

**APLICAÇÃO DA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO
EM MATERIAIS COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS**

Georg Koval Junior

Porto Alegre
Agosto 2003

GEORG KOVAL JUNIOR

**APLICAÇÃO DA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO
EM MATERIAIS COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre

Agosto 2003

KOVAL JUNIOR, Georg

Aplicação da teoria da homogeneização em materiais compósitos viscoelásticos / Georg Koval Junior. – Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2003.

n p. 180

Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul; Mestre em Engenharia. Orientadores: Guillermo Juan Creus; Samir Maghous.

1. Viscoelasticidade 2. Envelhecimento 3. Compósitos
4. Séries Assintóticas I. Título

CCAA2

GEORG KOVAL JUNIOR

**APLICAÇÃO DA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO
EM MATERIAIS COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelos
professores orientadores e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 22 de Agosto de 2003

Prof. Guillermo Juan Creus
Doutor pela UFRJ
Orientador

Prof. Samir Maghous
Docteur pela ENPC
Orientador (França)

Prof. Américo Campos Filho
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Armando Miguel Awruch (UFRGS)
Doutor pela COPPE/UFRJ

Prof. Eduardo Bittencourt (UFRGS)
Doutor pela UFRGS

Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca (UFRGS)
Ph.D. pela University of Michigan

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores Guillermo Juan Creus e Samir Maghous, orientadores deste trabalho, pelas importantes lições transmitidas, pela amizade e apoio em todas as situações.

Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil por toda a atenção despendida.

À CAPES pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Aos colegas e amigos do CEMACOM pela amizade e descontração nos momentos de trabalho.

Aos meus pais, meu irmão e meus avós por sempre estarem ao meu lado me desejando o melhor.

E à Ana Paula, minha namorada, por todo o amor e compreensão.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	VI
LISTA DE SÍMBOLOS	IX
RESUMO	XIV
ABSTRACT	XV
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 OBJETIVOS	2
1.3 EVOLUÇÃO DO TRABALHO	3
1.4 DESCRIÇÃO GERAL	4
2 FUNDAMENTOS DA HOMOGENEIZAÇÃO PERIÓDICA	6
2.1 CÉLULA ELEMENTAR	6
2.2 ESTRUTURA DE CAMPOS	6
2.3 LEMA DE HILL	8
2.3.1 Demonstração	8
2.4 PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO	9
2.5 ABORDAGEM POR DEFORMAÇÕES	10
2.6 ABORDAGEM POR TENSÕES	11
2.7 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS DUAS ABORDAGENS	13
2.7.1 Relação entre \underline{A} e \underline{B}	13
2.7.2 Identidade: $\langle \underline{A}^T : \underline{c} : \underline{d} : \underline{B} \rangle = \langle \underline{A}^T : \underline{c} \rangle : \langle \underline{d} : \underline{B} \rangle$	13
2.7.3 Equivalência $\underline{C}^{\text{hom}} : \underline{D}^{\text{hom}} = \underline{I}$	14
2.8 POTENCIAL ELÁSTICO MACROSCÓPICO	14
2.8.1 Princípio da minimização em deslocamento	15
2.8.2 Caso elástico linear	16
2.9 ELEMENTOS FINITOS (CONDIÇÃO PERIÓDICA)	17
3 AVALIAÇÃO DA ELASTICIDADE MACROSCÓPICA DE COMPÓSITOS COM FIBRAS UNIDIMENSIONAIS	20

3.1	APROXIMAÇÃO DE \underline{u}_p PELOS POLINÔMIOS ASSOCIADOS DE LEGENDRE.....	20
3.1.1	Utilização de séries simples	21
3.1.2	Utilização de séries compostas (fibras quadradas)	22
4	RESULTADOS PARA O CASO ELÁSTICO.....	24
4.1	COMPORTAMENTO DO DESLOCAMENTO E DA DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA PERIÓDICOS....	24
4.1.1	Parâmetros geométricos	24
4.1.2	Propriedades dos materiais.....	25
4.1.3	Exemplos.....	25
4.1.3.1	Tração unitária na direção x	25
4.1.3.2	Cisalhamento unitário na direção xz	25
4.1.4	Observações sobre os exemplos.....	34
4.2	UTILIZAÇÃO DE SÉRIES ADICIONAIS NA REGIÃO DA FIBRA	34
4.3	CONVERGÊNCIA COMPARATIVA DOS ELEMENTOS DE $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$	38
4.3.1	Descrição dos exemplos.....	38
4.3.2	Observações quanto à convergência de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$	39
4.4	INFLUÊNCIA DA FORMA DAS FIBRAS	41
4.5	INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DAS FIBRAS	41
4.6	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS NUMÉRICOS	44
4.6.1	Modelos comparados	44
4.6.2	Comentários sobre as comparações	45
5	HOMOGENEIZAÇÃO EM VISCOELASTICIDADE.....	49
5.1	LEI DE COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO LINEAR	49
5.2	PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO.....	50
5.2.1	Determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$	51
5.3	CASO PARTICULAR: ENVELHECIMENTO POR SOFTENING	51
5.3.1	Resolução Aproximada (softening)	52
5.3.2	Representação de $\underline{\underline{e}}^v$ através de variáveis de estado (softening).....	54
5.4	CASO PARTICULAR: ENVELHECIMENTO POR HARDENING.....	55
5.4.1	Resolução Aproximada (hardening)	57
5.4.2	Representação de $\underline{\underline{e}}^v$ através de variáveis de estado (hardening).....	60

6	RESULTADOS PARA O CASO VISCOELÁSTICO.....	63
6.1	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS NUMÉRICOS (SEM ENVELHECIMENTO).....	63
6.1.1	Modelos comparados	63
6.1.2	Materiais.....	64
6.1.3	Resultados para o exemplo	64
6.2	EFEITO DA QUANTIDADE DE FIBRA E DE SUA RIGIDEZ NO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO HOMOGENEIZADO	67
6.2.1	Comentários sobre o exemplo.....	70
6.3	CASO DE SOFTENING.....	71
6.3.1	Material homogêneo unidimensional.....	71
6.3.2	Resultado para o material homogêneo unidimensional	74
6.3.3	Resultado para matriz viscoelástica com softening e fibras elásticas.....	75
6.3.3.1	Características do exemplo.....	75
6.3.3.2	Resultados do exemplo.....	76
6.4	CASO DE HARDENING.....	83
6.4.1	Material homogêneo e unidimensional	84
6.4.2	Resultado para o material homogêneo unidimensional	85
6.4.3	Resultado para matriz viscoelástica com hardening e fibras elásticas.....	87
6.4.3.1	Características do exemplo.....	87
6.4.3.2	Resultados do exemplo.....	87
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	94
7.1	CONCLUSÕES	94
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	94
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	96
8.1	REFERÊNCIAS FUNDAMENTAIS.....	96
8.2	REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES.....	98
	APÊNDICE A - DETALHES COMPUTACIONAIS DA APLICAÇÃO DA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO EM UMA CÉLULA ELEMENTAR CÚBICA COM FIBRA PRISMÁTICA QUADRADA OU CILÍNDRICA - ELASTICIDADE	100
A.2	RESOLUÇÃO POR SÉRIES SIMPLES (VER ITEM 3.1.1)	100
A.2.1	Deslocamentos	100

A.2.2	Notação	101
A.2.3	Expansões utilizadas para os deslocamentos periódicos.....	102
A.2.4	Deformação Específica	102
A.2.5	Operador média.....	103
A.2.6	Resolução do problema.....	103
A.2.6.1	Média do potencial elástico microscópico	103
A.2.6.2	Sistema de Equações (minimização).....	111
A.2.6.3	Determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$	113
A.3	RESOLUÇÃO POR SÉRIES COMPOSTAS (VER ITEM 3.1.2)	114
A.3.1	Expansões utilizadas para os deslocamentos periódicos.....	114
A.3.2	Deformação específica.....	115
A.3.2.1	Sistema de Equações (minimização).....	120
A.3.2.2	Determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$	125

**APÊNDICE B - DETALHES COMPUTACIONAIS DA APLICAÇÃO DA
TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO EM UMA CÉLULA ELEMENTAR
CÚBICA COM FIBRA PRISMÁTICA QUADRADA OU CILÍNDRICA –
VISCOELASTICIDADE..... 128**

B.1	HOMOGENEIZAÇÃO EM VISCOELASTICIDADE (SOFTENING)	128
B.1.1	Caracterização dos materiais.....	128
B.1.2	Representação de $\underline{\underline{e}}^v$ em variáveis de estado.....	129
B.1.3	Cálculo de $\underline{\underline{e}}^v$	130
B.1.4	Expressão para potencial elástico	132
B.1.5	Sistema de Equações (minimização).....	134
B.1.6	Determinação da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t}$	137
B.2	HOMOGENEIZAÇÃO EM VISCOELASTICIDADE (HARDENING).....	139
B.2.1	Caracterização dos materiais.....	139
B.2.2	Representação de $\underline{\underline{e}}^v$ em variáveis de estado.....	140
B.2.3	Cálculo de $\underline{\underline{e}}^v$	141
B.2.4	Valor inicial para $\underline{\underline{e}}^v$ ($t = t_{0+}$)	143
B.2.5	Expressão para potencial elástico	144
B.2.6	Sistema de Equações (minimização).....	146

B.2.7	Determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t}$	149
-------	---	-----

APÊNDICE C - MODELO EM ELEMENTOS FINITOS PARA COMPARAÇÃO DE RESULTADOS..... 153

C.1	GEOMETRIA DOS MODELOS.....	153
C.2	DETERMINAÇÃO DOS ELEMENTOS DE $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$	155
C.2.1	Cálculo de $\underline{\underline{\Sigma}}$	156
C.2.2	Carregamentos macroscópicos.....	158
C.2.2.1	Tração unitária na direção x ($E_{xx} = 1$) e na direção z ($E_{zz} = 1$)	158
C.2.2.2	Cisalhamentos unitários ($E_{xy} = 1$ e $E_{xz} = 1$)	159

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Material periodicamente heterogêneo e a célula unitária associada.....	6
Figura 2 – Periodicidade do campo de deslocamentos \underline{u}_p	7
Figura 3 – Antiperiodicidade do vetor de tensão	7
Figura 4 – Células unitárias dos compósitos com fibras unidirecionais estudados	20
Figura 5 – u_{px} - tração macroscópica unitária em x	26
Figura 6 – u_{py} - tração macroscópica unitária em x	27
Figura 7 – e_{px} - tração macroscópica unitária em x	28
Figura 8 – e_{py} - tração macroscópica unitária em x	29
Figura 9 – e_{pxy} - tração macroscópica unitária em x	30
Figura 10 – u_{pz} - cisalhamento macroscópico unitário em xz	31
Figura 11 – e_{pxz} - cisalhamento macroscópico unitário em xz	32
Figura 12 – e_{pyz} - cisalhamento macroscópico unitário em xz	33
Figura 13 – Comparação entre u_{px} calculado com expansões simples e expansões compostas em diferentes configurações de células unitárias.....	36
Figura 14 – Comparação entre e_{px} calculado com expansões simples e expansões compostas em diferentes configurações de células unitárias.....	37
Figura 15 – Convergência de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$ - fibras redondas.....	39
Figura 16 – Convergência de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$ - fibras quadradas.....	40
Figura 17 – Comparativo entre fibras redondas e quadradas.....	41
Figura 18 – Influência da rigidez dos materiais nos termos $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,2)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,3)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,3)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,3)$	42
Figura 19 – Influência da rigidez dos materiais nos termos $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(4,4)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(5,5)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(6,6)$	43
Figura 20 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$ calculados por séries e por elementos finitos	45
Figura 21 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,2)$ calculado por séries e por elementos finitos.....	46

Figura 22 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,3)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,3)$ calculados por séries e por elementos finitos	46
Figura 23 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,3)$ calculado por séries e por elementos finitos.....	47
Figura 24 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(4,4)$ calculado por séries e por elementos finitos	47
Figura 25 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(5,5)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(6,6)$ calculados por séries e por elementos finitos	48
Figura 26 – Modelo Kelvin Generalizado.....	54
Figura 27 – Material Standard.....	64
Figura 28 – Comparação de $\underline{\underline{C}}_{11}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{22}^{\text{hom}}(t)$ calculados por séries e por elementos finitos	65
Figura 29 – Comparação de $\underline{\underline{C}}_{13}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{\underline{C}}_{23}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t)$ calculados por séries e por elementos finitos	66
Figura 30 – Comparação de $\underline{\underline{C}}_{44}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{\underline{C}}_{55}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{66}^{\text{hom}}(t)$ calculados por séries e por elementos finitos	66
Figura 31 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{11}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{22}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo	67
Figura 32 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo	68
Figura 33 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{13}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{23}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo	68
Figura 34 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo	69
Figura 35 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{44}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo	69
Figura 36 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{55}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{66}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo	70
Figura 37 – Representação de u_x , \mathbf{e}_x e \mathbf{s}_x para $V_f/V = 0,6$ e $E_f = 10$ no início e no final da relaxação	72

Figura 38 – Correspondência entre modelo de Maxwell e o modelo Standard	73
Figura 39 - $E(t)$ para o material homogêneo em softening	74
Figura 40 - $h(t)$ para o material homogêneo em softening	74
Figura 41 – Resultado para o material compósito unidimensional em softening	75
Figura 42 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{11}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ e $\underline{\underline{C}}_{22}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em softening	77
Figura 43 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em softening	78
Figura 44 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{13}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ e $\underline{\underline{C}}_{23}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em softening	79
Figura 45 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em softening	80
Figura 46 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{44}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em softening	81
Figura 47 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{55}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ e $\underline{\underline{C}}_{66}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em softening	82
Figura 48 – Inversão de sinal em $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$	83
Figura 49 - $E(t)$ para o material homogêneo em hardening	85
Figura 50 - $h(t)$ para o material homogêneo em hardening	86
Figura 51 – Resultado para o material compósito unidimensional em hardening	86
Figura 52 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{11}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ e $\underline{\underline{C}}_{22}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em hardening	88
Figura 53 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em hardening	89
Figura 54 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{13}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ e $\underline{\underline{C}}_{23}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em hardening	90
Figura 55 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em hardening	91
Figura 56 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{44}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em hardening	92
Figura 57 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{55}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ e $\underline{\underline{C}}_{66}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em hardening	93
Figura 58 – Modelo EF 1	153
Figura 59 – Modelo EF 2	154
Figura 60 – Modelo EF 3	154
Figura 61 – Tração unitária na direção x ($E_{xx} = 1$)	158
Figura 62 – Cisalhamento unitário ($E_{xy} = 1$)	159
Figura 63 – Cisalhamento unitário ($E_{xz} = 1$)	159

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Romanos

a_{ij} , a_{1ij} e a_{2ij} : coeficientes das expansões de deslocamentos

A_f : área da seção transversal da fibra

\underline{A} : tensor de localização das deformações

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{L}}$: matrizes auxiliares para o cálculo do potencial elástico

\underline{b} : vetor de forças de volume

$\underline{\underline{B}}$: matriz de funções de interpolação para as deformações

\underline{B} : tensor de localização das tensões

c_{hi} : coeficientes das expansões de deslocamentos

\underline{c} : tensor de rigidez elástica microscópico

$\underline{\underline{c}}$: matriz de rigidez elástica microscópica

$\underline{\underline{c}}_f$ e $\underline{\underline{c}}_m$: matrizes de rigidez elástica da fibra e da matriz

$\underline{\underline{c}}_g$: matriz genérica com as propriedades de simetria de $\underline{\underline{c}}$

$\underline{\underline{c}}_{g1}$, $\underline{\underline{c}}_{g2}$, $\underline{\underline{c}}_{g3}$ e $\underline{\underline{c}}_{g4}$: matrizes que relacionam $\underline{\underline{c}}_f$ e $\underline{\underline{c}}_m$

\underline{C}_h : vetor h dos coeficientes das expansões de deslocamentos periódicos

$\underline{C}_{.xyz}$: vetor com os todos coeficientes das expansões de deslocamentos periódicos concatenados verticalmente

\underline{C}_{fh}^v e \underline{C}_{mh}^v : vetores h dos coeficientes das expansões de deslocamentos viscosos periódicos

$\underline{\underline{C}}_h$, $\underline{\underline{C}}_{1h}$ e $\underline{\underline{C}}_{2h}$: matrizes h dos coeficientes das expansões de deslocamentos periódicos

$\underline{C}^{\text{hom}}$: tensor de rigidez elástica homogeneizado ou macroscópico

$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$: matriz de rigidez elástica homogeneizada ou macroscópica

$\underline{\underline{C}}_{ij}^{\text{hom}}$: termo (i, j) de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$

d : módulo de flexibilidade

d : tensor de flexibilidade elástica microscópica

D^{hom} : tensor de flexibilidade homogeneizado ou macroscópico

E : módulo de elasticidade do elemento Maxwell

E_a e E_b : parâmetros de E

E_i : módulo de elasticidade da mola do elemento Kelvin i

E_f e E_m : módulos de elasticidade da fibra e da matriz

E_{ij} : termo ij do vetor de deformação macroscópica

\underline{E} : vetor de deformação macroscópica

$\underline{\underline{E}}$: tensor de deformação macroscópica

\underline{E}_f^v e \underline{E}_m^v : parcela viscosa das deformações macroscópicas na fibra e na matriz

h : nome genérico para os eixos coordenados

$H(t)$: função passo unitário (Heaviside) no tempo t

i : variável contadora

$\underline{\underline{I}}$: matriz identidade

\underline{I} : tensor identidade de quarta ordem

k : grau das expansões de deslocamentos

$\underline{\underline{K}}$: matriz do sistema de equações

$\underline{\underline{K}}_{ij}$: submatriz ij de $\underline{\underline{K}}$

$\underline{\underline{K}}$: matriz do sistema de equações pelo método dos elementos finitos

L : aresta da célula elementar

L_m : dimensão característica dos modelos EF 1, EF 2 e EF 3

$\underline{\underline{L}}$: operador matricial

m : variável característica do polinômio associado de Legendre

$\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{M}}_2$ e $\underline{\underline{M}}_3$: submatrizes para o cálculo de $\underline{\underline{M}}$

$\underline{\underline{M}}$: vetor do sistema de equações

n : variável contadora

\underline{n} : vetor normal

n_1 e n_2 : variáveis relacionadas às dimensões de vetores e matrizes

N : variável referente ao número de elementos finitos dos modelos EF 1, EF 2 e EF 3

$\underline{\underline{N}}$: matriz de funções de interpolação

P_n^m : polinômios associados de Legendre

$\underline{\underline{P}}$: vetor do sistema de equações pelo método dos elementos finitos

q_i : variável de estado i

q_{fEi} e q_{mEi} : variáveis de estado i da parcela macroscópica da fibra e da matriz

\underline{q}_{fhi} e \underline{q}_{mhi} : variáveis de estado i das parcelas periódicas da fibra e da matriz

$\underline{\underline{Q}}_i$: matriz auxiliar das variáveis de estado no caso tridimensional para elemento Kelvin i

$\underline{\underline{Q}}_{fi}$ e $\underline{\underline{Q}}_{mi}$: matrizes $\underline{\underline{Q}}_i$ para a fibra e para a matriz

r : dimensão característica da fibra

S : superfície externa da célula elementar

t : variável de tempo

T : tempo final de relaxação

T_f e T_m : fator de composição dos deslocamentos macroscópicos viscosos

u_h : componente h do vetor de deslocamentos

u_{ph} , u_{p1h} e u_{p2h} : componentes h dos vetores de deslocamentos periódicos

\underline{u} : vetor de deslocamentos

\underline{u}_p : vetor de deslocamentos periódicos

$\hat{\underline{u}}_p$, $\hat{\underline{u}}_{p1}$ e $\hat{\underline{u}}_{p2}$: componentes polinomiais dos vetores de deslocamentos periódicos

\underline{U} : deslocamento aplicado nos modelos EF 1, EF 2 e EF 3

\underline{U}_p : vetor de deslocamentos nodais associados a \underline{u}_p

V : volume da célula elementar

V_f e V_m : volumes de fibra e da matriz

\underline{V}_p : vetor de deslocamentos nodais associados a \underline{u}_p

\underline{x} : vetor de posição espacial

x, y, z : eixos ortogonais de coordenadas espaciais

$\underline{\underline{Z}}_{ws}$: matriz de zeros com elemento unitário em (w, s)

Caracteres Gregos

\mathbf{a} : extremo de integração referente ao tipo de fibra

Δt : pequeno intervalo de tempo

\mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 : parâmetros de E e \mathbf{h}

$\underline{\underline{\Gamma}}$ e $\underline{\underline{\Lambda}}$: matriz auxiliares

\mathbf{e}_E e \mathbf{e}_h : deformações específicas na mola e no amortecedor do elemento Kelvin

\mathbf{e}^v : deformação viscosa unidimensional

$\underline{\underline{e}}$: vetor de deformações específicas

$\underline{\underline{e}}_p$, $\underline{\underline{e}}_{p1}$ e $\underline{\underline{e}}_{p2}$: vetores de deformações específicas periódicas

$\underline{\underline{e}}$: tensor de deformações específicas

$\underline{\underline{e}}_p$: tensor de deformações específicas periódicas

$\underline{\underline{e}}^e$: parcela elástica de $\underline{\underline{e}}$

$\underline{\underline{e}}^v$: parcela viscosa de $\underline{\underline{e}}$

$\underline{\mathbf{e}}_f^v$ e $\underline{\mathbf{e}}_m^v$: parcela viscosa das deformações na fibra e na matriz

$\underline{\mathbf{e}}_{fp}^v$ e $\underline{\mathbf{e}}_{mp}^v$: parcela viscosa das deformações periódicas na fibra e na matriz

$\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=h}$, $\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1h}$ e $\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2h}$: componentes polinomiais das matrizes de deformações periódicas

\mathbf{h} : coeficiente de viscosidade do elemento Maxwell

\mathbf{h}_a : parâmetro de \mathbf{h}

\mathbf{h}_i : coeficiente de viscosidade do elemento Kelvin i

\mathbf{n} : coeficiente de Poisson

\mathbf{n}_f e \mathbf{n}_m : coeficiente de Poisson da fibra e da matriz

\mathbf{q}_i : variável que relaciona E_i e \mathbf{h}_i

\mathbf{s} : tensão no elemento Kelvin

\mathbf{s}_E e \mathbf{s}_h : tensões na mola e no amortecedor do elemento Kelvin

$\underline{\mathbf{s}}$: vetor de tensões

$\underline{\underline{\mathbf{s}}}$: tensor de tensões

$\underline{\underline{\Sigma}}$: vetor de tensões macroscópicas

$\underline{\underline{\underline{\Sigma}}}$: tensor de tensões macroscópicas

\mathbf{t} : variável de integração no tempo

\mathbf{t}_0 : instante inicial do carregamento unitário

$\underline{\mathbf{u}}_p$: vetor de deslocamentos periódicos qualquer

Ψ : potencial elástico microscópico

Ψ^{hom} : potencial elástico macroscópico

$\tilde{\Psi}$: potencial elástico microscópico com a formulação em taxas

RESUMO

KOVAL JR, G. Aplicação da Teoria da Homogeneização em Materiais Compósitos Viscoelásticos, 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Materiais compósitos são empregados nos mais diversos tipos de estruturas (civis, mecânicas, aeronáuticas, etc.). A possibilidade de otimização de suas propriedades, frente às solicitações consideradas, representa uma grande vantagem na sua utilização. A teoria da homogeneização permite a avaliação da influência de detalhes microestruturais nas características do composto através do estudo de uma célula elementar. Os deslocamentos periódicos dessa célula são aproximados com expansões ortogonais polinomiais. A exatidão dos cálculos elásticos está associada ao grau dos polinômios utilizados. O procedimento numérico no modelo viscoelástico é incremental no tempo, utilizando-se de variáveis de estado, cuja implementação proporciona grande economia computacional, pois evita o cálculo de integrais hereditárias. A influência de diversos parâmetros físicos na constituição dos compósitos de fibras unidirecionais estudados é discutida e comparada com resultados obtidos com modelos em elementos finitos, tanto em elasticidade, quanto em viscoelasticidade sem envelhecimento. Para o caso de envelhecimento, no qual as características dos constituintes são variáveis com o tempo, é mostrada a resposta dos compósitos sob relaxação para diferentes instantes iniciais de carregamento em situações de “softening” (ou abrandamento) e “hardening” (ou endurecimento).

Palavras-chave: viscoelasticidade; envelhecimento; compósitos; séries assintóticas.

ABSTRACT

KOVAL JR, G. Aplicação da Teoria da Homogeneização em Materiais Compósitos Viscoelásticos, 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Composite materials are applied in many types of structures (civil, mechanics, aeronautics, etc.). The possibility of optimization of their properties related to the considered solicitations represents an advantage in their utilization. Homogenization theory allows the evaluation of the influence of microstructural details in the composite by the study of an elementary cell. The periodic displacements in this cell are approximated using orthogonal polynomial expansions. The accuracy of the calculations is associated with the degree of the polynomials utilized. The numeric procedure for the viscoelastic model utilizes a time-step procedure, using a state variables approach, that provides computational economy, because it avoids hereditary integral calculations. The influence of the many physical parameters in the constitution of the one-direction fiber composites studied is discussed and compared with finite element results, for situations with elasticity and non-aging viscoelasticity. For the aging case, when components properties show age dependent behavior, the results of the relaxation with different initial times are shown for hardening and softening situations.

Key Words: viscoelasticity; aging; composites; asymptotic series.

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A utilização de materiais compósitos é crescente em estruturas aeronáuticas, mecânicas e civis. A vantagem está no controle das características de seus constituintes e de sua distribuição de modo a otimizar o seu desempenho de acordo com a necessidade. Muitas aplicações avançadas exigem o projeto de materiais com características específicas, envolvendo conceitos de materiais multifásicos, o que conduz ao desenvolvimento de técnicas de micromecânica no sentido de prever propriedades ou compreender o efeito de detalhes microestruturais. Essas técnicas são usualmente referidas como métodos de homogeneização.

Pela abordagem da homogeneização, sob uma perspectiva macroscópica, um meio heterogêneo pode ser representado por um meio contínuo homogêneo. O processo de homogeneização pode ser de natureza experimental, por meio de ensaios de caracterização ou experimentos nos quais as dimensões sejam suficientemente grandes para serem macroscopicamente homogêneos. Entretanto, muitas das propriedades efetivas são (na prática) de difícil aferição. Desse modo, toda uma área da Mecânica dos Sólidos vem sendo desenvolvida nas últimas décadas como alternativa para se obter teoricamente as equações constitutivas macroscópicas de materiais compósitos. Sobre essa questão, importantes avanços se deram desde os primeiros trabalhos de Hashin e Shtrikman (1962) e Hill (1963) para fases elásticas lineares.

Além das propriedades efetivas de sólidos compósitos, a determinação dos campos de tensões e deformações locais em escala microscópica é essencial para o entendimento de alguns fenômenos observados em escala macroscópica não compreensíveis com a simples análise de tensões e deformações.

Com o interesse por compósitos com microestruturas periódicas, significativos progressos foram feitos na busca da substituição de um meio heterogêneo por um equivalente homogêneo com o desenvolvimento da teoria da homogeneização (Tartar, 1977; Bensoussan

et al., 1978; e Sanchez-Palencia, 1980). Essa teoria considera que a razão entre o tamanho da célula elementar (que caracteriza a estrutura periódica) e o tamanho do problema em estudo seja tão pequena que tende a zero. Os campos locais são determinados com a introdução do conceito de tensores de localização de tensão e deformação. Várias técnicas matemáticas utilizando-se de expansões assintóticas para a convergência de funcionais foram desenvolvidas para determinar esse limite. A ênfase inicial foi para materiais com constituintes lineares, porém o método foi estendido para incluir comportamentos não-lineares, como plasticidade (Suquet, 1982).

Muitos materiais compósitos de base polimérica apresentam comportamento dependente do tempo, como viscoelasticidade. Sobre esse assunto, pode-se destacar o trabalho inicial de Hashin (1966), utilizando-se de um modelo cilíndrico de compósito unidirecional. Os avanços da teoria da homogeneização para o caso viscoelástico são menos sistemáticos se comparados ao elástico. Recentes trabalhos teóricos estenderam a teoria matemática da homogeneização para formular as equações constitutivas macroscópicas em viscoelasticidade (Sanchez-Palencia, 1978; Francfort *et al.*, 1983; Suquet, 1985; Francfort e Suquet, 1986).

A grande maioria dos trabalhos existentes são voltados para compósitos com constituintes sem envelhecimento. Nesse caso, o comportamento viscoelástico periódico dos materiais é investigado com a utilização da homogeneização por expansões assintóticas no tempo ou no domínio de Laplace, como o trabalho de Shibuya (1997).

Para corpos não homogêneos envolvendo materiais como concreto e alguns compósitos de matriz polimérica, nos quais a ocorrência de envelhecimento traz efeitos consideráveis, a situação é mais complicada, não sendo aplicável, por exemplo, processos baseados em transformadas de Laplace. Nesse contexto, Maghous e Creus (2003) apresentam uma solução analítica para o caso de termoviscoelasticidade com envelhecimento em compósitos de multicamadas.

1.2 OBJETIVOS

Os principais objetivos desse trabalho são:

- Apresentar a teoria da homogeneização como ferramenta teórica sólida para o estudo de materiais multifásicos;
- Para o caso elástico, estudar as peculiaridades do processo de determinação das propriedades de materiais heterogêneos por meio de séries assintóticas periódicas, utilizadas na determinação dos deslocamentos (consequentemente das deformações específicas e das tensões no interior do compósito). Comparar os parâmetros de convergência, bem como expor as potencialidades da formulação abordada;
- Estender os conceitos vistos em elasticidade para a situação de viscoelasticidade com envelhecimento das fases, determinando a matriz de relaxação do compósito a partir das propriedades de seus constituintes;
- Aplicar a teoria e as soluções numéricas desenvolvidas em compósitos com fibras unidirecionais;
- Apresentar e comparar resultados numéricos utilizando modelos em elementos finitos e soluções analíticas.

1.3 EVOLUÇÃO DO TRABALHO

Após o estudo da teoria da homogeneização em elasticidade, a primeira etapa prática do trabalho foi desenvolver-se uma formulação computacional para a análise das propriedades de compósitos com fibras unidirecionais, utilizando-se o programa MATLAB (2000). Foram utilizadas séries de Fourier como expansões assintóticas para os deslocamentos e os resultados obtidos comparados com Luciano e Barbero (1994).

As curvas obtidas eram suficientemente coerentes, apesar da convergência dos resultados não ser perfeita, visto que o trabalho de Luciano e Barbero (1994), e mesmo os de outros autores, tal como Tsai e Hahn (1980), apresentam aproximações para a obtenção da matriz de elasticidade macroscópica.

Prosseguindo-se nos estudos, buscou-se acelerar a convergência dos cálculos, tanto com a diminuição do número de termos nas expansões, quanto no tempo computacional. Ao testar-se a utilização de séries polinomiais como a de Chebyshev e as de Legendre, percebeu-

se uma grande diminuição na quantidade de termos necessários para a obtenção de resultados razoáveis e um ganho computacional considerável, posto que a integração de termos polinomiais é mais rápida que a de termos trigonométricos.

Paralelamente à melhoria da convergência, desenvolveu-se a formulação para o caso viscoelástico, inicialmente sem envelhecimento. De modo a se compararem os resultados obtidos, foram desenvolvidos modelos em elementos finitos, no programa ANSYS (1998).

Inicialmente, foram comparados os resultados em elementos finitos com os resultados elásticos. A coincidência apresentada entre as curvas foi muito melhor do que a até então obtida com resultados de outros autores, em vista de um melhor controle da exatidão na convergência das aproximações. De forma equivalente ao caso elástico, o caso viscoelástico sem envelhecimento apresentou coincidência nos resultados.

A comparação dos resultados em elasticidade com os modelos em elementos finitos permitiu a avaliação da influência dos parâmetros elásticos e geométricos, na convergência da elasticidade macroscópica dos compósitos. Foi compreendida a importância das relações entre rigidez e quantidade dos materiais. Esse estudo comparativo motivou a aplicação de mais uma série para compor os deslocamentos na região da fibra, de modo a melhorar a convergência em determinadas situações. Foram finalmente adotados os polinômios associados de Legendre por se adaptarem ao problema sem quaisquer modificações ou perda de ortogonalidade.

A fase final do trabalho foi a implementação das situações de envelhecimento.

1.4 DESCRIÇÃO GERAL

Após a introdução, no capítulo dois, são apresentados os fundamentos da homogeneização periódica, caracterizando-se diversos conceitos utilizados no estudo de materiais heterogêneos em elasticidade.

No terceiro capítulo, é mostrado o procedimento de análise de materiais compósitos com fibras em uma única direção, bem como a configuração das células unitárias adotadas e a utilização de expansões assintóticas para os deslocamentos. O quarto capítulo expõe os resultados em elasticidade.

No capítulo cinco, ampliam-se os conceitos de homogeneização para o caso viscoelástico. São estudados os aspectos teóricos da análise de materiais heterogêneos em viscoelasticidade e associadas as resoluções incrementais para as situações de envelhecimento. O sexto capítulo expõe os resultados em viscoelasticidade.

Após os capítulos sete, de conclusões, e oito, de referências bibliográficas, aparecem três apêndices. No apêndice A, é deduzida toda a resolução computacional para o caso elástico do estudo de compósitos com fibras unidirecionais, inclusive com a aplicação de uma série adicional na região da fibra. No apêndice B, são vistas as resoluções incrementais para a situação de viscoelasticidade com envelhecimento. Finalmente, no apêndice C, é descrita a modelagem em elementos finitos utilizada para fornecer dados comparativos.

2 FUNDAMENTOS DA HOMOGENEIZAÇÃO PERIÓDICA

Neste capítulo, é feita a descrição dos elementos fundamentais da teoria da homogeneização periódica para materiais elásticos lineares. É apresentada uma série de conceitos que possibilitam de forma analítica relacionar as características microscópicas de um material heterogêneo a suas características macroscópicas, conforme Suquet (1985). Como base teórica indica-se Sanchez-Palencia (1974,1980).

2.1 CÉLULA ELEMENTAR

Considere-se um material heterogêneo que apresente em escala microscópica uma estrutura periódica. A correspondente célula elementar, indicada por V , representa o menor volume capaz de descrever a estrutura completamente (Figura 1).

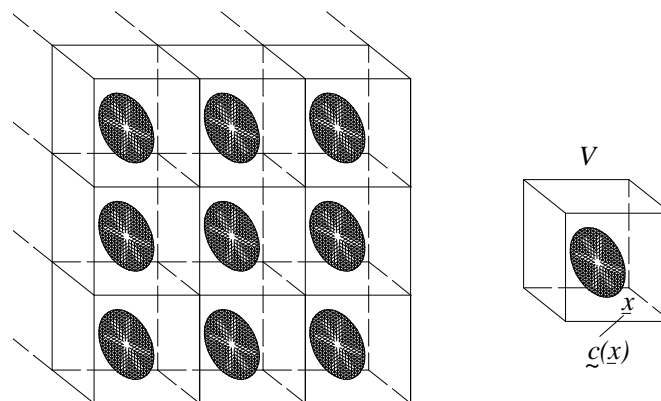


Figura 1 – Material periodicamente heterogêneo e a célula unitária associada

2.2 ESTRUTURA DE CAMPOS

Seja $\underline{\underline{s}}$ um campo de tensões estaticamente admissível (E.A.) e \underline{u} um campo de deslocamentos cinematicamente admissível (C.A.):

$$\underline{\underline{s}} \text{ tal que } \operatorname{div}(\underline{\underline{s}}) = 0 \text{ e } \underline{\underline{s}} \cdot \underline{n} \text{ antiperiódico} \quad (2.1)$$

\underline{u} tal que $\underline{u} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} + \underline{u}_p$, \underline{u}_p é periódico, conforme a Figura 2 (2.2)

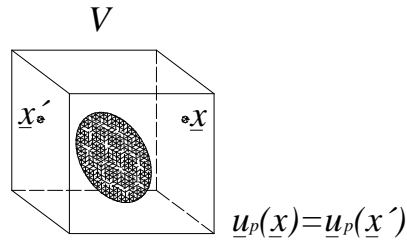


Figura 2 – Periodicidade do campo de deslocamentos \underline{u}_p

A antiperiodicidade de $\underline{\underline{s}} \cdot \underline{n}$ significa que o vetor de tensão tem sinais contrários em lados opostos de V , onde \underline{n} é o vetor normal exterior (Figura 3).

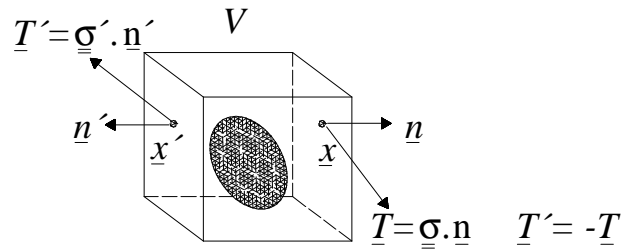


Figura 3 – Antiperiodicidade do vetor de tensão

O tensor de deformações é representado por

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{e}}_p, \text{ com } \underline{\underline{e}}_p = \frac{1}{2} \left(\text{grad} \underline{u}_p + (\text{grad} \underline{u}_p)^T \right) \text{ sendo a parcela periódica} \quad (2.3)$$

onde $\underline{\underline{e}}$ é o campo de deformações associado a \underline{u} .

A periodicidade de \underline{u}_p implica que a média de $\underline{\underline{e}}_p$ na célula elementar se anula, logo

$$\langle \underline{\underline{e}} \rangle = \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{e}}_p \rangle = \underline{\underline{E}} \quad (2.4)$$

$$\text{onde } \langle \cdot \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\cdot) dV \quad (2.5)$$

representa a média volumétrica sobre a célula de volume V .

A expressão (2.4) indica que $\underline{\underline{E}}$ representa o tensor de deformações macroscópicas do carregamento aplicado na célula unitária. O tensor macroscópico de tensões $\underline{\underline{\Sigma}}$ é definido como a média de $\underline{\underline{s}}$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{s}} \rangle \quad (2.6)$$

2.3 LEMA DE HILL

Sejam \underline{u} e $\underline{\underline{s}}$ campos de deslocamentos e de tensões cinematicamente e estaticamente admissíveis, respectivamente, a média do trabalho virtual microscópico é igual ao trabalho macroscópico

$$\langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{s}} \rangle : \langle \underline{\underline{e}} \rangle \quad (2.7)$$

onde $(:)$ indica contração sobre dois índices. Para o caso de tensores de segunda ordem (como $\underline{\underline{s}}$ e $\underline{\underline{e}}$) tem-se em notação indicial: $\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} = s_{ij} e_{ij}$. Para maiores detalhes com operações vetoriais e tensoriais, ver Spiegel (1966).

2.3.1 Demonstração

Considerando-se (2.3), tem-se para a média trabalho virtual microscópico

$$\langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{s}} \rangle : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}}_p \rangle \quad (2.8)$$

e conforme (2.4)

$$\langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{s}} \rangle : \langle \underline{\underline{e}} \rangle + \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}}_p \rangle \quad (2.9)$$

Pelo teorema dos trabalhos virtuais

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p \, dV = \frac{1}{V} \int_S (\underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p \, dS \quad (2.10)$$

onde S é a superfície da célula unitária e V , o seu volume.

Como $\underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}$ é antiperiódico (sinais opostos em faces opostas) e $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p$ é periódico (mesmo valor em faces opostas), a integral sobre a superfície da célula resulta

$$\int_S (\underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p \, dS = \langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p \rangle = 0 \quad (2.11)$$

Logo, a expressão (2.9) resume-se à (2.7), que pode ser escrita como

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (2.12)$$

onde $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ são os campos microscópicos de tensão e deformação, enquanto $\underline{\underline{\Sigma}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ são os respectivos campos macroscópicos.

2.4 PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

Assume-se que a lei constitutiva local seja linear e expressa como

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}}(x) = \underline{\underline{\mathcal{C}}}(x) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(x) \quad \forall x \in V \quad (2.13)$$

onde $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ são os tensores de tensão e deformação, respectivamente, e o tensor de quarta ordem $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$, a rigidez elástica. A equação (2.13) é escrita na forma indicial como $\mathbf{s}_{ij} = c_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}$.

A determinação da lei elástica macroscópica do material periodicamente heterogêneo reduz-se à resolução de um problema de condições de contorno, chamado de problema de localização, definido sobre a célula unitária. Existem duas abordagens que são equivalentes: a abordagem por deformações e a abordagem por tensões.

2.5 ABORDAGEM POR DEFORMAÇÕES

Seja $\underline{\underline{E}}$ um tensor simétrico e constante dado, o problema de localização consiste na determinação dos campos de tensão e deslocamento ($\underline{\underline{s}}$ e $\underline{\underline{u}}$) de modo que

$$\begin{cases} \underline{\underline{s}} & \text{tal que } \text{div}(\underline{\underline{s}}) = 0 \text{ e } \underline{\underline{s}} \cdot n \text{ antiperiódico} \\ \underline{\underline{u}} & \text{tal que } \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{u}}_p \text{ e } \underline{\underline{u}}_p \text{ periódico} \\ \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{e}} \end{cases} \quad (2.14)$$

onde a dependência espacial não aparece por simplicidade.

Uma vez resolvido o problema de localização, a lei constitutiva macroscópica relaciona $\underline{\underline{\Sigma}}$ a $\underline{\underline{E}}$ (definidos em (2.6) e (2.4) respectivamente), como aparece a seguir.

O problema (2.14) é definido por $\underline{\underline{E}}$ como parâmetro de carregamento. Tomando-se que $\underline{\underline{s}}$ e $\underline{\underline{e}}$ sejam os campos microscópicos de tensão e deformação soluções de (2.14) e considerando-se sua linearidade, observa-se a proporcionalidade entre $\underline{\underline{e}}$ e o carregamento $\underline{\underline{E}}$

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.15)$$

onde $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}})$ representa o tensor de localização das deformações. $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}})$ depende somente de parâmetros geométricos e mecânicos do meio, sendo independente de $\underline{\underline{E}}$. Substituindo-se (2.15) em (2.4)

$$\langle \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}} \rangle \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \quad (2.16)$$

conclui-se que $\langle \underline{\underline{A}} \rangle = \underline{\underline{I}}$, onde $\underline{\underline{I}}$ é o tensor identidade de quarta ordem. $\underline{\underline{s}}$ e $\underline{\underline{e}}$ se relacionam através da equação constitutiva local

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.17)$$

A média de (2.17), dada por

$$\langle \underline{\underline{s}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.18)$$

conduz à expressão da elasticidade macroscópica

$$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle \quad (2.19)$$

A simetria de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$, que não é aparente pela expressão (2.19), pode ser obtida utilizando-se o Lema de Hill. Sejam $\underline{\underline{s}}$ e $\underline{\underline{e}}$ as soluções do problema de localização cujas respectivas médias são $\underline{\underline{\Sigma}}$ e $\underline{\underline{E}}$. Substituindo-se (2.18) na expressão $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}}$

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.20)$$

Considerando-se o Lema de Hill, de acordo com (2.12), (2.20) equivale a $\langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \rangle$, então

$$\langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle = \underline{\underline{E}} : \langle \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle : \underline{\underline{E}} \quad (2.21)$$

Partindo-se da igualdade entre (2.20) e (2.21), a simetria se torna clara

$$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{A}} \rangle \quad (2.22)$$

2.6 ABORDAGEM POR TENSÕES

Nesta abordagem, ao invés dos deslocamentos serem prescritos, têm-se as tensões $\underline{\underline{\Sigma}}$ dadas.

O problema (2.14) é definido por $\underline{\underline{\Sigma}}$ como parâmetro de carregamento. Tomando-se que $\underline{\underline{s}}$ e $\underline{\underline{e}}$ sejam os campos microscópicos de tensão e deformação soluções de (2.14) e considerando-se sua linearidade, observa-se a proporcionalidade entre $\underline{\underline{s}}$ e o carregamento $\underline{\underline{\Sigma}}$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.23)$$

onde $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}})$ representa o tensor de localização das tensões. $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}})$ depende somente de parâmetros geométricos e mecânicos do meio (assim como $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}})$), sendo independente de $\underline{\underline{\Sigma}}$.

Substituindo-se (2.23) em (2.6)

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} \rangle = \langle \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.24)$$

conclui-se que $\langle \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle = \underline{\underline{I}}$, onde $\underline{\underline{I}}$ é o tensor identidade de quarta ordem. Sendo $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\zeta}}^{-1}$ (tensor de flexibilidade elástica) $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ se relacionam através da equação constitutiva local

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{s}}} = \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.25)$$

A média de (2.25), dada por

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle = \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \langle \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle = \langle \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{D}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.26)$$

conduz à expressão da flexibilidade macroscópica

$$\underline{\underline{D}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle \quad (2.27)$$

A simetria de $\underline{\underline{D}}^{\text{hom}}$, tal qual a de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$, pode ser obtida utilizando-se o Lema de Hill. Sejam $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ as soluções do problema de localização cujas respectivas médias são $\underline{\underline{\Sigma}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$. Substituindo-se (2.26) na expressão $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}}$

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.28)$$

Considerando-se o Lema de Hill, de acordo com (2.12), (2.28) equivale a $\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle$, então

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle = \langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{s}}} \rangle = \langle \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T : \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T : \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.29)$$

Partindo-se da igualdade entre (2.28) e (2.29), finalmente, a simetria se torna clara

$$\underline{\underline{D}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T : \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle \quad (2.30)$$

2.7 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS DUAS ABORDAGENS

A equivalência entre deformações e tensões impostas é garantida pela expressão

$$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{D}}^{\text{hom}} = \underline{\underline{I}} \quad (2.31)$$

onde $\underline{\underline{I}}$ é o tensor identidade de quarta ordem. Para a sua dedução, são necessários dois desenvolvimentos preliminares (2.7.1 e 2.7.2).

2.7.1 Relação entre $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$

Sejam

- $\underline{\underline{s}}$ a solução de um problema com $\underline{\underline{\Sigma}}$ dado ($\underline{\underline{s}}$ estaticamente admissível com $\underline{\underline{\Sigma}}$)
- $\underline{\underline{e}}$ a solução de um problema com $\underline{\underline{E}}$ dado ($\underline{\underline{e}}$ cinematicamente admissível com $\underline{\underline{E}}$)

A partir do lema de Hill, (2.12) pode ser escrita, utilizando-se (2.15) e (2.23)

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \langle \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{A}} \rangle : \underline{\underline{E}} \quad (2.32)$$

Tem-se, portanto

$$\langle \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{A}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{B}} \rangle = \underline{\underline{I}} \quad (2.33)$$

onde $\underline{\underline{I}}$ é o tensor identidade de quarta ordem.

2.7.2 Identidade: $\langle \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{B}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}}^T : \underline{\underline{c}} \rangle : \langle \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{B}} \rangle$

Sejam:

- $\underline{\underline{e}}_1$ e $\underline{\underline{s}}_1$ soluções de um problema com $\underline{\underline{E}}$ dado, sendo cinematicamente e estaticamente admissíveis com $\underline{\underline{E}}$, respectivamente.

- $\underline{\mathbf{e}}_2$ e $\underline{\mathbf{s}}_2$ soluções de um problema com $\underline{\underline{\Sigma}}$ dado, sendo cinematicamente e estaticamente admissíveis com $\underline{\underline{\Sigma}}$, respectivamente.

Define-se

$$\langle \underline{\mathbf{s}}_1 : \underline{\mathbf{e}}_2 \rangle = \langle \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle = \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.34)$$

Aplicando-se o Lema de Hill e as relações (2.17) e (2.25), obtém-se para (2.34)

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{s}}_1 : \underline{\mathbf{e}}_2 \rangle &= \langle \underline{\mathbf{s}}_1 \rangle : \langle \underline{\mathbf{e}}_2 \rangle = \langle \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} \rangle : \langle \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \rangle \\ &= \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} \rangle : \langle \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle : \underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Comparando-se (2.34) e (2.35), conclui-se que

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle = \langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} \rangle : \langle \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle \quad (2.36)$$

2.7.3 Equivalência $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\text{hom}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$

A partir das expressões (2.19) e (2.27), pode-se escrever

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\text{hom}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}T} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} \rangle : \langle \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle \quad (2.37)$$

Aplicando-se (2.36) sobre (2.37)

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\text{hom}} = \langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\underline{\mathbf{d}}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle = \langle \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T : \underline{\underline{\mathbf{B}}} \rangle \quad (2.38)$$

visto que $\underline{\underline{\mathbf{c}}} = \underline{\underline{\mathbf{d}}}^{-1}$.

Finalmente, utilizando-se (2.33), (2.38) resume-se à (2.31) ($\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{\text{hom}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$)

2.8 POTENCIAL ELÁSTICO MACROSCÓPICO

Localmente, para $\forall \underline{\mathbf{x}} \in V$ (V representa a célula unitária), a lei elástica se escreve

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}})}{\partial \underline{\underline{\mathbf{e}}}} \quad (2.39)$$

onde define-se Ψ como sendo o potencial elástico (convexo em relação a $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$).

2.8.1 Princípio da minimização em deslocamentos

Sejam $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ soluções de um problema de localização para uma dada deformação macroscópica $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ e seja $\underline{\underline{\mathbf{u}'}}$ um campo de deslocamentos qualquer, cinematicamente admissível com $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{u}'}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\underline{\mathbf{u}'}}_p, \text{ com } \underline{\underline{\mathbf{u}'}}_p \text{ periódico} \quad (2.40)$$

De acordo com (2.2)

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p \quad (2.41)$$

Dessa forma, expressão (2.40) pode ser escrita alternativamente

$$\underline{\underline{\mathbf{u}'}} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{u}'}} \quad (2.42)$$

onde $\underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{u}'}} = \underline{\underline{\mathbf{u}'}}_p - \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p$ (periódico) (2.43)

Por meio da condição de convexidade de Ψ , estabelece-se a desigualdade

$$\Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}'}})) - \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}})) \geq \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}))}{\partial \underline{\underline{\mathbf{e}}}} : (\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}'}}) - \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}})) \quad (2.44)$$

que pode ser escrita como

$$\Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}'}})) - \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}})) \geq \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}))}{\partial \underline{\underline{\mathbf{e}}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{d}}}\underline{\underline{\mathbf{u}'}}) \quad (2.45)$$

onde $\frac{\partial \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}))}{\partial \underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{s}}$ é solução do problema de localização para dado $\underline{\underline{E}}$ e constitui um campo estaticamente admissível. Extraíndo-se a média dos termos de (2.45) e aplicando-se o lema de Hill na parte direita da desigualdade

$$\langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}')) - \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})) \rangle \geq \left\langle \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}))}{\partial \underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{d}}\underline{\underline{u}}') \right\rangle \quad (2.46)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}))}{\partial \underline{\underline{e}}} : \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{d}}\underline{\underline{u}}') \right\rangle = \langle \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{d}}\underline{\underline{u}}') \rangle = \langle \underline{\underline{s}} \rangle : \langle \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{d}}\underline{\underline{u}}') \rangle \quad (2.47)$$

Como $\langle \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{d}}\underline{\underline{u}}') \rangle = 0$ devido a periodicidade de $\underline{\underline{d}}\underline{\underline{u}}'$, tem-se para (2.46)

$$\langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}')) \rangle \geq \langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})) \rangle \quad (2.48)$$

para $\forall \underline{\underline{u}}'$ cinematicamente admissível em $\underline{\underline{E}}$.

A partir de (2.48), torna-se válida a igualdade

$$\langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})) \rangle = \min \left\{ \langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}')) \rangle \mid \underline{\underline{u}}' \text{ C.A. com } \underline{\underline{E}} \right\} \quad (2.49)$$

a qual indica que a solução minimiza o funcional $\langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})) \rangle$ do problema de localização.

2.8.2 Caso elástico linear

No caso de elasticidade linear, o potencial elástico Ψ é definido por

$$\Psi(\underline{\underline{e}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{e}} \quad (2.50)$$

O conceito de potencial elástico macroscópico Ψ^{hom} é estabelecido como

$$\Psi^{\text{hom}}(\underline{\underline{E}}) = \langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}})) \rangle = \min \left\{ \langle \Psi(\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{u}}')) \rangle \mid \underline{\underline{u}}' \text{ C.A. com } \underline{\underline{E}} \right\} \quad (2.51)$$

que pode ser escrito, substituindo-se (2.50) em (2.51)

$$\Psi^{\text{hom}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \left\langle \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{e}}} : \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \right\rangle \quad (2.52)$$

e aplicando-se o lema de Hill sobre (2.52), tem-se

$$\Psi^{\text{hom}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \frac{1}{2} \left\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} \right\rangle : \left\langle \underline{\underline{\mathbf{e}}} \right\rangle = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (2.53)$$

Em seguida, ao definir-se o tensor $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}}$, que relaciona $\underline{\underline{\Sigma}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ da seguinte forma

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (2.54)$$

e substituir-se a relação (2.54) em (2.53), obtém-se Ψ^{hom} para o caso elástico linear

$$\Psi^{\text{hom}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (2.55)$$

Observa-se que o conceito introduzido satisfaz a relação equivalente a (2.39) para campos macroscópicos

$$\frac{\partial \Psi^{\text{hom}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\Sigma}} \quad (2.56)$$

Portanto, é correto afirmar que o potencial elástico macroscópico é igual ao valor mínimo da média do potencial microscópico sobre a célula unitária, ou seja

$$\Psi^{\text{hom}}(\underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{E}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \min \left\{ \left\langle \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}})) \right\rangle \mid \underline{\underline{\mathbf{u}}} \text{ C.A. com } \underline{\underline{\mathbf{E}}} \right\} \quad (2.57)$$

2.9 ELEMENTOS FINITOS (CONDIÇÃO PERIÓDICA)

A homogeneização pode ser aplicada via método dos elementos finitos (MEF), contanto que sejam aplicadas condições de contorno periódicas para os deslocamentos.

Supondo-se que $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ sejam soluções de um problema com $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ dado e para um deslocamento periódico qualquer $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p$ associe-se uma deformação $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_p(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p)$. Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) sobre $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_p(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p)$, tem-se

$$\int_V \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) dV = \int_V \underline{\underline{\mathbf{b}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p dV + \int_S (\underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p dS \quad (2.58)$$

sendo $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$ as forças de volume.

Para $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p$ periódico e $\underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}$ antiperiódico, aplica-se (2.11) sobre a última integral. Na ausência de forças de volume, (2.58) reduz-se à

$$\int_V \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) dV = 0 \quad (2.59)$$

Desenvolvendo-se (2.59), de acordo com (2.3) e (2.13)

$$\int_V \underline{\underline{\mathbf{s}}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) dV = \int_V (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) dV = 0 \quad (2.60)$$

A expressão (2.60), dividida por V , pode ser escrita como

$$\frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) : \underline{\underline{\mathbf{e}}} dV = -\frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) : \underline{\underline{\mathbf{E}}} dV \quad (2.61)$$

Dessa forma, (2.61) corresponde ao princípio variacional

$$\left\langle \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) : \underline{\underline{\mathbf{e}}} \right\rangle = -\left\langle \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \right\rangle \quad (2.62)$$

Considerando-se a notação do MEF e a representação vetorial das grandezas (ver item A.2.2 do apêndice A), tem-se

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p &= \underline{\underline{\mathbf{N}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}}_p \\ \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p &= \underline{\underline{\mathbf{N}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}_p \\ \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p &= \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}}_p \\ \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p(\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p) &= \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}}_p \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde

$\underline{\underline{\mathbf{U}}}_p$ e $\underline{\underline{\mathbf{V}}}_p$ são os vetores de deslocamentos nodais dos elementos, associados a $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p$ e $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p$ respectivamente;

$\underline{\underline{N}}$ é matriz de equações de interpolação dos elementos;

e para $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{u}})$, $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{N}})$.

Aplicando-se a notação (2.63) sobre (2.62), obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{\underline{V}}_p^T \left(\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{B}} dV \right) \underline{\underline{U}}_p &= -\underline{\underline{V}}_p^T \left(\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{E}} dV \right) \\ \left(\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{B}} dV \right) \underline{\underline{U}}_p &= -\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{E}} dV \end{aligned} \quad (2.64)$$

Com $\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{B}} dV$ e $\underline{\underline{P}} = -\int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{E}} dV$, (2.64) constitui o seguinte sistema de equações

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}}_p = \underline{\underline{P}} \quad (2.65)$$

no qual tem-se $\underline{\underline{U}}_p$ como incógnita.

Finalmente, aplicando-se as equações de interpolação sobre os valores dos deslocamentos nodais, determina-se $\underline{\underline{u}}_p$ e conseqüentemente as soluções $\underline{\underline{u}}$, $\underline{\underline{e}}$ e $\underline{\underline{s}}$ do problema de localização.

3 AVALIAÇÃO DA ELASTICIDADE MACROSCÓPICA DE COMPÓSITOS COM FIBRAS UNIDIMENSIONAIS

Em seguida, é mostrado o procedimento de análise de materiais compósitos com fibras em uma única direção. As configurações das células unitárias estão descritas na Figura 4.

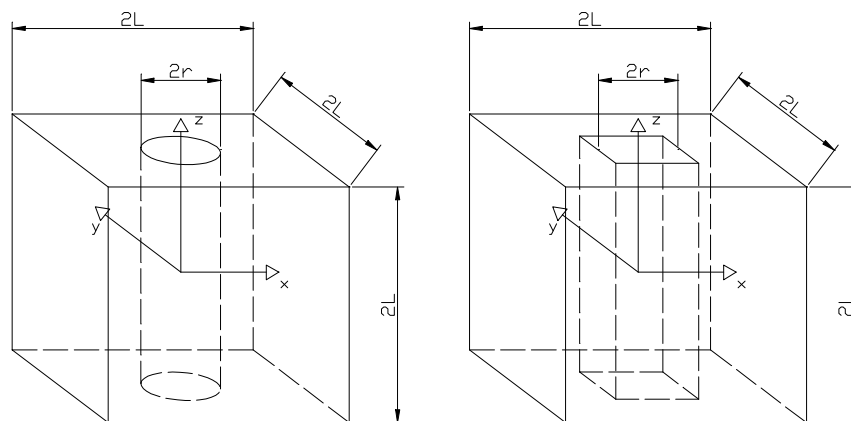


Figura 4 – Células unitárias dos compósitos com fibras unidirecionais estudados

Para se solucionar o problema de localização (2.14), o campo de deslocamentos periódico \underline{u}_p é aproximado por funções periódicas (de acordo com a condição exposta na Figura 2). Observa-se que não existe variação das heterogeneidades (fibra, no caso) ao longo do eixo de z . Portanto, é suficiente que $\underline{u}_p = f(x, y)$, sendo independente de z espacialmente.

3.1 APROXIMAÇÃO DE \underline{u}_p PELOS POLINÔMIOS ASSOCIADOS DE LEGENDRE

Após uma série de estudos com séries de Fourier, polinômios de Chebyshev e Legendre, optou-se pelos polinômios associados de Legendre, conforme Spiegel (1968), para se aproximar o campo de deslocamentos periódicos \underline{u}_p .

A convergência dos resultados obtidos com polinômios é mais rápida que a obtida com séries trigonométricas. Para séries de mesmo número de termos, os resultados das séries polinomiais aproximam-se mais do resultado final do que os das séries de Fourier. Outra vantagem é que o cálculo com séries polinomiais é computacionalmente mais rápido do que com séries trigonométricas.

3.1.1 Utilização de séries simples

Entre as expansões polinomiais estudadas, a única que se adapta ao problema em questão sem nenhuma modificação que altere a sua ortogonalidade é a expansão com os polinômios associados de Legendre.

Trata-se de um grupo de polinômios ortogonais obtidos pela fórmula

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n \quad (3.1)$$

onde $P_n(x)$ são os polinômios de Legendre, dados por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad (3.2)$$

A série ortogonal composta pelos polinômios associados de Legendre para a descrição de funções é escrita como

$$f(x) = A_m P_m^m(x) + A_{m+1} P_{m+1}^m(x) + A_{m+2} P_{m+2}^m(x) + \dots \quad (3.3)$$

onde $A_m, A_{m+1}, A_{m+2} \dots$ são as constantes a serem determinadas.

Escolhendo-se o valor conveniente de $m=2$, têm-se os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} P_2^2(x) &= 3(1-x^2) \\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2) \\ P_4^2(x) &= \frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observa-se que $P_n^2(-1) = P_n^2(1) = 0$.

De acordo com a aplicação de séries mostrada por Filonenko-Borodich (1968), optou-se pela seguinte configuração para as séries de deslocamentos periódicos de duas variáveis

$$u_{ph} = \sum_{i=0}^{i=k-m} a_{h(i+m)0} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) + \sum_{j=0}^{j=k-m} a_{h0(j+m)} P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right) + \sum_{i,j=0}^{i+j=k-2m} a_{h(i+m)(j+m)} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right) \quad (3.5)$$

para $k \geq 2m$ e $m = 2$ (k representa o grau do polinômio), onde $h = x, y, z$

A ortogonalidade dessas funções fica garantida pelo critério geral

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0 \quad \text{se } n \neq k$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (3.6)$$

cuja formulação se encontra em Spiegel (1968).

3.1.2 Utilização de séries compostas (fibras quadradas)

Para melhorar a convergência dos resultados devido a mudança de comportamento dos deslocamentos na interface dos materiais, é acrescentada uma série auxiliar para compor os deslocamentos na região da fibra.

O deslocamento relativo entre a fibra e a matriz deve ser nulo na interface dos dois materiais. Utilizando-se os polinômios associados de Legendre, esse comportamento pode ser facilmente reproduzido.

Sejam as seguintes expressões para os deslocamentos periódicos

$$u_{p1h} = \sum_{i=0}^{i=k-m} a_{1h(i+m)0} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) + \sum_{j=0}^{j=k-m} a_{1h0(j+m)} P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right) + \sum_{i,j=0}^{i+j=k-2m} a_{1h(i+m)(j+m)} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right) \quad (3.7)$$

$$u_{p2h} = \sum_{i,j=0}^{i+j=k-2m} a_{2h(i+m)(j+m)} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{r} \right) P_{j+m}^m \left(\frac{y}{r} \right) \quad (3.8)$$

para $k \geq 2m$ e $m = 2$ (k representa o grau do polinômio), onde $h = x, y, z$

Os deslocamentos periódicos u_{ph} ficam definidos como

$$\begin{aligned} u_{ph} &= u_{p1h} && \text{para a região da matriz} \\ u_{ph} &= u_{p1h} + u_{p2h} && \text{para a região da fibra} \end{aligned} \quad (3.9)$$

O fato de $u_{p2h}(-r, y) = u_{p2h}(r, y) = u_{p2h}(x, -r) = u_{p2h}(x, r) = 0$ garante a compatibilidade dos deslocamentos na região de interface entre os materiais.

A aplicação computacional dos desenvolvimentos vistos nos capítulos 2 e 3 está descrita detalhadamente no apêndice A. Os desenvolvimentos apresentados têm como objetivo determinar os coeficientes das expansões de deslocamentos mostrados em (3.5), (3.7) e (3.8) através da minimização do potencial elástico, descrito no item 2.8. Dessa maneira, tem-se a solução do problema de localização (2.14), que permite a determinação do tensor de rigidez elástica macroscópica \mathcal{C}^{hom} do compósito.

4 RESULTADOS PARA O CASO ELÁSTICO

Neste capítulo é apresentado um conjunto de exemplos de modo a mostrar diversos aspectos da aplicação da teoria da homogeneização em elasticidade para compósitos com fibras unidirecionais.

Os exemplos apresentados nesse trabalho são todos teóricos. De modo a não ocorrer nenhuma incoerência prática com dimensões, propriedades dos materiais, carregamentos, tempo, etc., não adotou-se unidades específicas para as grandezas. É utilizada a notação vetorial para a representação das grandezas tensoriais, conforme o item A.2.2 do apêndice A. A representação de (2.54) na forma vetorial pode ser vista no apêndice C em (C.1).

4.1 COMPORTAMENTO DO DESLOCAMENTO E DA DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA PERIÓDICOS

No momento em que são conhecidas as constantes das expansões para o deslocamento, além do cálculo de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$, conforme desenvolvimento no apêndice A, são determinados automaticamente o deslocamento periódico \underline{u}_p e a deformação específica periódica \underline{e}_p . Ambos são funções da deformação específica macroscópica \underline{E} .

Para se visualizar a convergência do processo à medida em que se aumenta o grau k dos polinômios das séries, são apresentados dois exemplos (um de tração e outro de cisalhamento) nos quais as componentes não nulas de \underline{u}_p e \underline{e}_p são representadas.

4.1.1 Parâmetros geométricos

Adota-se para todos os casos apresentados o valor de $L = 0,5$ (ver figura 4), de modo que o volume da célula unitária seja $V = 1$. Para os exemplos contidos em 4.1.2, utiliza-se uma célula unitária de um compósito de fibra quadrada de $r = 0,3873$ ($V_f/V = 0,6$).

4.1.2 Propriedades dos materiais

A matriz tem um módulo de elasticidade $E_m = 1$ e um coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,3$. De maneira a comparar a influência da razão entre a rigidez da fibra e a da matriz, são mostrados paralelamente resultados onde a fibra tem módulo de elasticidade $E_f = 10$ e $E_f = 50$. O coeficiente de Poisson da fibra é de $\nu_f = 0,2$.

4.1.3 Exemplos

4.1.3.1 Tração unitária na direção x

A célula unitária é submetida a uma deformação específica macroscópica na direção x de valor unitário. Os demais graus de liberdade ficam restringidos. O tensor de deformação macroscópica, na sua forma vetorial \underline{E} é escrito

$$\underline{E}^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

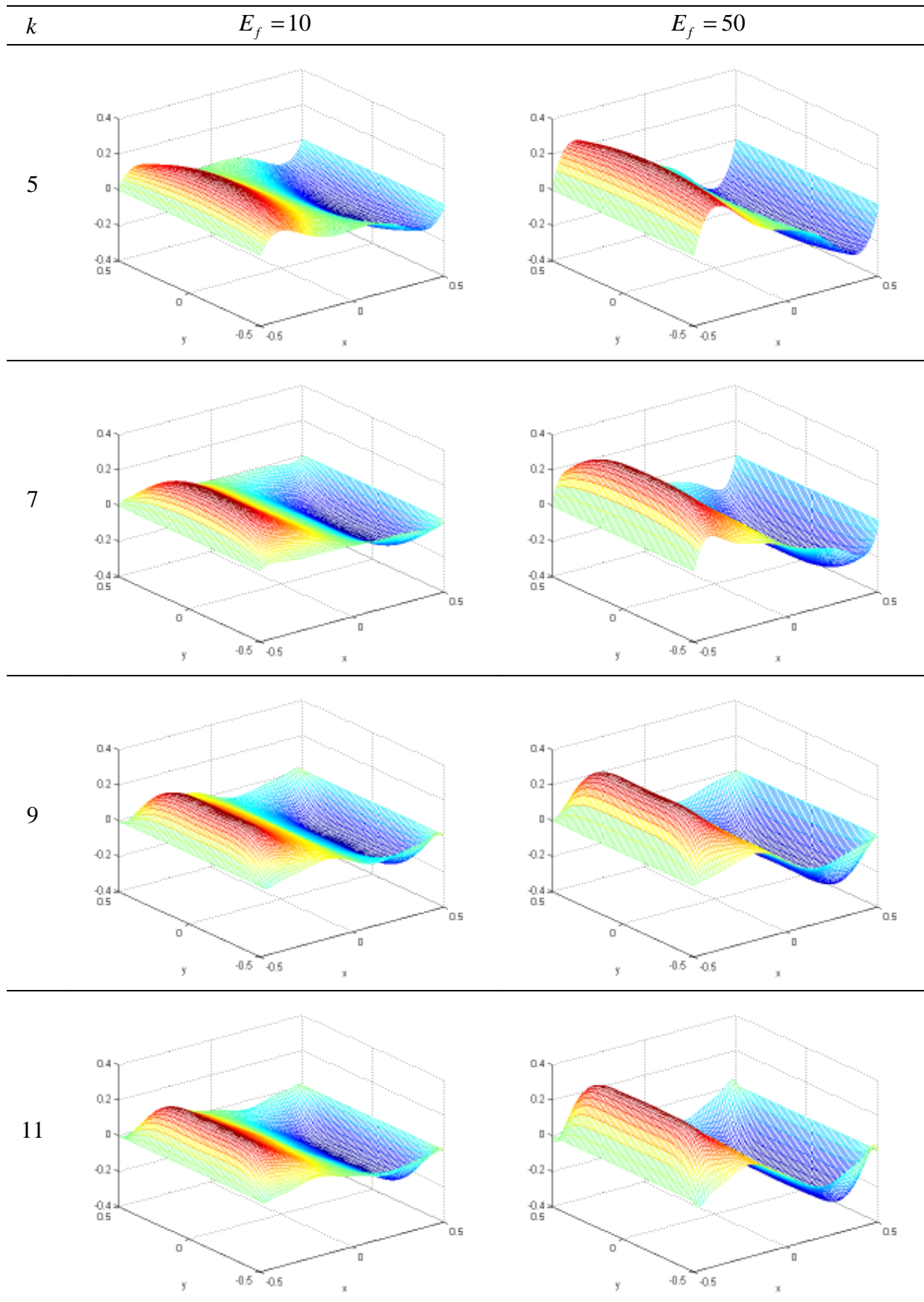
A partir dessa condição, surgem deslocamentos periódicos nas direções x (figura 5) e y (figura 6), e deformações periódicas em x , y e xy (figuras 7, 8 e 9 respectivamente).

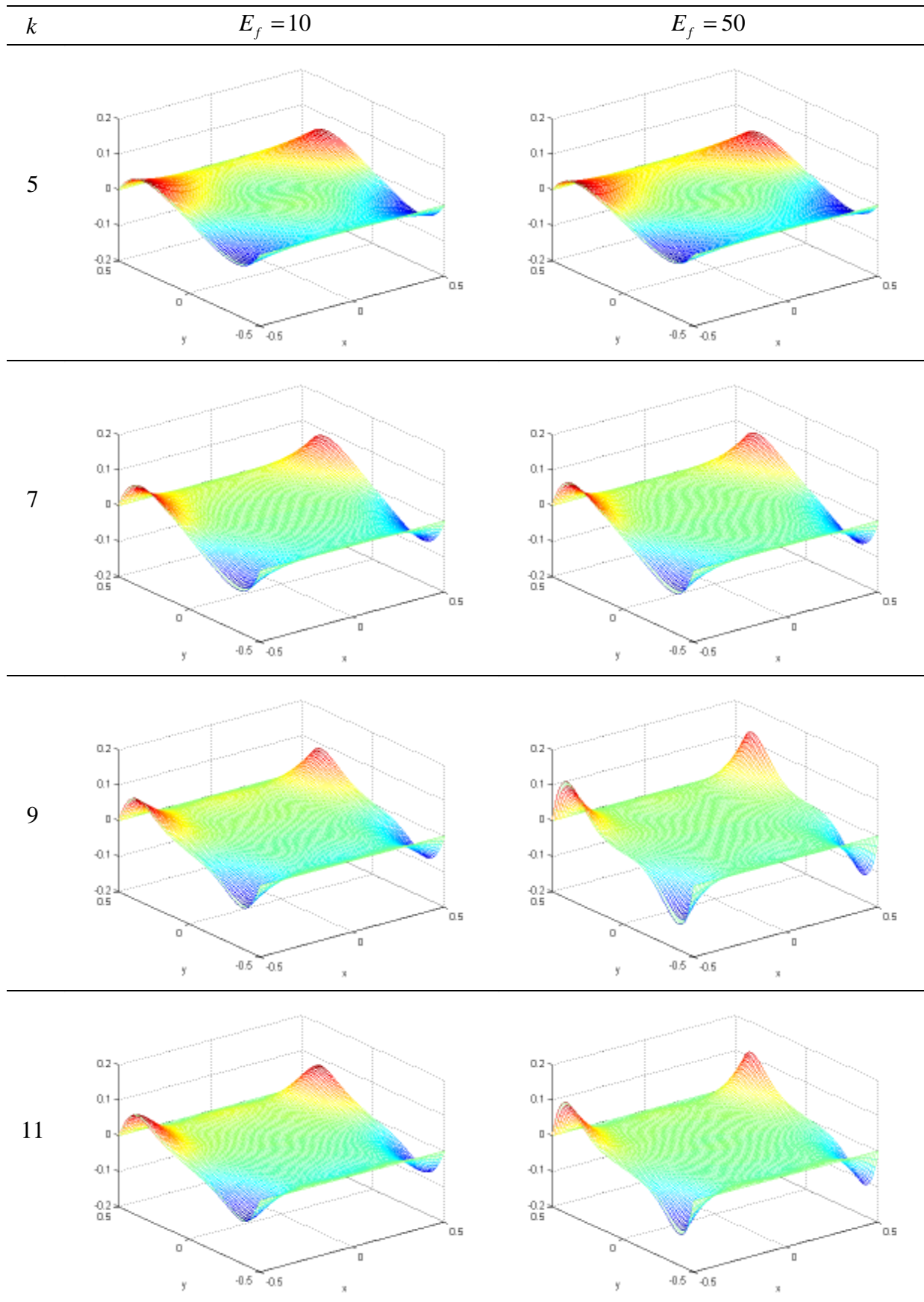
4.1.3.2 Cisalhamento unitário na direção xz

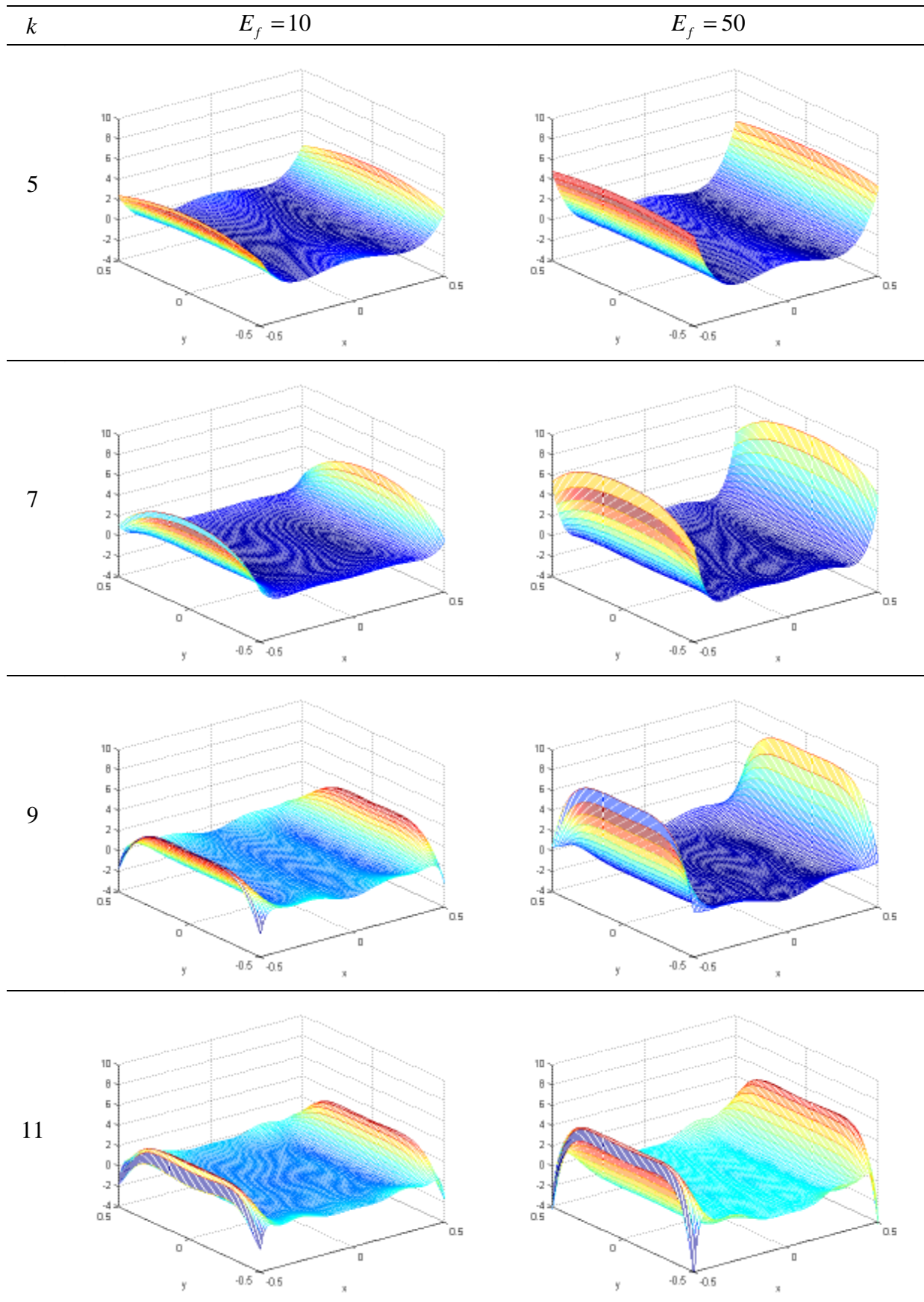
Neste caso, a célula unitária é submetida a uma deformação específica de cisalhamento macroscópico unitário em xz . Os demais graus de liberdade ficam restringidos. O tensor de deformação macroscópica, na sua forma vetorial \underline{E} é escrito

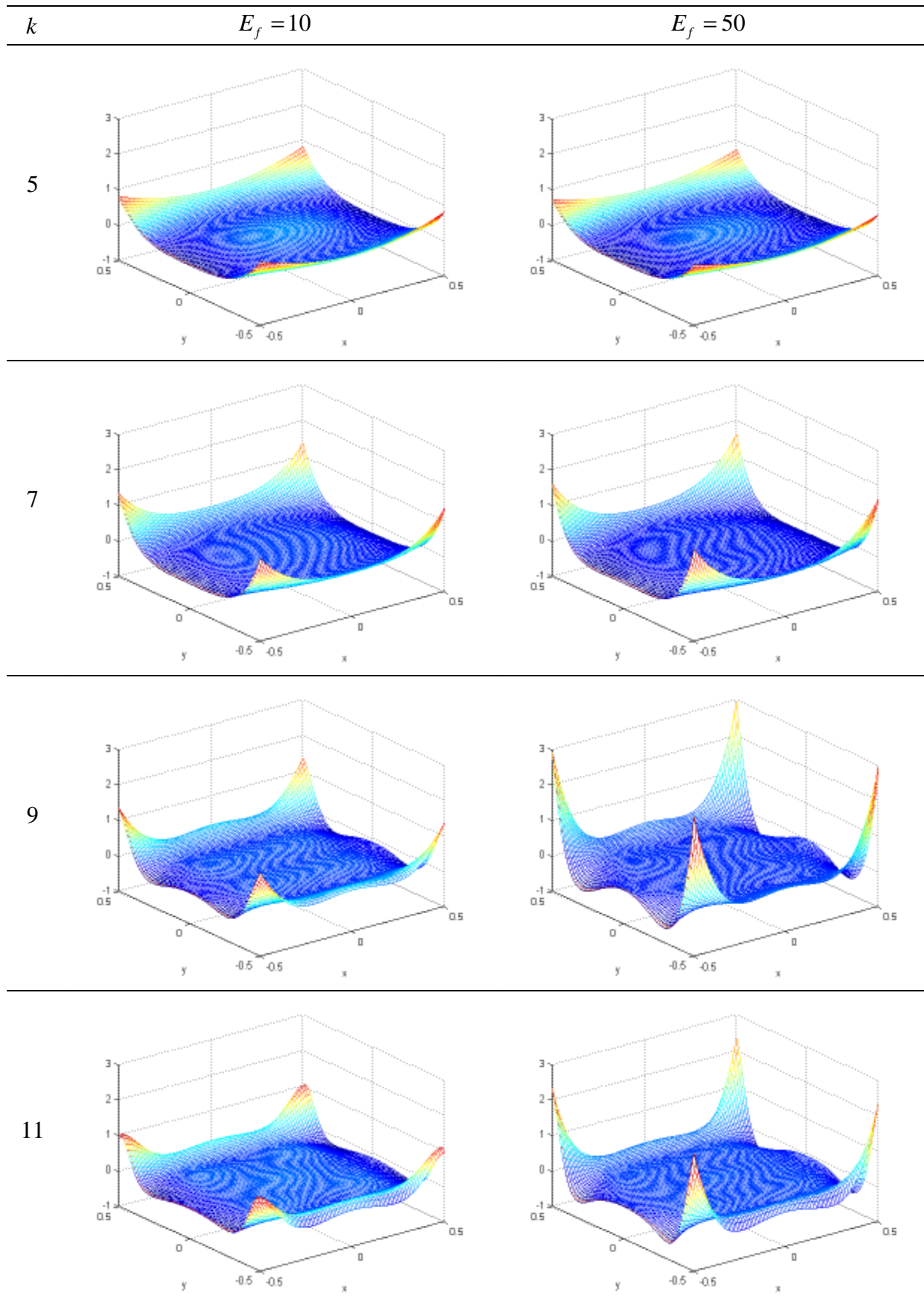
$$\underline{E}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

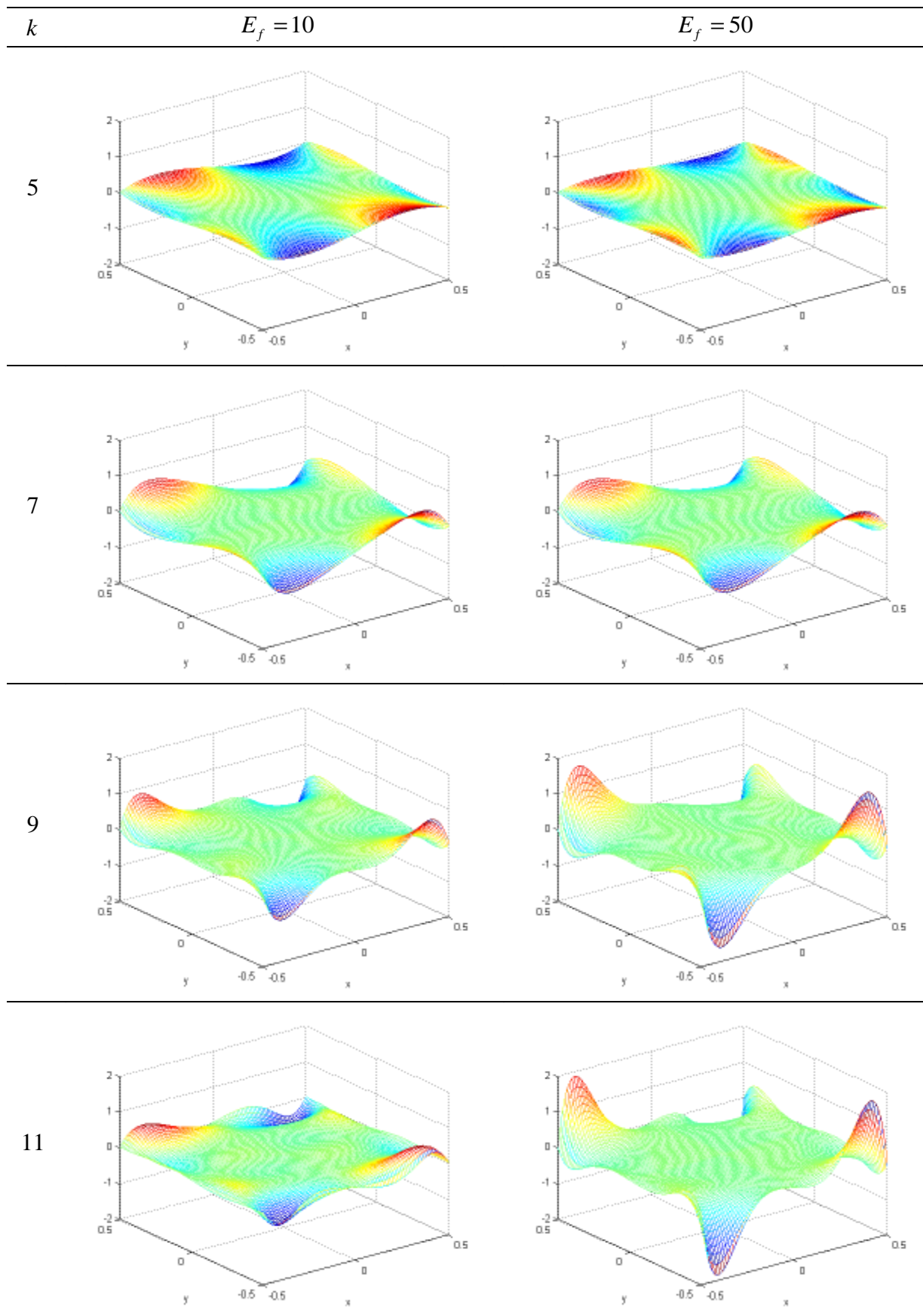
A partir dessa condição, surge o deslocamento periódico na direção z (figura 10) e deformações periódicas em xz e yz (figuras 11 e 12 respectivamente).

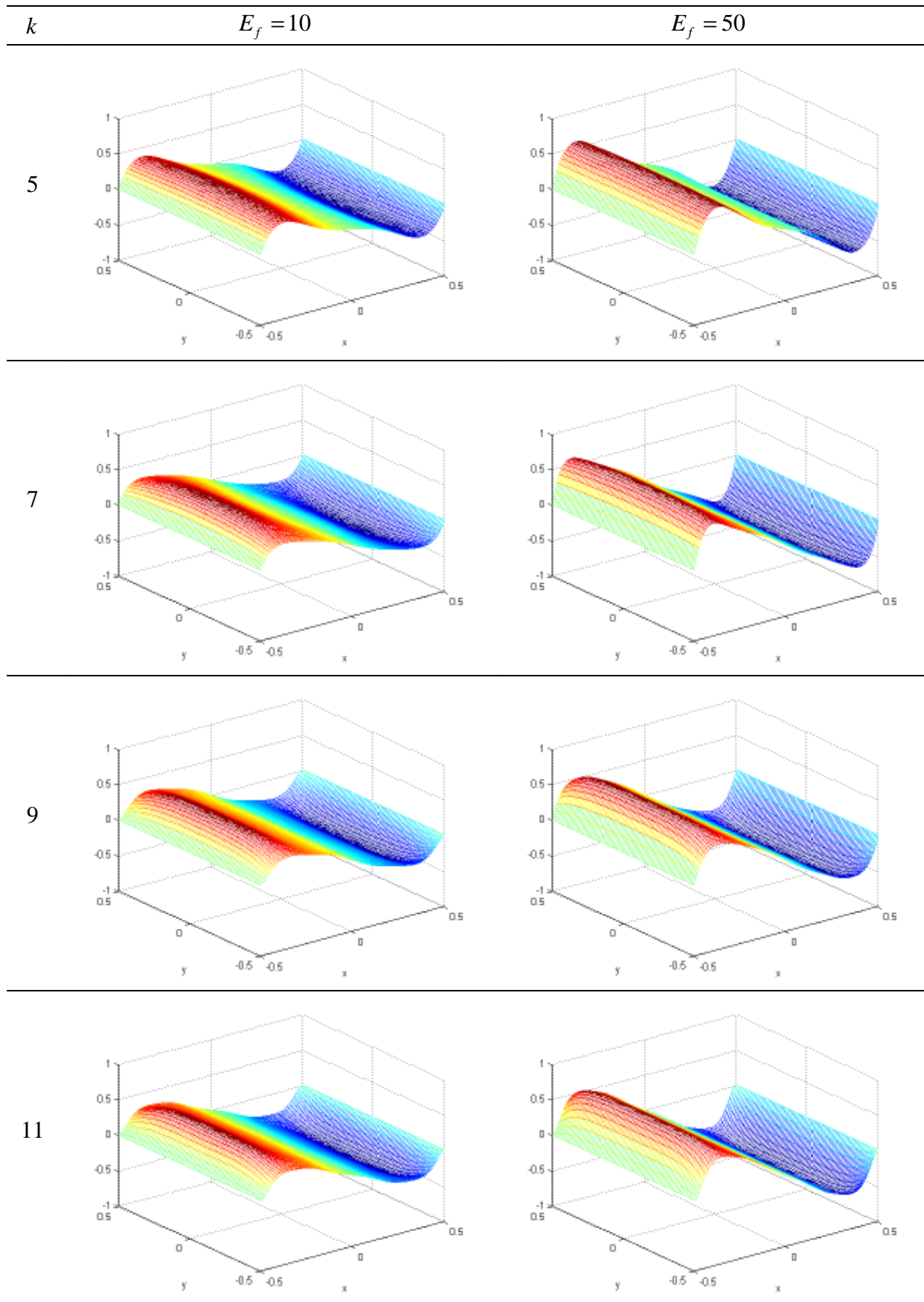
Figura 5 – u_{px} - tração macroscópica unitária em x

Figura 6 – u_{py} - tração macroscópica unitária em x

Figura 7 – e_{px} - tração macroscópica unitária em x

Figura 8 – e_{py} - tração macroscópica unitária em x

Figura 9 – e_{pxy} - tração macroscópica unitária em x

Figura 10 – u_{pz} - cisalhamento macroscópico unitário em xz

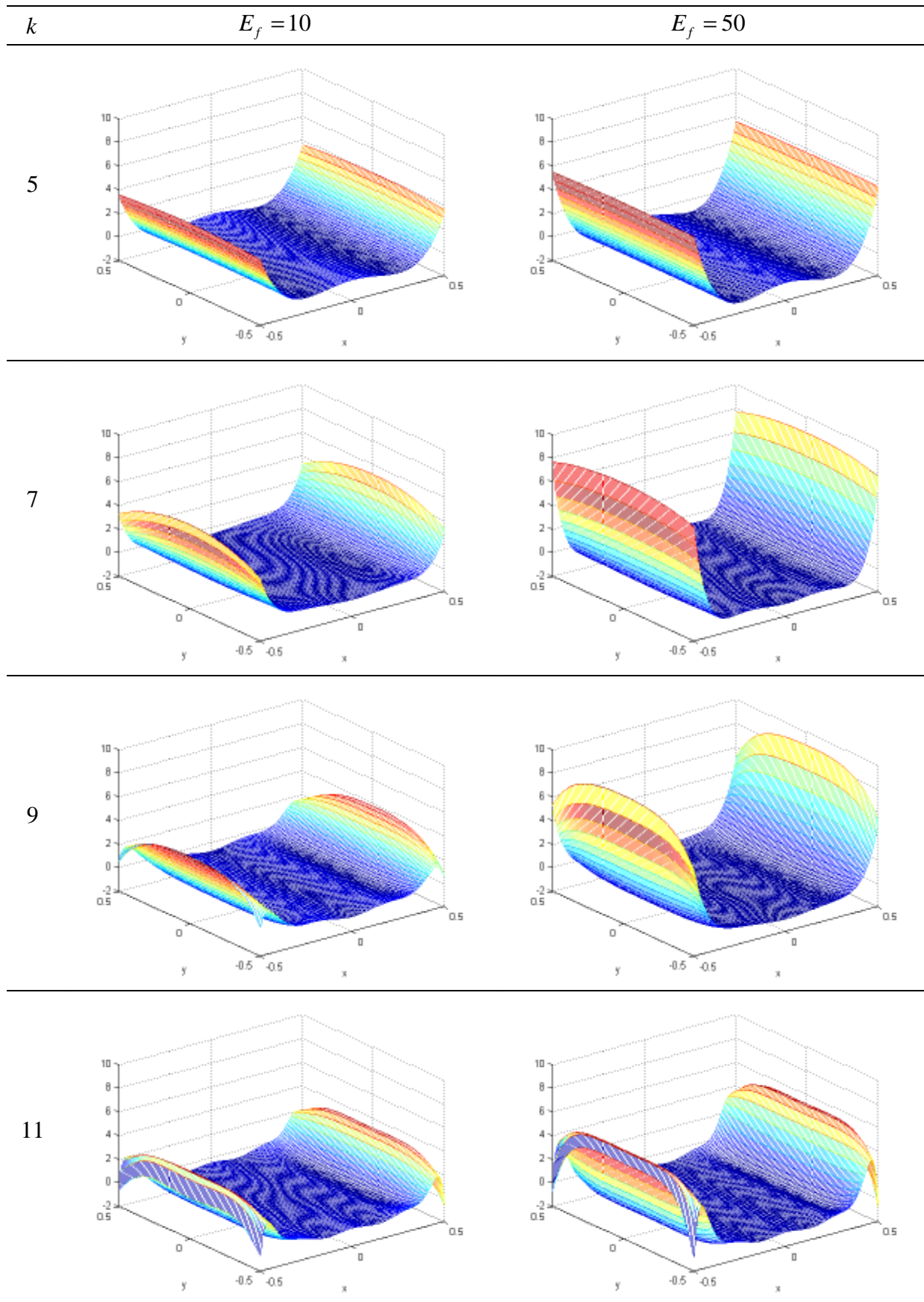


Figura 11 – \mathbf{e}_{pxz} - cisalhamento macroscópico unitário em xz

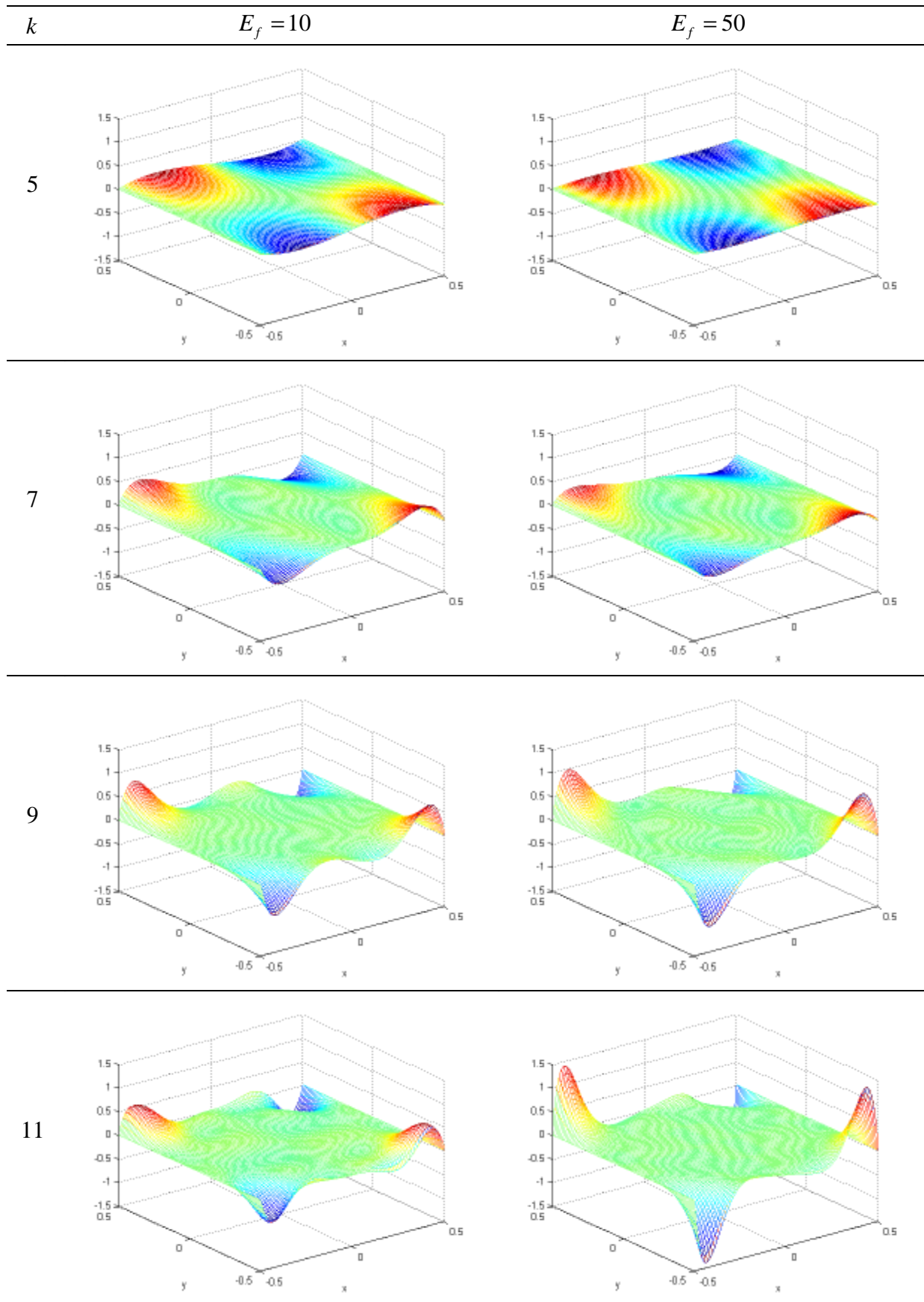


Figura 12 – \mathbf{e}_{pyz} - cisalhamento macroscópico unitário em xz

4.1.4 Observações sobre os exemplos

Os exemplos apresentados permitem a fácil visualização de algumas formas que os deslocamentos e as deformações periódicas podem tomar.

Os resultados para fibras mais rígidas são mais evidentes, visto que o maior contraste entre os materiais que formam o compósito conduzem a um maior grau de heterogeneidade. Em todas as figuras observam-se maiores deslocamentos e deformações nos exemplos para células com fibra de $E_f = 50$.

O contraste entre os materiais também influencia a convergência dos cálculos. Polinômios de mais alto grau compõem as expansões de deslocamentos (e conseqüentemente de deformações) aproximam melhor os resultados. Maiores contrastes entre fibra e matriz tornam necessários graus mais altos para boas aproximações. Comparando-se as deformações específicas, percebe-se uma maior diferença a cada aumento de k para a situação de $E_f = 50$.

4.2 UTILIZAÇÃO DE SÉRIES ADICIONAIS NA REGIÃO DA FIBRA

Conforme já foi exemplificado anteriormente, a convergência dos deslocamentos periódicos influi diretamente na convergência de todo o problema. Considerando-se os tipos de fibras estudados (seções redondas e quadradas) os principais fatores que tem efeito sobre a convergência dos resultados em geral, são a razão entre a rigidez da fibra e da matriz e a quantidade de fibra.

Quanto maior o contraste entre as características dos materiais, maior é a influência da parcela periódica na mecânica do compósito. Para se obterem resultados acurados, as expansões devem modelar suficientemente bem as funções que representam. A região de maior dificuldade de representação é a interface entre fibra e matriz, onde as características mecânicas mudam abruptamente. A presença de descontinuidades dificulta a convergência.

A quantidade de fibra modifica proporcionalmente as características do compósito. Pequenas quantidades, mesmo onde existiriam dificuldades de convergência devido aos altos contrastes de rigidez acabam por não prejudicar significativamente o resultado. Entretanto, para uma densidade alta de fibras, a descontinuidade das propriedades dos materiais se reflete

na aproximação dos deslocamentos da fibra, e ainda mais severamente na presença de grandes contrastes nas características mecânicas dos componentes.

Para se combater esse fenômeno, aplica-se uma série adicional na região da fibra. Por existir em grande quantidade na célula unitária (no caso de altas densidades de fibra) e ter rigidez normalmente muito maior que a da matriz, a influência da fibra no balanço de energia é majoritário. Melhorar a aproximação feita pelas séries nessa região otimiza, automaticamente, a busca do resultado.

As figuras 13 e 14 mostram um exemplo com o deslocamento periódico u_{px} e com a deformação e_{px} , respectivamente, em $y=0$, devidos a um carregamento macroscópico idêntico ao utilizado no exemplo 4.1.3.1 (tração unitária na direção x).

As funções em cinza correspondem aos resultados obtidos utilizando-se somente uma série para o deslocamento em cada direção (x , y e z), conforme a equação (3.5), enquanto as em preto correspondem à formulação com uma expansão adicional para cada direção na região da fibra, conforme (3.7).

A melhor representação da inflexão do deslocamento u_{px} com séries adicionais corresponde a melhor representação da descontinuidade na deformação específica.

A principal aplicação de expansões adicionais na região da fibra se dá realmente para altas concentrações de fibra em conjunto com altas razões entre a rigidez da fibra e da matriz, conforme pode ser visto na figura 13, comparando-se os deslocamentos para a fração volumétrica $V_f/V = 0,9$. Nesse caso, é perceptível a maior dificuldade em aproximar-se com somente uma série o deslocamento para a condição apresentada.

Da mesma forma, na figura 14, a melhora na representação da deformação, tanto na região da fibra, como na região da matriz, conduz a uma melhor convergência do potencial elástico, e conseqüentemente da matriz de elasticidade homogeneizada $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ conforme será visto nos exemplos posteriores.

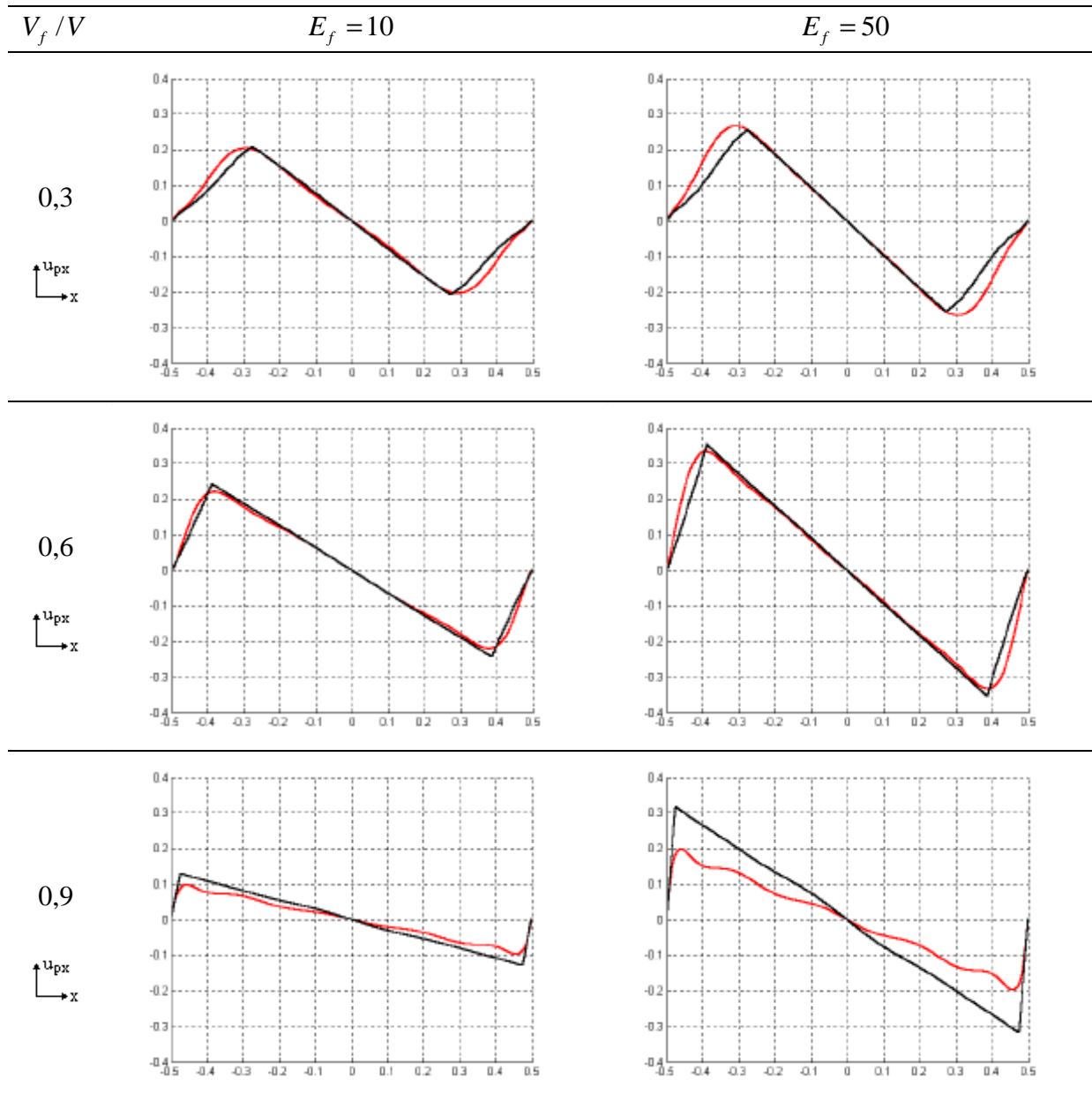


Figura 13 – Comparação entre u_{px} calculado com expansões simples e expansões compostas em diferentes configurações de células unitárias

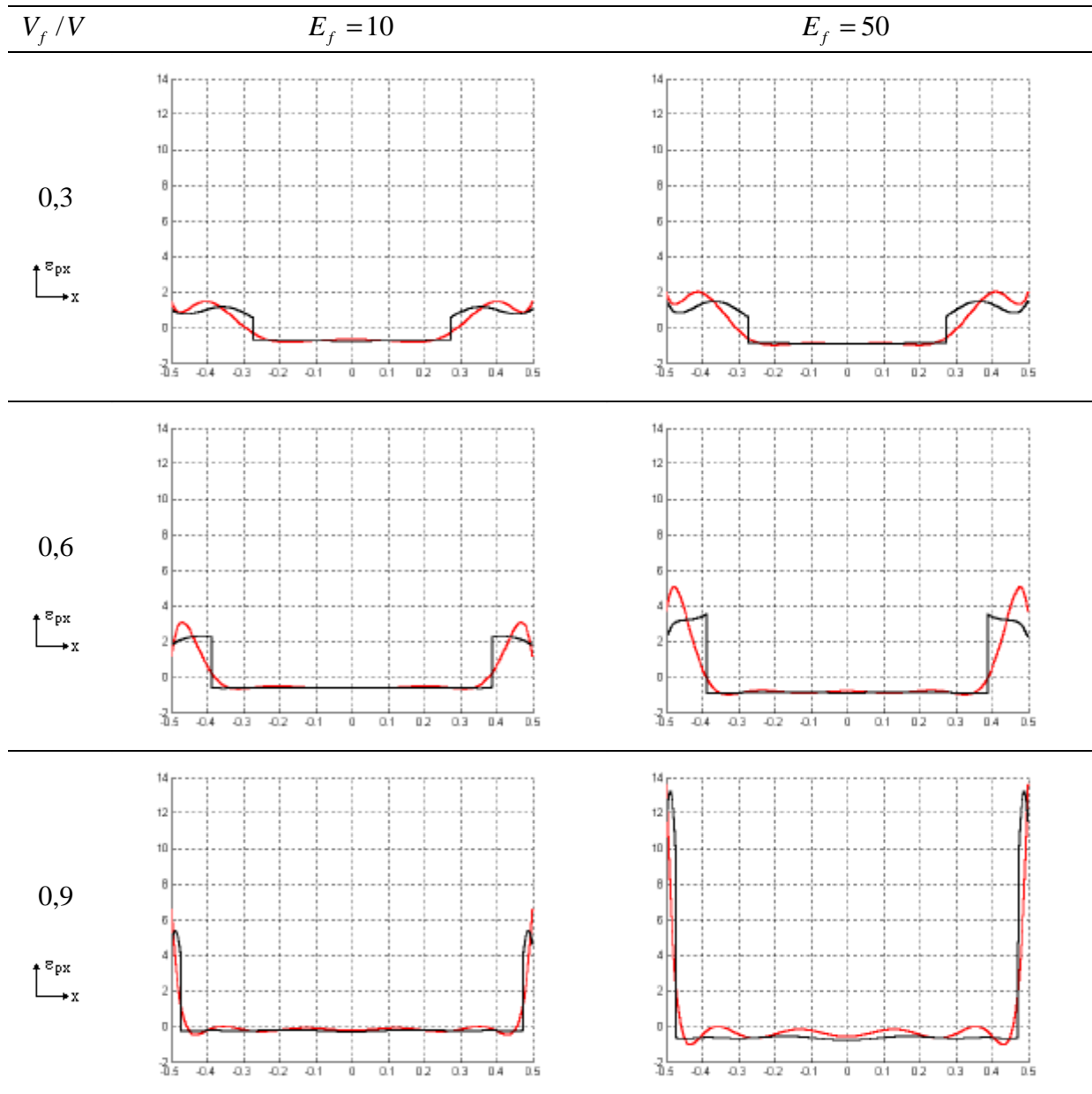


Figura 14 – Comparação entre ϵ_{px} calculado com expansões simples e expansões compostas em diferentes configurações de células unitárias

4.3 CONVERGÊNCIA COMPARATIVA DOS ELEMENTOS DE $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$

4.3.1 Descrição dos exemplos

A matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ corresponde ao tensor $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ da seguinte maneira

$$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}} = \begin{bmatrix} C_{xxxx}^{\text{hom}} & C_{xyxy}^{\text{hom}} & C_{xxzz}^{\text{hom}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{yyxx}^{\text{hom}} & C_{yyyy}^{\text{hom}} & C_{yyzz}^{\text{hom}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{zzxx}^{\text{hom}} & C_{zzyy}^{\text{hom}} & C_{zzzz}^{\text{hom}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{xyxy}^{\text{hom}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{xxzz}^{\text{hom}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{yyzz}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Os gráficos desta seção exemplificam a convergência do termo $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1) = C_{xxxx}$ ($\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2) = C_{yyyy}$ devido à simetria da célula elementar). Os demais termos tem um comportamento similar quanto à convergência.

Nas abcissas tem-se a variação da fração volumétrica de fibra V_f/V enquanto são traçados os valores correspondentes de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ para os polinômios de grau k que compõem as expansões assintóticas. Paralelamente é comparada a evolução dos valores para diferentes módulos de elasticidade da fibra ($E_f = 10$ e $E_f = 50$).

Tem-se para o módulo de elasticidade da matriz $E_m = 1$. Os coeficientes de Poisson para fibra e matriz são respectivamente $\nu_f = 0,2$ e $\nu_m = 0,3$.

A formulação computacional descrita no apêndice A, é direcionada para fibras de formas redondas e quadradas, apesar de toda a generalidade da teoria descrita nos capítulos 2 e 3. A figura 15 expõe a evolução de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ para fibras redondas, enquanto a figura 16, para fibras quadradas. Na figura 16, ainda pode ser vista a influência da utilização das séries de deslocamentos auxiliares na convergência da elasticidade macroscópica.

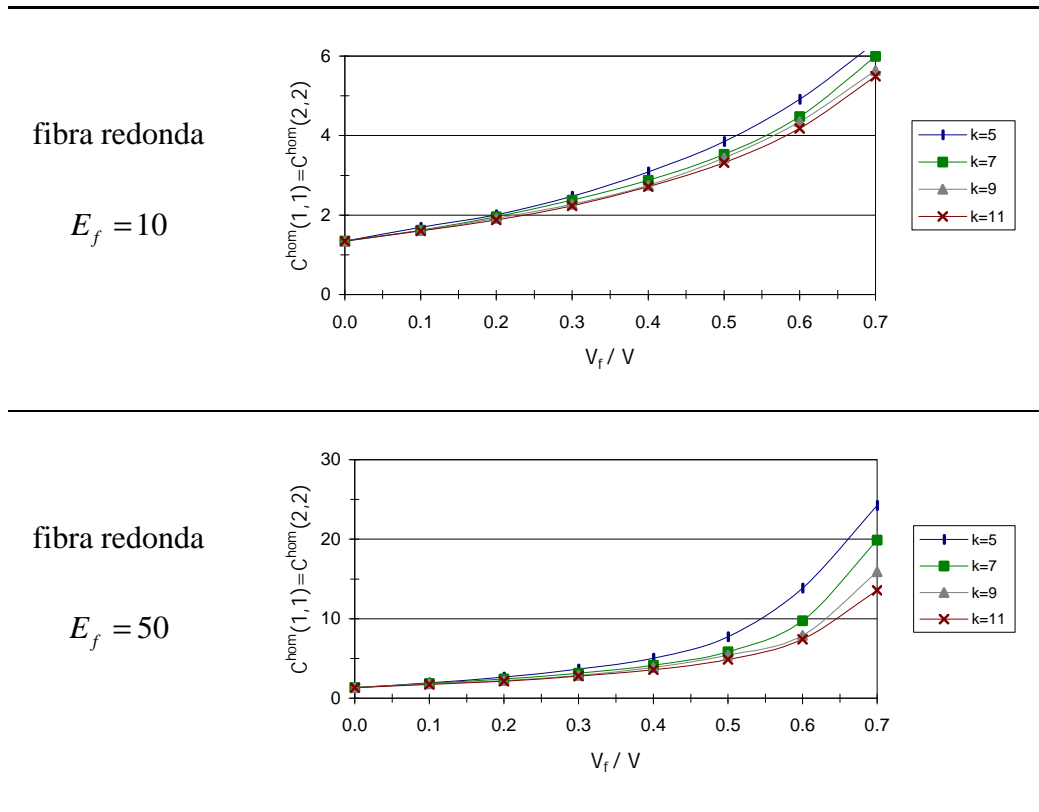


Figura 15 – Convergência de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$ - fibras redondas

4.3.2 Observações quanto à convergência de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$

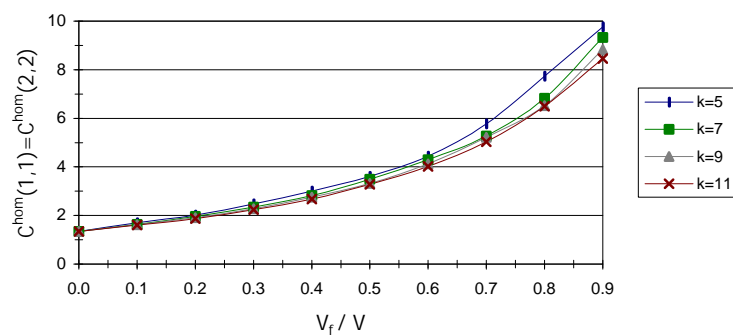
A convergência dos cálculos para as formas das fibras estudadas é bastante semelhante. À medida que a quantidade de fibra aumenta, são necessários polinômios de graus maiores para que se alcancem bons resultados para os coeficientes da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$.

A dificuldade na aproximação das funções periódicas em situações nas quais a razão entre a rigidez dos materiais é maior se traduz macroscopicamente na convergência mais lenta da matriz de elasticidade homogeneizada. Para o caso em que o módulo de elasticidade da fibra é $E_f = 10$, observa-se uma menor diferença entre os resultados calculados com séries de grau $k = 5$ e $k = 11$ do que para $E_f = 50$.

Na figura 16, também pode ser visualizada a grande eficiência na utilização de séries auxiliares na região da fibra. A variação dos resultados obtidos para os crescentes valores de k apresentados é bem inferior aos correspondentes para séries simples.

Fibra quadrada

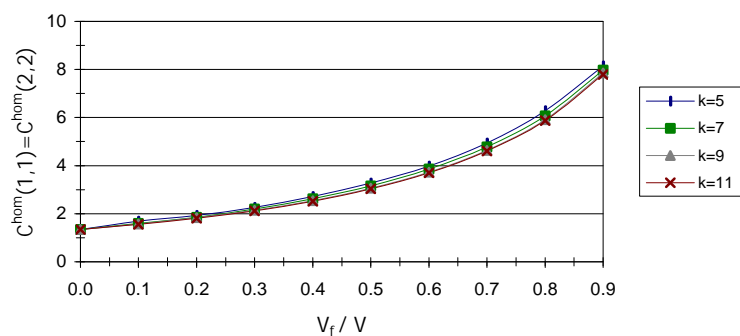
$$E_f = 10$$



fibra quadrada

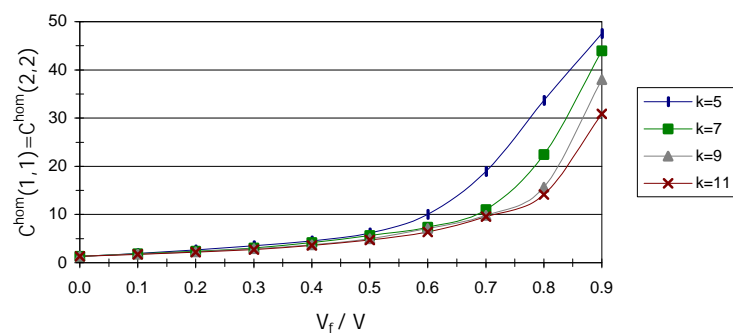
$$E_f = 10$$

série adicional



fibra quadrada

$$E_f = 50$$



fibra quadrada

$$E_f = 50$$

série adicional

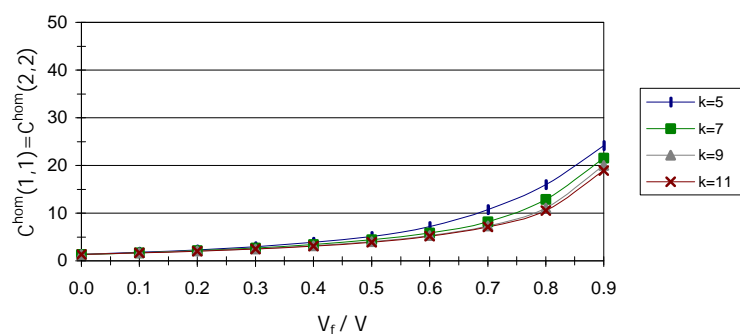


Figura 16 – Convergência de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$ - fibras quadradas

4.4 INFLUÊNCIA DA FORMA DAS FIBRAS

Na figura 17, é mostrada a evolução de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ com a fração volumétrica de fibra. São comparados resultados para fibras redondas (*FR*) e fibras quadradas (*FQ*), nos quais são variados os módulos de elasticidade da fibra ($E_f = 2$, $E_f = 10$, $E_f = 50$). O módulo de elasticidade da matriz e os coeficientes de poisson dos materiais são os mesmos dos exemplos anteriores. Os polinômios utilizados para os cálculos tem grau $k = 11$.

Pode-se observar que para fibras pouco mais rígidas que a matriz (como é o caso de $E_f = 2$), a forma não modifica consideravelmente os resultados. À medida que se aumenta a rigidez das fibras e a sua densidade no compósito, a forma passa a ser uma variável importante.

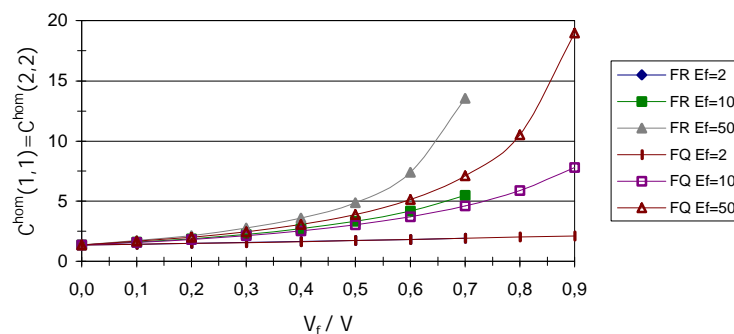


Figura 17 – Comparativo entre fibras redondas e quadradas

4.5 INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DAS FIBRAS

Nas figuras 18 e 19, é mostrada a influência da rigidez das fibras em todos os termos da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$. Para estes exemplos, foram utilizadas fibras quadradas analisadas com séries compostas de grau $k = 11$. As propriedades dos materiais são as mesmas do exemplo anterior.

Na figura 18, o termo $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,3)$ tem um comportamento linear. Aumentando-se a rigidez da fibra, tem-se um aumento proporcional da rigidez do composto na direção em

questão. Isso ocorre, pois na direção longitudinal às fibras, o módulo de elasticidade do compósito é praticamente a média volumétrica dos módulos dos seus constituintes.

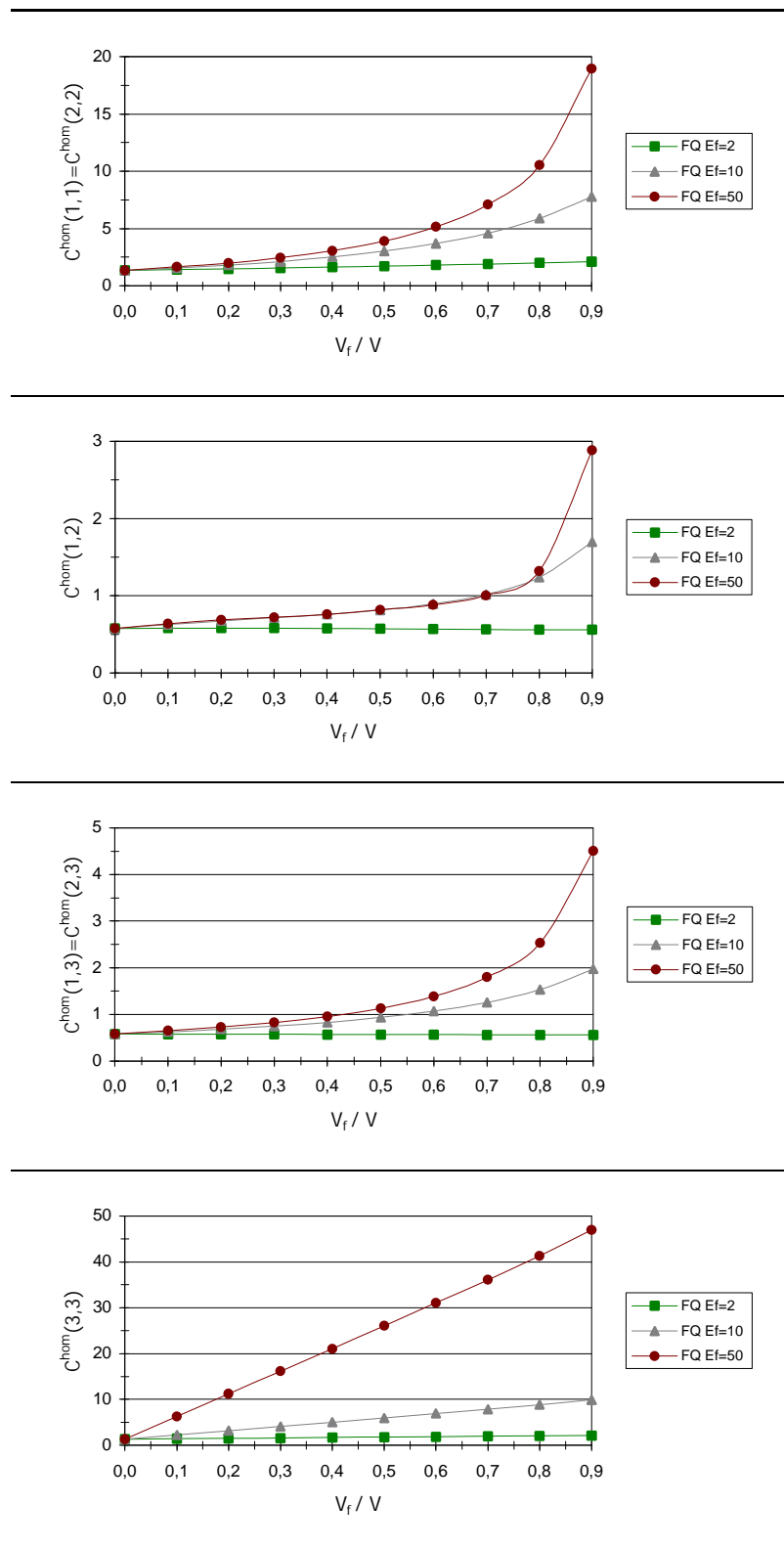


Figura 18 – Influência da rigidez dos materiais nos termos $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,2)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,3)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,3)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,3)$

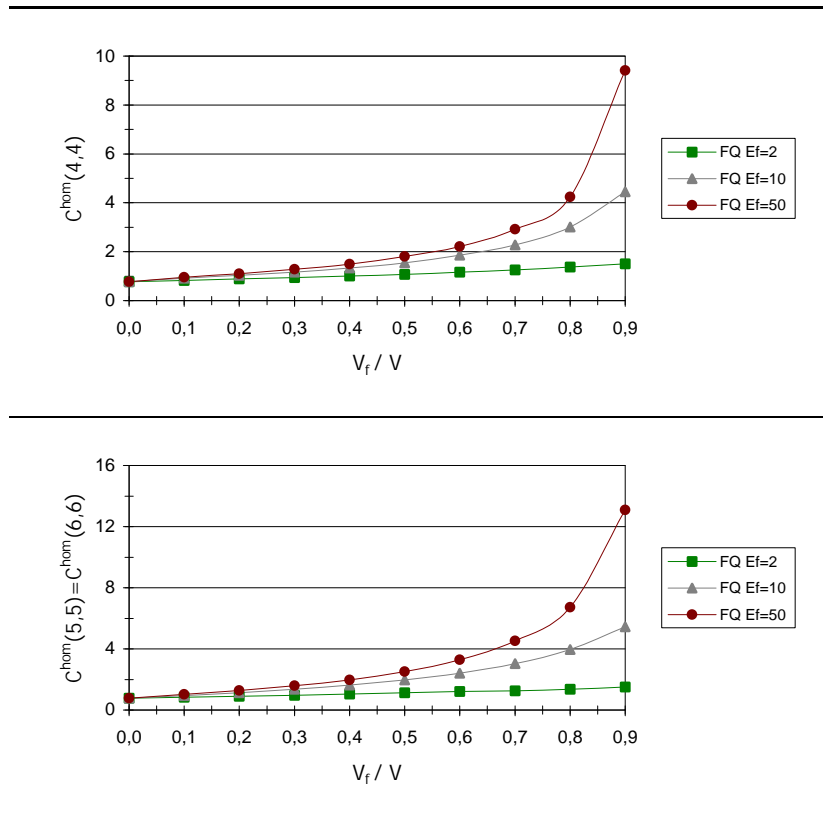


Figura 19 – Influência da rigidez dos materiais nos termos $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(4,4)$, $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(5,5)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(6,6)$

Para concentrações muito grandes de fibras, o comportamento do compósito se aproxima do comportamento do próprio material da fibra. Dessa forma, um aumento na rigidez da fibra produz um aumento direto na rigidez do compósito.

Entretanto, observando-se proporções volumétricas de fibra V_f/V menores que 0,7, observa-se que o aumento na rigidez do compósito não é proporcional ao aumento da rigidez da fibra. A rigidez das fibras comparadas nos gráficos está relacionada por razões múltiplas de cinco (2, 10, 50). O ganho de rigidez nos termos de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ nas curvas de $E_f = 10$ para $E_f = 50$ tende a ser menor que o ganho de $E_f = 2$ para $E_f = 10$.

Aumentos sucessivos conduziriam a um patamar no qual novos aumentos do módulo de elasticidade da fibra não produziram efeitos adicionais no compósito em orientações diferentes da longitudinal à fibra. Um exemplo disso é o que acontece com $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,2)$, na

figura 18. Caso fosse aumentado ainda mais o módulo de elasticidade, não se produziriam mudanças no gráfico para proporções volumétricas V_f/V menores que 0,8.

Esse comportamento é explicado pelo fato das fibras passarem a se comportar como corpos indeformáveis comparados a matriz quando o contraste entre a rigidez dos materiais é suficientemente grande. Observando-se as figuras 18 e 19, visualiza-se que esse fenômeno ocorreria em diferentes níveis de rigidez para cada uma das componentes de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$.

4.6 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS NUMÉRICOS

4.6.1 Modelos comparados

A verificação da metodologia empregada e seus resultados, realiza-se através de um pequeno conjunto de modelos simplificados em elementos finitos para simular as condições de periodicidade dos compósitos. Os modelos estão descritos no apêndice C.

Para os termos $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$ (figura 20), $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,2)$ (figura 21), $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,3)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,3)$ (figura 22), e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,3)$ (figura 23) é válido e suficiente o modelo EF 1. Os resultados de EF 2 e EF 3 são idênticos. Os resultados mostrados correspondem a $N=9$, correspondendo a 6561 elementos lineares (ver item C.1 do apêndice C para definição de N).

Para os termos $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(4,4)$ (figura 24), $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(5,5)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(6,6)$ (figura 25) são necessárias algumas camadas de células para simular os efeitos da periodicidade de um compósito. Expondo em um mesmo gráfico os resultados dos três modelos: EF 1, EF 2 e EF 3, busca-se mostrar a tendência de convergência do resultado. O número de elementos para os testes são: EF 1 ($N=9$ - 6561 elementos), EF 2 ($N=3$ - 6561 elementos) e EF 3 ($N=2$ - 9000 elementos). Obs.: Para o modelo EF 3 é mostrado apenas o valor em $V_f/V=0,6$.

Quanto aos resultados em séries, são comparados os valores correspondentes utilizando-se séries simples (FQ 1) e séries compostas (FQ 2) para fibras quadradas. O grau dos polinômios das expansões é $k=11$.

Para melhor visualizar as dificuldades de convergência dos modelos utiliza-se a comparação entre diferentes valores de rigidez para as fibras ($E_f = 10$ e $E_f = 50$). O módulo de elasticidade da matriz permanece $E_m = 1$. Os coeficientes de Poisson da fibra e da matriz também permanecem como $\nu_f = 0,2$ e $\nu_m = 0,3$, respectivamente.

4.6.2 Comentários sobre as comparações

A convergência mais lenta para situações de maiores razões de rigidez entre fibra e matriz já foi exposta várias vezes ao longo desse capítulo de resultados para a metodologia de séries assintóticas.

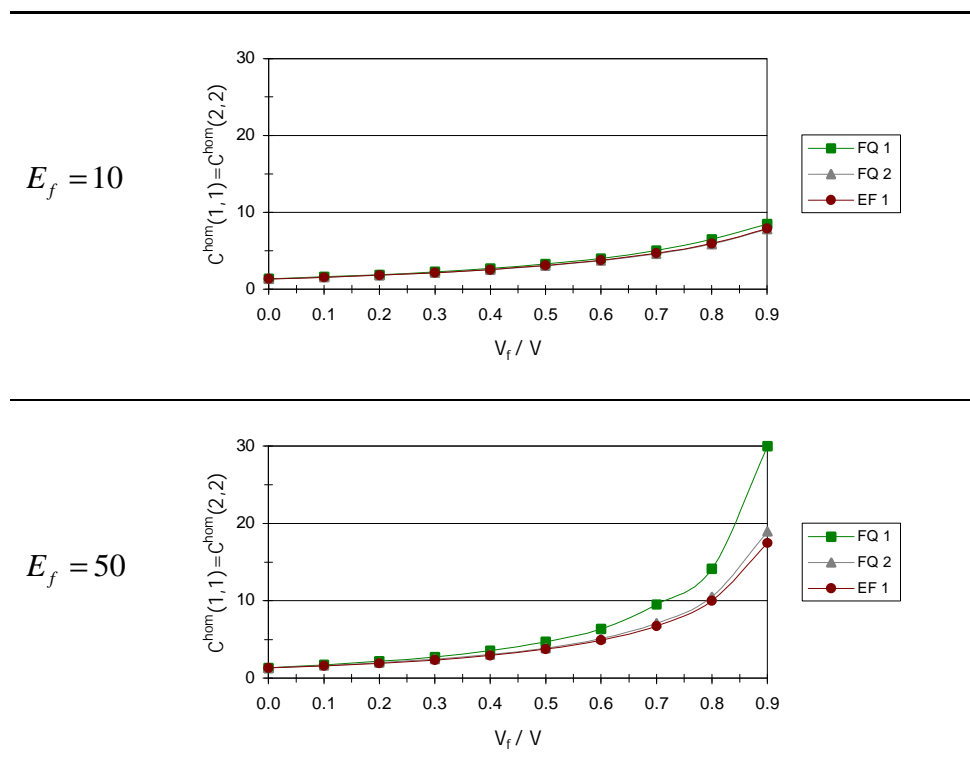


Figura 20 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2)$ calculados por séries e pelo modelo em elementos finitos

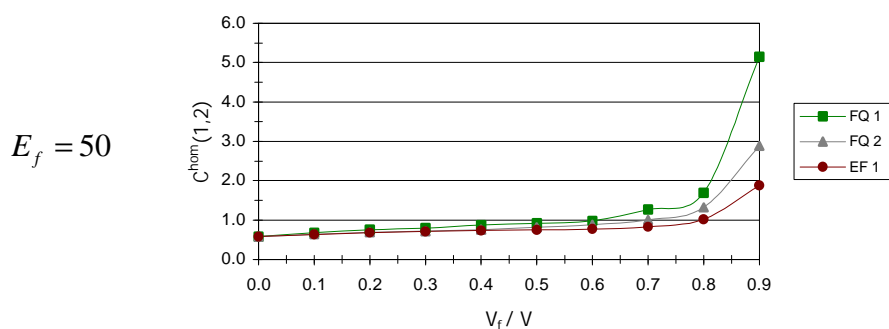
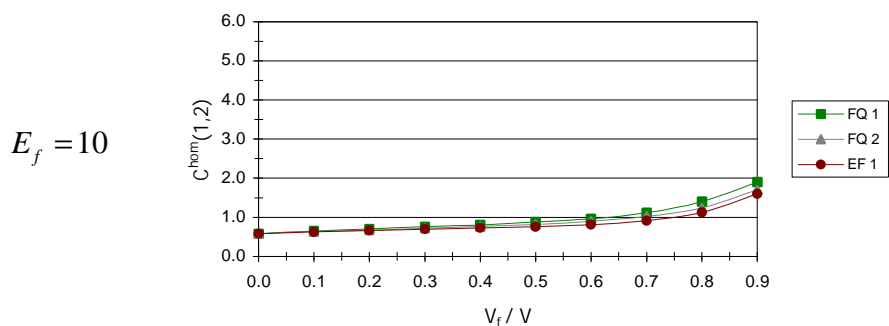


Figura 21 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,2)$ calculado por séries e pelo modelo em elementos finitos

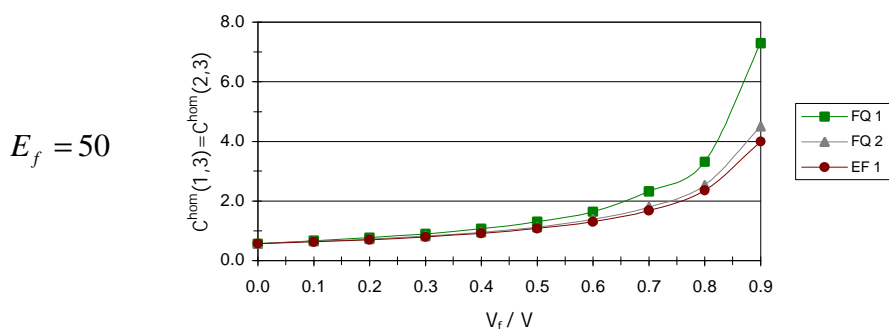
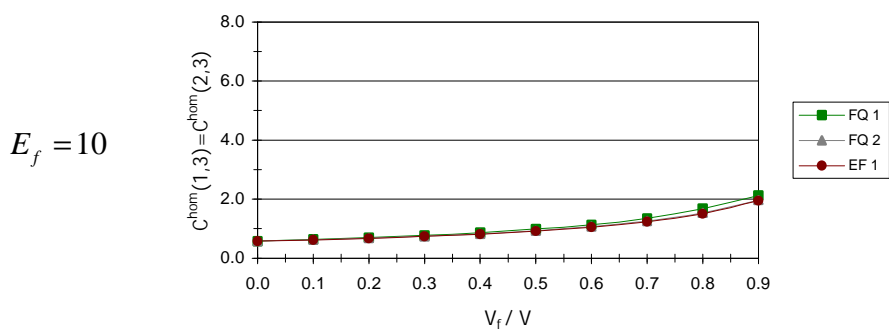


Figura 22 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,3)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,3)$ calculados por séries e pelo modelo em elementos finitos

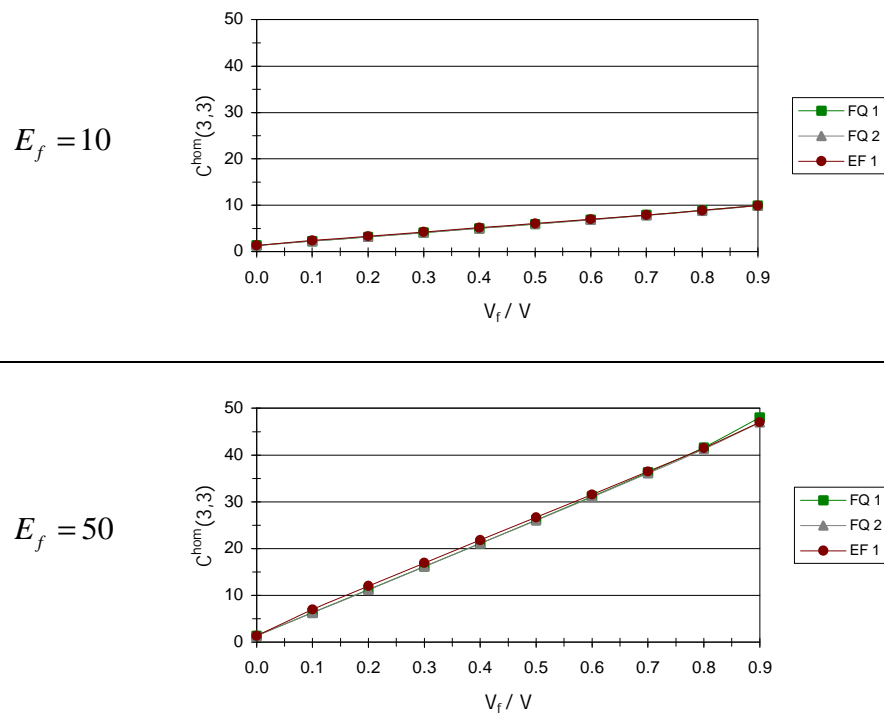


Figura 23 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,3)$ calculado por séries e pelo modelo em elementos finitos

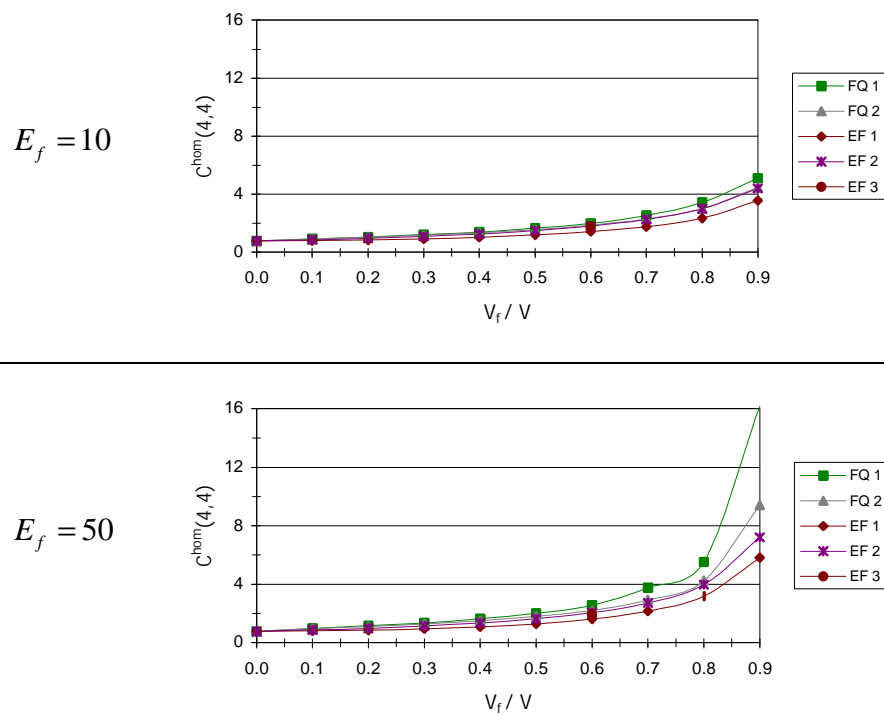


Figura 24 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(4,4)$ calculado por séries e pelos modelos em elementos finitos

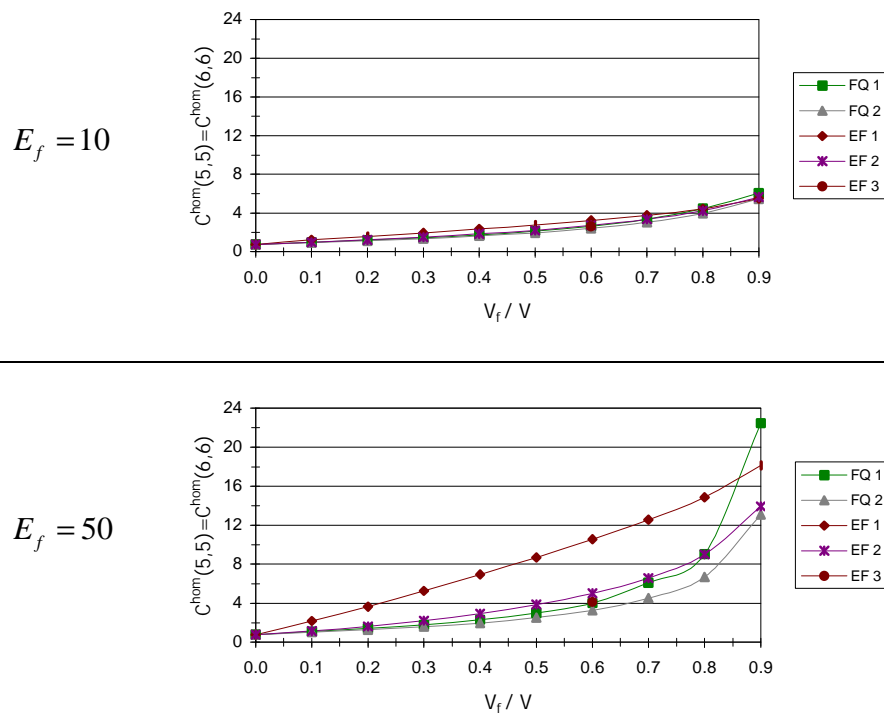


Figura 25 – Comparação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(5,5)$ e $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(6,6)$ calculados por séries e pelos modelos em elementos finitos

Não foram mostradas as peculiaridades sobre a convergência dos modelos em elementos finitos para as mesmas condições por não se tratar objeto desse trabalho, entretanto ainda cabem algumas observações sobre esse assunto, presentes no capítulo 6 de resultados em viscoelasticidade.

5 HOMOGENEIZAÇÃO EM VISCOELASTICIDADE

A seguir, é apresentada uma metodologia para determinação da matriz constitutiva homogeneizada de um material compósito cujas propriedades mecânicas são dependentes do tempo. Para a determinação do comportamento viscoelástico macroscópico do compósito de fibras unidimensionais, representado na figura 4, os conceitos de homogeneização em elasticidade, apresentados no capítulo 2, são associados a métodos incrementais em viscoelasticidade. Os métodos e a teoria podem ser consultados no trabalho de Creus (1986).

5.1 LEI DE COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO LINEAR

A lei constitutiva local para materiais viscoelásticos lineares, que relaciona tensões à um determinado histórico de deformações, é dada por

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{\zeta}}(t, \mathbf{t}) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t)}{\partial \mathbf{t}} dt \\ &= \underline{\underline{\zeta}}(t, t) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \underline{\underline{\zeta}}(t, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) dt\end{aligned}\tag{5.1}$$

Ao tensor de relaxação $\underline{\underline{\zeta}}$ se associam as mesmas propriedades gerais de simetria existentes em elasticidade

$$c_{ijol}(t, \mathbf{t}) = c_{jiol}(t, \mathbf{t}) = c_{ijlo}(t, \mathbf{t}) = c_{olij}(t, \mathbf{t})\tag{5.2}$$

Observa-se que a relação inversa de (5.1), também é verdadeira, da seguinte forma

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{d}}(t, \mathbf{t}) : \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t)}{\partial \mathbf{t}} dt \\ &= \underline{\underline{d}}(t, t) : \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \underline{\underline{d}}(t, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} : \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) dt\end{aligned}\tag{5.3}$$

O tensor de fluência \underline{d} também apresenta simetria

$$d_{ijol}(t, \mathbf{t}) = d_{jiol}(t, \mathbf{t}) = d_{ijlo}(t, \mathbf{t}) = d_{olij}(t, \mathbf{t}) \quad (5.4)$$

O argumento t em \underline{c} e em \underline{d} relaciona-se à resposta instantânea, enquanto \mathbf{t} , a todo o histórico de deformações e de tensões, respectivamente. A dependência com \mathbf{t} caracteriza respostas defasadas no tempo.

No caso particular de materiais sem envelhecimento, a dependência com o tempo se apresenta

$$\underline{c}(t, \mathbf{t}) = \underline{c}(t - \mathbf{t}) \text{ e } \underline{d}(t, \mathbf{t}) = \underline{d}(t - \mathbf{t}) \quad (5.5)$$

5.2 PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO

Seja $\underline{\underline{E}}(t)$ o histórico do campo de deformações macroscópicas iniciando em $t=0$. O problema de localização definido sobre a célula unitária e cujas soluções são os campos microscópicos é definido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) = 0, \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) \cdot \underline{\underline{n}} \text{ é antiperiódico} \\ \underline{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{E}}(t) \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{u}}_p(t), \underline{\underline{u}}_p(t) \text{ é periódico} \\ \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{c}}(t, \mathbf{t}) : \frac{\partial \underline{\underline{e}}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} d\mathbf{t} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

onde $\underline{\underline{e}}$ é definido para $t \geq 0$. As condições iniciais são estabelecidas associando-se valores nulos para os campos em $t < 0$.

Uma vez solucionado o problema de localização (5.6), a lei constitutiva macroscópica relaciona $\underline{\underline{\Sigma}}$ a $\underline{\underline{E}}$ através da relação

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, t) : \underline{\underline{E}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} : \underline{\underline{E}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (5.7)$$

onde $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ é o tensor de relaxação macroscópico.

Pelo mesmo princípio

$$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{D}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t}) : \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \underline{\underline{D}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} : \underline{\underline{\Sigma}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (5.8)$$

onde $\underline{\underline{D}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ é o tensor de fluência macroscópico.

5.2.1 Determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$

Para determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$, utiliza-se como carregamento

$$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{E}}H(t - \mathbf{t}_0) \quad (5.9)$$

onde $H(t - \mathbf{t}_0)$ é a função passo unitário (Heaviside) definida como

$$\begin{cases} H(t - \mathbf{t}_0) = 0 & \text{para } t \leq \mathbf{t}_0 \\ H(t - \mathbf{t}_0) = 1 & \text{para } t > \mathbf{t}_0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Aplicando-se (5.9) em (5.7) obtém-se

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t}_0) : \underline{\underline{E}} \quad (5.11)$$

onde \mathbf{t}_0 é o instante de aplicação do carregamento $\underline{\underline{E}}(t)$ e pode variar de acordo com o intervalo de tempo de interesse.

5.3 CASO PARTICULAR: ENVELHECIMENTO POR SOFTENING

A formulação de envelhecimento por softening (ou abrandamento) busca modelar situações nas quais o material viscoelástico sofre uma degradação de suas propriedades pelas mais diversas razões: variações de temperatura, intemperismo, exposição a agentes químicos, raios solares, etc.

5.3.1 Resolução Aproximada (softening)

Na relação constitutiva (5.3), a deformação pode ser dividida em duas parcelas

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}^e(t) = \underline{\underline{d}}(t, t) : \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) \quad \text{parcela elástica de } \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) \quad (5.12)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t) = - \int_{t_0}^t \frac{\partial \underline{\underline{d}}(t, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} : \underline{\underline{\mathbf{s}}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad \text{parcela viscosa de } \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) \quad (5.13)$$

De modo que somadas

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{e}}}^e(t) + \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t) \quad (5.14)$$

Da parcela elástica (5.12), tem-se para $\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t)$ (considerando-se t como variável de integração)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) &= \underline{\underline{d}}(t, t)^{-1} : \underline{\underline{\mathbf{e}}}^e(t) \\ &= \underline{\underline{c}}(t, t) : (\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) - \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t)) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para se resolver o problema de localização (5.6), divide-se o intervalo de tempo $[t_0; T]$ estudado, em subintervalos de duração Δt . Supondo-se que $\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t)$ e $\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t)$ são conhecidos para todo $t \in [t_0; t]$, no intervalo $t \in]t; t + \Delta t]$, (5.15) pode ser aproximada para um Δt suficientemente pequeno

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) \cong \underline{\underline{c}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : (\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) - \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t)) \quad (5.16)$$

onde $\underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t)$ já é supostamente conhecida.

Dessa maneira, sobre um subintervalo $]t; t + \Delta t]$, tem-se formalmente um problema de elasticidade com deformação inicial dada. Para $\forall t \in]t; t + \Delta t]$

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) = 0, \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) \cdot \underline{\underline{n}} \text{ é antiperiódico} \\ \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t) \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{u}}_p(t), \underline{\underline{u}}_p(t) \text{ é periódico} \\ \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t) = \underline{\underline{c}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : (\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t) - \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t)) \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\text{Observa-se que } \langle \underline{\underline{\mathbf{e}}}(\mathbf{t}) \rangle = \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{t}) = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (5.18)$$

$\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ é constante no tempo, enquanto $\underline{\underline{\mathbf{e}}}^v$ e as soluções $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ podem ser coerentemente consideradas independentes de \mathbf{t} durante o intervalo considerado para um Δt suficientemente pequeno. Após essas considerações a relação constitutiva (5.16) pode ser reescrita como

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\mathbf{c}}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : (\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t)) \quad (5.19)$$

Conforme o item 2.8, referente ao potencial elástico, a solução $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ de (5.17) é determinada sobre o valor mínimo do funcional $\langle \Psi \rangle$. O potencial elástico Ψ fica definido para esse caso

$$\frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t))}{\partial (\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t))} = \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\mathbf{c}}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : (\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t)) \quad (5.20)$$

Integrando-se em relação a $\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t)$, tem-se a expressão de $\Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t))$

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t)) = & \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t) : \underline{\underline{\mathbf{c}}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t) + \\ & - \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t) : \underline{\underline{\mathbf{c}}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : \underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como solução da minimização de Ψ , são obtidos $\underline{\underline{\mathbf{e}}}(t + \Delta t)$ e $\underline{\underline{\mathbf{s}}}(t + \Delta t)$ (por (5.19)). Para o cálculo de $\underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t)$ são utilizadas variáveis de estado, conforme o item 5.3.2.

Finalmente, o cálculo de $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}}(t + \Delta t, \mathbf{t}_o)$ é realizado de modo que

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}}(t + \Delta t) \rangle = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}}(t + \Delta t, \mathbf{t}_o) : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (5.22)$$

Estando determinado o tensor de relaxação macroscópico $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}}$ para o instante $t + \Delta t$, o processo se repete para o subintervalo $]t + \Delta t; t + 2\Delta t]$ tomando-se $\underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(\mathbf{t}) \cong \underline{\underline{\mathbf{e}}}^v(t + \Delta t)$ determinado para o final do subintervalo anterior. Os incrementos se sucedem até o término do intervalo de cálculo T.

5.3.2 Representação de $\underline{\underline{e}}^v$ através de variáveis de estado (softening)

O cálculo de (5.13) na sua forma original conduz, a cada passo de tempo, à solução de uma integral ao longo de toda a história de tensões. O esforço computacional aumenta à medida que se avança no tempo, sendo proporcional ao número de incrementos.

Representar $\underline{\underline{e}}^v$ através de variáveis de estado elimina esse problema, como será demonstrado. Para o caso unidimensional, conforme Creus (1986), aproxima-se $-\frac{\partial d(t, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}$ por meio de séries exponenciais (também chamadas de séries de Dirichlet-Prony)

$$-\frac{\partial d(t, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \cong \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{-\frac{(t-\mathbf{t})}{q_i}} \quad (5.23)$$

$$\text{onde } q_i = \frac{\mathbf{h}_i(t)}{E_i(t)}. \quad (5.24)$$

A expressão (5.23) correspondente fisicamente a modelar o material como uma cadeia de elementos Kelvin (com elasticidade $E_i(t)$ e viscosidade $\mathbf{h}_i(t)$, conforme a figura 26).

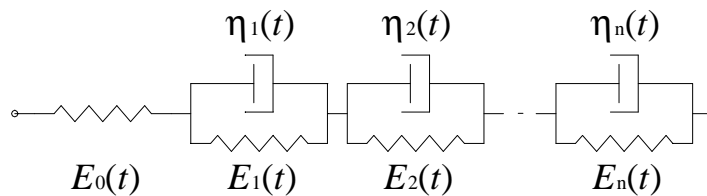


Figura 26 – Modelo Kelvin Generalizado

A aproximação pode ser tão exata quanto seja necessário de acordo com o número de termos incluídos. Para n elementos pode-se considerar

$$\mathbf{e}^v(t) \cong \sum_{i=1}^n q_i(t) = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{-\frac{(t-\mathbf{t})}{q_i}} \mathbf{s}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (5.25)$$

A variável de estado q_i , tem a seguinte expressão integral para um tempo $t - \Delta t$

$$q_i(t - \Delta t) = \int_{t_0}^{t - \Delta t} \frac{1}{h_i(t)} e^{-\frac{-(t - \Delta t - t)}{q_i}} \mathbf{s}(t) dt \quad (5.26)$$

Integrando-se a partir do instante inicial t_0 até um instante final t a expressão (5.26) pode ser reescrita como

$$q_i(t) = \int_{t_0}^{t - \Delta t} \frac{1}{h_i(t)} e^{-\frac{-(t - t)}{q_i}} \mathbf{s}(t) dt + \int_{t - \Delta t}^t \frac{1}{h_i(t)} e^{-\frac{-(t - t)}{q_i}} \mathbf{s}(t) dt \quad (5.27)$$

A primeira integral é igual a $e^{-\frac{-\Delta t}{q_i}} q_i(t - \Delta t)$, enquanto a segunda, assumindo-se que $\frac{\mathbf{s}(t)}{h_i(t)}$ seja constante no intervalo de tempo Δt torna-se

$$\frac{\mathbf{s}(t)}{h_i(t)} e^{-\frac{-\Delta t}{q_i}} \int_{t - \Delta t}^t e^{\frac{t}{q_i}} dt = \frac{\mathbf{s}(t)}{E_i(t)} \left(1 - e^{-\frac{-\Delta t}{q_i}} \right) \quad (5.28)$$

Dessa forma, a equação (5.27), para um Δt suficientemente pequeno, simplifica-se para

$$q_i(t) = e^{-\frac{-\Delta t}{q_i}} q_i(t - \Delta t) + \frac{\mathbf{s}(t)}{E_i(t)} \left(1 - e^{-\frac{-\Delta t}{q_i}} \right) \quad (5.29)$$

Para o caso tridimensional, ver o desenvolvimento no apêndice B, item B.1.2.

Obs.: A determinação dos parâmetros do modelo Kelvin generalizado ($E_i(t)$ e $h_i(t)$) para aproximar uma determinada curva de relaxação ou fluência é chamada de identificação. Este procedimento pode ser visto em Creus (1986).

5.4 CASO PARTICULAR: ENVELHECIMENTO POR HARDENING

No caso de envelhecimento por hardening (ou endurecimento), o interesse é simular o enrijecimento dos materiais viscoelásticos, que ocorre em processos de solidificação,

consolidação, cristalização, etc. O fato do endurecimento se dar sob a configuração deformada da estrutura do material quando em carga, deve ser considerado na formulação.

Os materiais são modelados por amortecedores e molas associados. Tome-se como exemplo o envelhecimento de uma mola (unidimensional) com a seguinte relação constitutiva

$$\mathbf{s}(t) = E(t)\mathbf{e}(t) \quad (5.30)$$

Derivando-se a expressão (5.30) com relação ao tempo obtém-se

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \dot{E}(t)\mathbf{e}(t) + E(t)\dot{\mathbf{e}}(t) \quad (5.31)$$

Enquanto que se isolando $\mathbf{e}(t)$ de (5.30), a derivada desta com relação ao tempo resulta em

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{E(t)} - \frac{\mathbf{s}(t)\dot{E}(t)}{E(t)^2} \quad (5.32)$$

onde $\dot{\bullet} = \frac{\partial}{\partial t}(\bullet)$.

Durante um ensaio a deformação constante e positiva ($\dot{\mathbf{e}}(t) = 0$ e $\mathbf{e}(t) > 0$), em uma mola de material com endurecimento ao longo do tempo ($\dot{E}(t) > 0$), de acordo com (5.31), ocorreria um aumento na sua tensão ($\dot{\mathbf{s}}(t) > 0$) à medida que a rigidez aumentasse.

Em um outro ensaio, onde a mesma mola fosse submetida à uma tensão de tração constante ($\dot{\mathbf{s}}(t) = 0$ e $\mathbf{s}(t) > 0$), de acordo com (5.32), sendo que no material ocorre endurecimento ao longo do tempo ($\dot{E}(t) > 0$), haveria um encurtamento ($\dot{\mathbf{e}}(t) < 0$) com o aumento de rigidez.

Ambos os resultados sugerem, por exemplo, que uma laje de concreto carregada durante o seu processo de cura teria suas deformações reduzidas à medida que sua rigidez fosse aumentando. Tal comportamento é incoerente, visto que a laje se consolida na forma carregada, ou seja, em uma determinada condição de deformação.

Na realidade, a tensão permaneceria constante ($\dot{\mathbf{s}}(t) = 0$) para o primeiro ensaio, enquanto para o segundo, seria a deformação ($\dot{\mathbf{e}}(t) = 0$).

Analisando-se as equações (5.31) e (5.32), observa-se que os termos dependentes de $\dot{E}(t)$ geram os comportamentos de incoerência física. Portanto, para adequar o comportamento da mola com a condição na qual se dá o seu enrijecimento, sua equação constitutiva é de fato escrita

$$\underline{\dot{\mathbf{s}}}(t) = E(t)\dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) \quad (5.33)$$

A utilização desse princípio pode vista nas formulações para fluência de concreto de Masuero e Creus (1995).

5.4.1 Resolução Aproximada (hardening)

Para que a mudança nas características dos materiais seja corretamente representada nos modelos de molas e amortecedores, é conveniente que o problema seja abordado na forma de taxas. Portanto, derivando-se a relação constitutiva (5.3) com relação ao tempo, utilizando-se a regra de Leibniz, obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\underline{\mathbf{e}}}}(t) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\dot{d}}(t, \underline{\mathbf{t}}) : \underline{\dot{\underline{\mathbf{s}}}}(\underline{\mathbf{t}})) dt + \underline{\dot{d}}(t, t) : \underline{\dot{\underline{\mathbf{s}}}}(t) \\ &= \underline{\dot{d}}(t, t) : \underline{\dot{\underline{\mathbf{s}}}}(t) + \int_{t_0}^t \dot{\underline{\dot{d}}}(t, \underline{\mathbf{t}}) : \underline{\dot{\underline{\mathbf{s}}}}(\underline{\mathbf{t}}) dt \end{aligned} \quad (5.34)$$

A taxa da deformação (5.34) pode ser dividida em duas parcelas

$$\underline{\dot{\underline{\mathbf{e}}}}^e(t) = \underline{\dot{d}}(t, t) : \underline{\dot{\underline{\mathbf{s}}}}(t) \quad (5.35)$$

$$\underline{\dot{\underline{\mathbf{e}}}}^v(t) = \int_{t_0}^t \dot{\underline{\dot{d}}}(t, \underline{\mathbf{t}}) : \underline{\dot{\underline{\mathbf{s}}}}(\underline{\mathbf{t}}) dt \quad (5.36)$$

De modo que somadas

$$\underline{\dot{\underline{\mathbf{e}}}}(t) = \underline{\dot{\underline{\mathbf{e}}}}^e(t) + \underline{\dot{\underline{\mathbf{e}}}}^v(t) \quad (5.37)$$

Partindo-se de (5.35), tem-se para $\underline{\dot{\underline{\mathbf{s}}}}(\underline{\mathbf{t}})$ (considerando-se $\underline{\mathbf{t}}$ como variável de integração)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(\mathbf{t}) &= \underline{\underline{d}}(\mathbf{t}, \mathbf{t})^{-1} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^e(\mathbf{t}) \\ &= \underline{\underline{c}}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) : \left(\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(\mathbf{t}) - \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(\mathbf{t}) \right)\end{aligned}\quad (5.38)$$

Para se resolver o problema de localização (5.6) agora na forma de taxas em configuração deformada, procede-se dividindo o intervalo de tempo $[\mathbf{t}_o; T]$ estudado, em subintervalos de duração Δt . Supondo-se que $\underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(\mathbf{t})$ e $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(\mathbf{t})$ são conhecidos para todo $\mathbf{t} \in [\mathbf{t}_o; t]$, no intervalo $\mathbf{t} \in]t; t + \Delta t]$, (5.38) pode ser aproximada para um Δt suficientemente pequeno

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(\mathbf{t}) \cong \underline{\underline{c}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : \left(\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(\mathbf{t}) - \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t) \right) \quad (5.39)$$

onde $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t)$ já é supostamente conhecida.

Dessa maneira, sobre um subintervalo $]t; t + \Delta t]$, tem-se formalmente um problema de elasticidade com deformação inicial dada. Para $\forall \mathbf{t} \in]t; t + \Delta t]$

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(\mathbf{t}) = 0, \underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(\mathbf{t}) \cdot \underline{\underline{n}} \text{ é anti-periódico} \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{u}}}}(\mathbf{t}) = \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}(\mathbf{t}) \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{\dot{\mathbf{u}}}}_p(\mathbf{t}), \underline{\underline{\dot{\mathbf{u}}}}_p(\mathbf{t}) \text{ é periódico} \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(\mathbf{t}) = \underline{\underline{c}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : \left(\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(\mathbf{t}) - \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t) \right) \end{cases} \quad (5.40)$$

$$\text{Observa-se que } \langle \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(\mathbf{t}) \rangle = \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}(\mathbf{t}) = 0 \quad (5.41)$$

$\underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}$ é nula, pois $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ é constante no tempo. $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v$ e as soluções $\underline{\underline{\dot{\mathbf{u}}}}$, $\underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}$ e $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}$ podem ser coerentemente consideradas independentes de \mathbf{t} durante o intervalo considerado para um Δt suficientemente pequeno. Após essas considerações a relação constitutiva (5.39) pode ser reescrita como

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}} = \underline{\underline{c}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : \left(\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t) \right) \quad (5.42)$$

A demonstração para o Lema de Hill (item 2.3) é similar para a formulação em taxas, assim como o que se segue até o princípio de minimização em deslocamentos (item 2.8.1).

Através de uma analogia direta do processo em taxas, a solução $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}$ de (5.40) é determinada sobre o valor mínimo do funcional $\langle \tilde{\Psi} \rangle$. O potencial elástico $\tilde{\Psi}$ fica definido para esse caso

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}(\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t))}{\partial (\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t))} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\zeta}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : (\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t)) \quad (5.43)$$

Integrando-se em relação a $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t)) &= \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t) : \underline{\underline{\zeta}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t) + \\ &\quad - \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t) : \underline{\underline{\zeta}}(t + \Delta t, t + \Delta t) : \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Como solução da minimização de $\tilde{\Psi}$, são obtidos $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}(t + \Delta t)$ e $\underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(t + \Delta t)$ (por (5.42)). Para o cálculo de $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t)$ são utilizadas variáveis de estado, conforme o item 5.4.2.

A derivada da relação macroscópica (5.11) em relação ao tempo para $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ constante, associada a solução $\underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(t + \Delta t)$ é escrita

$$\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}(t + \Delta t) = \langle \underline{\underline{\dot{\mathbf{s}}}}(t + \Delta t) \rangle = \underline{\underline{\dot{C}}}^{\text{hom}}(t + \Delta t, \mathbf{t}_0) : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (5.45)$$

Após a obtenção de $\underline{\underline{\dot{C}}}^{\text{hom}}(t + \Delta t, \mathbf{t}_0)$, integrando-se para cada passo de tempo determina-se

$$\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t) + \underline{\underline{\dot{C}}}^{\text{hom}}(t + \Delta t) \Delta t \quad (5.46)$$

Obs.: $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(\mathbf{t}_0)$ é obtida em elasticidade para o instante \mathbf{t}_0 .

Estando determinado o tensor de relaxação macroscópico $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ para o instante $t + \Delta t$, o processo se repete para o subintervalo $]t + \Delta t; t + 2\Delta t]$ tomando-se $\underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(\mathbf{t}) \cong \underline{\underline{\dot{\mathbf{e}}}}^v(t + \Delta t)$ determinado para o final do subintervalo anterior. Os incrementos se sucedem até o término do intervalo de cálculo T.

5.4.2 Representação de $\underline{\dot{\mathbf{e}}}$ através de variáveis de estado (hardening)

Para a utilização de variáveis de estado, é convenientemente adotado o modelo de Kelvin generalizado (figura 26) para representar os materiais, o que possibilita aproximar-se a função de fluência com a precisão desejada de acordo com o número de termos utilizados na série.

Tem-se as seguintes equações para o modelo de Kelvin (mola e amortecedor em paralelo)

$$\dot{\mathbf{s}}_E(t) = E(t)\dot{\mathbf{e}}(t) \quad (5.47)$$

$$\mathbf{s}_h(t) = \mathbf{h}(t)\dot{\mathbf{e}}(t) \quad (5.48)$$

$$\mathbf{e}_E(t) = \mathbf{e}_h(t) \quad (5.49)$$

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_E(t) + \mathbf{s}_h(t) \quad (5.50)$$

onde E e \mathbf{h} indicam a mola e o amortecedor, respectivamente.

Somando-se (5.47) à derivada de (5.48), tem-se a derivada de (5.50)

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = E(t)\dot{\mathbf{e}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t)\dot{\mathbf{e}}(t) + \mathbf{h}(t)\ddot{\mathbf{e}}(t) \quad (5.51)$$

Reordenando-se (5.51), tem-se como equação diferencial

$$\ddot{\mathbf{e}}(t) + \frac{E(t) + \dot{\mathbf{h}}(t)}{\mathbf{h}(t)}\dot{\mathbf{e}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{\mathbf{h}(t)} \quad (5.52)$$

Utilizando-se a solução para a equação diferencial de primeira ordem em $\dot{\mathbf{e}}(t)$ ($\dot{\mathbf{e}}(0) = 0$)

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = e^{-\int_{t_0}^t \frac{E(s) + \dot{\mathbf{h}}(s)}{\mathbf{h}(s)} dt} \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s \frac{E(s) + \dot{\mathbf{h}}(s)}{\mathbf{h}(s)} dt} \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{\mathbf{h}(t)} dt \quad (5.53)$$

Assumindo-se que

$$\frac{E(t) + \mathbf{h}(t)}{\mathbf{h}(t)} = \frac{1}{\mathbf{q}} = cte \quad (5.54)$$

A expressão (5.53) se torna

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \int_{t_0}^t e^{\frac{-(t-t)}{q_i}} \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{\mathbf{h}(t)} dt \quad (5.55)$$

A função de fluência pode ser aproximada pela expansão em séries exponenciais

$$\dot{d}(t, t) \cong \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{\frac{-(t-t)}{q_i}} \quad (5.56)$$

onde a série corresponde a n elementos Kelvin com parâmetros dependentes do tempo.

Dessa maneira, para um tempo $t - \Delta t$, as variáveis de estado são escritas na forma integral

$$q_i(t - \Delta t) = \int_{t_0}^{t - \Delta t} \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{\frac{-(t - \Delta t - t)}{q_i}} \dot{\mathbf{s}}(t) dt \quad (5.57)$$

Desenvolvendo-se o cálculo das variáveis de estado até um tempo t tem-se

$$\begin{aligned} q_i(t) &= \int_{t_0}^t \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{\frac{-(t-t)}{q_i}} \dot{\mathbf{s}}(t) dt \\ &= e^{\frac{-\Delta t}{q_i}} \int_{t_0}^{t - \Delta t} \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{\frac{-(t - \Delta t - t)}{q_i}} \dot{\mathbf{s}}(t) dt + \int_{t - \Delta t}^t \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{\frac{-(t-t)}{q_i}} \dot{\mathbf{s}}(t) dt \\ &= e^{\frac{-\Delta t}{q_i}} q_i(t - \Delta t) + \int_{t - \Delta t}^t \frac{1}{\mathbf{h}_i(t)} e^{\frac{-(t-t)}{q_i}} \dot{\mathbf{s}}(t) dt \end{aligned} \quad (5.58)$$

Ao considerar-se que $\frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{\mathbf{h}_i(t)}$ seja constante no intervalo de tempo $(t - \Delta t, t)$, (5.58)

pode ser reescrita como

$$q_i(t) = e^{\frac{-\Delta t}{q_i}} q_i(t - \Delta t) + \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{\mathbf{h}_i(t)} \mathbf{q}_i \left(1 - e^{\frac{-\Delta t}{q_i}} \right) \quad (5.59)$$

que é a formula incremental do cálculo de $\dot{\mathbf{e}}^v$ através de variáveis de estado pois

$$\dot{\mathbf{e}}^v(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (5.60)$$

Para o caso tridimensional, ver o desenvolvimento no apêndice B, item B.2.2.

Para outras referências sobre a utilização de variáveis de estado em hardening, ver Masuero e Creus (1995).

A aplicação da metodologia vista nesse capítulo é mostrada completamente no apêndice B.

6 RESULTADOS PARA O CASO VISCOELÁSTICO

O conjunto de exemplos deste capítulo tem como objetivo mostrar diversos aspectos da aplicação da teoria da homogeneização em viscoelasticidade para compósitos com fibras unidirecionais.

As considerações referentes à não adoção de unidades específicas e à utilização da notação vetorial para os exemplos, feitas no início do capítulo 4, continuam válidas.

6.1 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS NUMÉRICOS (SEM ENVELHECIMENTO)

6.1.1 Modelos comparados

A fim de verificar a metodologia utilizada em viscoelasticidade, são feitas comparações entre os resultados de relaxação obtidos por séries e por modelos em elementos finitos. Os modelos são os mesmos citados no item 4.6.1 e detalhados no apêndice C. São utilizados elementos finitos lineares com viscoelasticidade sem envelhecimento.

Para os termos $\underline{C}_{11}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{C}_{12}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{C}_{13}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{C}_{22}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{C}_{33}^{\text{hom}}(t)$ continua sendo válido e suficiente o modelo EF 1. Para os termos $\underline{C}_{44}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{C}_{55}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{C}_{66}^{\text{hom}}(t)$ utiliza-se o modelo EF 2 devido à boa relação entre coerência do resultado e quantidade de elementos.

Nos gráficos a seguir, ficam indicados o número de elementos dos modelos indiretamente através da variável N (ver item C.1 do apêndice C para definição de N), para que seja possível avaliar-se melhor a convergência dos resultados dos modelos.

Os resultados em séries são obtidos utilizando-se séries simples em fibras quadradas de raio $r = 0,3873$ (ver figura 4) o que corresponde a $V_f / V = 0,6$. São utilizados polinômios de grau $k = 17$ nas expansões.

O intervalo de tempo para os cálculos foi de $\Delta t = 0,05$ para os modelos estudados.

6.1.2 Materiais

A fibra é elástica com módulo $E_f = 10$, enquanto a matriz é um material do tipo Standard (mola de módulo de elasticidade $E_0 = 1$ associada em série com elemento Kelvin com módulo de elasticidade $E_1 = 0,25$ e coeficiente de viscosidade $h_1 = 1,25$), conforme esquema na figura 27.

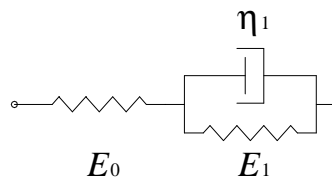


Figura 27 – Material Standard

Os coeficientes de Poisson são $\mathbf{n}_f = 0,2$ e $\mathbf{n}_m = 0,3$ para a fibra e para a matriz, respectivamente.

6.1.3 Resultados para o exemplo

A coerência entre os modelos na representação do comportamento viscoelástico do compósito é muito boa. De uma maneira geral, o aumento na precisão dos modelos conduziu a uma maior proximidade das curvas.

A representação dos termos $\underline{\underline{C}}_{11}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{22}^{\text{hom}}(t)$ (figura 28), e $\underline{\underline{C}}_{13}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{\underline{C}}_{23}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t)$ (figura 29) é feita adequadamente com o modelo EF 1, de uma célula (ver apêndice C). Observa-se uma maior dificuldade na convergência de $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t)$ pelo modelo em

elementos finitos, entretanto observa-se que os resultados se aproximam dos obtidos através de séries.

Para os termos $\underline{C}_{44}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{C}_{55}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{C}_{66}^{\text{hom}}(t)$ (figura 30), utilizou-se o modelo EF 2 devido aos melhores resultados se comparados com EF 1 e ao menor número de elementos do que EF 3. Porém, mesmo o modelo EF 3 se trata de uma aproximação para a condição de periodicidade presente no tipo de compósito estudado. Logo, as curvas obtidas com EF 2, mostradas na figura 30, são aproximações de exatidão inferior às obtidas com EF 1, mostradas nas figuras 28 e 29. Isso explica o afastamento relativamente maior entre as curvas de comparação para $\underline{C}_{55}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{C}_{66}^{\text{hom}}(t)$.

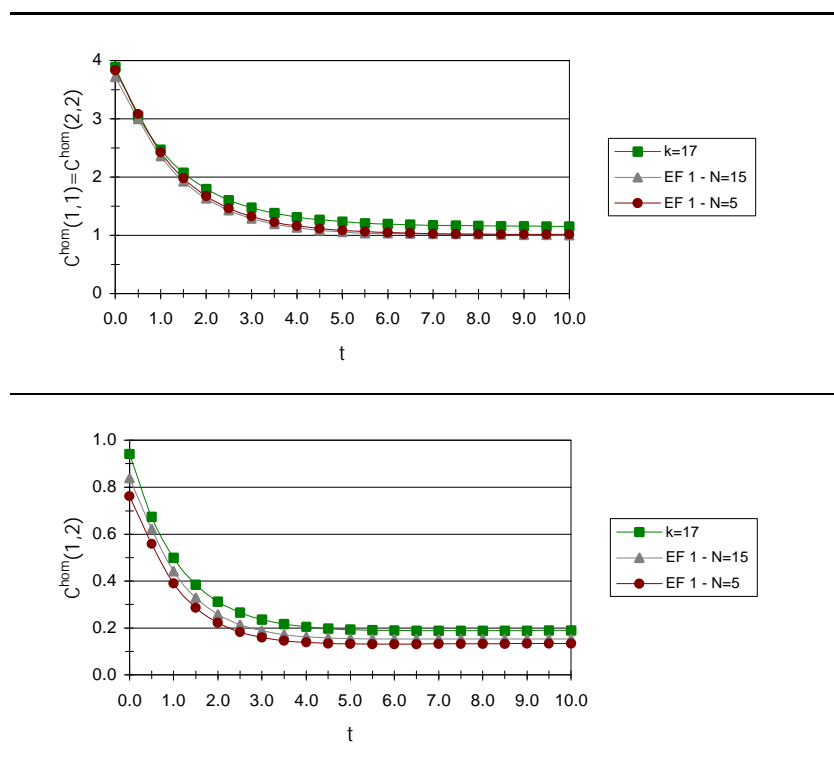


Figura 28 – Comparação de $\underline{C}_{11}^{\text{hom}}(t)$, $\underline{C}_{12}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{C}_{22}^{\text{hom}}(t)$ calculados por séries e pelo modelo em elementos finitos

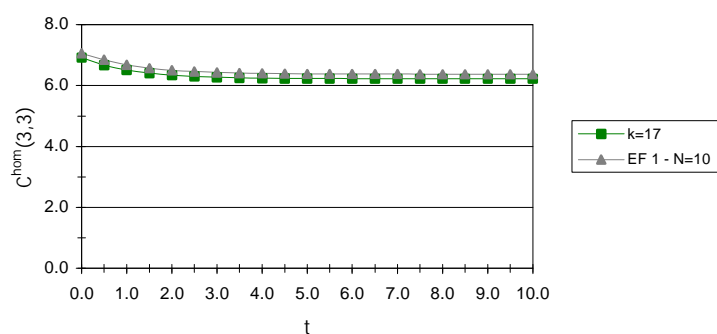
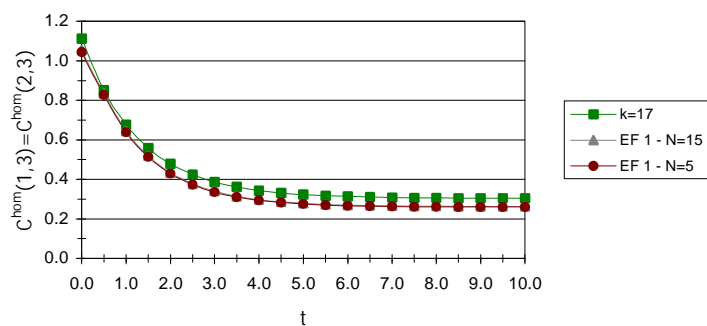


Figura 29 – Comparação de $C_{13}^{\text{hom}}(t)$, $C_{23}^{\text{hom}}(t)$ e $C_{33}^{\text{hom}}(t)$ calculados por séries e pelos modelos em elementos finitos

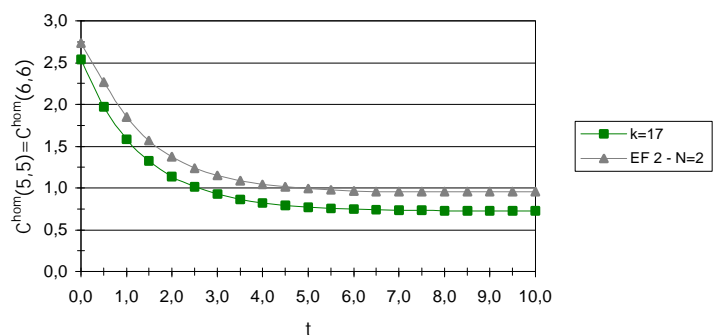
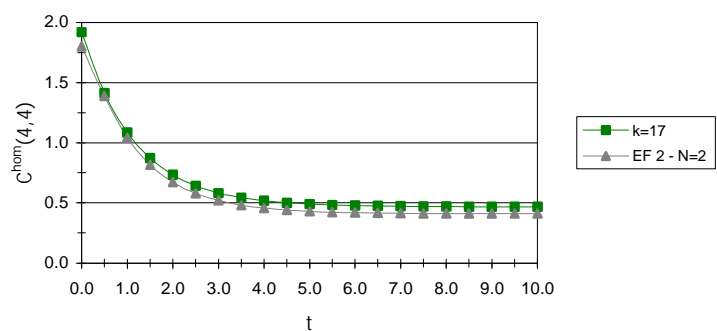


Figura 30 – Comparação de $C_{44}^{\text{hom}}(t)$, $C_{55}^{\text{hom}}(t)$ e $C_{66}^{\text{hom}}(t)$ calculados por séries e pelo modelo em elementos finitos

6.2 EFEITO DA QUANTIDADE DE FIBRA E DE SUA RIGIDEZ NO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO HOMOGENEIZADO

O objetivo desse exemplo é visualizar, da mesma forma que em elasticidade, os efeitos da rigidez e quantidade de fibra na relaxação dos compósitos estudados.

A matriz continua sendo o mesmo material standard utilizado no exemplo 6.1. Para efeito comparativo, a fibra apresenta módulos de elasticidade $E_f = 10$ e $E_f = 50$.

Das figuras 31 a 36 é mostrada a evolução com o tempo dos termos da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t)$ para frações volumétricas V_f/V variando de 0 a 0,6.

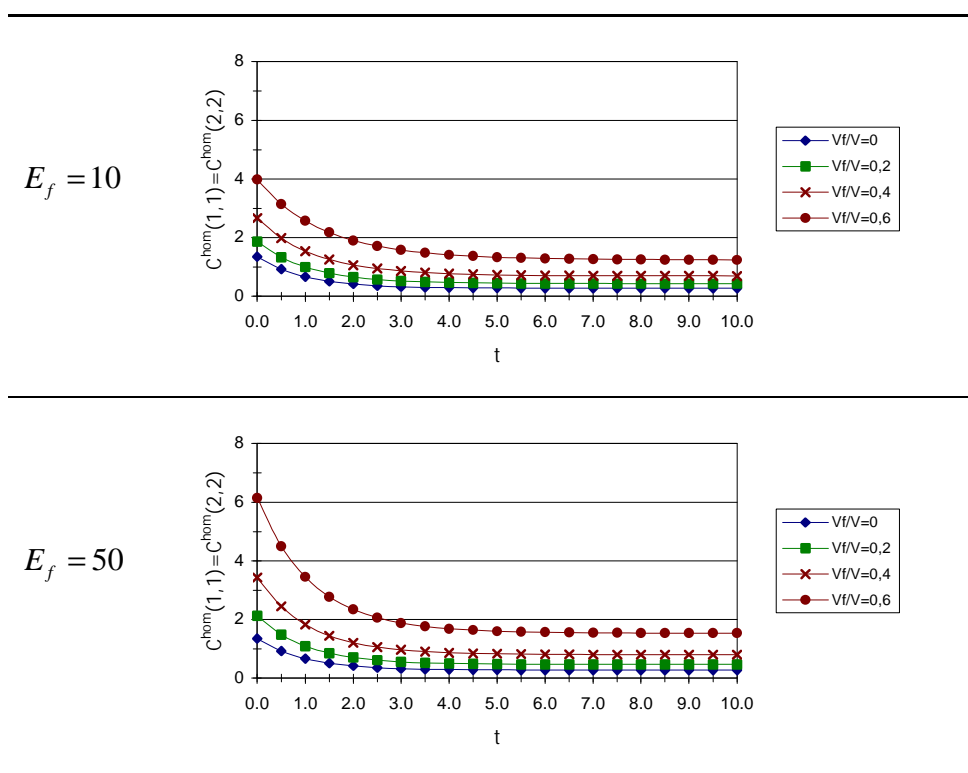


Figura 31 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{11}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{22}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo

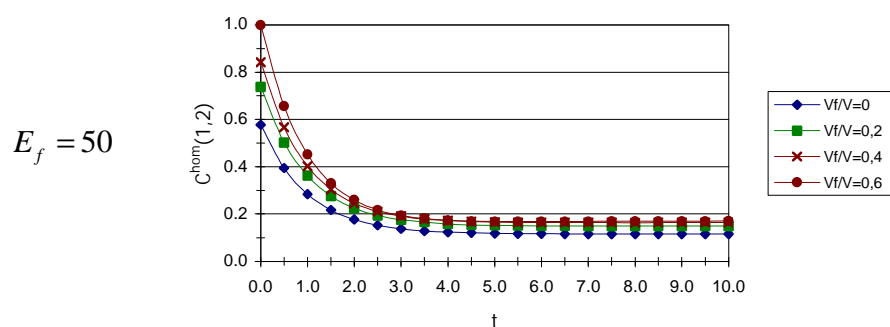
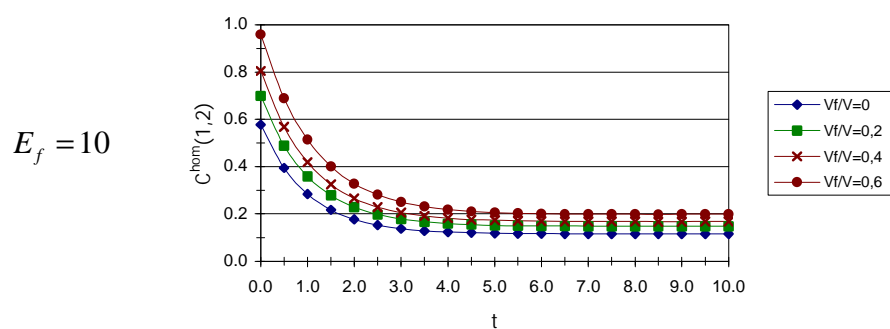


Figura 32 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $C_{\equiv 12}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo

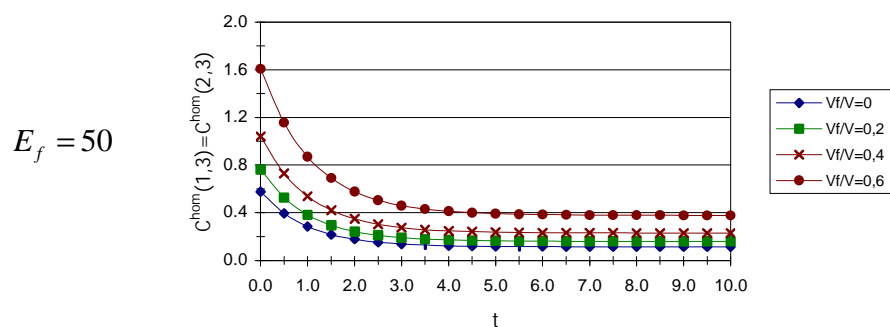
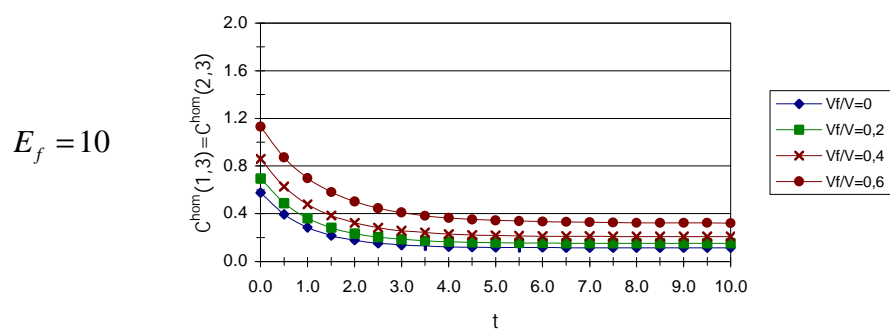


Figura 33 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $C_{\equiv 13}^{\text{hom}}(t)$ e $C_{\equiv 23}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo

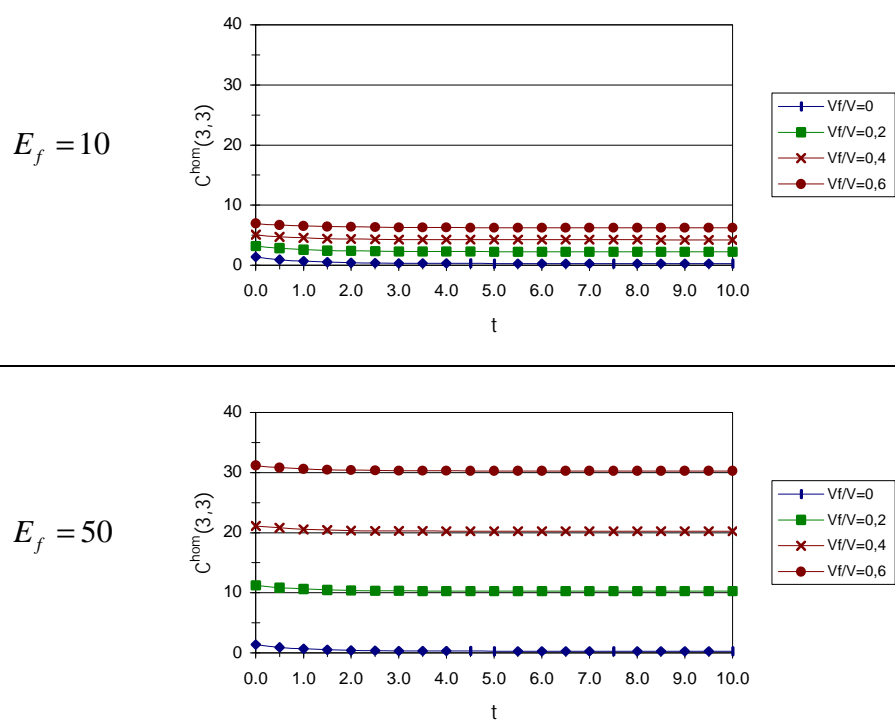


Figura 34 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $C_{\equiv 33}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo

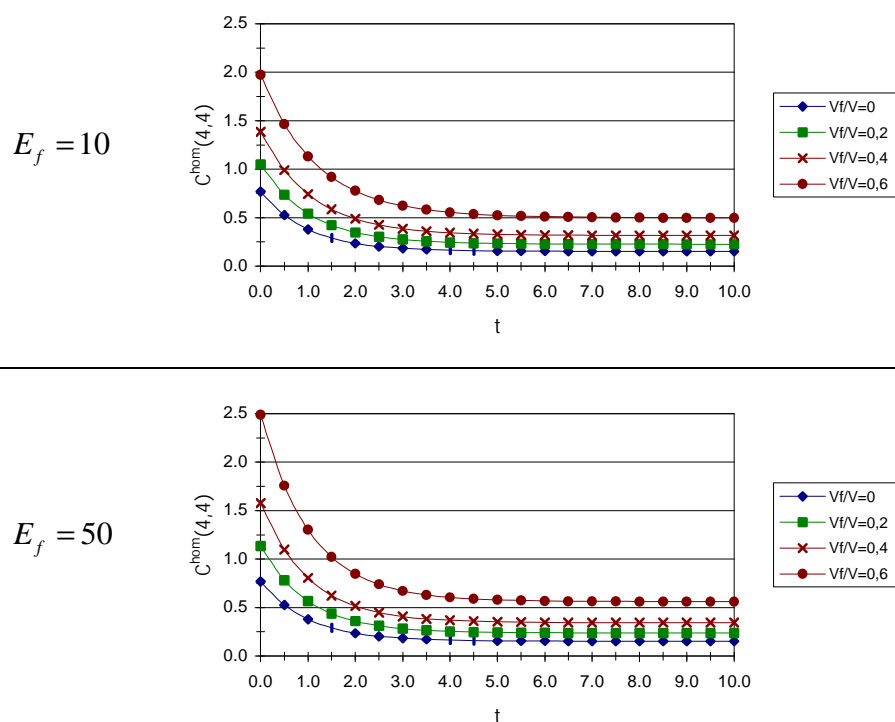


Figura 35 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $C_{\equiv 44}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo

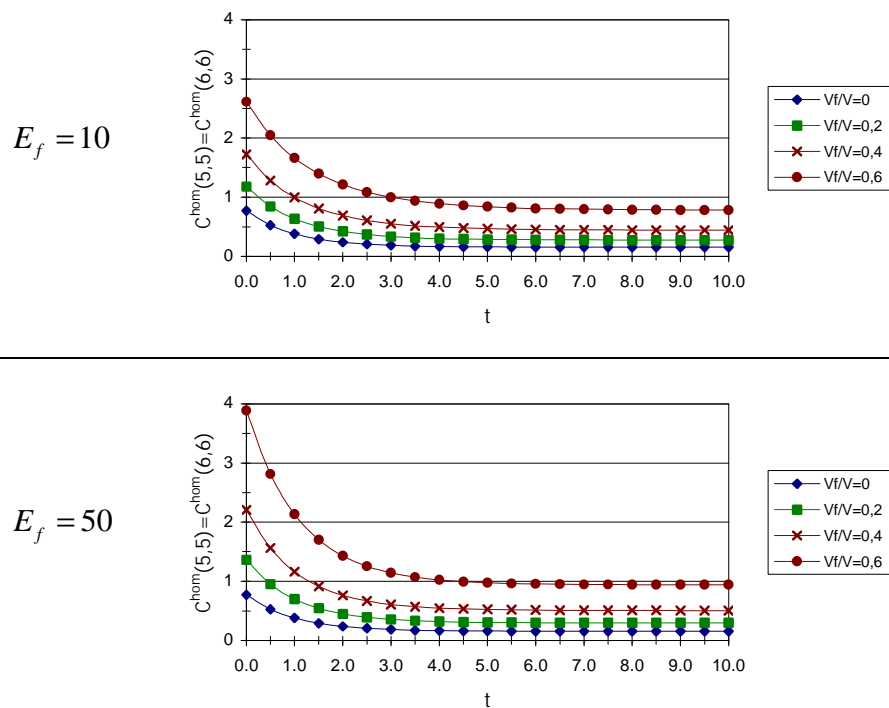


Figura 36 – Influência da rigidez e da quantidade de fibras na evolução de $\underline{\underline{C}}_{55}^{\text{hom}}(t)$ e $\underline{\underline{C}}_{66}^{\text{hom}}(t)$ com o tempo

6.2.1 Comentários sobre o exemplo

Nas figuras 31 a 36, percebe-se um comportamento similar quanto a influência da matriz na relaxação do material homogeneizado, com exceção da figura 34 onde $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t)$ tem um comportamento diretamente associado à quantidade e rigidez das fibras, similar ao caso elástico.

Nos termos da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t)$ (com exceção de $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t)$), o comportamento residual, após a relaxação se estabilizar, é bastante próximo comparando-se os exemplos para módulos de elasticidade da fibra distintos. Isso se deve ao fato de que, nestes exemplos, o deslocamento, a deformação e conseqüentemente a tensão na fibra caem a próximo de zero no final do processo. Não havendo mais solicitações significativas na fibra, sua rigidez perde a importância que teve nos momentos iniciais. Esse comportamento pode ser facilmente

visualizado na figura 37 que mostra o deslocamento u_x , a deformação \mathbf{e}_{xx} e a tensão \mathbf{s}_{xx} para uma tração na direção x .

Em analogia ao que foi discutido em elasticidade, no item 4.5, o termo $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t)$ (figura 32) apresenta resultados muito próximos para todo o processo de relaxação em ambos os exemplos com módulos de elasticidade da fibra diferentes. Da mesma forma que no exemplo apresentado no caso elástico (figura 18), a fibra se comporta de maneira indeformável, fazendo com que aumentos na rigidez da fibra não modifiquem os resultados obtidos para $\underline{\underline{C}}_{12}^{\text{hom}}(t)$.

6.3 CASO DE SOFTENING

Inicialmente, para verificar a formulação utilizada para materiais homogêneos, será comparada a resposta numérica com uma resolução analítica de um exemplo simples para relaxação. Em seguida, aparecem os resultados com a presença de fibras.

6.3.1 Material homogêneo unidimensional

O material utilizado segue o modelo de Maxwell, com os seguintes parâmetros dependentes do tempo

$$E(t) = E_a - E_b \left(1 - e^{\frac{-t}{g_1}} \right) \quad (6.1)$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_a e^{\frac{-t}{g_2}}$$

Conforme a figura 38, para duas células Kelvin formando o modelo de Maxwell

$$\begin{cases} E_0(t) = E(t) & \mathbf{h}_0(t) = 0 \\ E_1(t) = 0 & \mathbf{h}_1(t) = \mathbf{h}(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

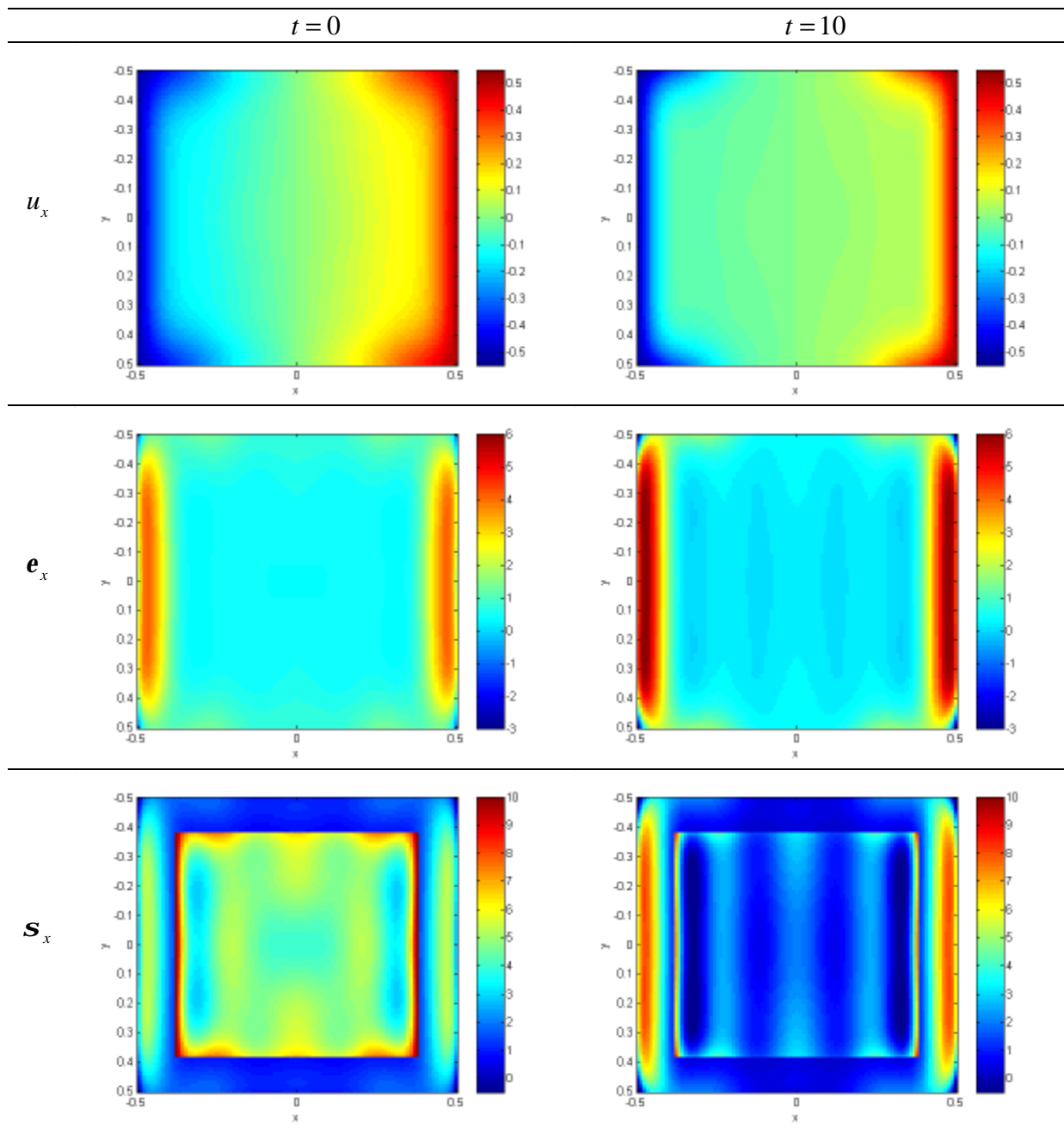


Figura 37 – Representação de u_x , e_x e s_x para $V_f/V = 0,6$
e $E_f = 10$ no início e no final da relaxação

A condição (5.24) estabelecida para resolução em variáveis de estado é satisfeita pois

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_0 &= \frac{\mathbf{h}_0(t)}{E_0(t)} = 0 \\
 \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{h}_1(t)}{E_1(t)} = \infty
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

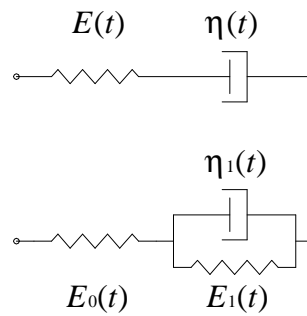


Figura 38 – Correspondência entre modelo de Maxwell e o modelo Standard

A resolução analítica desse sistema é obtida combinando-se as equações

$$\mathbf{s}_E(t) = \mathbf{s}_h(t) = \mathbf{s}(t) \quad \text{Equilíbrio} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_E(t) + \mathbf{e}_h(t) \quad \text{Compatibilidade} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{s}_E(t) = E(t)\mathbf{e}_E(t) \quad \text{Constitutiva da mola} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{s}_h(t) = \mathbf{h}(t)\dot{\mathbf{e}}_h(t) \quad \text{Constitutiva do amortecedor} \quad (6.7)$$

onde os índices E e h indicam a mola e o amortecedor, respectivamente.

Isolando-se $\mathbf{e}_E(t)$ de (6.6), e derivando-se com relação ao tempo

$$\dot{\mathbf{e}}_E(t) = \frac{\dot{\mathbf{s}}_E(t)}{E(t)} - \frac{\mathbf{s}_E(t)\dot{E}(t)}{E(t)^2} \quad (6.8)$$

Isolando-se $\dot{\mathbf{e}}_h(t)$ de (6.7)

$$\dot{\mathbf{e}}_h(t) = \frac{\mathbf{s}_h(t)}{\mathbf{h}(t)} \quad (6.9)$$

Derivando-se (6.5) e substituindo-se (6.4), (6.8) e (6.9) determina-se

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{E(t)} - \frac{\mathbf{s}(t)\dot{E}(t)}{E(t)^2} + \frac{\mathbf{s}(t)}{\mathbf{h}(t)} \quad \text{Eq. Dif. do Modelo Maxwell (softening)} \quad (6.10)$$

Resolvendo-se a equação diferencial (6.10) para $\mathbf{s}(t)$, para um ensaio de relaxação ($\mathbf{e}(t) = H(t - t_0)$), obtém-se

$$\mathbf{s}(t) = E(t_0) e^{\frac{-1}{h_a(g_1 - g_2)} \left[(E_a - E_b)(g_1 g_2 - g_2^2) \left(e^{\frac{t}{g_2} - \frac{t_0}{g_2}} \right) + g_1 g_2 \left(e^{\frac{t(g_1 - g_2)}{g_1 g_2} - \frac{t_0(g_1 - g_2)}{g_1 g_2}} \right) \right] E_b + h_a(g_2 - g_1) \ln \left(\frac{E(t)}{E(t_0)} \right)} \quad (6.11)$$

onde
$$E(t_0) = E_a - E_b \left(1 - e^{-\frac{t_0}{g_1}} \right)$$

6.3.2 Resultado para o material homogêneo unidimensional

Tomando-se como parâmetros do material os seguintes valores: $E_a = 1$, $E_b = 0,5$, $h_a = 20$, $g_1 = 1$ e $g_2 = 1,5$, têm-se para $E(t)$ e $h(t)$ as representações nas figuras 39 e 40, respectivamente.

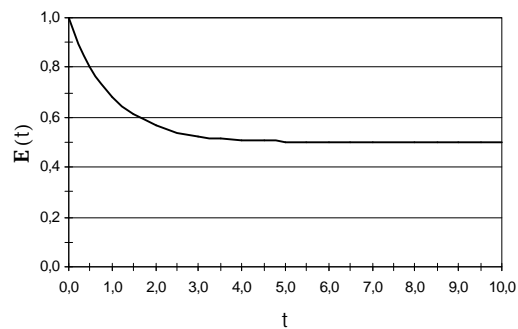


Figura 39 - $E(t)$ para o material homogêneo em softening

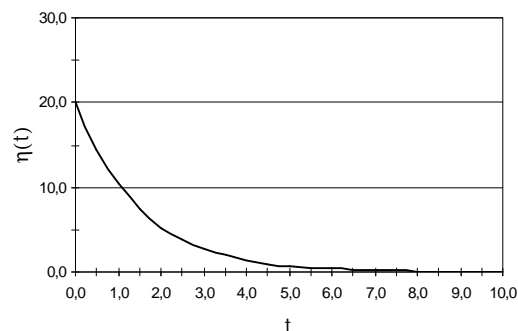


Figura 40 - $h(t)$ para o material homogêneo em softening

A figura 41 mostra a comparação entre os resultados numéricos, através de variáveis de estado, e os obtidos pela função analítica descrita em (6.11) para instantes iniciais t_o de 0, 2, 4 e 6.

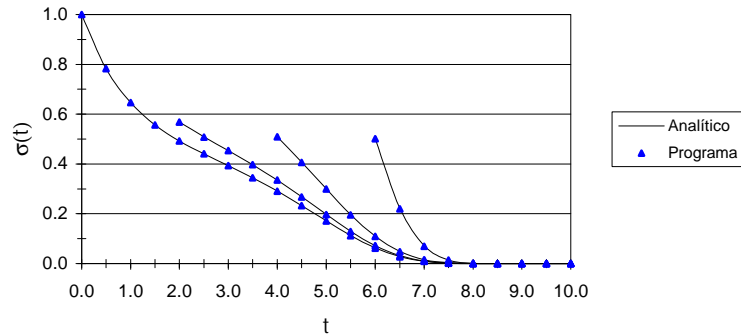


Figura 41 – Resultado para o material composto unidimensional em softening

O intervalo de tempo utilizado para o cálculo computacional é $\Delta t = 0,01$. A convergência dos resultados é perfeita.

A influência do módulo de elasticidade nos instantes iniciais de carregamento é visível ao comparar-se os valores de $s(t_o)$ na figura 41 com o comportamento desse na figura 39. Enquanto o decréscimo rápido da viscosidade com o tempo (conforme figura 40) justifica a queda cada vez mais acentuada da tensão para crescentes t_o , mesmo com a estabilização do módulo de elasticidade.

6.3.3 Resultado para matriz viscoelástica com softening e fibras elásticas

6.3.3.1 Características do exemplo

No exemplo a seguir aplica-se ao composto de fibras unidimensionais envelhecimento por softening na matriz, enquanto as fibras se comportam elasticamente.

As características da matriz são as mesmas do material homogêneo do exemplo anterior, com coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,3$. A fibra tem um módulo de elasticidade $E_f = 10$ e coeficiente de Poisson $\nu_f = 0,2$.

Os gráficos das figuras 42 a 47 estão dispostos de maneira a mostrar o comportamento de cada um dos termos de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ com a inclusão de fibras no material da matriz. As frações volumétricas V_f/V mostradas são 0, 0,2, 0,4 e 0,6. Os processos de relaxação apresentados para cada uma das frações volumétricas têm instantes iniciais t_o de 0, 2, 4 e 6.

6.3.3.2 Resultados do exemplo

A influência da matriz viscoelástica em uma condição de relaxação em softening é visível em todos os termos da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$. O comportamento dos termos com o acréscimo de fibras é semelhante ao do material homogêneo, somente com diferenças de escala.

O termo $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ como em todos os exemplos apresentados apresenta maior independência da matriz, entretanto os resultados apresentados na figura 45 são apenas teóricos. Eles supõem que as fibras sejam contínuas e independentes da aderência da matriz para sua integridade. Na realidade, na condição de relaxação apresentada, as fibras iriam se descolar e escorregar da matriz. A rigidez seria extremamente diminuída, porém esse trabalho não tem o objetivo de analisar esse fenômeno.

Observando-se as curvas, percebe-se que nos processos iniciados em $t_o = 0$, nos instantes iniciais, onde a viscosidade era maior, o principal responsável pela redução na rigidez é o módulo de elasticidade. A medida que o seu valor estabiliza, a viscosidade passa a influir mais na relaxação.

Devido às propriedades adotadas para o material da matriz, esperava-se que, a princípio, todos os termos com exceção de $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ (conforme já foi explicado) tivessem seus valores tendendo continuamente a zero.

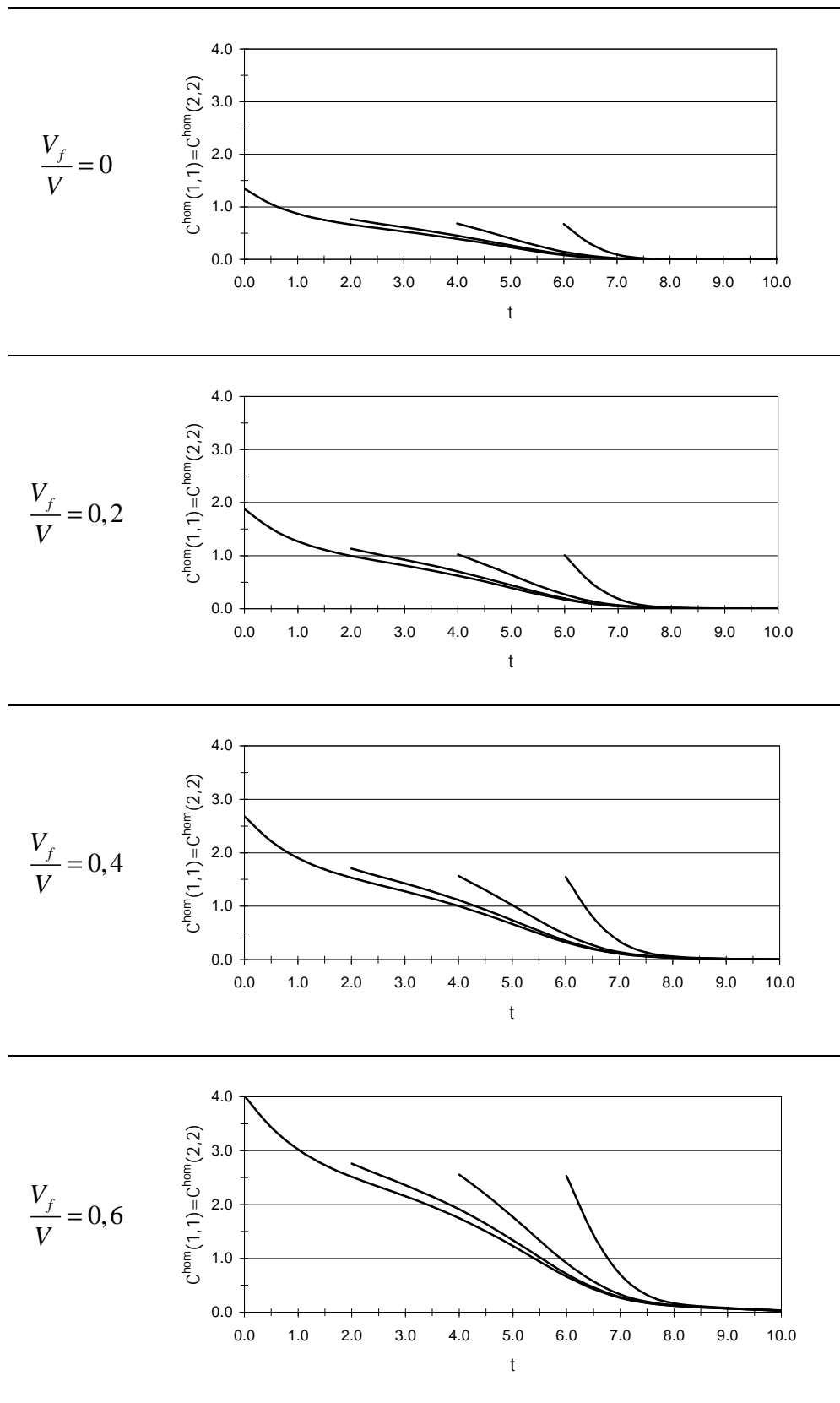


Figura 42 – Evolução de $C_{\equiv 11}^{\text{hom}}(t,t)$ e $C_{\equiv 22}^{\text{hom}}(t,t)$ em softening

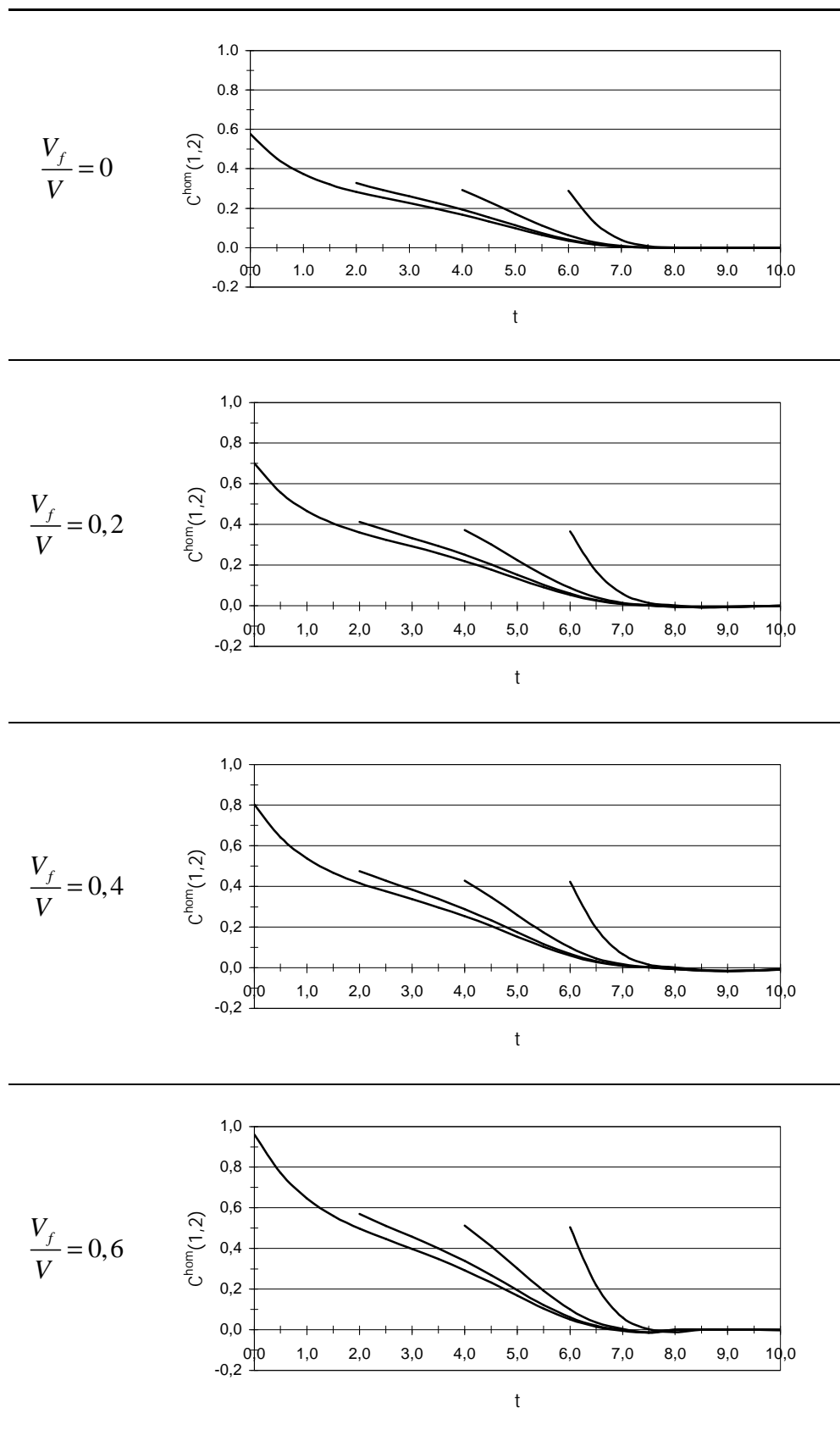


Figura 43 – Evolução de $\underline{C}_{=12}^{\text{hom}}(t, \underline{t})$ em softening

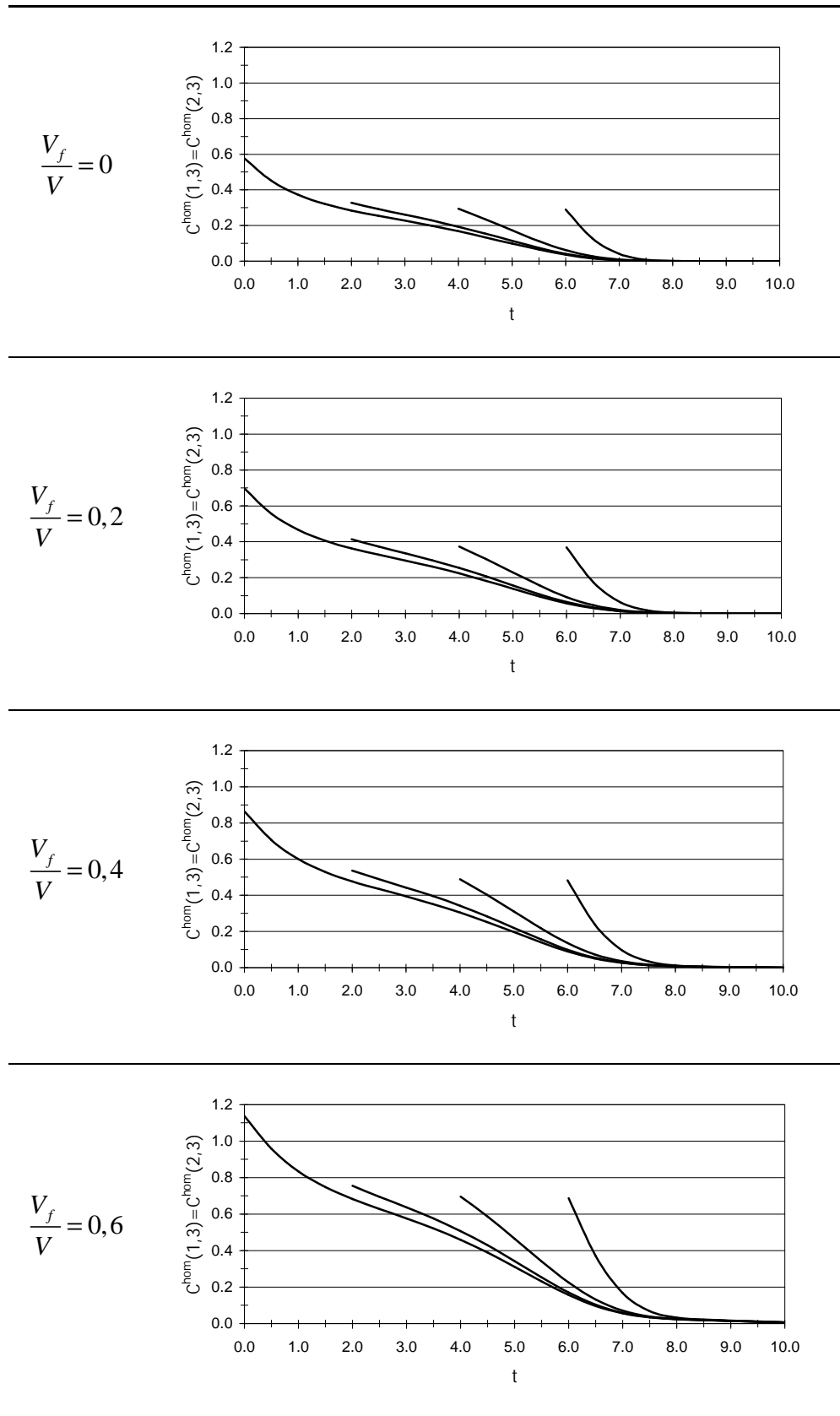


Figura 44 – Evolução de $C_{\underline{13}}^{\text{hom}}(t,t)$ e $C_{\underline{23}}^{\text{hom}}(t,t)$ em softening

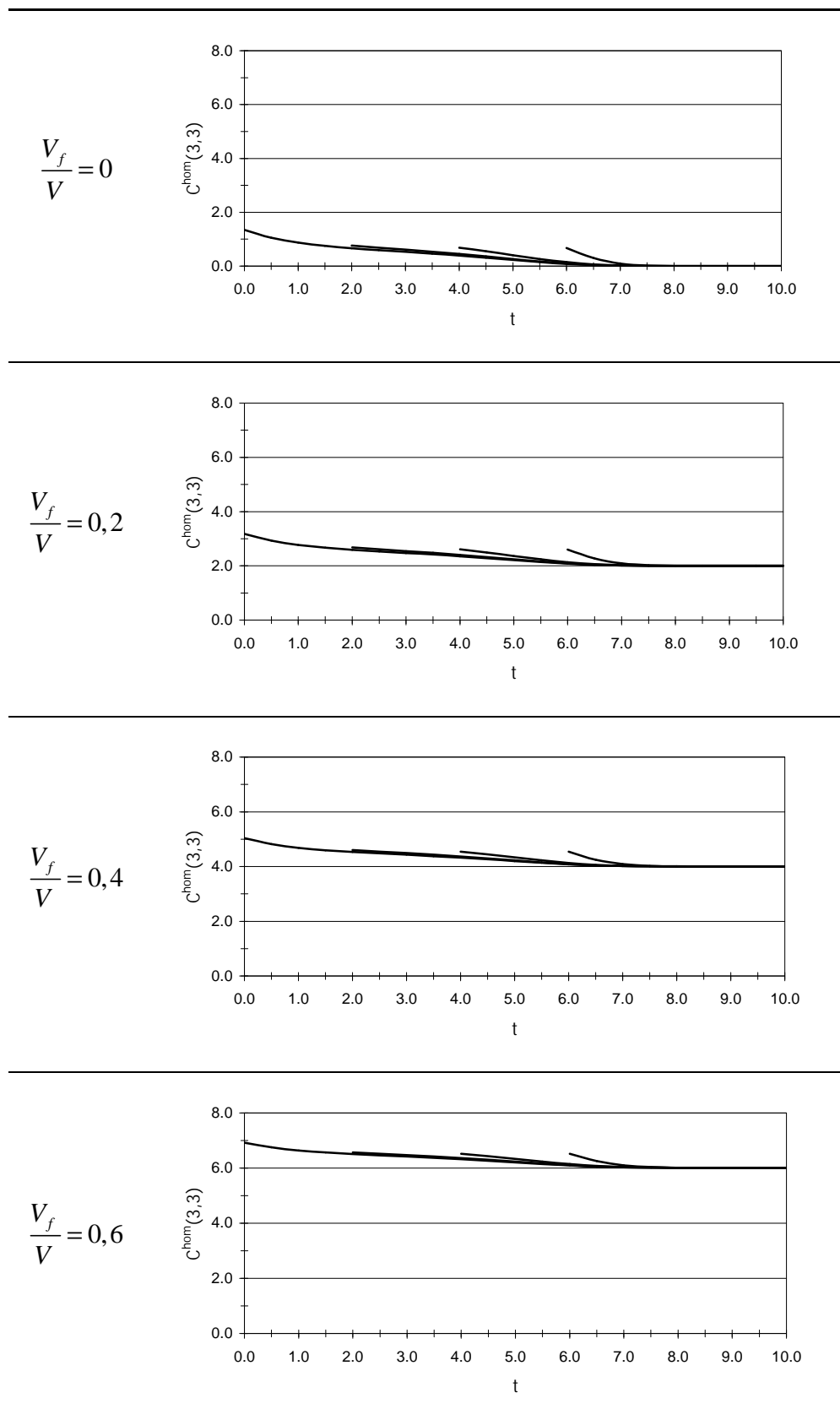


Figura 45 – Evolução de $C_{\equiv 33}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ em softening

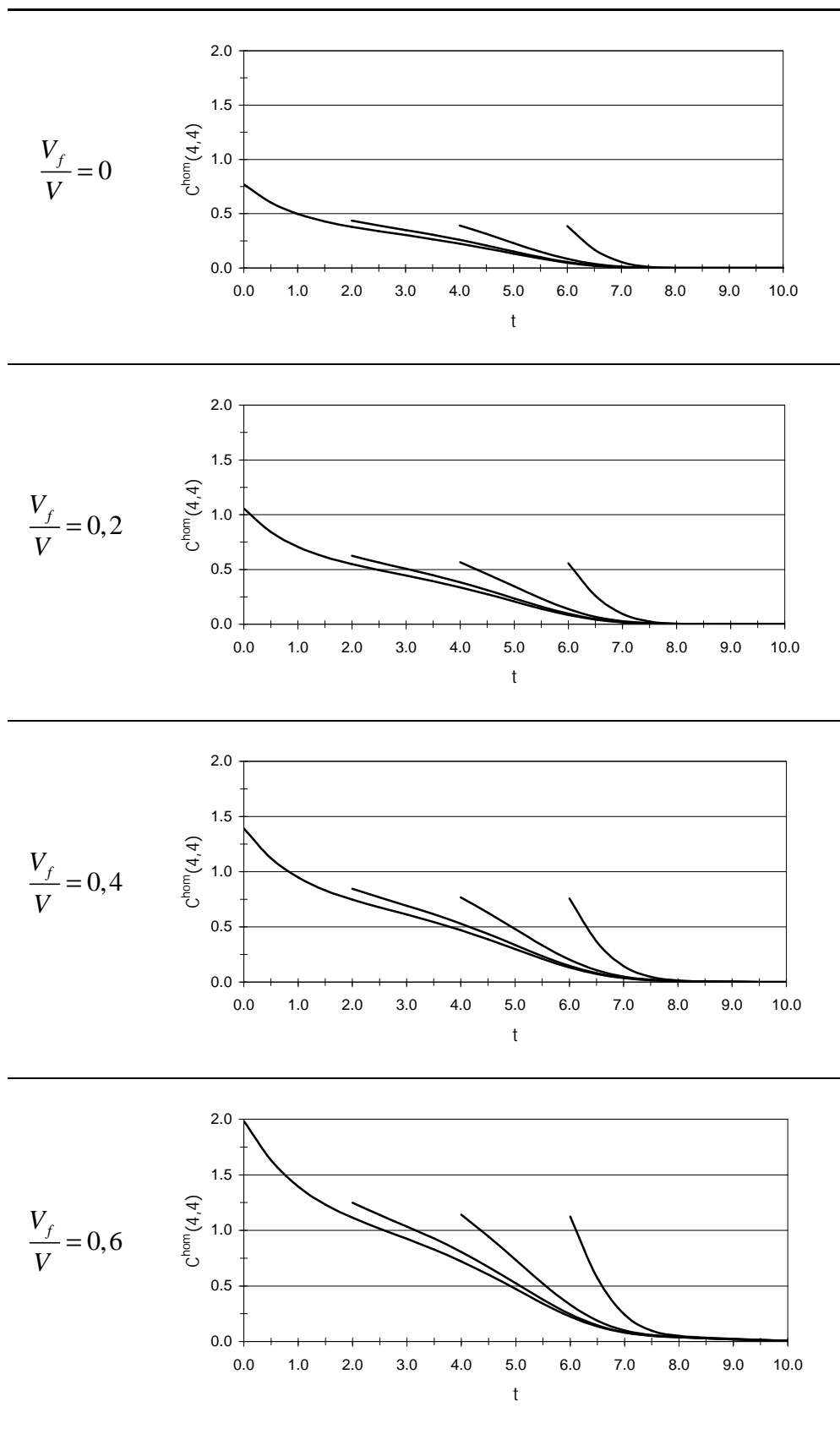


Figura 46 – Evolução de $C_{44}^{\text{hom}}(t,t)$ em softening

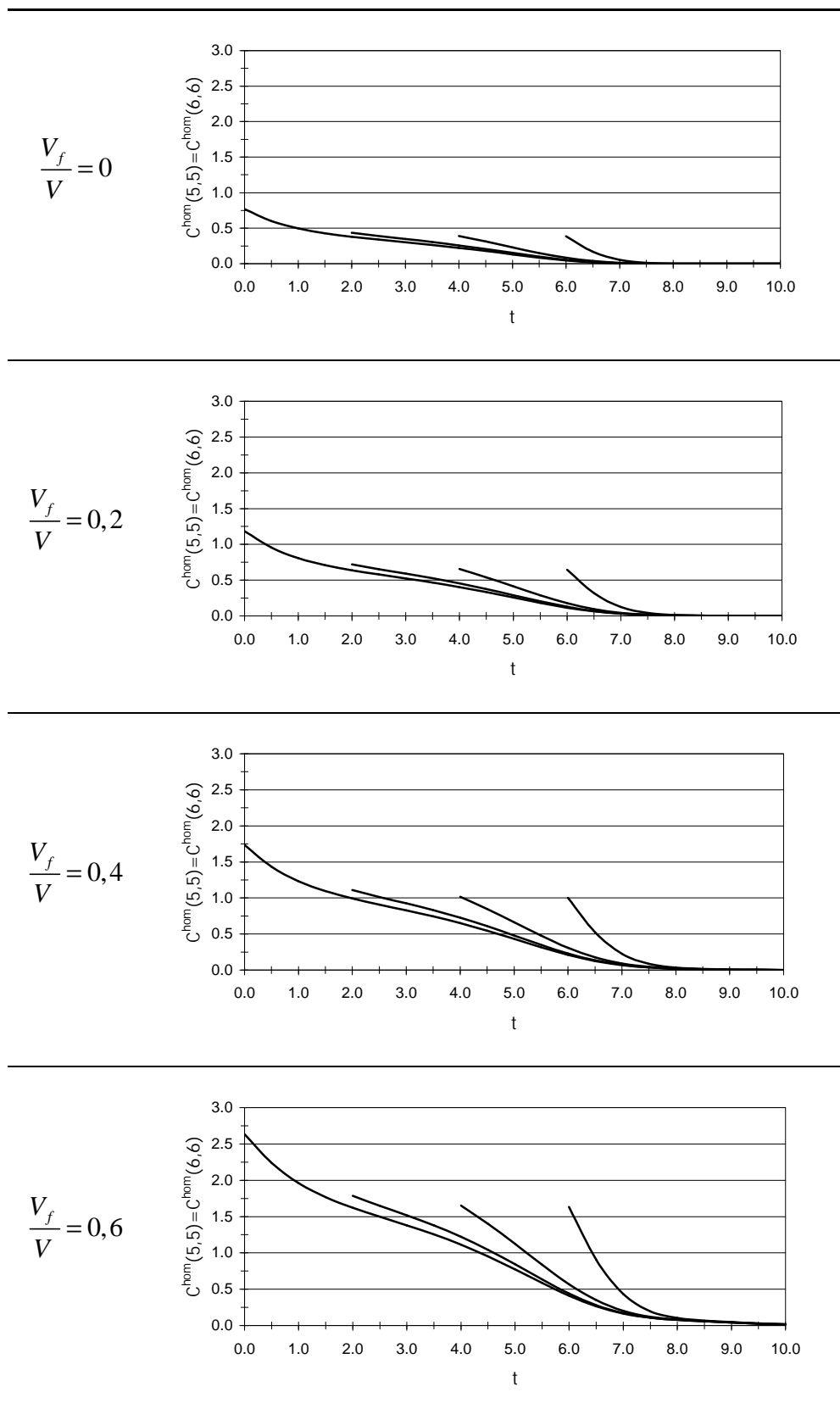


Figura 47 – Evolução de $C_{55}^{\text{hom}}(t,t)$ e $C_{66}^{\text{hom}}(t,t)$ em softening

Entretanto, para o termo $\underline{C}_{12}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ (figura 43) ocorre uma discreta mudança no seu sinal. Fisicamente, para um ensaio de relaxação por tração na direção x , esse resultado significa que chega a ocorrer compressão no sentido transversal.

Esse comportamento pode ser melhor observado na figura 48, para uma matriz com um modelo de Maxwell sem envelhecimento ($E=1$, $\mathbf{h}=0,2$) e coeficiente de Poisson $\mathbf{n}_m=0,3$. As fibras são as mesmas do exemplo anterior, com uma fração volumétrica de $V_f/V=0,6$.

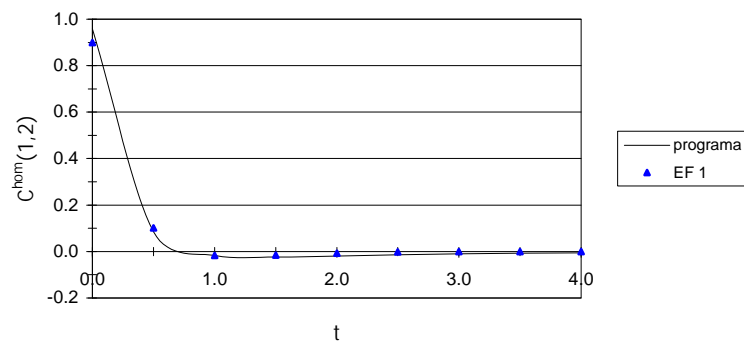


Figura 48 – Inversão de sinal em $\underline{C}_{12}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$

O fenômeno é analisado em Shames e Cozzarelli (1997) para materiais com comportamentos de variação volumétrica e cisalhamento distintos ao longo do tempo. Nos compósitos estudados, a inclusão de fibras na matriz provoca a modificação das propriedades do material em cada direção, possibilitando a inversão de sinal exemplificada.

6.4 CASO DE HARDENING

Seguindo o mesmo princípio utilizado para o caso de softening, para verificar a formulação utilizada para materiais homogêneos, será comparada a resposta numérica com uma resolução analítica de um exemplo simples. Em seguida, aparecem os resultados com presença de fibras.

6.4.1 Material homogêneo e unidimensional

O material utilizado segue o modelo de Maxwell, com os seguintes parâmetros dependentes do tempo

$$E(t) = E_a + E_b \left(1 - e^{\frac{-t}{g_1}} \right) \quad (6.12)$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_a e^{\frac{t}{g_2}}$$

continuando válidas as equações em (6.2).

A condição (5.54) estabelecida para resolução em variáveis de estado fica satisfeita pois

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{h}_1(t)}{E_1(t) + \mathbf{h}_1(t)} = 0 \quad (6.13)$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{h}_2(t)}{E_2(t) + \mathbf{h}_2(t)} = \mathbf{g}_2$$

A resolução analítica desse sistema é obtida combinando-se as equações

$$\mathbf{s}_E(t) = \mathbf{s}_h(t) = \mathbf{s}(t) \quad \text{Equilíbrio} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_E(t) + \mathbf{e}_h(t) \quad \text{Compatibilidade} \quad (6.15)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_E(t) = E(t)\dot{\mathbf{e}}_E(t) \quad \text{Constitutiva da mola (hardening)} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{s}_h(t) = \mathbf{h}(t)\dot{\mathbf{e}}_h(t) \quad \text{Constitutiva do amortecedor} \quad (6.17)$$

onde os índices E e h indicam a mola e o amortecedor, respectivamente.

Isolando-se $\dot{\mathbf{e}}_E(t)$ de (6.16)

$$\dot{\mathbf{e}}_E(t) = \frac{\dot{\mathbf{s}}_E(t)}{E(t)} \quad (6.18)$$

Isolando-se $\dot{\mathbf{e}}_h(t)$ de (6.17)

$$\dot{\mathbf{e}}_h(t) = \frac{\mathbf{s}_h(t)}{\mathbf{h}(t)} \quad (6.19)$$

Derivando-se (6.15) e substituindo-se (6.14), (6.18) e (6.19) determina-se

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{E(t)} + \frac{\mathbf{s}(t)}{\mathbf{h}(t)} \quad \text{Eq. Dif. do Modelo Maxwell (hardening)} \quad (6.20)$$

Resolvendo-se a equação diferencial (6.20) para $\mathbf{s}(t)$, para um ensaio de relaxação ($\mathbf{e}(t) = H(t - t_0)$), obtém-se

$$\mathbf{s}(t) = E(t_0) e^{\frac{-g_2}{h_a(g_1+g_2)} t} \left[E_b g_1 \begin{pmatrix} e^{-\frac{t(g_1+g_2)}{g_1 g_2}} & -e^{-\frac{t_0(g_1+g_2)}{g_1 g_2}} \\ -e^{-\frac{t(g_1+g_2)}{g_1 g_2}} & e^{-\frac{t_0(g_1+g_2)}{g_1 g_2}} \end{pmatrix} (E_a + E_b) \right] \quad (6.21)$$

onde $E(t_0) = E_a + E_b \left(1 - e^{-\frac{t_0}{g_1}} \right)$

6.4.2 Resultado para o material homogêneo unidimensional

Tomando-se como parâmetros do material os seguintes valores: $E_a = 1$, $E_b = 4$, $h_a = 5$, $g_1 = 2$ e $g_2 = 3$, têm-se para $E(t)$ e $\mathbf{h}(t)$ as representações das figuras 49 e 50, respectivamente.

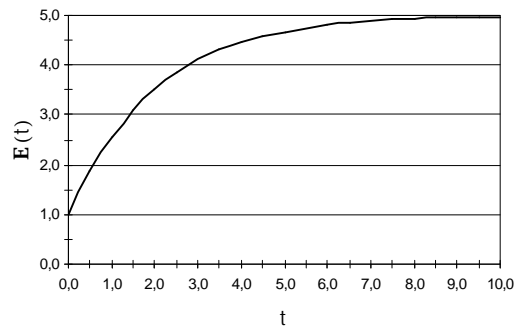


Figura 49 - $E(t)$ para o material homogêneo em hardening

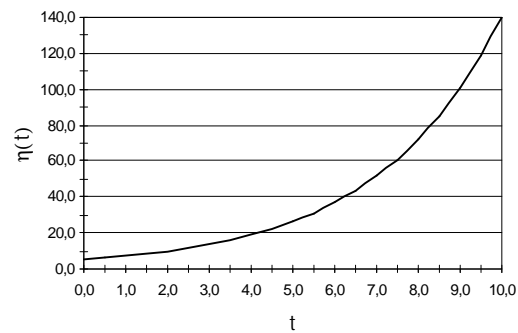


Figura 50 - $h(t)$ para o material homogêneo em hardening

A figura 51 mostra a comparação entre os resultados numéricos, através de variáveis de estado, e os obtidos pela função analítica descrita em (6.21) para instantes iniciais t_o de 0, 2, 4 e 6.

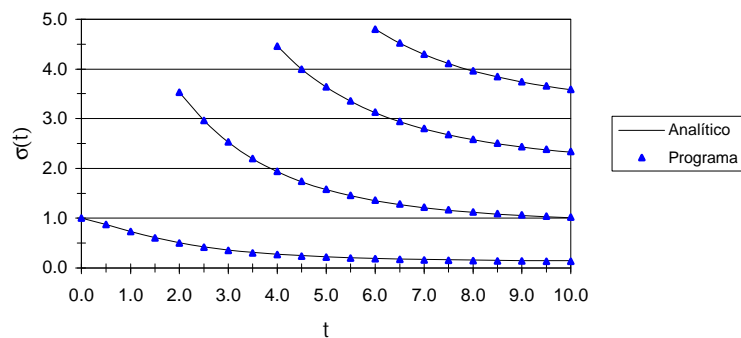


Figura 51 – Resultado para o material compósito unidimensional em hardening

O intervalo de tempo utilizado para o cálculo computacional é $\Delta t = 0,01$. A convergência dos resultados é perfeita.

A influência do módulo de elasticidade nos instantes iniciais de carregamento é visível ao comparar-se os valores de $s(t_o)$ na figura 51 com o comportamento desse na figura 49, de maneira similar ao processo de softening. Com o rápido aumento da viscosidade com o tempo (conforme figura 50) o nível de tensão residual se mantém cada vez maior para crescentes t_o . Com o passar do tempo, o material tende a se comportar como um sólido de módulo de elasticidade $E(t) = E_a + E_b$, dado que a viscosidade tende ao infinito nesse modelo simples.

6.4.3 Resultado para matriz viscoelástica com hardening e fibras elásticas

6.4.3.1 Características do exemplo

O exemplo a seguir aplica ao compósito de fibras unidimensionais envelhecimento por hardening na matriz, enquanto as fibras se comportam elasticamente.

As características da matriz são as mesmas do material homogêneo do exemplo anterior, com coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,3$. A fibra tem um módulo de elasticidade $E_f = 50$ e coeficiente de Poisson $\nu_f = 0,2$.

Os gráficos das figuras 52 a 57 estão dispostos de maneira a mostrar o comportamento de cada um dos termos de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ com a inclusão de fibras no material da matriz. As frações volumétricas V_f/V mostradas são 0, 0,2, 0,4 e 0,6. Os processos de relaxação apresentados para cada uma das frações volumétrica têm instantes iniciais t_o de 0, 2, 4 e 6.

6.4.3.2 Resultados do exemplo

Observando-se o comportamento dos termos de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ para o exemplo de hardening, percebe-se a influência da matriz viscoelástica mesmo com fibras relativamente rígidas. O comportamento de todos os termos com o acréscimo de fibras é semelhante ao do material homogêneo, somente com diferenças de escala.

O termo $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t, \mathbf{t})$ (figura 55) apresenta os menores efeitos de envelhecimento, visto que se trata da direção longitudinal às fibras e conforme já foi visto em elasticidade seu valor depende principalmente da rigidez e da quantidade de fibra existente no compósito.

Como o material vai adquirindo rigidez e aumentando sua viscosidade, os principais efeitos do envelhecimento se dão nos primeiros momentos após a aplicação da carga. À medida que o tempo passa, o material da matriz (e conseqüentemente o compósito) vai se transformando em um material elástico com propriedades constantes no tempo.

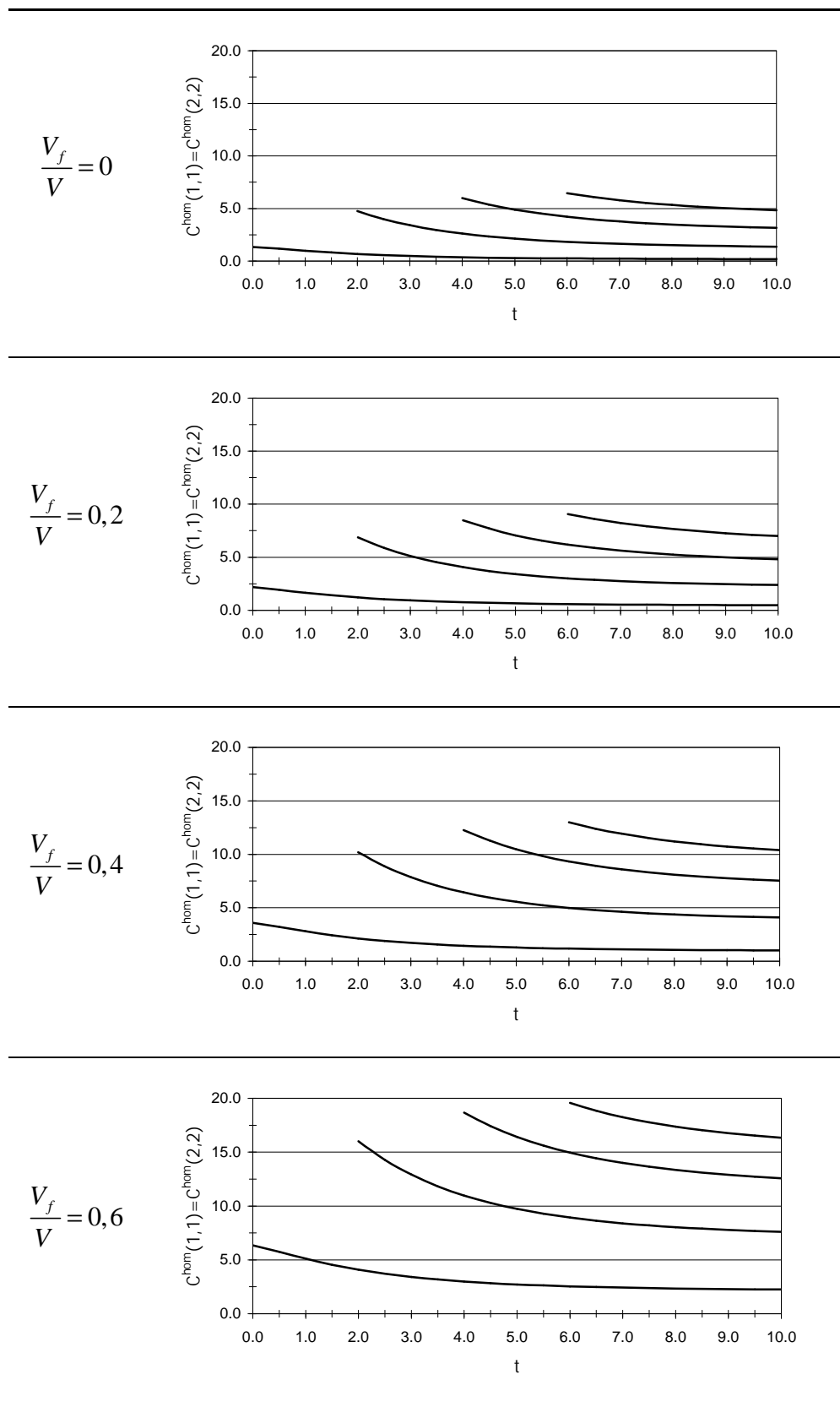
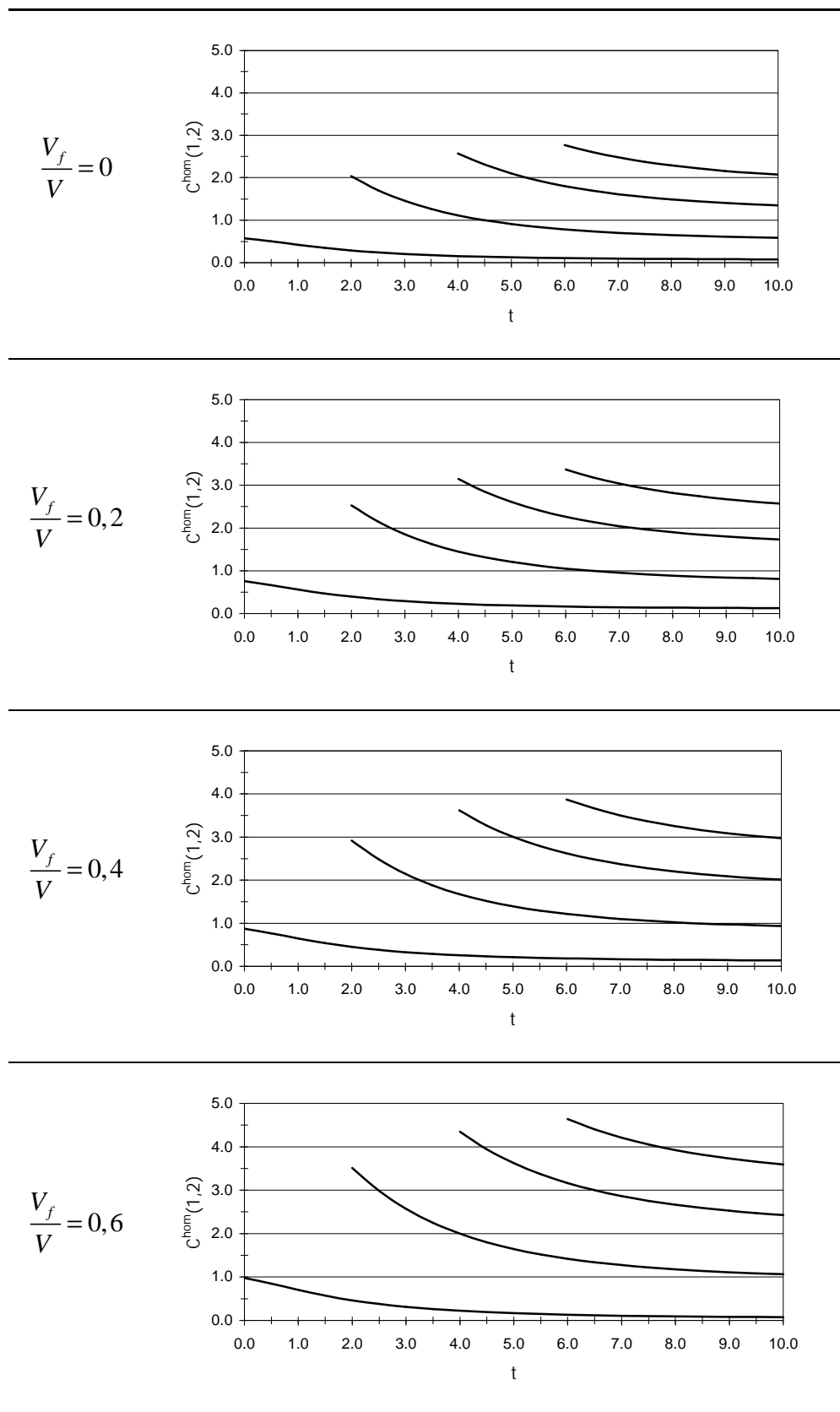


Figura 52 – Evolução de $\underline{C}_{11}^{\text{hom}}(t,t)$ e $\underline{C}_{22}^{\text{hom}}(t,t)$ em hardening



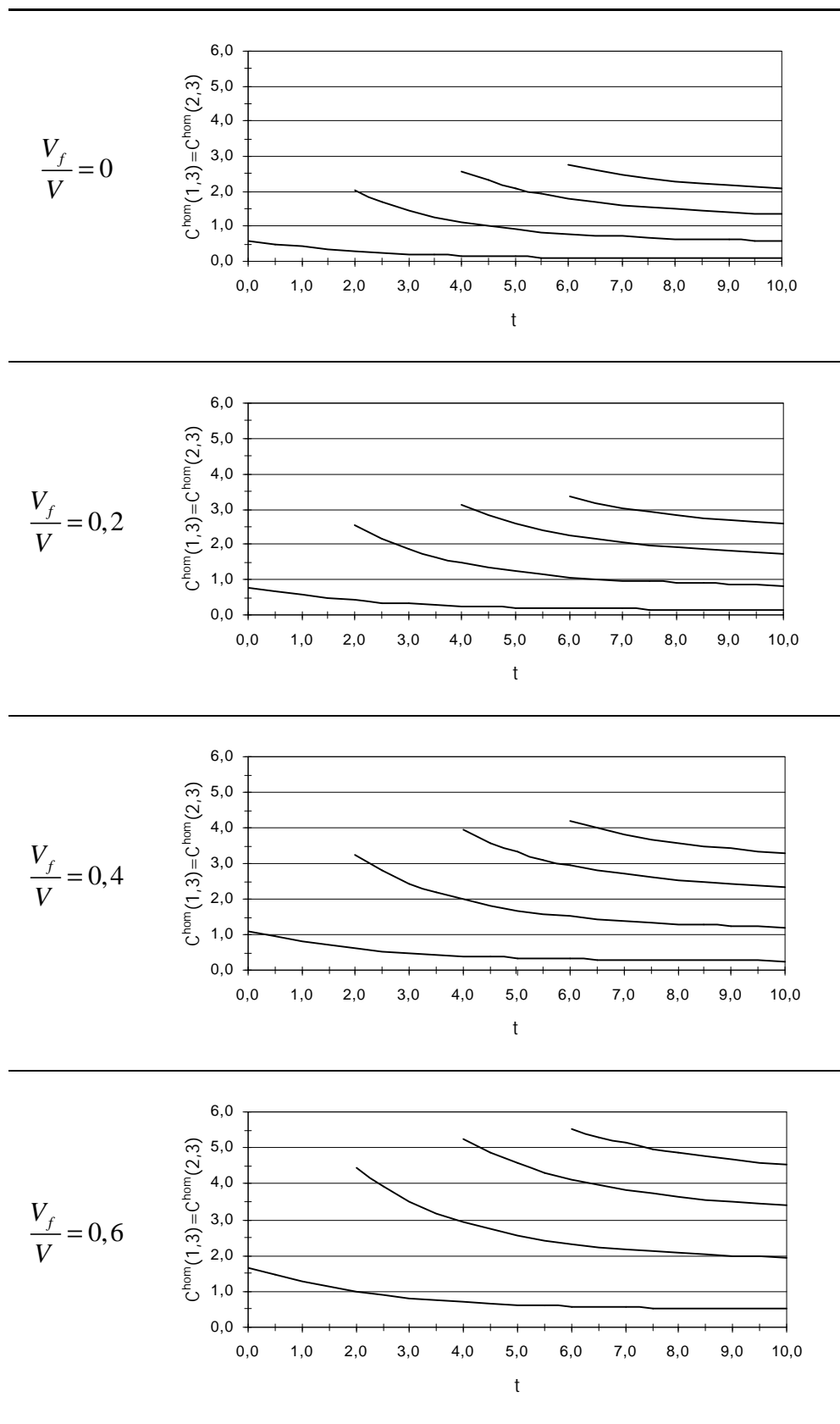


Figura 54 – Evolução de $\underline{C}_{13}^{\text{hom}}(t,t)$ e $\underline{C}_{23}^{\text{hom}}(t,t)$ em hardening

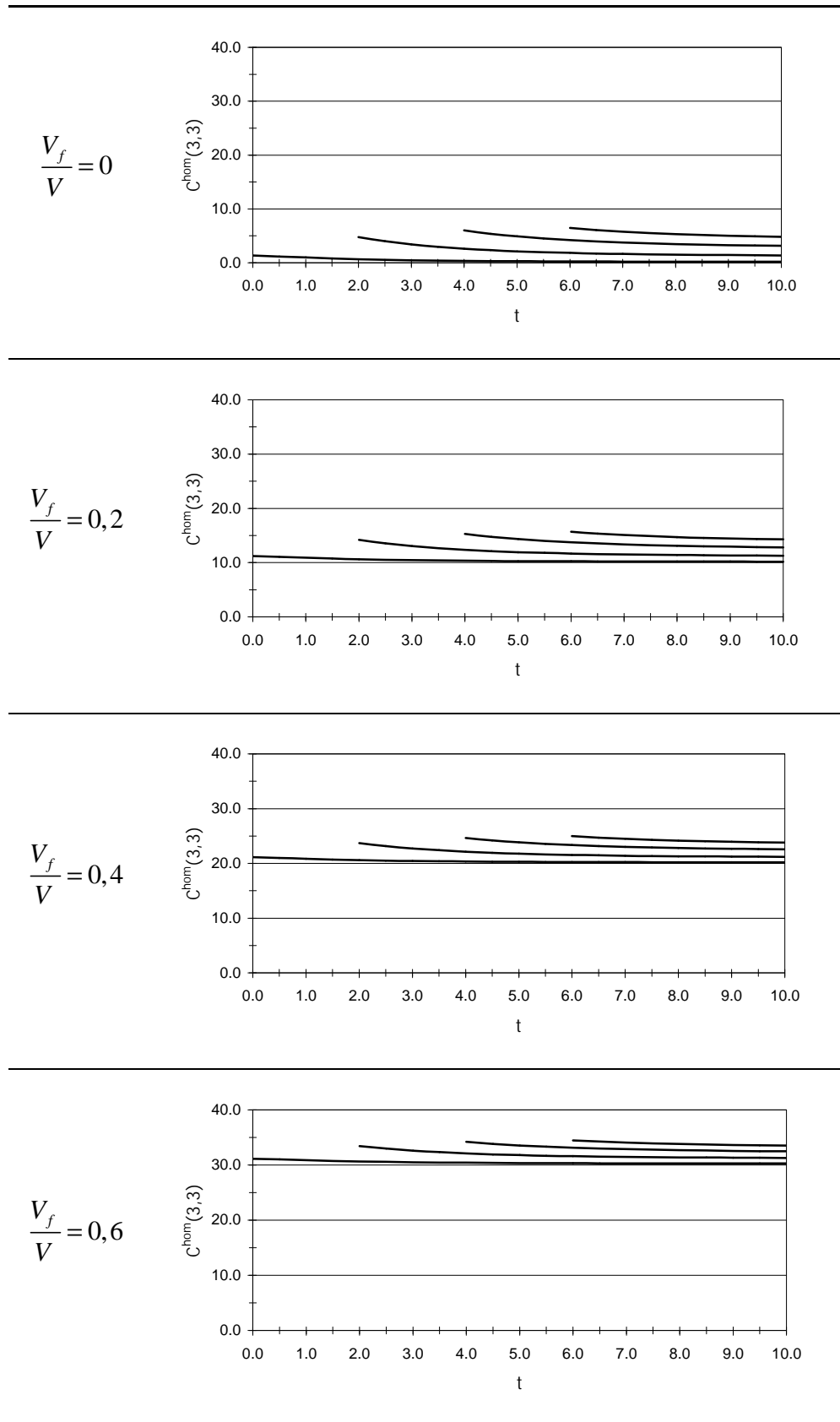


Figura 55 – Evolução de $\underline{\underline{C}}_{33}^{\text{hom}}(t, t)$ em hardening

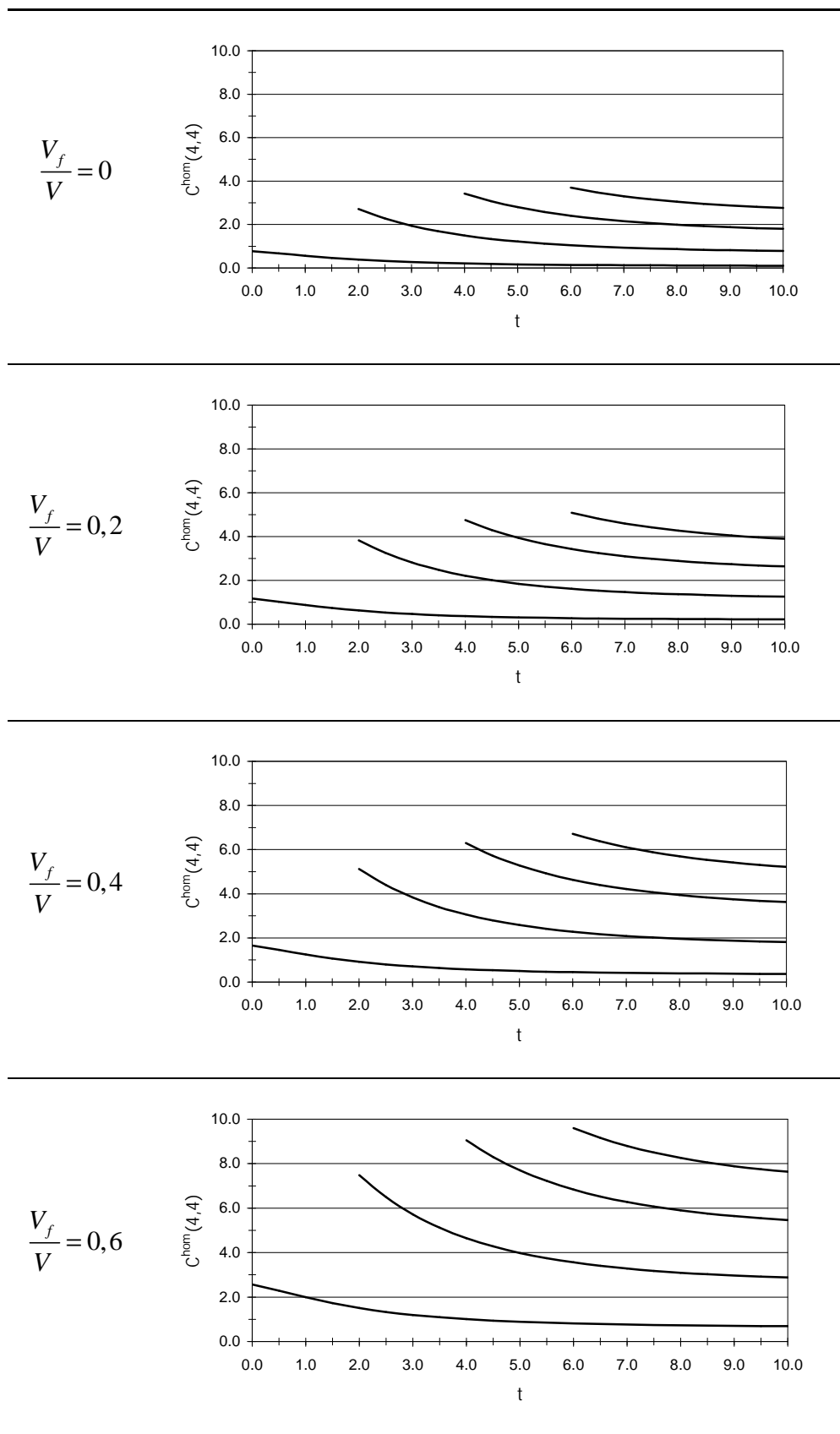


Figura 56 – Evolução de $C_{44}^{\text{hom}}(t, t)$ em hardening

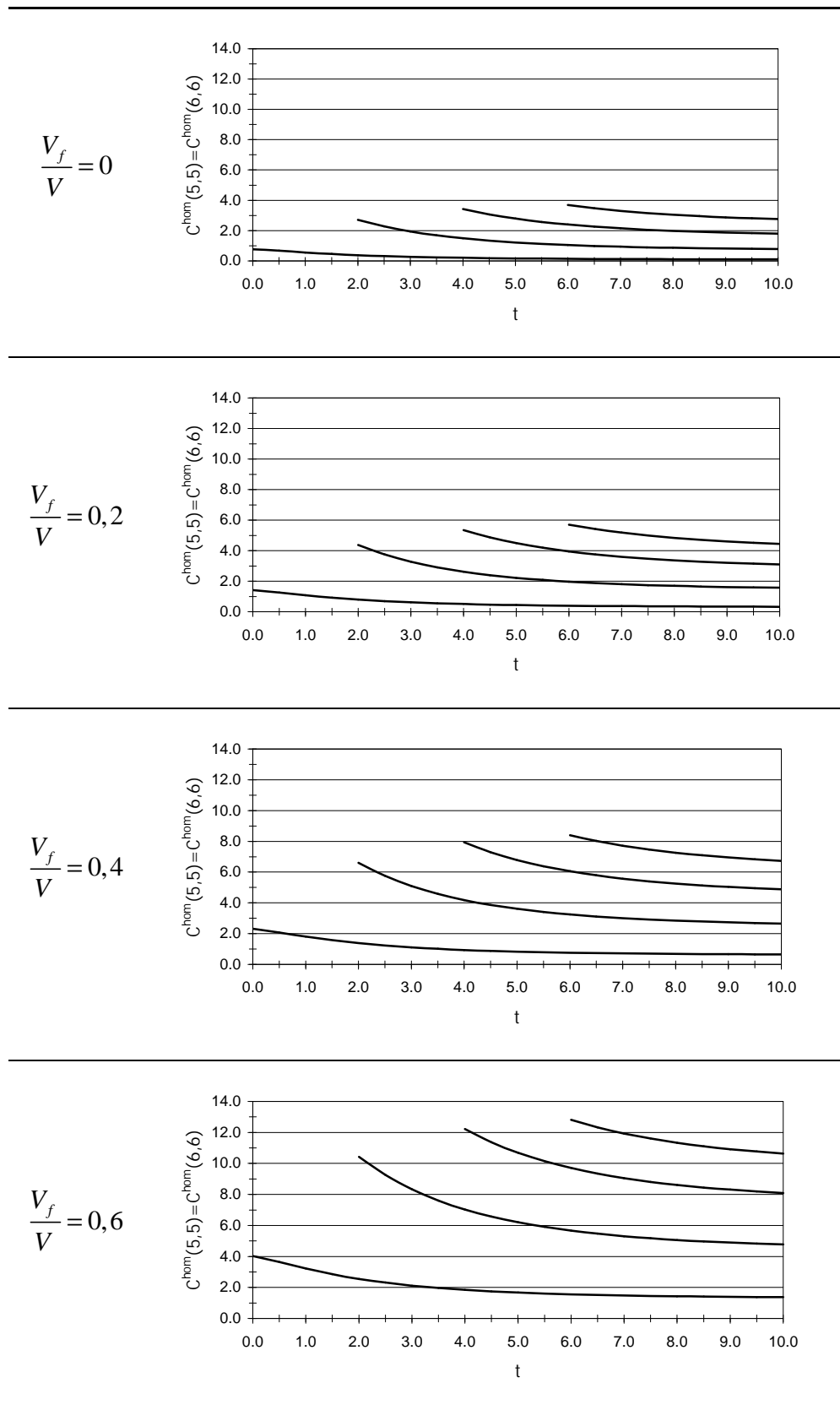


Figura 57 – Evolução de $\underline{C}_{55}^{\text{hom}}(t,t)$ e $\underline{C}_{66}^{\text{hom}}(t,t)$ em hardening

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

7.1 CONCLUSÕES

Explicações e comentários estão dispostos ao longo dos capítulos de resultados.

A solução apresentada é eficiente; a rápida convergência é demonstrada nas comparações feitas com modelos em elementos finitos (capítulo 4). A utilização de séries apresenta a vantagem de representar continuamente os campos de deslocamentos, de deformações e de tensões. O número de parâmetros utilizado para descrever esses campos, representado pelas constantes das expansões, é inferior ao número de valores nodais no processo por elementos finitos.

O método é versátil, pois aplica um processo numérico para materiais com envelhecimento, tanto por hardening, como por softening, semelhante ao empregado no caso elástico. A utilização de séries compostas aumenta a eficácia do processo de homogeneização visto que acelera a convergência dos resultados.

Quanto ao esforço computacional, o fator de maior relevância no cálculo com séries é a resolução de integrais na determinação das médias volumétricas. A sua quantidade depende do número de constantes a serem determinadas e da distribuição dos materiais na célula. A metodologia apresentada permite que a resolução das integrais seja feita em diversos computadores simultaneamente, o que possibilita análises de grande complexidade em um tempo relativamente curto.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A adaptação da formulação computacional ao caso de heterogeneidades tridimensionais permitiria a análise de inclusões ou poros. Vazios na microestrutura poderiam ser modelados como materiais de baixa rigidez em relação à matriz.

A pesquisa da influência da forma e da distribuição de heterogeneidades em uma matriz possibilitaria o projeto de materiais com características especiais quanto à rigidez, variação volumétrica, etc., tal qual o trabalho de Kikuchi *et al.* (1998).

A hipótese de aderência perfeita entre a fibra e a matriz, considerada nos cálculos, é uma simplificação. Em condições reais, onde a aderência pode estar prejudicada devido à fissuração, defeitos na fabricação do compósito, etc., é importante avaliar-se sua influência. Uma maneira de se considerar essa situação seria introduzindo-se um outro material no contorno da fibra. Variar-se suas características e suas dimensões tornaria possível a verificação da influência dessa região no conjunto.

A implementação de plasticidade em homogeneização permitiria a determinação de superfícies de plastificação para o compósito. Como referências, consultar Suquet (1985) e Maghous (1991). Para análise limite em materiais heterogêneos ver Suquet (1983).

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

8.1 REFERÊNCIAS FUNDAMENTAIS

ANSYS. **Versão 5.5**. ANSYS, Inc., 1998.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J. L.; PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic analysis for periodic structures**. Amsterdam: North Holland Publishing Co, 1978.

CREUS, G. J. **Viscoelasticity – Basic theory and applications to concrete structures**. Berlin: Springer Verlag, 1986.

FILONENKO-BORODICH, M. **Theory of elasticity**. Moskow: Mir Publishers, 1968.

FRANCFORT, G.; LEGUILLON, D.; SUQUET, P. **Homogénéisation de milieux viscoélastiques linéaires de Kelvin Voigt**. C.R. de l'Académie des Sciences, Paris, v. I, n. 296, p. 287-290, 1983.

FRANCFORT, G.; SUQUET, P. **Homogenization and mechanical dissipation in thermoviscoelasticity**. Archive for Rational Mech. and Analysis., n. 96, p. 265-293, 1986.

HASHIN, Z. **Viscoelastic fiber reinforced materials**. AIAA Journal, v. 4, n. 8, p. 1411-1417, 1966.

HASHIN, Z; SHTRIKMAN, S. **On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, n. 10, p. 335-342, 1962.

HILL, R. **Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, n. 11, p. 357-372, 1963.

KIKUCHI, N.; NISHIWAKI, S.; FONSECA, J. S. O.; SILVA, E. C. N. **Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 151, n. 3-4, p. 401-417, 1998.

LUCIANO, R.; BARBERO, E. J. **Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure**. Int. Journal of Solids and Structures, v. 31, p. 2933-2944, 1994.

MAGHOUS, S. **Détermination du critère de resistance macroscopique d'un materiau hétérogène à structure périodique**. 1991. Thèse de doctorat – ENPC, Paris.

MAGHOUS, S.; CREUS, G. J. **Periodic homogenization in thermoviscoelasticity: multilayered media with ageing**. Int. Journal of Solids and Structures, v. 40, n. 4, p. 851-870, 2003.

MASUERO J. R.; CREUS, G. J. **Crack growth initiation in concrete-like materials in the presence of creep**. Nuclear Engineering and Design, n. 156, p. 209-218, 1995.

MATLAB. **Version 6, Release 12**. The MathWorks, Inc., 2000.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes**. Int. Journal of Engineering Science, n. 12, p. 331-351, 1974.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Non homogeneous media and vibration theory**. Lecture Notes in Physics, v. 127. Berlin: Springer Verlag, 1980.

SANCHEZ-PALENCIA, E.; SANCHEZ-PALENCIA, J. **Sur certains problèmes physiques d'homogénéisation donnant lieu à des phénomènes de relaxation**. C.R. de l'Académie des Sciences, Paris, v. A, n. 286, p. 903-906, 1978.

SHAMES, I. H.; COZZARELLI, F. A. **Elastic and inelastic stress analysis**. Bristol (USA): Taylor & Francis, p. 189-192, 1986.

SHIBUYA Y. **Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization**. JMSE International Journal Series A, n. 40, p. 313-319, 1997.

SPIEGEL, M. R. **Análise vetorial**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1966.

SPIEGEL, M. R. **Mathematical handbook of formulas and tables**. New York: McGraw-Hill, 1968.

SUQUET, P. **Analyse limite et homogénéisation**. C.R. de l'Académie des Sciences, Paris, v. II, n. 296, p. 1355-1358, 1983.

SUQUET, P. **Homogenization techniques for composite media**. Lecture Notes in Physics, n. 272, Berlin: Springer Verlag, 1985.

SUQUET, P. **Plasticité et homogénéisation**. 1982. Thèse de doctorat ès sci. Mathématiques – Université Pierre et Marie Curie, Paris.

TARTAR, L. **Estimations fines de coefficients homogénéisés**. Computing methods in applied sciences and engineering, Lecture Notes in Mathematics, v. 704, Berlin: Springer Verlag, 1977.

TSAI, S. W.; HAHN, H. T. **Introduction to Composite Materials**. Lancaster, PA: Technomic, 1980.

8.2 REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

CHURCHILL, R. V. **Fourier series and boundary value problems**. New York: McGraw-Hill, 1963.

HARRIS, J. S.; BARBERO, E. J. **Prediction of creep properties of laminated composites from matrix creep data**. Int. Journal of Solids and Structures, v. 31, p. 2933-2944, 1994.

ODEN, J. T. **Mechanics of elastic structures**. New York: McGraw-Hill, 1967.

OROZCO, C. E.; PINDER, M. J. **Viscoelastic analysis of multiphase composites using the generalized method of cells**. AIAA Journal, v. 40, n. 8, p. 1619-1626, 2002.

TIMOSHENKO, S. P. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1957-1958.

**Apêndice A – Detalhes computacionais da aplicação
da teoria da homogeneização em uma célula elementar cúbica
com fibra prismática quadrada ou cilíndrica**

APÊNDICE A - DETALHES COMPUTACIONAIS DA APLICAÇÃO DA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO EM UMA CÉLULA ELEMENTAR CÚBICA COM FIBRA PRISMÁTICA QUADRADA OU CILÍNDRICA - ELASTICIDADE

Neste apêndice, aplicam-se os desenvolvimentos apresentados nos capítulos 2 e 3, para o caso elástico. É mostrada detalhadamente a aproximação da parcela periódica dos deslocamentos da célula elementar por meio de séries polinomiais com o objetivo principal de homogeneizar o comportamento elástico do compósito.

A configuração geométrica da célula é descrita na figura 4.

A.1 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS

Os materiais (fibra e matriz) são caracterizados pelos seus correspondentes módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson

$$\left\{ \begin{array}{l} E_f: \text{módulo de elasticidade da fibra} \\ \boldsymbol{n}_f: \text{coeficiente de Poisson da fibra} \\ E_m: \text{módulo de elasticidade da matriz} \\ \boldsymbol{n}_m: \text{coeficiente de Poisson da matriz} \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

- considera-se que exista aderência perfeita entre fibra e matriz

A.2 RESOLUÇÃO POR SÉRIES SIMPLES (VER ITEM 3.1.1)

A.2.1 Deslocamentos

Os deslocamentos nas direções (x, y, z) são compostos por duas parcelas: uma macroscópica e outra periódica

$$\underline{u} = \underline{\underline{E}}x + \underline{u}_p \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} : \text{deslocamento total}$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{bmatrix} : \text{deformação específica média}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \text{vetor de posição}$$

$$\underline{u}_p = \begin{bmatrix} u_{px} \\ u_{py} \\ u_{pz} \end{bmatrix} : \text{deslocamento periódico}$$

A.2.2 Notação

Para facilitar o desenvolvimento dos cálculos será adotada a notação vetorial para grandezas tensoriais e a notação matricial para tensores de quarta ordem devido as conhecidas condições de simetria dessas grandezas

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{e}} \rightarrow \underline{\underline{e}} \\ \underline{\underline{s}} \rightarrow \underline{\underline{s}} \\ \underline{\underline{E}} \rightarrow \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{\zeta}} \rightarrow \underline{\underline{\zeta}} \\ \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} \rightarrow \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Essas mudanças implicam obviamente em algumas mudanças nos operadores matemáticos.

A.2.3 Expansões utilizadas para os deslocamentos periódicos

Os deslocamentos periódicos são representados como

$$\begin{aligned}
 u_{ph} = & \sum_{i=0}^{i=k-m} a_{h(i+m)0} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) + \sum_{j=0}^{j=k-m} a_{h0(j+m)} P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right) + \\
 & + \sum_{i,j=0}^{i+j=k-2m} a_{h(i+m)(j+m)} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

para $k \geq 2m$ e $m = 2$ (k representa o grau do polinômio), onde $h = x, y, z$

Entretanto, devido a simetria do problema, os deslocamentos obtidos são de natureza ímpar, o que torna desnecessária a existência de elementos pares nas séries. Desse modo, na expressão (A.4) os polinômios pares podem ser retirados.

O número de termos n para a expressão (A.4) fica sendo

$$n_1 = \frac{1}{4}(k-1)(k+1) \tag{A.5}$$

para k ímpar.

A.2.4 Deformação Específica

Decorrentes dos deslocamentos, a deformação específica terá uma parcela média e outra periódica. Ainda em notação tensorial

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \right) + \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \right)^T \right] = \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p = \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \underline{u}_p}{\partial \underline{x}} \right) + \left(\frac{\partial \underline{u}_p}{\partial \underline{x}} \right)^T \right] \tag{A.6}$$

Prosseguindo-se, tem-se para $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_p$ (em notação vetorial)

$$\underline{\mathbf{e}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{p_{xx}} \\ \mathbf{e}_{p_{yy}} \\ \mathbf{e}_{p_{zz}} \\ \mathbf{e}_{p_{xy}} \\ \mathbf{e}_{p_{xz}} \\ \mathbf{e}_{p_{yz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(u_{px})}{\partial x} \\ \frac{\partial(u_{py})}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u_{px})}{\partial y} + \frac{\partial(u_{py})}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u_{pz})}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u_{pz})}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

onde já foi considerado o fato de $\underline{u}_p = f(x, y)$, descrito no capítulo 3.

A.2.5 Operador média

Mostrado em (2.5), o operador média é escrito para a célula elementar como

$$\langle . \rangle = \frac{1}{V} \int (\cdot) dv = \frac{1}{8L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\cdot) dx dy dz \quad (\text{A.8})$$

A.2.6 Resolução do problema

A.2.6.1 Média do potencial elástico microscópico

O processo de minimização do potencial elástico, visto em 2.8.1, possibilita que os coeficientes das expansões para os deslocamentos periódicos sejam determinados. Através da relação (2.54), reescrita como

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} \underline{\underline{E}} \quad (\text{A.9})$$

onde $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} \rangle$, obtém-se a matriz $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}}$.

Dessa forma, supondo $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ dado, o princípio variacional que permite a solução do problema é a identidade da energia de deformação (ver item 2.8.2 para o caso elástico linear)

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{hom}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} \leq \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\mathbf{e}}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}} \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\underline{\underline{\mathbf{c}}} = \frac{E}{(1+\mathbf{n})(1-2\mathbf{n})} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n} & 1-\mathbf{n} & \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n} & \mathbf{n} & 1-\mathbf{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

E : módulo de elasticidade (E_m ou E_f)

\mathbf{n} : coeficiente de Poisson (\mathbf{n}_m ou \mathbf{n}_f)

Aplicando-se o operador média volumétrica, tem-se para a média do potencial elástico microscópico

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{e}}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}} \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle = \frac{1}{V} \int (\underline{\underline{\mathbf{e}}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}} \underline{\underline{\mathbf{e}}}) dv = \frac{1}{V} \int (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p)^T \underline{\underline{\mathbf{c}}} (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p) dv \quad (\text{A.12})$$

Deve-se ter atenção ao fato de haver dois tipos de materiais ocupando regiões diferentes, portanto (A.12) se desdobra em

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\mathbf{e}}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}} \underline{\underline{\mathbf{e}}} \rangle &= \frac{1}{8L^3} \int_{-L}^L \int_{-r}^r \int_{-a}^a (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p)^T \underline{\underline{\mathbf{c}}}_f (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p) dy dx dz + \\ &+ \frac{1}{8L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p)^T \underline{\underline{\mathbf{c}}}_m (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p) dy dx dz + \\ &- \frac{1}{8L^3} \int_{-L}^L \int_{-r}^r \int_{-a}^a (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p)^T \underline{\underline{\mathbf{c}}}_m (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_p) dy dx dz \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde $\mathbf{a} = r$ - para o caso da fibra prismática quadrada

$\mathbf{a} = \sqrt{r^2 - x^2}$ - para o caso da fibra cilíndrica

O primeiro termo após a igualdade em (A.13), se refere à região da fibra, enquanto o segundo, à da matriz. Reescrevendo-se (A.13) de uma forma mais adequada

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle &= \frac{1}{8L^3} \left(\int_{-L}^L \int_{-r}^r \int_{-a}^a (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{e}}_p)^T (\underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m) (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{e}}_p) dydx dz \right) + \\ &+ \frac{1}{8L^3} \left(\int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{e}}_p)^T \underline{\mathbf{c}}_m (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{e}}_p) dydx dz \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Prosseguindo-se os cálculos, (A.14) se transforma em

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle &= \frac{1}{8L^3} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\mathbf{E}}^T (\underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m) \underline{\mathbf{E}}] dydx dz + 2 \int_{-L}^L \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\mathbf{E}}^T (\underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m) \underline{\mathbf{e}}_p] dydx dz \right\} + \\ &+ \frac{1}{8L^3} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\mathbf{e}}_p^T (\underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m) \underline{\mathbf{e}}_p] dydx dz + \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_m \underline{\mathbf{E}}) dydx dz \right\} + \\ &+ \frac{1}{8L^3} \left\{ 2 \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_m \underline{\mathbf{e}}_p) dydx dz + \int_{-L}^L \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\mathbf{e}}_p^T \underline{\mathbf{c}}_m \underline{\mathbf{e}}_p) dydx dz \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Como as expressões não são função de z , simplificam-se as integrais

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle &= \frac{1}{4L^2} \mathbf{A}_f \left[\underline{\mathbf{E}}^T (\underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m) \underline{\mathbf{E}} \right] + \frac{1}{2L^2} \underline{\mathbf{E}}^T (\underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m) \int_{-r}^r \int_{-a}^a (\underline{\mathbf{e}}_p) dydx + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\mathbf{e}}_p^T (\underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m) \underline{\mathbf{e}}_p] dydx + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_m \underline{\mathbf{E}} + \\ &+ \frac{1}{2L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_m \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\mathbf{e}}_p) dydx + \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\mathbf{e}}_p^T \underline{\mathbf{c}}_m \underline{\mathbf{e}}_p) dydx \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde $\mathbf{A}_f = 2r^2$ - para o caso da fibra prismática quadrada

$\mathbf{A}_f = \mathbf{p}r^2$ - para o caso da fibra cilíndrica

Para ser possível determinar-se isoladamente cada um dos coeficientes das séries, é conveniente representar-se os deslocamentos periódicos como um produto escalar, da seguinte forma (por exemplo: para uma série polinomial, na direção x , com $k = 3$ e somente funções ímpares)

$$u_{px} = \left[P_3^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_3^2 \left(\frac{y}{L} \right) P_5^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_5^2 \left(\frac{y}{L} \right) P_3^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_2^2 \left(\frac{y}{L} \right) P_2^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_3^2 \left(\frac{y}{L} \right) \right] \begin{bmatrix} a_{x30} \\ a_{x03} \\ a_{x50} \\ a_{x05} \\ a_{x32} \\ a_{x23} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

ou em uma forma mais geral

$$u_{px} = \left[P_3^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_3^2 \left(\frac{y}{L} \right) P_5^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_5^2 \left(\frac{y}{L} \right) P_3^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_2^2 \left(\frac{y}{L} \right) P_2^2 \left(\frac{x}{L} \right) P_3^2 \left(\frac{y}{L} \right) \right] \begin{bmatrix} c_{x1} \\ c_{x2} \\ c_{x3} \\ c_{x4} \\ c_{x5} \\ c_{x6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

É estendendo-se, ainda, para u_{py} e u_{pz}

$$\begin{aligned} u_{px} &= \hat{\underline{u}}_p^T \underline{C}_x \\ u_{py} &= \hat{\underline{u}}_p^T \underline{C}_y \\ u_{pz} &= \hat{\underline{u}}_p^T \underline{C}_z \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

É conveniente dividir-se \underline{e}_p em parcelas

$$\underline{e}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial(u_{px})}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(u_{px})}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial(u_{py})}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(u_{py})}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(u_{pz})}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(u_{pz})}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

De modo que, substituindo-se (A.19) em (A.20), obtém-se

$$\underline{\mathbf{e}}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_p^T)}{\partial x} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_p^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_x + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_p^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_p^T)}{\partial x} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_y + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_p^T)}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_p^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_z = \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_x \underline{\mathbf{C}}_x + \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_y \underline{\mathbf{C}}_y + \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_z \underline{\mathbf{C}}_z \quad (\text{A.21})$$

onde $\underline{0}$ é uma linha de termos nulos, com o mesmo número de colunas de $\hat{\underline{u}}_p^T$.

Observe-se que as derivadas em relação a z são nulas pois as equações são funções unicamente de x e y .

Prosseguindo-se o raciocínio, considere-se o conjunto de matrizes $Z_{6 \times 6}$, definido de modo que

$$\underline{\underline{Z}}_{ws} = \begin{cases} 0 \\ 1 \text{ se } i = w \text{ e } j = s \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Por exemplo: $\underline{\underline{Z}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Observando-se, então, os elementos de (A.21), pode-se escrever $\hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_x$, $\hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_y$, $\hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_z$ como

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_x &= \underline{\underline{Z}}_{11} \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_x + \underline{\underline{Z}}_{44} \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_x \\ \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_y &= \underline{\underline{Z}}_{22} \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_y + \underline{\underline{Z}}_{44} \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_y \\ \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_z &= \underline{\underline{Z}}_{55} \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_z + \underline{\underline{Z}}_{66} \hat{\underline{\underline{\mathbf{e}}}}_z \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Aplicando-se (A.21) sobre (A.16), a expressão $\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle$ se desenvolve (equação (A.24))

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle &= \frac{1}{4L^2} \left(\mathbf{A}_f \left[\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \underline{\mathbf{E}} \right] + 2 \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_x \right) + \\
&+ \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_y) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_y + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_z) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_x^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_x + 2 \underline{\mathbf{C}}_x^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_y] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_y \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(2 \underline{\mathbf{C}}_x^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_z] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z + \underline{\mathbf{C}}_y^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\hat{\mathbf{e}}}_y^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_y] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_y \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(2 \underline{\mathbf{C}}_y^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\hat{\mathbf{e}}}_y^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_z] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z + \underline{\mathbf{C}}_z^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-a}^a [\underline{\hat{\mathbf{e}}}_z^T \underline{\mathbf{c}}_{g1} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_z] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z \right) + \\
&+ \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_x + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_y) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_y \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(2 \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_z) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z + \underline{\mathbf{C}}_x^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_x \right) + \\
&+ \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_x^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_y) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_y + \underline{\mathbf{C}}_x^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_z) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_y^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_y^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_y) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_y + 2 \underline{\mathbf{C}}_y^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_y^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_z) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{C}}_z^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\hat{\mathbf{e}}}_z^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_z) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_z + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{g2} \underline{\mathbf{E}}
\end{aligned}$$

onde $\underline{\mathbf{c}}_{g1} = \underline{\mathbf{c}}_f - \underline{\mathbf{c}}_m$ e $\underline{\mathbf{c}}_{g2} = \underline{\mathbf{c}}_m$

Analisando-se os produtos de matrizes a serem integrados em (A.24), aplicando-se (A.23), tem-se, utilizando-se uma matriz $\underline{\mathbf{c}}_g$ genérica para o termo $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_g \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x$

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{c}}_g \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x &= \left(\underline{\mathbf{Z}}_{11} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x + \underline{\mathbf{Z}}_{44} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x \right)^T \underline{\mathbf{c}}_g \left(\underline{\mathbf{Z}}_{11} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x + \underline{\mathbf{Z}}_{44} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x \right) \\
&= \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{Z}}_{11}^T \underline{\mathbf{c}}_g \underline{\mathbf{Z}}_{11} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x + \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{Z}}_{11}^T \underline{\mathbf{c}}_g \underline{\mathbf{Z}}_{44} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x + \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{Z}}_{44}^T \underline{\mathbf{c}}_g \underline{\mathbf{Z}}_{11} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x + \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x^T \underline{\mathbf{Z}}_{44}^T \underline{\mathbf{c}}_g \underline{\mathbf{Z}}_{44} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x
\end{aligned} \tag{A.25}$$

E considerando-se que

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{Z}}_{11}^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{Z}}_{11} &= \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (1,1) \underline{\underline{Z}}_{11} \\
\underline{\underline{Z}}_{11}^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{Z}}_{44} &= \underline{\underline{Z}}_{44}^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{Z}}_{11} = \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{Z}}_{44}^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{Z}}_{44} &= \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (4,4) \underline{\underline{Z}}_{44}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

A expressão (A.26) é, de fato, escrita como

$$\underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_x = \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (1,1) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{11} \underline{\underline{\hat{e}}}_x + \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (4,4) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{44} \underline{\underline{\hat{e}}}_x \tag{A.27}$$

Aplicando-se o mesmo princípio a todos os outros produtos de matrizes em (A.24)

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_y &= \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (1,2) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{12} \underline{\underline{\hat{e}}}_y + \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (4,4) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{44} \underline{\underline{\hat{e}}}_y \\
\underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_z &= \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{\hat{e}}}_y^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_y &= \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (2,2) \underline{\underline{\hat{e}}}_y^T \underline{\underline{Z}}_{22} \underline{\underline{\hat{e}}}_y + \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (4,4) \underline{\underline{\hat{e}}}_y^T \underline{\underline{Z}}_{44} \underline{\underline{\hat{e}}}_y \\
\underline{\underline{\hat{e}}}_y^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_z &= \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{\hat{e}}}_z^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_z &= \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (5,5) \underline{\underline{\hat{e}}}_z^T \underline{\underline{Z}}_{11} \underline{\underline{\hat{e}}}_z + \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (6,6) \underline{\underline{\hat{e}}}_z^T \underline{\underline{Z}}_{12} \underline{\underline{\hat{e}}}_z
\end{aligned} \tag{A.28}$$

De volta a (A.21), percebe-se que $\underline{\underline{\hat{e}}}_y$ e $\underline{\underline{\hat{e}}}_z$ podem ser representados por

$$\underline{\underline{\hat{e}}}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{\hat{e}}}_x = \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{\hat{e}}}_x \quad \underline{\underline{\hat{e}}}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{\hat{e}}}_x = \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{\hat{e}}}_x \tag{A.29}$$

Aplicando-se (A.29) sobre (A.28), obtém-se

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_y &= 2\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (1,2) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{14} \underline{\underline{\hat{e}}}_x + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (4,4) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{41} \underline{\underline{\hat{e}}}_x \\
&= 2\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (1,2) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{14} \underline{\underline{\hat{e}}}_x + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (4,4) \left(\underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{14} \underline{\underline{\hat{e}}}_x \right)^T \\
\underline{\underline{\hat{e}}}_y^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_y &= \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (4,4) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{11} \underline{\underline{\hat{e}}}_x + 4\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (2,2) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{44} \underline{\underline{\hat{e}}}_x \\
\underline{\underline{\hat{e}}}_z^T \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{\hat{e}}}_z &= \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (5,5) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{11} \underline{\underline{\hat{e}}}_x + \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g}}} (6,6) \underline{\underline{\hat{e}}}_x^T \underline{\underline{Z}}_{44} \underline{\underline{\hat{e}}}_x
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Organizando-se as integrais de matrizes a partir de (A.30), denominam-se

$$\begin{aligned}
\underline{B}_{1(n_1 x n_1)} &= \int_{-r-a}^r \int_{-a}^a \left[\underline{\hat{e}}_{\underline{x}}^T \underline{Z}_{\underline{11}} \underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right] dy dx \\
\underline{B}_{2(n_1 x n_1)} &= \int_{-r-a}^r \int_{-a}^a \left[\underline{\hat{e}}_{\underline{x}}^T \underline{Z}_{\underline{44}} \underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right] dy dx \\
\underline{B}_{3(n_1 x n_1)} &= \int_{-r-a}^r \int_{-a}^a \left[\underline{\hat{e}}_{\underline{x}}^T \underline{Z}_{\underline{14}} \underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right] dy dx \\
\underline{D}_{1(n_1 x n_1)} &= \int_{-L-L}^L \int_{-L}^L \left[\underline{\hat{e}}_{\underline{x}}^T \underline{Z}_{\underline{11}} \underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right] dy dx \\
\underline{D}_{2(n_1 x n_1)} &= \int_{-L-L}^L \int_{-L}^L \left[\underline{\hat{e}}_{\underline{x}}^T \underline{Z}_{\underline{44}} \underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right] dy dx \\
\underline{D}_{3(n_1 x n_1)} &= \int_{-L-L}^L \int_{-L}^L \left[\underline{\hat{e}}_{\underline{x}}^T \underline{Z}_{\underline{14}} \underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right] dy dx
\end{aligned} \tag{A.31}$$

E ainda

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{(6 x n_1)} &= \int_{-r-a}^r \int_{-a}^a \left(\underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right) dy dx \\
\underline{H}_{(6 x n_1)} &= \int_{-L-L}^L \int_{-L}^L \left(\underline{\hat{e}}_{\underline{x}} \right) dy dx = \underline{0}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Reescrevendo-se (A.24), aplicando-se o desenvolvimento concluído em (A.31) e (A.32), obtém-se (equação (A.33))

$$\begin{aligned}
\langle \underline{e}^T \underline{c} \underline{e} \rangle &= \frac{1}{4L^2} \left(\underline{A}_f \left[\underline{E}_{\underline{g1}}^T \underline{c}_{\underline{g1}} \underline{E} \right] + 2\underline{E}_{\underline{g1}}^T \underline{c}_{\underline{g1}} \underline{AC}_{\underline{x}} + 2\underline{E}_{\underline{g1}}^T \underline{c}_{\underline{g1}} \underline{\Lambda AC}_{\underline{y}} + 2\underline{E}_{\underline{g1}}^T \underline{c}_{\underline{g1}} \underline{\Gamma AC}_{\underline{z}} \right) + \underline{E}_{\underline{g2}}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \underline{E} + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{C}_{\underline{x}}^T \left\{ \underline{c}_{\underline{g1}} (1,1) \underline{B}_{\underline{1}} + \underline{c}_{\underline{g1}} (4,4) \underline{B}_{\underline{2}} \right\} \underline{C}_{\underline{x}} + 2\underline{C}_{\underline{x}}^T \left\{ 2\underline{c}_{\underline{g1}} (1,2) \underline{B}_{\underline{3}} + \frac{1}{2} \underline{c}_{\underline{g1}} (4,4) \underline{B}_{\underline{3}}^T \right\} \underline{C}_{\underline{y}} \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{C}_{\underline{y}}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{\underline{g1}} (4,4) \underline{B}_{\underline{1}} + 4\underline{c}_{\underline{g1}} (2,2) \underline{B}_{\underline{2}} \right\} \underline{C}_{\underline{y}} + \underline{C}_{\underline{z}}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{\underline{g1}} (5,5) \underline{B}_{\underline{1}} + \underline{c}_{\underline{g1}} (6,6) \underline{B}_{\underline{2}} \right\} \underline{C}_{\underline{z}} \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{C}_{\underline{x}}^T \left\{ \underline{c}_{\underline{g2}} (1,1) \underline{D}_{\underline{1}} + \underline{c}_{\underline{g2}} (4,4) \underline{D}_{\underline{2}} \right\} \underline{C}_{\underline{x}} + 2\underline{C}_{\underline{x}}^T \left\{ 2\underline{c}_{\underline{g2}} (1,2) \underline{D}_{\underline{3}} + \frac{1}{2} \underline{c}_{\underline{g2}} (4,4) \underline{D}_{\underline{3}}^T \right\} \underline{C}_{\underline{y}} \right) + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{C}_{\underline{y}}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{\underline{g2}} (4,4) \underline{D}_{\underline{1}} + 4\underline{c}_{\underline{g2}} (2,2) \underline{D}_{\underline{2}} \right\} \underline{C}_{\underline{y}} + \underline{C}_{\underline{z}}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{\underline{g2}} (5,5) \underline{D}_{\underline{1}} + \underline{c}_{\underline{g2}} (6,6) \underline{D}_{\underline{2}} \right\} \underline{C}_{\underline{z}} \right)
\end{aligned}$$

A.2.6.2 Sistema de Equações (minimização)

Retornando-se à expressão (A.10), tem-se que

$$\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{C}}^{\text{hom}} \underline{\mathbf{E}} = \min \left\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \right\rangle \quad (\text{A.34})$$

Para se obter o valor mínimo da média do potencial elástico microscópico, procede-se a derivação com relação aos coeficientes das séries, da seguinte forma

$$\frac{\partial \left(\left\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \right\rangle \right)}{\partial \underline{\mathbf{C}}_{xyz}} = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\text{onde } \underline{\mathbf{C}}_{xyz}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_x^T & \mathbf{C}_y^T & \mathbf{C}_z^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x1} & c_{x2} & c_{x3} & \cdots & c_{y1} & c_{y2} & c_{y3} & \cdots & c_{z1} & c_{z2} & c_{z3} & \cdots \end{bmatrix}$$

Agrupam-se como (A.36) as derivadas em relação a $\underline{\mathbf{C}}_x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\left\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \right\rangle \right)}{\partial \underline{\mathbf{C}}_x} &= \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\mathbf{A}} \right)^T + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (1,1) \underline{\mathbf{B}}_{=1} + \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=2} \right\} \underline{\mathbf{C}}_x + \left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g1} (1,2) \underline{\mathbf{B}}_{=3} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=3}^T \right\} \underline{\mathbf{C}}_y \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (1,1) \underline{\mathbf{D}}_{=1} + \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=2} \right\} \underline{\mathbf{C}}_x + \left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g2} (1,2) \underline{\mathbf{D}}_{=3} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=3}^T \right\} \underline{\mathbf{C}}_y \right) = 0 \end{aligned}$$

Em relação a $\underline{\mathbf{C}}_y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\left\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \right\rangle \right)}{\partial \underline{\mathbf{C}}_y} &= \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\mathbf{\Lambda}} \underline{\mathbf{A}} \right)^T + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g1} (1,2) \underline{\mathbf{B}}_{=3} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=3}^T \right\}^T \underline{\mathbf{C}}_x + \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=1} + 4\underline{\mathbf{c}}_{=g1} (2,2) \underline{\mathbf{B}}_{=2} \right\} \underline{\mathbf{C}}_y \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g2} (1,2) \underline{\mathbf{D}}_{=3} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=3}^T \right\}^T \underline{\mathbf{C}}_x + \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=1} + 4\underline{\mathbf{c}}_{=g2} (2,2) \underline{\mathbf{D}}_{=2} \right\} \underline{\mathbf{C}}_y \right) = 0 \end{aligned}$$

E em relação a $\underline{\mathbf{C}}_z$

$$\frac{\partial \left(\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle \right)}{\partial \underline{\mathbf{C}}_z} = \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\Gamma A} \right)^T +$$

$$+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (5,5) \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (6,6) \underline{\mathbf{B}}_2 \right\} \underline{\mathbf{C}}_z + \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (5,5) \underline{\mathbf{D}}_1 + \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (6,6) \underline{\mathbf{D}}_2 \right\} \underline{\mathbf{C}}_z \right) = 0$$

Reorganiza-se (A.36) e concatena-se as matrizes na forma de um sistema

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{xyz} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \quad (\text{A.37})$$

onde $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{xyz}$ e $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ são dados por

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{21} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{31} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{32} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33} \end{bmatrix}_{(3n_1 \times 3n_1)} \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_x \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_y \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_z \end{bmatrix}_{(3n_1 \times 1)}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}}_{=g1} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}}_{=g1} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\Gamma}}^T \underline{\underline{\mathbf{c}}}_{=g1} \end{bmatrix}_{(3n_1 \times 6)} \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{(6 \times 1)} \quad (\text{A.38})$$

$\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ é composta por

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{11} = \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (1,1) \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_2 + \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (1,1) \underline{\mathbf{D}}_1 + \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_2$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12} = 2 \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (1,2) \underline{\mathbf{B}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_3^T + 2 \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (1,2) \underline{\mathbf{D}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_3^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{13} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{21} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{12}^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{22} = \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_1 + 4 \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (2,2) \underline{\mathbf{B}}_2 + \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_1 + 4 \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (2,2) \underline{\mathbf{D}}_2$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{23} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{31} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{32} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{33} = \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (5,5) \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (6,6) \underline{\mathbf{B}}_2 + \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (5,5) \underline{\mathbf{D}}_1 + \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (6,6) \underline{\mathbf{D}}_2$$

Ao resolver-se (A.37), são determinadas as constantes das expansões, bem como as expressões para os deslocamentos periódicos para uma dada deformação macroscópica $\underline{\mathbf{E}}$.

Observa-se que

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{C}}_x(n_1 x 1) &= \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{x}}(n_1 x 6)} \underline{\mathbf{E}}_{(6 x 1)} \\ \underline{\mathbf{C}}_y(n_1 x 1) &= \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{y}}(n_1 x 6)} \underline{\mathbf{E}}_{(6 x 1)} \\ \underline{\mathbf{C}}_z(n_1 x 1) &= \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{z}}(n_1 x 6)} \underline{\mathbf{E}}_{(6 x 1)}\end{aligned}\tag{A.39}$$

A.2.6.3 Determinação de $\underline{\mathbf{C}}^{\text{hom}}$

Para a determinação da matriz $\underline{\mathbf{C}}^{\text{hom}}$, recorre-se a equação (A.9) e sendo um caso elástico, tem-se

$$\langle \underline{\mathbf{s}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{c}} (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{e}}_p) \rangle = \langle \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{E}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}}_p \rangle\tag{A.40}$$

Desenvolvem-se as parcelas de (A.40) como

$$\langle \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{E}} \rangle = \frac{1}{V} [V_f \underline{\mathbf{c}}_f + V_m \underline{\mathbf{c}}_m] \underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{4L^2} [A_f \underline{\mathbf{c}}_f + (4L^2 - A_f) \underline{\mathbf{c}}_m] \underline{\mathbf{E}}\tag{A.41}$$

onde

$V = V_f + V_m$: volume da célula

V_f : volume de fibra

V_m : volume de matriz

A_f : área de fibra

$$\begin{aligned}\langle \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}}_p \rangle &= \frac{1}{V} \left[\underline{\mathbf{c}}_f \left(\int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\mathbf{e}}_p) dy dx \right) + \underline{\mathbf{c}}_m \left(\int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\mathbf{e}}_p) dy dx - \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\mathbf{e}}_p) dy dx \right) \right] \\ &= \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\mathbf{c}}_{\underline{\mathbf{g}}1} \left(\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{x}}} + \Lambda \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{y}}} + \Gamma \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{z}}} \right) + \underline{\mathbf{c}}_m \left(\underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{x}}} + \Lambda \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{y}}} + \Gamma \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{z}}} \right) \right] \underline{\mathbf{E}} \\ &= \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\mathbf{c}}_{\underline{\mathbf{g}}1} \left(\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{x}}} + \Lambda \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{y}}} + \Gamma \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{\underline{\mathbf{z}}} \right) \right] \underline{\mathbf{E}}\end{aligned}\tag{A.42}$$

onde $\underline{c}_{g1} = \underline{c}_{\underline{f}} - \underline{c}_{\underline{m}}$

Finalmente, utilizando-se (A.41) e (A.42) para se resolver (A.40), determina-se, partindo-se de (A.9), que

$$\begin{aligned} \underline{C}_{(6 \times 6)}^{\text{hom}} = & \frac{2L}{8L^3} \left[\underline{A}_{\underline{f}} \underline{c}_{\underline{f}} + (4L^2 - \underline{A}_{\underline{f}}) \underline{c}_{\underline{m}} \right] + \\ & + \frac{1}{8L^3} \left[(\underline{c}_{\underline{f}} - \underline{c}_{\underline{m}}) (\underline{A}_{\underline{x}} \underline{C} + \underline{\Lambda} \underline{A}_{\underline{y}} \underline{C} + \underline{\Gamma} \underline{A}_{\underline{z}} \underline{C}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

A.3 RESOLUÇÃO POR SÉRIES COMPOSTAS (VER ITEM 3.1.2)

A.3.1 Expansões utilizadas para os deslocamentos periódicos

Na resolução por séries compostas, tem-se as seguintes expressões para os deslocamentos periódicos

$$\begin{aligned} u_{p1h} = & \sum_{i=0}^{i=k-m} a_{1h(i+m)0} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) + \sum_{j=0}^{j=k-m} a_{1h0(j+m)} P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right) + \\ & + \sum_{i,j=0}^{i+j=k-2m} a_{1h(i+m)(j+m)} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{L} \right) P_{j+m}^m \left(\frac{y}{L} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$u_{p2h} = \sum_{i,j=0}^{i+j=k-2m} a_{2h(i+m)(j+m)} P_{i+m}^m \left(\frac{x}{r} \right) P_{j+m}^m \left(\frac{y}{r} \right) \quad (\text{A.45})$$

para $k \geq 2m$ e $m = 2$ (k representa o grau do polinômio), onde $h = x, y, z$

Nas expressões (A.44) e (A.45) os polinômios pares devem ser retirados pelas mesmas razões aplicadas a (A.4).

O número de termos de u_{p1h} e u_{p2h} , respectivamente fica sendo

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{1}{4}(k-1)(k+1) \\
n_2 &= \frac{1}{4}(k-1)(k-3)
\end{aligned}
\tag{A.46}$$

para k ímpar.

Os deslocamentos são representados de forma equivalente ao exposto em (A.19)

$$\begin{aligned}
u_{p1x} &= \hat{\underline{u}}_{p1}^T \underline{C}_{1x} \\
u_{p1y} &= \hat{\underline{u}}_{p1}^T \underline{C}_{1y} \\
u_{p1z} &= \hat{\underline{u}}_{p1}^T \underline{C}_{1z} \\
u_{p2x} &= \hat{\underline{u}}_{p2}^T \underline{C}_{2x} \\
u_{p2y} &= \hat{\underline{u}}_{p2}^T \underline{C}_{2y} \\
u_{p2z} &= \hat{\underline{u}}_{p2}^T \underline{C}_{2z}
\end{aligned}
\tag{A.47}$$

A.3.2 Deformação específica

A deformação específica \underline{e}_p continua sendo definida pela expressão (A.21), mas adaptado ao fato do deslocamento ser composto por (A.44) e (A.45).

Sejam (agrupadas em (A.48))

$$\underline{e}_{p1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_{p1}^T)}{\partial x} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_{p1}^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{C}_{=x} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_{p1}^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_{p1}^T)}{\partial x} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{C}_{=y} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_{p1}^T)}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\underline{u}}_{p1}^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{C}_{=z} = \hat{\underline{e}}_{=1x} \underline{C}_{=1x} + \hat{\underline{e}}_{=1y} \underline{C}_{=1y} + \hat{\underline{e}}_{=1z} \underline{C}_{=1z}$$

$$\underline{\mathbf{e}}_{p2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\underline{\hat{u}}_{p2}^T)}{\partial x} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\underline{\hat{u}}_{p2}^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{=x} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \frac{\partial(\underline{\hat{u}}_{p2}^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\underline{\hat{u}}_{p2}^T)}{\partial x} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{=y} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\underline{\hat{u}}_{p2}^T)}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\underline{\hat{u}}_{p2}^T)}{\partial y} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{C}}_{=z} = \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \underline{\mathbf{C}}_{=2x} + \hat{\mathbf{e}}_{=2y} \underline{\mathbf{C}}_{=2y} + \hat{\mathbf{e}}_{=2z} \underline{\mathbf{C}}_{=2z}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_p &= \underline{\mathbf{e}}_{p1} && \text{na região da matriz} \\ \underline{\mathbf{e}}_p &= \underline{\mathbf{e}}_{p1} + \underline{\mathbf{e}}_{p2} && \text{na região da fibra} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Aplicando-se (A.48) sobre (A.16), a expressão desenvolve-se (equação (A.50))

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle &= \frac{1}{4L^2} \left(\mathbf{A}_f \left[\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\mathbf{E}} \right] + 2\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1x}) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1x} \right) + \\ &+ \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2x}) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2x} + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1y}) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1y} \right) + \\ &+ \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2y}) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2y} + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1z}) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1z} \right) + \\ &+ \frac{1}{2L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2z}) dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2z} + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{=1x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1x}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1x}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1x} + 2\underline{\mathbf{C}}_{=1x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1x}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1y}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1y} \right) + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(2\underline{\mathbf{C}}_{=1x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1x}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1z}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1z} + \underline{\mathbf{C}}_{=1y}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1y}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1y}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1y} \right) + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(2\underline{\mathbf{C}}_{=1y}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1y}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1z}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1z} + \underline{\mathbf{C}}_{=1z}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1z}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=1z}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=1z} \right) + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{=2x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2x}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2x}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2x} + 2\underline{\mathbf{C}}_{=2x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2x}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2y}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2y} \right) + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(2\underline{\mathbf{C}}_{=2x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2x}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2z}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2z} + \underline{\mathbf{C}}_{=2y}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2y}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2y}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2y} \right) + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(2\underline{\mathbf{C}}_{=2y}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2y}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2z}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2z} + \underline{\mathbf{C}}_{=2z}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2z}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g3} \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{=2z}] dy dx \right\} \underline{\mathbf{C}}_{=2z} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{4L^2} \left(\underline{C}_{1x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2x}}] dydx \right\} \underline{C}_{2x} + \underline{C}_{1x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2y}}] dydx \right\} \underline{C}_{2y} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \left(\underline{C}_{1x}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2z}}] dydx \right\} \underline{C}_{2z} + \underline{C}_{1y}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2x}}] dydx \right\} \underline{C}_{2x} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \left(\underline{C}_{1y}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2y}}] dydx \right\} \underline{C}_{2y} + \underline{C}_{1y}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2z}}] dydx \right\} \underline{C}_{2z} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \left(\underline{C}_{1z}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2x}}] dydx \right\} \underline{C}_{2x} + \underline{C}_{1z}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2y}}] dydx \right\} \underline{C}_{2y} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \underline{C}_{1z}^T \left\{ \int_{-r}^r \int_{-r}^r [\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}^T \underline{c}_{\underline{g3}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2z}}] dydx \right\} \underline{C}_{2z} + \underline{E}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \underline{E} + \\
& + \frac{1}{2L^2} \left(\underline{E}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}) dydx \right\} \underline{C}_{1x} + \underline{E}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}) dydx \right\} \underline{C}_{1y} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(2\underline{E}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}) dydx \right\} \underline{C}_{1z} + \underline{C}_{1x}^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}) dydx \right\} \underline{C}_{1x} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \left(\underline{C}_{1x}^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}) dydx \right\} \underline{C}_{1y} + \underline{C}_{1x}^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}) dydx \right\} \underline{C}_{1z} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{C}_{1y}^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}) dydx \right\} \underline{C}_{1y} + 2\underline{C}_{1y}^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}) dydx \right\} \underline{C}_{1z} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \underline{C}_{1z}^T \left\{ \int_{-L}^L \int_{-L}^L (\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}^T \underline{c}_{\underline{g2}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}) dydx \right\} \underline{C}_{1z}
\end{aligned}$$

onde $\underline{c}_{\underline{g1}} = \underline{c}_{\underline{f}} - \underline{c}_{\underline{m}}$, $\underline{c}_{\underline{g2}} = \underline{c}_{\underline{m}}$ e $\underline{c}_{\underline{g3}} = \underline{c}_{\underline{f}}$

Conforme (A.23), é válido escrever-se $\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}$, $\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}}$, $\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}$, $\hat{\underline{e}}_{\underline{2x}}$, $\hat{\underline{e}}_{\underline{2y}}$ e $\hat{\underline{e}}_{\underline{2z}}$ de modo que

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}} &= \underline{Z}_{\underline{11}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1x}} + \underline{Z}_{\underline{44}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1x}} \\
\hat{\underline{e}}_{\underline{1y}} &= \underline{Z}_{\underline{22}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1y}} + \underline{Z}_{\underline{44}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1y}} \\
\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}} &= \underline{Z}_{\underline{55}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1z}} + \underline{Z}_{\underline{66}} \hat{\underline{e}}_{\underline{1z}} \\
\hat{\underline{e}}_{\underline{2x}} &= \underline{Z}_{\underline{11}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2x}} + \underline{Z}_{\underline{44}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2x}} \\
\hat{\underline{e}}_{\underline{2y}} &= \underline{Z}_{\underline{22}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2y}} + \underline{Z}_{\underline{44}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2y}} \\
\hat{\underline{e}}_{\underline{2z}} &= \underline{Z}_{\underline{55}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2z}} + \underline{Z}_{\underline{66}} \hat{\underline{e}}_{\underline{2z}}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

E da mesma forma que em (A.29), $\hat{\underline{e}}_{\underline{1x}}$, $\hat{\underline{e}}_{\underline{1z}}$, $\hat{\underline{e}}_{\underline{2y}}$ e $\hat{\underline{e}}_{\underline{2z}}$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{B}}_{1(n_1 x n_1)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=11} \hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{B}}_{2(n_1 x n_1)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=44} \hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{B}}_{3(n_1 x n_1)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=14} \hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{D}}_{1(n_1 x n_1)} &= \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=11} \hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{D}}_{2(n_1 x n_1)} &= \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=44} \hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{D}}_{3(n_1 x n_1)} &= \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=14} \hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{F}}_{1(n_2 x n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=2x}^T \underline{\underline{Z}}_{=11} \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{F}}_{2(n_2 x n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=2x}^T \underline{\underline{Z}}_{=44} \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{F}}_{3(n_2 x n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=2x}^T \underline{\underline{Z}}_{=14} \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{G}}_{1(n_1 x n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=11} \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{G}}_{2(n_1 x n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=44} \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{G}}_{3(n_1 x n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=14} \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right] dy dx \\
\underline{\underline{G}}_{4(n_1 x n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left[\hat{\mathbf{e}}_{=1x}^T \underline{\underline{Z}}_{=41} \hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right] dy dx
\end{aligned} \tag{A.54}$$

E ainda

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}_{(6 \times n_1)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left(\hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right) dy dx \\
\underline{\underline{H}}_{(6 \times n_1)} &= \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left(\hat{\mathbf{e}}_{=1x} \right) dy dx = \underline{\underline{0}} \\
\underline{\underline{L}}_{(6 \times n_2)} &= \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left(\hat{\mathbf{e}}_{=2x} \right) dy dx = \underline{\underline{0}}
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Reescrevendo-se (A.50), aplicando-se (A.54) e (A.55), tem-se (equação (A.56))

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle = & \frac{1}{4L^2} \left(A_f \left[\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\mathbf{E}} \right] + 2\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{1x} + 2\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\Lambda} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{1y} + 2\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\Gamma} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}_{1z} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{1x}^T \left\{ \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (1,1) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1x} + 2\underline{\mathbf{C}}_{1x}^T \left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g1} (1,2) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{3}}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{3}}}^T \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1y} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{1y}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{1}}} + 4\underline{\mathbf{c}}_{=g1} (2,2) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1y} + \underline{\mathbf{C}}_{1z}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (5,5) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g1} (6,6) \underline{\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1z} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{2x}^T \left\{ \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (1,1) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2x} + 2\underline{\mathbf{C}}_{2x}^T \left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g3} (1,2) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{3}}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{3}}}^T \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2y} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{2y}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{1}}} + 4\underline{\mathbf{c}}_{=g3} (2,2) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2y} + \underline{\mathbf{C}}_{2z}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (5,5) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (6,6) \underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2z} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{1x}^T \left\{ \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (1,1) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2x} + \underline{\mathbf{C}}_{1x}^T \left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g3} (1,2) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{3}}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{4}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2y} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{1y}^T \left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g3} (1,2) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{4}}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{3}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2x} + \underline{\mathbf{C}}_{1y}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{1}}} + 4\underline{\mathbf{c}}_{=g3} (2,2) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2y} \right) + \\
& + \frac{2}{4L^2} \underline{\mathbf{C}}_{1z}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (5,5) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g3} (6,6) \underline{\mathbf{G}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{2z} + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=m} \underline{\mathbf{E}} + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{1x}^T \left\{ \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (1,1) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1x} + 2\underline{\mathbf{C}}_{1x}^T \left\{ 2\underline{\mathbf{c}}_{=g2} (1,2) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{3}}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{3}}}^T \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1y} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{C}}_{1y}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{1}}} + 4\underline{\mathbf{c}}_{=g2} (2,2) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1y} + \underline{\mathbf{C}}_{1z}^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (5,5) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\mathbf{c}}_{=g2} (6,6) \underline{\mathbf{D}}_{\underline{\mathbf{2}}} \right\} \underline{\mathbf{C}}_{1z} \right)
\end{aligned}$$

A.3.2.1 Sistema de Equações (minimização)

O procedimento é o mesmo visto no item A.2.6.2.

Para se obter o valor mínimo da média do potencial elástico microscópico procede-se a derivação com relação aos coeficientes das séries, da seguinte forma

$$\frac{\partial \left(\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle \right)}{\partial \underline{\mathbf{C}}_{xyz}} = 0 \tag{A.57}$$

$$\text{onde } \underline{\mathbf{C}}_{xyz}^T = \left[\underline{\mathbf{C}}_{1x}^T \quad \underline{\mathbf{C}}_{1y}^T \quad \underline{\mathbf{C}}_{1z}^T \quad \underline{\mathbf{C}}_{2x}^T \quad \underline{\mathbf{C}}_{2y}^T \quad \underline{\mathbf{C}}_{2z}^T \right]$$

Agrupam-se como (A.58) as derivadas em relação a \underline{C}_{1x}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle \right)}{\partial \underline{C}_{1x}} &= \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\mathbf{A}} \right)^T + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ c_{=g1} (1,1) \underline{\mathbf{B}}_{=1} + c_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=2} \right\} \underline{C}_{1x} + \left\{ 2c_{=g1} (1,2) \underline{\mathbf{B}}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=3}^T \right\} \underline{C}_{1y} \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ c_{=g3} (1,1) \underline{\mathbf{G}}_{=1} + c_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{=2} \right\} \underline{C}_{2x} + \left\{ 2c_{=g3} (1,2) \underline{\mathbf{G}}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{=4} \right\} \underline{C}_{2y} \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ c_{=g2} (1,1) \underline{\mathbf{D}}_{=1} + c_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=2} \right\} \underline{C}_{1x} + \left\{ 2c_{=g2} (1,2) \underline{\mathbf{D}}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=3}^T \right\} \underline{C}_{1y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Em relação a \underline{C}_{1y}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle \right)}{\partial \underline{C}_{1y}} &= \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\Lambda} \underline{\mathbf{A}} \right)^T + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ 2c_{=g1} (1,2) \underline{\mathbf{B}}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=3}^T \right\} \underline{C}_{1x} + \left\{ \frac{1}{4} c_{=g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_{=1} + 4c_{=g1} (2,2) \underline{\mathbf{B}}_{=2} \right\} \underline{C}_{1y} \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ 2c_{=g3} (1,2) \underline{\mathbf{G}}_{=4} + \frac{1}{2} c_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{=3} \right\} \underline{C}_{2x} + \left\{ \frac{1}{4} c_{=g3} (4,4) \underline{\mathbf{G}}_{=1} + 4c_{=g3} (2,2) \underline{\mathbf{G}}_{=2} \right\} \underline{C}_{2y} \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ 2c_{=g2} (1,2) \underline{\mathbf{D}}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=3}^T \right\} \underline{C}_{1x} + \left\{ \frac{1}{4} c_{=g2} (4,4) \underline{\mathbf{D}}_{=1} + 4c_{=g2} (2,2) \underline{\mathbf{D}}_{=2} \right\} \underline{C}_{1y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Em relação a \underline{C}_{1z}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \rangle \right)}{\partial \underline{C}_{1z}} &= \frac{1}{2L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{\mathbf{c}}_{=g1} \underline{\Gamma} \underline{\mathbf{A}} \right)^T + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ \frac{1}{4} c_{=g1} (5,5) \underline{\mathbf{B}}_{=1} + c_{=g1} (6,6) \underline{\mathbf{B}}_{=2} \right\} \underline{C}_{1z} + \left\{ \frac{1}{4} c_{=g3} (5,5) \underline{\mathbf{G}}_{=1} + c_{=g3} (6,6) \underline{\mathbf{G}}_{=2} \right\} \underline{C}_{2z} \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} c_{=g2} (5,5) \underline{\mathbf{D}}_{=1} + c_{=g2} (6,6) \underline{\mathbf{D}}_{=2} \right\} \underline{C}_{1z} = 0 \end{aligned}$$

Em relação a \underline{C}_{2x}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\left\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \right\rangle \right)}{\partial \underline{C}_{2x}} &= \frac{2}{4L^2} \left\{ c_{=g^3} (1,1) \underline{F}_{=1} + c_{=g^3} (4,4) \underline{F}_{=2} \right\} \underline{C}_{2x} + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ 2c_{=g^3} (1,2) \underline{F}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g^3} (4,4) \underline{F}_{=3}^T \right\} \underline{C}_{2y} + \left\{ c_{=g^3} (1,1) \underline{G}_{=1} + c_{=g^3} (4,4) \underline{G}_{=2} \right\}^T \underline{C}_{1x} \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left\{ 2c_{=g^3} (1,2) \underline{G}_{=4} + \frac{1}{2} c_{=g^3} (4,4) \underline{G}_{=3} \right\}^T \underline{C}_{1y} = 0 \end{aligned}$$

Em relação a \underline{C}_{2y}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\left\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \right\rangle \right)}{\partial \underline{C}_{2y}} &= \frac{2}{4L^2} \left\{ 2c_{=g^3} (1,2) \underline{F}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g^3} (4,4) \underline{F}_{=3}^T \right\} \underline{C}_{2x} + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left(\left\{ \frac{1}{4} c_{=g^3} (4,4) \underline{F}_{=1} + 4c_{=g^3} (2,2) \underline{F}_{=2} \right\} \underline{C}_{2y} + \left\{ 2c_{=g^3} (1,2) \underline{G}_{=3} + \frac{1}{2} c_{=g^3} (4,4) \underline{G}_{=4} \right\}^T \underline{C}_{1x} \right) + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} c_{=g^3} (4,4) \underline{G}_{=1} + 4c_{=g^3} (2,2) \underline{G}_{=2} \right\}^T \underline{C}_{1y} = 0 \end{aligned}$$

E em relação a \underline{C}_{2z}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\left\langle \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{e}} \right\rangle \right)}{\partial \underline{C}_{2z}} &= \frac{2}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} c_{=g^3} (5,5) \underline{F}_{=1} + c_{=g^3} (6,6) \underline{F}_{=2} \right\} \underline{C}_{2z} + \\ &+ \frac{2}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} c_{=g^3} (5,5) \underline{G}_{=1} + c_{=g^3} (6,6) \underline{G}_{=2} \right\}^T \underline{C}_{1z} = 0 \end{aligned}$$

Reorganiza-se (A.58) e concatena-se as matrizes na forma de um sistema

$$\underline{\underline{K}} \underline{C}_{.xyz} = \underline{M} \tag{A.59}$$

onde $\underline{\underline{K}}$, $\underline{C}_{.xyz}$ e \underline{M} são dados por

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} & \underline{\underline{K}}_{13} & \underline{\underline{K}}_{14} & \underline{\underline{K}}_{15} & \underline{\underline{K}}_{16} \\ \underline{\underline{K}}_{21} & \underline{\underline{K}}_{22} & \underline{\underline{K}}_{23} & \underline{\underline{K}}_{24} & \underline{\underline{K}}_{25} & \underline{\underline{K}}_{26} \\ \underline{\underline{K}}_{31} & \underline{\underline{K}}_{32} & \underline{\underline{K}}_{33} & \underline{\underline{K}}_{34} & \underline{\underline{K}}_{35} & \underline{\underline{K}}_{36} \\ \underline{\underline{K}}_{41} & \underline{\underline{K}}_{42} & \underline{\underline{K}}_{43} & \underline{\underline{K}}_{44} & \underline{\underline{K}}_{45} & \underline{\underline{K}}_{46} \\ \underline{\underline{K}}_{51} & \underline{\underline{K}}_{52} & \underline{\underline{K}}_{53} & \underline{\underline{K}}_{54} & \underline{\underline{K}}_{55} & \underline{\underline{K}}_{56} \\ \underline{\underline{K}}_{61} & \underline{\underline{K}}_{62} & \underline{\underline{K}}_{63} & \underline{\underline{K}}_{64} & \underline{\underline{K}}_{65} & \underline{\underline{K}}_{66} \end{bmatrix}_{(3(n_1+n_2) \times 3(n_1+n_2))}$$

$$\underline{\underline{C}}_{xyz} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_{1x} \\ \underline{\underline{C}}_{1y} \\ \underline{\underline{C}}_{1z} \\ \underline{\underline{C}}_{2x} \\ \underline{\underline{C}}_{2y} \\ \underline{\underline{C}}_{2z} \end{bmatrix}_{(3(n_1+n_2) \times 1)}$$

$$\underline{\underline{M}} = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \\ \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{\Lambda}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \\ \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{\Gamma}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}_{(3(n_1+n_2) \times 6)} \quad \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)} \quad (\text{A.60})$$

E $\underline{\underline{K}}$ é composta por

$$\underline{\underline{K}}_{11} = \underline{\underline{c}}_{g1} (1,1) \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_2 + \underline{\underline{c}}_{g2} (1,1) \underline{\underline{D}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{12} = 2\underline{\underline{c}}_{g1} (1,2) \underline{\underline{B}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_3^T + 2\underline{\underline{c}}_{g2} (1,2) \underline{\underline{D}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_3^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{13} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{14} = \underline{\underline{c}}_{g3} (1,1) \underline{\underline{G}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{G}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{15} = 2\underline{\underline{c}}_{g3} (1,2) \underline{\underline{G}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{G}}_4$$

$$\underline{\underline{K}}_{16} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{21} = \underline{\underline{K}}_{12}^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{22} = \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_1 + 4\underline{\underline{c}}_{g1} (2,2) \underline{\underline{B}}_2 + \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_1 + 4\underline{\underline{c}}_{g2} (2,2) \underline{\underline{D}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{23} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{24} = 2\underline{\underline{c}}_{g3} (1,2) \underline{\underline{G}}_4 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{G}}_3$$

$$\underline{\underline{K}}_{25} = \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{G}}_1 + 4\underline{\underline{c}}_{g3} (2,2) \underline{\underline{G}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{26} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{31} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{32} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{33} = \frac{1}{4}c_{g1} (5,5)\underline{\underline{B}}_1 + c_{g1} (6,6)\underline{\underline{B}}_2 + \frac{1}{4}c_{g2} (5,5)\underline{\underline{D}}_1 + c_{g2} (6,6)\underline{\underline{D}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{34} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{35} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{36} = \frac{1}{4}c_{g3} (5,5)\underline{\underline{G}}_1 + c_{g3} (6,6)\underline{\underline{G}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{41} = \underline{\underline{K}}_{14}^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{42} = \underline{\underline{K}}_{24}^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{43} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{44} = c_{g3} (1,1)\underline{\underline{F}}_1 + c_{g3} (4,4)\underline{\underline{F}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{45} = 2c_{g3} (1,2)\underline{\underline{F}}_3 + \frac{1}{2}c_{g3} (4,4)\underline{\underline{F}}_3^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{46} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{51} = \underline{\underline{K}}_{15}^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{52} = \underline{\underline{K}}_{25}^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{53} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{54} = \underline{\underline{K}}_{45}^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{55} = \frac{1}{4}c_{g3} (4,4)\underline{\underline{F}}_1 + 4c_{g3} (2,2)\underline{\underline{F}}_2$$

$$\underline{\underline{K}}_{56} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{61} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{62} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{63} = \underline{\underline{K}}_{36}^T$$

$$\underline{\underline{K}}_{64} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{65} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{K}}_{66} = \frac{1}{4}c_{g3} (5,5)\underline{\underline{F}}_1 + c_{g3} (6,6)\underline{\underline{F}}_2$$

Resolvendo-se (A.59), ficam determinadas as constantes das expansões, bem como as expressões para os deslocamentos periódicos para uma dada deformação macroscópica $\underline{\underline{E}}$.

Observa-se que

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{C}}_{1x}(n_1 \times 1) &= \underline{\underline{C}}_{=1x}(n_1 \times 6) \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)} \\
\underline{\underline{C}}_{1y}(n_1 \times 1) &= \underline{\underline{C}}_{=1y}(n_1 \times 6) \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)} \\
\underline{\underline{C}}_{1z}(n_1 \times 1) &= \underline{\underline{C}}_{=1z}(n_1 \times 6) \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)} \\
\underline{\underline{C}}_{2x}(n_2 \times 1) &= \underline{\underline{C}}_{=2x}(n_2 \times 6) \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)} \\
\underline{\underline{C}}_{2y}(n_2 \times 1) &= \underline{\underline{C}}_{=2y}(n_2 \times 6) \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)} \\
\underline{\underline{C}}_{2z}(n_2 \times 1) &= \underline{\underline{C}}_{=2z}(n_2 \times 6) \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)}
\end{aligned} \tag{A.61}$$

A.3.2.2 Determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$

Para a determinação da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$, recorre-se a equação (A.9) e sendo um caso elástico, tem-se

$$\langle \underline{\underline{s}} \rangle = \langle \underline{\underline{c}} \underline{\underline{e}} \rangle = \langle \underline{\underline{c}} (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{e}}_p) \rangle = \langle \underline{\underline{c}} \underline{\underline{E}} \rangle + \langle \underline{\underline{c}} \underline{\underline{e}}_p \rangle \tag{A.62}$$

Desenvolvem-se as parcelas de (A.62) como

$$\langle \underline{\underline{c}} \underline{\underline{E}} \rangle = \frac{1}{V} \left[V_f \underline{\underline{c}}_f + V_m \underline{\underline{c}}_m \right] = \frac{1}{4L^2} \left[A_f \underline{\underline{c}}_f + (4L^2 - A_f) \underline{\underline{c}}_m \right] \underline{\underline{E}} \tag{A.63}$$

onde $V = V_f + V_m$: volume da célula
 V_f : volume de fibra
 V_m : volume de matriz
 A_f : área de fibra

$$\begin{aligned}
\langle \underline{\underline{c}} \underline{\underline{e}}_p \rangle &= \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_f \left(\int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\underline{e}}_{p1} + \underline{\underline{e}}_{p2}) dy dx \right) + \underline{\underline{c}}_m \left(\int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\underline{e}}_{p1}) dy dx - \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\underline{e}}_{p1}) dy dx \right) \right] \\
&= \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{=g1} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{=1x} + \Lambda \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{=1y} + \Gamma \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{=1z} \right) + \underline{\underline{c}}_f \left(\underline{\underline{L}} \underline{\underline{C}}_{=2x} + \Lambda \underline{\underline{L}} \underline{\underline{C}}_{=2y} + \Gamma \underline{\underline{L}} \underline{\underline{C}}_{=2z} \right) \right] \underline{\underline{E}} + \\
&+ \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_m \left(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{C}}_{=1x} + \Lambda \underline{\underline{H}} \underline{\underline{C}}_{=1y} + \Gamma \underline{\underline{H}} \underline{\underline{C}}_{=1z} \right) \right] \underline{\underline{E}} \\
&= \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{=g1} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{=1x} + \Lambda \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{=1y} + \Gamma \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{=1z} \right) \right] \underline{\underline{E}}
\end{aligned} \tag{A.64}$$

onde $\underline{c}_{g1} = \underline{c}_f - \underline{c}_m$

Finalmente, utilizando-se (A.63) e (A.64) para se resolver (A.62), determina-se, partindo-se de (A.9) que

$$\begin{aligned} \underline{C}_{(6 \times 6)}^{\text{hom}} = & \frac{2L}{8L^3} \left[\underline{A}_f \underline{c}_f + (4L^2 - \underline{A}_f) \underline{c}_m \right] + \\ & + \frac{1}{8L^3} \left[(\underline{c}_f - \underline{c}_m) \left(\underline{A}_{1x} \underline{C} + \underline{\Lambda} \underline{A}_{1y} \underline{C} + \underline{\Gamma} \underline{A}_{1z} \underline{C} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

**Apêndice B – Detalhes computacionais da aplicação
da teoria da homogeneização em uma célula elementar cúbica
com fibra prismática quadrada ou cilíndrica – Viscoelasticidade**

APÊNDICE B - DETALHES COMPUTACIONAIS DA APLICAÇÃO DA TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO EM UMA CÉLULA ELEMENTAR CÚBICA COM FIBRA PRISMÁTICA QUADRADA OU CILÍNDRICA – VISCOELASTICIDADE

Após o desenvolvimento mostrado apêndice A para elasticidade, aplicam-se os fundamentos demonstrados nos capítulos 5 e 6 para viscoelasticidade.

B.1 HOMOGENEIZAÇÃO EM VISCOELASTICIDADE (SOFTENING)

B.1.1 Caracterização dos materiais

Os materiais da fibra e da matriz são considerados, por simplicidade, isotrópicos. Sejam para o caso de envelhecimento as matrizes $\underline{c}(t, \mathbf{t})$ ($\underline{c}_m(t, \mathbf{t})$ ou $\underline{c}_f(t, \mathbf{t})$)

$$\underline{c}(t, \mathbf{t}) = \frac{E}{(1+n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1-n & n & n & 0 & 0 & 0 \\ n & 1-n & n & 0 & 0 & 0 \\ n & n & 1-n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2n \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde E : módulo de elasticidade ($E_m(t, \mathbf{t})$ ou $E_f(t, \mathbf{t})$)
 n : coeficiente de Poisson ($n_m(t, \mathbf{t})$ ou $n_f(t, \mathbf{t})$)

De modo que a resposta elástica instantânea $\underline{c}(t)$ ($\underline{c}_f(t)$ ou $\underline{c}_m(t)$) pode ser escrita

$$\underline{\underline{c}}(t) = \frac{E(t)}{(1+\mathbf{n}(t))(1-2\mathbf{n}(t))} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}(t) & 1-\mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & 1-\mathbf{n}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

onde $E(t)$: módulo de elasticidade instantâneo ($E_m(t,t)$ ou $E_f(t,t)$)
 $\mathbf{n}(t)$: coeficiente de Poisson instantâneo ($\mathbf{n}_m(t,t)$ ou $\mathbf{n}_f(t,t)$)

B.1.2 Representação de $\underline{\underline{e}}^v$ em variáveis de estado

Conforme o item 5.3.2, $\underline{\underline{e}}^v$ ($\underline{\underline{e}}_m^v$ ou $\underline{\underline{e}}_f^v$) pode ser representada de forma incremental através de um somatório das variáveis de estado

$$\underline{\underline{e}}^{v,t} = \underline{\underline{e}}^v(t) = \sum_{i=1}^k \underline{\underline{q}}_i^t = \sum_{i=1}^k \underline{\underline{q}}_i(t) \quad (\text{B.3})$$

Obs.: para facilitar a visualização, a notação de tempo terá seu tamanho reduzido.

E que são definidas como

$$\underline{\underline{q}}_i^t = e^{-\frac{\Delta t}{q_i}} \underline{\underline{q}}_i^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_i}}\right) \underline{\underline{Q}}_i^t \underline{\underline{s}}^t \quad (\text{B.4})$$

onde

i: é o i-ésimo elemento Kelvin da cadeia

$$\underline{\underline{Q}}_i^t = \begin{pmatrix} 1/E_i^{q1,t} & 1/E_i^{q2,t} & 1/E_i^{q2,t} & 0 & 0 & 0 \\ 1/E_i^{q2,t} & 1/E_i^{q1,t} & 1/E_i^{q2,t} & 0 & 0 & 0 \\ 1/E_i^{q2,t} & 1/E_i^{q2,t} & 1/E_i^{q1,t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/E_i^{q3,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_i^{q3,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/E_i^{q3,t} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{h}_i(t)}{E_i(t)}$: é o tempo de retardação de cada elemento Kelvin

$E_i^{q1,t}$: é o módulo de elasticidade da mola associada a cada elemento Kelvin

$$E_i^{q2,t} = -\frac{E_i^{q1,t}}{\mathbf{n}^t}$$

$$E_i^{q3,t} = \frac{E_i^{q1,t}}{(1+\mathbf{n}^t)}$$

$$\underline{\mathbf{s}}^t = \underline{\mathbf{c}}^t (\underline{\mathbf{e}}^t - \underline{\mathbf{e}}^{v,t-\Delta t})$$

Obs.: para cada material existem parâmetros correspondentes para o cálculo, seja de $\underline{\mathbf{e}}_m^v$ ou $\underline{\mathbf{e}}_f^v$.

B.1.3 Cálculo de $\underline{\mathbf{e}}^v$

A deformação viscosa $\underline{\mathbf{e}}^v$ ($\underline{\mathbf{e}}_m^v$ e $\underline{\mathbf{e}}_f^v$) divide-se de forma análoga à $\underline{\mathbf{e}}$, de modo a ser escrita como

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_m^v &= \underline{\mathbf{E}}_m^v + \underline{\mathbf{e}}_{mp}^v \\ \underline{\mathbf{e}}_f^v &= \underline{\mathbf{E}}_f^v + \underline{\mathbf{e}}_{fp}^v \end{aligned} \tag{B.5}$$

Tem-se para a parte periódica de (B.5)

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_{mp}^v &= \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{C}}_{mx}^v + \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{\underline{\mathbf{y}}} \underline{\mathbf{C}}_{my}^v + \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{\underline{\mathbf{z}}} \underline{\mathbf{C}}_{mz}^v \\ \underline{\mathbf{e}}_{fp}^v &= \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{C}}_{fx}^v + \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{\underline{\mathbf{y}}} \underline{\mathbf{C}}_{fy}^v + \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{\underline{\mathbf{z}}} \underline{\mathbf{C}}_{fz}^v \end{aligned} \tag{B.6}$$

Sabendo-se que

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_{mi}^t \underline{\underline{\mathbf{c}}}_{=m}^t &= \frac{E_m^t}{E_{mi}^{q1,t}} \mathbf{I}_{(6 \times 6)} \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_{fi}^t \underline{\underline{\mathbf{c}}}_{=f}^t &= \frac{E_f^t}{E_{fi}^{q1,t}} \mathbf{I}_{(6 \times 6)} \end{aligned} \tag{B.7}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade

Aplica-se (B.3) e (B.4) sobre (B.5) e (B.6), e organiza-se adequadamente, de modo que para a parte macroscópica de $\underline{\mathbf{e}}_m^v$ obtém-se

$$\underline{\mathbf{E}}_m^{v,t} = \sum_{i=1}^k \underline{\mathbf{q}}_{mEi}^{o,t} = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \underline{\mathbf{q}}_{mEi}^{o,t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \frac{\mathbf{E}_m^t}{E_{mi}^{q^{1,t}}} (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}}_m^{v,t-\Delta t}) \right) \quad (\text{B.8})$$

Observando-se que $\underline{\mathbf{E}}_m^{v,t}$ pode ser escrita como $T_m^t \underline{\mathbf{E}}$, determina-se T_m^t , simplificando-se $\underline{\mathbf{E}}$ em ambos lados da igualdade, o que resulta

$$T_m^t = \sum_{i=1}^k \underline{\mathbf{q}}_{mEi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \underline{\mathbf{q}}_{mEi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \frac{\mathbf{E}_m^t}{E_{mi}^{q^{1,t}}} (1 - T_m^{t-\Delta t}) \right) \quad (\text{B.9})$$

Em analogia para $\underline{\mathbf{E}}_f^{v,t}$, T_f^t se calcula como

$$T_f^t = \sum_{i=1}^k \underline{\mathbf{q}}_{fEi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \underline{\mathbf{q}}_{fEi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \right) \frac{\mathbf{E}_f^t}{E_{fi}^{q^{1,t}}} (1 - T_f^{t-\Delta t}) \right) \quad (\text{B.10})$$

Para a parte periódica, tem-se inicialmente, por exemplo, para $\underline{\mathbf{e}}_{mx}^{v,t}$

$$\underline{\mathbf{e}}_{mx}^{v,t} = \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x \underline{\mathbf{C}}_{mx}^{v,t} = \sum_{i=1}^k \underline{\mathbf{q}}_{mxi}^{o,t} = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \underline{\mathbf{q}}_{mxi}^{o,t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \frac{\mathbf{E}_m^t}{E_{mi}^{q^{1,t}}} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_x (\underline{\mathbf{C}}_x^t - \underline{\mathbf{C}}_{mx}^{v,t-\Delta t}) \right) \quad (\text{B.11})$$

Considerando-se que $\underline{\mathbf{q}}_{mxi}^{o,t-\Delta t}$ é função de $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_x$, é possível simplificar-se esse termo em ambos os lados da equação. Portanto, de (B.11) escreve-se que

$$\underline{\mathbf{C}}_{mx}^{v,t} = \sum_{i=1}^k \underline{\mathbf{q}}_{mxi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \underline{\mathbf{q}}_{mxi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \frac{\mathbf{E}_m^t}{E_{mi}^{q^{1,t}}} (\underline{\mathbf{C}}_x^t - \underline{\mathbf{C}}_{mx}^{v,t-\Delta t}) \right) \quad (\text{B.12})$$

Em analogia a (B.11) e (B.12), para as demais componentes de $\underline{\mathbf{e}}^v$ calcula-se (equações (B.13))

$$\underline{\mathbf{C}}_{my}^{v,t} = \sum_{i=1}^k \underline{\mathbf{q}}_{myi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \underline{\mathbf{q}}_{myi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \frac{\mathbf{E}_m^t}{E_{mi}^{q^{1,t}}} (\underline{\mathbf{C}}_y^t - \underline{\mathbf{C}}_{my}^{v,t-\Delta t}) \right)$$

$$\begin{aligned}
\underline{C}_{mz}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{mzi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \underline{q}_{mzi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \frac{E_m^t}{E_{mi}^{q1,t}} (\underline{C}_z^t - \underline{C}_{mz}^{v,t-\Delta t}) \right) \\
\underline{C}_{fx}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{fxi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \underline{q}_{fxi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \right) \frac{E_f^t}{E_{fi}^{q1,t}} (\underline{C}_x^t - \underline{C}_{fx}^{v,t-\Delta t}) \right) \\
\underline{C}_{fy}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{fyi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \underline{q}_{fyi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \right) \frac{E_f^t}{E_{fi}^{q1,t}} (\underline{C}_y^t - \underline{C}_{fy}^{v,t-\Delta t}) \right) \\
\underline{C}_{fz}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{fzi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \underline{q}_{fzi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \right) \frac{E_f^t}{E_{fi}^{q1,t}} (\underline{C}_z^t - \underline{C}_{fz}^{v,t-\Delta t}) \right)
\end{aligned}$$

B.1.4 Expressão para potencial elástico

Conforme (5.21), a expressão a ser minimizada para o caso viscoelástico é (considerando-se o cálculo incremental no tempo)

$$\begin{aligned}
\Psi^{t+\Delta t}(\underline{e}^{t+\Delta t}) &= \frac{1}{2} (\underline{e}^{t+\Delta t} - \underline{e}^{v,t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} (\underline{e}^{t+\Delta t} - \underline{e}^{v,t}) \\
&= \frac{1}{2} (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t} - (\underline{e}^{v,t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

onde $\underline{c}^{t+\Delta t} = \underline{c}(t + \Delta t, t + \Delta t)$

As integrais para a resolução de (B.14) já foram definidas em (A.31) e (A.32). As únicas diferenças estão no fato de $\underline{c}(t, t)$ ter um valor diferente para cada passo de tempo e \underline{e}^v ser conhecida considerando-se o processo incremental. Desse modo, (B.14) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{2} (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t} - (\underline{e}^{v,t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t} \right\rangle &= \frac{1}{8L^2} \mathbf{A}_f \left[\underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g1} \underline{\mathbf{E}} \right] + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g2} \underline{\mathbf{E}} + \\
&+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g1} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}^{t+\Delta t} + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g1} \underline{\Lambda} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}^{t+\Delta t} + \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g1} \underline{\Gamma} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{C}}^{t+\Delta t} \right) + \\
&+ \frac{1}{8L^2} (\underline{C}_x^{t+\Delta t})^T \left\{ \underline{c}_{g1} (1,1) \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{c}_{g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_2 \right\} \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \\
&+ \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_x^{t+\Delta t})^T \left\{ 2 \underline{c}_{g1} (1,2) \underline{\mathbf{B}}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{g1} (4,4) \underline{\mathbf{B}}_3^T \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8L^2} (\underline{C}_y^{t+\Delta t})^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g1} (4,4) \underline{B}_1 + 4 \underline{c}_{=g1} (2,2) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{8L^2} \underline{C}_z^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g1} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g1} (6,6) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_z^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{8L^2} (\underline{C}_x^{t+\Delta t})^T \left\{ \underline{c}_{=g2} (1,1) \underline{D}_1 + \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_2 \right\} \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_x^{t+\Delta t})^T \left\{ 2 \underline{c}_{=g2} (1,2) \underline{D}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_3^T \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{8L^2} (\underline{C}_y^{t+\Delta t})^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_1 + 4 \underline{c}_{=g2} (2,2) \underline{D}_2 \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{8L^2} (\underline{C}_z^{t+\Delta t})^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (5,5) \underline{D}_1 + \underline{c}_{=g2} (6,6) \underline{D}_2 \right\} \underline{C}_z^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (4L^2 - \mathbf{A}_f) T_m^t \left[\underline{E}^T \underline{c}_{=g2} \underline{E} \right] - \mathbf{A}_f T_f^t \underline{E}^T \underline{c}_{=g3} \underline{E} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g3} \underline{AC}_{=fx}^{v,t} + \underline{E}^T \underline{c}_{=g3} \underline{\Lambda AC}_{=fy}^{v,t} + \underline{E}^T \underline{c}_{=g3} \underline{\Gamma AC}_{=fz}^{v,t} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g2} \underline{AC}_{=mx}^{v,t} + \underline{E}^T \underline{c}_{=g2} \underline{\Lambda AC}_{=my}^{v,t} + \underline{E}^T \underline{c}_{=g2} \underline{\Gamma AC}_{=mz}^{v,t} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{AC}_{=x}^{t+\Delta t} + \underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{\Lambda AC}_{=y}^{t+\Delta t} + \underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{\Gamma AC}_{=z}^{t+\Delta t} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=fx}^{v,t})^T \left\{ \underline{c}_{=g3} (1,1) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=fy}^{v,t})^T \left\{ 2 \underline{c}_{=g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=fy}^{v,t})^T \left\{ 2 \underline{c}_{=g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\}^T \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=fy}^{v,t})^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_1 + 4 \underline{c}_{=g3} (2,2) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=fz}^{v,t})^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g3} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g3} (6,6) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_z^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=mx}^{v,t})^T \left\{ \underline{c}_{=g2} (1,1) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\} \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=mx}^{v,t})^T \left\{ 2 \underline{c}_{=g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=my}^{v,t})^T \left\{ 2 \underline{c}_{=g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\}^T \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=my}^{v,t})^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + 4 \underline{c}_{=g2} (2,2) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (\underline{C}_{=mz}^{v,t})^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (5,5) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{=g2} (6,6) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\} \underline{C}_z^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

onde $\underline{c}_{=g1} = \underline{c}_{=f}^{t+\Delta t} - \underline{c}_{=m}^{t+\Delta t}$, $\underline{c}_{=g2} = \underline{c}_{=m}^{t+\Delta t}$, $\underline{c}_{=g3} = \underline{c}_{=f}^{t+\Delta t}$ e $\underline{c}_{=g4} = T_f^t \underline{c}_{=f}^{t+\Delta t} - T_m^t \underline{c}_{=m}^{t+\Delta t}$

B.1.5 Sistema de Equações (minimização)

De maneira similar ao caso elástico, para cada passo de tempo, deve ocorrer o processo de minimização. Para se obter o valor mínimo da média do potencial elástico microscópico, procede-se a derivação com relação aos coeficientes das séries, da seguinte forma

$$\frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t} - (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{C}_{xyz}^{t+\Delta t}} = 0 \quad (\text{B.15})$$

onde

$$\left(\underline{C}_{xyz}^{t+\Delta t} \right)^T = \left[\left(\underline{C}_x^{t+\Delta t} \right)^T \quad \left(\underline{C}_y^{t+\Delta t} \right)^T \quad \left(\underline{C}_z^{t+\Delta t} \right)^T \right] = \left[c_{x1}^{t+\Delta t} \quad c_{x2}^{t+\Delta t} \quad \dots \quad c_{y1}^{t+\Delta t} \quad c_{y2}^{t+\Delta t} \quad \dots \quad c_{z1}^{t+\Delta t} \quad c_{z2}^{t+\Delta t} \quad \dots \right]$$

Conforme já descrito em (A.39)

$$\begin{aligned} \underline{C}_x^{v,t+\Delta t} &= \underline{C}_x^{v,t+\Delta t} \underline{E} \\ \underline{C}_y^{v,t+\Delta t} &= \underline{C}_y^{v,t+\Delta t} \underline{E} \\ \underline{C}_z^{v,t+\Delta t} &= \underline{C}_z^{v,t+\Delta t} \underline{E} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Agrupam-se como (B.17) as derivadas em relação a $\underline{C}_x^{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t} - (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{C}_x^{t+\Delta t}} = \\ & = \frac{1}{4L^2} \left(\left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g1} \underline{A} \right)^T - \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{A} \right)^T \right) + \\ & + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \underline{c}_{=g1} (1,1) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g1} (4,4) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \left\{ 2\underline{c}_{=g1} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g1} (4,4) \underline{B}_3^T \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \underline{c}_{=g2} (1,1) \underline{D}_1 + \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_2 \right\} \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \left\{ 2\underline{c}_{=g2} (1,2) \underline{D}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_3^T \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \underline{c}_{=g3} (1,1) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_2 \right\}^T \underline{C}_{fx}^{v,t} \underline{E} + \left\{ 2\underline{c}_{=g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\} \underline{C}_{fy}^{v,t} \underline{E} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ \underline{c}_{=g2} (1,1) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \underline{C}_{mx}^{v,t} \underline{E} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ 2\underline{c}_{=g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\} \underline{C}_{my}^{v,t} \underline{E} = 0
\end{aligned}$$

Em relação a $\underline{C}_y^{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t} - (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{C}_y^{t+\Delta t}} = \\
& = \frac{1}{4L^2} \left(\left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g1} \underline{\Lambda A} \right)^T - \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{\Lambda A} \right)^T \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{c}_{=g1} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g1} (4,4) \underline{B}_3^T \right\}^T \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g1} (4,4) \underline{B}_1 + 4\underline{c}_{=g1} (2,2) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{c}_{=g2} (1,2) \underline{D}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_3^T \right\}^T \underline{C}_x^{t+\Delta t} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_1 + 4\underline{c}_{=g2} (2,2) \underline{D}_2 \right\} \underline{C}_y^{t+\Delta t} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{c}_{=g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\}^T \underline{C}_{fx}^{v,t} \underline{E} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_1 + 4\underline{c}_{=g3} (2,2) \underline{B}_2 \right\}^T \underline{C}_{fy}^{v,t} \underline{E} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ 2\underline{c}_{=g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\}^T \underline{C}_{mx}^{v,t} \underline{E} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + 4\underline{c}_{=g2} (2,2) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \underline{C}_{my}^{v,t} \underline{E} = 0
\end{aligned}$$

E em relação a $\underline{C}_z^{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{t+\Delta t} - (\underline{e}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{e}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{C}_z^{t+\Delta t}} = \\
& = \frac{1}{4L^2} \left(\left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g1} \underline{\Gamma A} \right)^T - \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{\Gamma A} \right)^T \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g1} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g1} (6,6) \underline{B}_2 \right\} \underline{C}_z^{t+\Delta t} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (5,5) \underline{D}_1 + \underline{c}_{=g2} (6,6) \underline{D}_2 \right\} \underline{C}_z^{t+\Delta t} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g3} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g3} (6,6) \underline{B}_2 \right\}^T \underline{C}_{fz}^{v,t} \underline{E}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} c_{=g2} (5,5) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + c_{=g2} (6,6) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \underline{C}_{=mz}^{v,t} \underline{E} = 0$$

Reorganiza-se (B.17) e concatena-se as matrizes na forma de um sistema

$$\underline{K}^{t+\Delta t} \underline{C}_{=xyz}^{t+\Delta t} = \underline{M}^{t+\Delta t} \quad (\text{B.18})$$

onde $\underline{K}^{t+\Delta t}$, $\underline{C}_{=xyz}^{t+\Delta t}$ e $\underline{M}^{t+\Delta t}$ são dados por

$$\underline{K}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{=11}^{t+\Delta t} & \underline{K}_{=12}^{t+\Delta t} & \underline{K}_{=13}^{t+\Delta t} \\ \underline{K}_{=21}^{t+\Delta t} & \underline{K}_{=22}^{t+\Delta t} & \underline{K}_{=23}^{t+\Delta t} \\ \underline{K}_{=31}^{t+\Delta t} & \underline{K}_{=32}^{t+\Delta t} & \underline{K}_{=33}^{t+\Delta t} \end{bmatrix}_{(3n \times 3n)} \quad \underline{C}_{=xyz}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{=x}^{t+\Delta t} \\ \underline{C}_{=y}^{t+\Delta t} \\ \underline{C}_{=z}^{t+\Delta t} \end{bmatrix}_{(3n \times 1)} \quad (\text{B.19})$$

$$\underline{M}^{t+\Delta t} = - \begin{bmatrix} \underline{M}_{=1}^{t+\Delta t} \\ \underline{M}_{=2}^{t+\Delta t} \\ \underline{M}_{=3}^{t+\Delta t} \end{bmatrix}_{(3n \times 6)} \quad \underline{E}_{(6 \times 1)}$$

$\underline{K}^{t+\Delta t}$ é composta por

$$\begin{aligned} \underline{K}_{=11}^{t+\Delta t} &= c_{=g1} (1,1) \underline{B}_1 + c_{=g1} (4,4) \underline{B}_2 + c_{=g2} (1,1) \underline{D}_1 + c_{=g2} (4,4) \underline{D}_2 \\ \underline{K}_{=12}^{t+\Delta t} &= 2c_{=g1} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} c_{=g1} (4,4) \underline{B}_3^T + 2c_{=g2} (1,2) \underline{D}_3 + \frac{1}{2} c_{=g2} (4,4) \underline{D}_3^T \\ \underline{K}_{=13}^{t+\Delta t} &= \underline{0} \\ \underline{K}_{=21}^{t+\Delta t} &= \left(\underline{K}_{=12}^{t+\Delta t} \right)^T \\ \underline{K}_{=22}^{t+\Delta t} &= \frac{1}{4} c_{=g1} (4,4) \underline{B}_1 + 4c_{=g1} (2,2) \underline{B}_2 + \frac{1}{4} c_{=g2} (4,4) \underline{D}_1 + 4c_{=g2} (2,2) \underline{D}_2 \\ \underline{K}_{=23}^{t+\Delta t} &= \underline{0} \\ \underline{K}_{=31}^{t+\Delta t} &= \underline{0} \\ \underline{K}_{=32}^{t+\Delta t} &= \underline{0} \\ \underline{K}_{=33}^{t+\Delta t} &= \frac{1}{4} c_{=g1} (5,5) \underline{B}_1 + c_{=g1} (6,6) \underline{B}_2 + \frac{1}{4} c_{=g2} (5,5) \underline{D}_1 + c_{=g2} (6,6) \underline{D}_2 \end{aligned}$$

$\underline{M}^{t+\Delta t}$ é composta por

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{M}}_1^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{A}}^T \left(\underline{\underline{c}}_{g1} - \underline{\underline{c}}_{g4} \right) - \left\{ \underline{\underline{c}}_{g3} (1,1) \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{B}}_2 \right\}^T \underline{\underline{C}}_{fx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ 2\underline{\underline{c}}_{g3} (1,2) \underline{\underline{B}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{B}}_3^T \right\} \underline{\underline{C}}_{fy}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \underline{\underline{c}}_{g2} (1,1) (\underline{\underline{D}}_1 - \underline{\underline{B}}_1) + \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) (\underline{\underline{D}}_2 - \underline{\underline{B}}_2) \right\}^T \underline{\underline{C}}_{mx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ 2\underline{\underline{c}}_{g2} (1,2) (\underline{\underline{D}}_3 - \underline{\underline{B}}_3) + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) (\underline{\underline{D}}_3^T - \underline{\underline{B}}_3^T) \right\} \underline{\underline{C}}_{my}^{v,t} \\
\underline{\underline{M}}_2^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{\Lambda}}^T \left(\underline{\underline{c}}_{g1} - \underline{\underline{c}}_{g4} \right) - \left\{ 2\underline{\underline{c}}_{g3} (1,2) \underline{\underline{B}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{B}}_3^T \right\}^T \underline{\underline{C}}_{fx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g3} (4,4) \underline{\underline{B}}_1 + 4\underline{\underline{c}}_{g3} (2,2) \underline{\underline{B}}_2 \right\}^T \underline{\underline{C}}_{fy}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ 2\underline{\underline{c}}_{g2} (1,2) (\underline{\underline{D}}_3 - \underline{\underline{B}}_3) + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) (\underline{\underline{D}}_3^T - \underline{\underline{B}}_3^T) \right\}^T \underline{\underline{C}}_{mx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) (\underline{\underline{D}}_1 - \underline{\underline{B}}_1) + 4\underline{\underline{c}}_{g2} (2,2) (\underline{\underline{D}}_2 - \underline{\underline{B}}_2) \right\}^T \underline{\underline{C}}_{my}^{v,t} \\
\underline{\underline{M}}_3^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{\Gamma}}^T \left(\underline{\underline{c}}_{g1} - \underline{\underline{c}}_{g4} \right) - \left\{ \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g3} (5,5) \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g3} (6,6) \underline{\underline{B}}_2 \right\}^T \underline{\underline{C}}_{fz}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g2} (5,5) (\underline{\underline{D}}_1 - \underline{\underline{B}}_1) + \underline{\underline{c}}_{g2} (6,6) (\underline{\underline{D}}_2 - \underline{\underline{B}}_2) \right\}^T \underline{\underline{C}}_{mz}^{v,t}
\end{aligned}$$

Resolvendo-se (B.18), ficam determinadas as constantes das expansões, bem como as expressões para os deslocamentos periódicos para uma dada deformação macroscópica $\underline{\underline{E}}$.

B.1.6 Determinação da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t}$

Para a determinação da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t}$, recorre-se a equação

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t} \underline{\underline{E}} \quad (\text{B.20})$$

onde

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{t+\Delta t} = \left\langle \underline{\underline{s}}^{t+\Delta t} \right\rangle = \left\langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{e}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{e}}^{v,t} \right) \right\rangle \quad (\text{B.21})$$

Prosseguindo-se no desenvolvimento de (B.21) tem-se que

$$\left\langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{e}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{e}}^{v,t} \right) \right\rangle = \left\langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (1 - T^t) \underline{\underline{E}} \right\rangle + \left\langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{e}}_p^{t+\Delta t} - \underline{\underline{e}}_p^{v,t} \right) \right\rangle \quad (\text{B.22})$$

De modo que o primeiro termo após a igualdade é escrito

$$\begin{aligned} \left\langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (1 - T^t) \underline{\underline{E}} \right\rangle &= \frac{1}{V} \left[V_f (1 - T_f^t) \underline{\underline{c}}_f^{t+\Delta t} + V_m (1 - T_m^t) \underline{\underline{c}}_m^{t+\Delta t} \right] \underline{\underline{E}} \\ &= \frac{1}{4L^2} \left[A_f (1 - T_f^t) \underline{\underline{c}}_f^{t+\Delta t} + (4L^2 - A_f) (1 - T_m^t) \underline{\underline{c}}_m^{t+\Delta t} \right] \underline{\underline{E}} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$V = V_f + V_m$: volume da célula

onde V_f : volume de fibra

V_m : volume de matriz

A_f : área de fibra

E o segundo

$$\begin{aligned} \left\langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{e}}_p^{t+\Delta t} - \underline{\underline{e}}_p^{v,t} \right) \right\rangle &= \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_f^{t+\Delta t} \left(\int_{-r}^r \int_{-r}^r \left(\underline{\underline{e}}_p^{t+\Delta t} \right) dy dx \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_m^{t+\Delta t} \left(\int_{-L}^L \int_{-L}^L \left(\underline{\underline{e}}_p^{t+\Delta t} \right) dy dx - \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left(\underline{\underline{e}}_p^{t+\Delta t} \right) dy dx \right) \right] + \\ &- \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_f^{t+\Delta t} \left(\int_{-r}^r \int_{-r}^r \left(\underline{\underline{e}}_p^{v,t} \right) dy dx \right) \right] + \\ &- \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_m^{t+\Delta t} \left(\int_{-L}^L \int_{-L}^L \left(\underline{\underline{e}}_p^{v,t} \right) dy dx - \int_{-r}^r \int_{-r}^r \left(\underline{\underline{e}}_p^{v,t} \right) dy dx \right) \right] \quad (\text{B.24}) \\ &= \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{g1} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_z^{t+\Delta t} \right) \right] \underline{\underline{E}} + \\ &- \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_f^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{fx}^{v,t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{fy}^{v,t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{fz}^{v,t} \right) \right] \underline{\underline{E}} + \\ &+ \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_m^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{mx}^{v,t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{my}^{v,t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{mz}^{v,t} \right) \right] \underline{\underline{E}} \end{aligned}$$

onde $\underline{\underline{c}}_{g1} = \underline{\underline{c}}_f^{t+\Delta t} - \underline{\underline{c}}_m^{t+\Delta t}$

Finalmente, utilizando-se (B.23) e (B.24) para se resolver (B.21), determina-se, partindo-se de (B.20) que

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{C}}_{(6 \times 6)}^{\text{hom},t+\Delta t} &= \frac{1}{4L^2} \left[\mathbf{A}_f (1 - \mathbf{T}_f^t) \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{f}}}^{t+\Delta t} + (4L^2 - \mathbf{A}_f) (1 - \mathbf{T}_m^t) \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{m}}}^{t+\Delta t} \right] + \\
&+ \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{g1}}} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{x}}}^{t+\Delta t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{y}}}^{t+\Delta t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{z}}}^{t+\Delta t} \right) \right] + \\
&- \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{f}}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{fx}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{fy}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{fz}}}^{v,t} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{m}}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{mx}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{my}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_{\underline{\underline{mz}}}^{v,t} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.25}$$

B.2 HOMOGENEIZAÇÃO EM VISCOELASTICIDADE (HARDENING)

B.2.1 Caracterização dos materiais

Os materiais da fibra e da matriz são considerados, por simplicidade, isotrópicos.

Sejam para o caso de envelhecimento as matrizes $\underline{\underline{c}}(t, \mathbf{t})$ ($\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{m}}}(t, \mathbf{t})$ ou $\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{f}}}(t, \mathbf{t})$)

$$\underline{\underline{c}}(t, \mathbf{t}) = \frac{E}{(1+\mathbf{n})(1-2\mathbf{n})} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n} & 1-\mathbf{n} & \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n} & \mathbf{n} & 1-\mathbf{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n} \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

onde E : módulo de elasticidade ($E_m(t, \mathbf{t})$ ou $E_f(t, \mathbf{t})$)
 \mathbf{n} : coeficiente de Poisson ($\mathbf{n}_m(t, \mathbf{t})$ ou $\mathbf{n}_f(t, \mathbf{t})$)

De modo que a resposta elástica instantânea $\underline{\underline{c}}(t)$ ($\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{f}}}(t)$ ou $\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{m}}}(t)$) pode ser escrita

$$\underline{\underline{c}}(t) = \frac{E(t)}{(1+\mathbf{n}(t))(1-2\mathbf{n}(t))} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}(t) & 1-\mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{n}(t) & \mathbf{n}(t) & 1-\mathbf{n}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mathbf{n}(t) \end{bmatrix} \tag{B.27}$$

onde $E(t)$: módulo de elasticidade instantâneo ($E_m(t,t)$ ou $E_f(t,t)$)
 $\mathbf{n}(t)$: coeficiente de Poisson instantâneo ($\mathbf{n}_m(t,t)$ ou $\mathbf{n}_f(t,t)$)

B.2.2 Representação de $\underline{\dot{\mathbf{e}}}^v$ em variáveis de estado

Conforme o item 5.4.2, $\underline{\dot{\mathbf{e}}}^v$ ($\underline{\dot{\mathbf{e}}}_m^v$ ou $\underline{\dot{\mathbf{e}}}_f^v$) pode ser representada na forma incremental através de um somatório das variáveis de estado

$$\underline{\dot{\mathbf{e}}}^{v,t} = \underline{\dot{\mathbf{e}}}^v(t) = \sum_{i=1}^k \underline{q}_i^t = \sum_{i=1}^k \underline{q}_i(t) \quad (\text{B.28})$$

Obs.: para facilitar a visualização, a notação de tempo terá seu tamanho reduzido.

E que são definidas como

$$\underline{q}_i^t = e^{-\frac{\Delta t}{q_i}} \underline{q}_i^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_i}}\right) \mathbf{q}_i \underline{Q}_i^t \underline{\dot{\mathbf{s}}}^t \quad (\text{B.29})$$

onde

i: é o i-ésimo elemento Kelvin da cadeia

$$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{h}_i(t)}{E_i(t) + \mathbf{h}_i(t)}$$

$$\underline{Q}_i^t = \begin{pmatrix} 1/\mathbf{h}_i^{q1,t} & 1/\mathbf{h}_i^{q2,t} & 1/\mathbf{h}_i^{q2,t} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\mathbf{h}_i^{q2,t} & 1/\mathbf{h}_i^{q1,t} & 1/\mathbf{h}_i^{q2,t} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\mathbf{h}_i^{q2,t} & 1/\mathbf{h}_i^{q2,t} & 1/\mathbf{h}_i^{q1,t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mathbf{h}_i^{q3,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mathbf{h}_i^{q3,t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mathbf{h}_i^{q3,t} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{h}_i^{q1,t}$: é o coeficiente de viscosidade do amortecedor associado a cada elemento Kelvin

$$\mathbf{h}_i^{q2,t} = -\frac{\mathbf{h}_i^{q1,t}}{\mathbf{n}^t}$$

$$\mathbf{h}_i^{q3,t} = \frac{\mathbf{h}_i^{q1,t}}{(1 + \mathbf{n}^t)}$$

$$\underline{\dot{\mathbf{s}}}^t = \underline{\dot{\mathbf{c}}}^t (\underline{\dot{\mathbf{e}}}^t - \underline{\dot{\mathbf{e}}}^{v,t-\Delta t})$$

Obs.: para cada material existem parâmetros correspondentes para o cálculo seja de $\underline{\dot{\mathbf{e}}}_m^v$ ou $\underline{\dot{\mathbf{e}}}_f^v$.

B.2.3 Cálculo de $\underline{\dot{\mathbf{e}}}$

A taxa de deformação viscosa $\underline{\dot{\mathbf{e}}}^v$ ($\underline{\dot{\mathbf{e}}}_m^v$ e $\underline{\dot{\mathbf{e}}}_f^v$) divide-se de forma análoga à $\underline{\mathbf{e}}$, de modo que é escrita como

$$\begin{aligned}\underline{\dot{\mathbf{e}}}_m^v &= \underline{\dot{\mathbf{E}}}_m^v + \underline{\dot{\mathbf{e}}}_{mp}^v \\ \underline{\dot{\mathbf{e}}}_f^v &= \underline{\dot{\mathbf{E}}}_f^v + \underline{\dot{\mathbf{e}}}_{fp}^v\end{aligned}\tag{B.30}$$

Tem-se para a parte periódica de (B.30)

$$\begin{aligned}\underline{\dot{\mathbf{e}}}_{mp}^v &= \underline{\hat{\mathbf{e}}}_{\underline{\underline{x}}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{\underline{\underline{m}x}}^v + \underline{\hat{\mathbf{e}}}_{\underline{\underline{y}}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{\underline{\underline{m}y}}^v + \underline{\hat{\mathbf{e}}}_{\underline{\underline{z}}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{\underline{\underline{m}z}}^v \\ \underline{\dot{\mathbf{e}}}_{fp}^v &= \underline{\hat{\mathbf{e}}}_{\underline{\underline{x}}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{\underline{\underline{f}x}}^v + \underline{\hat{\mathbf{e}}}_{\underline{\underline{y}}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{\underline{\underline{f}y}}^v + \underline{\hat{\mathbf{e}}}_{\underline{\underline{z}}} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{\underline{\underline{f}z}}^v\end{aligned}\tag{B.31}$$

Sabendo-se que

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{m}i}}^t \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{m}}}^t &= \frac{\underline{\underline{E}}_m^t}{\underline{\underline{h}}_{\underline{\underline{m}i}}^{q1,t}} \underline{\underline{I}}_{(6 \times 6)} \\ \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{f}i}}^t \underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{f}}}^t &= \frac{\underline{\underline{E}}_f^t}{\underline{\underline{h}}_{\underline{\underline{f}i}}^{q1,t}} \underline{\underline{I}}_{(6 \times 6)}\end{aligned}\tag{B.32}$$

onde $\underline{\underline{I}}$ é a matriz identidade

Aplica-se (B.28) e (B.29) sobre (B.30) e (B.31), e organiza-se adequadamente, de modo que para a parte macroscópica de $\underline{\dot{\mathbf{e}}}_m^v$ obtém-se

$$\underline{\dot{\mathbf{E}}}_m^{v,t} = \sum_{i=1}^k \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{m}Ei}}^{o,t} = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{\underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{m}Ei}}}} \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{m}Ei}}^{o,t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{m}Ei}}}} \right) \underline{\underline{q}}_{\underline{\underline{m}Ei}} \frac{\underline{\underline{E}}_m^t}{\underline{\underline{h}}_{\underline{\underline{m}Ei}}^{q1,t}} \left(\underline{\dot{\mathbf{E}}} - \underline{\dot{\mathbf{E}}}_m^{v,t-\Delta t} \right) \right)\tag{B.33}$$

Obs.: $\underline{\dot{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{0}}$ para $t > 0$

Considerando-se que $\underline{\dot{E}}_m^{v,t}$ pode ser escrita como $T_m^t \underline{E}$, determina-se T_m^t , simplificando-se \underline{E} em ambos lados da igualdade

$$T_m^t = \sum_{i=1}^k q_{mEi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} q_{mEi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \mathbf{q}_{mi} \frac{E_m^t}{\mathbf{h}_{mi}^{q1,t}} (-T_m^{t-\Delta t}) \right) \quad (\text{B.34})$$

Em analogia para $\underline{\dot{E}}_f^{v,t}$, T_f^t se calcula como

$$T_f^t = \sum_{i=1}^k q_{fEi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} q_{fEi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \right) \mathbf{q}_{fi} \frac{E_f^t}{\mathbf{h}_{fi}^{q1,t}} (-T_f^{t-\Delta t}) \right) \quad (\text{B.35})$$

Para a parte periódica, tem-se inicialmente, por exemplo $\underline{\dot{e}}_{mx}^{v,t}$

$$\underline{\dot{e}}_{mx}^{v,t} = \underline{\hat{e}}_x \underline{\dot{C}}_{mx}^{v,t} = \sum_{i=1}^k q_{mxi}^{o,t} = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} q_{mxi}^{o,t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \mathbf{q}_{mi} \frac{E_m^t}{\mathbf{h}_{mi}^{q1,t}} \underline{\hat{e}}_x \left(\underline{\dot{C}}_x^t - \underline{\dot{C}}_{mx}^{v,t-\Delta t} \right) \right) \quad (\text{B.36})$$

Considerando-se que $q_{mxi}^{o,t-\Delta t}$ é função de $\underline{\hat{e}}_x$, é possível simplificar esse termo de ambos os lados da equação. Portanto, de (B.36) escreve-se que

$$\underline{\dot{C}}_{mx}^{v,t} = \sum_{i=1}^k q_{mxi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} q_{mxi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \mathbf{q}_{mi} \frac{E_m^t}{\mathbf{h}_{mi}^{q1,t}} \left(\underline{\dot{C}}_x^t - \underline{\dot{C}}_{mx}^{v,t-\Delta t} \right) \right) \quad (\text{B.37})$$

Em analogia a (B.11) e (B.12), para as demais componentes de $\underline{\mathbf{e}}^v$ calcula-se (equações (B.38))

$$\begin{aligned} \underline{\dot{C}}_{my}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k q_{myi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} q_{myi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \mathbf{q}_{mi} \frac{E_m^t}{\mathbf{h}_{mi}^{q1,t}} \left(\underline{\dot{C}}_y^t - \underline{\dot{C}}_{my}^{v,t-\Delta t} \right) \right) \\ \underline{\dot{C}}_{mz}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k q_{mzi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} q_{mzi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{mi}}} \right) \mathbf{q}_{mi} \frac{E_m^t}{\mathbf{h}_{mi}^{q1,t}} \left(\underline{\dot{C}}_z^t - \underline{\dot{C}}_{mz}^{v,t-\Delta t} \right) \right) \\ \underline{\dot{C}}_{fx}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k q_{fxi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} q_{fxi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fi}}} \right) \mathbf{q}_{fi} \frac{E_f^t}{\mathbf{h}_{fi}^{q1,t}} \left(\underline{\dot{C}}_x^t - \underline{\dot{C}}_{fx}^{v,t-\Delta t} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{c}}_{fy}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k q_{fyi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fyi}}} q_{fyi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fyi}}} \right) q_{fyi} \frac{E_f^t}{h_{fyi}^{q1,t}} \left(\dot{\underline{c}}_y^t - \dot{\underline{c}}_{fy}^{v,t-\Delta t} \right) \right) \\ \dot{\underline{c}}_{fz}^{v,t} &= \sum_{i=1}^k q_{fzi}^t = \sum_{i=1}^k \left(e^{-\frac{\Delta t}{q_{fzi}}} q_{fzi}^{t-\Delta t} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{q_{fzi}}} \right) q_{fzi} \frac{E_f^t}{h_{fzi}^{q1,t}} \left(\dot{\underline{c}}_z^t - \dot{\underline{c}}_{fz}^{v,t-\Delta t} \right) \right)\end{aligned}$$

B.2.4 Valor inicial para $\underline{\dot{e}}^v$ ($t = t_{0+}$)

O sistema estudado se encontra em seu estado inicial sem tensões ou deformações iniciais, portanto é correto afirmar que $\underline{\dot{e}}^v(t_0) = \underline{0}$. Imediatamente após o momento de aplicação da carga, considerando-se como exemplo um caso unidimensional (e um elemento Kelvin), tem-se para a taxa inicial da deformação viscosa

$$\underline{\dot{e}}^{v,t_{0+}} = \frac{\underline{s}^{t_{0+}}}{\underline{h}^{t_{0+}}} \quad (\text{B.39})$$

E para o caso tridimensional (modelo standard)

$$\underline{\dot{e}}^{v,t_{0+}} = \underline{\underline{Q}}^{t_{0+}} \underline{\underline{s}}^{t_{0+}} = \frac{E^{t_{0+}}}{\underline{h}^{q1,t_{0+}}} \underline{e}^{t_{0+}} \quad (\text{B.40})$$

O desenvolvimento de (B.40) com uma cadeia de elementos Kelvin para cada um dos materiais conduz a valores iniciais para (equações (B.41))

$$\begin{aligned}T_m^{t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k q_{mEi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \frac{E^{t_{0+}}}{h_{mi}^{q1,t_{0+}}} \\ T_f^{t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k q_{fEi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \frac{E^{t_{0+}}}{h_{fi}^{q1,t_{0+}}} \\ \dot{\underline{c}}_{mx}^{v,t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k q_{mxi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{E_m^{t_{0+}}}{h_{mi}^{q1,t_{0+}}} \underline{c}_x^{t_{0+}} \right) \\ \dot{\underline{c}}_{my}^{v,t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k q_{myi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{E_m^{t_{0+}}}{h_{mi}^{q1,t_{0+}}} \underline{c}_y^{t_{0+}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{C}}_{mz}^{v,t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{mzi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{E_m^{t_{0+}}}{\mathbf{h}_{mi}^{q1,t_{0+}}} \underline{C}_z^{t_{0+}} \right) \\ \dot{\underline{C}}_{fx}^{v,t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{fxi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{E_f^{t_{0+}}}{\mathbf{h}_{fi}^{q1,t_{0+}}} \underline{C}_x^{t_{0+}} \right) \\ \dot{\underline{C}}_{fy}^{v,t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{fyi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{E_f^{t_{0+}}}{\mathbf{h}_{fi}^{q1,t_{0+}}} \underline{C}_y^{t_{0+}} \right) \\ \dot{\underline{C}}_{fz}^{v,t_{0+}} &= \sum_{i=1}^k \underline{q}_{fzi}^{t_{0+}} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{E_f^{t_{0+}}}{\mathbf{h}_{fi}^{q1,t_{0+}}} \underline{C}_z^{t_{0+}} \right)\end{aligned}$$

B.2.5 Expressão para potencial elástico

Conforme (5.44), a expressão a ser minimizada para o caso viscoelástico com hardening é (considerando-se o cálculo incremental no tempo)

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}^{t+\Delta t}(\dot{\underline{e}}^{t+\Delta t}) &= \frac{1}{2}(\dot{\underline{e}}^{t+\Delta t} - \dot{\underline{e}}^{v,t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (\dot{\underline{e}}^{t+\Delta t} - \dot{\underline{e}}^{v,t}) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\underline{e}}^{t+\Delta t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}}^{t+\Delta t} - (\dot{\underline{e}}^{v,t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}}^{t+\Delta t}\end{aligned}\tag{B.42}$$

onde $\underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{c}}(t + \Delta t, t + \Delta t)$

As integrais para a resolução de (B.42) já foram definidas em (A.31) e (A.32). Comparando-se com o processo de softening, a diferença se dá apenas no fato de se utilizar a formulação em taxas. Desse modo (B.42) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2}(\dot{\underline{e}}^{t+\Delta t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}}^{t+\Delta t} - (\dot{\underline{e}}^{t+\Delta t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}}^{v,t} \right\rangle &= \frac{1}{8L^2} \mathbf{A}_f \left[\underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \underline{\underline{E}} \right] + \frac{1}{2} \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{c}}_{g2} \underline{\underline{E}} + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(\underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \underline{\underline{A}} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \dot{\underline{C}}_z^{t+\Delta t} \right) + \\ &+ \frac{1}{8L^2} \left(\dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} \right)^T \left\{ \underline{\underline{c}}_{g1} (1,1) \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} \right)^T \left\{ 2\underline{\underline{c}}_{g1} (1,2) \underline{\underline{B}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_3^T \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \\ &+ \frac{1}{8L^2} \left(\dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} \right)^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_1 + 4\underline{\underline{c}}_{g1} (2,2) \underline{\underline{B}}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8L^2} \dot{\underline{C}}_z^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g1} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{g1} (6,6) \underline{B}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_z^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{8L^2} \left(\dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} \right)^T \left\{ \underline{c}_{g2} (1,1) \underline{D}_1 + \underline{c}_{g2} (4,4) \underline{D}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} \right)^T \left\{ 2\underline{c}_{g2} (1,2) \underline{D}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{g2} (4,4) \underline{D}_3^T \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{8L^2} \left(\dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} \right)^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g2} (4,4) \underline{D}_1 + 4\underline{c}_{g2} (2,2) \underline{D}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \\
& + \frac{1}{8L^2} \left(\dot{\underline{C}}_z^{t+\Delta t} \right)^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g2} (5,5) \underline{D}_1 + \underline{c}_{g2} (6,6) \underline{D}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_z^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} (4L^2 - \mathbf{A}_f) \mathbf{T}_m^T \left[\underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g2} \underline{\mathbf{E}} \right] - \mathbf{A}_f \mathbf{T}_f^T \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g3} \underline{\mathbf{E}} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g3} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_{fx}^{v,t} - \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g3} \underline{\mathbf{\Lambda}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_{fy}^{v,t} - \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g3} \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_{fz}^{v,t} + \\
& + \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g2} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_{mx}^{v,t} + \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g2} \underline{\mathbf{\Lambda}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_{my}^{v,t} + \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g2} \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_{mz}^{v,t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g4} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} - \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g4} \underline{\mathbf{\Lambda}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} - \frac{1}{4L^2} \underline{\mathbf{E}}^T \underline{c}_{g4} \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{A}} \dot{\underline{C}}_z^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{fx}^{v,t} \right)^T \left\{ \underline{c}_{g3} (1,1) \underline{B}_1 + \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{fx}^{v,t} \right)^T \left\{ 2\underline{c}_{g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{fy}^{v,t} \right)^T \left\{ 2\underline{c}_{g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{fy}^{v,t} \right)^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_1 + 4\underline{c}_{g3} (2,2) \underline{B}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{fz}^{v,t} \right)^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g3} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{g3} (6,6) \underline{B}_2 \right\} \dot{\underline{C}}_z^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{mx}^{v,t} \right)^T \left\{ \underline{c}_{g2} (1,1) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{mx}^{v,t} \right)^T \left\{ 2\underline{c}_{g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{my}^{v,t} \right)^T \left\{ 2\underline{c}_{g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\} \dot{\underline{C}}_x^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{my}^{v,t} \right)^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + 4\underline{c}_{g2} (2,2) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\} \dot{\underline{C}}_y^{t+\Delta t} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\dot{\underline{C}}_{mz}^{v,t} \right)^T \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g2} (5,5) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{g2} (6,6) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\} \dot{\underline{C}}_z^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

onde $\underline{c}_{g1} = \underline{c}_f^{t+\Delta t} - \underline{c}_m^{t+\Delta t}$, $\underline{c}_{g2} = \underline{c}_m^{t+\Delta t}$, $\underline{c}_{g3} = \underline{c}_f^{t+\Delta t}$ e $\underline{c}_{g4} = T_f^t \underline{c}_f^{t+\Delta t} - T_m^t \underline{c}_m^{t+\Delta t}$

B.2.6 Sistema de Equações (minimização)

De maneira similar ao caso elástico, para cada passo de tempo, deve ocorrer o processo de minimização. Para se obter o valor mínimo da média do potencial elástico microscópico, procede-se a derivação com relação aos coeficientes das séries, da seguinte forma

$$\frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{\dot{\mathbf{e}}}^{t+\Delta t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{e}}}^{t+\Delta t} - (\underline{\dot{\mathbf{e}}}^{t+\Delta t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{e}}}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{xyz}^{t+\Delta t}} = 0 \quad (\text{B.43})$$

onde

$$\left(\underline{\dot{\mathbf{C}}}_{xyz}^{t+\Delta t} \right)^T = \left[\left(\underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-x}^{t+\Delta t} \right)^T \quad \left(\underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-y}^{t+\Delta t} \right)^T \quad \left(\underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-z}^{t+\Delta t} \right)^T \right] = \left[\dot{c}_{x1}^{t+\Delta t} \quad \dot{c}_{x2}^{t+\Delta t} \quad \dots \quad \dot{c}_{y1}^{t+\Delta t} \quad \dot{c}_{y2}^{t+\Delta t} \quad \dots \quad \dot{c}_{z1}^{t+\Delta t} \quad \dot{c}_{z2}^{t+\Delta t} \quad \dots \right]$$

Conforme já descrito em (A.39)

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-x}^{v,t+\Delta t} &= \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-x}^{v,t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-y}^{v,t+\Delta t} &= \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-y}^{v,t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-z}^{v,t+\Delta t} &= \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{-z}^{v,t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Agrupam-se como (B.45) as derivadas em relação a $\underline{\underline{C}}_x^{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{\dot{\mathbf{e}}}^{t+\Delta t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{e}}}^{t+\Delta t} - (\underline{\dot{\mathbf{e}}}^{t+\Delta t})^T \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{e}}}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{\dot{\mathbf{C}}}_x^{t+\Delta t}} = \\ &= \frac{1}{4L^2} \left(\left(\underline{\underline{\mathbf{E}}}^T \underline{\underline{c}}_{g1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right)^T - \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}}^T \underline{\underline{c}}_{g4} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right)^T \right) + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \underline{\underline{c}}_{g1} (1,1) \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_2 \right\} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_x^{t+\Delta t} + \left\{ 2\underline{\underline{c}}_{g1} (1,2) \underline{\underline{B}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_3^T \right\} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_y^{t+\Delta t} \right) + \\ &+ \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \underline{\underline{c}}_{g2} (1,1) \underline{\underline{D}}_1 + \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_2 \right\} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_x^{t+\Delta t} + \left\{ 2\underline{\underline{c}}_{g2} (1,2) \underline{\underline{D}}_3 + \frac{1}{2} \underline{\underline{c}}_{g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_3^T \right\} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_y^{t+\Delta t} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \underline{c}_{=g3} (1,1) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_2 \right\}^T \underline{\dot{C}}_{=fx}^{v,t} \underline{E} + \left\{ 2\underline{c}_{=g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\} \underline{\dot{C}}_{=fy}^{v,t} \underline{E} \right) + \\
& -\frac{1}{4L^2} \left\{ \underline{c}_{=g2} (1,1) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \underline{\dot{C}}_{=mx}^{v,t} \underline{E} + \\
& -\frac{1}{4L^2} \left\{ 2\underline{c}_{=g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\} \underline{\dot{C}}_{=my}^{v,t} \underline{E} = 0
\end{aligned}$$

Em relação a $\underline{\dot{C}}_y^{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{\dot{e}}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{\dot{e}}^{t+\Delta t} - (\underline{\dot{e}}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{\dot{e}}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{\dot{C}}_y^{t+\Delta t}} = \\
& = \frac{1}{4L^2} \left(\left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g1} \underline{\Lambda A} \right)^T - \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{\Lambda A} \right)^T \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{c}_{=g1} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g1} (4,4) \underline{B}_3^T \right\}^T \underline{\dot{C}}_x^{t+\Delta t} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g1} (4,4) \underline{B}_1 + 4\underline{c}_{=g1} (2,2) \underline{B}_2 \right\} \underline{\dot{C}}_y^{t+\Delta t} \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{c}_{=g2} (1,2) \underline{D}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_3^T \right\}^T \underline{\dot{C}}_x^{t+\Delta t} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (4,4) \underline{D}_1 + 4\underline{c}_{=g2} (2,2) \underline{D}_2 \right\} \underline{\dot{C}}_y^{t+\Delta t} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ 2\underline{c}_{=g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\}^T \underline{\dot{C}}_{=fx}^{v,t} \underline{E} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g3} (4,4) \underline{B}_1 + 4\underline{c}_{=g3} (2,2) \underline{B}_2 \right\}^T \underline{\dot{C}}_{=fy}^{v,t} \underline{E} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ 2\underline{c}_{=g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\}^T \underline{\dot{C}}_{=mx}^{v,t} \underline{E} + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (4,4) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + 4\underline{c}_{=g2} (2,2) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \underline{\dot{C}}_{=my}^{v,t} \underline{E} = 0
\end{aligned}$$

Em relação a $\underline{\dot{C}}_z^{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left(\left\langle \frac{1}{2} (\underline{\dot{e}}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{\dot{e}}^{t+\Delta t} - (\underline{\dot{e}}^{t+\Delta t})^T \underline{c}^{t+\Delta t} \underline{\dot{e}}^{v,t} \right\rangle \right)}{\partial \underline{\dot{C}}_z^{t+\Delta t}} = \\
& = \frac{1}{4L^2} \left(\left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g1} \underline{\Gamma A} \right)^T - \left(\underline{E}^T \underline{c}_{=g4} \underline{\Gamma A} \right)^T \right) + \\
& + \frac{1}{4L^2} \left(\left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g1} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g1} (6,6) \underline{B}_2 \right\} \underline{\dot{C}}_z^{t+\Delta t} + \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g2} (5,5) \underline{D}_1 + \underline{c}_{=g2} (6,6) \underline{D}_2 \right\} \underline{\dot{C}}_z^{t+\Delta t} \right) + \\
& - \frac{1}{4L^2} \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{=g3} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{=g3} (6,6) \underline{B}_2 \right\}^T \underline{\dot{C}}_{=fz}^{v,t} \underline{E} +
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4L^2} \left\{ \frac{1}{c_{=g2}} (5,5) (\underline{\underline{D}}_1 - \underline{\underline{B}}_1) + c_{=g2} (6,6) (\underline{\underline{D}}_2 - \underline{\underline{B}}_2) \right\}^T \dot{\underline{\underline{C}}}_{=mz}^{v,t} \underline{\underline{E}} = 0$$

Reorganiza-se (B.45) e concatena-se as matrizes na forma de um sistema

$$\underline{\underline{K}}^{t+\Delta t} \dot{\underline{\underline{C}}}_{=xyz}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{M}}^{t+\Delta t} \quad (\text{B.46})$$

onde $\underline{\underline{K}}^{t+\Delta t}$, $\dot{\underline{\underline{C}}}_{=xyz}^{t+\Delta t}$ e $\underline{\underline{M}}^{t+\Delta t}$ são dados por

$$\underline{\underline{K}}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{=11}^{t+\Delta t} & \underline{\underline{K}}_{=12}^{t+\Delta t} & \underline{\underline{K}}_{=13}^{t+\Delta t} \\ \underline{\underline{K}}_{=21}^{t+\Delta t} & \underline{\underline{K}}_{=22}^{t+\Delta t} & \underline{\underline{K}}_{=23}^{t+\Delta t} \\ \underline{\underline{K}}_{=31}^{t+\Delta t} & \underline{\underline{K}}_{=32}^{t+\Delta t} & \underline{\underline{K}}_{=33}^{t+\Delta t} \end{bmatrix}_{(3n \times 3n)} \quad \dot{\underline{\underline{C}}}_{=xyz}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{C}}}_x^{t+\Delta t} \\ \dot{\underline{\underline{C}}}_y^{t+\Delta t} \\ \dot{\underline{\underline{C}}}_z^{t+\Delta t} \end{bmatrix}_{(3n \times 1)} \quad (\text{B.47})$$

$$\underline{\underline{M}}^{t+\Delta t} = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_1^{t+\Delta t} \\ \underline{\underline{M}}_2^{t+\Delta t} \\ \underline{\underline{M}}_3^{t+\Delta t} \end{bmatrix}_{(3n \times 6)} \quad \underline{\underline{E}}_{(6 \times 1)}$$

$\underline{\underline{K}}^{t+\Delta t}$ é composta por

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{=11}^{t+\Delta t} &= c_{=g1} (1,1) \underline{\underline{B}}_1 + c_{=g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_2 + c_{=g2} (1,1) \underline{\underline{D}}_1 + c_{=g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_2 \\ \underline{\underline{K}}_{=12}^{t+\Delta t} &= 2c_{=g1} (1,2) \underline{\underline{B}}_3 + \frac{1}{2} c_{=g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_3^T + 2c_{=g2} (1,2) \underline{\underline{D}}_3 + \frac{1}{2} c_{=g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_3^T \\ \underline{\underline{K}}_{=13}^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{=21}^{t+\Delta t} &= \left(\underline{\underline{K}}_{=12}^{t+\Delta t} \right)^T \\ \underline{\underline{K}}_{=22}^{t+\Delta t} &= \frac{1}{4} c_{=g1} (4,4) \underline{\underline{B}}_1 + 4c_{=g1} (2,2) \underline{\underline{B}}_2 + \frac{1}{4} c_{=g2} (4,4) \underline{\underline{D}}_1 + 4c_{=g2} (2,2) \underline{\underline{D}}_2 \\ \underline{\underline{K}}_{=23}^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{=31}^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{=32}^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{=33}^{t+\Delta t} &= \frac{1}{4} c_{=g1} (5,5) \underline{\underline{B}}_1 + c_{=g1} (6,6) \underline{\underline{B}}_2 + \frac{1}{4} c_{=g2} (5,5) \underline{\underline{D}}_1 + c_{=g2} (6,6) \underline{\underline{D}}_2 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{M}}^{t+\Delta t}$ é composta por

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{M}}_1^{t+\Delta t} &= \underline{A}^T \left(\underline{c}_{g1} - \underline{c}_{g4} \right) - \left\{ \underline{c}_{g3} (1,1) \underline{B}_1 + \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_2 \right\}^T \dot{\underline{C}}_{fx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ 2\underline{c}_{g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\} \dot{\underline{C}}_{fy}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \underline{c}_{g2} (1,1) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \dot{\underline{C}}_{mx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ 2\underline{c}_{g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\} \dot{\underline{C}}_{my}^{v,t} \\
\underline{\underline{M}}_2^{t+\Delta t} &= \underline{A}^T \underline{\Lambda}^T \left(\underline{c}_{g1} - \underline{c}_{g4} \right) - \left\{ 2\underline{c}_{g3} (1,2) \underline{B}_3 + \frac{1}{2} \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_3^T \right\}^T \dot{\underline{C}}_{fx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g3} (4,4) \underline{B}_1 + 4\underline{c}_{g3} (2,2) \underline{B}_2 \right\}^T \dot{\underline{C}}_{fy}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ 2\underline{c}_{g2} (1,2) (\underline{D}_3 - \underline{B}_3) + \frac{1}{2} \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_3^T - \underline{B}_3^T) \right\}^T \dot{\underline{C}}_{mx}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g2} (4,4) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + 4\underline{c}_{g2} (2,2) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \dot{\underline{C}}_{my}^{v,t} \\
\underline{\underline{M}}_3^{t+\Delta t} &= \underline{A}^T \underline{\Gamma}^T \left(\underline{c}_{g1} - \underline{c}_{g4} \right) - \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g3} (5,5) \underline{B}_1 + \underline{c}_{g3} (6,6) \underline{B}_2 \right\}^T \dot{\underline{C}}_{fz}^{v,t} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{4} \underline{c}_{g2} (5,5) (\underline{D}_1 - \underline{B}_1) + \underline{c}_{g2} (6,6) (\underline{D}_2 - \underline{B}_2) \right\}^T \dot{\underline{C}}_{mz}^{v,t}
\end{aligned}$$

Resolvendo-se (B.46), ficam determinadas as constantes das expansões, bem como as expressões para os deslocamentos periódicos para uma dada deformação macroscópica \underline{E} .

B.2.7 Determinação de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t}$

Para a determinação da matriz $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t}$, recorre-se a equação

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t} \underline{E} \quad (\text{B.48})$$

Derivando-se (B.48) com relação ao tempo, considerando-se que \underline{E} seja constante

$$\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}^{t+\Delta t} = \dot{\underline{\underline{C}}}^{\text{hom},t+\Delta t} \underline{E} \quad (\text{B.49})$$

onde $\underline{\dot{\underline{s}}}^{t+\Delta t} = \langle \underline{\dot{\underline{s}}}^{t+\Delta t} \rangle = \langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (\underline{\dot{\underline{e}}}^{t+\Delta t} - \underline{\dot{\underline{e}}}^{v,t}) \rangle$ (B.50)

Prosseguindo-se no desenvolvimento de (B.50)

$$\langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (\underline{\dot{\underline{e}}}^{t+\Delta t} - \underline{\dot{\underline{e}}}^{v,t}) \rangle = \langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (-T^t) \underline{\underline{E}} \rangle + \langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{t+\Delta t} - \underline{\dot{\underline{e}}}_p^{v,t}) \rangle$$
 (B.51)

De modo que o primeiro termo após a igualdade seja

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (-T^t) \underline{\underline{E}} \rangle &= -\frac{1}{V} \left[V_f T_f^t \underline{\underline{c}}_{\underline{f}}^{t+\Delta t} + V_m T_m^t \underline{\underline{c}}_{\underline{m}}^{t+\Delta t} \right] \underline{\underline{E}} \\ &= -\frac{1}{4L^2} \left[A_f T_f^t \underline{\underline{c}}_{\underline{f}}^{t+\Delta t} + (4L^2 - A_f) T_m^t \underline{\underline{c}}_{\underline{m}}^{t+\Delta t} \right] \underline{\underline{E}} \end{aligned}$$
 (B.52)

$V = V_f + V_m$: volume da célula

V_f : volume de fibra

onde

V_m : volume de matriz

A_f : área de fibra

E o segundo

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{c}}^{t+\Delta t} (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{t+\Delta t} - \underline{\dot{\underline{e}}}_p^{v,t}) \rangle &= \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{f}}^{t+\Delta t} \left(\int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{t+\Delta t}) dydx \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{m}}^{t+\Delta t} \left(\int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{t+\Delta t}) dydx - \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{t+\Delta t}) dydx \right) \right] + \\ &- \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{f}}^{t+\Delta t} \left(\int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{v,t}) dydx \right) \right] + \\ &- \frac{1}{V} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{m}}^{t+\Delta t} \left(\int_{-L}^L \int_{-L}^L (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{v,t}) dydx - \int_{-r}^r \int_{-r}^r (\underline{\dot{\underline{e}}}_p^{v,t}) dydx \right) \right] \\ &= \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{g}1} \left(A \underline{\underline{c}}_{\underline{x}}^{t+\Delta t} + \Lambda A \underline{\underline{c}}_{\underline{y}}^{t+\Delta t} + \Gamma A \underline{\underline{c}}_{\underline{z}}^{t+\Delta t} \right) \right] \underline{\underline{E}} + \\ &- \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{f}}^{t+\Delta t} \left(A \underline{\underline{c}}_{\underline{f}x}^{v,t} + \Lambda A \underline{\underline{c}}_{\underline{f}y}^{v,t} + \Gamma A \underline{\underline{c}}_{\underline{f}z}^{v,t} \right) \right] \underline{\underline{E}} + \\ &+ \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{m}}^{t+\Delta t} \left(A \underline{\underline{c}}_{\underline{m}x}^{v,t} + \Lambda A \underline{\underline{c}}_{\underline{m}y}^{v,t} + \Gamma A \underline{\underline{c}}_{\underline{m}z}^{v,t} \right) \right] \underline{\underline{E}} \end{aligned}$$
 (B.53)

onde $\underline{\underline{c}}_{\underline{g}1} = \underline{\underline{c}}_{\underline{f}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{c}}_{\underline{m}}^{t+\Delta t}$

Utilizando-se (B.52) e (B.53) para compor (B.50), determina-se, partindo-se de (B.49) que

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\dot{C}}}_{(6 \times 6)}^{\text{hom},t+\Delta t} &= -\frac{1}{4L^2} \left[\underline{\underline{A}}_f T_f^t \underline{\underline{C}}_f^{t+\Delta t} + (4L^2 - \underline{\underline{A}}_f) T_m^t \underline{\underline{C}}_m^{t+\Delta t} \right] + \\
&+ \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{g1} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{x}}}^{t+\Delta t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{y}}}^{t+\Delta t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{z}}}^{t+\Delta t} \right) \right] + \\
&- \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{f}}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{fx}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{fy}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{fz}}}^{v,t} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{8L^3} \left[\underline{\underline{c}}_{\underline{\underline{m}}}^{t+\Delta t} \left(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{mx}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{my}}}^{v,t} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{C}}}_{\underline{\underline{mz}}}^{v,t} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.54}$$

Finalmente, para determinar-se $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t+\Delta t}$, integra-se (B.54) de acordo com o passo de tempo

$$\underline{\underline{C}}_{(6 \times 6)}^{\text{hom},t+\Delta t} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom},t} + \underline{\underline{\dot{C}}}^{\text{hom},t+\Delta t} \Delta t \tag{B.55}$$

Sendo que $\underline{\underline{C}}^{\text{hom},t_o}$ é obtida em elasticidade para o instante $t = t_o$.

**Apêndice C – Modelo em elementos finitos
para comparação de resultados**

APÊNDICE C - MODELO EM ELEMENTOS FINITOS PARA COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

De forma a serem verificados os resultados obtidos pela formulação apresentada no presente trabalho, foram realizados testes em modelos simplificados por elementos finitos do compósito unidirecional. Assim, foram obtidos os termos de sua matriz constitutiva, tanto em elasticidade como em viscoelasticidade sem envelhecimento.

C.1 GEOMETRIA DOS MODELOS

Buscou-se compreender o efeito da periodicidade das células elementares em um compósito real, de acordo com a geometria dos seguintes modelos

EF 1 – A célula básica é diretamente submetida aos carregamentos e vinculações necessárias para a obtenção dos termos da matriz. A malha é estruturada e o número de elementos é definido a partir de uma variável N . Na figura 58, como exemplo, o valor de N é 2. Isso significa que cada um dos elementos destacados são divididos em $N^3 = 8$ elementos finitos. Para esse modelo, o número de elementos finitos é $9N^3$.

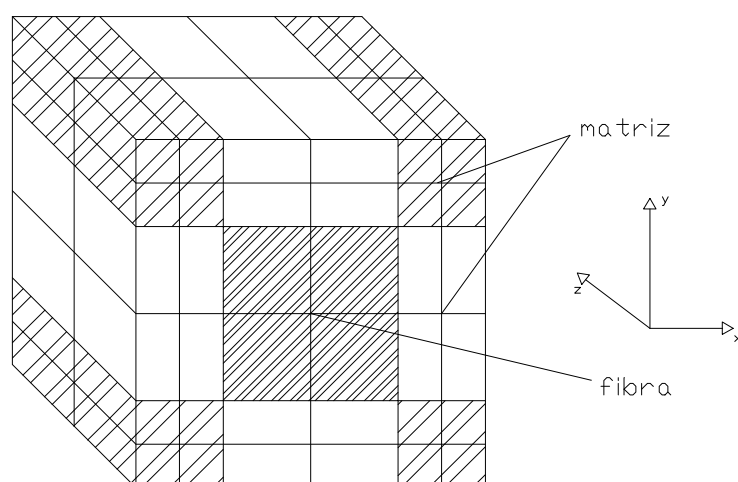


Figura 58 – Modelo EF 1

EF 2 – Neste modelo (ver figura 59), a célula básica é cercada por uma camada de células. As tensões são medidas na célula central, entretanto, os carregamentos e vinculações são feitos na superfície das células exteriores. O número de elementos finitos é $243N^3$.

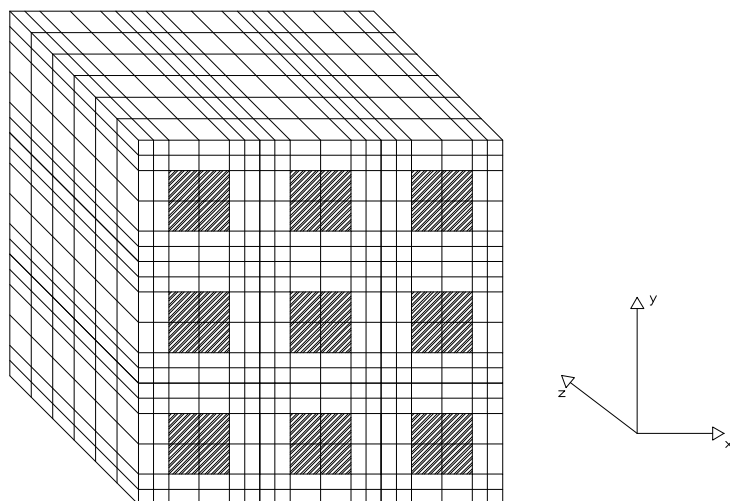


Figura 59 – Modelo EF 2

EF 3 – Conforme a figura 60, a célula básica é cercada por duas camadas de células. Como no modelo EF 2, as tensões são medidas na célula central, enquanto os carregamentos e vinculações são feitos na superfície das células exteriores. O número de elementos finitos é $1125N^3$.

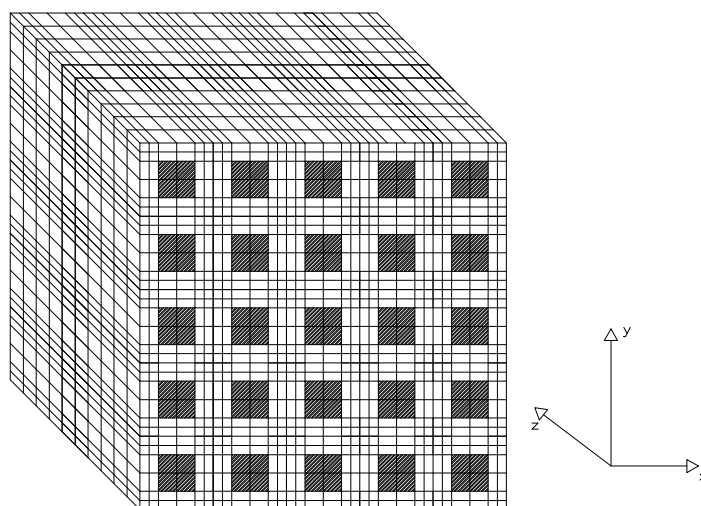


Figura 60 – Modelo EF 3

C.2 DETERMINAÇÃO DOS ELEMENTOS DE $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$

O acréscimo de camadas de células ao redor da célula central permite aproximar-se o efeito de um carregamento periódico sobre esta ao aplicar-se um carregamento macroscópico na superfície das células externas.

A fim de se obter a matriz de rigidez do composto, são impostos deslocamentos unitários adequados nas faces externas de cada modelo.

Observando-se a equação (2.54) na forma vetorial

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{zz} \\ \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx}^{\text{hom}} & C_{xxyy}^{\text{hom}} & C_{xxzz}^{\text{hom}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{yyxx}^{\text{hom}} & C_{yyyy}^{\text{hom}} & C_{yyzz}^{\text{hom}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{zzxx}^{\text{hom}} & C_{zzyy}^{\text{hom}} & C_{zzzz}^{\text{hom}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{xyxy}^{\text{hom}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{xzxz}^{\text{hom}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{yzyz}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{xy} \\ E_{xz} \\ E_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

É simples perceber-se que os elementos de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ serão as tensões macroscópicas medidas para as correspondentes deformações macroscópicas unitárias.

- Para $E_{xx} = 1$ e as deformações restantes iguais a 0

$$\begin{aligned} C_{xxxx}^{\text{hom}} &= C_{yyyy}^{\text{hom}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,1) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,2) = \Sigma_{xx} \\ C_{yyxx}^{\text{hom}} &= C_{xxyy}^{\text{hom}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,1) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,2) = \Sigma_{yy} \\ C_{zzxx}^{\text{hom}} &= C_{xxzz}^{\text{hom}} = C_{zzyy}^{\text{hom}} = C_{yyzz}^{\text{hom}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,1) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,3) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,2) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,3) = \Sigma_{zz} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

- Para $E_{zz} = 1$ e as deformações restantes iguais a 0

$$\begin{aligned} C_{xxzz}^{\text{hom}} &= C_{zzxx}^{\text{hom}} = C_{yyzz}^{\text{hom}} = C_{zzyy}^{\text{hom}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(1,3) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,1) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(2,3) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,2) = \Sigma_{zz} \\ C_{zzzz}^{\text{hom}} &= \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(3,3) = \Sigma_{zz} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

- Para $E_{xy} = 1$ e as deformações restantes iguais a 0

$$C_{xyxy}^{\text{hom}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(4,4) = \Sigma_{xy} \quad (\text{C.4})$$

- Para $E_{xz} = 1$ e as deformações restantes iguais a 0

$$C_{xzxz}^{\text{hom}} = C_{yzyz}^{\text{hom}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(5,5) = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(6,6) = \underline{\underline{\Sigma}}_{xz} \quad (\text{C.5})$$

C.2.1 Cálculo de $\underline{\underline{\Sigma}}$

Conforme já foi visto em (2.6), $\underline{\underline{\Sigma}}$ é a média volumétrica de $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$ na célula unitária. Essa média pode ser calculada a partir dos valores da superfície da célula. Seja $\underline{\underline{\mathbf{s}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{s}}} = \text{div}(\underline{\underline{x}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{s}}}) \quad (\text{C.6})$$

Pois

$$\text{div}(\underline{\underline{x}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{s}}}) = \text{grad}(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{s}}} + \underline{\underline{x}} \otimes \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{s}}}) \quad (\text{C.7})$$

Como $\text{grad}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{I}}$ e $\text{div}(\underline{\underline{\mathbf{s}}}) = \underline{\underline{0}}$ a equação (C.7) corresponde à (C.6). Para $\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} \rangle$ através do teorema de Green

$$\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \text{div}(\underline{\underline{x}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{s}}}) dV = \frac{1}{V} \int_S (\underline{\underline{x}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{s}}}) \cdot \underline{\underline{n}} dS \quad (\text{C.8})$$

Na figura 3, pode ser visto pela antiperiodicidade de $\underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \underline{\underline{n}}$ que $\underline{\underline{\mathbf{s}}}(x) \cdot \underline{\underline{n}} = -\underline{\underline{\mathbf{s}}}(x') \cdot \underline{\underline{n}'$ para cada uma das faces da célula elementar.

Aplicando-se (C.8) às faces perpendiculares a x ($\underline{\underline{x}}^T = [L \ y \ z]$ e $\underline{\underline{x}}'^T = [-L \ y \ z]$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{\perp x} (\underline{\underline{x}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{s}}}) \cdot \underline{\underline{n}} dS &= \frac{1}{8L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \begin{bmatrix} L \\ y \\ z \end{bmatrix} \otimes (\underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \underline{\underline{n}}) dydz + \frac{1}{8L^3} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \begin{bmatrix} -L \\ y \\ z \end{bmatrix} \otimes (\underline{\underline{\mathbf{s}}}' \cdot \underline{\underline{n}}') dydz \\ &= \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dydz \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Resolvendo-se por similaridade para as faces perpendiculares a y e z , $\langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} \rangle$ pode ser finalmente escrita

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\mathbf{s}}} \rangle = & \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} dydz + \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{s}_{12} & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_{22} & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_{23} & 0 \end{bmatrix} dx dz + \\ & + \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{s}_{13} \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{33} \end{bmatrix} dx dy \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

ou seja

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}_{11} &= \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{11} dydz \\ \underline{\underline{\Sigma}}_{22} &= \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{22} dx dz \\ \underline{\underline{\Sigma}}_{33} &= \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{33} dx dy \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}_{12} &= \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{12} dydz = \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{12} dx dz \\ \underline{\underline{\Sigma}}_{13} &= \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{13} dydz = \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{13} dx dy \\ \underline{\underline{\Sigma}}_{23} &= \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{23} dx dz = \frac{1}{4L^2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \mathbf{s}_{23} dx dy \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Para fins práticos, deve-se ter atenção ao fato das tensões de cisalhamentos macroscópicas serem calculadas com modelos que somente aproximam as condições de periodicidade. Desse modo, as igualdades mostradas em (C.12) não ocorrerem perfeitamente (exceto para $\underline{\underline{\Sigma}}_{12}$ devido à simetria).

As expressões em (C.11) e em (C.12) representam as médias, nas faces externas correspondentes da célula central, das tensões indicadas. Esses valores são determinados diretamente pela média dos valores nodais das tensões calculados.

C.2.2 Carregamentos macroscópicos

Como foi visto anteriormente, os modelos são submetidos a quatro tipos de carregamento: dois de tração (ou compressão) e dois de cisalhamento.

C.2.2.1 Tração unitária na direção x ($E_{xx} = 1$) e na direção z ($E_{zz} = 1$)

De acordo com a figura 61, somente o deslocamento macroscópico na direção x deve ser diferente de zero. As demais direções perpendiculares às faces são restringidas.

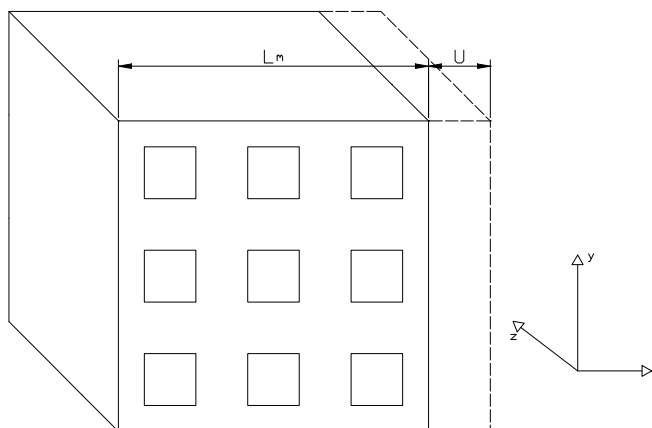


Figura 61 – Tração unitária na direção x ($E_{xx} = 1$)

onde $E_{xx} = \frac{U}{L_m} = 1$

Para a tração na direção z , o carregamento unitário é aplicado na direção longitudinal às fibras de maneira análoga ao mostrado na figura 61 para a direção transversal.

C.2.2.2 Cisalhamentos unitários ($E_{xy} = 1$ e $E_{xz} = 1$)

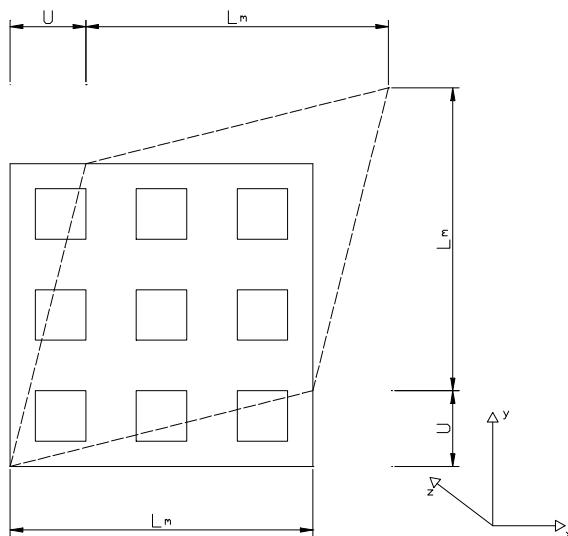


Figura 62 – Cisalhamento unitário ($E_{xy} = 1$)

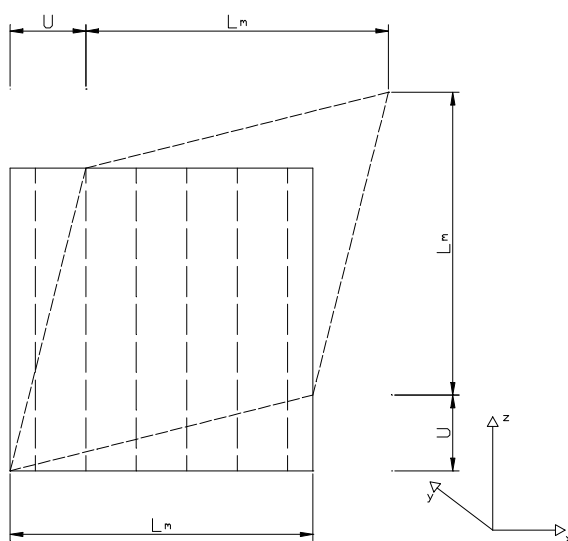


Figura 63 – Cisalhamento unitário ($E_{xz} = 1$)

onde $E_{xy} = \frac{U}{L_m} = 1$ ou $E_{xz} = \frac{U}{L_m} = 1$

Obs. 1: As figuras 62 e 63 são coerentes somente para a situação de pequenas deformações.

Obs. 2: Como aspecto prático, utilizou-se um material muito rígido solidarizado ao modelo para se aplicar os deslocamentos nos cisalhamentos.