211 **MEDIDA DE HAUSDORFF.** *Patrícia Kruse Klaser, Artur Oscar Lopes (orient.)* (UFRGS).

Minha apresentação será sobre medida de Hausdorff, que é uma medida exterior definida em espaços métricos. Sua importância se deve ao fato de que ela permite medir conjuntos não suaves, diferentemente da geometria diferencial e, através dela, podemos, por exemplo, comparar subconjuntos do plano, que se só medíssemos seu comprimento e área seriam iguais. Além disso, ela coincide com a medida de comprimento em dimensão 1, de área em dimensão 2 etc. A medida de Hausdorff é definida em um espaço métrico (E, d) para um índice k>0 ou k=0 fixado: Dado A subconjunto de E, definimos a medida de Hausdorff H(k, A):

$$H_\delta^k(A) = inf\{\sum_i diam^k(A_i) | diam(A_i) < \delta\} \qquad H(k, A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{w_k}{2^k} H_\delta^k(A)$$

Onde w depende apenas de k. Pode-se mostrar que vale o seguinte fato: H(k, A)>0 implica que H(s, A) é mais infinito se k>s, onde s é um número não negativo. A demonstração deste fato decorre da desigualdade abaixo, fazendo delta tender a zero:

$$H_\delta^k(A) \leq \delta^{k-s} H_\delta^s(A), \forall A \subset E$$

Baseado neste fato, concluímos que existe um único k para cada subconjunto A de E, tal que: Se s>k, H(s, A)=0 e se s<k, H(s, A) vale infinito. Esse valor k é chamado dimensão de Hausdorff do conjunto A. Vejamos então um exemplo: Temos uma seqüência de triângulos definida indutivamente do seguinte modo: T0 é um triangulo eqüilátero de lados de comprimento um. T1 é construído a partir de T0 retirando-se a região interna do polígono obtido unindo os terços médios dos três lados de T0 por segmentos que não se cruzam. Desta forma, T1 contém 3 triângulos eqüiláteros de lado 1/3. Repetindo o processo em cada pequeno triangulo obtido obtém-se T2, e indutivamente temos definida a seqüência {Tn}. Seja T a intersecção de todos os Tn's. Como cada Tn contém uma pequena região de área positiva, temos que dimensão de Tn é 2, enquanto a dimensão de T é 1.