UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

**ARTHUR BARCELLOS BERND**

# AS IMAGENS CONCEITUAIS E A GEOMETRIA DINÂMICA

Porto Alegre
2011

**ARTHUR BARCELLOS BERND**

# AS IMAGENS CONCEITUAIS E A GEOMETRIA DINÂMICA

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina

Porto Alegre

2011

**ARTHUR BARCELLOS BERND**

# AS IMAGENS CONCEITUAIS E A GEOMETRIA DINÂMICA

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em.................................

Banca Examinadora:

.............................................................
Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo
Instituto de Matemática da UFRGS

.............................................................
Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática da UFRGS

.............................................................
Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina - Orientadora
Instituto de Matemática da UFRGS

# RESUMO

Discutir concepções sobre o ensino-aprendizagem da geometria e operacionalizar uma prática pedagógica, fruto de tais concepções, são os objetivos do presente Trabalho de Conclusão de Curso. É proposta a associação entre a noção de imagem conceitual apresentada por Hershkowitz (1994) e o uso de ambientes de geometria dinâmica sugerido por Gravina (1996). A metodologia de aprendizagem conta, ainda, com a utilização de ideias presentes no modelo Van Hiele. A fundamentação teórica referida dá suporte à elaboração de uma proposta pedagógica que foi testada com alunos do Ensino Médio e validada através da análise das suas produções.



Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Geometria; Geometria Dinâmica; Imagem Conceitual; Modelo Van Hiele.

ABSTRACT

Discussing conceptions about geometry teaching-learning and to operate a suggestion of practice pedagogical since these conceptions are these present paper objectives. It is proposed an association between the notion of conceptual image, present by Hershkowitz (1994) and the use of dynamic geometry software, proposed by Gravina (1996). The learning methodology also uses ideas from Van Hiele model. The theoretical foundation referred gives support to the design of a pedagogical action which was applied with High School students and authenticated by the analysis of students' production.

Keywords: Geometry Teaching-learning; Dynamic Geometry; Conceptual Image; Van Hiele Model.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

Uma das grandes dificuldades da aprendizagem de geometria é a não compreensão de determinados conceitos pelos alunos. Quando isto ocorre, todo o aprendizado fica prejudicado, pois a matemática – e em particular, a geometria - não é composta de elementos independentes, mas sim de elementos que se inter-relacionam, estabelecendo conexões continuamente. É essa consistência de encadeamento entre seus objetos que permite a sua sustentação lógica. A falta de compreensão de um estudante revela-se ainda mais evidente quando existe algum problema prático a ser resolvido, pois este, sem compreender o conceito, ora acaba simplesmente sem resolver o problema, ora cria alguma resposta incompleta ou errônea.

Muitas vezes o ensino de geometria é voltado para resolver uma cadeia de questões específicas – como o cálculo de área e perímetro de polígonos particulares, deixando-se em segundo plano a compreensão correta de conceitos, no qual a resolução correta de problemas torna-se uma simples conseqüência. É este segundo formato de ensino que acredito ser mais fiel ao objeto de estudo da matemática. Portanto, o foco de discussão aqui proposto não será enfrentar dificuldades que possam transparecer quando aprendizes se deparam com a resolução de um (ou uma série de) exercício(s) particular(es), mas sim observar quais são os pontos nos quais há falta de compreensão conceitual por parte dos alunos, e de que modo pode-se tentar preencher tal falta.

Há uma grande diversidade de pesquisas quanto ao aspecto cognitivo do pensamento geométrico; algumas serão focos de nossa exploração. Cada escolha teve suas respectivas razões. A similaridade com as nossas reflexões iniciais sobre o tema deva ser, talvez, o motivo principal para as escolhas feitas. Claro que, ao longo do trabalho, surgem outras fontes de pesquisa de relevância para o trabalho, que o modificam; entretanto, o princípio de qualquer trabalho delimita, ao menos parcialmente, o caminho a ser seguido.

No que segue, o capítulo 2 reúne a fundamentação teórica. No trabalho de Hershkowitz (1994), o aspecto cognitivo da aprendizagem de geometria é alvo de discussões e pesquisas com alunos e professores do ensino secundário norte-americano. É apresentada a noção de *imagem conceitual*, que será bastante explorada no decorrer desta produção.

O uso da geometria dinâmica como ferramenta para o ensino e aprendizagem de geometria é um ponto fundamental a ser analisado. A partir de pesquisas, principalmente baseadas em Gravina (1996), descreveremos como tais ambientes têm o potencial de promover o elo entre as duas visões da geometria – como ciência do espaço e como estrutura lógica - que julgamos necessário.

Como metodologia de aprendizagem, é discutida a teoria de Van Hiele, por ser um referencial quanto ao estudo do aspecto cognitivo da aprendizagem de geometria. Os diferentes *níveis* do modelo da Van Hiele revelam o que pode se esperar de um aluno que se encontre em determinado *nível*. Os *níveis* e as *fases* do aprendizado servem como referência para a elaboração de um ensino que promova uma evolução constante no processo de aprendizagem e no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Avançaremos, no capítulo 3, à aplicação de uma sequência didática, sob a forma de projeto de ensino, desenvolvida a partir das reflexões sobre as concepções teóricas. Apresentaremos a proposta do nosso projeto, através de uma breve descrição, encontro a encontro, dos objetivos e metodologias utilizados. Na sequência, é feita uma detalhada passagem sobre o modo como foi operacionalizado o projeto, acompanhada da análise dos resultados obtidos.

Finalizamos trazendo considerações que terão por objetivo promover a associação entre as concepções sobre a aprendizagem da geometria que objetivávamos e os resultados da nossa proposta didática. Esse espaço será, ainda, dedicado a reflexões pessoais sobre a contribuição desse trabalho para o momento de conclusão de curso ao qual se propõe e, também, a respeito da futura posição de professor de matemática.

## 2. CONCEPÇÕES SOBRE A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

A proposta de nosso trabalho sobre o ensino e aprendizagem de geometria inicia com discussões acerca da natureza da geometria – e da matemática, como um todo – enquanto ciência. Segundo Gravina (1996), "a matemática é criação humana voltada ao estudo de regularidades, quer sejam advindas de percepções sobre o mundo real, quer sejam emergências num quadro puramente abstrato".

A geometria, em particular, apresenta esse estudo de dupla consistência de forma ainda mais intensa. Conforme Hershkowitz (1994), "existem dois aspectos principais clássicos do ensino e aprendizagem da Geometria: a visão da Geometria como ciência do espaço e a visão da geometria como uma estrutura lógica". A relação entre estas duas visões consiste no fato de que os objetos reais, caracterizados pela sua praticidade, são idealizados e assumem a condição de elementos abstratos com propriedades e atributos – que inclusive independem, ao menos do ponto de vista teórico, de uma representação visual.

Dificuldades na compreensão de conceitos de geometria por parte dos alunos – um dos focos do nosso trabalho – podem ser consequência desse conflito entre as duas visões da geometria. É bastante confuso, para um aprendiz, ter que "provar" algo que para ele, até então, era dado como verdade absoluta. Gravina (1996) expõe de forma clara esse ponto:

> Do conhecimento empírico ao que é objeto de construção na geometria euclidiana, faz-se necessária uma adaptação, com seus inevitáveis conflitos: agora, buscam-se argumentações que expliquem certas propriedades como decorrentes de outras, diferentemente das simples verificações e constatações até então satisfatórias.

Existe, então, uma clara distinção entre a compreensão da geometria como ciência do espaço e como estrutura lógica. A aproximação entre essas duas compreensões deve ser, talvez, um dos grandes objetivos do ensino e aprendizagem da geometria.

Essa distinção entre as duas visões será discutida na seção 2.1, através da noção de *imagem conceitual*, proposta por Hershkowitz (1994). Depois, na seção 2.2, será discutida a utilização de ambientes de geometria dinâmica para o ensino de geometria. Encerramos o capítulo com a apresentação, na seção 2.3, da metodologia de ensino que trata de relacionar aquilo discutido até então, tendo como referência o modelo Van Hiele.

## 2.1 AS IMAGENS CONCEITUAIS

Nossa proposta contempla a discussão sobre as dificuldades que os alunos encontram na compreensão de conceitos de geometria. Sendo assim, se faz necessária, desde já, a distinção entre c*onceito* – o conceito como decorre de sua definição matemática – e a *imagem conceitual* – o conceito como está construído na mente do indivíduo (Hershkowitz, 1994).

Essa distinção pode ser associada àquela entre as duas visões da geometria, como ciência do espaço e como estrutura lógica. A *imagem conceitual* de um sujeito a respeito dos objetos geométricos inicia-se caracterizada, apenas, como uma compreensão do mundo físico ao seu redor. O ensino da geometria permite, então, um processo evolutivo para que a *imagem conceitual* se aproxime do respectivo conceito. Uma instância de dificuldade para a aprendizagem da geometria consiste, então, no fato de que cada indivíduo raciocina de forma muito particular. Como consequência, esse indivíduo pode vir, portanto, a interpretar determinado conceito de maneira a afastar-se da definição formal.

Qual seria a causa desse afastamento? Segundo Hershkowitz (1994), "o conceito [...] possuí atributos relevantes (críticos) – aqueles atributos que devem ser satisfeitos para termos um exemplo positivo do conceito – e atributos não críticos – aqueles atributos que apenas alguns dos exemplos positivos possuem". Por exemplo, para o conceito paralelogramo, o paralelismo entre os lados opostos é um atributo crítico. Por outro lado, a representação de um quadrado com os lados em situação de paralelismo com as margens do papel é um atributo não crítico.

Pesquisas acerca deste tema concluíram que cada conceito tem atrelado a si algum tipo de exemplo protótipo – um exemplo que apresenta atributos não-críticos, mas que é tido como um modelo a ser seguido pelos demais exemplos deste conceito. Um conceito que possuí um exemplo protótipo é a altura de triângulo, em que o protótipo é dado pela classe de triângulos cuja altura é um segmento interno ao triângulo.

Numa pesquisa coordenada por Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1994) com alunos e professores de 5ª a 8ª séries em escolas dos Estados Unidos, a seguinte atividade foi realizada:

> Quando se pediu a professores e alunos para traçarem a altura relativa ao lado a de um triângulo obtusângulo, alguns traçaram a mediana de *a* e outros a mediatriz de *a*. Eles não aceitavam a idéia de uma altura externa. A incompletude dessa imagem de conceito e sua aplicação errada foram expressas exatamente da mesma maneira pelos alunos.

A *imagem conceitual* dos professores e dos alunos estava, claramente, divergindo do conceito altura de triângulo, e a divergência se verificou na dificuldade em determinar o segmento corresponde à altura relativa ao lado *a* em triângulos obtusângulos (Figura 1).

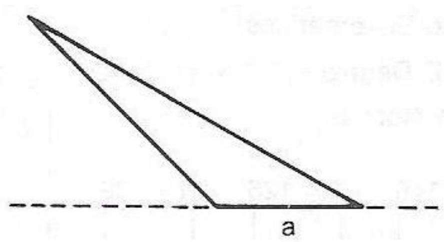



**Figura 1** Traçar a altura de um triângulo obtusângulo enfrenta a barreira do exemplo protótipo, segundo Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1994)

Essa dificuldade ocorreu também em outra atividade, na mesma pesquisa. Era proposto o traçado de todas as diagonais de um polígono, a partir de um vértice A dado. Foi observado que "professores e alunos traçaram apenas as diagonais internas" e que no caso do quadrilátero côncavo (caso c da Figura 2), a confusão foi causada pela noção prototípica do conceito diagonal como sendo um segmento interno (Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner, 1994).

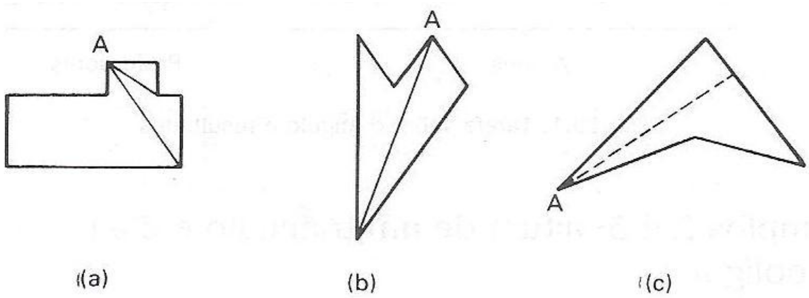



**Figura 2 "**Diagonais" a partir do vértice A traçadas por alguns alunos e professores na pesquisa de Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1994)

Outra atividade, desenvolvida pelos mesmos pesquisadores, apresenta resultado que concede ao exemplo protótipo um caráter diferente: além do formato, o fator posição também resulta em uma análise prototípica por um sujeito. Quando solicitados a identificar triângulos retângulos em diferentes disposições no papel, professores e alunos tiverem desempenho bastante equivalente. Enquanto para a posição prototípica o índice de acerto foi bastante elevado, outras posições não tiveram a sua identificação realizada com o mesmo sucesso, situação exposta na Figura 3.

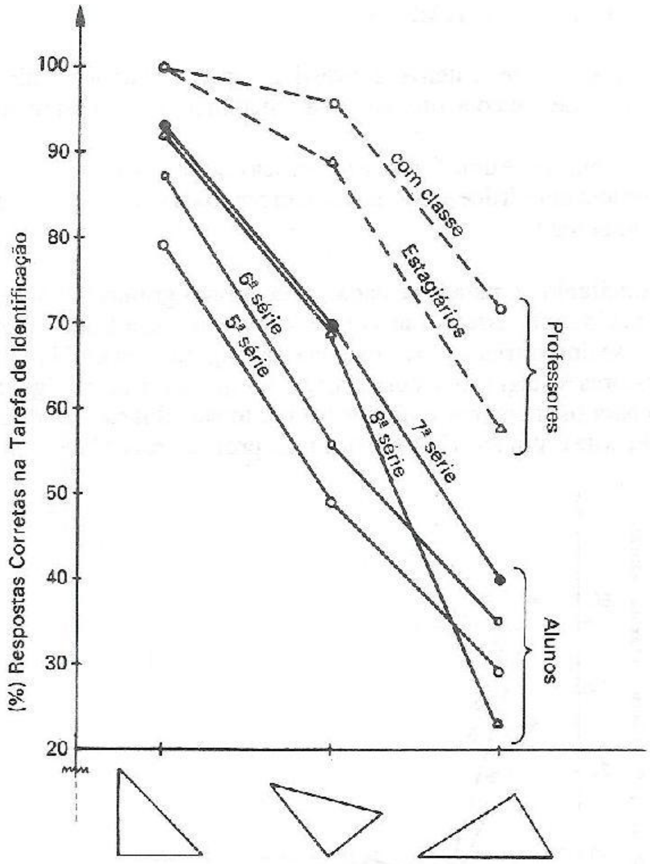



**Figura 3** O índice de respostas corretas na tarefa de identificar triângulos retângulos em diferentes disposições, pesquisa de Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1994)

Retomando a questão da altura de triângulo, foi realizada, ainda, outra atividade, com professores e alunos, na qual deveria ser indicada a altura de uma série de triângulos, nas mais variadas posições no papel, e características a respeito de ângulos e lados. A Figura 4 revela "alturas" em relação ao lado *a*, traçadas por um aluno.

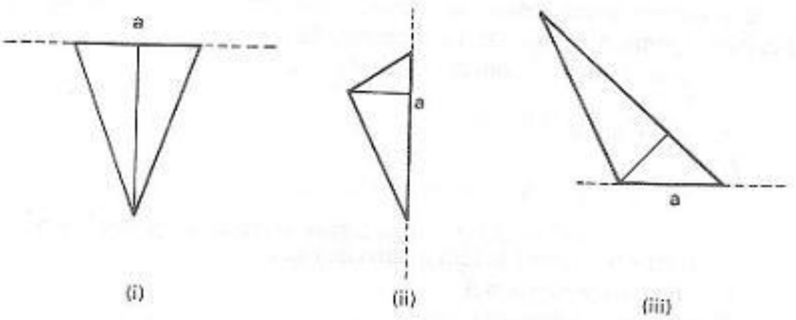



**Figura 4** "Alturas" relativas ao lado a traçadas por um aluno, na pesquisa de Hershkowitz, Bruckheimer e Vinner (1994)

Outra pesquisa que revela o modo como os exemplos prototípicos interferem na construção de um conceito foi realizada por Gravina (1996) com alunos do curso de

Licenciatura em Matemática da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul), durante a disciplina de Geometria, que se desenvolve no primeiro semestre do curso. A pesquisadora notou que muitos alunos trazem, do seu ensino básico, diversas concepções erradas na aprendizagem da geometria, tanto no que diz respeito ao caráter axiomático – onde ocorre confusão sobre o que são axiomas, teoremas, demonstrações - quanto às próprias propriedades de conceitos mais elementares – entre eles, a altura de triângulo. Aos participantes da atividade foi solicitada a determinação do segmento que corresponde a altura relativa ao lado AB de cada triângulo. A autora registra as seguintes soluções elaboradas por alunos (Figura 5).

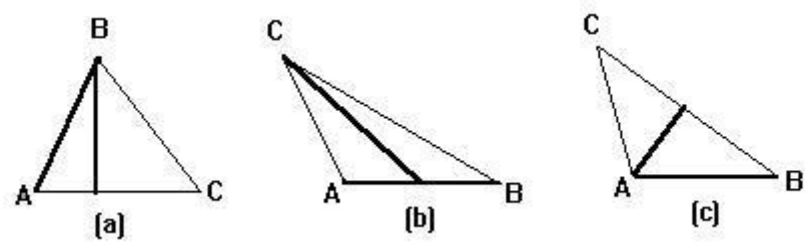



**Figura 5** “Alturas” relativas ao lado AB traçadas por um Licenciando em Matemática, na atividade proposta por Gravina (1996)

No triângulo (a), o aluno tinha a necessidade de obter um segmento altura numa posição vertical. Já nos casos (b) e (c), o perpendicularismo foi ignorado pela busca de um segmento altura que fosse interno ao triângulo. Estas duas últimas situações apresentam resultados semelhantes àqueles da outra pesquisa citada, pois dizem respeito a triângulos obtusângulos. O triângulo (a) gera dúvida ao aluno no momento em que é solicitado a altura relativa a um lado do triângulo que não está posicionado na horizontal.

A partir das respostas dos alunos e professores ilustradas nas pesquisas relatadas, é possível notar que a dúvida e o erro não estão associados a um ou outro exercício particular, mas sim à compreensão de conceitos – dificuldade esta que atinge diferentes níveis, de alunos a professores. A compreensão do conceito é afetada pela confusão entre os seus atributos críticos e os não críticos. Portanto, é necessária a investigação sobre como a estrutura prototípica insere-se na interpretação de quem estuda/analisa/observa certo objeto.

Esta inserção é uma conseqüência direta da apresentação inicial de exemplos protótipos por parte de professores e material didático. Segundo Hershkowitz (1994), “o protótipo é a base para julgamentos ‘prototípicos’. Para cada conceito, os indivíduos usam o exemplo protótipo como modelo para julgamento de outras instâncias.” Assim, quando deparados com outros exemplos do conceito, o aprendiz acaba por ter o seu raciocínio bloqueado pela ausência dos atributos não-críticos. A tendência, no caso da determinação da altura de um triângulo, é traçar segmentos que não correspondem à altura, ou até mesmo rejeitar este traçado, ao admitir que o triângulo é “estranho”.

A primeira forma de julgamento prototípico é o *julgamento visual*. Utilizando o exemplo protótipo como modelo, os estudantes julgam o que pode ser a altura de variados triângulos. Entretanto, o aspecto visual é insuficiente para serem conhecidas todas as propriedades de um conceito. A segunda forma de julgamento prototípico é o *julgamento analítico incorreto*, baseada nos atributos não críticos; ou seja, leva em consideração os atributos do protótipo, enquanto o correto seria avaliar os atributos próprios do conceito. O terceiro tipo de julgamento é o *julgamento analítico correto*; este sim se baseia em atributos críticos do conceito, e através de argumentos lógicos, um problema pode ser resolvido.

Este último tipo de julgamento não é comum em alunos mais jovens, e acaba tornando-se mais comum conforme os alunos vão avançando na vida escolar. O julgamento visual tem a sua incidência diminuída sistematicamente ao longo da trajetória escolar, porém não desaparece, mesmo entre alguns professores – o que não ocorre com o julgamento tipo 2, inexistente entre professores (Hershkowitz, 1994).

O ensino de geometria pode ser pensado a partir da criação de uma maneira de encaminhar de forma bem delineada a construção da *imagem conceitual*. Hershkowitz (1994) explica que essa construção se dá na mútua complementação entre *processos visuais* e *processos analíticos*. Os *processos visuais* devem permitir ao aluno uma variedade de exemplos, de forma que o protótipo não prevaleça sobre o conceito. Os processos de construção de conhecimento de forma *analítica* são uma decorrência natural de uma boa compreensão *visual*, de forma a conhecer na totalidade os atributos próprios do conceito.

É possível observar uma íntima relação entre as noções de visual / analítico, acima descritos, e os componentes *figural* / *conceitual* explorados por Gravina (2001) e definidos por Fischbein (1993). A autora segue explicando que “não resta dúvida: chegar a construtos geométricos individuais em sintonia com os objetos cristalizados na geometria não é um processo natural”. Faz-se necessária, então, uma forma de relacionar as compreensões visuais e analíticas que os alunos têm sobre os conceitos, ou seja, proporcionar o entendimento efetivo de seus componentes figural e conceitual; ou ainda, uma forma de realizar a passagem do conhecimento empírico ao dedutivo.

## 2.2. GEOMETRIA DINÂMICA

Uma proposta de ensino que se associa aos anseios discutidos acima consiste na utilização de uma importante ferramenta que sistematiza e unifica situações de compreensão *visual* e *analítica* – são os softwares de Geometria Dinâmica. Gravina (1996) define de forma clara que tipo de ambiente informático é este:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema.

Os invariantes aos quais a autora se refere podem ser associados aos atributos críticos discutidos no tópico anterior. Para criarmos um objeto, utilizamos os elementos que o definem; por exemplo, para criar uma reta, são necessários dois pontos e, para criar um círculo, são necessários um ponto e um raio. A partir desta criação, é gerada uma figura, que representa este objeto no plano. Há determinados elementos deste objeto que não se opõem aos atributos que determinaram a sua criação e, portanto, podem ser alterados. Entretanto, atributos críticos não podem ser alterados, de forma que o aluno pode compreender quais são atributos críticos e quais são atributos não críticos.

As situações exploradas e discutidas aqui utilizaram como referência de software de geometria dinâmica o *GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone*[1]. Um exemplo que ilustra o potencial atribuído a esse tipo de ambiente é a simples construção de um retângulo. A Figura 6 contém a representação visual de um retângulo, que utilizou os atributos críticos do conceito em relação aos lados: lados adjacentes perpendiculares.

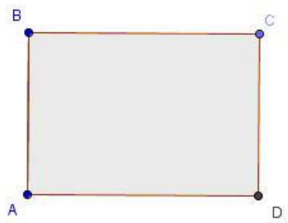
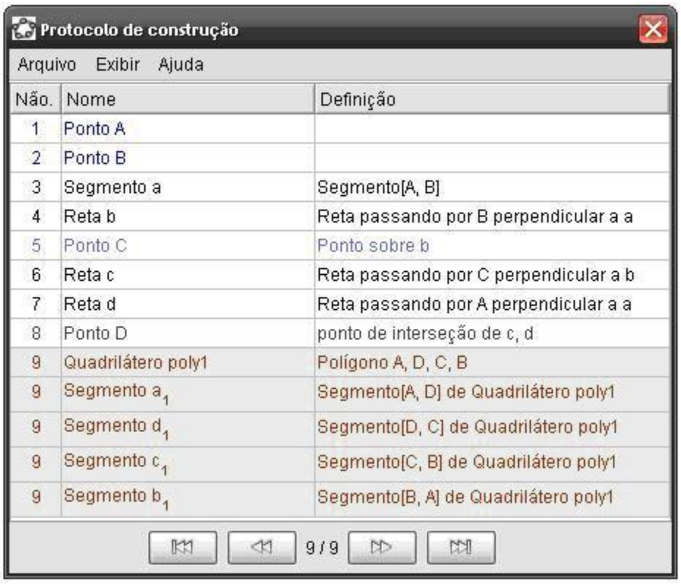



**Figura 6** A representação visual de um retângulo no software GeoGebra

[1] GeoGebra – Dynamic Mathematics for Everyone, disponível em www.geogebra.org

A mesma tela que comporta este modo de exibição visual permite, também, o desenvolvimento da compreensão analítica, quando se utiliza o modo de exibição denominado “Protocolo de Construção” (Figura 7), que revela os passos seguidos na construção e apresenta quais objetos são “livres”, e quais “dependem” de outros.


Protocolo de construção

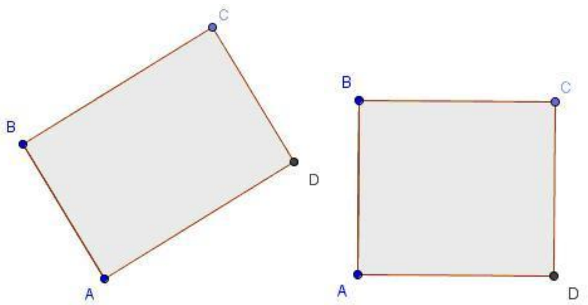
Arquivo Exibir Ajuda

| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Segmento a | Segmento[A, B] |
| 4 | Reta b | Reta passando por B perpendicular a a |
| 5 | Ponto C | Ponto sobre b |
| 6 | Reta c | Reta passando por C perpendicular a b |
| 7 | Reta d | Reta passando por A perpendicular a a |
| 8 | Ponto D | ponto de interseção de c, d |
| 9 | Quadrilátero poly1 | Polígono A, D, C, B |
| 9 | Segmento $a_1$ | Segmento[A, D] de Quadrilátero poly1 |
| 9 | Segmento $d_1$ | Segmento[D, C] de Quadrilátero poly1 |
| 9 | Segmento $c_1$ | Segmento[C, B] de Quadrilátero poly1 |
| 9 | Segmento $b_1$ | Segmento[B, A] de Quadrilátero poly1 |

9 / 9

**Figura 7** O modo de exibição “Protocolo de Construção” do software GeoGebra

Como a construção foi feita de forma a respeitar apenas os atributos críticos do retângulo, os atributos não críticos da imagem prototípica apresentada na Figura 6 não se mantém quando se desloca o ponto A ou o ponto B – objetos livres da presente construção. Podem surgir imagens de retângulos em posições não prototípicas (Figura 8a), assim como imagens de retângulos em formato não prototípico (Figura 8b), como é o caso do quadrado; contradizendo, assim, o exemplo protótipo de retângulo com “dois lados maiores e dos lados menores”.




**(a)** **(b)**

**Figura 8** Retângulo em posições e formatos não prototípicos

A construção de um retângulo é apenas uma simples ilustração do poder que um ambiente de geometria dinâmica alcança. Um primeiro ponto a ser observado é que o aspecto visual de um objeto é uma conseqüência das suas definições analíticas. Desta forma, uma série de retângulos pode ser observada, utilizando-se os mesmos elementos formadores. Assim, ficam evidenciados quais são os atributos críticos do retângulo, e quais são não críticos – por exemplo, os lados não precisam ser paralelos às margens da folha.

Por outro lado, a mesma atividade, se desenvolvida no comum ambiente de sala de aula, utilizando-se desenhos, figuras e livro didático, dificilmente tem a possibilidade de assumir este efeito generalizante do que é, de fato, um retângulo. Os desenhos exigem do aluno um traçado firme e correto que talvez ele não possua numa idade escolar. Além disso, imagens de figuras e desenhos no papel, devido à sua natureza estática, não possibilitam que, a partir de um retângulo protótipo (Figura 6) obtenham-se retângulos não protótipos (Figuras 8a e 8b), de modo que cada retângulo é uma nova figura – e que sempre pode ser concebida de forma prototípica. O formato que o retângulo atinge na Figura 8b permite, ainda, a formação de relações hierárquicas entre os quadriláteros quadrado e retângulo, do tipo: “todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado”.

A geometria dinâmica, mais que uma ferramenta, pode ser vista como um ambiente de aprendizagem, o qual – por associar as compreensões visuais e analíticas sobre um conceito – pode vir a aproximar a *imagem conceitual* ao conceito, seja qual for, para um determinado sujeito que explora este conceito.

## 2.3. UMA METODOLOGIA DE APRENDIZAGEM

Discutido o ambiente de aprendizagem dinâmica, cabe agora à nossa discussão orientar seu foco a uma metodologia de aprendizagem. Esta deve ser uma metodologia que permita um processo evolutivo do sujeito, a partir da suas *imagens conceituais* iniciais e empíricas da geometria como ciência do espaço e que culmine no caráter dedutivo da geometria como estrutura lógica.

A Teoria de Van Hiele (ou modelo Van Hiele) combina as duas visões da geometria e possibilita promover, portanto, a passagem do conhecimento empírico ao dedutivo. Segundo Crowley (1994), essa teoria originou-se nas teses de doutorado de Dina van Hiele-Gedolf e Pierre van Hiele, e tornou-se foco de interesse em pesquisas inicialmente na extinta União

Soviética e, a seguir, nos Estados Unidos. O modelo propõe uma conexão entre o comportamento inicial da aprendizagem da geometria, no qual o espaço é apenas campo de observação, e uma situação mais avançada, caracterizada pelo rigor das demonstrações. Esta conexão foi dividida em cinco *níveis* - "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal" e "rigor" - que descrevemos a seguir:

Nível 0 (visualização): os objetos e conceitos geométricos são apenas observados a partir da sua forma global, e não são identificadas partes ou propriedades. É possível o reconhecimento e a reprodução de figuras geométricas a partir da sua aparência física, mas atributos e definições são desconhecidos (Crowley, 1994).

Nível 1 (análise): a exploração de objetos geométricos permite aos alunos desse nível a compreensão de que os conceitos possuem propriedades, e que assim podem ser reconhecidos. Entretanto, conforme Crowley (1994), "os alunos deste nível ainda não são capazes de explicar relações entre as propriedades, não vêem inter-relações entre figuras e não entendem definições".

Nível 2 (dedução informal): os alunos deste nível são capazes de compreender que existem relações entre as propriedades de um mesmo conceito, assim como relações entre as propriedades de dois ou mais conceitos. Compreendidas essas relações, classes de conceitos e uma consequente inclusão de classes, assim como definições, são entendidas pelos alunos que, embora sejam capazes de acompanhar deduções, não conseguem construir uma demonstração na sua totalidade (Crowley, 1994).

Nível 3 (dedução formal): os alunos alcançam aquela conexão, anteriormente indicada, entre os dois aspectos – espacial e estrutural - da geometria. Neste nível, segundo Gravina (1996):

> (...) constitui-se o pensamento geométrico de natureza dedutiva, quanto então axiomas e teoremas se integram no modelo teórico que forma a geometria euclidiana; é neste nível que se dá o entendimento do significado de uma demonstração e que se torna possível a produção de demonstrações.

Nível 4 (rigor): existe, nesse nível, a possibilidade de explorar diferentes sistemas axiomáticos; em especial, geometrias não euclidianas podem ser estudadas. Crowley (1994) explica que esse nível, em comparação aos demais, tem sido menos interessante a pesquisadores; inclusive, os próprios trabalhos originais o desenvolvem menos contundentemente.

Destacamos, então, as características fundamentais presentes na aprendizagem do sujeito que se identifica em cada um dos níveis. Conforme Crowley (1994), "os Van Hiele identificaram algumas generalidades que caracterizam o modelo" e que "podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino". O modelo compreende a propriedade *sequencial*, pois deve passar pelos diferentes níveis; o *avanço* depende mais dos métodos de ensino do que da maturidade; *intrínseco e extrínseco*, no que diz respeito ao fato de que objetos experimentados num nível são compreendidos no seguinte; cada nível tem a sua *lingüística*, de modo que relações e definições podem ser modificadas, ou melhor explicadas, nos níveis posteriores.

Tomando como base o modelo Van Hiele, é possível projetar um ensino e aprendizagem de geometria, em nível escolar, num caráter de completude. Completude no sentido de que se pode levar o aluno a avançar, gradualmente, a capacidade do seu pensamento geométrico. Entretanto, a pura divisão do avanço cognitivo em níveis não é suficiente para orientar uma proposta de ensino, no que diz respeito direto ao interior do ambiente de sala de aula. Por esse motivo, segundo Crowley (1994) "os Van Hiele propuseram cinco fases sequenciais de aprendizado: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração". Descrevemos, então, essas cinco fases.

A fase de *interrogação* se caracteriza por observações e questionamentos, feitos pelo professor, a respeito do objeto de estudo pretendido. Crowley (1994) explica que "o propósito dessas atividades é duplo: (1) o professor fica sabendo quais os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tópico, e (2) os alunos ficam sabendo em que direção os estudos avançarão".

Na segunda, fase, da *orientação dirigida*, os alunos desenvolvem atividades preparadas previamente pelo professor. Conforme Crowley (1994), essas atividades geralmente são sequenciais e compostas de "pequenas tarefas", que visam a obtenção de resultados pontuais para a aprendizagem do tópico.

O terceiro momento, da *explicação*, há nova discussão entre professor e alunos, a respeito dos resultados obtidos na fase anterior. Os alunos apresentam tais resultados e as suas conjecturas, enquanto o professor busca – gradualmente – passar orientações quanto ao uso da linguagem (Crowley, 1994).

A fase 4, que corresponde à *orientação livre*, é composta, segundo o mesmo autor, de "tarefas mais complexas – tarefas com muitos passos, tarefas que podem ser concluídas de diversas maneiras e tarefas de final aberto".

Finalmente, a fase da *integração*, contempla a sistematização dos conhecimentos desenvolvidos ao longo do processo. Ao professor, cabe fornecer assistências do ponto de vista da clareza dos enunciados feitos pelos alunos; entretanto, tanto os enunciados feitos quanto as assistências do professor não devem caracterizar informações desconhecidas (Crowley, 1994).

Os níveis de compreensão do pensamento geométrico dos alunos, aliado às fases do aprendizado propostas, consistem apenas numa parcela da contribuição do modelo Van Hiele para o ensino de geometria. Porém, devido aos objetivos de nosso trabalho, nosso foco permanecerá nessas duas estruturas fundamentais, ou seja, os níveis de compreensão e as fases do aprendizado.

## 3. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Decidimos elaborar e operacionalizar uma sequência didática, com o objetivo de colocar em prática as ideias, fundamentos e conjecturas originadas na nossa pesquisa e estudo teórico, e verificar a sua validade. Tal sequência didática se dará sob a forma de um projeto de ensino, cujo título "Aprendizagem de fundamentos de geometria por meio de geometria dinâmica" já nos remete, imediatamente, à metodologia que será utilizada – um ambiente de geometria dinâmica será o campo para a exploração de conceitos geométricos fundamentais.

Utilizando como ferramenta de aprendizagem o software *GeoGebra - Dynamic Mathematics for Schools*, o projeto propõe, como objetivo, promover um estudo dos elementos geométricos de forma substancial, de forma que sejam identificadas suas principais propriedades, relações e padrões, através do conhecimento da essencialidade das estruturas geométricas. Assim, é proposto um estudo que permite aos alunos a efetiva compreensão dos atributos críticos dos conceitos geométricos, numa desvinculação de possíveis *imagens conceituais* baseadas em atributos não críticos.

O projeto foi desenvolvido no Colégio La Salle Dores, em Porto Alegre, e integrou, também, uma parcela importante da parte prática da disciplina EDU02X15 - Estágio em Educação Matemática III. O público-alvo foi o aluno do Ensino Médio e eles se inscreveram espontaneamente no projeto. De uma forma geral, os alunos deste nível já possuem certa experiência de aprendizagem de geometria. O propósito principal do projeto foi proporcionar um novo modo de estudar os elementos geométricos já conhecidos e, principalmente, aprender sobre objetos e propriedades até então desconhecidos.

A fundamentação do projeto está vinculada àquelas concepções teóricas que discutimos no capítulo anterior. Apesar do fato de que esses alunos do Ensino Médio já possuíam contato com os objetos geométricos aos quais o projeto se propôs a explorar (o que geralmente ocorre no Ensino Fundamental), essa *bagagem* pode, porém, incluir traços das dificuldades que apontamos, no que diz respeito a *imagens conceituais* equivocadas. O projeto busca, portanto, identificar a distância entre a *imagem conceitual* dos alunos e os respectivos conceitos, referentes a determinados objetos ou propriedades geométricas. Também busca identificar de que forma os alunos observam os elementos geométricos: será a partir dos atributos críticos dos conceitos? Ou ocorre a partir dos atributos não-críticos?

A metodologia didática tem um olhar atento ao *nível* em que se encontram os alunos Essa metodologia busca seguir, a cada encontro, explicita ou implicitamente, as fases do aprendizado propostas pela teoria de Van Hiele.

O projeto foi implementado no período de 21/09 a 05/10, ocorrendo às segundas, quartas e sextas-feiras, com uma carga horária total de 14h/aula – ou seja, 2h/aula por encontro, em cada um dos 7 encontros.

No que segue, teremos duas seções. A primeira diz respeito à proposta em si, na qual constam as atividades e objetivos do projeto aula a aula, de forma a revelar o encadeamento que está sendo proposto. A segunda seção ilustrará, através de relatos, recortes, imagens, a operacionalização da proposta didática; contém, também, a análise sobre os resultados, acompanhada de considerações sobre a obtenção, ou não, dos objetivos pretendidos, em cada um dos 7 encontros – que dividem esta seção em 7 subseções.

## 3.1. A PROPOSTA

Conforme já dito, o projeto "Aprendizagem de fundamentos de geometria por meio de geometria dinâmica" foi estruturado para sete encontros de duas horas. Os encontros possuem, de um modo geral, momentos específicos de aprendizagem, vinculados às fases do aprendizado do modelo Van Hiele. Em cada encontro é apresentado o tópico de estudo e são realizadas as tarefas, ora indicadas passo a passo, ora de pura construção autoral dos alunos.

Alguns encontros têm características diferenciadas. Destacamos os encontros 4 e 7, como momentos nos quais ocorre uma especial sistematização do conhecimento trabalhado, podendo ser associados à última fase de aprendizado proposto pelo modelo Van Hiele, a *integração*, através da sistematização das ideias e discussões sobre determinado objeto. Observamos que os demais encontros também têm momentos correspondentes à ação didática da *integração*; entretanto, reiteramos que nos referidos encontros 4 e 7 a sistematização de conhecimentos ocorre de forma mais global. O primeiro encontro guarda a particularidade de ser o momento de delimitação do trabalho, apresentação do software GeoGebra e aplicação de um questionário de sondagem, cujo objetivo é observar como estão construídas as *imagens conceituais* dos alunos sobre determinados conceitos de relevância para o projeto.

Destacamos, ainda, que as explorações do software GeoGebra no decorrer do projeto utilizam reiteradamente o modo de exibição "Protocolo de Construção". O motivo de tal escolha consiste no potencial desta ferramenta na associação entre as compreensões visuais e analíticas dos conceitos. As construções representadas visualmente, acompanhadas do seu “Protocolo de Construção”, permitem aos alunos a compreensão dos atributos críticos e podem, portanto, integrar fundamentalmente o processo de passagem do conhecimento empírico ao dedutivo.

De forma sistemática apresentamos os objetivos, a metodologia e as atividades de cada um dos sete encontros.

<u>Encontro 1</u>

- Objetivo principal: apresentação do projeto e do software GeoGebra e aplicação de questionário de sondagem
- Metodologia e atividades:

O encontro inicia com a apresentação do projeto, esclarecendo metodologia, objetivos e definição de grupos de trabalho. Na sequência, é aplicado um questionário de sondagem a ser brevemente respondido pelos alunos e entregue ao final da aula. Tal questionário é composto por questões que tratam de verificar as *imagens conceituais* dos alunos sobre conceitos fundamentais: definições e propriedades de quadriláteros e definição do conceito altura de triângulo. As respostas a este questionário servem para nortear a sequência do trabalho, no sentido em que são base para discussões com os alunos com a finalidade de analisar o estágio atual de suas imagens conceituais sobre os referidos objetos. Podemos caracterizar esse questionário como sendo um elemento didático que contempla as fases de *interrogação* e de *orientação dirigida*, pois têm, respectivamente, as finalidades de perceber o nível em que cada aluno se encontra e promover as primeiras atividades orientadas.

O prosseguimento da aula se dá com a apresentação do software GeoGebra, em que serão mostradas as principais ferramentas e exemplo de construções. São ilustradas as seguintes situações: como criar uma reta (análogo para segmento de reta) dados dois pontos; como criar um círculo dado centro e um ponto pelo qual a circunferência passa; como criar uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela; como criar um ponto pertencente a uma reta, segmento de reta ou círculo, já existente; como criar um polígono cujos vértices são *n* pontos dados; como “transportar” uma medida. Ocorre, ainda, a apresentação dos modos de exibição “Protocolo de construção” e “Barra de navegação para passos da construção”, assim como a possibilidade de editar as “Propriedades” de objetos existentes.

Como exemplo final, apresentam-se aos alunos dois triângulos aparentemente do tipo eqüilátero; porém, quando um ponto de um dos triângulos é reposicionado no plano, o triângulo se deforma, enquanto que, se é movido um ponto do outro, as suas propriedades se mantém. Esse exemplo final tem a intenção de esclarecer aos alunos, pela primeira vez no projeto, a nossa proposta de analisar os atributos críticos – ainda sem utilizar esse termo - de um objeto. Isso é feito na medida em que se apresenta aos alunos a construção realizada para cada um dos triângulos.

<u>Encontro 2</u>

- Objetivo principal: construções de quadriláteros a partir dos seus lados
- Metodologia e atividades:

O questionário do encontro anterior, após ter sido analisado no período entre aulas, é discutido com os alunos, configurando a fase do aprendizado denominada *explicação*. A partir das respostas do questionário, são mostradas no GeoGebra construções que ilustram o que foi respondido pelos alunos, no sentido de revelar se alguma definição/propriedade não é válida para certo objeto; se é válida para exemplos protótipos; ou se, de fato, é válida para o objeto. Aos poucos, os alunos são apresentados a novos vocábulos, que são componentes importantes de nossa fundamentação teórica, dentre os quais: atributos críticos, atributos não-críticos e exemplos protótipos.

Cada grupo ficará responsável por elaborar a construção no GeoGebra de um tipo de quadrilátero a partir de seus lados. Caracteriza-se, aqui, a quarta fase do aprendizado, fase da orientação livre – em que os alunos são os autores no desenvolvimento de tarefas mais complexas. A apresentação dessas construções, por parte de cada grupo, ocorre no encontro 4 e que consistirá, portanto, no momento de *integração*. Os alunos são incentivados a tratarem a construção respeitando as ideias discutidas no momento anterior, no sentido de que a construção comporte, de fato, as propriedades – ou seja, os atributos críticos - do respectivo quadrilátero.

<u>Encontro 3</u>

- Objetivo principal: construções de quadriláteros a partir das suas diagonais
- Metodologia e atividades:

É sugerida a ideia da construção de quadriláteros a partir das suas diagonais. Tal ideia é apresentada mostrando-se a construção de um quadrilátero qualquer, a partir de suas diagonais, no GeoGebra; no caso, por ser um quadrilátero sem características específicas, as diagonais que o originam são segmentos de reta também sem propriedades destacadas.

Os alunos são motivados a construírem objeto semelhante no software GeoGebra em seus respectivos computadores. Cada grupo fica responsável por elaborar a construção de um quadrilátero; atividade cujo caráter é de *orientação livre*. A comparação entre a construção do quadrilátero qualquer e aquela do quadrilátero específico de cada grupo a partir dos seus lados, tem a função de ser campo de exploração para os alunos identificarem as propriedades das diagonais de seus respectivos quadriláteros. As construções são apresentadas, também, no encontro 4, assim como é o caso das construções do encontro anterior.

<u>Encontro 4</u>

- Objetivo principal: sistematização sobre construções de quadriláteros
- Metodologia e atividades:

Conforme brevemente enunciado na descrição geral da sequência didática, os encontros 4 e 7 consistem em momentos de sistematização do conhecimento, a fase da *integração*. No caso deste encontro, tal sistematização acontecerá da seguinte forma. Primeiramente, cada grupo apresenta as suas construções no GeoGebra: a primeira, produzida no encontro 2, de um tipo de quadrilátero construído a partir de seus vértices; seguida da segunda construção, realizada no terceiro encontro, do mesmo tipo de quadrilátero, porém construído a partir das suas diagonais.

Após a apresentação de cada grupo, ocorre a *integração* referente ao quadrilátero em questão, através de discussões entre professor e os alunos a respeito dos atributos críticos dos conceitos. Quando se chega à enumeração dos atributos críticos, são produzidos enunciados de definição do quadrilátero: um enunciado que define cada tipo de quadrilátero considerando-se as propriedades que seus lados possuem; e, também, outro enunciado que define o mesmo tipo de quadrilátero, sendo consideradas as propriedades inerentes às suas diagonais.

Quando se encerram as apresentações dos grupos, é proposta uma espécie de "*integração* final" dessa aula, que consiste na formação de uma hierarquia entre os quadriláteros. São recuperadas as definições há pouco feitas sobre os tipos de quadriláteros, e comparam-se as definições, de tal modo que emergem raciocínios do tipo: "o retângulo possui todas as propriedades que um quadrilátero necessita possuir para ser um paralelogramo; então, um retângulo também é um paralelogramo". É feita a diagramação dessa hierarquia, que permite observar a hierarquia quanto à complexidade de atributos críticos dos diferentes tipos de quadriláteros.

Encontro 5

- Objetivo principal: estudo do conceito altura de triângulo
- Metodologia e atividades:

É apresentada aos alunos uma construção no GeoGebra. A construção contém um paralelogramo azul e uma série de orientações – configurando a fase didática da *interrogação*. Nossa proposta é de que os alunos, seguindo as orientações, tornem-se capazes de observar a propriedade que diz "*os paralelogramos, que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais"*, PROP. XXXVI do Livro I dos Elementos de Euclides (Commandino, 2009). Esse momento inicial caracteriza um espaço didático da fase de *orientação dirigida*, dada a exposição de construções pré-elaboradas e um encadeamento de pequenas tarefas a serem executadas. Na sequência, ao continuar seguindo as orientações e fazendo as devidas construções e explorações, os alunos obtêm a propriedade que diz "*os triângulos, que estão sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais*" PROP. XXXVIII (Idem).

Após as explorações individuais do objeto apresentado e dos demais objetos construídos pelos próprios alunos, é proposta a discussão – fase da *explicação* - sobre as propriedades observadas. O objetivo é que, nessa discussão, possa ser enunciada a definição – ou ao menos um esboço - do conceito altura de triângulo. Estabelecendo conexões com as famílias de paralelogramos iniciais, tal noção pode ser estendida também para o quadrilátero paralelogramo. O momento de *integração* da aula em questão é produzido no passo em que são lembradas as relações hierárquicas da aula anterior; se a noção de altura é bem definida para o paralelogramo, assim também o será para os quadriláteros que contém todos os atributos críticos do paralelogramo, os quais sejam: retângulo, losango e paralelogramo.

Encontro 6

- Objetivo principal: ilustração do Teorema de Pitágoras

- Metodologia e atividades:

No encontro anterior, foi estudada a propriedade que paralelogramos e triângulos têm a respeito da “preservação” da área, quando se desloca o objeto entre retas paralelas. O primeiro tópico a ser visto nessa aula será a preservação da área ao rotacionar um objeto por certo ângulo. Essa constatação, de certa forma, é mais acessível que a anterior, pois o formato do objeto não se modifica. Essa rápida constatação será utilizada para conclusões no decorrer da aula.

Na sequência, os alunos devem construir um triângulo retângulo. Supõe-se que, a maioria – senão todos – deva realizar tal construção a partir do perpendicularismo entre dois segmentos, que corresponderão aos catetos, de modo que a hipotenusa seja obtida como consequência. Assim, será sugerida outra construção, que leve em consideração o diâmetro de uma circunferência e um ponto sobre ela. Por se tratar de uma construção sugerida, verifica-se classificar esse momento da aula como de *orientação dirigida*. Não será informado, de imediato, que essa construção originará um triângulo retângulo; isto deverá ser explorado pelos alunos.

Após essa construção, é retomado o enunciado do Teorema de Pitágoras, cujo conhecimento ocorre na 8ª série do Ensino Fundamental. Geralmente, o Teorema de Pitágoras é utilizado em problemas de geometria, porém sob um aspecto algébrico, que busque determinar a medida de um segmento conhecendo os demais. Aqui, sugere-se a construção, por parte dos alunos, de quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa. Depois de breve exploração, os alunos são questionados sobre que relação pode haver entre o enunciado do Teorema de Pitágoras e os quadrados que eles acabam de construir. Ao calcular a área dos quadrados, obtém-se a relação questionada anteriormente - que não se altera com a variação na medida/posição/orientação dos segmentos – e que pode ser enunciada como: “a soma da área dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área construída sobre a hipotenusa”.

O encontro é finalizado com a apresentação de uma construção que verifica este fato e que contempla as construções feitas pelo grupo de alunos nas últimas aulas: a preservação da área de paralelogramos quando postos entre as mesmas paralelas e quando rotacionados em torno de um ângulo dado. É importante observar que foi necessária a *integração* de diversos elementos para constituir esse conhecimento último, a respeito da verificação do Teorema de Pitágoras.

<u>Encontro 7</u>

- Objetivo principal: sistematização sobre o conceito altura de triângulo
- Metodologia e atividades:

O início do encontro retoma a questão abordada no quinto encontro, que trata da “preservação” da área de uma família de paralelogramos – assim como é o caso de uma família de triângulos – de mesma base e entre as mesmas paralelas. Então, é lançado o questionamento: “embora tenhamos verificado que a preservação da área ocorre, para uma variedade de paralelogramos de uma mesma família, não é surpreendente que isso de fato ocorra? Por que, afinal, isso ocorre? Seria possível *mostrar* que isso é verdade?”.

Esses questionamentos abrem espaço para uma breve explicação sobre a natureza axiomática da Geometria, que também ocorre em diversas outras ciências. São explicadas as noções de Elementos Primitivos, Definições, Axiomas, Proposições e Demonstrações. A explicação se dá sob seu caráter conceitual – sem total formalidade – e através de exemplos. Discute-se, então, sobre a questão abordada na aula: “os paralelogramos postos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas têm áreas iguais”. Essa propriedade é uma proposição e, portanto, pode e deve ser demonstrada.

Não é feita, entretanto, uma demonstração formal; esse não é o objetivo do projeto. É produzida, na verdade, a verificação de uma série de proposições de Euclides, que passa por essa questão da preservação das áreas dos paralelogramos e culmina na observação de um elemento invariante na preservação das áreas desse tipo de quadrilátero e, especialmente, de um triângulo. Esse elemento é a altura, objeto de discussão no questionário da primeira aula, cuja *integração* se dá nessa aula.

## 3.2. A OPERACIONALIZAÇÃO E A ANÁLISE DOS ENCONTROS

A parte experimental do projeto contou com a participação de 9 alunos do Ensino Médio do Colégio La Salle Dores: dois alunos do 1º ano, quatro alunos do 2º ano e três alunos do 3º ano. Alguns alunos faltaram ao primeiro encontro, e outros alunos estiveram ausentes em alguns encontros; podemos resumir, em relação à presença dos alunos, que o público médio ficou entre 7 e 8 alunos na maioria dos encontros.

No que segue, fazemos a descrição de como ocorreu cada um dos encontros e uma análise a respeito do que se observou no desenrolar das atividades. Tais descrição e análise dividem esta seção em sete subseções.

### *3.2.1. Encontro 1: apresentação software GeoGebra e questionário de sondagem*

Estavam presentes, para o início do projeto, 6 alunos (dentre os 9 que participariam ao longo do projeto). No início da aula, foi feita a apresentação do projeto, seus objetivos e metodologia de trabalho. Em seguida, foi entregue aos alunos o questionário inicial, a ser respondido individualmente, cujas respostas são analisadas no final desta subseção.

Como forma de apresentar o software GeoGebra, foi mostrada uma série de simples construções com o objetivo de mostrar, brevemente, como os objetos geométricos são criados e como se comportam, no sentido da "liberdade" de movimentação que possuem, ou não. A Figura 9 mostra a construção que foi feita no momento da aula e apresentada passo a passo para os alunos.

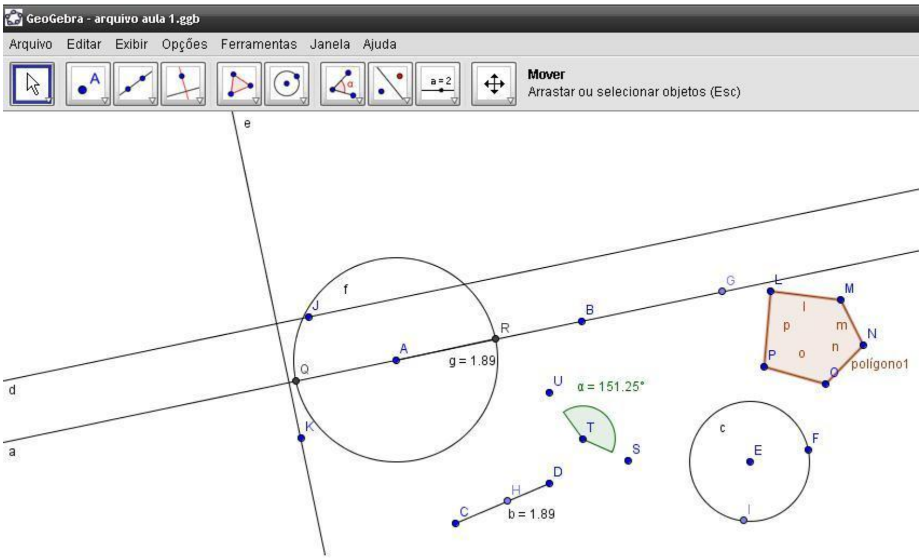
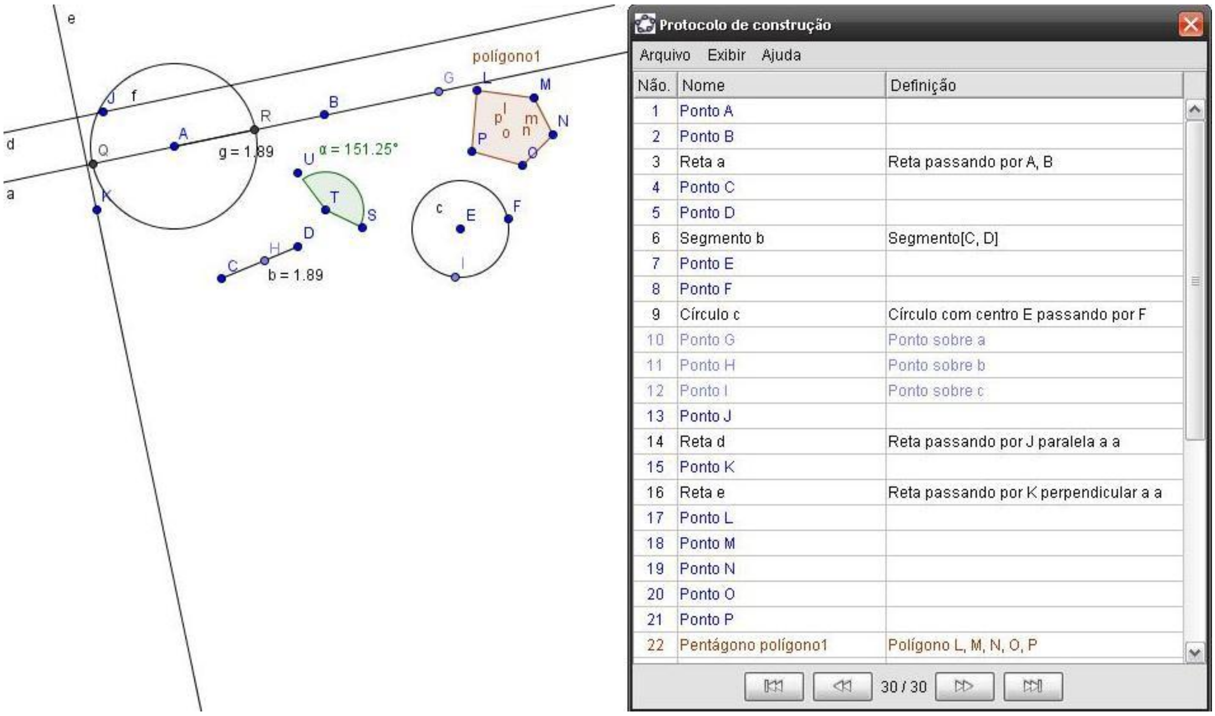



**Figura 9** Diferentes construções exemplificativas no software GeoGebra

Foram apresentadas as construções de objetos geométricos usuais tais como: pontos, retas, segmentos de reta, ângulo, circunferência, polígono, etc. O contraste entre a movimentação livre de alguns pontos e a mobilidade reduzida - ou inexistente - de outros, gerou curiosidade nos alunos: "alguns objetos dependem de outros". Essa constatação estava clara sob seu aspecto visual. Foi, então, apresentada a ferramenta "Protocolo de construção" (Figura 10), que representa a compreensão analítica associada à visualização anterior.




| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Reta a | Reta passando por A, B |
| 4 | Ponto C | |
| 5 | Ponto D | |
| 6 | Segmento b | Segmento[C, D] |
| 7 | Ponto E | |
| 8 | Ponto F | |
| 9 | Círculo c | Círculo com centro E passando por F |
| 10 | Ponto G | Ponto sobre a |
| 11 | Ponto H | Ponto sobre b |
| 12 | Ponto I | Ponto sobre c |
| 13 | Ponto J | |
| 14 | Reta d | Reta passando por J paralela a a |
| 15 | Ponto K | |
| 16 | Reta e | Reta passando por K perpendicular a a |
| 17 | Ponto L | |
| 18 | Ponto M | |
| 19 | Ponto N | |
| 20 | Ponto O | |
| 21 | Ponto P | |
| 22 | Pentágono polígono1 | Polígono L, M, N, O, P |

**Figura 10** Apresentação do modo de exibição “Protocolo de construção”

Os objetos cujas movimentações são livres não possuem definição. Por outro lado, objetos com movimentações limitadas ou impossíveis têm, por definição, alguma sentença: “Círculo c – Círculo com centro E passando por F”. Associada a essa ferramenta está outra, intitulada “Barra de navegação para passos da construção”, que permite “rebobinar” ao momento inicial e observar, passo a passo, os objetos se constituindo e, especialmente, como essa constituição se dá.

Finalizamos o encontro com a apresentação de uma construção, cuja situação inicial expõe-se na Figura 11. Fez-se o questionamento aos alunos: “o que parecem ser esses triângulos, o azul e o vermelho?”. De imediato, veio a resposta: “iguais”. E, à réplica “apenas iguais entre si?” um aluno, parecendo compreender a classificação, respondeu “os dois são equiláteros”.

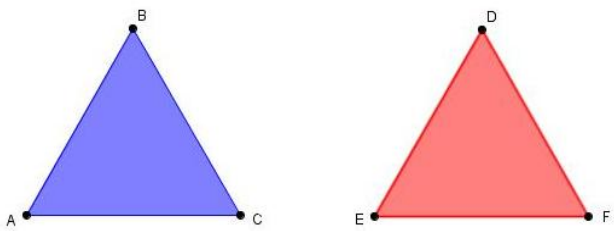



**Figura 11** Triângulos (aparentemente) equiláteros

Ao manipular-se qualquer ponto do triângulo azul (Figura 12), o objeto deformava-se, e era perdida a propriedade de lados e ângulos iguais – o que fora prontamente observado e dito pelos alunos. A figura a seguir mostra uma situação particular, que é obtida deslocando-se o ponto B em direção ao ponto D do triângulo vermelho. Isto revela que os lados iguais que a situação anterior sugeria não constituem atributos críticos do triângulo azul.

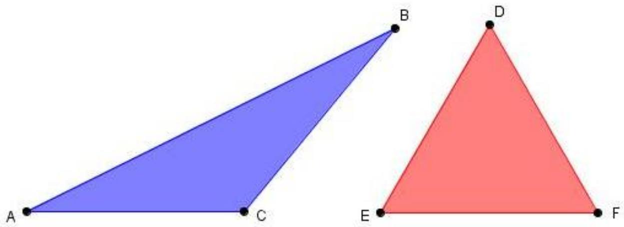



**Figura 12** O Triângulo azul se deforma, quando o ponto B é deslocado

Ao deslocar-se o ponto D ou o ponto E do triângulo vermelho (Figura 13), ocorre alteração no tamanho e na disposição do triângulo no plano; porém, a característica de triângulo equilátero se mantém. O ponto F, entretanto, não permite movimentação. Tal fato configurou uma surpresa nos alunos. Movimentando-se novamente o ponto D, um aluno manifesta-se: “o ponto F movimenta-se com D”.

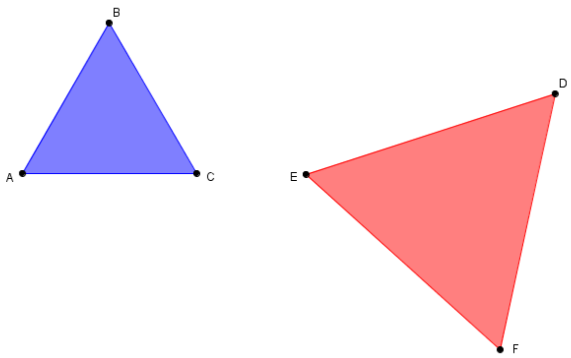
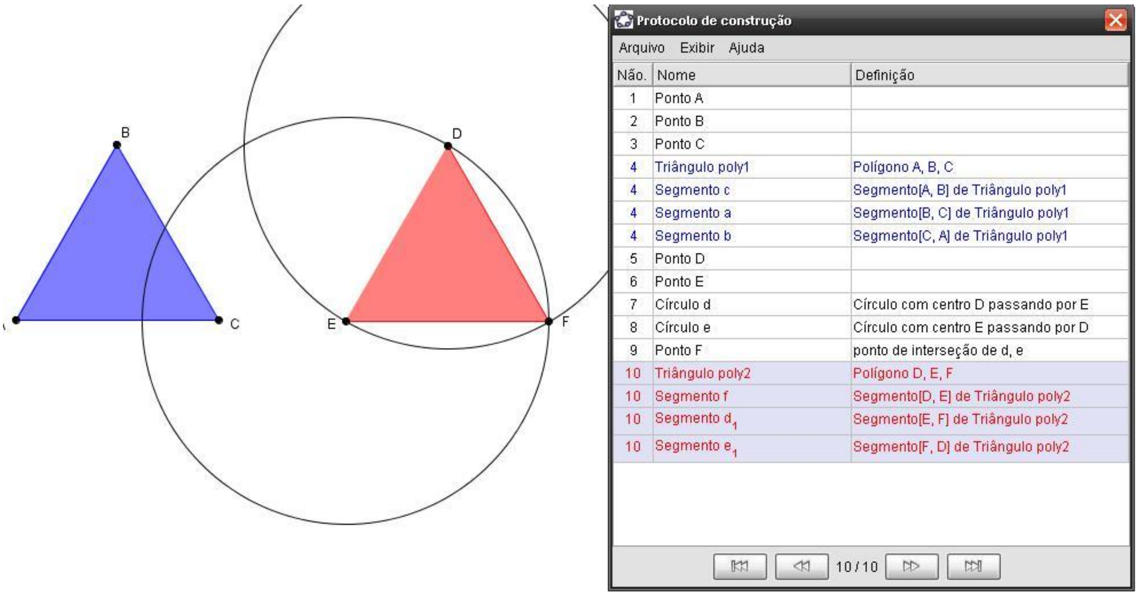



**Figura 13** O deslocamento do ponto D não altera os atributos críticos

Pode-se dizer, então, que os atributos críticos – lados iguais e ângulos iguais – se preservam, e os atributos não críticos, no caso, um lado na posição horizontal, podem ser alterados. Este tipo de argumentação utilizou vocábulos como “propriedades” e “características” nesse primeiro encontro, mas as noções de atributos críticos e não críticos seriam sugeridas no decorrer dos próximos encontros.

Após a constatação, por parte dos alunos, dessa dependência que o ponto F possui, foi revelada uma nova ferramenta do software GeoGebra: “Exibir/esconder objeto”. Havia duas circunferências que estavam “escondidas”. Foi discutido com os alunos que o movimento do ponto F é consequência do movimento dos demais, devido ao fato de que o ponto F foi definido como intersecção das duas circunferências; mostrado ao utilizar o modo de exibição “Protocolo de construção” (Figura 14).




| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Ponto C | |
| 4 | Triângulo poly1 | Polígono A, B, C |
| 4 | Segmento c | Segmento[A, B] de Triângulo poly1 |
| 4 | Segmento a | Segmento[B, C] de Triângulo poly1 |
| 4 | Segmento b | Segmento[C, A] de Triângulo poly1 |
| 5 | Ponto D | |
| 6 | Ponto E | |
| 7 | Círculo d | Círculo com centro D passando por E |
| 8 | Círculo e | Círculo com centro E passando por D |
| 9 | Ponto F | ponto de interseção de d, e |
| 10 | Triângulo poly2 | Polígono D, E, F |
| 10 | Segmento f | Segmento[D, E] de Triângulo poly2 |
| 10 | Segmento $d_1$ | Segmento[E, F] de Triângulo poly2 |
| 10 | Segmento $e_1$ | Segmento[F, D] de Triângulo poly2 |

**Figura 14** Imagem do “Protocolo de construção” do triângulo vermelho, que revela o motivo pelo qual a congruência entre os lados do triângulo é um atributo crítico

Além da aplicação do questionário de sondagem, este primeiro encontro consistiu, portanto, na apresentação de aspectos relevantes do software GeoGebra, os quais sejam: como fazer pequenas construções a partir das ferramentas disponíveis; o modo de exibição “Protocolo de Construção”; e a diferença entre uma construção “à mão livre” e uma construção baseada nos atributos críticos do conceito pretendido – no caso, o triângulo equilátero.

Iniciamos, agora, a análise das respostas dos alunos ao questionário. O questionário, na íntegra, está presente no anexo 1 – contendo, inclusive, as respostas de um aluno. A primeira questão era descrita como se segue:

Questão 1: Classifique os quadriláteros abaixo de acordo com a seguinte notação (escreva a classificação abaixo do respectivo quadrilátero):

(1) se o quadrilátero é um quadrado;

(2) se o quadrilátero é um retângulo;

(3) se o quadrilátero é um losango;

(4) se o quadrilátero é um paralelogramo;

(5) se o quadrilátero é um trapézio;

(6) se o quadrilátero não é de nenhum dos tipos anteriores.

Observamos a inexistência da classificação, por parte de todos os alunos, de qualquer dos quadriláteros em mais do que um tipo. Sob um olhar primeiro, duas possibilidades emergem. A primeira é de que os alunos não concebem a possibilidade de um quadrilátero poder ser classificado sob um ou mais tipos de quadriláteros. A segunda possibilidade é de que o enunciado não tenha sido totalmente claro, de forma a induzir os alunos a classificarem univocamente cada um dos quadriláteros. Entretanto, independente de qual das possibilidades seja verdadeira – se é que a verdadeira possibilidade existe - é possível discutir a respeito das respostas que surgiram.

Usaremos a notação “primeiro quadrilátero” para nos referirmos ao primeiro quadrilátero considerado da esquerda para a direita e de cima para baixo, de modo que o “segundo quadrilátero” fica a sua direita, o “terceiro quadrilátero” à direita deste, o “quarto quadrilátero” fica abaixo do primeiro, e a notação assim prossegue.

Primeiro quadrilátero: 4 alunos classificaram-no como paralelogramo, 1 aluno classificou-o como retângulo e 1 aluno classificou-o como trapézio. A classificação como retângulo parece estar associada à *imagem conceitual* equivocada de que um quadrilátero em que as bases são paralelas às margens horizontais do papel é, necessariamente, um retângulo.

Segundo quadrilátero: todos os 6 alunos classificaram-no como retângulo. Essa resposta uniforme leva a crer que os alunos compreendem quais são os atributos críticos do retângulo, inclusive ocorrendo numa posição não prototípica.

Terceiro quadrilátero: 3 alunos classificaram-no como losango, 2 alunos responderam que não é de tipo algum e 1 aluno não respondeu. A classificação como losango revela a força que o aspecto visual de um quadrilátero na posição e formato em que foi apresentado tem sobre as *imagens conceituais* dos alunos.

Quarto quadrilátero: todos os 6 alunos classificaram-no como um quadrado. O quadrilátero apresentado apresenta os atributos críticos e também os não-críticos do quadrado, de forma que a resposta uniforme parece ser consequência do exemplo prototípico em questão.

Quinto quadrilátero: 4 alunos responderam que não é de tipo algum, 1 aluno classificou-o como paralelogramo e 1 aluno classificou-o como trapézio. O aluno que o classificou como paralelogramo é o mesmo que classificou o primeiro quadrilátero como trapézio, revelando a não clareza que esse aluno tem sobre os atributos críticos dos quadriláteros. O aluno que o classificou como trapézio não considerou o fato de a imagem não conter atributos críticos do trapézio, e parece ter sido induzido a essa resposta devido à presença de atributos não-críticos, de exemplos protótipos de trapézio, como lados inclinados e lados que parecem bases.

Sexto quadrilátero: 5 alunos classificaram-no como losango e 1 aluno respondeu que não é de tipo algum. O grande número de alunos que o classificaram como losango revela que, nesse caso, os alunos não se importaram com o fato de o quadrilátero estar numa posição não prototípica do losango.

Sétimo quadrilátero: todos os 6 alunos classificaram-no como retângulo. Essa resposta uniforme leva a crer que, nesse caso, os alunos não se importaram com o fato de o quadrilátero estar numa posição não prototípica do retângulo.

Oitavo quadrilátero: 4 alunos classificaram-no como quadrado e 2 alunos classificaram-no como losango. Os 2 alunos que o classificaram como losango parecem ter a construído a *imagem conceitual* de que um quadrilátero, para ser quadrado, necessita possuir os lados paralelos às margens do papel; ou seja, atributos não-críticos de um exemplo protótipo usual.

Nono quadrilátero: 4 alunos classificaram-no como trapézio e 2 alunos responderam que não é de tipo algum. Os 2 alunos que responderam não ser de tipo algum parecem ter a *imagem conceitual* de que um quadrilátero, para ser trapézio, necessita possuir as bases paralelas às margens horizontais do papel; ou seja, atributos não-críticos de um exemplo protótipo usual.

Analisamos, agora, a segunda questão do questionário, elaborada como segue:

Questão 2: Em cada um dos triângulos ABC abaixo, indique/trace o segmento que corresponde à altura relativa ao lado AB.

Houve dois tipos bastante definidos de comportamentos dos alunos. O primeiro destes comportamentos pode ser descrito como a não compreensão da pergunta, pois estes simplesmente destacaram o lado AB em cada um dos triângulos. A não compreensão da pergunta pode estar vinculada à falta de similaridade dos alunos com a linguagem presente no enunciado; no caso, a escrita “altura relativa ao lado AB” pode ter causado confusão à *imagem conceitual* prototípica dos alunos, que geralmente concebem a existência de uma altura particular num triângulo – aquela que, aliada a outras informações necessárias, é útil para o cálculo da sua área.

O segundo comportamento, também uniforme aos alunos que o tiveram, se caracteriza pelo traçado, em cada um dos triângulos, ora do segmento AC, ora do segmento AB. Este procedimento revela a compreensão prototípica de que a altura de um triângulo é sempre coincidente a um dos lados deste triângulo.

Finalmente, apresentamos a análise da última pergunta do questionário, elaborada como segue:

Questão 3: Para cada um dos tipos de quadrilátero, forneça uma explicação sobre “*o que é”* e represente-o através de uma imagem.

Em relação ao quadrado, a resposta praticamente uniforme para todos os alunos” foi a seguinte: “quadrilátero com 4 lados iguais”; nenhum aluno fez menção aos 4 ângulos retos. As representações visuais revelaram sempre quadrados em posições prototípicas, e sem menção ao perpendicularismo – embora tivessem o formato como tal. Surpreendente foi, apenas, a resposta de um dos alunos: “figura geométrica com 4 lados normalmente com medidas parecidas”, revelando que sua *imagem conceitual*, ao invés de prototípica, concebe atributos críticos equivocados.

A resposta comum dada pelos alunos ao retângulo pode ser sintetizada como “quadrilátero com dois lados iguais e diferentes dos outros dois, que também são iguais entre si”. Deste modo, os alunos revelam não perceber que um quadrado também é um retângulo, nem o perpendicularismo dos lados adjacentes. Todas as representações visuais foram retângulos com lados paralelos às margens do papel e cujas bases eram sempre maiores que suas alturas – exemplo protótipo. Perturbada pelo exemplo protótipo, uma das alunas descreveu o retângulo como sendo “uma forma geométrica que não possui quatro lados iguais, onde os lados *maiores* são as bases, e os *menores*, as alturas” (grifo nosso).

As descrições e as representações visuais do losango foram variadas. Parcela significativa dos alunos explicou que o losango é uma “forma geométrica formada por dois triângulos”; dois alunos, aliás, incluíram a esta propriedade o fato de “serem” triângulos equiláteros. Para estes houve, então, preocupação com a congruência entre os lados. Um aluno, do 3º ano, apresentou uma descrição bastante surpreendente para o nível escolar em que se encontra: “é uma figura com forma de pipa”.

O paralelogramo nos reserva um fato interessante: a ausência absoluta de descrição e de representação visual para 4 dos 6 alunos, o que é bastante surpreendente, dado que todos os alunos classificaram como paralelogramo ao menos uma figura, na questão 1. Apresentamos as descrições dos dois alunos cujas respostas têm informalidade marcante: “figura geométrica com 4 lados paralelos como se fosse um retângulo fora de ‘foco’, parece representar um plano” (grifo do aluno); “tem a base e a reta de cima iguais, porém os lados angulados para fora, invertidos”.

As respostas dadas pelos alunos ao trapézio apresentaram, de um modo geral, assim como fora o caso do losango, a intenção dos alunos de decompor a figura em outras figuras.

Três alunos responderam que é “um quadrado ou retângulo com um triângulo” e dois alunos descreveram que, ao invés de um triângulo, são dois. Todos estes apresentam, então, uma visão prototípica do que é um retângulo; as suas representações visuais acompanharam essa descrição.

A conclusão sobre a análise feita consiste na observação de que: a maioria dos alunos possui *imagens conceituais* fortemente associadas a exemplos protótipos; a não compreensão de alguns termos comuns à geometria; e, finalmente, a não concepção de hierarquia entre diferentes conceitos. Todas estas características nos remetem a comportamentos típicos dos níveis 0 e 1 do modelo Van Hiele.

### 3*.2.2. Encontro 2: construções de quadriláteros a partir dos seus lados*

Dada a presença de 3 novos participantes no projeto - em relação àqueles presentes no primeiro encontro - se fez necessária, no começo deste encontro, uma breve reapresentação das principais ferramentas do software GeoGebra. O objetivo era de que não houvesse total desconhecimento, por parte desses novos integrantes do projeto, do ambiente de aprendizagem antes do seu uso. Para tanto, foram utilizadas as mesmas construções do primeiro encontro.

Feito isto, passou-se à apresentação de uma série de construções no GeoGebra, que discutiam as respostas dos alunos em relação à questão 3 do questionário da primeira aula. Essas construções foram produzidas no período entre os encontros, com a intenção de promover indagações aos alunos a partir das suas próprias respostas. Dessa forma, eles próprios teriam a possibilidade de verificar a validade, ou não, das propriedades dos tipos de quadriláteros enunciadas por eles.

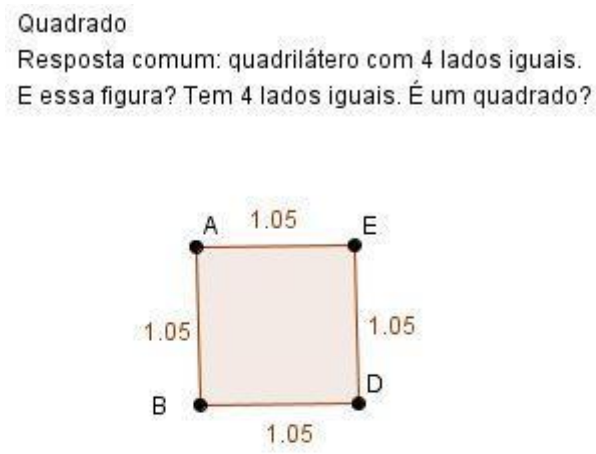



**Figura 15** A representação de um quadrilátero que possui as propriedades enunciadas pelos alunos e que parece ser um quadrado

A Figura 15 apresenta a resposta comum, dada pela grande maioria dos alunos, a respeito “do que é” um quadrado: quadrilátero com 4 lados iguais. A imagem, na primeira posição apresentada, se parece muito com um quadrado. Há concordância dos alunos em relação a isso. Porém, ao deslocar o ponto A (Figura 16), o objeto se deforma. Foi feito o questionamento: “continua sendo um quadrado”? Um aluno logo respondeu: “virou um losango!”. O questionamento seguinte foi: “é, então, suficiente 4 lados iguais para que um quadrilátero possa ser classificado como quadrado?”. Foi indicado aos alunos que refletissem sobre esse questionamento e utilizassem as suas conjecturas no trabalho que viria a seguir.

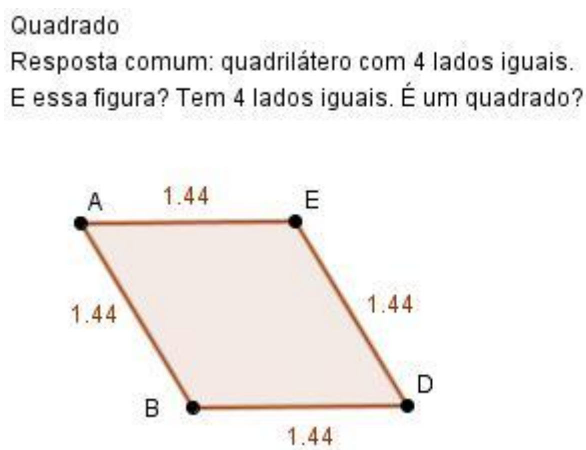



**Figura 16** O mesmo “quadrado”, após o deslocamento do ponto A

De modo análogo, foram feitas construções de cada um dos tipos de quadriláteros, a partir das respostas dos alunos no questionário inicial. Em cada uma das apresentações das construções, foram feitos questionamentos no mesmo sentido da anterior, ou seja, com a intenção de possibilitar aos alunos conjecturas sobre quais são, de fato, os atributos críticos dos tipos de quadriláteros.

Conforme a proposta estabelecida, a atividade seguinte consistiu na construção de quadriláteros a partir de seus lados. Cada um dos 3 grupos formados ficou responsável pela construção de um tipo de quadrilátero, decididos por sorteio. Tal sorteio definiu os seguintes quadriláteros: quadrado, retângulo e paralelogramo. Para conseguir realizar as construções, os alunos deveriam discutir nos seus grupos a respeito de quais propriedades dos lados dos quadriláteros eles conjecturavam ser verdadeiras. Foi iniciada, nessa aula, sucinta introdução aos alunos do vocabulário que pretendíamos; as propriedades referidas são os atributos críticos do conceito, enquanto atributos que não permanecem invariantes são ditos não críticos.

A observação da produção dos grupos nesta primeira atividade utilizando o software pode ser resumida em algumas considerações. Os alunos, embora estivessem tendo o primeiro contato com o GeoGebra, demonstraram uma desenvoltura bastante satisfatória – que parece estar associada à familiaridade que sujeitos desta idade têm com objetos de informática. Evidentemente, diversas intervenções pontuais se fizeram necessárias, no sentido de permitir aos alunos a inclusão das suas ideias no software, dado que a compreensão das ferramentas disponíveis é adquirida com a experiência de uso.

Praticamente todos os alunos procederam de forma a realizar explorações bastante empíricas em quadriláteros construídos “à mão livre” – ou seja, sem preocupação com os atributos críticos do conceito. A expressão “à mão livre” será utilizada novamente neste contexto proposto e se desvinculará, portanto, do uso das aspas. Uma vez construído o quadrilátero que se assemelhava com o de seu interesse, cada aluno buscava deslocar os vértices, a fim de abstrair as propriedades necessárias. Tal abstração foi se caracterizando aos poucos, em diferentes tempos para cada aluno. Num certo momento da aula, os 3 grupos já tinham conhecimento dos atributos críticos dos seus respectivos conceitos. Restava, agora, colocá-los em prática, através de construção no GeoGebra que respeitasse esses atributos.

O grupo responsável pela construção do paralelogramo foi o primeiro a concluir a atividade. Aliás, foi o único a concluir a atividade nesse encontro. Ficou decidido que os demais grupos iriam concluí-la no princípio da aula seguinte. A construção do grupo do paralelogramo é apresentada na Figura 17.

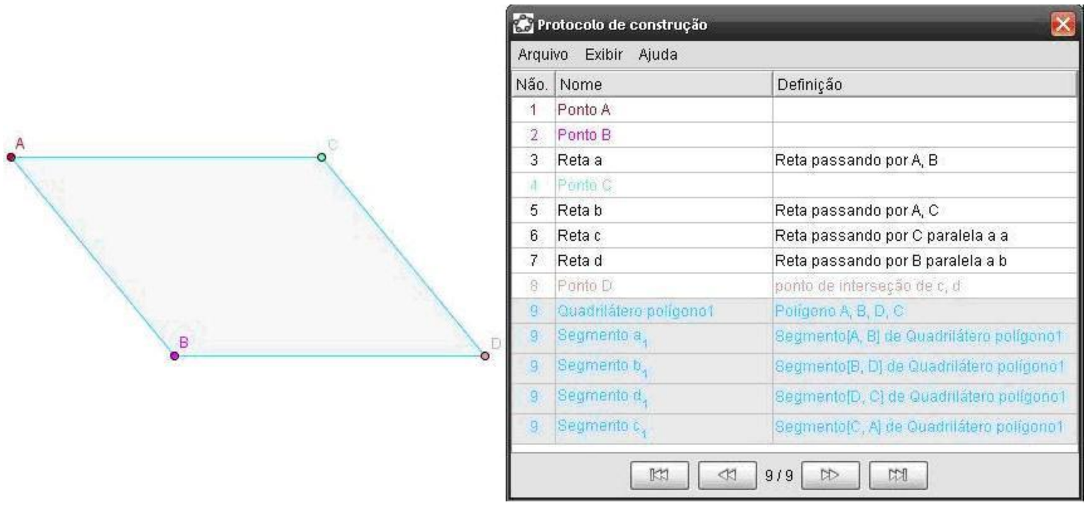
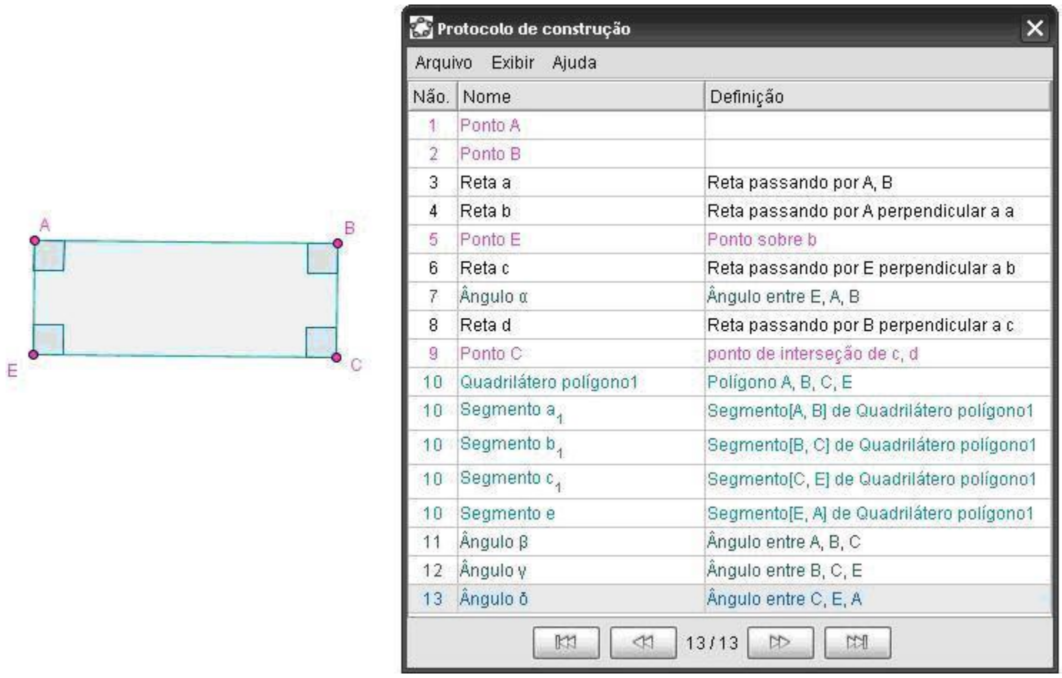



**Figura 17** Construção, a partir dos lados, do grupo do Paralelogramo

Podemos concluir a análise deste segundo encontro com a observação de que os alunos, de um modo geral, iniciaram sempre as suas construções sem preocupações com os atributos críticos, o que está de acordo com aquilo revelado no questionário de sondagem. Ao longo do encontro, os alunos passaram a perceber quais são tais atributos, cuja razão está diretamente associada às suas explorações no GeoGebra, pois é no momento da manipulação de pontos livres que percebe-se qual propriedade deveria ser invariante e não está sendo.

### *3.2.3. Encontro 3: construções de quadriláteros a partir das suas diagonais*

A parte inicial do encontro foi reservada para que os grupos responsáveis pelas construções de retângulo e quadrado a partir de seus lados concluíssem as suas atividades. Apresentamos as construções feitas pelos grupos do retângulo e do quadrado, Figura 18 e Figura 19, respectivamente.



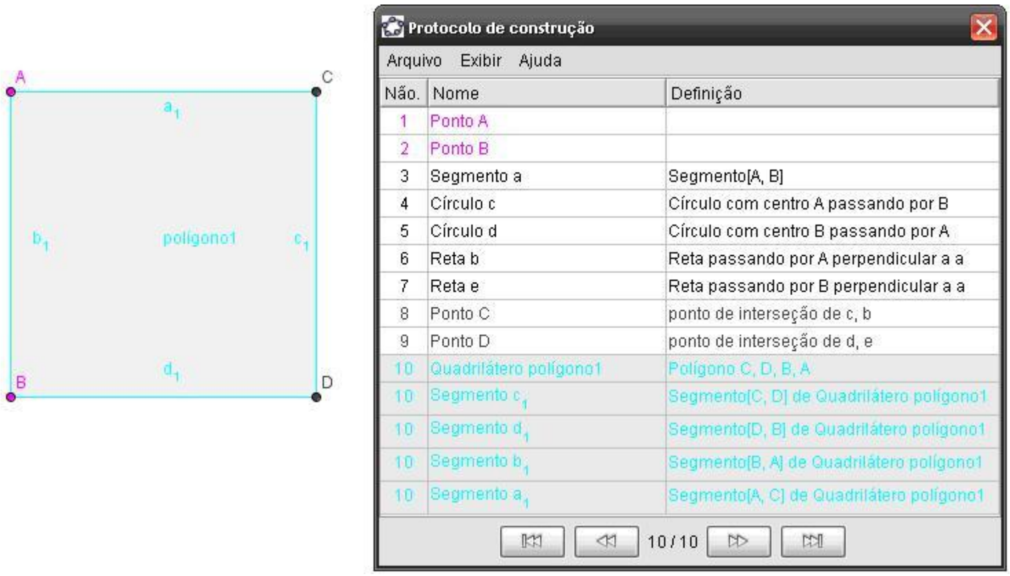

Protocolo de construção

Arquivo Exibir Ajuda

| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Reta a | Reta passando por A, B |
| 4 | Reta b | Reta passando por A perpendicular a a |
| 5 | Ponto E | Ponto sobre b |
| 6 | Reta c | Reta passando por E perpendicular a b |
| 7 | Ângulo α | Ângulo entre E, A, B |
| 8 | Reta d | Reta passando por B perpendicular a c |
| 9 | Ponto C | ponto de interseção de c, d |
| 10 | Quadrilátero polígono1 | Polígono A, B, C, E |
| 10 | Segmento $a_1$ | Segmento[A, B] de Quadrilátero polígono1 |
| 10 | Segmento $b_1$ | Segmento[B, C] de Quadrilátero polígono1 |
| 10 | Segmento $c_1$ | Segmento[C, E] de Quadrilátero polígono1 |
| 10 | Segmento e | Segmento[E, A] de Quadrilátero polígono1 |
| 11 | Ângulo β | Ângulo entre A, B, C |
| 12 | Ângulo γ | Ângulo entre B, C, E |
| 13 | Ângulo δ | Ângulo entre C, E, A |

13 / 13

**Figura 18** Construção, a partir dos lados, do grupo do Retângulo




Protocolo de construção

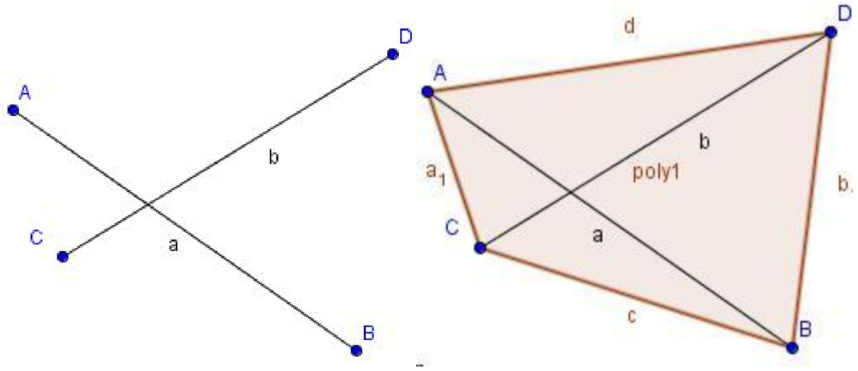
Arquivo Exibir Ajuda

| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Segmento a | Segmento[A, B] |
| 4 | Círculo c | Círculo com centro A passando por B |
| 5 | Círculo d | Círculo com centro B passando por A |
| 6 | Reta b | Reta passando por A perpendicular a a |
| 7 | Reta e | Reta passando por B perpendicular a a |
| 8 | Ponto C | ponto de interseção de c, b |
| 9 | Ponto D | ponto de interseção de d, e |
| 10 | Quadrilátero polígono1 | Polígono C, D, B, A |
| 10 | Segmento $c_1$ | Segmento[C, D] de Quadrilátero polígono1 |
| 10 | Segmento $d_1$ | Segmento[D, B] de Quadrilátero polígono1 |
| 10 | Segmento $b_1$ | Segmento[B, A] de Quadrilátero polígono1 |
| 10 | Segmento $a_1$ | Segmento[A, C] de Quadrilátero polígono1 |

10 / 10

**Figura 19** Construção, a partir dos lados, do grupo do Quadrado

Na sequência, foi apresentada a ideia de que um quadrilátero pode ser pensado no que diz respeito às propriedades que as suas diagonais possuem. Como exemplo, foi construído passo a passo um quadrilátero cujas diagonais não tem nenhuma característica específica. Procede-se a construção prévia de dois segmentos que seriam as diagonais do quadrilátero (Figura 20a). Na outra figura, o quadrilátero é construído, de fato, a partir das diagonais (Figura 20b).




(a) (b)

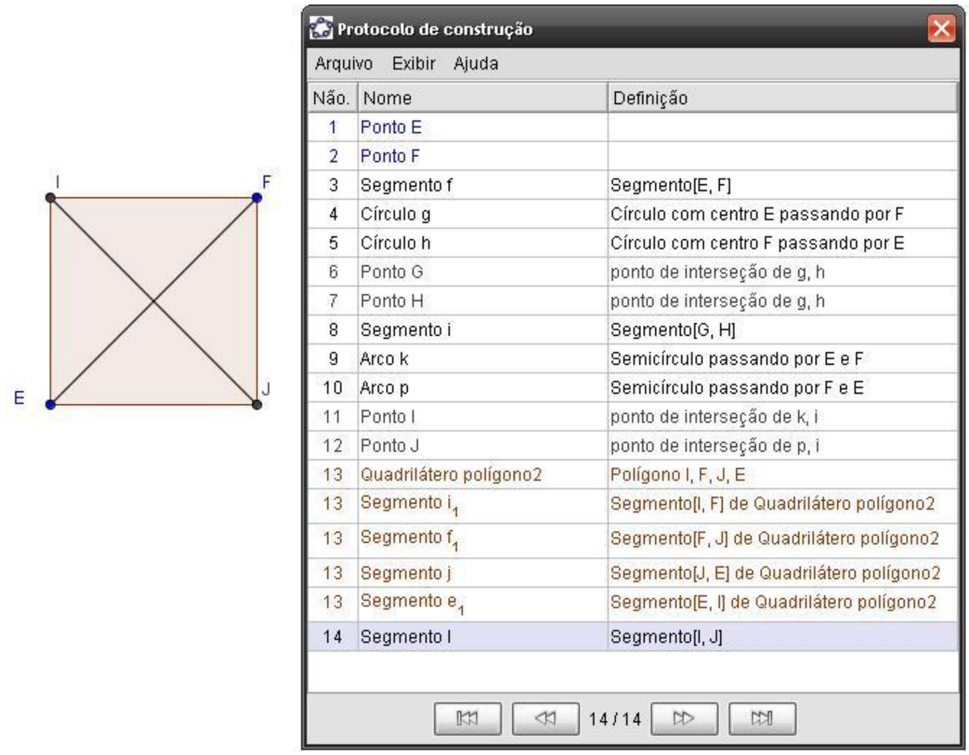
**Figura 20** Construção de um quadrilátero qualquer a partir das suas diagonais

A partir da apresentação dessa nova possibilidade de concepção de um quadrilátero, que considera como elementos essenciais de construção as suas diagonais, foi enunciada a atividade aos grupos: cada grupo deveria fazer a construção a partir das diagonais do quadrilátero que construíram, na aula anterior, a partir dos lados. Para tanto, sugeriu-se a observação de quais características das diagonais do seu tipo de quadrilátero permanecem quando os vértices são movimentados na construção feita a partir dos lados, no encontro anterior. Ou seja, os alunos deveriam – a partir de explorações e discussões nos grupos – conjecturar quais são os atributos críticos e não críticos das diagonais do seu tipo de quadrilátero.

Realizando a exploração dos segmentos diagonais dos quadriláteros construídos, os grupos conseguiram identificar os atributos críticos desses objetos. Tal identificação foi consequência de discussões, conjecturas imprecisas, novas explorações, até alcançar o instante em que a situação se torna clara.

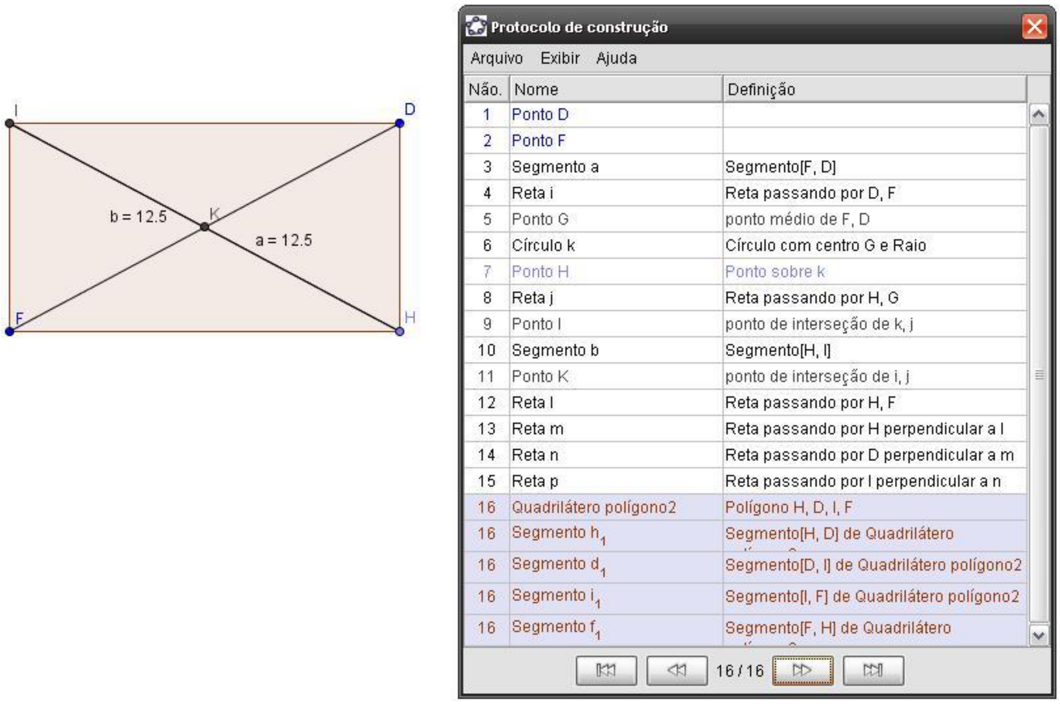
Entre os momentos de produção dos alunos, cabe destacar uma situação reincidente no trabalho de diferentes alunos – a não utilização das propriedades compreendidas na aula anterior. Tornando mais clara esta afirmação, utilizamos o exemplo de uma aluna do grupo do paralelogramo que, ao construir um paralelogramo com o intuito de traçar as diagonais e observar o comportamento que estas possuem, construiu o paralelogramo à mão livre. Este ato ocorreu de forma semelhante para alunos dos outros grupos. A análise que pode ser feita sobre o recorte deste momento de aprendizagem é que alguns alunos, embora compreendam quais são os atributos críticos de determinado conceito – ou seja, sabem enunciá-lo – não julgam ser necessário o uso de tais atributos numa construção. Isto sugere que a compreensão visual está superando a compreensão analítica, pois, para esses alunos, mais importa o que a imagem “parece” do que as propriedades a ela atribuídas de forma analítica; um comportamento que se enquadra no nível 1 do modelo Van Hiele.

Foram feitas, nas situações citadas acima e em outras, pequenas intervenções do professor; entretanto, o que marcou a produção foi a autonomia dos grupos nas tentativas de construções, das frustradas até as finais. Todos os grupos conseguiram concluir as atividades nessa aula. Seguem, nas figuras abaixo, as construções de quadrado (Figura 21), retângulo (Figura 22) e paralelogramo (Figura 23), respectivamente, a partir das suas diagonais.



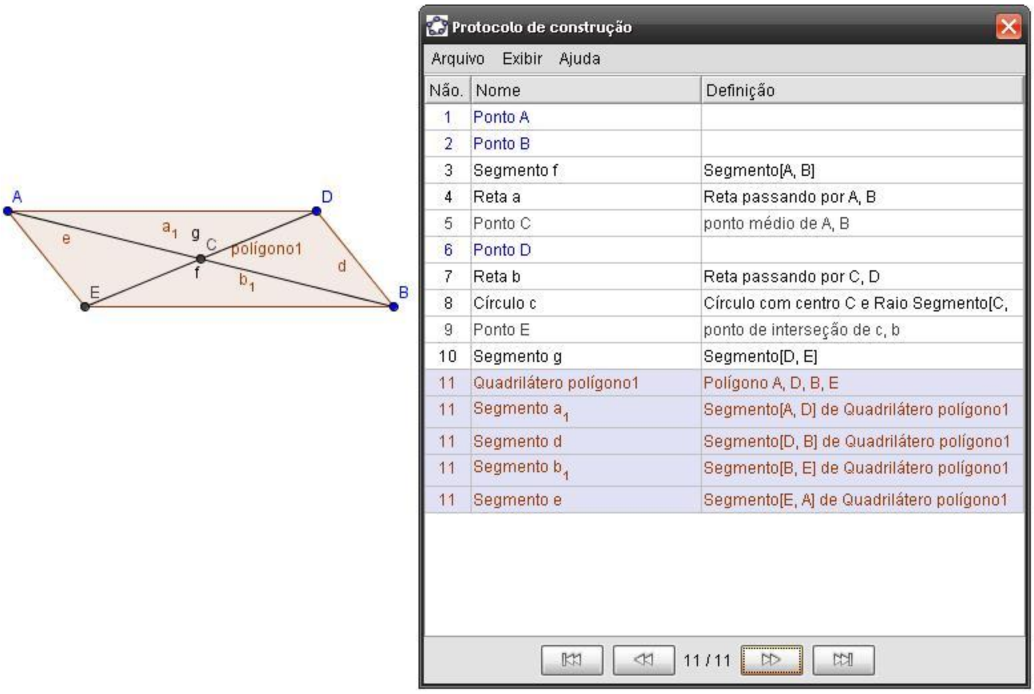

| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto E | |
| 2 | Ponto F | |
| 3 | Segmento f | Segmento[E, F] |
| 4 | Círculo g | Círculo com centro E passando por F |
| 5 | Círculo h | Círculo com centro F passando por E |
| 6 | Ponto G | ponto de interseção de g, h |
| 7 | Ponto H | ponto de interseção de g, h |
| 8 | Segmento i | Segmento[G, H] |
| 9 | Arco k | Semicírculo passando por E e F |
| 10 | Arco p | Semicírculo passando por F e E |
| 11 | Ponto I | ponto de interseção de k, i |
| 12 | Ponto J | ponto de interseção de p, i |
| 13 | Quadrilátero polígono2 | Polígono I, F, J, E |
| 13 | Segmento $i_1$ | Segmento[I, F] de Quadrilátero polígono2 |
| 13 | Segmento $f_1$ | Segmento[F, J] de Quadrilátero polígono2 |
| 13 | Segmento j | Segmento[J, E] de Quadrilátero polígono2 |
| 13 | Segmento $e_1$ | Segmento[E, I] de Quadrilátero polígono2 |
| 14 | Segmento l | Segmento[I, J] |

**Figura 21** Construção, a partir das diagonais, do grupo do Quadrado




| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto D | |
| 2 | Ponto F | |
| 3 | Segmento a | Segmento[F, D] |
| 4 | Reta i | Reta passando por D, F |
| 5 | Ponto G | ponto médio de F, D |
| 6 | Círculo k | Círculo com centro G e Raio |
| 7 | Ponto H | Ponto sobre k |
| 8 | Reta j | Reta passando por H, G |
| 9 | Ponto I | ponto de interseção de k, j |
| 10 | Segmento b | Segmento[H, I] |
| 11 | Ponto K | ponto de interseção de i, j |
| 12 | Reta l | Reta passando por H, F |
| 13 | Reta m | Reta passando por H perpendicular a l |
| 14 | Reta n | Reta passando por D perpendicular a m |
| 15 | Reta p | Reta passando por I perpendicular a n |
| 16 | Quadrilátero polígono2 | Polígono H, D, I, F |
| 16 | Segmento $h_1$ | Segmento[H, D] de Quadrilátero |
| 16 | Segmento $d_1$ | Segmento[D, I] de Quadrilátero polígono2 |
| 16 | Segmento $i_1$ | Segmento[I, F] de Quadrilátero polígono2 |
| 16 | Segmento $f_1$ | Segmento[F, H] de Quadrilátero |

**Figura 22 C**onstrução, a partir das diagonais, do grupo do Retângulo




| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Segmento f | Segmento[A, B] |
| 4 | Reta a | Reta passando por A, B |
| 5 | Ponto C | ponto médio de A, B |
| 6 | Ponto D | |
| 7 | Reta b | Reta passando por C, D |
| 8 | Círculo c | Círculo com centro C e Raio Segmento[C, |
| 9 | Ponto E | ponto de interseção de c, b |
| 10 | Segmento g | Segmento[D, E] |
| 11 | Quadrilátero polígono1 | Polígono A, D, B, E |
| 11 | Segmento $a_1$ | Segmento[A, D] de Quadrilátero polígono1 |
| 11 | Segmento d | Segmento[D, B] de Quadrilátero polígono1 |
| 11 | Segmento $b_1$ | Segmento[B, E] de Quadrilátero polígono1 |
| 11 | Segmento e | Segmento[E, A] de Quadrilátero polígono1 |

**Figura 23** Construção, a partir das diagonais, do grupo do Paralelogramo

Foi possível perceber, ao longo deste encontro, que uma *imagem conceitual* correta não é baseada, somente, na compreensão de quais são os atributos críticos do conceito. Isto se revelou claro no sentido de que, repetidamente, alguns alunos – que sabiam enunciar os atributos críticos do seu quadrilátero – no momento de realizar a construção, hesitavam em incluir na sua construção tais atributos, procedendo-a a mão livre. Este quesito apresentou evolução ao longo do encontro, mas não é possível dizer que tenha a sua incidência extinta. A compreensão da existência de propriedades em contraste com a não capacidade de perceber relações existentes entre essas propriedades e as definições dos conceitos é característica do nível 1 do modelo Van Hiele.

### *3.2.4. Encontro 4: sistematização sobre construções de quadriláteros*

O quarto encontro do projeto consistiu na sistematização do conhecimento relativo a quadriláteros, constituindo, então, a fase da integração do modelo Van Hiele. Esta sistematização foi realizada, para cada tipo de quadrilátero, do seguinte modo: o respectivo grupo apresentou a sua construção a partir dos lados, passo a passo; na sequência, professor, grupo e alunos discutiram a respeito dos atributos críticos dos lados, evidenciados na construção; foi elaborada, conjuntamente, uma definição do tipo de quadrilátero a partir das propriedades que seus lados têm; finalmente, o processo foi repetido para a construção a partir das diagonais. O procedimento descrito foi conduzido pelos grupos responsáveis pelo quadrado, pelo retângulo e pelo paralelogramo. O losango e o trapézio tiveram as suas construções apresentadas pelo professor; todavia, as demais etapas de discussão e de elaboração da definição – tanto em relação aos lados quanto em relação às diagonais – foram feitas conjuntamente entre professor e alunos.

O primeiro grupo a apresentar a sua construção foi o grupo do quadrado. O grupo revelou a sua construção a partir dos lados de forma precisa, e que transpareceu ter sido bem compreendida pelos demais alunos. Esta constatação se mostrou ainda mais clara no momento do enunciado elaborado; os alunos destacaram que os atributos críticos (não utilizaram esta nomenclatura, embora já a reconheçam) dos lados do quadrado são a igualdade nas suas medidas e o perpendicularismo entre os lados adjacentes. Este segundo atributo foi elucidado pelos alunos de forma contundente, o que não ocorrera no enunciado que cada um fez no questionário de sondagem; naquele, para todos os alunos, quadrado era, simplesmente, um quadrilátero com os quatro lados iguais.

A construção a partir das diagonais também foi apresentada, e teve o seu enunciado elaborado (Figura 24). Apresentamos as definições enunciadas – que foram produzidas no GeoGebra, através da ferramenta “Texto”, ao lado da representação visual do quadrado. Este formato de apresentação ocorrerá de forma análoga para os demais. Observamos que a utilização de alguns termos – como a bissecção de diagonais – foi intervenção do professor; entretanto, havia a compreensão do atributo por parte dos alunos com nomenclatura informal – “as diagonais se dividem ao meio”.

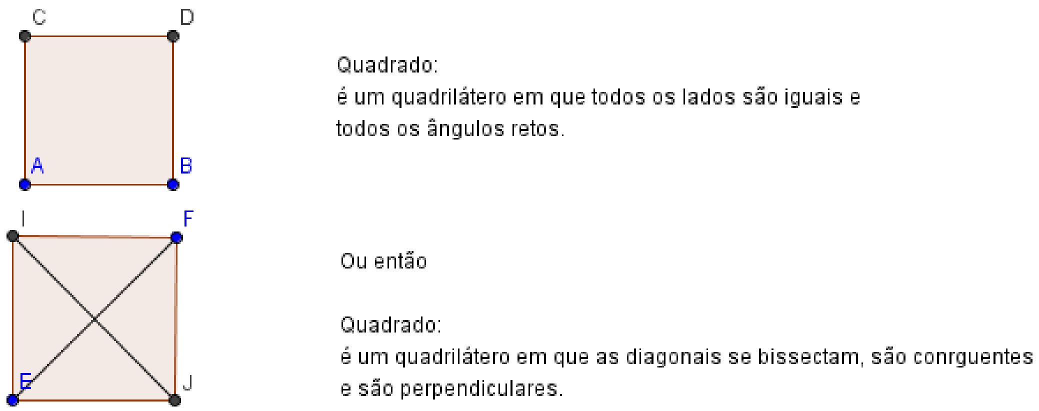



**Figura 24** Enunciados elaborados do conceito quadrado

O grupo seguinte a apresentar a construção foi o grupo do retângulo (Figura 25). Os atributos críticos tanto quanto aos lados, quanto às diagonais, pareceram ter sido bem compreendidos pelos alunos – o que foi constatado, novamente, no momento da elaboração dos enunciados do conceito retângulo. Cabe relembrar, também quanto a este quadrilátero, que no questionário de sondagem os alunos não fizeram menção quanto ao perpendicularismo entre os lados adjacentes. A respeito da definição elaborada, observamos que o paralelismo entre os lados opostos é consequência do perpendicularismo entre os adjacentes. Contudo, optou-se por manter o paralelismo entre os lados opostos na definição, pois os alunos, neste momento do projeto, encontravam-se ainda no nível de análise, no sentido de que enumeram diferentes propriedades, sem estabelecer relações entre elas.

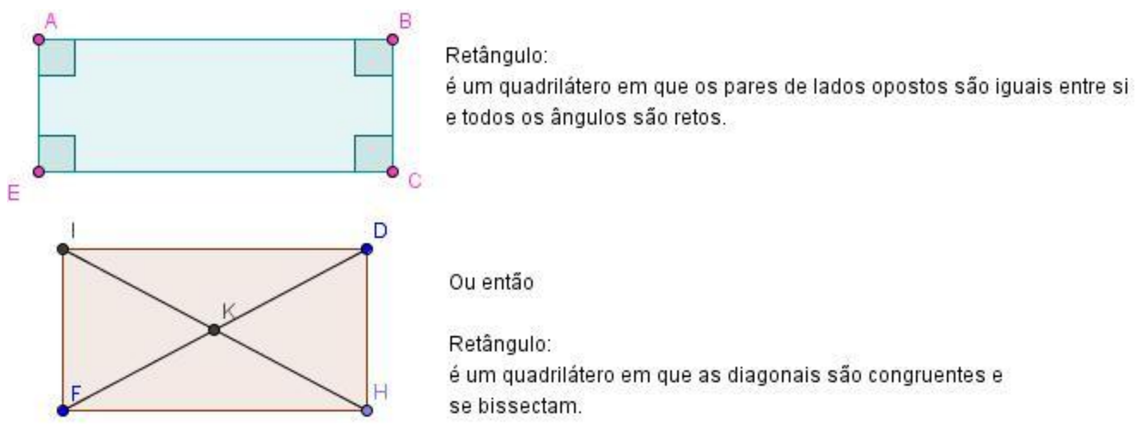



**Figura 25** Enunciados elaborados do conceito retângulo

A apresentação seguinte foi feita pelo último grupo, do paralelogramo (Figura 26). Uma das componentes do grupo conduzia a apresentação de modo um pouco confuso; não parecia estar clara, para ela, a necessidade do paralelismo entre os lados opostos. Esta aluna é a mesma que, na exploração do paralelogramo para compreender as propriedades das diagonais (no encontro 3), o construiu à mão livre, ao invés de fazê-lo utilizando os atributos críticos dos lados discutidos no encontro anterior. Os colegas do grupo auxiliaram neste momento e a apresentação prossegue. Os atributos críticos quanto aos lados foram mais facilmente compreendidos, pelo grande grupo, do que a bissecção das diagonais. Talvez o motivo esteja associado ao fato de que a bissecção entre segmentos congruentes – casos anteriores do quadrado e do retângulo – é, visualmente, mais evidente.

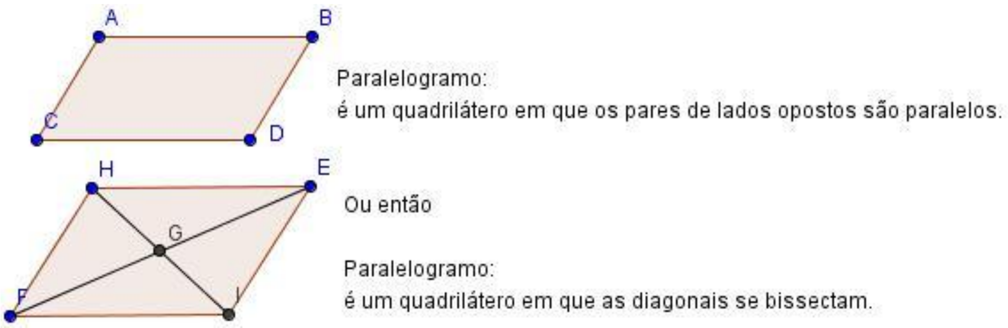



**Figura 26** Enunciados elaborados do conceito paralelogramo

O professor apresentou a construção do losango (Figura 27). A construção a partir dos lados foi bem compreendida; parcela significativa dos alunos já havia percebido, no início do encontro 2, que consistia na discussão sobre o questionário de sondagem, a congruência entre os lados do losango. Mais surpreendente foi, aos alunos, o paralelismo entre lados opostos – fato que não chama a atenção na representação prototípica do losango. Em relação à construção a partir das diagonais, o perpendicularismo foi mais rapidamente compreendido do que a bissecção; a suposição que fazemos a respeito desta constatação é análoga à feita no caso do paralelogramo. Assim como no caso do retângulo, observamos que a definição elaborada inclui o paralelismo entre os lados opostos – que é, na verdade, decorrência da congruência dos lados – justificando-se pelo fato de que os alunos ainda se encontravam no nível da análise.

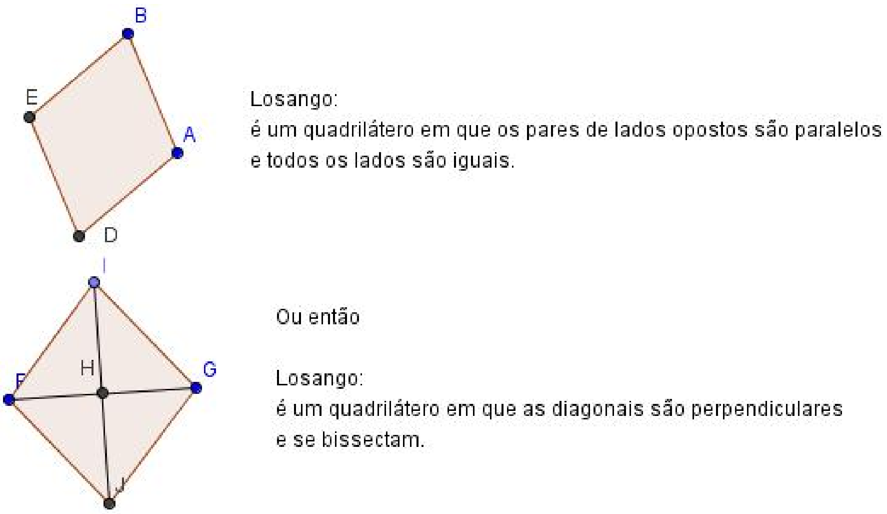



**Figura 27** Enunciados elaborados do conceito losango

O trapézio, quadrilátero restante, também teve a sua construção apresentada pelo professor (Figura 28). A compreensão dos atributos críticos dos lados do trapézio e, portanto, a consequente enunciação elaborada, ocorreu de modo satisfatório. Dado que as diagonais se dividem em segmentos proporcionais, a sugestão de construção levou em consideração a construção de segmentos proporcionais e a partir do ângulo entre uma das diagonais e o eixo y. Construção esta que necessita de ferramentas sofisticadas do software GeoGebra, como a construção de um ponto a partir das suas coordenadas, noção ainda não apresentada aos alunos e que, de fato, não era objetivo do projeto. Apesar disso, buscou-se explicar aos alunos que esta construção utilizou-se de ferramentas não conhecidas por eles, mas que o interesse deveria estar na compreensão dos atributos críticos das diagonais – o que pareceu ter sido compreendido pelos alunos.

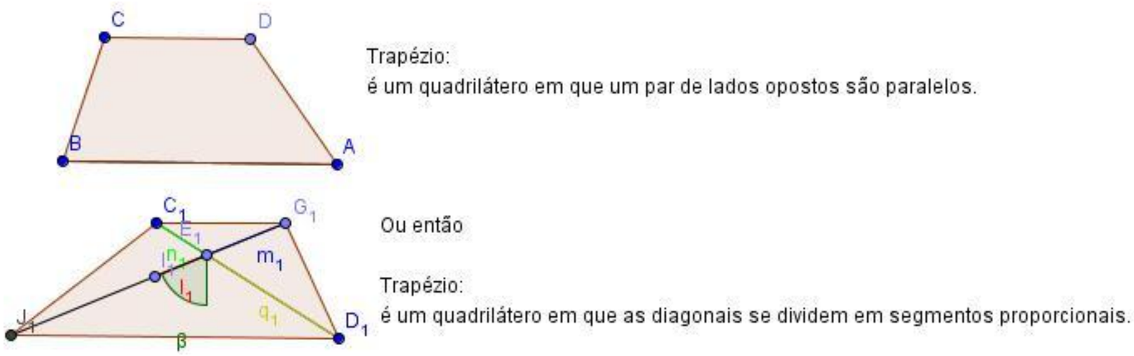
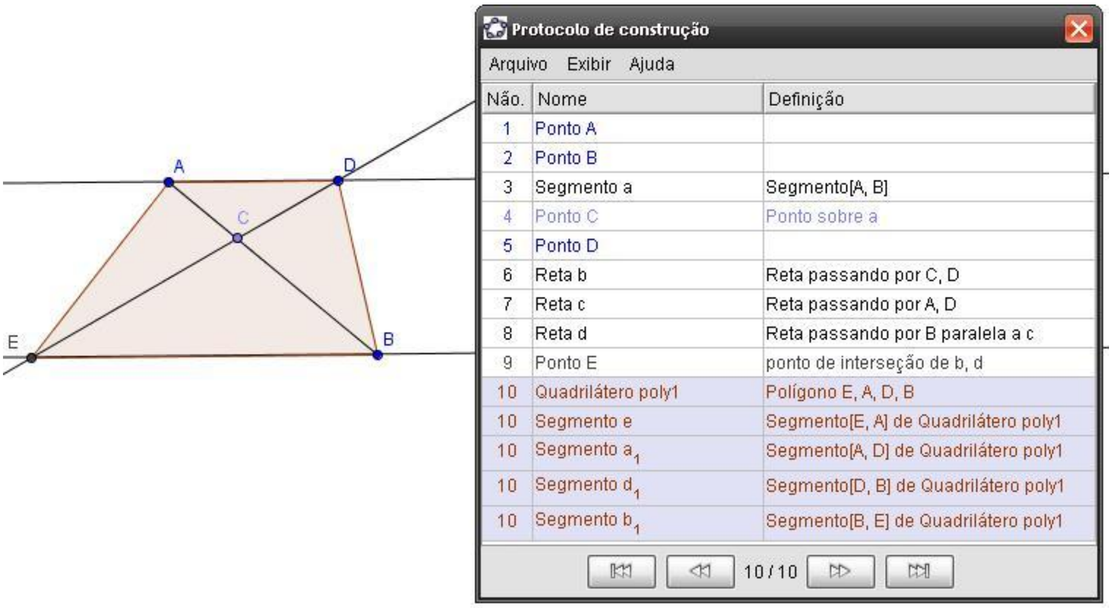



**Figura 28** Enunciados elaborados do conceito trapézio

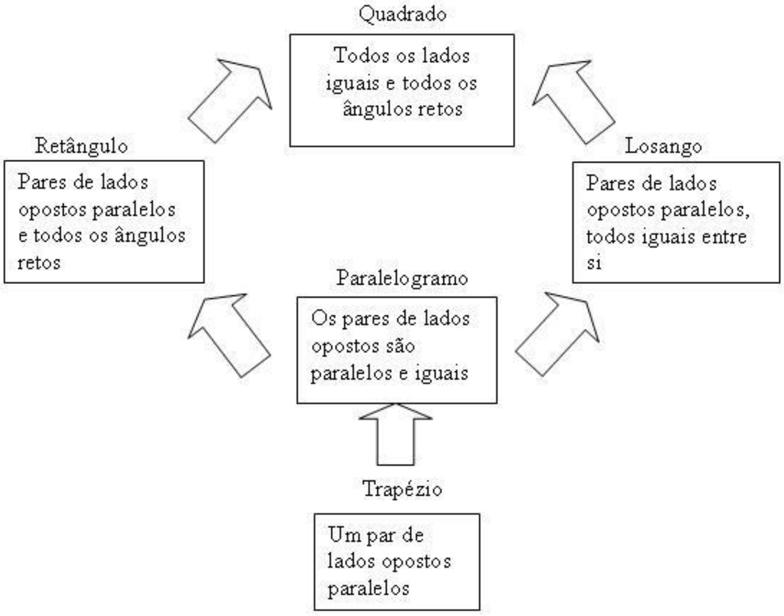
Num momento de reflexão, percebendo que a construção do trapézio a partir das diagonais elaborada para o projeto não fora a de melhor compreensão possível, propomos, então, uma diferente sugestão de construção. Talvez mais produtiva e de melhor compreensão tivesse sido a seguinte construção (Figura 29), descrita através do modo de exibição "Protocolo de construção", acompanhado da respectiva imagem.



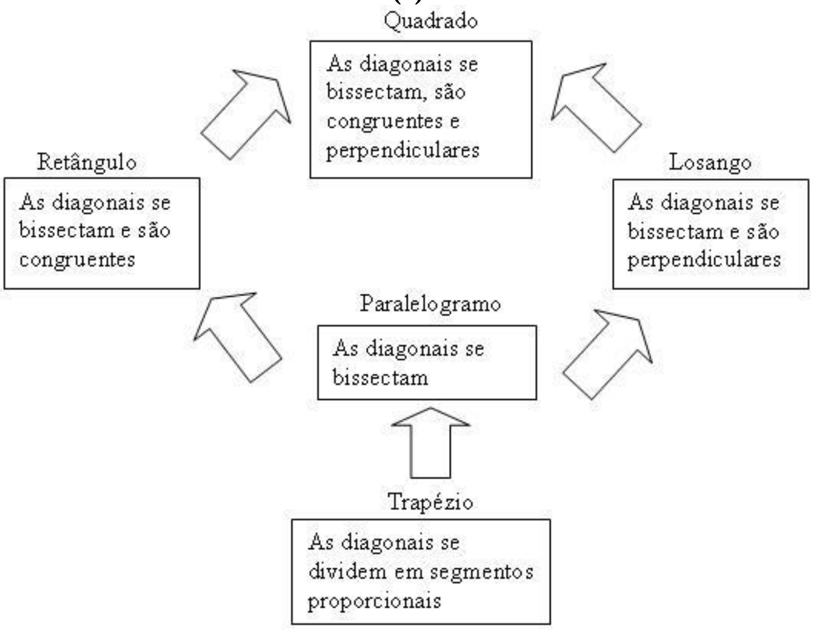

| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Segmento a | Segmento[A, B] |
| 4 | Ponto C | Ponto sobre a |
| 5 | Ponto D | |
| 6 | Reta b | Reta passando por C, D |
| 7 | Reta c | Reta passando por A, D |
| 8 | Reta d | Reta passando por B paralela a c |
| 9 | Ponto E | ponto de interseção de b, d |
| 10 | Quadrilátero poly1 | Polígono E, A, D, B |
| 10 | Segmento e | Segmento[E, A] de Quadrilátero poly1 |
| 10 | Segmento $a_1$ | Segmento[A, D] de Quadrilátero poly1 |
| 10 | Segmento $d_1$ | Segmento[D, B] de Quadrilátero poly1 |
| 10 | Segmento $b_1$ | Segmento[B, E] de Quadrilátero poly1 |

**Figura 29** Outra possibilidade de construção do trapézio a partir das diagonais

O encontro foi finalizado com a elaboração, por professor e alunos, de um quadro (Figura 30) que apresentava as relações hierárquicas entre os quadriláteros quanto aos atributos críticos que possuíam. As relações foram apreendidas em discussões a partir dos enunciados determinados anteriormente. Baseando-se no quadro elaborado, os alunos compreenderam o significado das afirmações do tipo: "todo quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado".




**(a)**




**(b)**

**Figura 30** Hierarquia entre os quadriláteros quanto aos lados (a) e diagonais (b)

No decorrer deste encontro observamos *traços* da passagem do nível 1 para o nível 2 do modelo Van Hiele na compreensão de boa parte dos alunos (grifo nosso). Mais do que compreender que os quadriláteros (e conceitos, em geral) possuem propriedades, os alunos revelaram abstrair que estas propriedades – atributos críticos – constituem a definição do respectivo conceito, e devem ser enunciadas com clareza. Além disso, a apresentação do quadro da Figura 30, elaborado de forma conjunta com os alunos, mostra princípios de compreensão das inter-relações existentes entre conceitos e atributos.

### *3.2.5. Encontro 5: estudo do conceito altura de triângulo*

Conforme planejado, nesse encontro iniciou-se nova etapa do projeto, cujo objetivo final era a obtenção de uma *imagem conceitual* correta do conceito altura de triângulo, que tivesse o potencial de substituir o exemplo protótipo desse conceito. O encontro se iniciou com a apresentação de uma construção no GeoGebra a ser explorada pelos alunos, que continha um texto orientador das atividades (Figura 31).

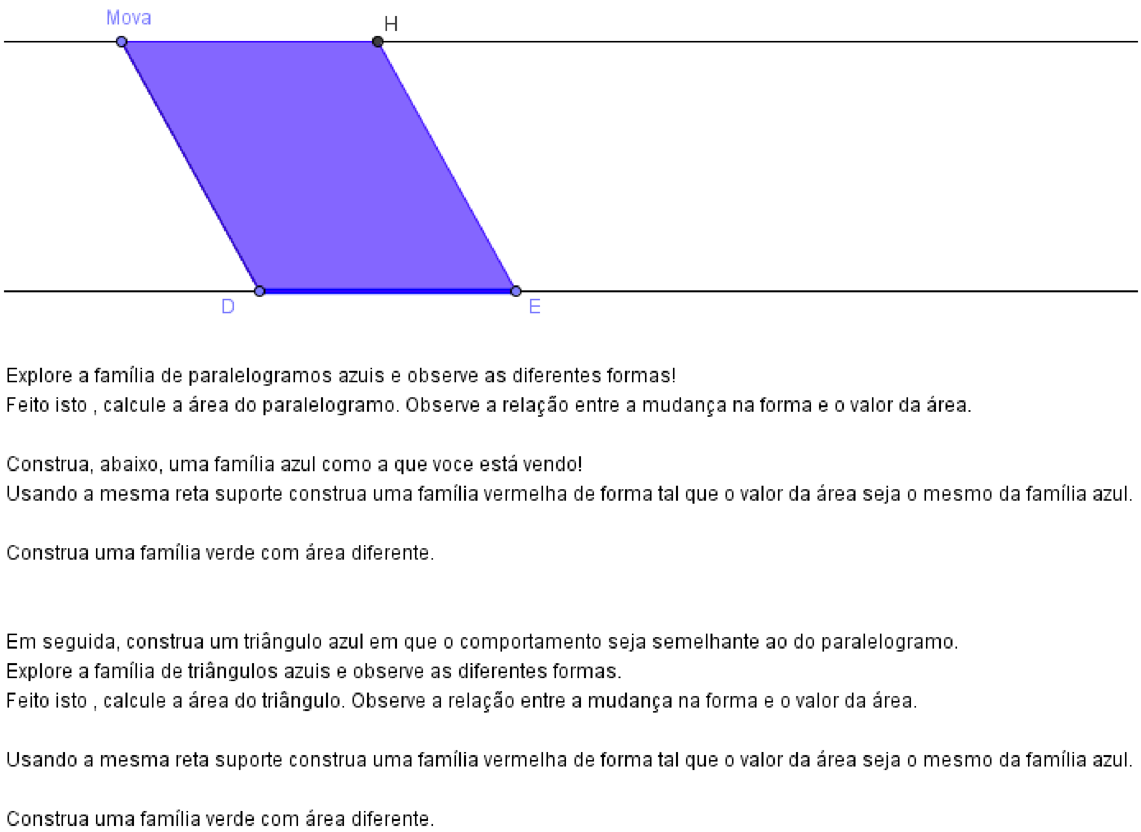



**Figura 31** Construção e instruções no GeoGebra, para o encontro 5

Observamos que o software possui a ferramenta “calcular área”, utilizada pelos alunos para proceder tais cálculos. O procedimento de calcular a área parece sugerir uma atividade empírica; contudo, o objetivo aqui tratava da criação de um convencimento, que viria, a seguir, a ser explicado dedutivamente. A constatação de que a área permanece constante para a família (denominamos família a série de paralelogramos originados dos mesmos atributos críticos) de paralelogramos azuis ocorreu do modo esperado; assim como também esperada, foi a surpresa, aos alunos, de tal constatação. A Figura 32 apresenta uma série de formatos adquiridos pela família de paralelogramos azuis, quando o ponto “Mova” é deslocado. Foi informado aos alunos de que na sequência do projeto esse fato observado seria mais bem explicado (isso ocorreria no encontro 7). Os demais itens solicitados passaram a ser executados.

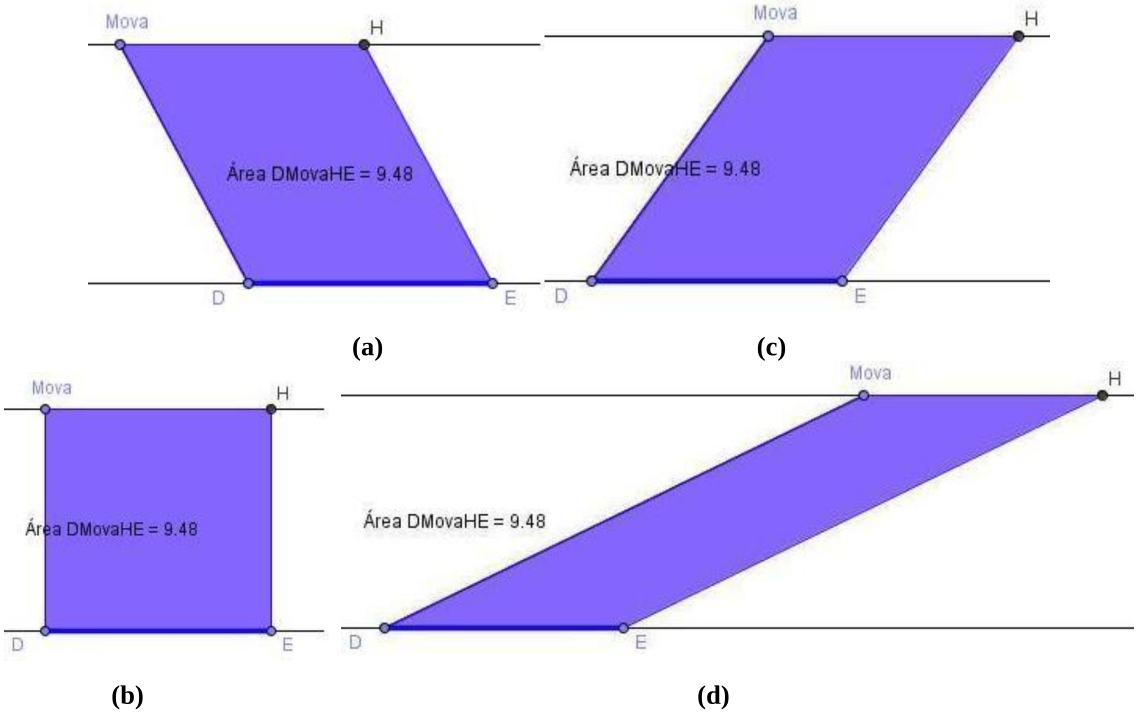



**Figura 32** A família de paralelogramos azuis, que origina-se a partir do deslocamento do vértice "Mova", na ordem (a), (b), (c), (d)

Construir a família azul – o primeiro dos objetivos – foi alcançado sem maiores problemas para a maioria dos alunos. Afinal, tratava-se da construção de um paralelogramo, discutida no encontro anterior e que pareceu ter sido bem compreendida. O ponto chave para a construção da família vermelha foi alcançado em tempos diferentes para cada aluno. Cada um, ao seu tempo, percebeu que o movimento dos pontos D ou E alterava a área do paralelogramo. Após certa exploração, os alunos observaram que a permanência da medida DE determina a manutenção da área, ou seja, a sentença contra-positiva da observação anterior. Desse modo, a família vermelha deveria ter como base um segmento de medida igual. Dada essa conclusão, apenas se fez necessária – para a maioria dos alunos – a lembrança de como transportar uma medida; o que se faz com a ferramenta "Compasso".

A sequência da atividade, que dizia respeito a construções semelhantes, porém para triângulos, foi finalizada do modo pretendido. Aqui, devido ao sucesso nas etapas para o caso do paralelogramo – ou seja, a observação da importância das mesmas retas paralelas e de bases de medidas iguais – a obtenção dos resultados ocorreu mais rapidamente, entretanto para cada aluno no seu devido tempo. Apresentamos a construção realizada por uma aluna

(Figura 33) que, aliás, enriqueceu a sua construção com uma organização interessante e com escritas – utilizando a ferramenta "Inserir Texto" - que facilitaram a sua compreensão. É possível dizer que a Imagem Conceitual desta aluna, em relação à propriedade aqui estudada, está bastante próxima do seu Conceito propriamente dito.

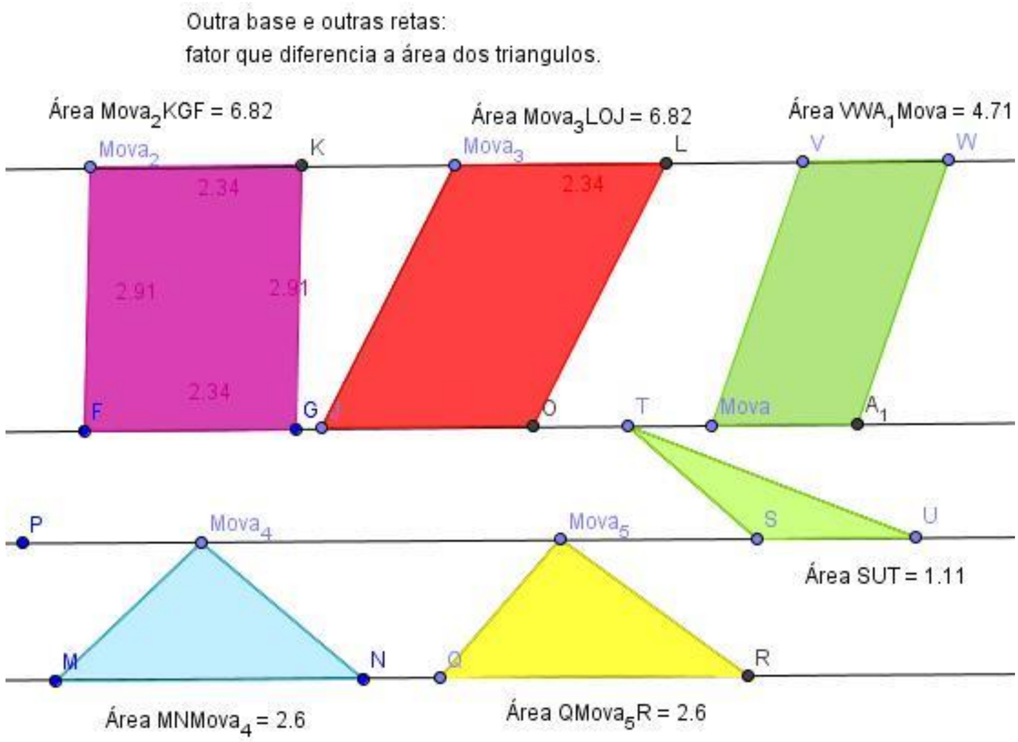



**Figura 33** Imagem da construção de uma aluna no encontro 5

Foi possível observar, neste encontro, um interessante comportamento dos alunos quanto ao modo de explorar os conceitos geométricos. Semelhante ao que fora notado no encontro 4, os alunos mostraram ser capazes de compreender a existência de atributos críticos em cada conceito e, ainda, que estes devem ser utilizados na sua construção – numa oposição clara à construção à mão livre, antes predominante.

### *3.2.6. Encontro 6: ilustração do Teorema de Pitágoras*

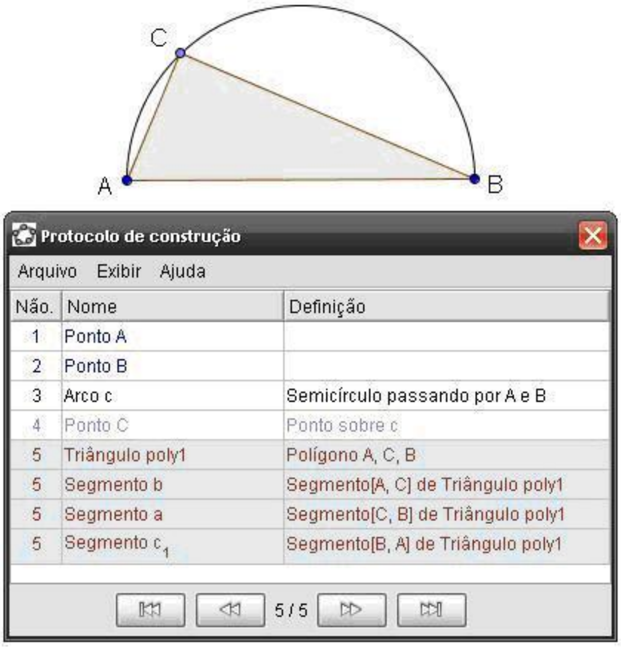
A preservação da área de polígonos manteve-se como foco dessa etapa do trabalho, iniciada no encontro anterior. Diferentemente da preservação de área que ocorre nos particulares polígonos paralelogramo e triângulo, o início deste sexto encontro apresenta a noção de rotação, como sendo um dos tipos de simetrias no plano, válida para qualquer figura.

Os alunos foram incentivados a construírem um polígono qualquer e calcular a sua área. Em seguida, deveriam usar a ferramenta “Girar em torno de um ponto por um ângulo” e, em seguida, calcular a área do novo polígono. A igualdade entre as áreas dos dois polígonos foi, conforme previsto (na proposta da sequência didática), uma constatação de menor complexidade, dado que o formato do polígono não foi alterado.

Em seguida, é sugerida nova breve atividade: os alunos deveriam fazer a construção de um triângulo retângulo. Foi observado que uma parcela notável dos alunos presentes desconhecia/não lembrava o que é um triângulo retângulo. Os colegas que conheciam a definição – mesmo que com pouco grau de precisão no enunciado – auxiliaram os demais a compreender do que tratava o conceito.

Passado este momento, os alunos passaram, então, às suas construções. Ainda que estivéssemos na sexta aula do curso, alguns alunos tentaram fazer tal construção com um triângulo cujos lados não tinham atributo crítico algum, e depois tentar contornar a situação obtida. Embora os alunos já estivessem, desde os últimos encontros, atribuindo importância aos atributos críticos dos conceitos nas suas construções, as construções iniciais do triângulo retângulo pelos alunos (à mão livre) sugerem dificuldades comuns ao processo de aprendizagem – ainda era novidade, para os alunos, a atenção adequada aos atributos críticos. Para promover a superação destas dificuldades, questionou-se aos alunos a respeito de qual elemento estava variando no triângulo, e que não deveria variar. Os alunos, explorando melhor a situação através de manipulações com o objeto, perceberam que era necessária a implantação de um dado essencial antes de construir, na totalidade, os lados do triângulo: era necessário o ângulo reto. A partir deste ponto, a produção individual de cada aluno prosseguiu do modo esperado.

Foi observado que todos os alunos conceberam a construção a partir do ângulo reto, o que, de fato, era esperado. Ou seja, era desconhecida – ou, ao menos, esquecida – dos alunos a propriedade de que o triângulo inscrito em uma semicircunferência no qual um dos lados é o diâmetro é triângulo retângulo. No que segue, apresentou-se o seguinte objeto (Figura 34), a ser explorado pelos alunos.




| Não. | Nome | Definição |
|---|---|---|
| 1 | Ponto A | |
| 2 | Ponto B | |
| 3 | Arco c | Semicírculo passando por A e B |
| 4 | Ponto C | Ponto sobre c |
| 5 | Triângulo poly1 | Polígono A, C, B |
| 5 | Segmento b | Segmento[A, C] de Triângulo poly1 |
| 5 | Segmento a | Segmento[C, B] de Triângulo poly1 |
| 5 | Segmento $c_1$ | Segmento[B, A] de Triângulo poly1 |

**Figura 34** Construção apresentada, a ser explorada pelos alunos

Os alunos reproduziram a construção, seguindo os mesmos passos, e exploraram os diferentes triângulos resultantes. Nenhum dos alunos conjecturou algo a respeito do ângulo $\hat{C}$. Sendo assim, os alunos foram orientados a medir tal ângulo, utilizando a ferramenta "Ângulo" e voltar a explorar a situação, através do deslocamento do vértice livre sobre a semicircunferência. Discutiu-se com os alunos, então, que é possível conjecturar que "um triângulo em que um de seus lados é diâmetro de uma semicircunferência e o vértice oposto pertence à semicircunferência é triângulo retângulo". Não era nosso objetivo demonstrar esse resultado, apenas constatá-lo. Foi discutido com os alunos de que, mais uma vez, percebe-se que existem diferentes e interessantes construções para um mesmo objeto – assim como fora o caso dos quadriláteros, quando concebidos a partir de seus lados ou, então, a partir de suas diagonais.

Quando se questionou os alunos a respeito do que é o Teorema de Pitágoras, novamente verificou-se resposta por apenas parcela do grupo. O teorema foi, então, enunciado de forma breve por professor e alunos que o lembravam. Na sequência, propôs-se aos alunos a construção de quadrados (utilizando diretamente o recurso "Polígono regular", pois já conhecíamos a construção do quadrado na sua complexidade) sobre os catetos e sobre a hipotenusa, exteriores em relação ao triângulo retângulo. Fez-se, então, a indagação: "que relação pode haver entre o Teorema de Pitágoras e essa construção por vocês feita?". Uma aluna, a partir da indagação feita, foi capaz de abstrair o objetivo pretendido: calculou as áreas dos quadrados e expôs, com mais informalidade do que o que segue, aos colegas: "a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa”. Ela e os demais colegas realizaram construções destacando esse conhecimento compreendido. Apresentamos a construção de uma aluna (Figura 35), a mesma que no encontro anterior já havia enriquecido a sua construção com uma organização interessante e a utilização da ferramenta “Inserir Texto”, que revela que a sua *imagem conceitual* do objeto estudado está bem delineada e de acordo com o conceito.

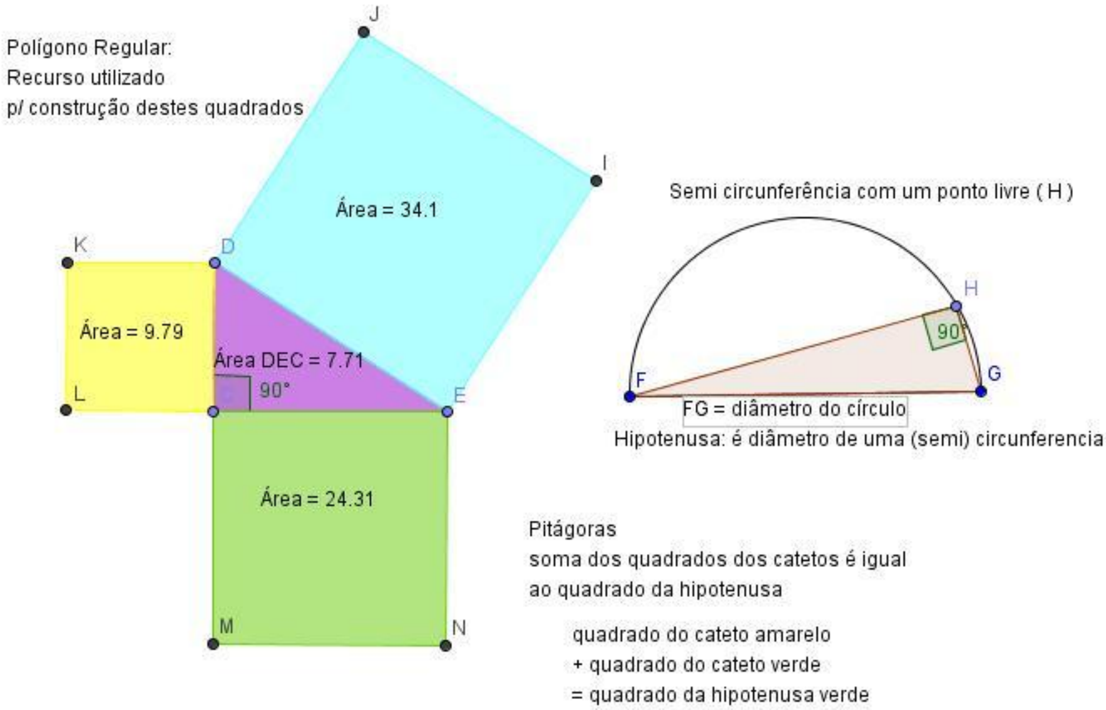
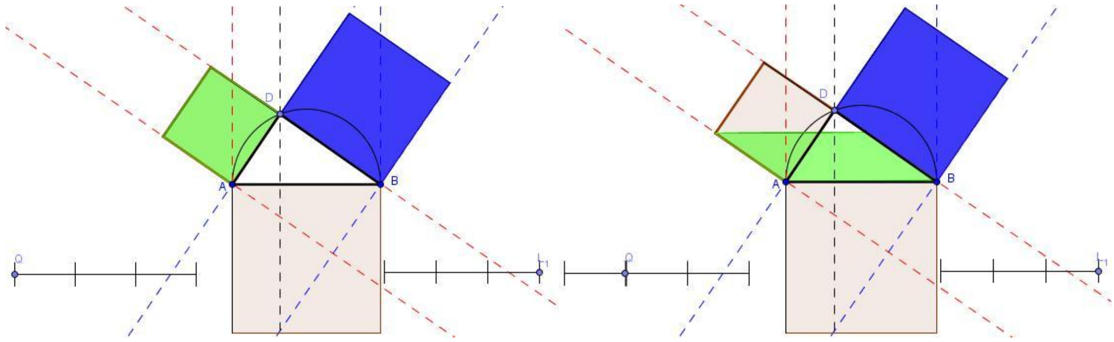


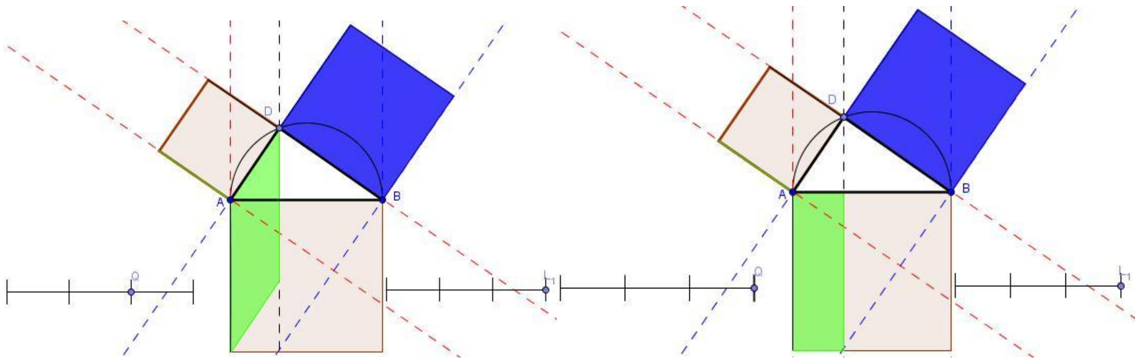

**Figura 35** Imagem da construção de uma aluna no encontro 6

O encontro foi finalizado com uma apresentação, por parte do professor aos alunos, de uma construção que explica o Teorema de Pitágoras. Foi explicado, e ressaltado, que a construção utilizaria exatamente os fatos explorados pelos alunos nas últimas aulas, ou seja, a preservação da área de paralelogramos; a preservação da área de um polígono rotacionado; e o triângulo retângulo construído a partir do diâmetro de uma semicircunferência. Assim, embora a apresentação da construção transparecesse uma condução feita apenas pelo professor, continha efetivamente os conhecimentos explorados pelos alunos nos últimos encontros, de modo que as etapas da construção não apresentavam aos alunos novidade alguma a respeito de conhecimentos, senão a união destes.

Explicou-se, ainda, que a construção só fora apresentada “pronta” pois, apesar de utilizar essas noções estudadas nas últimas aulas, a construção no software requereu o domínio de determinadas ferramentas do software que não puderam ser discutidas ao longo do projeto, dado o seu prazo não tão longo. Apresentamos a construção mostrada aos alunos em algumas etapas (Figura 36).



(a) (b)



(c) (d)

**Figura 36** Construção que explica o Teorema de Pitágoras, através da preservação de áreas, com imagens na sequência (a), (b), (c) e (d)

Na sequência, reproduziram-se passos análogos para o quadrado azul construído sobre o outro cateto, e finalizou-se o encontro. Sobre este sexto encontro, destacamos a desenvoltura dos alunos em acompanhar a ilustração proposta do Teorema de Pitágoras, um comportamento característico do nível 2 do modelo Van Hiele. Também relativa a este nível é a capacidade de compreender definições e as relações entre os atributos críticos de conceitos, revelada no desenvolvimento das atividades intermediárias do encontro.

### 3.2.7. *Encontro 7: sistematização sobre o conceito altura de triângulo*

O sétimo encontro caracterizou-se por ser o segundo grande momento de *integração* de conhecimentos – assim como fora o encontro 4, que sistematizou o tópico sobre definições e propriedades de quadriláteros. Aqui, o assunto constituinte da *integração* dizia respeito à preservação da área de paralelogramos e de triângulos postos sobre as mesmas bases e entre as mesmas paralelas, a fim de construir uma compreensão visual e, principalmente, analítica, do conceito *altura*, que não ficasse limitado a exemplos protótipos. Esse objetivo foi buscado através de uma metodologia que pode ser caracterizada como pertencendo ao nível 2 do modelo Van Hiele - nível da dedução informal.

Essa dedução informal foi realizada através de uma série de construções produzidas previamente no GeoGebra, apresentadas aos alunos detalhadamente, passo a passo, e, principalmente, possibilitando aos alunos a compreensão de que resultados matemáticos podem ser "comprovados". Inicialmente promoveu-se, então, uma breve discussão a respeito da natureza axiomática da matemática – e, em particular, da geometria - através do seguinte quadro (Figura 37) mostrado aos alunos, e discutido com eles.

Elementos primitivos: não possuem definição, são apenas abstração mental e que

Definições: são enunciados que explicam o que um objeto ou propriedade é. Vimos alguns ao longo do projeto; um exemplo é o seguinte: retângulo é um quadrilátero em que os pares de lados opostos são paralelos e todos os ângulos são retos.

Axiomas (ou postulados): são verdades absolutas, que tem a função de ser a base da Geometria. Exemplo: dados dois pontos, existe somente uma única reta que os contém.

Proposições (ou teoremas): são verdades que devem ser *demonstradas*. Uma demonstração possui hipóteses e teses; uma demonstração correta deve levar em consideração, na sua argumentação, somente os axiomas e proposições anteriores. Exemplo: a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º.

**Figura 37** Quadro sobre a natureza axiomática da geometria

Na sequência, foi indicado aos alunos de que a preservação da área de paralelogramos e triângulos sob as condições discutidas - uma constatação ocorrida na aula 5 e que foi utilizada na aula 6 – não é mera coincidência, tampouco um fato que não possa ser explicado. Na verdade, pode sim ser explicado; mais ainda, deve ser *demonstrado*, pois trata de uma proposição, a ser verificada com argumentos oriundos de proposições anteriores. A demonstração informal que propusemos foi realizada tomando por base uma série de proposições de Euclides (Commandino, 2009), expostas a seguir, acompanhada das imagens das respectivas construções explicativas no GeoGebra. Ratificamos que a “demonstração” feita fundamenta-se numa dedução informal e, para uma leitura adequada, utilizaremos a palavra *explicação* – e as suas derivadas – para tratar da demonstração informal proposta. Enumeramos de 1 a 6 os momentos do encontro.

1. Apresentação e discussão da seguinte proposição de Euclides (Commandino, 2009): “PROP. XXXIV. TEOR.: Os lados e os ângulos opostos dos espaços formados com linhas paralelas, ou paralelogramos, são iguais; e todo o espaço paralelogramo, fica dividido pela diagonal em duas partes iguais”.

Os alunos conferiram a validade desta afirmação ao observarem a manipulação do objeto (Figura 38) no software GeoGebra, cuja construção foi acompanhada através da ferramenta “Protocolo de Construção”. Foi indicado aos alunos que esta primeira proposição analisada não poderia ser explicada analiticamente, pois ela é explicada por argumentos baseados em proposições anteriores; se quiséssemos utilizar tais proposições anteriores, estas ou teriam que deixar de ser explicadas, ou também implicariam a explicação das proposições anteriores. Ou seja, ou explica-se toda a sequência de proposições, ou escolhe-se um ponto de partida tomado como verdadeiro. Escolhemos a segunda opção, e como ponto de partida, escolhemos esta proposição. A escolha foi baseada no fato de que a propriedade aqui enunciada possibilita uma eficiente associação entre a compreensão analítica e visual da situação.

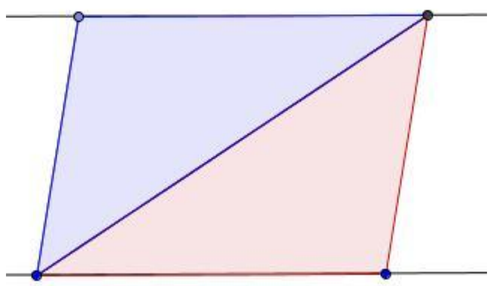


**Figura 38** Imagem da PROP. XXXIV. TEOR.

2. Apresentação e discussão da seguinte proposição de Euclides (Commandino, 2009): “PROP. XXXV. TEOR.: Os paralelogramos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais”.

Observamos, desde já, que a referida igualdade entre os paralelogramos – assim como seria o caso das proposições quanto aos triângulos – leva em consideração a igualdade entre as suas áreas, sendo este significado atribuído por Euclides. Os alunos conferiram a validade desta afirmação ao observarem a manipulação de duas construções no software GeoGebra: uma primeira (Figura 39) que representa a possibilidade particular de haver pontos comuns entre as bases não coincidentes; e uma segunda (Figura 40), que trata do caso geral. A situação particular inicial é explicada pela existência de um trapézio comum e da congruência entre os triângulos restantes, fatos que foram positivamente constatados pelos alunos. O caso geral, que concebe a construção de uma família de paralelogramos de mesma área, reduz-se ao caso particular quando se obtêm um paralelogramo (no caso da Figura 40, o paralelogramo verde) que substitua o paralelogramo vermelho do caso específico.

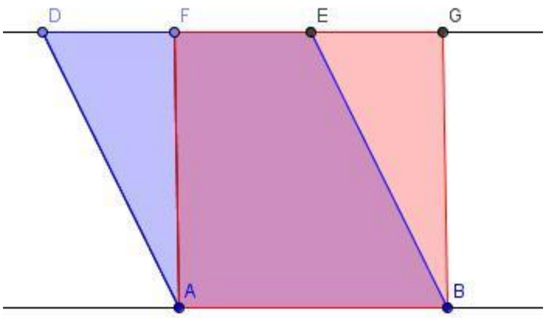



**Figura 39** Caso particular da PROP. XXXV. TEOR.

A situação particular foi prontamente compreendida pelos alunos, o que revela uma importante sintonia entre a construção feita e a compreensão analítica associada. O caso “geral” consistiu numa análise mais desafiante aos alunos; inicialmente, parece estranho o paralelogramo vermelho possuir mesma área que o azul. A estranheza foi bastante marcante no encontro 5 – que tratou, pela primeira vez, desta situação. Neste momento de explicação, o sentimento que transparecia era o de questionamento sobre como se poderia elaborar tal explicação, dado que não há mais intersecção entre os paralelogramos; diferentemente do que ocorrera no caso particular. A construção do paralelogramo amarelo não parecia, aos alunos, ser o caminho da explicação procurada. Mas, quando construído o paralelogramo verde sob os mesmos argumentos, a situação tornou-se clara. Tais construções também foram acompanhadas através da ferramenta “Protocolo de Construção”.

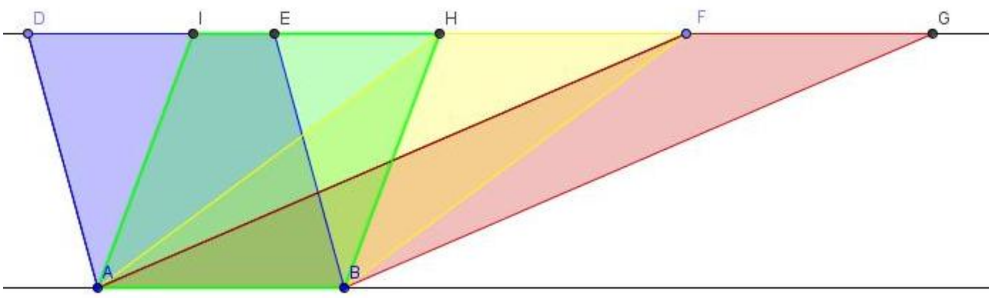



**Figura 40** Caso “geral” da PROP. XXXV. TEOR.

3. Apresentação e discussão da seguinte proposição de Euclides (Commandino, 2009): “PROP. XXXVI. TEOR.: Os paralelogramos, que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais”.

Os alunos conferiram a validade desta afirmação ao observarem a manipulação do objeto presente em arquivo do software GeoGebra, cuja construção também foi acompanhada através da ferramenta “Protocolo de Construção”. Sobre a explicação da proposição anterior, a construção da presente explicação (Figura 41) trazia de novidade a necessidade de também haver um “deslocamento” na parte inferior da família de paralelogramos. Em especial, a passagem do paralelogramo rosa ao azul clara consistiu em uma situação de difícil visualização para os alunos. Foi indicado que a sua compreensão exigia, digamos assim, a inversão do raciocínio: a base comum era o segmento MN, um segmento da parte superior da figura.

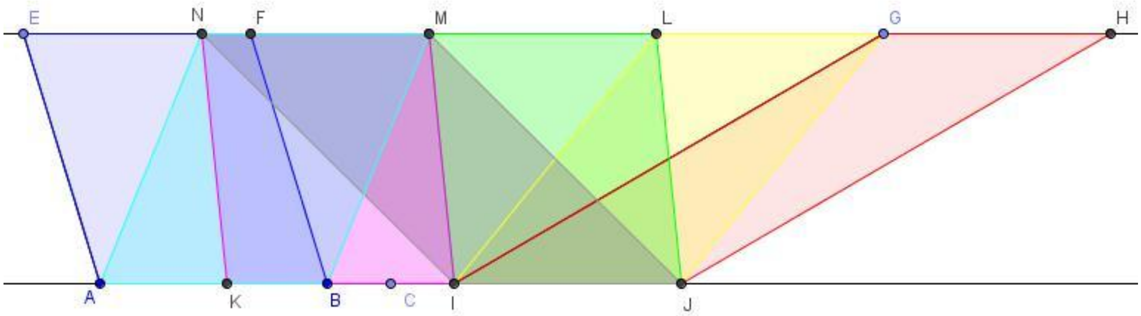



**Figura 41** Imagem da PROP. XXXVI. TEOR.

4. Apresentação e discussão da seguinte proposição de Euclides (Commandino, 2009): “PROP. XXXVII. TEOR.: Os triângulos, que estão postos sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais.”

Os alunos conferiram a validade desta afirmação ao observarem a manipulação do objeto presente em arquivo do software GeoGebra, cuja construção foi acompanhada através da ferramenta “Protocolo de Construção”. A única construção necessária para a explicação desta proposição consistia na “duplicação” de cada um dos triângulos em paralelogramos que, segundo as proposições anteriores, possuem a mesma área (Figura 42). A constatação disto, pelos alunos, se deu de maneira bastante satisfatória, revelando que os alunos estavam, gradualmente, compreendendo a natureza axiomática da geometria, ao atribuir importância a uma demonstração – mesmo que informal – e se caracterizando, assim, no nível 2 do modelo Van Hiele.

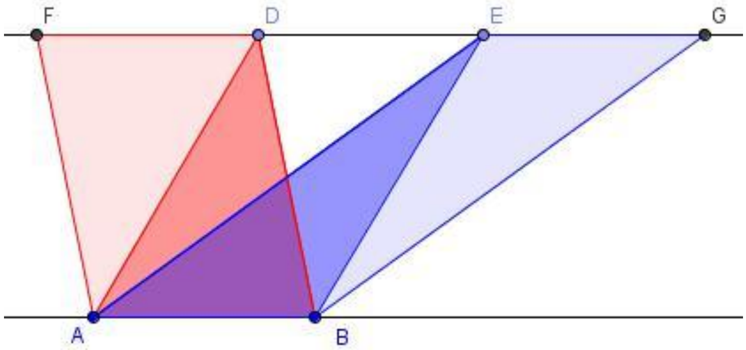



**Figura 42** Imagem da PROP. XXXVII. TEOR.

5. Apresentação e discussão da seguinte proposição de Euclides (Commandino, 2009): “PROP. XXXVIII. TEOR.: Os triângulos, que estão sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais”.

Os alunos conferiram a validade desta afirmação ao observarem a manipulação de construção (Figura 43) no software GeoGebra, cuja construção foi acompanhada através da ferramenta “Protocolo de Construção”. Assim como fora o caso da proposição anterior, a presente proposição foi contundentemente compreendida pelos alunos através da redução às proposições anteriormente explicadas.

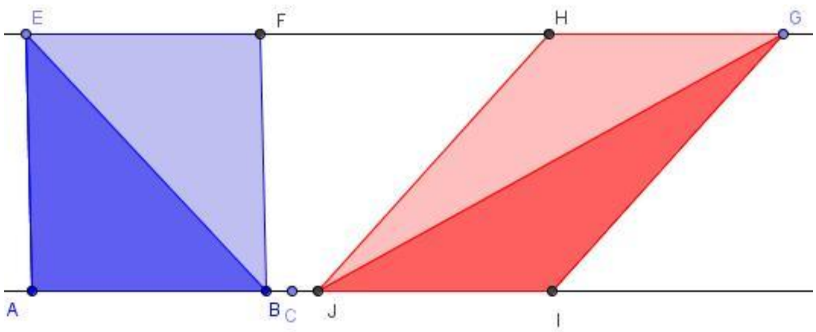



**Figura 43** Imagem da PROP. XXXVIII. TEOR.

6. Identificação do elemento altura.

Neste momento, professor e alunos discutiram sobre quais elementos caracterizam a igualdade entre os triângulos, bem como entre os paralelogramos. As bases são, por construção, iguais. Os objetos estão sempre compreendidos entre duas retas paralelas. Isto revelou que outro fato que também não se altera é a distância entre as retas: retas paralelas possuem sempre a mesma distância, quando tomamos o segmento que tem origem numa das retas e incide perpendicularmente na outra. A Figura 44, construída no software GeoGebra, apresenta este segmento. Os alunos tomaram conhecimento do que efetivamente é a altura de um triângulo: é o segmento que informa a distância entre o vértice do triângulo e o lado ao qual ele se opõe. E, no que segue, foi definida como: altura do triângulo é segmento perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidade no vértice oposto.

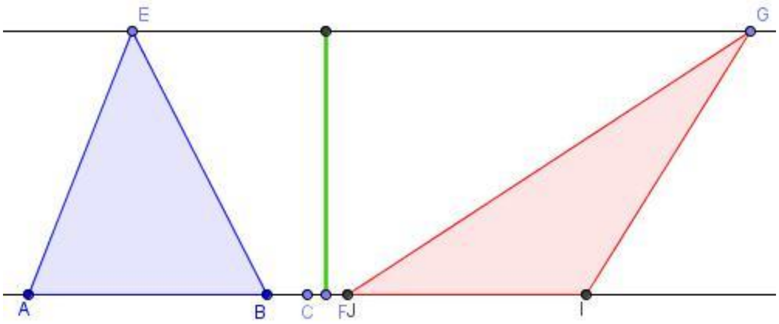



**Figura 44** O elemento altura é descoberto

O encontro foi finalizado com a construção e a manipulação de diferentes triângulos no GeoGebra, com a condução do professor e análise dos alunos, objetivando a visualização do elemento altura em tais triângulos. Esta ação promoveu uma visualização, por parte dos alunos, de como se constitui este elemento em triângulos não prototípicos e apresentando, então, quais são os atributos críticos deste conceito.

O caráter de sistematização global de conhecimentos para este sétimo encontro esteve presente, de fato, conforme previsto. O acompanhamento dos alunos a série de proposições verificadas por manipulações construídas no GeoGebra foi positivo. Eles mostraram compreender que algumas “verdades” – as proposições – podem ser demonstradas, de acordo com a axiomática da geometria a eles apresentada. Também destacamos a sua capacidade de compreender as definições, em especial o pretendido conceito de altura de triângulo, cuja *imagem conceitual* pôde superar, enfim, a compreensão prototípica geralmente existente.

# 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A concepção sobre o ensino de geometria que nossa proposta apresentou, associando a noção de *imagem conceitual* e a utilização da geometria dinâmica, revelou ter o potencial de promover a passagem do conhecimento empírico ao dedutivo. Por um lado, manter a atenção às *imagens conceituais* dos indivíduos permite observar qual é a sua compreensão sobre determinado objeto ou propriedade e, ainda, sugere os caminhos para que esta configuração se altere – caso necessário. Conforme pesquisado, do ponto de vista teórico, e observado em prática, a geometria dinâmica é, de fato, um elo para as compreensões visuais e analíticas.

De um modo geral, pôde-se observar que considerável parcela dos alunos iniciou a sequência didática compreendendo conceitos geométricos, em especial as figuras, apenas a partir de sua representação visual, e não a partir dos seus atributos críticos – característica relativa ao nível 0 do modelo Van Hiele. Poucos alunos analisavam, nos primeiros encontros, as propriedades de cada conceito. Isto ficou evidente, primeiramente, nas respostas fornecidas, pelos alunos, no questionário de sondagem; mas também se verificou, ao longo da sequência, a reiteração de alguns alunos a construírem figuras à mão livre, sem preocupações com os atributos críticos dos conceitos.

Constatou-se uma evolução na compreensão da geometria para todos os alunos, dado que nos encontros finais, a maioria do grupo mostrou-se capaz de acompanhar deduções informais e conceber os conceitos a partir dos seus atributos críticos, um comportamento típico de quem se encontra no nível 2, da dedução informal. E, aqueles que por ventura não apresentaram características do segundo nível, parecem ter abandonado o nível 0, visto que passaram a compreender que os conceitos possuem atributos críticos.

A evolução da compreensão dos alunos acima destacada tem íntima relação com a utilização da geometria dinâmica. Foi sempre durante a exploração de construções no GeoGebra que os alunos abstraíam os atributos críticos dos conceitos estudados, assim como foi nesse ambiente que a sua abordagem abandonou, pouco a pouco, as construções à mão livre em prol de construções que levassem em consideração os atributos críticos dos conceitos. Ainda, foi em tal ambiente que exemplos protótipos – dos polígonos e do conceito de altura de triângulo – foram superados, permitindo aos alunos a construção de *imagens conceituais* corretas.

A avaliação positiva que fazemos do Projeto de Ensino operacionalizado não pode deixar de levar em consideração um fato importante: o grupo de trabalho era composto de 9 alunos, num projeto de caráter extraclasse. Em outras palavras, os alunos participantes inscreveram-se interessados na proposta a eles feita, motivados a integrar um projeto em que se objetivava estudar a matemática de forma não mecânica, mas sim a partir de conceitos e propriedades e as suas relações. Nossa reflexão a respeito deste ponto destacado concebe que é sim, possível, a implantação de uma sequência didática nos moldes apresentados para uma turma comum de Ensino Médio; apenas se fariam necessárias algumas adaptações. Um exemplo seria o auxílio de um monitor, dado que o acompanhamento da produção individual de cada aluno é essencial para a observação do seu comportamento quanto à aprendizagem da geometria e, portanto, um reconhecimento das suas *imagens conceituais*.

Das grandiosas contribuições do desenvolvimento deste trabalho à minha formação como professor, analiso uma em especial. Trato da possibilidade de conceber o ensino a partir da posição de professor-investigador[2], ou seja, o ensino como sendo campo de atuação de um professor preocupado em, continuamente, explorar temas novos, ou temas antigos de maneira inovadora, através de uma prática investigativa.

Invariavelmente, somente por meio de pesquisa e de conseqüente reflexão e planejamento, é possível conceber um ensino que permita, aos estudantes, exercer a sua capacidade de criar hipóteses, testá-las, reconfigurá-las e, num específico e motivador momento, verificar a sua validade. Inclusive, é por meio de uma proposta pedagógica fundamentada e constantemente repensada que se pode perceber a existência de possibilidades diferentes e novas abordagens.

Inserida nesta concepção de professor-investigador encontra-se a necessidade de o professor ter conhecimento prévio sobre a aprendizagem da geometria. Tal conhecimento deve ser fruto de pesquisas e reflexões profundas sobre como esta aprendizagem ocorre. A pretensão, aqui, era de explorar o aspecto cognitivo da aprendizagem; foi esta pretensão que promoveu a pesquisa sobre a noção de *imagem conceitual* e da utilização da geometria dinâmica como conexão entre a compreensão analítica e a compreensão visual dos conceitos geométricos.

A importância de o professor carregar, junto a esta nomenclatura, a denominação de investigador consiste, enfim, nesta série de atitudes caracterizadas por pesquisa, formação continuada, reflexão, inovação e planejamento. Fazendo isso, não somente o professor será investigador; aliás, principalmente, também os seus alunos terão a possibilidade de vivenciar uma aprendizagem-investigativa.

---

[2] Utilizamos o termo conforme proposto por Fiorentini e Lorenzato (2006).

# REFERÊNCIAS

COMMANDINO, F. **Euclides – Elementos de Geometria**. Tradução de Irineu Bicudo, 1ª edição. São Paulo: UNESP 2009.

CROWLEY, M. L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, Ed. Atual, 1994.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas: Autores associados, 2006. 224 p.

FISCHBEIN, E. **The theory of figural concepts**, Educational Studies in Mathematics, vol. 24/2, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher 1993.

GRAVINA, M. A. **Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria**, Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, 1996.

________ . **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. 214 p.

HERSHKOWITZ, R. **Aspectos Psicológicos da Aprendizagem da Geometria**. Boletim GEPEM, n. 32, Rio de Janeiro, 1994.

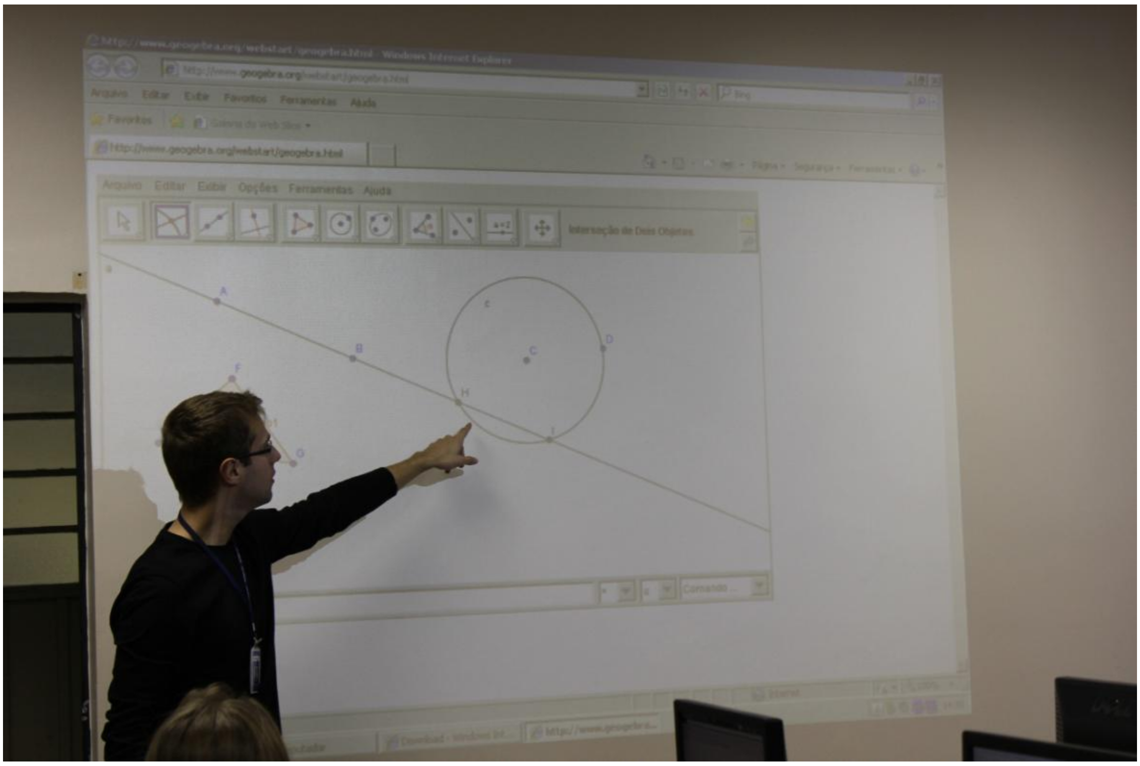
HERSHKOWITZ, R.; BRUCKHEIMER, M.; VINNER, SHLOMO. **Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva**. In: LINDQUIST, M. M., SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, Ed. Atual, 1994.

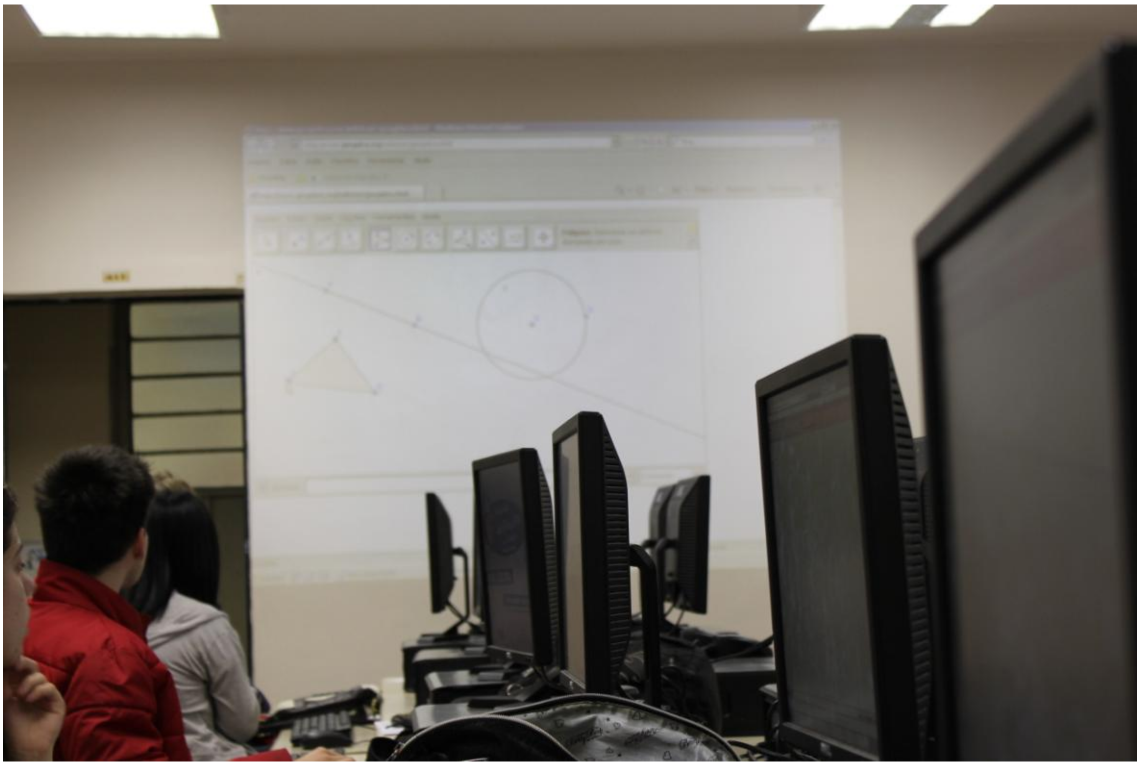
# SOFTWARE

GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone

Copyright 2001-2011 GeoGebra Inc.

# APÊNDICE – FOTOS DE MOMENTOS DO PROJETO





# ANEXO 1 – QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM RESPONDIDO POR ALUNO

LA SALLE DORES

Prof. Arthur Bernd – Matemática
Ensino Médio

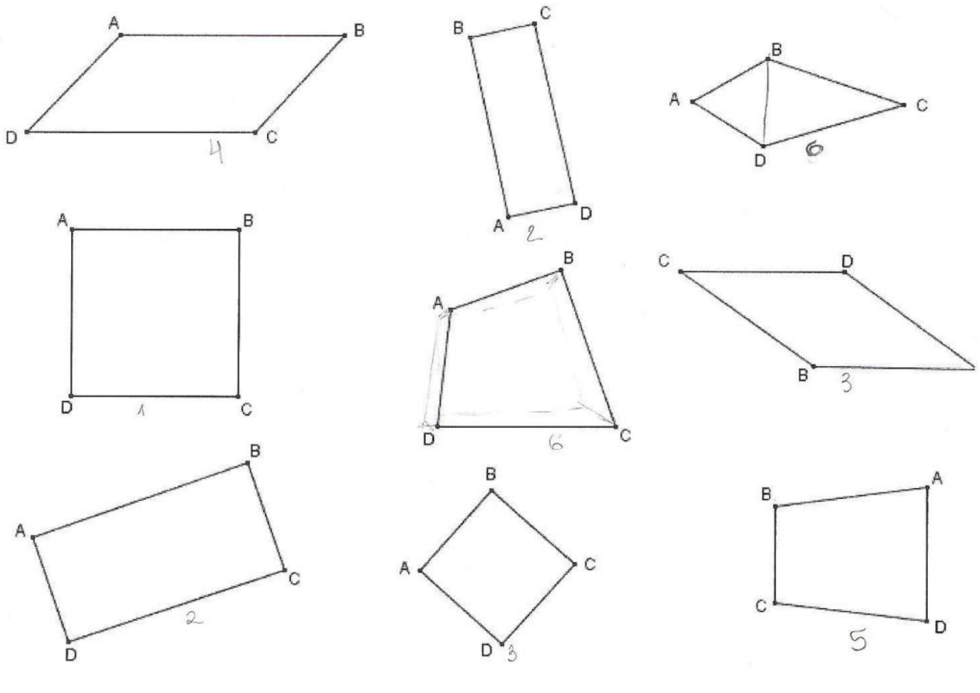
Nome:

**Aprendizagem de fundamentos de geometria por meio de geometria dinâmica**

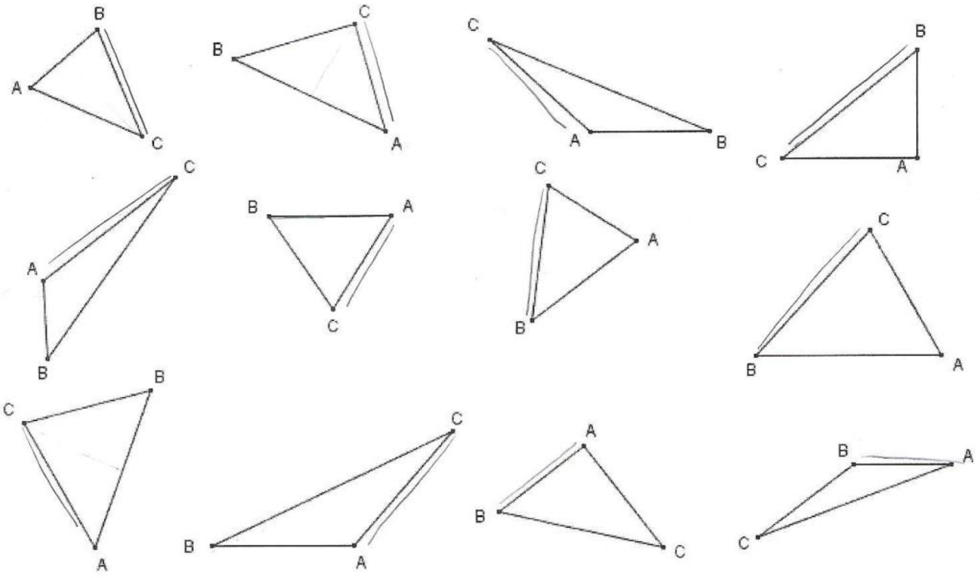
**Questionário inicial**

Responda as seguintes questões. Suas respostas constituirão um elemento essencial para a sequência do trabalho.

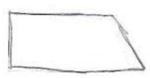
Questão 1: Classifique os quadriláteros abaixo de acordo com a seguinte notação (escreva a classificação abaixo do respectivo quadrilátero):
(1) se o quadrilátero é um quadrado;
(2) se o quadrilátero é um retângulo;
(3) se o quadrilátero é um losango;
(4) se o quadrilátero é um paralelogramo;
(5) se o quadrilátero é um trapézio;
(6) se o quadrilátero não é de nenhum dos tipos anteriores;



Questão 2: Em cada um dos triângulos ABC abaixo, indique/trace o segmento que corresponde à altura relativa ao lado AB:



Questão 3: Para cada um dos tipos de quadrilátero, forneça uma explicação sobre "*o que é*" e represente-o através de uma imagem:

| Tipo de Quadrilátero | Explique *o que é*: | Representação visual |
|---|---|---|
| Quadrado | quadrilátero com quatro lados iguais |  |
| Retângulo | quadrilátero onde dois dos lados possuem mesmo tamanho e os outros lados, tamanhos diferentes porém iguais entre si |  |
| Losango | união de dois triângulos equiláteros |  |
| Paralelogramo | | |
| Trapézio | quadrado ou retângulo com um triângulo |  |

# ANEXO 2 – DIVULGAÇÃO DO PROJETO DE ENSINO NO COLÉGIO LA SALLE DORES

Porto Alegre, 02 de setembro de 2011

Prezados alunos e senhores pais ou responsáveis

Comunicamos a abertura das inscrições para o Projeto "Aprendizagem de fundamentos de geometria por meio de geometria dinâmica".

Utilizando como ferramenta de aprendizagem o software *GeoGebra - Dynamic Mathematics for Schools*, o projeto tem como objetivo o estudo de fundamentos de geometria euclidiana. Sua metodologia buscará promover um estudo dos elementos geométricos de forma substancial, de forma que sejam identificadas suas principais propriedades, relações e padrões, através do conhecimento da essencialidade das estruturas geométricas.

O projeto é destinado aos alunos do Ensino Médio e não representa qualquer custo às famílias. De uma forma geral, os alunos deste nível já possuem experiência de aprendizagem de geometria. O interesse, portanto, é proporcionar um novo modo de estudar os elementos geométricos já conhecidos e, principalmente, aprender sobre objetos e propriedades até então desconhecidos.

Esse projeto terá início no dia 21/09 e término no dia 07/10, ocorrendo as segundas, quartas e sextas-feiras, com uma carga horária total de 16h/aula – ou seja, 2h/aula por encontro, em cada um dos 8 encontros. O horário será das 13h30min às 15h10min. O cronograma abaixo exibe os dias nos quais se desenvolverá o projeto.

| Segunda-feira | Quarta-feira | Sexta-feira |
|---|---|---|
| | 21/09 | 23/09 |
| 26/09 | 28/09 | 30/09 |
| 03/10 | 05/10 | 07/10 |

Tal projeto será desenvolvido pelo Professor Arthur Bernd, estagiário monitor da disciplina de Matemática, e integrará seu Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação. Portanto, é importante ressaltar que o comprometimento e assiduidade dos alunos participantes são essenciais não somente para a efetiva aprendizagem, como também para que o trabalho proposto pelo professor se desenvolva da maneira pretendida. Em relação à participação dos alunos em um trabalho que depois será publicado, avisamos, desde já, que seus nomes e demais dados serão omitidos.

**A autorização para inscrição no projeto, devidamente preenchida, deve ser entregue à Coordenação Pedagógica (Prof. Fábio Guadagnin), até o dia 16/09.**

Prof. Me. Fábio Guadagnin
Coordenador Pedagógico
Ensino Fundamental Séries Finais e Ensino Médio

✂..................................................................................................................................

**Autorização de inscrição**

Autorizo a inscrição meu filho(a) ............................................................................, da turma ..............., no projeto "Aprendizagem de fundamentos de geometria por meio de geometria dinâmica", de acorco com o cronograma de realização acima detalhado.

Nome do Responsável: ..........................................................................................

Assinatura do Responsável: ..........................................................................................