. P. and Cotta, R. M., 1995. "Integral Transform Solution of Developing Laminar Duct Flow in Navier-Stokes Formulation", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, vol. 20, pp. 1203.

Gerrero, J. S. P., Cotta, R. M., and Neto, F. S., 1993. "Integral Transformation of Navier -Stokes Equations for Incompressible Laminar flow in Channels", **In Proc. of the 8th Int. Conf. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow. Int. J. Numer. Meth. Fluids, Swansea, U.K.**, vol. 1, pp. 1195–1206.

Gonçalves, G. A., 1999. "**Solução LTS_N da Equação Adjunta de Transporte de Nêutrons com Fonte Arbitrária para Elevada Ordem de Quadratura numa Placa Homogênea**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Gonçalves, G. A., Segatto, C. F., and Vilhena, M. T. M. B., 2000. "The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 66, pp. 271–276.

Gondim, R. R., 1992. "**Solução Analítica e o Estudo Paramétrico para a Convecção Forçada em Tubos Aletados**", Dissertação de mestrado, UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.

Guerrero, J. S. P. and Cotta, R. M., 1992. "Integral Transform Method for the Navier-Stokes Equations in Stream-Function Only Formulation", **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, vol. 15, pp. 399.

Guerrero, J. S. P. and Cotta, R. M., 1996. "Benchmark Integral Transform Result for Flow Over a Backward - Facing Step", **Computers & Fluids**, vol. 25(5), pp. 527–540.

Leal, M., Guerrero, J., and Cotta, R. M., 1999. "Natural Convection Inside Two-Dimensional Cavities - The Integral Transform Method", **Comm. Num. Meth. Eng.**, vol. 15, pp. 113–125.

Leal, M. A., 1998. "Natural Convection in Enclosures, in: R.M. Cotta (Ed.), **The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering**". Begell House Inc, New York, pp. 375-395.

Leal, M. A., Machado, H. A., and Cotta, R. M., 2000. "Integral Transform Solutions of Transient Natural Convection in Enclosures with Variable Fluid Properties", **Int. J. Heat & Mass Transfer**, vol. 43, pp. 3977–3990.

Machado, H., 1992. "**Solução Híbrida Numérica-Analítica para as Equações de Camada Limite em Convecção Interna**", Dissertação de mestrado, Mechanical Engineering Dept. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Machado, H. A. and Cotta, R. M., 1994. "Integral Transform Method for the Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluid Flow Problems", **Int. J. Numer. Meth. Heat & Fluid Flow**, vol. 4.

Machado, H. A. and Cotta, R. M., 1999. "A Flexible Algorithm for Transient Thermal Convection Problems via Integral Transforms", **Proc. of the Int. Symp. on Computational Heat and Mass Transfer, Keynote Lecture, North Cyprus, Turkey**, vol. 1, pp. 13–31.

Mikhailov, M. D. and Cotta, R. M., 1994. "Integral Transform Method for Eigenvalue Problems", **Comm. Num. Meth. Eng.**, vol. 10, pp. 827–835.

Mikhailov, M. D., Cotta, R. M., and Kakaç, S., 1996. "Ordering Rules for Double and Triple Eigenseries in the Solution of Multidimensional Heat and Fluid Flow Problems", **Int. Comm. Heat & Mass Transfer**, vol. 23, pp. 299–303.

Moura, A. B., Vilhena, M., and Degrazia, G., 1995. "Solução Analítica para a Dispersão Vertical Turbulenta em Uma Camada Limite Estável", **COBEM**, vol. 1.

Nieuwstadt, F., 1984. "The Turbulent structure of stable nocturnal boundary layer", **J. Atmos. Sci.: Boston.**, vol. 41, pp. 2202–2216.

Oliveira, J. V. P., 1993. "**Formulação LTS_N para o Problema de Ordenada Discreta com Anisotropia**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Pazos, R. P. and Vilhena, M. T. M. B., 1998a. "Convergence in Transport Theory", **Applied and Numerical mathematics**, vol. 30, pp. 1–14.

Pazos, R. P. and Vilhena, M. T. M. B., 1998b. "Convergence of the LTS_N Method: Approach of C_0 Semi-Groups", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 34(1), pp. 77–86.

Pazos, R. P. and Vilhena, M. T. M. B., 1999. "Convergence of the Spectral Approximations for Steady-State Two-dimensional Transport Problem", **Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications—International Conference, Madrid, Spain**, vol. 2, pp. 1965–1976.

Pimentel, L. C. G., Cotta, R. M., and Kakaç, S., 1999. "Fully Developed Turbulent Flow in Ducts with Symmetric and Asymmetric Rough Walls", **Chem. Eng. J.**, vol. 74, pp. 147–153.

Segatto, C. F. and Vilhena, M. T. M. B., 1999. "The State-of-the-art of the LTS_N Method", **Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications—International Conference, Madrid, Spain**, vol. 2, pp. 1618–1631.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Brancher, J. D., 1999a. "The One-Dimensional LTS_N Formulation for High Degree of Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 61, pp. 39.

Segatto, C. F., Vilhena, M. T. M. B., and Gomes, M. G., 1999b. "The One-Dimensional LTS_N Solution In a Slab With High Degree of Quadrature", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 26, pp. 925–934.

Shah, R. and London, A., 1978. "**Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Adv. Heat Transfer**". Academic Press, New York.

Venkatran, A. and Paine, R. A., 1985. "A Model to Estimate Dispersion of Elevated Releases into a Shear-Dominated Boundary Layer", **Atmospheric Environment**, vol. 19, pp. 797.

Vilhena, M. T. M. B., Barichello, L. B., Zabadal, J., Segatto, C. F., and Cardona, A. V., 1998. "General Solution of One-dimensional Approximations To the Transport Equation", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33, pp. 99–115.

Wortmann, S., 1995. "**Convecção Forçada Transiente no escoamento laminar em desenvolvimento simultâneo**", Dissertação de mestrado, UFPB, João Pessoa, PB, Brasil.

Zabadal, J., Vilhena, M. T. M. B., and Barichello, L. B., 1995. "An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain", **Progress in Nuclear Energy**, vol. –.

Özisik, M. N., 1980. "**Heat Conduction**". John Wiley, New York.

APÊNDICE I

Determinação de $V(X, Y)$

Para a determinação da velocidade transversal transformada, a equação 4.11 será usada para expandir a variável dependente $U^*(X, Y)$ da equação da Continuidade (eq. 4.6, produzindo

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X) \right) \right] + \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} = 0. \quad (\text{I.1})$$

Em seguida, para poder se aproveitar as condições de contorno para $V(X, Y)$ e determinar uma expressão transformada para toda a variável transversal, a equação I.1 será integrada com o seguinte operador $\int_Y^1 dR$, o que resulta em

$$\int_Y^1 \frac{\partial V(X, R)}{\partial R} dR = \int_Y^1 -\frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(R) \bar{u}_i(X) \right) \right] dR, \quad (\text{I.2})$$

ou

$$V(X, 1) - V(X, Y) = - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{u}_i'(X)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \int_Y^1 \varphi_i(R) dR \right). \quad (\text{I.3})$$

Usando-se as equações 4.2(f, g) e 4.17 a expressão final, após algumas manipulações algébricas, é

$$V(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(Y) \overline{u_i'}(X) \quad (\text{I.4})$$

e está finalmente definida a expressão para $V(X, Y)$.

APÊNDICE II

Determinação de $\frac{dP^*}{dX}$

O primeiro passo para se determinar o gradiente de pressão transformado, é isolar $-\frac{dP^*}{dX}$ na equação 4.7

$$\begin{aligned} -\frac{dP^*}{dX} &= (U^*(X, Y) + U_\infty(Y)) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} + \\ &+ V(X, Y) \left(\frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} - 3Y \right) + Re^{-1} \left(3 - \frac{\partial^2 U^*(X, Y)}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Em todos os outros casos, a integração é precedida de uma expansão na base de autovetores do problema auxiliar. Para este caso particular, esta ordem será invertida. Isto permitirá uma simplificação a equação final. Portanto, a equação II.1 será operada por $\int_0^1 dY$ produzindo

$$\begin{aligned} -\frac{dP^*}{dX} \int_0^1 dY &= \int_0^1 (U^*(X, Y) + U_\infty(Y)) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} dY + \\ &+ \int_0^1 V(X, Y) \left(\frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} - 3Y \right) dY + Re^{-1} \int_0^1 \left(3 - \frac{\partial^2 U^*(X, Y)}{\partial Y^2} \right) dY \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

ou, usando a condição de contorno 4.6c e sabendo que

$$\frac{dU_\infty(Y)}{dY} = \frac{d}{dY} \left(\frac{3}{2} (1 - Y^2) \right) = -3Y, \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned}
-\frac{dP^*}{dX} &= \int_0^1 (U^*(X, Y) + U_\infty(Y)) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} dY + \\
&+ \int_0^1 V(X, Y) \left(\frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} - \frac{dU_\infty(Y)}{dY} \right) dY + Re^{-1} \left(- \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} + 3 \right).
\end{aligned} \tag{II.4}$$

Dando atenção apenas ao segundo termo do segundo membro da equação II.14, pode-se reescrevê-lo na seguinte forma

$$\int_0^1 V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY. \tag{II.5}$$

Porém, se alguém tomar a derivada em relação a Y da expressão

$$V(X, Y) (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)), \tag{II.6}$$

obterá

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial Y} [V(X, Y) (U^*(X, Y) - U_\infty(Y))] = \\
&= \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) + V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y))
\end{aligned} \tag{II.7}$$

ou

$$\begin{aligned}
&V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) = \\
&= - \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) + \frac{\partial}{\partial Y} [V(X, Y) (U^*(X, Y) - U_\infty(Y))].
\end{aligned} \tag{II.8}$$

Substituindo a expressão II.8 na II.5

$$\int_0^1 V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY = \int_0^1 \left\{ -\frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial Y} [V(X, Y) (U^*(X, Y) - U_\infty(Y))] \right\} dY \quad (\text{II.9})$$

e procedendo a integração

$$\int_0^1 V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY = - \int_0^1 \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY + \\ + [V(X, 1) (U^*(X, 1) - U_\infty(Y))] - [V(X, 0) (U^*(X, 0) - U_\infty(Y))] . \quad (\text{II.10})$$

Das condições de contorno do problema 4.2, sabe-se que $V(X, 1) = V(X, 0) = 0$, portanto

$$\int_0^1 V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY = - \int_0^1 \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY. \quad (\text{II.11})$$

Da equação da continuidade (eq 4.2) sabe-se que

$$\frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} = - \frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} \quad (\text{II.12})$$

portanto, usando-se II.12 em II.11

$$\int_0^1 V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY = \int_0^1 \frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY. \quad (\text{II.13})$$

Substituindo-se a equação II.13 na equação II.14 obtém-se

$$-\frac{dP^*}{dX} = \int_0^1 (U^*(X, Y) + U_\infty(Y)) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} dY + \int_0^1 \frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} (U^*(X, Y) - U_\infty(Y)) dY + Re^{-1} \left(- \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} + 3 \right) \quad (\text{II.14})$$

e por último

$$-\frac{dP^*}{dX} = 2 \int_0^1 (U^*(X, Y) + U_\infty(Y)) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} dY + \frac{- \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} + 3}{Re}. \quad (\text{II.15})$$

Na referência [Cotta, 1993], após determinar a equação acima, II.15, um procedimento análogo ao exposto é executado para a expressão

$$\int_0^1 V(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} (U^*(X, Y)) dY, \quad (\text{II.16})$$

no lugar da expressão II.5 e o resultado final é

$$-\frac{dP^*}{dX} = 2 \int_0^1 U^*(X, Y) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} dY + \int_0^1 U_\infty(Y) \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial X} dY - 3 \int_0^1 Y V(X, Y) dY + \frac{3 - \frac{\partial U^*(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1}}{Re}. \quad (\text{II.17})$$

Para expandir as variáveis $U(X, Y)$ e $V(X, Y)$ serão usadas as equações 4.11 e 4.15 respectivamente na equação II.17 obtendo-se

$$\begin{aligned}
-\frac{dP^*}{dX} &= 2 \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_i(Y) \bar{u}_i(X)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_j(Y) \bar{u}_j(X)}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\} dY + \\
&\quad + \int_0^1 \left\{ U_{\infty}(Y) \frac{\partial}{\partial X} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_i(Y) \bar{u}_i(X)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\} dY + \\
&\quad - 3 \int_0^1 \left\{ Y \sum_{i=1}^{\infty} \left(F_i(Y) \frac{d\bar{u}_i(X)}{dX} \right) \right\} dY + \frac{1}{Re} \left[3 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_i'(1) \bar{u}_i(X)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{II.18}$$

Ou, rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}
-\frac{dP^*}{dX} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2 \bar{u}_i(X) \bar{u}_j'(X)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j(Y) dY \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{u}_i'(X)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) U_{\infty}(Y) dY \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-3 \bar{u}_i'(X) \int_0^1 Y F_i(Y) dY \right) + \frac{1}{Re} \left[3 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_i'(1) \bar{u}_i(X)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{II.19}$$

A solução da integral do primeiro termo do segundo membro da equação II.19, pode ser vista com detalhes em um procedimento análogo no apêndice IV, mais precisamente na integração do primeiro membro da equação IV.4. Já nos segundo e terceiro termos do segundo membro, se faz uso das equações 4.18, 4.19 e 4.20. O resultado final é, portanto,

$$-\frac{dP^*}{dX} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(2 \bar{u}_i(X) \bar{u}_i'(X) + \bar{u}_i'(X) H_i - \frac{\varphi_i'(1) \bar{u}_i(X)}{Re N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{3}{Re}. \tag{II.20}$$

APÊNDICE III

Transformação Integral da Equação do Momentum

Neste apêndice será transformada a equação do Momentum (eq. 4.13), em que a variável U^* foi expandida. O primeiro procedimento, conforme está registrado na seção 4.2.1, é usar as equações 4.15 e 4.16 para substituir as variáveis $V(X, Y)$ e $\frac{dP^*}{dX}$. O resultado é

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_j(Y) \overline{u}_j(X)}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \right) + U_{\infty}(Y) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_k(Y) \overline{u}_k'(X)}{N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (F_k(Y) \overline{u}_k'(X)) \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_j'(Y) \overline{u}_j(X)}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \right) - 3Y \right] = \quad (III.1) \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \overline{u}_k(X) \overline{u}_k'(X) - \frac{\varphi_k'(1) \overline{u}_k(X)}{Re N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} + H_k \overline{u}_k'(X) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_k''(Y) \overline{u}_k(X)}{N_{v,k}^{\frac{1}{2}} Re} \right),
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y)}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_k}'(X) U_{\infty}(Y) \varphi_k(Y)}{N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) \varphi_j'(Y) F_k(Y)}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_k}'(X) 3Y F_k(Y)) = \quad (\text{III.2}) \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\overline{u_k}(X) \overline{u_k}'(X) - \frac{\varphi_k'(1) \overline{u_k}(X)}{\text{Re } N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} + H_k \overline{u_k}'(X) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_k}(X) \varphi_k''(Y)}{\text{Re } N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

Integrando toda a equação acima com o operador 4.14, o resultado é

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j(Y) \varphi_k(Y) dY}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_k}'(X) \int_0^1 U_{\infty}(Y) \varphi_i(Y) \varphi_k(Y) dY}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j'(Y) F_k(Y) dY}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_k}'(X) 3 \int_0^1 Y \varphi_i(Y) F_k(Y) dY}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \right) = \quad (\text{III.3}) \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\overline{u_k}(X) \overline{u_k}'(X) - \frac{\varphi_k'(1) \overline{u_k}(X)}{\text{Re } N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} + H_k \overline{u_k}'(X) \right) \frac{\int_0^1 \varphi_i(Y) dY}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_k}(X) \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_k''(Y) dY}{\text{Re } N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

Usando as equações 4.21f, 4.21i, 4.21g, 4.21j e 4.17, a equação se torna

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) A_{i,j,k}) + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_k}'(X) Q_{i,k}^*) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) B_{i,j,k}) + \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_k}'(X) 3 S_{i,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \overline{u_k}(X) \overline{u_k}'(X) - \frac{\varphi_k'(1) \overline{u_k}(X)}{Re N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} + H_k \overline{u_k}'(X) \right) F_i(0) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u_k}(X) \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_k''(Y) dY}{Re N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right).
\end{aligned} \tag{III.4}$$

Avalia-se agora parte do último termo do segundo membro, mais precisamente, a integral dividida pelas normas, ou seja

$$\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_k''(Y) dY. \tag{III.5}$$

Na literatura sobre a **GITT**, termos como estes são integrados com o auxílio do Teorema de Green [Özisik, 1980] [Cotta, 1993]. No entanto, neste trabalho, será apresentada uma alternativa a esta abordagem. Primeiramente, do problema auxiliar (eq. 4.9), pode-se escrever

$$\frac{d^2 \varphi_i(Y)}{dY^2} = -\mu_i^2 \varphi_i(Y). \tag{III.6}$$

Substituindo-se III.6 na equação III.5

$$\frac{-\mu_k^2}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_k(Y) dY \tag{III.7}$$

e usando a propriedade da ortogonalidade, equação 2.6, o resultado da integral III.7 é $-\mu_k^2$ para $i = k$ e 0 para $i \neq k$. Para maiores detalhes sobre o uso desta propriedade, ver apêndice

IV. Portanto a equação III.4 pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) A_{i,j,k}) + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_k}'(X) Q_{i,k}^*) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_j}(X) \overline{u_k}'(X) B_{i,j,k}) - \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_k}'(X) 3 S_{i,k}) + \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \overline{u_k}(X) \overline{u_k}'(X) - \frac{\varphi_k'(1) \overline{u_k}(X)}{Re N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} + H_k \overline{u_k}'(X) \right) F_i(0) + \frac{\overline{u_i}(X) \mu_i^2}{Re} = 0
\end{aligned} \tag{III.8}$$

ou, usando a equação 4.21n e rearrumando os termos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \overline{u_k}'(X) \sum_{j=1}^{\infty} [(A_{i,j,k} + B_{i,j,k} - 2 F_i(0) \delta_{j,k}) \overline{u_j}(X)] + Q_{i,k}^* - 3 S_{i,k} - H_k F_i(0) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{u_k}(X) \left(\frac{\varphi_k'(1) F_i(0)}{Re N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\delta_{i,k} \mu_k^2}{Re} \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{III.9}$$

e ainda, as equações 4.21c, 4.21h e 4.21e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ \overline{u_k}'(X) e_{i,k} \} + \sum_{k=1}^{\infty} [\overline{u_k}(X) d_{i,k}] = 0. \tag{III.10}$$

Por último, substituindo pelas expressões 4.21b 4.21a 4.21d e reescrevendo em notação matricial

$$E \cdot U'(X) + D \cdot U(X) = 0. \tag{III.11}$$

APÊNDICE IV

Determinação da Condição de Entrada para o Sistema EDO Transformado do Problema da Velocidade

Para condição de entrada do problema transformado, usa-se a condição de entrada 4.6(a, b) do problema original, ou seja

$$U^*(0, Y) = 1 - U_\infty(Y). \quad (\text{IV.1})$$

Usando a equação 4.11 pode-se expandir a variável $U^*(X, Y)$ e a equação IV.1 passa a ser

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(X) = 1 - U_\infty(Y); \quad (\text{IV.2})$$

integrando a equação IV.2 com o operador definido em 4.14

$$\frac{1}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left[\varphi_j(Y) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}}} \varphi_i(Y) \bar{u}_i(0) \right) \right] dY = \frac{1}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 [\varphi_j(Y) (1 - U_\infty(Y))] dY \quad (\text{IV.3})$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_i(0)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j(Y) dY = \frac{1}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_j(Y) dY - \frac{1}{N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_j(Y) U_\infty(Y) dY. \quad (\text{IV.4})$$

notação explícita, ou seja

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{u}_i(0)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j(Y) dY \equiv \\
& \equiv \begin{bmatrix} \frac{\overline{u}_1(0)}{N_{v,1}^{\frac{1}{2}} N_{v,1}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_1(Y) \varphi_1(Y) dY + \frac{\overline{u}_2(0)}{N_{v,2}^{\frac{1}{2}} N_{v,1}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_2(Y) \varphi_1(Y) dY + \dots \\ \frac{\overline{u}_1(0)}{N_{v,1}^{\frac{1}{2}} N_{v,2}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_1(Y) \varphi_2(Y) dY + \frac{\overline{u}_2(0)}{N_{v,2}^{\frac{1}{2}} N_{v,2}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_2(Y) \varphi_2(Y) dY + \dots \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{IV.5}
\end{aligned}$$

Segundo a equação 2.6, as integrais da equação IV.5, só não são nulas para $i = j$ quando valem a unidade, portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{u}_i(0)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j(Y) dY \equiv \begin{bmatrix} \overline{u}_1(0) + 0 + 0 + \dots \\ 0 + \overline{u}_2(0) + 0 + \dots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{u}_1(0) \\ \overline{u}_2(0) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{IV.6}$$

ou simplesmente

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{u}_i(0)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{v,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \varphi_i(Y) \varphi_j(Y) dY = \overline{u}_j(0). \tag{IV.7}$$

Para o segundo termo, usa-se as equações 4.17 e 4.19, podendo-se finalmente escrever

$$\overline{u}_i(0) = F_i(0) - H_i^*. \tag{IV.8}$$

APÊNDICE V

Transformação Integral da Equação da Energia

Reescrevendo a equação 4.36 obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u}_i(X) \overline{t}_j'(X) \varphi_i(Y) \phi_j(Y)}{N_{v,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{t}_j'(X) U_{\infty}(Y) \phi_j(Y)}{N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{u}_i'(X) \overline{t}_j(X) F_i(Y) \phi_j'(Y)}{N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\phi_j''(Y) \overline{t}_j(X)}{Pe N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right). \tag{V.1}
 \end{aligned}$$

Integrando a equação com o operador 4.37 o resultado é

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{t}_j'(X) \overline{u}_k(X) \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j(Y) \varphi_k(Y) dY}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}} N_{v,k}^{\frac{1}{2}}} \right) + \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{t}_j'(X) \int_0^1 U_{\infty}(Y) \phi_i(Y) \phi_j(Y) dY}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{t}_j(X) \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j''(Y) dY}{Pe N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right) + \tag{V.2} \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{t}_j(X) \overline{u}_k'(X) \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j'(Y) F_k(Y) dY}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Usando as equações 4.38f, 4.38h e 4.38g para fazer as devidas substituições, a equação simplifica-se para

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{t_j}'(X) \overline{u_k}(X) A_{i,j,k}^{\theta}) + \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{t_j}'(X) P_{i,j}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{t_j}(X) \overline{u_k}'(X) C_{i,j,k}) = \\
& = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{t_j}(X) \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j''(Y) dY}{Pe N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right). \tag{V.3}
\end{aligned}$$

Para a integral do segundo membro, será usada a mesma alternativa ao Teorema de Green do apêndice III. Do problema auxiliar da temperatura 4.32, sabe-se que

$$\frac{d^2 \phi_i(Y)}{dY^2} = -\beta_i^2 \phi_i(Y). \tag{V.4}$$

Reescrevendo o termo e resolvendo a integral, levando-se em consideração a ortogonalidade dos autovetores $\phi_i(Y)$ (ver apêndice IV), tem-se

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{t_j}(X) \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j''(Y) dY}{Pe N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \right) = -\frac{\beta_j^2 \overline{t_j}(X)}{Pe}, \tag{V.5}$$

que, substituindo-se na equação V.3 e rearrajando os termos, se torna

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{t_j}'(X) \left[P_{i,j} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k}(X) A_{i,j,k}^{\theta} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{t_j}(X) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k}'(X) C_{i,j,k} + \frac{\beta_j^2 \delta_{i,j}}{Pe} \right] = 0. \tag{V.6}$$

Usando as definições 4.38c e 4.38e, pode-se escrever

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{t_j}'(X) a_{i,j}(\overline{U}(X)) + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{t_j}(X) b_{i,j}(\overline{U}'(X)) = 0 \tag{V.7}$$

e finalmente, fazendo uso das expressões 4.38a, 4.38d, e 4.38b e escrevendo a equação em notação matricial obtém-se a transformação pretendida

$$A(\overline{U}(X)) \cdot \overline{\Theta}'(X) + B(\overline{U}'(X)) \cdot \overline{\Theta}(X) = 0. \tag{V.8}$$

APÊNDICE VI

Determinação da Condição de Entrada para o Sistema EDO Transformado do Problema da Temperatura

Partindo da condição de entrada, 4.2j, k,

$$\theta(0, Y) = 1; \quad (\text{VI.1})$$

usando a fórmula da inversa para o problema da temperatura, 4.34,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}}} \phi_i(Y) \bar{t}_i(0) = 1; \quad (\text{VI.2})$$

além do operador integral para este caso, 4.37,

$$\frac{1}{N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \left(\phi_j(Y) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}}} \phi_i(Y) \bar{t}_i(0) \right) dY = \frac{1}{N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \phi_j(Y) dY \quad (\text{VI.3})$$

e ainda rearrumando a equação, tem-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{t}_i(0)}{N_{\theta,i}^{\frac{1}{2}} N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \phi_i(Y) \phi_j(Y) dY \right) = \frac{1}{N_{\theta,j}^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \phi_j(Y) dY. \quad (\text{VI.4})$$

Para o primeiro membro da equação acima, VI.4, deve-se usar a propriedade da ortogonalidade dos autovetores $\phi_j(Y)$. Para maiores detalhes, deve-se consultar o apêndice IV em que este procedimento é usado em uma integração análoga ao caso aqui estudado.

Para o segundo membro, usa-se a definição 4.40. O resultado final da transformação integral da condição de entrada da temperatura, é, então

$$\bar{t}_i(0) = F_i^\theta(0). \quad (\text{VI.5})$$

[Cotta e Mikhailov, 1997]
[Cotta, 1994a]
[Cotta, 1994b]
[Cotta e Carvalho, 1991]
[Machado e Cotta, 1994]
[Figueira da Silva, 1994]
[Guerrero e Cotta, 1992]
[Cotta et al., 1992]
[Baohua e Cotta, 1993]
[Gerrero et al., 1993]
[Gerrero e Cotta, 1995]
[Mikhailov e Cotta, 1994]
[Leal et al., 1999]
[Leal, 1998]
[Guerrero e Cotta, 1996]
[Correa e Cotta, 1998]
[Cheroto et al., 1999]
[Figueira da Silva e Cotta, 1996]
[Figueira da Silva et al., 1999]
[Pimentel et al., 1999]
[Mikhailov et al., 1996]
[Almeida et al., 1995]
[Almeida e Cotta,]
[Leal et al., 2000]
[Shah e London, 1978]
[Cotta, 1993]
[Degrazia e Moraes, 1992]
[Moura et al., 1995]
[Campos Velho, 1992]
[Gerrero et al., 1993]

[Machado, 1992]

[dos Santos,]

[dos Santos et al., 1988]

[Gondim, 1992]

[Nieuwstadt, 1984]

[Venkatran e Paine, 1985]

[Cotta e Carvalho, 1991]

[Baohua e Cotta, 1993]

[Gerrero et al., 1993]

[Leal et al., 1999]

[Cardona e Vilhena, 1998]

[Pazos e Vilhena, 1998b]

[Pazos e Vilhena, 1998a]

[Pazos e Vilhena, 1999]

[Vilhena et al., 1998]