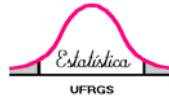




UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA



Desempenho de Índices de Capacidade de Processos Multivariados: Uma comparação de índices via simulação

Autor: Roberto de France Moreira Junior
Orientadora: Professora Dra. Liane Werner

Porto Alegre, Dezembro de 2011.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Departamento de Estatística

Desempenho de Índices de Capacidade de Processos Multivariados: Uma comparação de índices via simulação

Autor: Roberto de France Moreira Junior

Artigo apresentado para obtenção
do grau de Bacharel em Estatística.

Banca Examinadora:
Professora Dra. Liane Werner
Professor Dr. Danilo Marcondes Filho

Porto Alegre, Dezembro de 2011.

Dedico este trabalho a minha esposa Márcia, aos meus filhos Paula, Roberto Neto e Laura, e aos meus pais Roberto e Tânia, que entenderam cada ausência minha nas várias etapas desta jornada, e um agradecimento especial a minha filha Paula e minha irmã Verônica, por toda ajuda na conclusão deste artigo e a minha orientadora Liane Werner pela paciência, ensinamentos e continuar acreditando em seu pupilo, e a todos que de forma direta ou indireta me ajudaram a concluir este trabalho.

*"Retém a instrução e não a largues: guarda-a, porque ela é a tua vida."
Provérbios 4:13.*

Desempenho de Índices de Capacidade de Processos Multivariados: Uma comparação de índices via simulação

Roberto de France Moreira Junior – Bacharelando de Estatística, UFRGS, robertodefrance@gmail.com

Liane Werner – Dra em Engenharia de Produção, UFRGS, liane@producao.ufrgs.br

RESUMO

Uma das abordagens para qualidade está na capacidade do produto atender a determinadas necessidades do cliente, sendo que para suas especificações exigidas são necessários mecanismos de monitoramento do processo e medidas que quantifiquem sua capacidade em atendê-las. Os índices de capacidade são medidas adimensionais usadas para quantificar a relação entre o desempenho do processo e os limites de especificação para uma ou mais características, sendo que esta quantificação é essencial para o sucesso de melhorias na qualidade. Índices de capacidade foram propostos para processos multivariados, destacando-se o índice de Mingoti e Glória (2003, 2008) para dados com distribuição normal multivariada simétrica, e o índice de Silva e Pinto (2010) que propõem um índice de capacidade para dados com distribuição normal multivariada assimétrica, sendo esta distribuição muito útil quando se deseja ajustar os dados observados com a forma da distribuição normal padrão e suas propriedades, mas com distorção em sua assimetria. Neste artigo foi realizada através de simulação, uma comparação entre estes dois índices de capacidade de processos considerando-se vários cenários diferentes e mostrou que o índice de Mingoti e Glória possui melhor assertividade na determinação da capacidade tanto para dados simétricos como para assimétricos em relação ao índice de Silva e Pinto, que apresentou resultados também satisfatórios, mas prejudicado pela sua formulação que utiliza a média geométrica na determinação do seu valor global.

Palavras-chave: Distribuição Normal Multivariada Assimétrica, Índice de Capacidade de Processo Multivariado.

1 INTRODUÇÃO

Uma das abordagens para qualidade está na capacidade do produto satisfazer a determinadas necessidades do cliente, atendendo as especificações exigidas para o produto ou serviço. Desse modo, é necessário implantar mecanismos de monitoramento do processo e medidas que quantifiquem sua capacidade em atender as exigências dos clientes a que seus produtos se destinam.

Cartas de controle, propostas inicialmente por Walter A. Shewhart em 1924, são úteis para o monitoramento de parâmetros dos processos, auxiliando na detecção da condição de

controle estatístico distinguindo as causas especiais das causas comuns (MONTGOMERY, 2004; COSTA et al., 2005)., mas as cartas de controle, por si só, não são capazes de avaliar se um processo está operando em conformidade com os limites de especificação do produto.

A verificação da conformidade de um processo em atender as especificações provenientes de clientes internos e externos, pode ser realizada através de gráficos como histogramas e através dos índices de capacidade que são medidas adimensionais usadas para quantificar a relação entre o desempenho do processo e os limites de especificação, sendo que esta quantificação é essencial para o sucesso de melhorias na qualidade (WU et al., 2009). Utilizando a informação fornecida pelos índices, os gerentes podem reduzir a variabilidade, diminuir custos de produção, e aumentar a satisfação dos clientes (DELERYD, 1999), além de utilizar como requisitos de desempenho de produtos ou equipamentos de fornecedores, e planejar a inter-relação de processos sequenciais (JURAN e GODFREY, 1998).

Os primeiros estudos sobre os índices de capacidade iniciaram com Juran em 1951 e sua aplicação iniciou fortemente nas indústrias japonesas e automotivas americanas na década de 80, Kane (1986) aprofundou os estudos dos índices, desenvolvendo principalmente os índices C_p e C_{pk} . Taguchi e Hsiang (1990) apresentaram o índice C_{pm} . Estes três índices são os mais frequentemente utilizados e foram desenvolvidos para uma característica de qualidade supondo-se que o processo apresenta distribuição normal.

É muito comum, no entanto, que a qualidade de um processo seja determinada por mais de uma característica, sendo então desejável avaliar a capacidade do processo por medidas que levem em consideração todas as características simultaneamente e as correlações que possam existir entre elas. Muitos são os estudos internacionais para índices de capacidade para processos multivariados sendo alguns deles: Bernardo e Irony (1996), Niverthi e Dey (2000), Veevers (1998), Yeh e Chen (1999), Li e Lin (1996), Wang et. al (2000), entre outros. Estes índices consideram que os dados do processo apresentam uma distribuição normal multivariada simétrica, assim como o índice proposto por Mingoti e Glória (2003, 2008).

Existem poucos artigos sobre o comportamento de índices nos casos de processos multivariados não-normais, podendo acrescentar o trabalho de Polanski (2001), e mais o estudo realizado por Silva e Pinto (2010) sobre Análise da Performance de Processos Multivariados Assimétricos que traz para a literatura o enfoque da assimetria em relação a distribuição, propondo um índice de capacidade multivariado na qual os dados apresentem distribuições normais assimétricas. Na existência de assimetria as estatísticas de média, moda e mediana não apresentam o mesmo valor e os índices de capacidade indicados para dados simétricos podem apresentar incoerência nestes casos.

Neste trabalho serão comparados os cálculos dos índices de capacidade do processo proposto por Mingoti e Glória (2003, 2008) e Silva e Pinto (2010), simulando dados multivariados normais simétricos e assimétricos, avaliando a qualidade da estimação dos índices de capacidade e sua coerência nos resultados via simulação de Monte Carlo.

2. DISTRIBUIÇÃO NORMAL ASSIMÉTRICA

A distribuição normal assimétrica, abreviatura SN com origem na denominação em inglês “skew normal”, foi formalmente introduzida por Azzalini em 1985 que propôs uma nova classe de distribuição que inclui a normal como um membro próprio. A variável aleatória contínua X é dita Normal Assimétrica com parâmetro α , representado na forma $X \sim \text{SN}(\alpha)$, se sua função densidade for:

$$f(x) = 2\phi(x) \Phi(\alpha x) \quad (1)$$

onde,

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} \quad (2)$$

e

$$\Phi(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} \phi(t) dt \quad (3)$$

a equação (2) denota a função densidade Gaussiana e a equação (3) a função de distribuição no ponto αx da Normal respectivamente, e o parâmetro α é chamado de parâmetro de forma, pois regula a assimetria variando de $(-\infty, +\infty)$, sendo que $\alpha=0$ representa a densidade $N(0,1)$.

A densidade $f(x)$ possui várias propriedades interessantes,

- Quando $\alpha=0$, a assimetria desaparece e obtém-se a densidade Normal Padrão $N(0,1)$;
- Quando α aumenta, em números absolutos, aumenta-se a assimetria da distribuição;
- Quando a densidade da função $f(x)$ converge para a função densidade chamada de meia-normal (ou dobro-normal), o valor de $\alpha \rightarrow \infty$; (para saber mais sobre a função meia-normal ver BYERS, 2005).
- Quando o sinal de α mudar, a densidade reflete-se no lado oposto do eixo vertical.

A variável aleatória X e sua função de densidade $f(x)$ são componentes básicos da estrutura, mas para trabalhar numericamente com a distribuição Normal Assimétrica são necessários adicionar os parâmetros de localização e escala.

Considere a transformação linear:

$$Y = \xi + \omega X \quad (4)$$

Conseqüentemente obtém-se a distribuição Normal Assimétrica com parâmetros (ξ, ω, α) , referindo como parâmetros de localização, escala e forma, respectivamente, sendo descrita como:

$$Y \sim SN(\xi, \omega^2, \alpha) \quad (5)$$

As estatísticas descritivas da variável aleatória Y são as seguintes:

$$\text{Média:} \quad E\{Y\} = \xi + \omega \sqrt{2/\pi} \delta \quad (6)$$

$$\text{Variância:} \quad \text{var}\{Y\} = \omega^2 \left(1 - \frac{2\delta^2}{\pi}\right) \quad (7)$$

$$\text{Assimetria:} \quad \gamma_1 = \frac{4-\pi}{2} \frac{E\{X\}^3}{\text{var}\{X\}^{3/2}} \quad (8)$$

$$\text{Curtose:} \quad \gamma_2 = 2(\pi - 3) \frac{E\{X\}^4}{\text{var}\{X\}^2} \quad (9)$$

$$\text{onde,} \quad \delta = \alpha/\sqrt{1+\alpha^2}, \quad E\{X\} = \sqrt{2/\pi} \delta, \quad \text{var}\{X\} = 1 - 2\delta^2/\pi \quad (10)$$

A forma multivariada da distribuição Normal Assimétrica também existe e apresenta-se da seguinte forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{21}^2 & \vdots & \sigma_{p1}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \vdots & \sigma_{p2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p}^2 & \sigma_{2p}^2 & \vdots & \sigma_{pp}^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

onde:

\mathbf{X} : representa o vetor com as p variáveis para análise;

$\boldsymbol{\mu}$: representa o vetor de parâmetros de locação, associados a \mathbf{X} ;

α : representa o vetor de parâmetros de forma, associados a X ;

Σ : representa uma matriz definida positiva de ordem p , com elementos σ_{ii} representando os parâmetros de escala, associados a X_i .

Com isso, X possui distribuição Normal Assimétrica Multivariada, e denota-se por $X \sim \text{SN}_p(\mu; \Sigma; \alpha)$, se sua função densidade é dada por (AZZALINI, CAPITANIO, 1999):

$$f_{\underline{x}}(\underline{X}) = 2\phi_p(x - \underline{\mu}; \underline{\Sigma}) \Phi(\underline{\alpha}^T \underline{\omega}^{-1}(x - \underline{\mu})) \quad (12)$$

onde ϕ_p representa a densidade da distribuição Normal Multivariada Padrão com vetor de média zero e matriz de covariância Σ , Φ representa a função de distribuição acumulada da distribuição Normal Multivariada com média zero e variância um, $\omega = \text{diag}(\sigma_{11}; \sigma_{22}; \dots; \sigma_{pp})$, além disso, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_{ii} > 0$ para $i=1, 2, \dots, p$.

A distribuição Normal Multivariada Assimétrica possui as importantes propriedades:

- Todos os componentes marginais têm uma distribuição SN;
- Sua forma é regulada por um vetor de parâmetros α , que quando este vetor for nulo, retorna a distribuição normal multivariada padrão;

Como na relação da univariada, várias propriedades típicas da distribuição normal multivariada padrão são preservadas na classe assimétrica e em particular a propriedade:

- Transformação linear da forma $\mathbf{A}X$ para qualquer \mathbf{A} , permanece uma variável Multivariada Normal Assimétrica;

A grande motivação para a definição da distribuição Normal Assimétrica é obter uma classe de distribuições paramétricas que apresente uma transição contínua da normalidade para a não-normalidade. A distribuição Normal Assimétrica é útil quando se deseja ajustar os dados observados com a forma da distribuição normal padrão e suas propriedades, mas com distorção em sua assimetria.

3. ÍNDICES DE CAPACIDADE DE PROCESSO

Um processo estável (sob controle) também pode apresentar itens não conformes. Portanto, não é suficiente manter o processo sob controle, deve ser avaliado se o processo é capaz de atender às especificações estabelecidas pelos seus clientes. Esta avaliação pode ser feita através do cálculo dos índices de capacidade que são grandezas estatísticas que traduzem em números adimensionais o grau de habilidade do processo, o fato do processo ser capaz ou não de produzir itens de acordo com especificações estabelecidas pelos seus clientes internos

e externos. Estas especificações são avaliações feitas para as características de qualidade, onde o valor que se deseja é chamado de valor nominal, os limites de especificações no seu valor máximo permitido para uma característica de qualidade é chamado de limite superior de especificação (*LSE*) enquanto o valor mínimo permitido é chamado de limite inferior de especificação (*LIE*). Para grande parte dos índices, quanto maior o seu valor, menor é a probabilidade de que o processo gere itens fora da especificação.

Os índices de capacidade de processo podem ser univariados, quando se estuda a capacidade de uma característica de qualidade, ou multivariados, quando se busca mais de uma característica simultaneamente.

3.1 ÍNDICES DE CAPACIDADE DE PROCESSO UNIVARIADO

Existem índices capazes de medir a capacidade de um processo em situações onde apenas uma variável X é utilizada para monitoramento da característica de qualidade e um dos índices mais conhecidos é o C_p (KANE, 1986) definido por:

$$C_{p=} \frac{LSE-LIE}{6\sigma} \quad (13)$$

sendo: *LSE* e *LIE* os limites superior e inferior de especificação da característica de qualidade de interesse X e σ o desvio-padrão da variável em estudo.

Este índice é fundamentado na distribuição normal considerando-se que basicamente ele relaciona a amplitude de especificação com a amplitude da faixa de dispersão “natural” da característica de qualidade para observações individuais do processo convencionadas como sendo $[\mu-3; \mu+3]$ onde μ é a média do processo. Este índice não leva em consideração qualquer deslocamento na média do processo em relação ao valor nominal da especificação, e só deve ser usado quando a média do processo permanece centrada no valor nominal da especificação.

O outro índice de capacidade que é sensível a um possível deslocamento da média do processo em relação ao valor nominal da especificação é o C_{pk} (KANE, 1986) definido conforme a equação (14). O índice C_{pk} permite avaliar se o processo está sendo capaz de atingir o valor nominal da especificação.

$$C_{pk} = \min (C_{pkL}, C_{pkS}) \quad (14)$$

sendo,

$$C_{pkS} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma}, C_{pkL} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma} \quad (15)$$

Onde: LSE , LIE , σ e μ são definidos como anteriormente.

Um terceiro índice que também é sensível a deslocamentos da média μ em relação à média nominal de especificação é o C_{pm} . Assim como o C_{pk} considera o afastamento da média do processo em relação à média de especificação, medindo a centralização do processo.

O C_{pm} (HASIANG, TAGUCHI, 1985) é definido por:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \quad (16)$$

onde: LSE , LIE , σ e μ são definidos como anteriormente T é o valor nominal da especificação.

Os três índices igualam-se quando o valor nominal da especificação é igual a média da característica de qualidade do processo ($T = \mu$).

Pela definição do índice C_{pm} , um aumento na variabilidade do processo faz com que o denominador do índice aumente e conseqüentemente o valor do índice diminuirá. Além disso, um distanciamento maior do processo em relação ao valor nominal também poderá provocar um aumento no denominador do índice, tornando-o menor.

Uma vantagem do índice C_{pm} em relação ao índice C_p é que ele fornece uma boa idéia da capacidade do processo, tanto para os processos que se apresentam próximos ao valor nominal quanto para os que se apresentam mais afastados dele. Segundo Chan et al. (1988), se o processo segue uma distribuição normal e a média do processo está centrada no valor nominal de especificação, o índice C_{pm} apresenta distribuição semelhante à do índice C_p , mas seu estimador \widehat{C}_{pm} é mais eficiente e apresenta viés menor que \widehat{C}_p , estimador de C_p . Como o índice C_{pm} considera em seu numerador apenas a variabilidade permitida ao processo, a literatura sugere ainda outro índice, o C_{pmk} , que refina mais a análise, já que considera a menor distância entre a média do processo em relação aos limites de especificação em seu numerador. Seu cálculo é dado pela Equação (17).

$$C_{pmk} = \min \left(\frac{LSE - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{\mu - LIE}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \right) \quad (17)$$

em que: LSE é o limite superior de especificação; LIE é o limite inferior de especificação; μ é a média do processo; σ é o desvio-padrão do processo e T é o valor nominal da especificação.

Basicamente, os índices acima representam a relação entre o processo e os limites de especificação dos clientes. Valores de referências são utilizados para classificar o processo como sendo capaz ou não, tais como valores superiores a 1,33 ou 2 que identificam o processo como sendo capaz. (para aprofundamento do assunto ver MONTGOMERY, 2004).

3.2 ÍNDICES DE CAPACIDADE DE PROCESSO MULTIVARIADO

A qualidade de um processo na maioria das vezes é determinada por mais de uma característica de qualidade, sendo então desejável avaliar a capacidade do processo por medidas que levem em consideração todas as características simultaneamente e as correlações que possam existir entre elas. Esta avaliação pode ser feita através do cálculo dos índices de capacidade de processo multivariado, onde os conjuntos de variáveis, valores nominais, limites e parâmetros são representados na forma de vetores. Uma extensão simples para o caso multivariado é tomar a média geométrica dos índices C_{pi} e C_{pki} obtidos para cada característica de qualidade X_i , $i = 1, 2, \dots, p$. No entanto, este procedimento não leva em conta a relação que possa existir entre as variáveis, e por causa destas relações muitos outros índices estão propostos na literatura. Análogo aos índices de processos univariados, para grande parte dos índices multivariados quanto maior for o seu valor, menor é a probabilidade de que o processo gere itens fora das especificações.

Muitos índices de capacidade foram propostos para processos multivariados, entre eles Bernardo e Irony (1996), Niverthi e Dey (2000), Veevers (1998), Yeh e Chen (1999), Li e Lin (1996), Wang *et al* (2000), entre outros. O índice de Mingoti e Glória (2003, 2008) foi proposto para dados com distribuição normal multivariada simétrica, mas Silva e Pinto (2010) propuseram um índice de capacidade para dados com distribuição normal multivariada assimétrica, sendo esta distribuição muito útil quando se deseja ajustar os dados observados com a forma da distribuição normal padrão e suas propriedades, mas com distorção em sua assimetria.

Os índices de capacidade de processo multivariado de Mingoti e Glória (2003, 2008) e Silva e Pinto (2010) serão abordados neste artigo e descritos a seguir.

3.2.1 Índices de Capacidade de Processo Multivariado Proposto por Mingoti e Glória

O índice de capacidade proposto por Mingoti e Glória (2003, 2008) é uma modificação dos índices de capacidade multivariados de Chen (1994) e estão fundamentados nas idéias apresentadas por Hayter e Tsui (1994) no artigo em que estes autores tratavam de um novo teste de hipótese para avaliação de vetores de médias de processos multivariados.

O índice proposto por Chen (1994) é bastante interessante e que depende do valor da função de distribuição cumulativa da coordenada máxima do vetor aleatório X com uma distribuição normal multivariada. No entanto, a resolução analítica ou numérica das equações é necessária para obter seu valor (WANG et al., 2000). Usando algumas idéias sugeridas no Hayter e Tsui (1994) para a correção dos limites em gráficos de controle multivariados, Mingoti e Glória (2003) introduziram um método que permitiu obter o valor numérico do índice de capacidade de Chen usando um procedimento de simulação.

O índice de capacidade multivariado de Chen propõe que: seja V a região de especificação do processo definido como:

$$V = \{X \in \mathbb{R}^P : |X_j - T_j| \leq r_j, j = 1, 2, \dots, p\} \quad (18)$$

onde T_j é o valor nominal da especificação para a variável X_j e r_j , $1 \leq j \leq p$ são constantes de especificação do processo, r_j representa a diferença entre os limites de especificação superior e inferior à média de especificação considerando-se o caso de limites simétricos em relação a T_j . O índice de capacidade multivariado é definido por:

$$MC_p = \frac{1}{r} \quad (19)$$

onde r é tal que:

$$Prob \left[\max \left\{ \left| \frac{X_j - T_j}{r_j} \right|, j = 1, 2, \dots, p \right\} \leq r \right] = 1 - \alpha \quad (20)$$

O processo é considerado capaz com um intervalo de confiança de $(1-\alpha)100\%$ quando o valor de MC_p é maior do que 1 e incapaz caso contrário. O valor r é obtido usando a função de distribuição acumulada F_H da variável H definida como:

$$H = \max \left\{ \left| \frac{X_j - T_j}{\sigma_j} \right|, j = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (21)$$

Portanto, para uma certa probabilidade α , $0 < \alpha < 1$, o valor de r é tal que $r = F_H^{-1}(1-\alpha)$. Então, se MC_p maior do que 1, o processo será considerado capaz com um coeficiente de confiança determinados $(1-\alpha)$ 100%.

Sejam $LIE_j = T_j - r_j$ e $LSE_j = T_j + r_j$ os limites inferior e superior especificados para cada característica de qualidade X_j , Mingoti e Glória (2003,2008) propuseram uma modificação na forma de se obter a constante r em (18), introduzindo nesta modificação a informação da correlação que o processo possa ter e estenderam o índice para situações mais gerais, como será mostrado a seguir.

3.2.1.1 Processo centrado no vetor médio nominal

Considere a região de especificação V definida como em (18). Usando o algoritmo descrito no Quadro 1, para um valor fixo de α , $0 < \alpha < 1$, pode-se encontrar a constante $C_{r\alpha}$ tal que:

$$Prob \left[\max \left\{ \left| \frac{X_j - T_j}{\sigma_j} \right|, j = 1, 2, \dots, p \right\} \leq C_{r\alpha} \right] = 1 - \alpha \quad (22)$$

Portanto o processo será considerado capaz se para todo $j = 1, 2, \dots, p$.

$$\frac{r_j}{\sigma_j C_{r\alpha}} \geq 1 \quad (23)$$

ou equivalente

$$\frac{\sigma_j C_{r\alpha}}{r_j} \leq 1 \quad (24)$$

onde: $C_{r\alpha}$ é o ponto crítico usado no teste estatístico de Hayter e Tsui para o vetor de médias populacional.

O valor de $C_{r\alpha}$ define a região crítica para rejeição da hipótese nula $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$, sendo a hipótese alternativa $H_a: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$, onde $\boldsymbol{\mu}_0$ é o vetor de médias estabelecido na hipótese nula para o processo. Quando o vetor aleatório \mathbf{X} tem distribuição normal multivariada simétrica com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_{p \times p}$, o vetor aleatório com as variáveis padronizadas \mathbf{Z} tem distribuição Normal Multivariada simétrica com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias $\mathbf{P}_{p \times p}$, que por sua vez é a matriz de correlação do vetor aleatório \mathbf{X} cujas coordenadas são as p características de qualidade avaliadas.

A constante $C_{r\alpha}$ é obtida através do algoritmo (Quadro1) que envolve a seleção de amostras aleatórias de uma distribuição normal multivariada simétrica com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias $\mathbf{P}_{p \times p}$. Quando a matriz $\mathbf{P}_{p \times p}$ não está previamente especificada, ela pode ser estimada através da matriz de correlação amostral $\mathbf{R}_{p \times p}$ utilizando dados amostrais do vetor aleatório \mathbf{X} . Desse modo, o valor crítico $C_{r\alpha}$ é obtido por um procedimento que busca incorporar a correlação entre as características de qualidade para determinação da região de rejeição da hipótese nula, sendo que esta informação afeta todos os intervalos da distribuição simultaneamente, pois a presença de correlação dos dados faz com que as probabilidades se concentrem ao longo de uma linha e as curvas de níveis apresentem formas elipsoidais (JOHNSON, WICHERN, 1998).

Passo 1. Gerar um grande número N de vetores de observação de uma distribuição normal p -variada com vetor de medias zero e matriz de covariâncias $\mathbf{P}_{p \times p}$. Denote esses vetores por: $\mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \dots, \mathbf{Z}^N$.

Passo 2. Calcule a estatística M para cada um dos N vetores $\mathbf{Z}^i = (\mathbf{Z}_1^i, \mathbf{Z}_2^i, \dots, \mathbf{Z}_p^i)'$, $i = 1, 2, \dots, N$, gerados no passo 1, isto é, calcule:

$$\mathbf{M}^i = \max\{|\mathbf{Z}_j^i|, j = 1, 2, \dots, p\}$$

Passo 3. Obtenha a distribuição empírica da estatística \mathbf{M} utilizando os vetores, encontre a ordenada correspondente ao quantil ordem $(1-\alpha)$ e utilize esse valor como o correspondente a constante critica $C_{r\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

Quadro 1. Algoritmo para determinação da constante $C_{r\alpha}$.
Fonte: Mingoti e Glória (2005, p.254).

Assim, Mingoti e Glória (2003,2008) definiram o índice de capacidade multivariado global para o processo como:

$$C_p^m = \min\left\{\frac{r_j}{\sigma_j C_{r\alpha}}, j = 1, 2, \dots, p\right\} \quad (25)$$

O valor do índice é global, no entanto cada coordenada $j, j=1, 2, \dots, p$, representa o índice de capacidade da variável X_j correspondente, podendo ser usado para quantificar o processo na variável especificada. O índice C_p^m leva em consideração a estrutura de correlação das variáveis do vetor \mathbf{X} , uma vez que a constante $C_{r\alpha}$ é obtida a partir da matriz de correlação de \mathbf{X} . O processo é considerado capaz se C_p^m é maior ou igual a 1.

3.2.1.2 Processo não centrado no vetor médio nominal

Em muitas situações o processo está em controle estatístico, porém nem sempre está centrado no vetor de médias de especificação. O C_p^m definido em (25) não é sensível às mudanças no vetor de médias do processo, portanto algumas modificações são necessárias. Para esses casos, o coeficiente multivariado C_{pk}^m proposto por Mingoti e Glória (2008) é definido por:

$$C_{pk}^m = \min \left\{ \left(\frac{\mu_j - LIE_j}{C_{ra}\sigma_j}; \frac{LSE_j - \mu_j}{C_{ra}\sigma_j} \right), j = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (26)$$

onde: μ_j e σ_j representam a média e o desvio padrão da característica de qualidade j . Para o caso desses parâmetros serem estimados substitui-se em (26) μ_j por \bar{X}_j (média amostral de X_j) e σ_j pelo desvio padrão amostral de X_j . Este índice, portanto leva em consideração possíveis desvios dos valores médios do processo em relação aos valores médios especificados. O C_p^m e o C_{pk}^m são índices globais de capacidade, mas cada coordenada do vetor mede a capacidade da variável X_j correspondente. Quando o processo é centrado no vetor médio nominal a equação (26) é igual à equação (25).

3.2.1.3 Limites de especificações não centrados no vetor médio nominal

Sejam $LIE_j = T_j - r_j^l$ e $LSE_j = T_j + r_j^h$ os limites inferiores e superiores especificados para cada característica de qualidade X_j . O índice C_p^m neste caso é definido por:

$$C_p^m = \min \{ C_{pj}, j = 1, 2, \dots, p \} \quad (27)$$

onde

$$C_{pj} = \left[\frac{r_j^l + r_j^h}{2\sigma_j C_{ra}} \right], j = 1, 2, \dots, p \quad (28)$$

onde C_{pj} é a medida entre a amplitude de especificação e de controle do processo para a variável X_j . O processo é considerado capaz com um nível de confiança de $(1-\alpha)100\%$ quando C_p^m for maior ou igual a 1. Quando os limites de especificação são centrados na média nominal a equação (28) é igual à equação C_p^m definida em (25).

Uma extensão deste índice de capacidade de processo multivariado proposto por Mingoti e Glória é a utilização do vetor de médias de especificação das variáveis, motivado através do conceito de erro quadrático médio (Mingoti, Oliveira, Conceição 2011):

$$C_{pmB}^M = \min\{C_{pmB}^M, i = 1, 2, \dots, p\} \quad (29)$$

onde,

$$C_{pmB}^M = \frac{LSE_j - LIE_j}{2C_{r\alpha}(\sigma_j^2 + (\mu_j - T_j)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_j^I + r_j^{II}}{2C_{r\alpha}(\sigma_j^2 + (\mu_j - T_j)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (30)$$

sendo todos os parâmetros como definidos anteriormente e T_j a média de especificação da característica de qualidade X_j , o que mostra que o índice C_{pm}^M também leva em consideração a diferença entre os vetores de médias do processo e especificação.

Nos estudos realizados pelos autores, os índices de Mingoti e Glória obtiveram melhor desempenho em comparação ao índice de Niverthi e Dey (2000), apresentando casos onde até processos capazes tiveram indicação de serem incapazes. As simulações apresentadas mostraram a boa qualidade nas estimativas dos índices dos processos e indicaram a superioridade de Mingoti e Glória em termos de precisão, apresentando menor coeficiente de variação nos resultados em relação à média.

3.2.2 Índices de Capacidade de Processo Multivariado Proposto por Silva e Pinto

Silva e Pinto (2010) propõem um índice de capacidade de processo multivariado para dados distribuídos de forma Normal Multivariada Assimétrica.

A estratégia utilizada para desenvolver o cálculo do índice de Silva e Pinto (2010) é realizar uma transformação nos dados, de modo que, as variáveis transformadas não apresentem correlações. Pode-se calcular os índices para cada variável, e depois, fazer uma composição dos mesmos para obter um índice global, e com isso, expressar o desempenho do processo multivariado. A transformação utilizada é proposta por Azzalini e Capitanio (1999), onde considera que, se $X \sim SN_p(\underline{\mu}; \underline{\Sigma}; \underline{a})$, então existe uma matriz não singular $T_{p \times p}$, tal que, $Z = TX \sim SN_p(\underline{0}; I_p; \underline{a}^*)$, com I_p representando uma matriz identidade de ordem p . Além disso, a covariância de Z é dada por,

$$Cov(Z) = T^T Cov(X) T = diag(\eta_1; \dots; \eta_p) ; \text{ com } 0 < \eta_p \leq 1. \quad (31)$$

O parâmetro de assimetria é $\underline{\alpha}^* = \mathbf{T}^{-1} \underline{\alpha} = (0; \dots; 0; \alpha_p)^T$, onde α_p é o único elemento não nulo. Além disso, os Z_i 's são independentes.

Para a matriz \mathbf{T} , tem que $\mathbf{T} = \mathbf{E} \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{A}$, de modo que:

- \mathbf{E} : representa a matriz de autovetores $p \times p$ da matriz Σ ;
- $\mathbf{D}^{-1/2}$: representa uma matriz diagonal de ordem p , tal que, $\mathbf{D}^{-1/2} = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}; \dots; 1/\sqrt{\lambda_p})$, onde λ_i , $i = 1; \dots; p$, representa os autovalores da matriz Σ , com $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$;
- \mathbf{A} : representa a matriz de autovetores $p \times p$ da matriz $\Psi = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{E}^T \text{Cov}(X) \mathbf{E} \mathbf{D}^{-1/2}$.

Com isso, $Z_i \sim \text{SN}(0; 1; \alpha_i^*)$, $i = 1; \dots; p$, então, pode-se calcular os índices de performance para cada variável i da seguinte forma:

$$P_p^i = \frac{LSE^i - LIE^i}{q_3^i - q_1^i}, P_{pl}^i = \frac{q_2^i - LIE^i}{q_2^i - q_1^i}, P_{pu}^i = \frac{LSE^i - q_2^i}{q_3^i - q_2^i} \text{ e } P_{pk}^i = \min(P_{pl}^i, P_{pu}^i). \quad (32)$$

onde: LSE_i , LIE_i : representa o limite superior e inferior de especificação para a i -ésima variável, respectivamente (modificados pela transformação);

- q_1^i : representa o quantil da distribuição Z_i , onde $P(Z_i \leq q_1^i) = \gamma/2$;
- q_2^i : representa o quantil da distribuição Z_i , onde $P(Z_i \leq q_2^i) = 0,5$;
- q_3^i : representa o quantil da distribuição Z_i , onde $P(Z_i \leq q_3^i) = 1 - \gamma/2$;
- γ : representa o nível de significância que em geral utiliza 0,0027;

Com isso, para expressar os índices de performance globais, utiliza-se as expressões dadas em (33).

$$MP_{pk} = \left(\prod_{i=1}^p P_{pk}^i \right)^{1/p}, MP_{pl} = \left(\prod_{i=1}^p P_{pl}^i \right)^{1/p} \text{ e } MP_{pu} = \left(\prod_{i=1}^p P_{pu}^i \right)^{1/p} \quad (33)$$

onde: MP_{pk} é a versão multivariada do índice P_{pk}^i , que é expresso como a média geométrica entre os índices univariados, calculados para a i -ésima variável. Os demais índices seguem o mesmo padrão.

Comparados em seu artigo, via simulação dos dados, os valores dos índices de Silva e Pinto com o índice proposto por Wang e Chen (1998), os quais utilizam conceitos de componentes principais e suposição de normalidade multivariada, os resultados indicaram que o índice de Wang e Chen é realmente influenciado pela assimetria dos dados, mostrando superioridade do índice de Silva e Pinto nos casos de assimetria.

3 SIMULAÇÃO

Nesta seção é apresentada a metodologia para comparação dos dois índices de capacidade multivariados via simulação Monte Carlo com o objetivo de avaliar a qualidade dos índices propostos nas situações onde os dados apresentam distribuição Normal Multivariada Simétrica e Assimétrica. Todos os resultados obtidos e simulações realizadas foram com a utilização do software livre *R* versão 2.14.0, com utilização do pacote estatístico *fMultivar* versão 240.10068 .

O estudo foi realizado para quatro casos teóricos onde os processos com distribuição Normal Bivariada comportam-se centrados no valor nominal de especificação e capazes (caso 1), centrados no valor nominal de especificação e não capazes (caso 2), não centrados no valor nominal de especificação e capazes (caso 3) e por último, não centrados no valor nominal de especificação e não capazes (caso 4). O vetor de Limite de Especificação da variável característica X_1 , o vetor de Limite de Especificação da variável característica X_2 e o vetor de médias teóricas μ dos processos, para cada caso, é apresentado na Tabela 1. Para cada um dos casos foram realizados os oito cenários de variações de parâmetros de número de amostras n , correlação entre as duas variáveis e parâmetros de forma α , de acordo com a Tabela 2, onde foram gerados para cada combinação $K=100$ amostras aleatórias de tamanho n de uma distribuição Normal Bivariada com vetor de locação μ e desvio padrão σ_{ii} igual a 1.

Tabela 1. Casos teóricos de tipos de processo para simulação

Caso	LE X_1	LE X_2	Vetor de μ	Tipo de Processo
1	[-5 0 5]	[-4 0 4]	(0 ; 0)	Centrados e capazes
2	[-5 0 5]	[-2 0 2]	(0 ; 0)	Centrados e não capazes
3	[-5 0 5]	[-4 0 4]	(1 ; 0,5)	Não centrados e capazes
4	[-5 0 5]	[-4 0 4]	(3 ; 3)	Não centrados e não capazes

Tabela 2. Cenários de variações de amostras n , correlação entre as duas variáveis e vetor de forma α

Cenários	n	Correlação	Vetor de forma (α)
1	50	0	(0 ; 0)
2	100	0	(0 ; 0)
3	50	0,75	(0 ; 0)
4	100	0,75	(0 ; 0)
5	50	0,75	(300 ; 300)
6	100	0,75	(300 ; 300)
7	50	0	(300 ; 300)
8	100	0	(300 ; 300)

Na prática os índices de capacidade de processos são estimados a partir de amostras do processo. No procedimento de geração dos dados via simulação com base nos valores teóricos, com cada amostra de tamanho n , o vetor de médias do processo foi estimado pelo vetor de médias amostral, a matriz de covariâncias do processo pela matriz de covariâncias amostral e a correlação do processo pela correlação amostral. Os dois índices de capacidade foram calculados para um nível de confiança de 99,73%.

A constante $C_{r\alpha}$ necessária para o cálculo dos índices de Mingoti e Glória foi obtida através do algoritmo de simulação apresentado no Quadro 1, sendo a matriz de correlação teórica substituída pela matriz de correlação amostral em cada amostra e o valor de $N=10000$, como sugerido no artigo(MINGOTI, GLORIA, 2005). Igualmente, para determinação do valor do índice de capacidade do processo proposto por Mingoti e Glória, os valores de média e desvio do processo foram substituídos pelos valores de média e desvio amostral.

Para o cálculo do índice de capacidade do processo proposto por Silva e Pinto, a transformação proposta por Azzalini e Capitanio (1999) dos dados X_i em Z_i , foi gerada a partir da covariância amostral.

4 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados dos coeficientes de capacidade de Silva e Pinto(MP_{pk}) e Mingoti e Glória (C_{pk}^m), para cada cenário e separados por cada caso. A Tabela 3 mostra os resultados dos processos com distribuição Normal Bivariada centrados no valor nominal de especificação e capazes (caso 1), a Tabela 4 os processos centrados no valor nominal de especificação e não capazes (caso 2), a Tabela 5 os não centrados no valor nominal de especificação e capazes (caso 3) e na Tabela 6, não centrados no valor nominal de especificação e não capazes (caso 4). Cada tabela apresentando o valor médio dos coeficientes e o desvio padrão gerado no cálculo dos 100 valores gerados, além dos valores de média e mediana de cada característica do processo simulado.

Em todas as situações, comparando o número de amostras com o resultado de cada índice de capacidade de processo, na medida em que o n aumenta de 50 para 100 amostras, os índices de capacidade diminuem seu valor e reduzem a variação dos resultados obtidos via simulação. Em todos os 4 casos, quando compara-se os resultados com e sem correlação dos dados (cenários 3-1, 4-2, 5-7, 6-8), nota-se um aumento do valor dos índices de capacidade devido as probabilidades se concentrarem mais próxima ao valor médio da distribuição ao longo de uma linha, no caso bivariado as curvas de contorno apresentam-se na forma

elipsoidal. Nos cenários onde a assimetria está fortemente simulada (cenários de 5 a 8), o valor da média amostral deslocou-se em relação ao valor teórico no sentido do sinal da assimetria e a mediana amostral apresentou valor diferente da média amostral, sendo o valor da mediana amostral mais próximo do valor teórico da média em comparação ao resultado da média amostral.

Tabela 3. Caso teórico 1 – Processo centrado e capaz.

Cenários	MP_{pk}	$dp MP_{pk}$	C_{pk}^m	$dp C_{pk}^m$	Média X_1	Mediana X_1	Média X_2	Mediana X_2
1	2,068	0,278	2,474	0,233	0,007	0,007	-0,004	-0,009
2	1,895	0,222	2,183	0,143	-0,004	0,000	-0,001	0,002
3	2,094	0,339	2,652	0,260	-0,001	0,001	0,002	0,011
4	1,926	0,190	2,299	0,131	0,006	0,004	0,008	0,007
5	3,374	0,668	3,298	0,309	0,745	0,672	0,750	0,678
6	3,008	0,438	2,860	0,189	0,747	0,674	0,751	0,675
7	2,856	0,535	2,793	0,237	0,558	0,542	0,573	0,555
8	2,456	0,308	2,388	0,156	0,560	0,543	0,570	0,552

Fonte: Pesquisador

Tabela 4. Caso teórico 2 – Processo centrado e não capaz.

Cenários	MP_{pk}	$dp MP_{pk}$	C_{pk}^m	$dp C_{pk}^m$	Média X_1	Mediana X_1	Média X_2	Mediana X_2
1	1,292	0,173	0,995	0,120	-0,004	-0,004	-0,001	0,003
2	1,195	0,149	0,879	0,076	0,006	0,004	0,001	-0,002
3	1,314	0,172	1,032	0,109	-0,007	-0,003	-0,006	-0,007
4	1,188	0,134	0,909	0,064	-0,003	0,001	-0,002	0,000
5	1,925	0,448	1,022	0,153	0,750	0,669	0,747	0,671
6	1,663	0,402	0,872	0,095	0,748	0,672	0,742	0,662
7	1,555	0,396	0,951	0,130	0,567	0,557	0,560	0,542
8	1,314	0,266	0,808	0,083	0,563	0,541	0,564	0,548

Fonte: Pesquisador

Tabela 5. Caso teórico 3 – Processo não centrado e capaz.

Cenários	MP_{pk}	$dp MP_{pk}$	C_{pk}^m	$dp C_{pk}^m$	Média X_1	Mediana X_1	Média X_2	Mediana X_2
1	1,713	0,265	1,861	0,184	0,993	0,996	0,495	0,500
2	1,557	0,176	1,607	0,112	0,999	0,990	0,508	0,512
3	1,704	0,293	1,941	0,190	1,001	0,993	0,493	0,492
4	1,537	0,203	1,667	0,129	1,005	1,004	0,508	0,503
5	2,702	0,689	2,204	0,237	1,741	1,672	1,239	1,170
6	2,479	0,562	1,931	0,173	1,750	1,672	1,247	1,175
7	2,266	0,504	1,930	0,198	1,560	1,547	1,073	1,057
8	2,045	0,398	1,655	0,136	1,564	1,548	1,058	1,036

Fonte: Pesquisador

Tabela 6. Caso teórico 4 – Processo não centrado e não capaz.

Cenários	MP_{pk}	$dp MP_{pk}$	C_{pk}^m	$dp C_{pk}^m$	Média X_1	Mediana X_1	Média X_2	Mediana X_2
1	0,662	0,108	0,536	0,092	3,000	3,003	2,992	2,986
2	0,587	0,076	0,459	0,058	2,999	3,000	2,993	2,990
3	0,666	0,126	0,557	0,099	2,993	2,995	2,993	2,995
4	0,590	0,080	0,472	0,058	2,993	2,993	2,994	3,000
5	1,318	0,516	0,202	0,084	3,748	3,671	3,751	3,675
6	1,199	0,472	0,176	0,053	3,753	3,673	3,748	3,676
7	NA	NA	0,283	0,086	3,561	3,542	3,568	3,547
8	0,962	0,385	0,243	0,051	3,565	3,550	3,565	3,542

Fonte: Pesquisador

Em relação à assertividade do índice em indicar a capacidade do processo corretamente, o índice MP_{pk} não conseguiu identificar a incapacidade do processo quando este era centrado e assimétrico (Tabela 4), devido utilizar a média geométrica na determinação do valor do índice multivariado. Nestes casos teóricos de processos capazes e com distribuição simétrica, os dois índices indicaram tratar-se de processos capazes (maior que 1,33) e a diferença entre os dois índices diminuem na medida em que n aumenta.

5 DISCUSSÕES E ANÁLISES

Neste artigo, mostrou-se a comparação de dois índices de capacidade de processo multivariado propostos para distribuições normais de diferentes comportamentos, sendo o índice de Mingoti e Glória para processos multivariados com distribuição normal simétrica e o índice de Silva e Pinto para processos multivariados com distribuição assimétrica.

Os dois índices incorporaram em seus resultados a informação da correlação dos dados, aumentando o valor do índice quando os dados apresentaram correlação forte. O índice C_{pk}^m assimilou bem a assimetria na distribuição Normal Multivariada Assimétrica, pois a diferença causada pela assimetria deslocando a média da mediana, não causou o impacto esperado de distorção do resultado de capacidade do processo e podendo ser estendido o índice para distribuições Normais Multivariadas Assimétricas, pois além de assertivo nos resultados de capacidade, o índice apresentou-se melhor em relação à precisão dos resultados. Os índices de Mingoti e Glória possuem como características a incorporação da informação de correlação dos dados em sua constante C_{ra} , além de utilizar na determinação do valor do índice multivariado a operação *mínimo* entre os índices univariados, trazendo a vantagem de o valor ser determinado mesmo sendo negativo.

O índice MP_{pk} possui a característica de utilizar o valor da mediana em seus cálculos, prática largamente difundida nos casos de assimetria e não normalidade, vantagem esta aparente nos resultados apresentados na determinação dos índices nas situações de distribuições assimétricas. O índice MP_{pk} apresentou um coeficiente de variação maior que o C_{pk}^m nos seus resultados. Devido utilizar a média geométrica na determinação do valor do índice multivariado, o MP_{pk} não conseguiu identificar a incapacidade do processo como um resultado geral e em alguns casos não conseguiu determinar nenhum valor devido a operação apresentar raiz negativa, um problema que pode ser contornado utilizando o operador *mínimo* na determinação do valor multivariado. Excluindo este problema da determinação do valor multivariado através da média geométrica, o índice MP_{pk} possui resultados satisfatórios tanto nas distribuições normais simétricas como nas assimétricas, além de incorporar também a correlação que possa existir entre os dados.

6 TRABALHOS FUTUROS

Neste estudo não foram calculadas as probabilidades de que o processo gere itens não conformes de acordo com os limites de especificação e não foram realizados os estudos para os casos de distribuições Normais Multivariadas Simétricas e Assimétricas com $p > 2$ vetores característicos, sendo sugerido para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- AZZALINI A. A class of distributions which includes the normal ones. **Scand. J. Statist.** 12, p.171–178. 1985.
- AZZALINI A.; CAPITANIO, A. Statistical Applications of the multivariate skew normal distribution. **Journal of the Royal Statistic Society**, series B, 61, p. 579-602, 1999.
- BERNARDO, J. M.; IRONY, T. X. A general multivariate bayesian process capability index. **Statistician**, v. 45, n. 3, p. 487-502, 1996.
- BYERS, R. H. Half-Normal Distribution. **Encyclopedia of Biostatistics**, John Wiley & Sons, 2005.
- CHAN, L. K.; CHENG, S. W., SPIRING, F. A. A new measure of process capability: Cpm. **Journal of Quality Technology**, v. 20, n. 3, p. 162-75, 1988.
- CHEN, H. A multivariate process capability index over a rectangular solid tolerance Zone. **Statistica Sinica**, vol.4, p. 749-758, 1994.
- COSTA, F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. São Paulo: Atlas, 2005.

- DELERYD, M. A pragmatic view on process capability studies. **International Journal of Production Economics**, Vol. 58, p. 319-330, 1999.
- GONÇALEZ, P.U.; WERNER, L. Comparação dos índices de capacidade do processo para distribuições não-normais. **Gestão e Produção**, Vol. 16 No. 1, p. 121-132, 2009.
- HAYTER, A. J.; TSUI, K. L. Identification and quantification in multivariate quality control problems. **Journal of Quality Technology**, v. 26, n. 3, p. 197-208, 1994.
- HSIANG, T. C.; TAGUCHI, G. A Tutorial on Quality Control and Assurance – The Taguchi Methods. **ASA Annual Meeting**: Las Vegas, Nevada, 1985.
- JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 4th edition. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- JURAN, J. M.; GODFREY, A. B. **Quality control handbook**. McGraw-Hill, New York, p. 588-614, 1998.
- KANE, V. E. Process Capability Indices. **Journal of Quality Technology**, v. 18, n. 1, p. 41–52, 1986.
- LEONE F.C.; NELSON L.S.; NOTTINGHAM R.B. The folded normal distribution. **Technometrics**, v. 3, p.543–550, 1961.
- LI, Y.; LIN, C. Multivariate Cp Value. Chinese **Journal of Applied Probability and Statistics**, n.12, p. 132-138, 1996.
- MINGOTI, S. A.; GLÓRIA, F. A. A. Comparing mingoti and glória's and niverthi and dey's multivariate capability indexes. **Produção**, v. 18, n. 3, p. 598-608, 2008.
- MINGOTI, S.A., GLÓRIA, F.A.A. Uma proposta de modificação do índice de capacidade multivariado de Chen. In **Anais do XXIII ENEGEP**, Ouro Preto, Minas Gerais, 2003.
- MINGOTI, S.A.; GLORIA, F. A. A. Comparando os métodos paramétrico e não-paramétrico na determinação do valor crítico do teste estatístico de médias proposto por Hayter e Tsui. **Revista Produção**, v. 15, n. 2, p. 251-262, 2005.
- MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. 4ed .Rio de Janeiro: LTC, 513 p., 2004.
- NIVERTHI, M.; DEY, D. K. Multivariate process capability: a bayesian perspective. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 29, n. 2, p. 667-687, 2000.
- POLANSKY, A. M. A Smooth Nonparametric Approach to Multivariate Process Capability, **Technometrics**, vol. 43, n. 2, p. 199-211, 2001.
- SILVA, G. F.; PINTO JUNIOR, D. L. Análise da performance de processos multivariados assimétricos, **Revista Eletrônica de Matemática**, n. 2, 2010.
- TAGUCHI, G.; ELSAYED, A. E.; HSIANG, T. **Engenharia da Qualidade em Sistemas de Produção**. São Paulo: McGraw-Hill, 1990.
- VEEVERS, A. Viability and capability indexes for multiresponse processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 25, n. 4, p. 545-558, 1998.
- WANG, F.K.; CHEN, J.C. Capability Index Using Principal Components Analysis. **Quality Engineering**, v. 11, n. 1, p. 21-27, 1998.
- WANG, K. F. *et al.* Comparison of Three Multivariate Process Capability Indices. **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 3, p. 263-275, 2000.

WU, C. W.; PEARN, W. L.; Kotz, S. An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance. **International Journal of Production Economics**, v. 117, p. 338-359, 2009.

YEH, A. B.; CHEN, H. A Nonparametric Multivariate Process Capability Index, 1999.

Performance Indices of Multivariate Process Capability: A comparison of indices via simulation

ABSTRACT

One of the approach to quality is the ability of the product to obey specific customer requirements, and their required specifications are necessary mechanisms for monitoring the process and measures to quantify their ability to obey them. The capability indices are dimensionless measures used to quantify the relationship between process performance and specification limits for one or more characteristic, and this quantification is essential to the success of improvements in quality. Many capability indices have been proposed for multivariate processes, such as index Mingoti and Glória (2003,2008) for data with symmetric multivariate normal distribution, but Silva and Pinto (2010) proposed a capability index for data with multivariate skew normal distribution, which is distribution very useful when you want to adjust the observed data with the shape of the standard normal distribution and its properties, but with distortion in its asymmetry. This article was carried out through simulation, a comparison between these two indices of process capability considering several different scenarios and showed that the index of Mingoti and Glória has assertiveness in determining the capacity for symmetrical and asymmetric data with respect to the index of Pinto and Silva, that showed satisfactory results, but hampered by their formulation that use geometric mean to determine value.

Keywords: Index of Multivariate Process Capability, Multivariate Skew Normal Distribution.

Este artigo será submetido à REVISTA GESTÃO E PRODUÇÃO