



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA



**Validação das aproximações do tipo Hele-Shaw
aplicadas ao escoamento de fluídos viscoplásticos em
uma cavidade simétrica.**

ARIANE PRISCILLA WANDER

Orientador: Prof. Nilo Sérgio Medeiros Cardozo, D.Sc.

Co-orientador: Prof. Argimiro Resende Secchi, D.Sc.

Porto Alegre

Julho de 2011

ARIANE PRISCILLA WANDER

**VALIDAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES DO TIPO HELE-
SHAW APLICADAS AO ESCOAMENTO DE FLUÍDOS
VISCOPLÁSTICOS EM UMA CAVIDADE.**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
APRESENTADO COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
BACHAREL EM ENGENHARIA QUÍMICA.

Porto Alegre
2011

Agradecimentos

Aos meus pais Ari Roberto Wander e Viviane Margareth Fredrich Wander que sempre me apoiaram em todas as difíceis decisões que tive de tomar ao longo da minha graduação e estiveram do meu lado em todos os momentos de minha vida, e foram grandes exemplos de luta e superação de desafios.

Ao meu avô Cebaldo Fredrich pela sua dedicação a família, por ter mostrado a todos o caminho correto, por valorizar e incentivar suas filhas e netos a estudar e ser sempre melhor.

Ao meu orientador Prof. Dr. Nilo Sergio por todo o tempo disponibilizado para me oferecer uma excelente orientação, por sua amizade, paciência, confiança, liberdade e estímulo no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Argimiro Secchi pela sugestão, confiança, por seu apoio e orientação neste trabalho. E às suas alunas Monique Mendes e Thais Machado Farias pelos resultados de seus estudos e discussões sobre o tema deste trabalho.

Ao Eng. João Antonio Oliveira e a Eng. Andréia Rodrigues Machado pela ajuda na aprendizagem do software OpenFoam.

Ao Eng. Rafael Busato Sartor por seu companheirismo, compreensão e carinho sempre. E pelos conhecimentos em métodos numéricos e todo auxílio oferecido para a realização deste trabalho.

A minha tia Cristiane, meu tio Nery, meu primo Eduardo e minha vó Ester meu agradecimento pelo incentivo, reconhecimento e apoio durante toda minha graduação.

A todos os professores desta instituição que sempre se mostraram competentes, dedicados e preocupados em passar seus conhecimentos.

A todos que de certa forma estiveram presentes nesta minha caminhada até este momento.

“Não são os sonhos que dizem o lugar onde vamos chegar, mas são eles que nos dão a força necessária para tirarmos do lugar”

Augusto Cury

v

SUMÁRIO

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas.....	xi
Lista de Símbolos	xiii
Resumo	xv
1. Introdução	1
2. Fundamentação Teórica e Revisão bibliográfica	3
2.1 Equações governantes	3
2.2. Aproximação Hele-shaw	5
2.3. Análise Matemática do problema proposto por Hele-Shaw.....	6
2.4. Utilização da aproximação Hele-Shaw na obtenção de soluções analítica para escoamentos de fluidos viscoplásticos	10
3. Metodologia.....	14
3.1. Definição dos modelos viscoplásticos e Obtenção da Solução analítica para estes modelos.....	14
3.2. Definição dos parâmetros, especificações e geometria a serem utilizados nos testes.	15
3.3. Implementação da simulação numérica para o escoamento tridimensional. .	16
3.3.1. OpenFoam e estruturação do caso implementado para solução numérica	16
3.3.2. Método Numérico aplicado a solução do problema.	18
3.3.3 Numero de Courant.....	19
4. Resultados e discussão.....	21
4.1. testes de malha.	21
4.2. Obtenção do tempo para atingir o estado estacionário.....	23
4.3 Solução analítica para os dois modelos utilizados	24
4.4 Comparação entre as predições das soluções analíticas pela aproximação de hele-shaw com os resultados numéricos para o problema 3D.....	25
5. Conclusão	28
6. Bibliografia.....	30

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Célula de Hele-Shaw.....	5
Figura 2. escoamento em uma celula Hele-Shaw.....	6
Figura 3. Célula de Hele-Shaw para simetria de escoamento no eixo z	11
Figura 4. Geometria do problema simulado.....	16
Figura 5. Estutura de diretórios do OpenFoam.....	17
Figura 6. Células discretizadas para o método dos volumes finitos	19
Figura 7. Analise da duração da etapa transiente do processo.....	24

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Parâmetros para as equações de Hershel-Bulkley	15
Tabela 2. Resultados de teses variando as divisões da malha em x , y e z	21
Tabela 3. Resultado do teste de malha variando a razão $\Delta x/\Delta z$	22
Tabela 4. Resultado do teste de para refinamento da malha variando $\Delta x/\Delta z$	22
Tabela 5. Variação do Courant para a razão $\Delta x/\Delta y$ igual a 5.....	23
Tabela 6. Teste de refinamento de Malha.....	23
Tabela 7. Resultados Analíticos para o Modelo de Bingham.....	26
Tabela 8. Resultado Numérico para o modelo de Bingham.....	26
Tabela 9. Resultados comparativos Bingham.....	26
Tabela 10. Resultados Analíticos para o modelo de Herschel-Bulkley.	27
Tabela 11. Resultados obtidos pelo método numérico para o modelo de Herschel-Bulkley.	27
Tabela 12. Resultado comparativo Herschel-Bulkley.....	27

LISTA DE SÍMBOLOS

- x – direção do sistema de coordenadas, direção de escoamento
 y - direção do sistema de coordenadas, largura da geometria estudada
 z - direção do sistema de coordenadas, espessura do escoamento
 $\underline{\delta}_x$ - vetor unitário na direção x
 $\underline{\delta}_y$ - vetor unitário na direção y
 \underline{v} - vetor velocidade
 v_x - módulo do componente da velocidade na direção x
 v_y - módulo do componente da velocidade na direção y
 v_z - módulo do componente da velocidade na direção z
 h^- - distância inferior entre a placa e eixo central de escoamento
 h^+ - distância superior entre a placa e eixo central de escoamento
 ρ - massa específica do fluido
 \underline{g} - vetor aceleração da gravidade,
 $\underline{\tau}$ - tensor da tensão de cisalhamento
 τ - módulo da tensão de cisalhamento,
 $\underline{\delta}$ - tensor matriz unitária em todas as direções
 η - viscosidade não-newtoniana.
 $\dot{\gamma}$ - taxa de cisalhamento
 t - tempo de escoamento
 \underline{v} - vetor velocidade
 v - módulo da velocidade de escoamento.
 p - pressão
 τ_y - tensão mínima de escoamento,
 K_H - constante de Herschel-Bulkley
 n - expoente de Herschel-Bulkley
 ∂ - derivada parcial
 ∇ - gradiente unidimensional
 $\partial\rho/\partial t$ - variação da massa específica do fluido com o tempo
 $\underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v}$ - divergente do fluxo mássico.
 $D(\underline{v})/Dt$ - derivada material do vetor velocidade
 $\underline{\nabla} \cdot \underline{\tau}$ - divergente de um campo tensorial
 $\underline{\nabla} p$ - gradiente de pressão.

τ_{ij} – tensão de cisalhamento nas direções

∂_z - derivada na direção z

∂_x - derivada parcial com a componente x

∂_y - derivada parcial com a componente y

∇ - operador gradiente

μ - viscosidade newtoniana

τ_{xz} - módulo do tensor da tensão de cisalhamento na direção z sobre a superfície normal ao eixo x

τ_{yz} - módulo do tensor da tensão de cisalhamento na direção z sobre a superfície normal ao eixo y .

$\eta(\dot{\gamma})$ - viscosidade com função da taxa de cisalhamento

ζ - variável auxiliar para a integração na direção z

S_2 - fluidez associada ao fluxo em um canal bidimensional

$\phi(\tau)$ - função viscométrica de fluidez

f - variação da pressão por unidade de comprimento.

τ_w - tensão de cisalhamento na parede

η_0 - viscosidade de Bingham

Co - Numero de Courant

Δt - Passo de tempo de integração

Δx - Dimensão do volume discreto

RESUMO

O estudo do escoamento de um fluido em cavidades delgadas, como no caso de preenchimento de moldes de injeção, escoamentos em meios porosos e estudo de fenômenos de interface entre fluidos, levaram ao desenvolvimento de aproximações bidimensionais para este tipo de problema chamadas equações de Hele-Shaw. Com base nesta teoria, Huilgol (2006) propôs soluções analíticas simplificadas para o perfil de velocidade obtido no escoamento de um fluido viscoplástico em uma célula de Hele-Shaw. Este trabalho teve por objetivo validar o método de obtenção das equações analíticas simplificadas para fluidos viscoplásticos obtidas por Huilgol através da comparação dos resultados de velocidade média e gradiente de pressão fornecidos pelas equações obtidas pelo método bidimensional com o resultado numérico obtido da simulação do problema em uma geometria tridimensional utilizando o software OpenFoam. Os modelos viscoplásticos utilizados foram os de Bingham e de Herschel-Bulkley. A comparação dos métodos apresenta aproximadamente 1% de erro, valor próximo ao erro do método numérico proposto, indicando que a solução analítica aproximada representa adequadamente o escoamento em questão para a geometria considerada e para a faixa de valores utilizados para os parâmetros do modelo.

1. INTRODUÇÃO

Para um melhor entendimento dos fenômenos físicos, costumamos descrevê-los utilizando modelos matemáticos. Neste estudo, estaremos interessados no escoamento de um fluido no interior de uma cavidade, etapa importante em muitos processos industriais, e no conjunto de equações que descrevem este fenômeno.

Este problema, apesar de aparentemente simples, é regido por um conjunto de equações complexas como as equações de conservação e as equações constitutivas que caracterizam o comportamento reológico do fluido empregado.

Sempre que possível, desejamos simplificar os modelos de modo a obter soluções mais simples que demandem menos processamento de cálculo. No entanto, uma boa simplificação não pode afetar os resultados desejados, devendo-se validar os resultados do modelo simplificado a partir de procedimentos experimentais ou através de simulação computacional.

Embora seja mais comum encontrarmos estudos desse tipo que analisem o comportamento de fluidos Newtonianos como água e ar, a maioria dos materiais de origem sintética, além de óleos, derivados de petróleo, soluções coloidais e produtos do gênero alimentício apresentam características fortemente não-newtonianas.

O presente trabalho insere-se neste contexto, estando focado na validação das soluções analíticas simplificadas desenvolvidas por Huilgol (2006) para o escoamento de fluidos não-Newtonianos em cavidades simétricas, utilizando aproximações do tipo Hele-shaw. Estas aproximações consistem em considerar que o escoamento ocorre em uma geometria composta de duas placas paralelas muito próximas onde o escoamento possa se dar de forma puramente laminar, podendo ser considerado um escoamento bidimensional.

Este tipo de aproximação pode ser aplicado na análise de diversos problemas de interesse prático, como o estudo de fenômenos de interface entre fluidos com elevada diferença de viscosidade, no estudo de escoamentos em meio poroso como no caso de uma extração de petróleo do interior das rochas e em sistemas de enchimento de moldes de injeção na indústria de polímeros, ou no preenchimento de embalagens na indústria de alimentos.

O estudo de validação proposto consiste na comparação das predições das soluções aproximadas de Huilgol (2006) com os resultados de simulações computacionais do escoamento tridimensional de fluidos viscoplásticos.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No capítulo dois são apresentados os conceitos fundamentais de fenômenos de transporte requeridos para a modelagem do

problema, os modelos constitutivos utilizados para representação do comportamento reológico dos fluidos considerados, a descrição dos princípios da solução analítica proposta por Huilgol para a aproximação de Hele-Shaw e uma revisão sobre a utilização deste tipo de aproximação. O capítulo três apresenta a metodologia empregada, explicando os procedimentos analíticos para obtenção das equações simplificadas e os procedimentos numéricos, bem como a escolha do software OpenFoam para as soluções, além de trazer os parâmetros aplicados para uma geometria especificada. O capítulo quatro apresenta os resultados obtidos pelos dois métodos citados no capítulo anterior e faz a comparação das duas metodologias empregadas. O último capítulo apresenta a conclusão e a sugestão para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

O conjunto de equações governantes para a análise de escoamentos isotérmicos de fluidos é composto pelas leis de conservação de massa, quantidade de movimento e pela equação constitutiva que descreve a relação entre tensão e deformação para o fluido estudado.

A conservação de massa é descrita pela equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v}) = 0 \quad (1)$$

onde $\partial \rho / \partial t$ é a variação da massa específica do fluido com o tempo, e $\underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v}$ é o divergente do fluxo mássico; enquanto que a equação da conservação da quantidade de movimento linear é dada por:

$$\rho \frac{D(\underline{v})}{Dt} = \rho \underline{g} - \underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} \quad (2)$$

onde $D(\underline{v}) / Dt$ é a derivada material do vetor velocidade, ρ é a massa específica do fluido, \underline{g} é o vetor aceleração da gravidade, $\underline{\nabla} p$ é o gradiente de pressão $\underline{\nabla} \cdot \underline{\tau}$ é o divergente de um campo tensorial.

Para um escoamento incompressível, a equação da continuidade se reduz ao cálculo do divergente da velocidade:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (3)$$

Com relação às equações constitutivas, vários modelos são propostos na literatura, na tentativa de descrever os diferentes tipos de comportamento reológico apresentado pelos fluidos reais. Basicamente os fluidos são divididos em Newtonianos e não-Newtonianos.

Os fluidos ditos Newtonianos são aqueles cuja relação da tensão com a taxa de cisalhamento é linear, não apresentando variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento. Assim, para fluidos incompressíveis, a relação entre tensão e taxa de cisalhamento para os fluidos Newtonianos segue a equação (4):

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (4)$$

onde $\underline{\underline{\tau}}$ é a tensão de cisalhamento, μ é chamada viscosidade newtoniana, um valor sempre constante para cada fluido a uma dada temperatura, e $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ é a taxa de cisalhamento ou taxa de deformação, dada por:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \underline{\underline{\nabla v}} + (\underline{\underline{\nabla v}})^T \quad (5)$$

São considerados Newtonianos fluidos de baixa viscosidade, como a água e demais soluções aquosas, hidrocarbonetos de baixa massa molar.

Os fluidos não-newtonianos, por sua vez, não seguem um comportamento linear no que se refere à relação entre tensão de cisalhamento e taxa de cisalhamento. A classificação dos fluidos não-Newtonianos é feita geralmente em função do tipo de equação constitutiva utilizada para representar o seu comportamento reológico, sendo que estas equações diferem basicamente no que diz respeito aos tipos de fenômenos não-Newtonianos que elas podem representar. Assim, os fluidos não-Newtonianos são subdivididos em viscoelásticos e não-newtonianos puramente viscosos.

Neste trabalho, estaremos interessados numa das classes de fluidos não-Newtonianos puramente viscosos que é a de fluidos viscoplásticos, os quais se caracterizam por apresentar uma tensão mínima de escoamento, podendo ou não apresentar dependência da viscosidade com a taxa de deformação. Pastas de dentes, massas de bolos e tortas, alguns tipos de tintas, misturas com sólidos dissolvidos e fluido para perfuração na indústria do petróleo são exemplos deste tipo de fluido.

Existem vários modelos propostos na literatura para descrever o comportamento de fluidos viscoplásticos, sendo que os modelos de Bingham, Herschel-Bulkley e Casson encontram-se entre os mais usados. Neste trabalho, os dois primeiros serão utilizados.

A equação constitutiva de Bingham para o modelo de tensão de cisalhamento em função da taxa de cisalhamento é dada por (Huilgol,2006; Dean et al, 2007):

$$\underline{\underline{\tau}} = \tau_y \underline{\underline{\delta}} + \eta_0 \underline{\underline{\dot{\gamma}}}, \quad \tau_{ij} \geq \tau_y \quad i = x, y, z; \quad j = x, y, z \quad (6)$$

onde τ_y é a tensão mínima de cisalhamento para que o fluido comece a escoar, η_0 é a

viscosidade de Bingham, também chamada de constante de Bingham, e $\underline{\underline{\delta}}$ é o tensor matriz unitária em todas as direções.

A equação constitutiva de Herschel-Bulkley é dada por (Huilgol,2006, Estacio, 2009):

$$\underline{\underline{\tau}} = \tau_y \underline{\underline{\delta}} + K_H \dot{\underline{\underline{\gamma}}}^{n-1} \dot{\underline{\underline{\gamma}}}, \quad \tau_{ij} \geq \tau_y \quad i = x, y, z; j = x, y, z \quad (7)$$

Portanto, o modelo de Herschel-Bulkley é uma equação a três parâmetros: a tensão mínima de escoamento τ_y , a constante de Herschel-Bulkley K_H e o expoente n . $\underline{\underline{\delta}}$ é o tensor matriz unitária em todas as direções.

2.2. APROXIMAÇÃO HELE-SHAW

Henry Selby Hele-Shaw (1854-1941) em seus estudos sobre escoamento de um fluido entre placas paralelas descobriu que para uma certa distância entre as placas, o escoamento se comportava sempre de forma laminar independente da velocidade de escoamento (Gustafsson, Vasil'ev, 2006).

A geometria estudada por Hele-Shaw é composta de duas placas planas paralelas separadas pela distancia h , em que a direção perpendicular à direção de escoamento varia de $-h/2$ a $+h/2$, sendo h é um valor que tende a zero.

A Figura 1 representa o aparato que ficou conhecido como célula de Hele-Shaw, que até hoje é aplicado ao estudo de escoamento de diferentes fluidos.

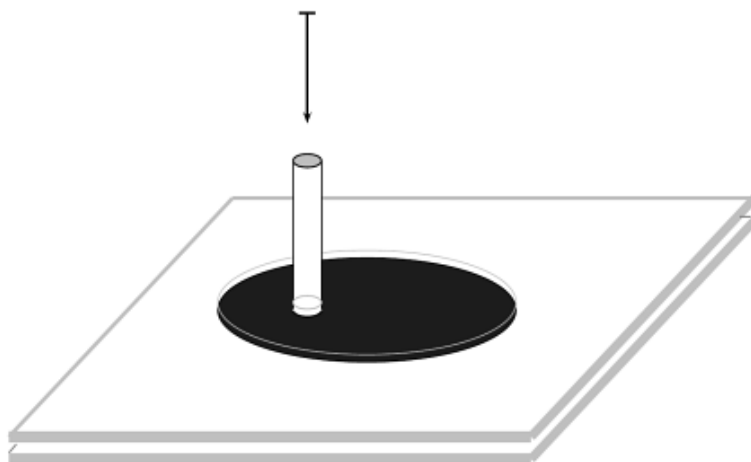


FIGURA 1. CÉLULA DE HELE-SHAW

Atualmente, o termo célula de Hele-Shaw é comumente empregado para casos em que um fluido é injetado em uma geometria delgada ou quando o fluido é limitado por outro fluido de viscosidade muito diferente.

Para este tipo de escoamento, pode-se utilizar uma análise a partir de equações simplificadas, conhecidas como equações de Hele-Shaw. Estas equações foram desenvolvidas por Saffman e Taylor (1958) no estudo do fenômeno de digitação viscosa. Este fenômeno ocorre em escoamentos conjuntos de fluidos de viscosidades muito diferentes e consiste na penetração parcial do fluido de menor viscosidade no viscosidade mais elevada, deixando marcas que na literatura são chamadas de *fingers* (Huilgol, 2006).

A principal vantagem das equações de Hele-Shaw é a simplificação da representação dos escoamentos tridimensionais, permitindo sua modelagem como um escoamento bidimensional.

Na literatura é possível encontrar aplicações desta metodologia na análise de diversos problemas de interesse prático, no entanto as aplicações mais comuns para esta metodologia estão focadas no estudo da interação entre dois fluidos de viscosidades diferentes (Meiburg et al, 2010; Mariano et al, 2007; Fiorese, 2004; Maes et al, 2010), no estudo de meios porosos (Vossoughi, 1999; Horne, 1975; Donald, 2006) e no estudo de fabricação de moldes de injeção (Dantzig et al, 2001; Osswald et al, 2008; Estacio 2004 e 2008; Hulgol, 2006).

2.3. ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA PROPOSTO POR HELE-SHAW

O perfil esquemático de escoamento de um fluido qualquer no interior de uma célula de Hele-Shaw e a notação das coordenadas que será adotada são representados na Figura 2.

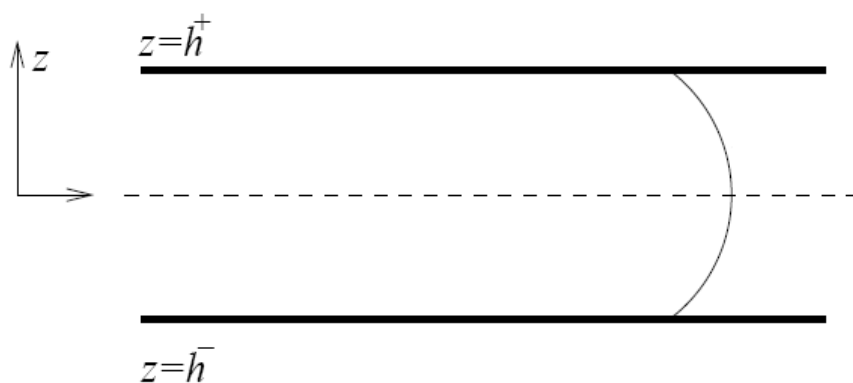


FIGURA 2. ESCOAMENTO EM UMA CELULA HELE-SHAW

A metodologia proposta para o escoamento Hele-Shaw parte de algumas considerações sobre a geometria da cavidade apresentada na qual o escoamento de um fluido entre placas paralelas e simétricas, é descrito de acordo às seguintes hipóteses:

1. O escoamento é bi-dimensional com a velocidade dada por:

$$\underline{v} = v_x \underline{\delta}_x + v_y \underline{\delta}_y \quad (8)$$

onde, \underline{v} é o vetor velocidade, v_x e v_y são os módulos das componentes da velocidade na direção dos vetores unitários $\underline{\delta}_x$ e $\underline{\delta}_y$ das direções x e y respectivamente, e ocorre em um sistema de coordenadas cartesianas como apresentadas na Figura 2 cujo domínio em z varia vai de h^- até h^+ , onde estes parâmetros podem ter o mesmo valor em módulo ou não, e $2h$ corresponde à distância entre as duas placas paralelas.

2. A velocidade do escoamento na superfície da placa é dada por $\underline{v}(x, y, \pm h) = \underline{0}$, a derivada da velocidade em relação a z no ponto central é $\partial_z \underline{v}(x, y, 0) = \underline{0}$.
3. A variação da velocidade com as coordenadas x e y podem ser desprezadas. Então, $\partial_x \underline{v}(x, y, z) = \underline{0}$ e $\partial_y \underline{v}(x, y, z) = \underline{0}$.
4. Os efeitos das forças de inércia podem ser desprezados.

Aplicando estas hipóteses à equação da conservação da quantidade de movimento, tem-se:

$$\underline{\nabla} p = \partial_z \underline{\tau} \quad (9)$$

onde $\underline{\nabla} = \partial_x \underline{\delta}_x + \partial_y \underline{\delta}_y$ é o operador gradiente bidimensional, ∂_z é a derivada na direção z e $\underline{\tau}$ é tensor que representa a tensão de cisalhamento.

Deste modo, reescrevendo a equação da quantidade de movimento em coordenadas cartesianas para cada uma das direções x e y teremos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz}) \quad (11)$$

onde τ_{xz} é o módulo do tensor da tensão de cisalhamento na direção z sobre a superfície normal ao eixo x e τ_{yz} é o módulo do tensor da tensão de cisalhamento na direção z sobre a superfície cuja normal é perpendicular ao eixo y .

Diferentemente dos fluidos newtonianos, para os fluidos não-newtonianos puramente viscosos a lei de viscosidade é dependente da taxa de cisalhamento. Assim a tensão de cisalhamento para um fluido não-Newtoniano que não apresenta tensão mínima de escoamento segue uma equação do tipo:

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\underline{\underline{\gamma}}} \quad (12)$$

Deste modo, os modelos descritos baseiam-se em encontrar a lei de viscosidade com função da taxa de cisalhamento $\eta(\dot{\gamma})$.

Associando-se então as Equações (5) e (12) podemos reescrever as Equações (10) e (11) como função da velocidade.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (14)$$

Sendo assim, tem-se que a pressão é função somente de x e de y e deste modo podemos integrar as equações da quantidade de movimento ao longo da espessura para obtermos expressões para as velocidades v_x e v_y .

$$v_x = \frac{\partial p}{\partial x} \int_{h^-}^z \frac{\zeta}{\eta} d\zeta + A(x, y) \int_{h^-}^z \frac{d\zeta}{\eta} \quad (15)$$

$$v_y = \frac{\partial p}{\partial y} \int_{h^-}^z \frac{\zeta}{\eta} d\zeta + B(x, y) \int_{h^-}^z \frac{d\zeta}{\eta} \quad (16)$$

onde ζ é a variável auxiliar para a integração na direção z ,

$$A(x, y) = \left[\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]_{z=h^-} - \left[z \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{z=h^-} = - \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{\int_{h^-}^{h^+} \zeta d\zeta}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{d\zeta}{\eta}} \right\} \quad (17)$$

e

$$B(x, y) = \left[\eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]_{z=h^-} - \left[z \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{z=h^-} = - \frac{\partial p}{\partial y} \left\{ \frac{\int_{h^-}^{h^+} \zeta d\zeta}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{d\zeta}{\eta}} \right\} \quad (18)$$

Fazendo:

$$C(x, y) = \left\{ \frac{\int_{h^-}^{h^+} \zeta d\zeta}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{d\zeta}{\eta}} \right\} \quad (19)$$

as equações (15) e (16) podem ser escritas como:

$$v_x = \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \int_{h^-}^z \frac{\zeta}{\eta} d\zeta - C(x, y) \int_{h^-}^z \frac{d\zeta}{\eta} \right\} \quad (20)$$

$$v_y = \frac{\partial p}{\partial y} \left\{ \int_{h^-}^z \frac{\zeta}{\eta} d\zeta - C(x, y) \int_{h^-}^z \frac{d\zeta}{\eta} \right\} \quad (21)$$

Definindo-se a velocidade media na direção x conforme a equação (22)

$$\bar{v}_x(x, y) = \frac{1}{h^+ - h^-} \int_{h^-}^z v_x(x, y, z) dz \quad (22)$$

e na direção y com expressão análoga. Substituindo as expressões (20) e (21) na equação da velocidade média para x e para y respectivamente e obtém-se para a velocidade media x e y as seguintes equações:

$$\bar{v}_x(x, y) = \frac{-2S_2}{h^+ - h^-} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (23)$$

$$\bar{v}_y(x, y) = \frac{-2S_2}{h^+ - h^-} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (24)$$

onde S_2 é chamado de fluidez, recebe subíndice 2 para indicar que está associado com o fluxo em um canal bidimensional e tem equação igual a:

$$S_2 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{h^-}^{h^+} \frac{\zeta^2}{\eta} d\zeta - \frac{\left(\int_{h^-}^{h^+} \frac{\zeta}{\eta} d\zeta \right)^2}{\int_{h^-}^{h^+} \frac{d\zeta}{\eta}} \right\} \quad (25)$$

Para a equação da continuidade a forma apresentada pela Equação (3) escrita em coordenadas cartesianas fica:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

Tomando-se a integral com relação a z do membro esquerdo da equação da continuidade e a definição de velocidade média dada pela Equação (22) podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((h^+ - h^-) \overline{v_x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((h^+ - h^-) \overline{v_y}(x, y) \right) = 0 \quad (27)$$

onde $\overline{v_x}(x, y)$ e $\overline{v_y}(x, y)$ são as velocidades médias na direção x e y respectivamente.

Relacionando este resultado com as Equações (23) e (24) obtidas da conservação de quantidade de movimento, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (28)$$

Essa equação é conhecida como equação de Hele-Shaw e fornece uma relação simplificada da pressão de escoamento a partir da combinação da equação da continuidade com a equação da conservação da quantidade de movimento. Maiores detalhes sobre a dedução das aproximações de Hele-Shaw podem ser obtidas nos trabalhos de Estácio (2004), Huilgol (2006) e Osswald et al (2008)

2.4. UTILIZAÇÃO DA APROXIMAÇÃO HELE-SHAW NA OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICA PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

Huilgol (2006) aplicou a aproximação de Hele-shaw para obter expressões analíticas simplificadas para os perfis de velocidade em escoamentos em canais de pequena espessura para fluidos viscoplásticos. Isto foi feito através da definição de uma função

chamada de função viscométrica de fluidez $\phi(\tau)$ de modo que se pode escrever a taxa de cisalhamento em função da tensão:

$$\underline{\dot{\gamma}} = \phi(\underline{\tau}) \underline{\tau} \quad (29)$$

Deste modo, partindo-se dessa nova definição e fazendo a consideração de que a geometria do problema é simétrica obtém-se a integração da equação (9) em z :

$$\underline{\tau}(x, y, z) = z \underline{\nabla} p(x, y, z) \quad (30)$$

Novamente conforme a Equação (5), a taxa de cisalhamento na direção z é devida a diferença de velocidade entre as camadas de fluido na direção z , de modo que a Equação (29) pode ser escrita como:

$$\underline{\partial_z v} = \phi(\underline{\tau}) \underline{\tau} \quad (31)$$

Considerando-se que o escoamento ocorre de forma simétrica com relação a linha central conforme apresentada na Figura 3 e a distância entre as placas é dada por h .

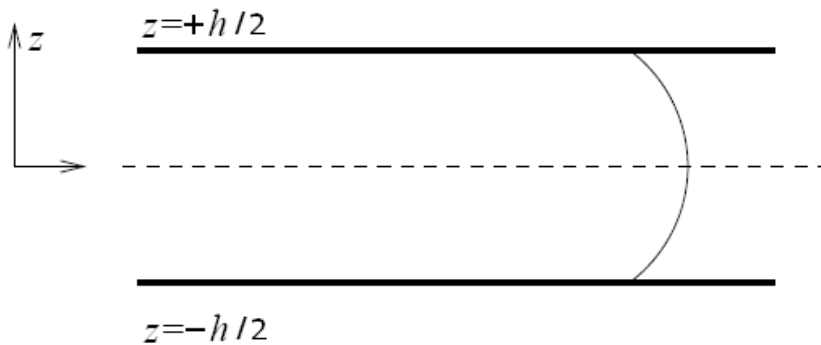


FIGURA 3. CÉLULA DE HELE-SHAW PARA SIMETRIA DE ESCOAMENTO NO EIXO Z

Para esta nova geometria pode-se reescrever a Equação (22) para a velocidade média de escoamento como:

$$\bar{v}(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \underline{v}(x, y, z) dz \quad (32)$$

Juntando-se as Equações (30), (31) e (32) encontra-se a seguinte forma para a

integral da velocidade média:

$$\bar{v}(x, y) = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^0 \phi(z \nabla p) z dz \quad (33)$$

Quando considera-se um escoamento unidimensional sujeito a um gradiente de pressão constante na direção de escoamento, direção x , a equação da quantidade de movimento fica:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial z} = -f \quad (34)$$

onde f será adotado daqui por diante como medida da pressão por unidade de comprimento.

Assim, podemos expressar τ em função de f integrando a Equação (34):

$$\tau = -fz \quad (35)$$

Da Equação (33) e da definição da função $\phi(\tau)$ obtemos o cálculo da velocidade média em função de $\phi(\tau)$, expressa por

$$\bar{v}(x, y) = \frac{2}{f^2 h} \int_0^{\tau_w} \phi(\tau) \tau^2 d\tau \quad (36)$$

onde τ_w é a tensão de cisalhamento na parede e pode ser calculado por:

$$\tau_w = fh/2 \quad (37)$$

Para obtermos a solução analítica basta agora substituir na integral da Equação (36) as equações de $\phi(\tau)$ obtido para cada modelo.

Huilgol apresenta as funções viscométricas de fluidez, $\phi(\tau)$, para os fluidos viscoplásticos de Bingham, Herschel-Bulkley e Casson, e para o modelo de Power-law. Este trabalho apresenta as soluções para os modelos de Bingham e Herschel-Bulkly.

Para o fluido de Bingham, a partir das Equações (6) para o modelo de Bingham e da Equação (29), define-se a função $\phi(\tau)$ para o modelo representado pelas Equações (38) e (39).

$$\phi(\tau) = 0, \tau \leq \tau_y \quad (38)$$

$$\phi(\tau) = \left(\frac{\tau - \tau_y}{\eta_0}\right), \tau \geq \tau_y \quad (39)$$

Para o modelo de Herschel-Bulkley a partir da Equação (7) e da Equação (29) do modelo, define-se a função viscométrica de fluidez $\phi(\tau)$ apresentada nas Equações (40) e (41):

$$\phi(\tau) = 0, \tau \leq \tau_y \quad (40)$$

$$\phi(\tau) = \left(\frac{\tau - \tau_y}{K_H}\right)^{1/n} \frac{1}{\tau}, \tau \geq \tau_y \quad (41)$$

A equação que fornece a velocidade em função da pressão pode ser obtida pela substituição das Equações (39) e (41) na Equação (36).

Esta metodologia de simplificação pode então ser repetida para qualquer fluido puramente viscoso em que a equação que relaciona a tensão de cisalhamento τ e a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ possa ser escrita da mesma forma da Equação (12), e em que seja possível explicitar a taxa de cisalhamento em função da tensão para se definir uma função $\phi(\tau)$. Caso o fluido apresente uma equação não explicitável para $\dot{\gamma}$, pode-se estudar a possibilidade do método poder ser aplicado para obtenção do valor da velocidade de escoamento, não de forma puramente analítica, mas fazendo-se uso de métodos numéricos de solução de equações não explicitáveis como método de Newton-Raphson, e método da bissetão e métodos de integração numérica como Simpson.

Apesar de que as expressões deduzidas por Huilgol podem ser de grande interesse para aplicações práticas, o autor não apresentou nenhum estudo de validação das soluções encontradas, seja através de experimentos ou da comparação com resultados obtidos através da resolução do problema não simplificado, ou seja, considerando a natureza tridimensional do escoamento. Desta forma, propomos comparar os resultados obtidos de modo analítico conforme apresentado por Huilgol (2006) com os resultados simulados em uma cavidade de placas muito próximas.

3. METODOLOGIA

O aspecto principal da metodologia para análise da validade das soluções aproximadas de Huilgol (2006) foi a comparação das suas predições com a solução numérica do problema tridimensional equivalente.

Para isso, foram necessários estabelecer procedimentos para os seguintes passos:

- Definição dos modelos viscoplásticos a serem testados.
- Obtenção da Solução analítica para cada modelo pela solução de Huilgol.
- Definição dos parâmetros do modelo, geometria e condições de escoamento a serem utilizados nos testes.
- Implementação da simulação numérica do escoamento tridimensional equivalente.
- Comparação dos resultados obtidos a partir dos resultados das metodologias analíticas e numéricas.

As estratégias adotadas com relação a cada um destes aspectos serão descritos a seguir:

3.1. DEFINIÇÃO DOS MODELOS VISCOPLÁSTICOS E OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA ESTES MODELOS

Os modelos selecionados para realização dos testes foram os modelos de Bingham e Herschel-Bulkey.

O modelo de Bingham foi escolhido por possuir um equacionamento mais simples que o de Herschel-Bulkey e o de Casson, além disso, embora Huilgol (2006) tenha feito a demonstração completa de como obter o resultado apenas para o modelo Power-Law, ele apresenta a equação final que se pode obter ao aplicarmos a metodologia para o modelo de Bingham. Para os modelos de Herschel-Bulkey, o autor não apresenta a expressão final do perfil de velocidades.

Assim, fez-se primeiramente a dedução da solução analítica do perfil de velocidades para o fluido de Bingham, a fim de comparar com o resultado apresentado por Huilgol e verificar se estávamos seguindo a metodologia corretamente. Posteriormente fez-se a dedução do perfil analítico para o fluido de Herschel-Bulkey.

Para isto, foram aplicados os procedimentos descritos na Seção 2.3 e 2.4, partindo da definição de $\phi(\tau)$ descritos nas Equações (39) e (40) e da integral expressa pela Equação (36).

Na integral da Equação (36), os limites de integração são entre as tensões máxima, que é a tensão de cisalhamento na parede τ_ω , e tensão mínima, que vai ocorrer no ponto

central do escoamento. Note-se que no desenvolvimento da integral apresentada pela Equação (36) (Seção 2.4) não são feitas considerações sobre o modelo de fluido de modo que a tensão mínima pode ser zero. Quando passamos a utilizar os modelos viscoplásticos, devemos definir um limite inferior diferente de zero para esta integral, que é, portanto igual a τ_y .

Os Fluidos de Hershel-Bulkley foram preferidos ao modelo de Casson também apresentado no trabalho de Huilgol, por representar adequadamente uma infinidade de substâncias e misturas fluidas de interesse prático. Também na literatura é mais comum encontrar trabalhos empregando os modelos de Herschel-Bulkley que os modelos de Casson.

3.2. DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS, ESPECIFICAÇÕES E GEOMETRIA A SEREM UTILIZADOS NOS TESTES.

A partir do estudo dos parâmetros para o modelo de Herschel-Bulkley apresentados na literatura para diferentes fluidos, optou-se por utilizar nos testes a serem realizados os parâmetros apresentados na Tabela 1.

TABELA 1. PARÂMETROS PARA AS EQUAÇÕES DE HERSHEL-BULKLEY

Teste	τ_y	K_H	n
HB01	6,69	6,75	0,80
HB02	10,04	9,30	0,76
HB03	19,45	13,06	0,80
HB04	46,47	23,89	0,80

Estes valores foram sugeridos com base em valores fornecidos para soluções de argila e água, que se aplicam ao estudo de fluidos de perfuração para extração de petróleo (Laigle et al 1997) e para soluções de carbopol e glicerol (Atapattu,1995). Este trabalho não tem o objetivo de modelar um processo específico, sendo assim, estes parâmetros foram selecionados apenas com o intuito de se testar a validade do método para diferentes valores dos parâmetros e analisar a interferência destes parâmetros nos resultados obtidos. Uma vez que o modelo de Bingham pode ser considerado uma particularização do modelo de Hershel-Bulkley para o caso do valor de n ser igual a 1, para os parâmetros do modelo de Bingham foram empregados os mesmos valores de τ_y , enquanto para os valores de η_0 adotamos os mesmos valores utilizados para o K_H .

Alem dos parâmetros dos modelos, devemos especificar a geometria de estudo e os valores de pressão ou velocidade que serão empregados na resolução do método numérico

e analítico. Desta forma, baseado na célula de Hele-Shaw definimos aplicar a geometria apresentada na Figura 2.

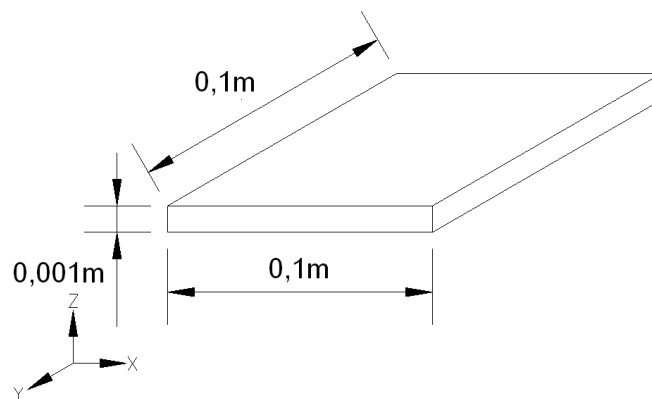


FIGURA 4. GEOMETRIA DO PROBLEMA SIMULADO

onde as placas estão afastadas por h igual a 0,001m na direção z , e portanto z varia de $-5 \cdot 10^{-4}$ m a $+5 \cdot 10^{-4}$ m, as dimensões de cada placa na direção x e y é de 0,1m.

Como referência para a velocidade escolheu-se um valor de 1 m/s, considerando-se valores típicos de escoamentos no interior de moldes de injeção. O gradiente de pressão foi o parâmetro deixado em aberto, e será obtido a partir dos cálculos numéricos e analíticos para as duas metodologias empregadas.

3.3. IMPLEMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA PARA O ESCOAMENTO TRIDIMENSIONAL.

A representação matemática para o escoamento proposto consiste no sistema de equações constituído das equações de conservação da massa, Equação (1), de quantidade de movimento, Equação (2), e as equações constitutivas de cada modelo, equação (6) e (7). Assim este sistema de equações deve ser resolvido de acordo com as condições de contorno impostas para a geometria e demais especificações definidas. A solução deste sistema de equações para um sistema tridimensional foi obtida pelo método dos volumes finitos, utilizando o software OpenFoam (versão 1.5).

3.3.1. OPENFOAM E ESTRUTURAÇÃO DO CASO IMPLEMENTADO PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA

O OpenFoam tem sido bastante aplicado em meio acadêmico por ser um software de licença livre e não exigir investimentos com a compra de licenças de uso. Esta

implementado em código aberto o que permite ao usuário verificar, atualizar, adequar e incrementar o código de acordo com as suas necessidades (FAVERO, 2009). O OpenFoam é escrito em linguagem C++, uma linguagem orientada a objetos o que facilita a expansão e criação de novos códigos YANG (2001). O software também possui um criador de malhas e visualizador de resultados de forma gráfica, bastante acessível e simples.

Neste software a solução do problema parte da estruturação dos dados em diretórios que armazenam as informações necessárias para a solução do caso. A estrutura de diretórios para um caso genérico implementado no OpenFoam pode ser vista na Figura 5.

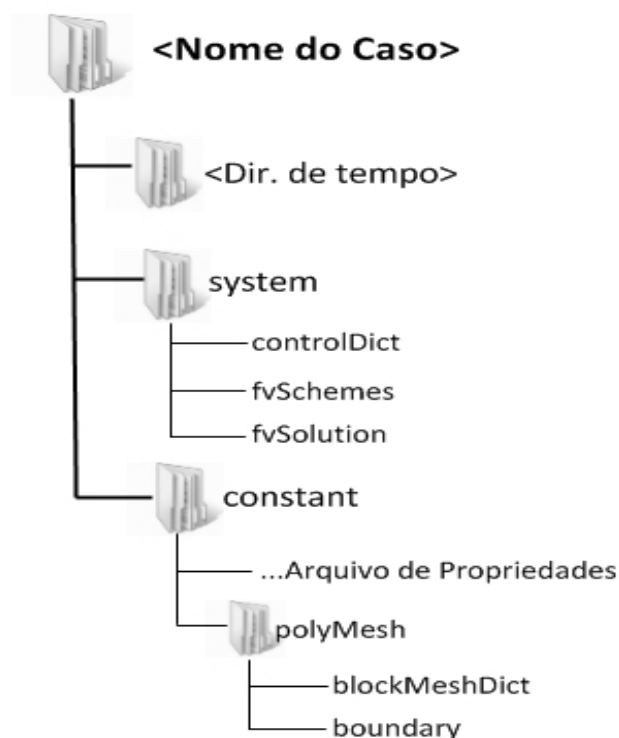


FIGURA 5. ESTUTURA DE DIRETÓRIOS DO OPENFOAM

FONTE: GUIA DO USUÁRIO OPENFOAM

O diretório principal <nome do caso> é a raiz do caso, e armazena os outros diretórios e arquivos necessários a simulação.

O diretório de tempo contém os arquivos para os campos das variáveis tratadas no caso. Para os casos estudados neste trabalho este diretório continha as condições iniciais para a pressão e a velocidade inicial de escoamento. Utilizou-se o vetor (1,0,0) em metros por segundo para a velocidade de entrada da cavidade e, na maioria dos casos, valor zero (0,0,0) para os demais pontos no interior da cavidade. Em alguns casos utilizou-se como condição inicial valores obtidos em uma simulação anterior.

O diretório System apresenta os arquivos com os pacotes numéricos adotados para a solução do caso, deve possuir pelo menos os três arquivos apresentados na figura 5: o controlDict, onde são informados o tempo total de simulação, definido como sendo de 0,01 s, o passo de tempo que nos casos simulados foram da ordem de 10^{-5} s, e o intervalo de armazenamento de resultados, que para o caso simulado arbitrou-se de $5 \cdot 10^{-4}$ s, o fvSchemes apresenta o método de discretização dos termos derivativos das equações. Este diretório possui também o arquivo FvSolution onde é definido o método de solução do sistema de equações e os parâmetros para o algoritmo de solução. No problema simulado este diretório apresentava também o arquivo decomposeParDict, um arquivo adicional para controle de simulações em paralelo. A realização de simulação em paralelo consiste em utilizar processadores diferentes para o cálculo de uma mesma simulação, este item foi importante neste trabalho, pois possibilitou trabalhar com uma malha bastante refinada em menor tempo de processamento.

O diretório Constant possui os arquivos com as propriedades do fluido implementadas bem como a escolha do modelo de fluido a ser estudado, além do arquivo polyMesh, contendo os dados para formação da estrutura geométrica do problema e da construção da malha estudada.

A solução numérica das simulações no OpenFOAM é realizada por arquivos executáveis chamados solvers que lêem as informações da simulação descritas no caso e resolvem as equações através de metodologias de solução específicas para cada caso e geram arquivos de resultados para pós-processamento. No caso do problema proposto o solver escolhido para solução foi o nonNewtonianIcoFoam que já encontrava-se previamente implementado na versão 1.5 do OpenFoam e apresenta procedimentos para solução dos modelos de Bingham e de Herschel-Bulkley.

3.3.2. MÉTODO NUMÉRICO APLICADO A SOLUÇÃO DO PROBLEMA.

O software OpenFoam utiliza como método padrão de discretização, a integração de Gauss para volumes finitos. É, portanto, este o método aplicado neste trabalho. A integração de Gauss é baseada na soma dos fluxos das variáveis nas faces do volume, que devem ser interpolados a partir do centro dos volumes, este método consiste em uma aproximação discreta da solução das equações diferenciais envolvidas no problema dividindo-se o domínio de cálculo em um certo número de subdomínios onde as leis de conservação sejam válidas. (Favero, 2009)

A figura 6 representa um elemento de volume discreto em que os vetores representados indicam que o resultado do cálculo para uma célula de volume interfere da

célula vizinha sendo aplicado como condição de contorno para solução das integrações.

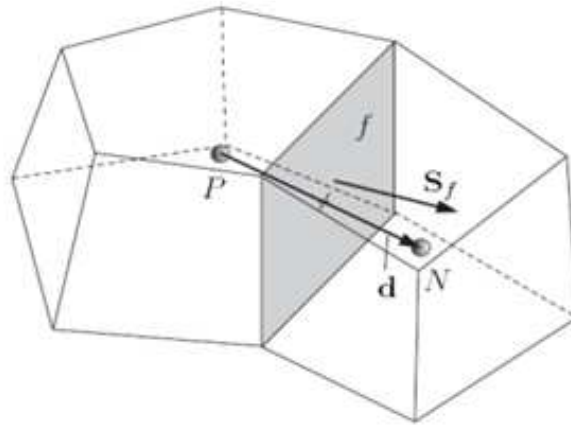


FIGURA 6. CÉLULAS DISCRETIZADAS PARA O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

A discretização do domínio constitui então a malha gerada para integração numérica que deve ser escolhida de forma a garantir a convergência para a solução numérica e a independência dos resultados.

Para se garantir a independência entre os resultados simulados e a malha sugerida, faz-se o teste de malha. Diz-se que há independência de malha quando os resultados obtidos com um certo grau de refinamento numérico não apresenta diferenças significativas em relação ao resultado obtidos por uma malha ainda mais refinada (Guidolini, 2009). Esta etapa foi realizada e os resultados obtidos do estudo da malha escolhida é apresentado na Seção 4.1.

Com relação ao método de solução das equações diferenciais, no OpenFoam estão implementados dois algoritmos para resolver os problemas de calculo das relações pressão-velocidade presente nas equações de escoamento de fluidos, os algoritmos PISO (pressure-implicit split-operator) e SIMPLE (semi-implicit method for pressure-linked equations). Os dois algoritmos são baseados em procedimentos iterativos, avaliando a solução em dado instante de tempo e, então, corrigindo-a. Neste trabalho foi utilizado o método PISO, que é aplicado para problemas em regime transiente, uma vez que partimos o problema com o fluido no interior da cavidade como estando estagnado.

3.3.3 NUMERO DE COURANT

O numero de Courant é um importante número adimensional estudado em análises por CFD (Fluído Dinâmica Computacional), este número é utilizado como critério para se garantir a estabilidade numérica. Ele relaciona as dimensões espaciais e temporais da simulação. O número de Courant (Co) é dado pela relação:

$$Co = \frac{v \cdot \Delta x}{\Delta t} \quad (42)$$

onde Δt é passo de tempo de integração, Δx é a dimensão do volume discreto, e v é a velocidade de escoamento.

O valor do número de Courant afeta a estabilidade da solução para uma dada malha, sendo que para problemas envolvendo alto nível de não-linearidade, sugere-se que seu valor não seja maior do que 1 (Favero,2009). Neste trabalho foi feita a análise do número de Courant e sua relação com a estabilidade da solução numérica obtida para diferentes malhas, bem como da influência deste número nos resultados apresentados.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. TESTES DE MALHA.

A primeira preocupação nos testes de malha foi buscar um nível de refinamento na direção z que permitisse uma precisão adequada na predição do perfil de velocidades nesta direção. Além disso, foi necessário utilizar menor nível de refinamento para as direções x e y , pois a geometria possui dimensões de ordem de grandeza muito diferentes quando comparadas as direções x e y com a direção z . Desta maneira, a utilização de refinamento uniforme nas 3 direções geraria malhas demasiado grandes, dificultando ou impossibilitando a resolução do problema, além do que os gradientes nas direções x e y são muito menores que na direção z , não justificando um nível tão grande de refinamento. As malhas usadas nos primeiros testes são descritas na Tabela 2 juntamente com os resultados destes testes em termos de convergência.

TABELA 2. RESULTADOS DE TESTES VARIANDO AS DIVISÕES DA MALHA EM x , y E z .

Dimensões (mm)			Divisões			Total de células	Δx	Δz	Razão $\Delta x/\Delta z$	Conv.
x	y	z	x	y	z					
100	100	5	40	40	10	16000	0,00250	0,00050	5	sim
100	100	1	500	500	5	1250000	0,00020	0,00020	1	sim
100	100	2	50	50	11	27500	0,00200	0,00018	11	não
100	100	1	171	171	12	350892	0,00058	0,00008	7	não
100	100	2	80	80	11	70400	0,00125	0,00018	6,9	sim
100	25	2	400	100	10	400000	0,00025	0,00020	1,25	sim
100	25	1	400	100	10	400000	0,00025	0,00010	2,5	sim
100	25	1	400	100	10	400000	0,00025	0,00010	2,5	sim

Os resultados de convergência apresentados na Tabela 2 indicam que há um limite de refinamento máximo na direção z para um nível fixo de refinamento nas direções x e y . Conforme observado nestes resultados, percebemos que quanto maior a razão entre as dimensões x e z da célula de malha (razão $\Delta x/\Delta z$), há uma maior dificuldade em obter uma solução estável, o que pode ser atribuído à distorção excessiva dos volumes de discretização.

Com o intuito de investigar a relação da solução obtida com a razão $\Delta x/\Delta z$ entre as dimensões x e z dos elementos de volume da malha, optamos por variar o número de divisões de x e z de modo a obter a razão $\Delta x/\Delta z$ máxima que não apresentasse erro de

convergência. Para tal foram feitas simulações com as malhas apresentadas na Tabela 4.

TABELA 3. RESULTADO DO TESTE DE MALHA VARIANDO A RAZÃO $\Delta x/\Delta z$.

Dimensões(mm)			Divisões			Total de células	Δx	Δz	Razão $\Delta x/\Delta z$	Conv.
x	y	z	x	y	z					
100	100	1	200	200	10	400000	0,0005	0,0001	5	sim
100	100	1	167	167	10	278890	0,0006	0,0001	6	sim
100	100	1	142	142	10	201640	0,0007	0,0001	7	sim
100	100	1	125	125	10	156250	0,0008	0,0001	8	não

Os resultados da Tabela 3 indicam que para uma razão $\Delta x/\Delta z$ menor ou igual a sete era possível obter estabilidade numérica da malha. Assim, mantendo-se fixa essa razão, tentou-se refinar a dimensão z mais uma vez, utilizando-se as malhas apresentadas na Tabela 4.

TABELA 4. RESULTADO DO TESTE DE PARA REFINAMENTO DA MALHA VARIANDO $\Delta x/\Delta z$.

Dimensões (mm)			Divisões			Total de células	Δx	Δz	Razão $\Delta x/\Delta z$	Conv.
x	y	z	x	y	z					
100	100	1	200	200	10	400000	0,00010	0,00050	5	sim
100	100	1	240	240	12	691200	0,00008	0,00042	5	sim
100	100	1	167	167	10	278890	0,00010	0,00060	6	sim
100	100	1	200	200	12	480000	0,00008	0,00050	6	não
100	100	1	142	142	10	201640	0,00010	0,00070	7	sim
100	100	1	171	171	12	350892	0,00008	0,00058	7	não

Observamos que para um maior refinamento em z , volta-se a ter problemas de estabilidade na solução, sendo que agora só é possível estabilizar para a razão $\Delta x/\Delta z$ igual a 5 (Tabela 4). Quanto menor a razão entre x e z maior a quantidade de pontos que são necessários para realizar a simulação e, desta forma, maior o tempo computacional demandado.

Outro aspecto considerar é o fato de que nos testes com algumas das malhas apresentadas na Tabela 4, incluindo as que apresentaram problemas de convergência, se trabalhou com número de Courant (Co) maior que 1, o que pode às vezes, gerar instabilidade. Para descartar esta estabilidade repetiu-se os testes nos quais não houve convergência utilizando $Co < 1$, sem que se observasse uma melhoria no comportamento da solução. Então, visando assegurar que se podia trabalhar com valores grandes de Co , fez – se ainda um teste adicional que consistiu em em analisar o comportamento de uma das soluções que havia convergido, para verificar se havia variação significativa na solução

obtida em função do número de Courant utilizado. Os resultados referentes a este teste são mostrados na Tabela 5.

TABELA 5. VARIAÇÃO DO COURANT PARA A RAZÃO $\Delta x/\Delta y$ IGUAL A 5.

Courant	v máxima	Viscosidade	Pressão máxima	v média
25	1,4773	10	5910880	0,968876
1	1,4773	10	5910880	0,961724
0,1	1,4773	10	5910880	0,961352

Os resultados da Tabela 5 indicam que na faixa de valores utilizados o número de Courant não afeta significativamente a qualidade da solução, indicando claramente que os problemas de convergência não estão relacionados à dimensão dos passos de tempo utilizados. Este resultado é importante, pois caso contrário seria necessário trabalhar com passos de tempo muito menores, o que aumenta consideravelmente o tempo de processamento e cálculo da simulação.

A partir dos resultados discutidos acima estabeleceu-se utilizar nos demais testes uma razão $\Delta x/\Delta z$ de 5 manter o passo de tempo de 10^{-5} s, fazendo-se ainda um conjunto de testes adicionais de refinamento de malha para estabelecer qual malha seria utilizada nos testes finais de comparação entre as predições da solução analítica pelo método de Huilgol e as simulações do escoamento 3D. Nestes testes, cujos resultados são apresentados na Tabela 6, foram utilizadas 3 malhas com diferentes graus de refinamento em z, mantendo a razão $\Delta x/\Delta z$ de 5.

TABELA 6. TESTE DE REFINAMENTO DE MALHA.

Número de divisões em z	f (Pa)	Erro %	$\bar{v}(x, y)$ (m/s)	Erro %
8	152692000		0,944723	
10	159196000	4,09%	0,968045	2,41%
12	156547000	1,69%	0,961723	0,66%

Com base nos resultados da Tabela 6 e considerando-se o erro de 1,69 % como aceitável, resolveu-se utilizar a malha com 10 divisões em z como base para os testes que serão descritos nas próximas seções.

4.2. OBTENÇÃO DO TEMPO PARA ATINGIR O ESTADO ESTACIONÁRIO.

Foi realizado também a análise do tempo de simulação requerido para alcançar o

estado estacionário (Figura 7), de modo a não realizar simulações com duração maior do que a realmente necessária, de modo a aproveitar melhor o tempo disponível para a realização do trabalho. Observa-se que a partir do tempo 0.0023s não há variação na velocidade final calculada. Assim, optou-se em utilizar para todas as simulações um tempo final de cálculo de 0.01s.

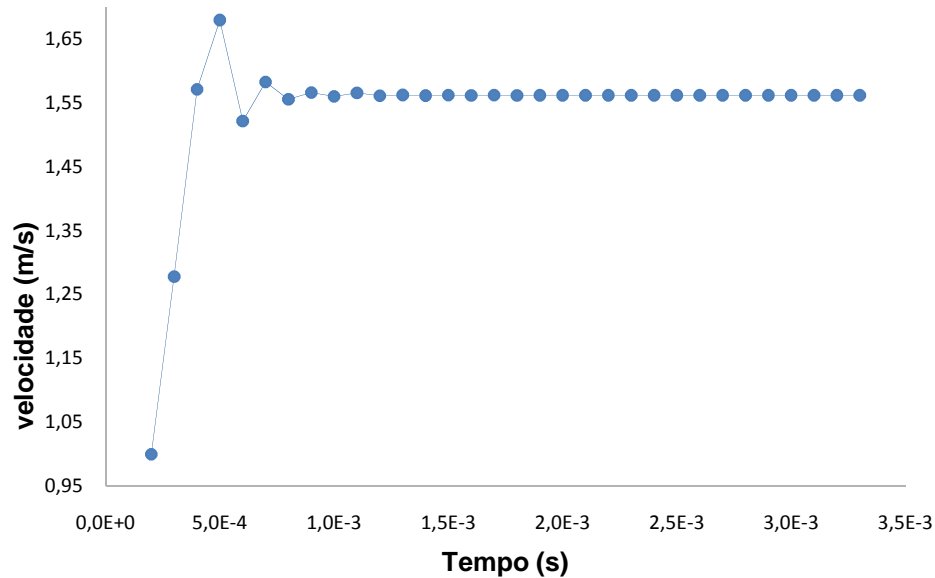


FIGURA 7. ANÁLISE DA DURAÇÃO DA ETAPA TRANSIENTE DO PROCESSO

4.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA OS DOIS MODELOS UTILIZADOS

De acordo com procedimento descrito na Seção 3.2, substituindo a expressão da variável $\phi(\tau)$ para Bingham (Equação (39)) na integral da Equação (36) obtemos:

$$\bar{v}(x, y) = \frac{2}{f^2 h} \int_{\tau_y}^{\tau_w} \left(\frac{\tau - \tau_y}{\eta_0} \right) \tau^2 d\tau \quad (43)$$

Integrando-se:

$$\bar{v}(x, y) = \frac{h\tau_w}{3\eta_0} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\tau_y}{\tau_w} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_y}{\tau_w} \right)^3 \right] \quad (44)$$

Substituindo τ_w , Equação (37), na Equação (43) obtém-se a expressão da velocidade média em função do gradiente de pressão na direção de escoamento, direção x :

$$\bar{v}(x, y) = \frac{fh^2}{12\eta_0} \left[1 - 3 \left(\frac{\tau_y}{fh} \right) + 4 \left(\frac{\tau_y}{fh} \right)^3 \right] \quad \frac{fh}{2} \geq \tau_y \quad (45)$$

resultado que está de acordo com a solução apresentada por Huilgol (2006), confirmando que o procedimento analítico foi aplicado adequadamente.

Utilizando a expressão de $\phi(\tau)$ definida pela Equação (41) e seguindo o mesmo procedimento anterior, obtém-se a forma integral para o fluido de Herschel-Bulkley:

$$\bar{v}(x, y) = \frac{2}{f^2h} \int_{\tau_y}^{\tau_w} \left(\frac{\tau - \tau_y}{K_H} \right)^{1/n} \frac{1}{\tau} \tau^2 d\tau \quad (46)$$

Então, resolvendo esta integral obtém-se:

$$\bar{v}(x, y) = \frac{2n}{f^2h} \left(\frac{\tau_w - \tau_y}{K_H} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\tau_y^{n+1} + \tau_w^{n+1}}{1+2n} \right) \left(\frac{\tau_w - \tau_y}{1+n} \right) \quad (47)$$

4.4 COMPARAÇÃO ENTRE AS PREDIÇÕES DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS PELA APROXIMAÇÃO DE HELE-SHAW COM OS RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O PROBLEMA 3D

Nas seções 4.4.1 e 4.23, é feita a comparação entre as predições da solução analítica resultante da aproximação Hele-Shaw e a solução do escoamento tridimensional para os fluido de Bingham e Herschel-Bulkley, respectivamente.

4.4.1 Modelo de Bingham

Os resultados obtidos a partir da solução analítica (Equação (45)) e da solução numérica para o escoamento 3D para o fluido de Bingham são apresentados nas Tabelas 7 e 8, respectivamente, enquanto as diferenças relativas entre os resultados é mostrada na Tabela 9. Pode-se ver que a diferença com relação aos valores do gradiente de pressão obtidos pelas duas metodologias é de 1,17% independente dos parâmetros aplicados.

Observa-se também que esta diferença é inferior àquela obtida para a velocidade. A comparação destas diferenças com os dados da Tabela 6, onde foram apresentados os testes de convergência mostra que elas são da mesma ordem que a precisão da solução numérica. Portanto estas diferenças parecem estar mais ligadas à qualidade do resultado numérico do que à diferenças reais entre a solução analítica aproximada (2D) e o escoamento real (3D). Assim, estes resultados podem ser tomado como um indicativo de que a solução analítica proposta por Huilgol para o escoamento de um fluido de Bingham é válida para a geometria considerada e para a faixa de valores utilizados para os parâmetros do modelo.

TABELA 7. RESULTADOS ANALÍTICOS PARA O MODELO DE BINGHAM.

Teste	τ_y (N/m ²)	η_0	$\bar{v}(x, y)$ (m/s)	f (Pa)
BG01	6,69	6,75	1,0	71788446,0
BG02	10,04	9,30	1,0	111271102,1
BG03	19,45	13,06	1,0	161058740,2
BG04	46,47	23,89	1,0	285897160,4

TABELA 8. RESULTADO NUMÉRICO PARA O MODELO DE BINGHAM.

Teste	τ_y (N/m ²)	η_0	$\bar{v}(x, y)$ (m/s)	f (Pa)
BG01	6,69	6,75	0,962909	70958000,0
BG02	10,04	9,30	0,960721	109984000,0
BG03	19,45	13,06	0,968045	159196000,0
BG04	46,47	23,89	0,964380	282593000,0

TABELA 9. RESULTADOS COMPARATIVOS BINGHAM.

Teste	<i>Erro em v</i> %	<i>Erro em f</i> %
BG01	3,71%	1,17%
BG02	3,93%	1,17%
BG03	3,20%	1,17%
BG04	3,56%	1,17%

4.4.2 Modelo de Herschel-Bulkley

Os resultados obtidos a partir da solução analítica (Equação (45)) e da solução numérica para o escoamento 3D para o fluido de Herschel-Bulkley são apresentados nas Tabelas 10 e 11, respectivamente, enquanto as diferenças relativas entre os dois resultados é mostrada na Tabela 12. Observa-se que para este modelo a diferença nos valores de gradiente de pressão encontrados pelas duas metodologias é de $0,96 \pm 0,02$ %. Percebe-se ainda neste caso uma pequena variação do erro com relação aos parâmetros empregados, sendo o valor de n o fator que mais interfere nos resultados apresentados. No entanto, estas observações são apenas tendências, cuja comprovação exigiria um estudo adicional.

TABELA 10. RESULTADOS ANALÍTICOS PARA O MODELO DE HERSCHEL-BULKLEY.

Teste	τ_y (N/m ²)	K_H (*)	n	$\bar{v}(x, y)$ (m/s)	f (Pa)
HB01	6,69	6,75	0,80	1,0	13459100,0
HB02	10,04	9,30	0,76	1,0	14918186,5
HB03	19,45	13,06	0,80	1,0	29310124,9
HB04	46,47	23,89	0,80	1,0	53646993,7

* As unidades de K_H dependem do valor de n .

TABELA 11. RESULTADOS OBTIDOS PELO MÉTODO NUMÉRICO PARA O MODELO DE HERSCHEL-BULKLEY.

Teste	τ_y (N/m ²)	K_H (*)	n	$\bar{v}(x, y)$ (m/s)	f (Pa)
HB01	6,69	6,75	0,80	0,959972	13328800,0
HB02	10,04	9,30	0,76	0,968011	14779400,0
HB03	19,45	13,06	0,80	0,965818	29027000,0
HB04	46,47	23,89	0,80	0,960388	53130600,0

* As unidades de K_H dependem do valor de n .

TABELA 12. RESULTADO COMPARATIVO HERSCHEL-BULKLEY.

Teste	Erro em v %	Erro em f %
HB01	4,00	0,98
HB02	3,20	0,94
HB03	3,42	0,98
HB04	3,96	0,97

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível aplicar o método para solução analítica de escoamento em cavidades baseado na aproximação de Hele-Shaw para o cálculo dos campos de pressão e velocidade para o escoamento de fluidos viscoplásticos descritos pelos modelos de Bingham e de Herschel-Bulkley no interior de uma cavidade simétrica. Do mesmo modo, foi possível realizar no software OpenFoam a solução do problema de escoamento em questão na sua versão tridimensional.

No caso do fluido de Bingham, as diferenças encontradas entre os valores obtidos pelas duas metodologias de cálculo foram próximos a 1 % para o campo de pressões e a 4 % para o campo de velocidades. O fato de estas diferenças serem da mesma ordem que a precisão do resultado para a malha utilizada é um indicativo de que a solução analítica aproximada representa adequadamente o escoamento em questão para a geometria considerada e para a faixa de valores utilizados para os parâmetros do modelo.

Resultados similares foram encontrados para o modelo de Herschel-Bulkley, havendo indicativos de diminuição da diferença entre a solução analítica 2D e a solução numérica 3D com a diminuição do valor empregado para o parâmetro n do modelo.

Os resultados encontrados justificam a extensão deste trabalho fazendo-se a análise com malhas mais refinadas e analisando uma faixa maior de variação dos parâmetros dos modelos, de modo a confirmar estas duas tendências, ou seja, adequação da solução analítica aproximada e influência do parâmetro n na qualidade do resultado. Ainda neste sentido seria importante estudar comparativamente o desempenho da solução aproximada com o aumento da espessura da cavidade, a fim de identificar seu limite de validade.

Neste trabalho teve-se a oportunidade de aplicar e revisar os conceitos de mecânica dos fluidos e fenômenos de transporte, aprofundando os conhecimentos sobre reologia de diversos materiais e os modelos de fluidos. Para o desenvolvimento do trabalho foi necessário adquirir familiaridade com a linguagem de programação em C++ e aprender a utilizar um software de simulação em CFD.

A revisão bibliográfica mostrou a relevância do fenômeno físico estudado na aplicação dos processos industriais, e em especial foram encontrados muitos trabalhos voltados à indústria petroquímica.

No desenvolvimento deste trabalho percebeu-se necessidade de se fazer um estudo mais detalhado para o desenvolvimento da malha de simulação, bem como um aprofundamento no estudo de convergência de malha baseado nos parâmetros aplicados no problema; esta análise pode ser desenvolvida em trabalhos futuros.

Outra sugestão a ser desenvolvida em decorrência da realização deste trabalho é o

estudo de resultados da metodologia apresentada por Huilgol (2006) a modelos de viscosidade que não apresentem solução explicitável para $\phi(\tau)$. Sugere-se também uma nova abordagem dos resultados considerando-se condições assimétricas entre as placas.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] ATAPATTU D.D.; CHHABRA R.P.; UHLHERR P.H.T.; Creeping sphere motion in Herschel-Bulkley fluids: flow field and drag *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 59 (1995) 245-265
- [2] DANTZIG, J. A.; TUCKER C. L. ; Modeling in materials processing Cambridge University Press, 2001
- [3] DEAN, E. J.; GLOWINSKI, R.; GUIDOBONI, G.; On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: Old and new results, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 142 (2007) p.36–62.
- [4] DONALD A. NIELD, ADRIAN BEJAN Convection in porous media Springer, 2006
- [5] ESTÁCIO, K. C.; Simulação do processo de moldagem por injeção 2D usando malhas não estruturadas(dissertação de mestrado) São Carlos – 2004, USP.
- [6] ESTÁCIO, K. C.; Simulação de escoamento de fluidos em superfícies definidas por pontos não organizados. (dissertação de doutorado) São Carlos – 2008, USP.
- [7] FAVERO, J. L.; Simulação de escoamentos viscoelásticos: Desenvolvimento de uma metodologia de análise utilizando o software OpenFoam e equações constitutivas diferenciais. (dissertação de mestrado) Porto Alegre – 2009, UFRGS.
- [8] FIORESE E. K.; Estudo experimental e de modelagem fluidodinâmica de sistemas água-óleo.(dissertação de mestrado) Florianopolis, 2004 SC - UFSC
- [9] GUIDOLINI I. P.; Análise de fluidinâmica e do efeito de misturadores estáticos em um reator tubular de polimerização usando ferramentas de CFD. (Dissertação de mestrado) Rio de Janeiro - 2009 COPPE/UFRJ
- [10] GUSTAFSSON, B; VASIL'EV, A; Conformal and Potential Analyses in Hele-Shaw Cell, *SPRINGER VERLAG NY* 2006 1st Ed. p.11-17.
- [11] HORNE R. N.; Transient Effects in Geothermal convective Systems (Doctor of Philosophy teses) March 1975

- [12] HUILGOL, R.R. ;On the derivation of the symmetric and asymmetric Hele-Shaw flow equations for viscous and viscoplastic fluids using the viscometric fluidity function. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 138 (2006) p.209-213
- [13] LAIGLE D.; COUSSOE P.; Numerical Modeling of Mudflows, *Journal of Hydraulic Engineering*, JULY 1997 p.617
- [14] MAES, R.; ROUSSEAU, G.; SCHEID, B.; MISHRA, M.; COLINET, P.; WIT A.; Experimental study of dispersion and miscible viscous fingering of initially circular samples in Hele-Shaw cells *PHYSICS OF FLUIDS* 22, 123104 _2010_
- [15] MARIANO, G. C.; CARDOSO, F. F.; LOPES, T. J.; QUADRI, M. G. N.; MACHADO, R. A. F.; QUADRI, M. B.; Um estudo experimental sobre a instabilidade da interface do deslocamento de óleo por injeção de água. 4o PDPETRO, Campinas, SP 2007
- [16] MEIBURG E., HORMSY G.M. 1988 Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Shaw flows , Numerical Simulation. *Physics of Fluids* v 31 n 3 1988
- [17] OSSWALD, T. A.; TURNG, L. ; GRAMANN, PAUL J.; Injection Molding Handbook Hanser Verlag, 2008
- [18] VOSSOUGH S. Flow of non-Newtonian Fluids in Porous Media *University of Kansas, Department of Chemical and Petroleum Engineering, Lawrence, KS., USA* 1999
- [19] YANG, D. *C++ and Object-Oriented Numeric Computing for Scientists and Engineers*. Nova York: Springer, 2001.