

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**  
**PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**HELIO PIRES SOARES**

**TEOREMA DE THALES**

Uma proposta de ensino

Prof<sup>ª</sup>. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre 2011

**HELIO PIRES SOARES**

**TEOREMA DE THALES**

**Uma proposta de ensino**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Professora Marilaine de Fraga Sant'Ana.

Porto Alegre, 2011

## RESUMO

A presente pesquisa focaliza o ensino-aprendizagem do Teorema de Thales por meio de uma abordagem que visa enfatizar, inicialmente, o caráter necessário e suficiente do Teorema, para chegar, posteriormente, às relações de proporcionalidade descritas no mesmo.

O estudo histórico e epistemológico levou, num segundo momento, a uma análise mais apurada do objeto matemático em questão. Após examinar como os livros didáticos lidam com uma parte da transposição didática do Teorema, fez-se o confronto dessas abordagens com as propostas curriculares, especialmente os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

A segunda fase do trabalho trata da elaboração e aplicação de uma sequência didática, tendo como público-alvo alunos do Ensino Médio. A referida sequência compõe-se de duas partes: a primeira voltada para a abordagem do Teorema, tendo como recurso didático a História da Matemática, e a segunda para a aplicação do mesmo em situações problemas. Visando fazer um estudo sobre as relações entre o ensino interdisciplinar, mais especificamente, tratar o ensino de Matemática integrado ao ensino de Física.

Palavras-chaves: Ensino de Matemática; Teorema de Thales; Interdisciplinaridade; História da Matemática.

## ABSTRACT

This research focuses on teaching and learning of Thales Theorem through an approach that aims to emphasize, first, the character of the necessary and sufficient theorem to arrive later, the relationship of proportionality described therein.

The historical and epistemological study led, subsequently, a more detailed analysis of the mathematical object in question. After examining how the textbooks deal with a part of the didactic transposition of the theorem, it was the clash of these approaches with the proposed curriculum, especially the National Curriculum Parameters (PCNs).

The second phase of the work deals with the development and implementation of an instructional sequence, and target public high school students. Such a sequence consists of two parts: the first focused on the approach of Theorem, and as a teaching history of mathematics, and the second for the application in problem situations. In order to do a study on the relationship between interdisciplinary teaching, specifically dealing with teaching integrated mathematics to physics teaching.

Keywords: Teaching Mathematics; Theorem of Thales; Interdisciplinary; History of Mathematics.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>06</b>
<b>CAPÍTULO 1: Introdução.....</b>	<b>07</b>
1.1 Objetivos da Pesquisa.....	09
<b>CAPÍTULO 2: História da Matemática .....</b>	<b>16</b>
2.1 A Grécia Antiga e Thales de Mileto .....	16
2.2 Os Problemas Práticos de Thales .....	17
2.3 Teorema de Thales no contexto Pedagógico .....	18
2.3.1 - Definições importantes.....	19
2.4 Definição e Demonstração do Teorema de Thales .....	20
<b>CAPÍTULO 3: A ótica Geométrica e suas aplicações .....</b>	<b>25</b>
3.1 Ótica Geométrica e o conceito de Semelhança .....	25
3.2 Óptica Geométrica.....	25
3.2.1 Fontes de Luz .....	25
3.2.2 Meios de Propagação.....	26
3.2.3 Princípio da propagação retilínea da luz.....	26
<b>CAPÍTULO 4: Proposta Didática .....</b>	<b>28</b>
4.1 Prática Didática.....	28
4.2 Relatório da Prática de Ensino.....	44
<b>CAPÍTULO 5: Considerações Finais.....</b>	<b>46</b>
5.1 Avaliação dos Alunos.....	46
5.2 Ponderações Finais .....	49
<b>CAPÍTULO 6: Referências.....</b>	<b>52</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - .....	9
Figura 2 - .....	13
Figura 3 - .....	17
Figura 4 - .....	18
Figura 5 - .....	20-32
Figura 6 - .....	21
Figura 7 - .....	22
Figura 8 - .....	23
Figura 9 - .....	27-31
Figura 10 - .....	28-29
Figura 11 - .....	29
Figura 12 - .....	30
Figura 13 - .....	30
Figura 14 - .....	33
Figura 15 - .....	33
Figura 16 - .....	34
Figura 17 - .....	34
Figura 18 - .....	35
Figura 19 - .....	36
Figura 20 - .....	37
Figura 21 - .....	38
Figura 22 - .....	38
Figura 23 - .....	39
Figura 24 - .....	40
Figura 25 - .....	41
Figura 26 - .....	42

## **CAPÍTULO 1: Introdução**

A presente pesquisa aborda o ensino do Teorema de Thales sobre retas paralelas e foi aplicada a alunos do ensino médio.

As razões que me levaram a escolher o assunto devem-se principalmente pela dificuldade que sinto dos meus alunos (leciono em um cursinho pré-vestibular) quando trabalho com ângulos e medidas correspondentes. É notória a dificuldade, em geral, que percebo das minhas turmas quando abordo assuntos que envolvam semelhanças entre triângulos, proporções entre medidas e assemelhados. Percebo também que, mesmo que se tratando de alunos com ensino médio completo, o Teorema de Thales parece algo novo para eles.

Em minha trajetória profissional, tenho lecionado Matemática em escolas da rede pública de Ensinos Fundamental e Médio do Estado do Rio Grande do Sul e em cursinhos pré-vestibulares populares. Ao longo desses anos, tenho observado a dificuldade de professores e alunos ao tratar de questões pedagógicas de Matemática e Física, disciplinas tão próximas e, ao mesmo tempo, tão distantes no processo ensino-aprendizagem. Não é difícil constatar dificuldades dos alunos relacionadas à interpretação de texto ou a situações-problemas, ao estabelecer relações entre o que aprendem em Física e Matemática. Acredito que a formação dos professores de Matemática, assim como a minha formação não contempla em seu currículo questões como a interdisciplinaridade, nem mesmo de forma elementar, tão pouco a contextualização de conceitos.

Considero esse assunto muito importante, não apenas por ser um assunto bem usual nos exercícios de vestibulares e concursos em geral, mas, muito mais do que isso, se considerar o contexto de seu surgimento na Grécia antiga, veremos muitas aplicações que podem ser trazidas para o cotidiano do aluno.

Este trabalho tem como objetivo norteador fazer um estudo sobre as relações entre o ensino interdisciplinar, mais especificamente, tratar o ensino de Matemática integrado ao ensino de Física; com ênfase, no que se refere aos conteúdos específicos de Geometria Euclidiana (Matemática) e Óptica (Física). Pretendo mostrar ainda que, uma integração entre as duas disciplinas, pode ser conseguida neste contexto, contribuindo para uma melhor assimilação dos significados de seus conceitos por parte dos educandos.

Ao realizar esta pesquisa pretendo encontrar respostas para indagações que surgiram desde o começo de minha graduação. Questões tais como seguem a baixo:

- É possível obter a integração dos conteúdos Matemáticos e Físicos, de tal forma que seja visto como um objeto de estudo único?
- Será que de fato há ganho pedagógico nesta integração?



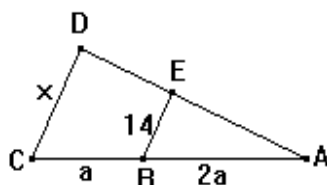
### 1.1 - Os Objetivos da Pesquisa

- Detectar e descrever dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de álgebra e geometria no Ensino Médio (em particular do Teorema de Thales);

- Propor uma mudança na prática didática usual, que pode ser muito pequena, mas que contribua para a melhoria do cenário encontrado.

Num primeiro momento, antes do início dos estudos, já podemos identificar, problemas com cálculo de áreas, perímetros ou que envolvam conhecer uma das medidas desconhecida de triângulos. Os alunos, muitas vezes, têm dificuldades em começar o problema (ou exercício) proposto pois, estão a procurar a altura e a base dos mesmos, só que não encontram, não conseguem relacionar ou mesmo reconhecer que duas figuras são semelhantes. Na maioria dos casos que pude observar, os alunos tentam resolver os exercícios através do Teorema de Pitágoras, sem sucesso e acabam por desistir. Como podemos ver no exemplo abaixo:

Na figura  $AB = 2BC$ ,  $AE = 2DE$  e  $BE = 14$ .



Sabendo que  $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ , podemos afirmar que  $\overline{CD}$  vale:

- a) 18.
- b) 19.
- c) 20.
- d) 21.
- e) 22.

Figura 1: Exercício de semelhança

Nesse exemplo, não raro vejo muitos alunos me perguntando se os ângulos CDE e BEA são retos e outros alunos já assumem essa hipótese como verdadeira e baseiam todos os seus cálculos nessa hipótese.

Pretendo com a pesquisa, trazer uma prática de ensino que inove e divulgue melhor as relações de semelhanças entre figuras geométricas (polígonos), focando não somente os conceitos, mas também as origens e aplicações.

Ao analisar trabalhos referentes ao ensino do Teorema de Thales, cheguei à dissertação de Haruna (2000), que tem como foco de seu estudo o Ensino Fundamental. A autora tem por objetivo tratar os problemas e obstáculos didáticos decorrentes do ensino do Teorema de Thales e busca analisar até que ponto o uso do computador favorece a superação dos mesmos.

O objetivo do trabalho consiste em estudar o objeto matemático “Teorema de Thales” em todos os seus aspectos, com o intuito de pesquisar a sua origem e desenvolvimento. Analisa algumas demonstrações e aplicações com o enfoque didático, visando fazer um levantamento dos problemas quanto a sua aprendizagem, formulando hipóteses e definindo metodologias para verificar, validar ou invalidar essas hipóteses.

O trabalho se desenvolveu seguindo a metodologia da Transposição Didática<sup>1</sup>, procurando analisar como se dá a transformação do objeto da ciência matemática para o objeto de ensino. Para isso, foram analisadas propostas curriculares do Estado de São Paulo, os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN), propostas didáticas para o ensino com experiências matemáticas e livros didáticos. Para diagnosticar a origem dos erros e dificuldades dos alunos recorre a resultados de pesquisas e artigos sobre o assunto.

A autora propôs atividades planejadas para serem feitas pelos alunos em alguns momentos individualmente e em outros em duplas, no máximo, em trios, dependendo da situação. Em algumas dessas situações foram utilizados como material de apoio didático o software Cabri-géomètre I<sup>2</sup>, em outras, régua, compasso, transferidor ou a transposição de figuras. Visando com essas atividades, primeiro a familiarização com o software Cabri-géomètre I, depois as noções de semelhança entre figuras planas, semelhanças entre triângulos para, a seguir, trabalhar o Teorema de Thales, explorando os aspectos da conservação das abscissas, da conservação da relação de projeção e da dilatação.

---

<sup>1</sup> Segundo Chevallard (1988), a transposição didática é entendida como um processo, no qual, “Um conteúdo do saber que foi designado como saber a ensinar sofre a partir daí, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. *Didática Francesa*.”

<sup>2</sup> (Software de construção em geometria desenvolvido pelo Institut d'Informatique et de Mathematiques Appliquees em Grenoble IMAG. É um software de construção que nos oferece “régua e compasso eletrônicos”, sendo a interface de menus de construção em linguagem clássica da Geometria)

Na *conservação das abcissas* (nas transversais) exprime que as relações entre os vetores levados por uma mesma transversal não dependem dessa transversal mas só das paralela consideradas.

A *conservação da relação de projeção* exprime a igualdade de razões entre as medidas algébricas de segmentos correspondentes determinados sobre duas transversais.

A dilatação (ou aumento ou redução) exprime a semelhança dos vetores levados por paralelas numa homotetia tendo como centro a intersecção das transversais.

Após a elaboração, essa sequência didática foi aplicada com os alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Em todas as atividades foi permitido o uso de calculadora e propostas situações nas quais os alunos deveriam fazer algumas experimentações, tecer comentários, elaborar conjecturas e justificá-las. Após cada série de atividades, houve discussões coletivas. Terminada a aplicação dessa sequência, deu-se um recesso de aproximadamente dois meses e aplicado um pós-teste para verificar a concepção desses alunos quanto as noções de semelhança e do Teorema de Thales.

Toda a experimentação foi feita em 25 aulas de 50 minutos cada, perfazendo um total de 14 encontros. As atividades foram feitas no Laboratório de informática que contou com 15 computadores. Sendo que, a sala de aula foi usada muitas vezes para discutir com os alunos assuntos algébricos e algumas vezes geométricos, ora para dar fechamento das atividades propostas para casa, ora para dar fechamento às atividades propostas no Laboratório.

Haruna (2000) constatou que os problemas relativos ao ensino-aprendizagem do Teorema de Thales estão relacionados com a sua forma de expressão envolvendo os aspectos da percepção visual, das significações e do contexto. Neste sentido foi constatado que há uma dificuldade muito grande nos alunos em perceber a aplicação do Teorema de Thales em situações que não se fornecem as configurações (como vistas nos livros didáticos analisados). O fato de se dar um destaque maior à produção desse saber com situações-problemas fornecendo as configurações, talvez, seja um dos motivos desta associação e de não percepção em outras.

Nas referências finais do texto a autora fala que *“para o aluno aprender o Teorema de Thales em sua globalidade perceptiva ou mesmo sintática-semântica, faz-se necessário diversificar os registros de representação, explorando as conversões e transformações dadas pelas regras de tratamento de cada registro em questão.”*(Haruna, 2000). Uma citação que responde a sua indagação inicial *“Como produzir uma*

*sequência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do Teorema de Thales observando todos os seus aspectos?"*

Pelo que vejo, o ensino do Teorema de Thales nas escolas sempre foi visto como algo fora do próprio ensino da Geometria. Os alunos começam a trabalhar cálculo de áreas de quadrados, triângulos, circunferências, depois em geral, passam para a Geometria Espacial. Em particular os alunos assimilam muito bem as fórmulas de áreas e perímetros, sabem que para resolver os problemas usuais precisam apenas de uma base e de uma altura, muitas vezes “vinda” do Teorema de Pitágoras. O uso de figuras semelhantes é muito pouco utilizado nas escolas. Nas experiências que tive oportunidade de observar, foi interessante ver fórmulas e mais fórmulas sendo usadas com o único propósito de resolver exercícios, trabalho meramente mecânico, tanto por parte do professor quanto dos alunos, ambos buscam resultados imediatos. Neste contexto, o ensino do Teorema de Thales é apresentado aos alunos sempre na sua forma “pura”, ou seja, na sua forma dogmática, axiomática, como visto abaixo em uma síntese que encontramos em livros didáticos:

*“Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes”.* (BIGODE, 1994)

A meu ver, esse assunto poderia ser abordado utilizando um pouco do contexto do seu surgimento, ou seja, trazer para os alunos uma situação na qual fosse necessário utilizá-lo, da mesma maneira que fez Thales no Egito para poder calcular a altura de uma pirâmide.

No livro de Dante (2008) encontramos de imediato o Axioma das retas paralelas, seguido de alguns exercícios, não chega nem a citar o nome Teorema de Thales. Em geral, livros didáticos mantêm essa postura. Como podemos ver abaixo:

*“Um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.*

*Assim, dado o seguinte feixe de paralelas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , e as transversais  $a$  e  $b$ , temos:*

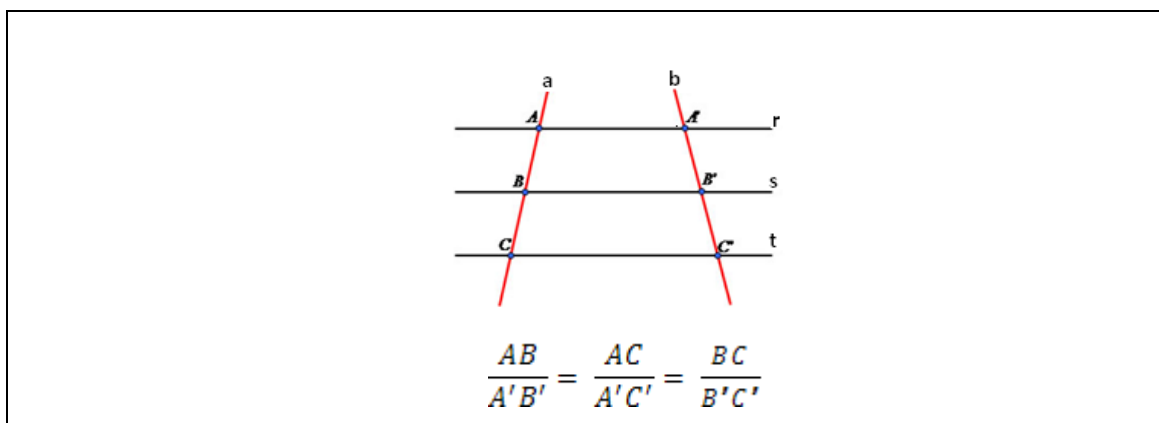


Figura 2: Feixe de retas paralelas. Fonte: Dante 2008.

*E em decorrência das propriedades das proporções, valem também as igualdades:*

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Depois da definição, o autor sugere a aplicação dos mesmos em reiterados exercícios.

Observando outro livro didático "Matemática – 8º série" de Imenes e Lellis (2009) o estudo se inicia com o capítulo de semelhança no qual se estudam figuras semelhantes, razão de semelhança, método para se desenhar figuras semelhantes (homotetia), triângulos semelhantes com algumas aplicações práticas, a semelhança dos triângulos formada por duas retas paralelas quando cortadas por duas transversais, semelhança nos triângulos retângulos, relações métricas no triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras. No capítulo 4 aborda trigonometria e polígonos inscritos e circunscritos. No capítulo 5, as medidas são trabalhadas em cálculos de áreas e volumes. O capítulo 8 é destinado ao estudo de ângulos no círculo e paralelismo, sendo que neste último é abordado o Teorema de Thales.

Os alunos quando apresentados aos problemas de semelhanças entre triângulos não denotam muitos problemas de compreensão, visto que, o conteúdo fica exposto dentro do panorama exposto pelo professor, ou seja, de retas paralelas cortadas por uma ou mais retas transversais, sendo preciso que o aluno “apenas” faça algumas relações (bem definidas pelo professor) entre as medidas correspondentes das figuras (bem desenhadas no quadro). As reais dificuldades ocorrem em geral, em questões que são sugeridas pelo professor que não estão associadas diretamente ao assunto, por exemplo,

que o aluno tem que ver por si só qual será a melhor ferramenta matemática ou a melhor estratégia para resolver a questão. Neste caso o aluno quase nunca se lembra de usar as relações de semelhança entre os polígonos, nas quais, os alunos não têm uma situação tão ideal assim como é feita em sala de aula com o professor. Ficando visível a fragilidade dessa metodologia, os alunos se deparam com uma situação problemática decorrente de uma semelhança que eles não “enxergam”, pois estão procurando retas paralelas e transversais. O aluno vê a questão e considera a possibilidade da questão estar incompleta ou errada, ou ainda, as informações contidas no problema são insuficientes para encontrar uma solução.

Entre os erros cometidos pelos alunos, destaco como principal a utilização indevida do Teorema de Pitágoras. Os alunos olham para um triângulo e já vão “achando” ângulos retos nos desenhos e assim descobrem todas as medidas que faltam para calcular o que lhes é pedido.

Wagner apresenta um modelo interessante sobre semelhança no artigo “semelhança, pizzas e chopes”, que sugere o estudo do tema através de uma situação cotidiana. No site da Nova Escola (acesso em 04 de Outubro de 2009), o assunto é abordado com um pequeno, mas significativo, conto sobre a vida do autor Thales e suas incursões pelo Egito, só depois se trata a questão das retas paralelas e a proporção entre os lados homólogos.

As escolas não priorizam o ensino do Teorema de Thales, é um assunto abordado de maneira secundária. O Teorema de Thales é um conteúdo vinculado ao ensino de geometria plana, que é composta do ensino de ângulos, cálculo de áreas e perímetros entre outros. São muitos conteúdos para serem desenvolvidos na escola, sendo que, nem sempre o professor consegue cumprir com o seu calendário e tendo que deixar de fora alguns desses conteúdos, ou abordando de maneira rápida sem muita abrangência. Por momento, saímos dessa questão inicial e pensemos no ensino desse conteúdo como sendo de maior relevância na escola. Chegaríamos a um ensino tradicional na qual segue um jeito rígido baseado na axiomatização do conteúdo, sem um vínculo prático ou aplicativo ao cotidiano do aluno. Nesse modelo de ensino, os alunos associam o Teorema de Thales a imagem de retas paralelas e retas transversais e ângulos, restritos a situação apresentada no quadro pelo professor.

O ensino de geometria, não somente do Teorema de Thales, poderia ser visto em conjunto ao estudo da história da própria matemática. Desta maneira, os alunos já estariam sendo contemplados com um conteúdo contextualizado pela sua aplicação,

vendo que seu surgimento foi necessário, em muitos casos, como ferramenta útil no dia a dia da humanidade e até mesmo como forma de sobrevivência, de subsistência da mesma.

Ao usar a História da Matemática na maquinaria escolar, processo pedagógico, vejo como principal obstáculo o pouco conhecimento dos professores neste assunto. Informações, em sua maioria, desprovidas de referências bibliográficas, ou seja, com pouca ou nenhuma credibilidade. Poderia ser sugerido, neste caso, cursos de formação continuada para professores sobre o assunto. Neste contexto poderíamos também, sugerir a utilização da internet como fonte de pesquisa, no entanto, seria temerário se o professor, confiando em uma fonte não segura, utilizasse informações erradas e desencontradas em suas aulas.

Ao pensar nas dificuldades que surgem como obstáculos didáticos para a aprendizagem do Teorema de Thales, não posso deixar de destacar a importância do aspecto aplicativo no ensino, ou seja, o envolvimento do aluno com o lado prático do ensino. A escola tradicional aborda temas de ensino, como no caso do Teorema de Thales, de maneira muito rigorosa, baseado em axiomas que, por sua vez, são compostos de muitas regras e conceitos. Essa é uma prática que vigora desde apresentação do conteúdo até a sua formalização e utilização em exercícios.

O Ensino de Matemática, não somente do Teorema de Thales, poderia ser introduzido no contexto escolar dentro de uma situação na qual fosse necessário para os alunos buscar novas ferramentas para encontrar soluções adequadas as suas necessidades. Dentro desse contexto, a História da Matemática nos proporciona muitas situações, nas quais os alunos podem ter esse tipo de interação com o conteúdo, sendo apresentado aos alunos problemas como Thales teve quando lhe foi solicitado que calculasse a altura de uma pirâmide que pertencia a um Faraó no antigo Egito (Eves, 1995).

Assim sendo, com o uso da História da Matemática no processo de aprendizagem, tenho como objetivo motivar os alunos a ter interesse pelo conteúdo, de tal maneira que eles se sintam envolvidos com os problemas apresentados, que busquem soluções criativas dentro do contexto que está sendo discutido e até mesmo tragam “coisas” novas para sala de aula, conhecimentos, muitas vezes, adquiridos em seu cotidiano.

## CAPÍTULO 2: História da Matemática

### 2.1 - A Grécia Antiga e Thales de Mileto

Para compor essa seção faço uso da obra de Eves (1995). Não se sabe muito sobre a vida de Thales de Mileto, que viveu por volta de 600 a.C. De acordo com o autor, Thales começou sua vida como mercador e tornou-se rico e dedicou a parte do final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Viveu por algum tempo no Egito, despertando admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra. De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo, sendo a primeira pessoa a quem se associam descobertas matemáticas. São creditados a ele os seguintes resultados:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais. (Thales talvez tenha usado esse resultado na determinação que fez da distância de um navio à praia)
5. Um ângulo inscrito num semi-círculo é reto. (Este resultado era conhecido dos Babilônios cerca de 1400 anos antes.) (EVES, 1995)

Um exemplo apresentado abaixo é a igualdade de um par de ângulos opostos pelo vértice. Pretendemos mostrar que na figura 3 o ângulo  $a$  é igual ao ângulo  $b$ . Nos tempos pré-helenísticos a igualdade desse dois ângulos era considerada provavelmente tão óbvia que, se acaso alguém tivesse dúvidas a respeito, bastaria recortar os ângulos e superpor um ao outro. Thales, ao contrário, preferiu estabelecer a igualdade dos ângulos  $a$  e  $b$  por raciocínio lógico, como se faz hoje nos textos de geometria elementar. Na figura 3, a soma do ângulo  $a$  com o ângulo  $c$  é igual a um ângulo raso; o mesmo acontece com a soma dos ângulos  $b$  e  $c$ . Como os ângulos rasos são iguais, então o ângulo  $a$  é igual ao ângulo  $b$  (subtraindo-se iguais de iguais, então as diferenças são iguais), o que conclui a demonstração.



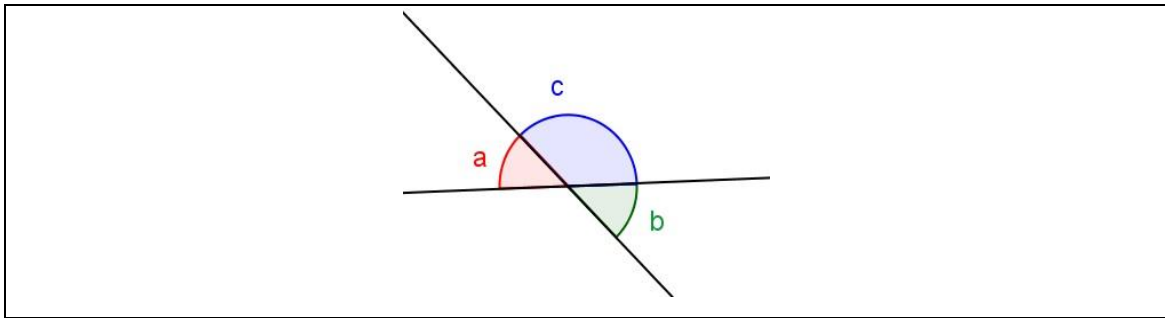


Figura 3: Ângulos opostos pelo vértice.

Segundo Eves (1995) contam-se muitas estórias sobre Thales, nem sempre verdadeiras.

Houve uma ocasião em que demonstrou como é fácil ficar rico; prevendo uma safra de olivas muito abundante, obteve o monopólio de todas as prensas de azeite da região; na ocasião adequada alugou-as todas e ganhou uma fortuna. E há a história, recontada por Esopo, do mulo recalcitrante que, ao transportar sal, submergia sua carga no ribeirão para dissolver seu conteúdo e assim poder seguir viagem mais descansadamente. Thales tirou-lhe esse hábito importuno fazendo-o transportar cargas de esponjas (EVES, 1995).

## 2.2 - Os problemas práticos de Thales

Eves (1995) relata duas versões de como Thales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra.

O primeiro, atribuído ao discípulo de Aristóteles Merônimos, diz que Thales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A segunda versão, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e usou semelhança de triângulos. As duas versões não mencionam a dificuldade para obter o comprimento da sombra da pirâmide.

Outro problema atribuído a Thales é a medida da distância de um navio à praia, usando que dois triângulos são congruentes quando dois ângulos e um lado comum forem iguais. Eves (1995) diz que provavelmente ele o fez com um instrumento formado de duas barras AC e AD articuladas em A, como mostra a figura 4. A barra AD era mantida verticalmente sobre o ponto B da praia, ao passo que a barra AC era apontada na direção do navio P. Então, sem mudar o ângulo DAC, o instrumento era girado em torno de AD,

marcando-se no chão o ponto Q para o qual AC estava apontada. A questão é decidir qual distância deve-se obter para achar a distância de B ao ponto inacessível P.

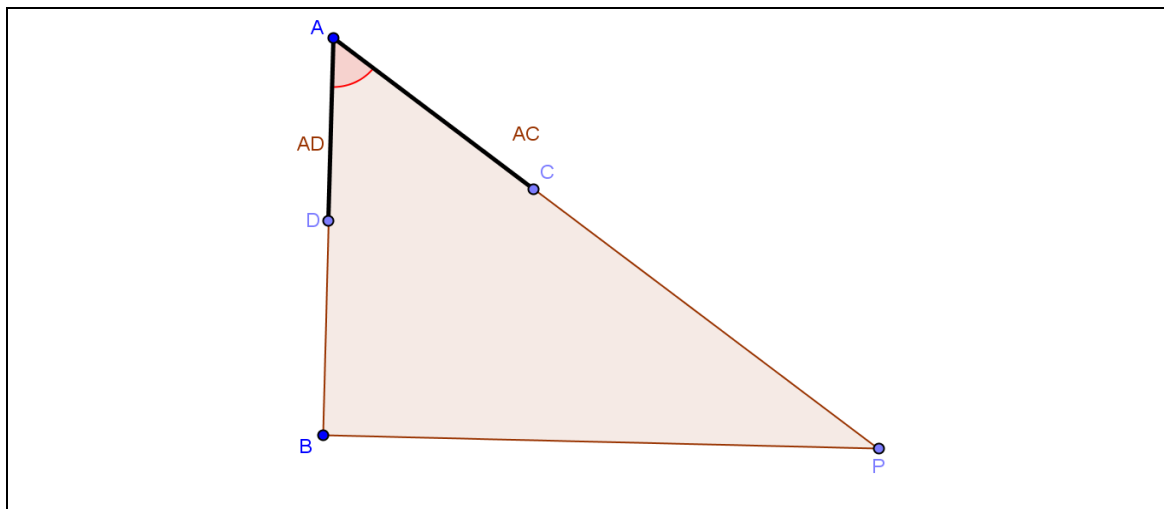


Figura 4: Representação geométrica para o problema do navio.

### 2.3 - Teorema de Thales no contexto Pedagógico

A didática da matemática estuda os fenômenos que estão relacionados ao ensino-aprendizagem, ou seja, o estudo de situações que respondem ao projeto social, na formação social e cultural do educando, e que visam a aquisição de certos conhecimentos pelo aluno. Essa distinção entre ensino e aprendizagem se faz necessária devido à diferença entre o objeto de ensino (conteúdo a ensinar), as intenções do professor que ensina e a realidade dos conhecimentos adquiridos pelos alunos (aprendizagem efetiva).

Para melhor analisar esses fenômenos recorreremos às pesquisas desenvolvidas na didática, optando por nos apoiar nos trabalhos realizados por Guy Brousseau.

Brousseau expõe que "uma das hipóteses fundamentais da didática consiste em afirmar que somente o estudo global das situações que presidem as manifestações de um saber, permitem escolher e articular os conhecimentos de origem diferentes, necessários para compreender as atividades cognitivas do sujeito, assim como o conhecimento que ele utiliza e a maneira o qual ele a modifica." ( Brousseau, Guy. 1986, pag.39)

As variáveis do contexto estão relacionadas tanto com o professor (quando faz suas escolhas, e em relação assuas concepções), quanto ao aluno (origem, história e

vivência dos alunos) e até mesmo com o próprio saber (interdisciplinaridade, diversificação do saber, fenômenos da moda e outros).

As variáveis didáticas são aquelas que estão à disposição do professor e que determinam a situação didática. Nesse sentido temos as variáveis de situação, as variáveis de contrato e as variáveis de transposição.

Segundo Chevallard (1988), o contrato didático reúne três elementos: o professor (aquele que ensina), o aluno (aquele a quem se ensina) e o saber (considerado o saber a ser ensinado). As interações didáticas entre o professor e o aluno, a propósito do saber, são regidas pelo contrato didático através das chamadas relações didáticas. As cláusulas do contrato regem essas relações e até os detalhes do processo, estando tudo submetido à sua legislação.

### **2.3.1 - Definições importantes:**

Para entender melhor a demonstração do Teorema se faz necessário rever algumas definições importantes, que seguem da Geometria Euclidiana. Retiramos de Dulce e Pompeo (1985) as definições abaixo.

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.

Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.

Pontos correspondentes de duas transversais são os pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.

Segmentos correspondentes de duas retas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.

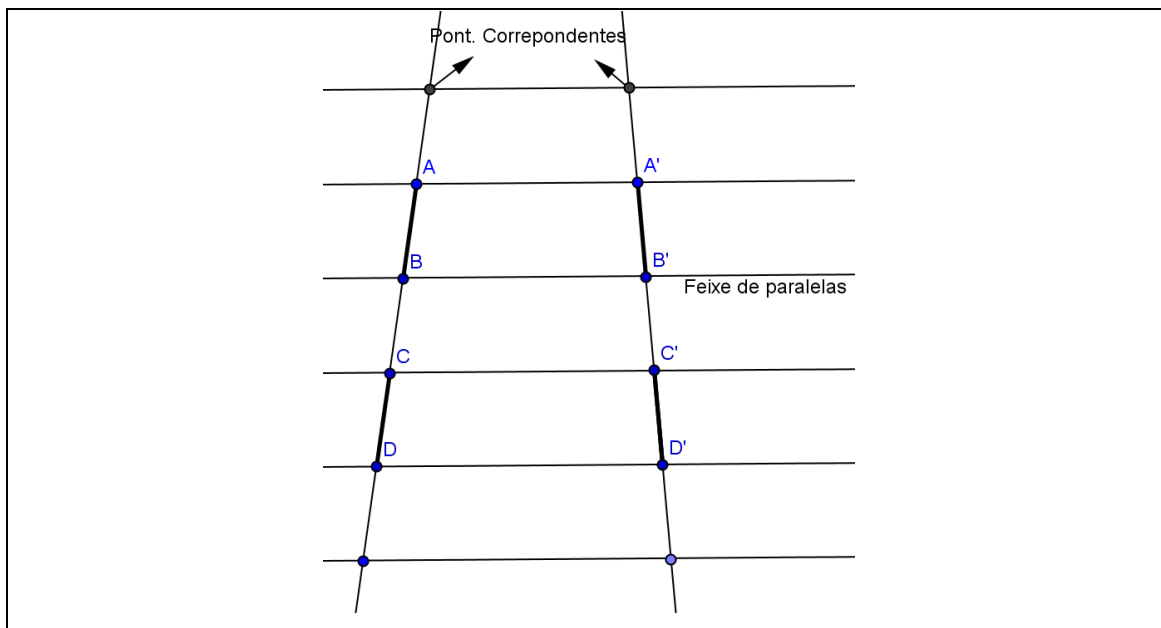


Figura 5: retas transversais a um feixe de retas paralelas.

A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.

$\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$  são segmentos correspondentes.

Segmentos comensuráveis: os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são ditos comensuráveis se existirem  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que:  $m \cdot \overline{AB} = n \cdot \overline{CD}$ .

## 2.4 Definição e Demonstração do Teorema de Thales

Ao abordarmos o Teorema de Thales, como recurso didático, necessitamos defini-lo formalmente como um objeto matemático. Para tanto, utilizamos como fonte de dados a História de Matemática, artigos e definições encontradas em livros didáticos. Através dos mesmos, podemos constatar muitas controvérsias a cerca da origem e até mesmo a autoria do Teorema acreditado hoje à Thales.

O teorema hoje conhecido como Teorema de Thales deve ter dito sua origem nos métodos utilizados para calcular a altura das pirâmides. A versão mais simples é de Hieronymus, um aluno de Aristóteles, citado por Diógenes Laértius.

Diógenes Laértius: " Jerônimo diz que Thales mediu as pirâmides pela sombra, depois de observar o tempo que a nossa própria sombra demora a ficar igual à nossa altura." Vida, Doutrina e Opiniões dos Filósofos Ilustres; Thales, I, 27.(Serres, M, 1997, pag.167).

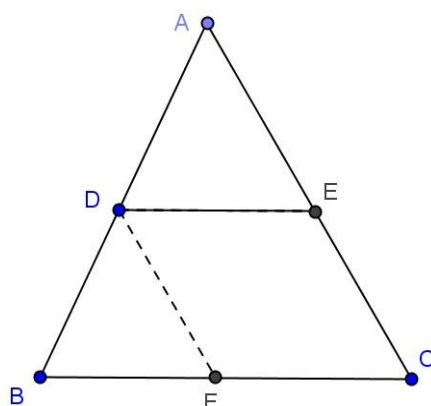
Thales deve ter observado que quando a sombra de um objeto particular é igual a sua altura, a mesma relação é válida para todos os outros objetos que projetam uma sombra.

Uma citação de Henry Plane, existe uma obra editada junto a Mame em Tours, tendo por nome de autores J.F mas sem data de impressão. Esta obra contém um "Theorema de Thales" (documento14). (Henry Plane, pag. 79).

Doc. 14 - Teorema de Thales.

221 - Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro:

Seja ABC um triângulo qualquer,  $\overline{DE}$  uma paralela ao  $\overline{BC}$ .



Deve-se provar que os dois triângulos ADE e ABC têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais. 1ª) O ângulo  $A$  é comum, os ângulos  $D$  e  $B$  são iguais e concorrentes, como  $E$  e  $C$ . 2ª) Tomemos  $\overline{DF}$  paralela a  $\overline{AC}$ . A figura DECF é um paralelogramo, e assim  $DE = FC$ . Devido as paralelas,  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$ , tem-se:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

As paralelas  $\overline{DF}$  e  $\overline{AC}$  fornecem igualmente:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{FC \text{ ou } DE}{BC} \text{ onde } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \text{ logo ...}$$

Figura 6: Documento 14 - curso de J.F(por volta de 1895), pag. 96, Editora Mame (Henry Plane, pag. 79)

A seguir definição e demonstração do Teorema de Thales:

*'Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra'*. Dulce, Osvaldo. Pompeo, Jose Nicolau. 1985.

Hipótese		Tese
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos correspondentes da outra.	→	$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

Demonstração:

- 1ª caso:  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são comensuráveis.

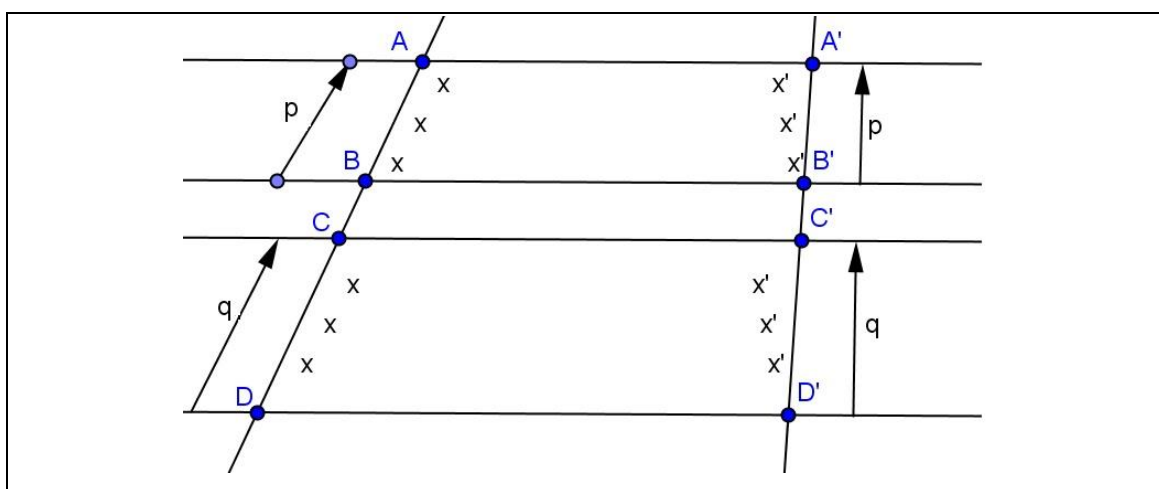


Figura 7: ilustração da demonstração.

Existe um segmento  $x$  que é submúltiplo de  $\overline{AB}$  e de  $\overline{CD}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = px \\ \overline{CD} = qx \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  (vide figura 7) e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A'B'} = px' \\ \overline{C'D'} = qx' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos:  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ .

- 2ª caso:  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são incomensuráveis.

Não existe segmento submúltiplo comum de  $\overline{AB}$  e de  $\overline{CD}$ .

Tomamos um segmento  $y$  submúltiplo de  $\overline{CD}$  ( $y$  cabe um certo número inteiro  $n$  vezes em  $\overline{CD}$ ), isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y$$

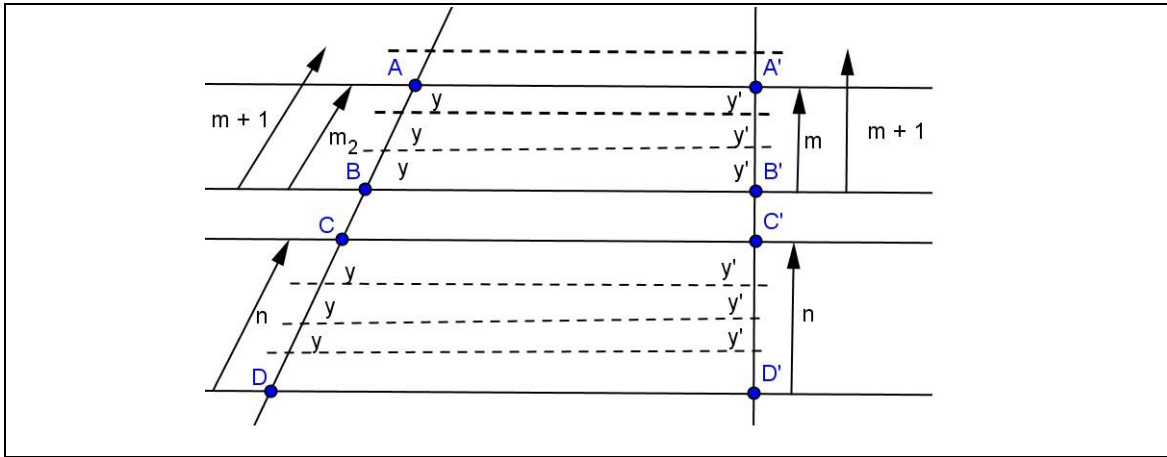


Figura 8: ilustração da demonstração

Por serem  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  incomensuráveis, marcando sucessivamente  $y$  em  $\overline{AB}$ , para um certo número inteiro  $m$  de vezes acontece que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m + 1)y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left. \begin{array}{l} my < \overline{AB} < (m + 1)y \\ ny = \overline{CD} = ny \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m + 1}{n} \quad (3)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\overline{C'D'} = ny'$$

$$my' < \overline{A'B'} < (m + 1)y'$$

Operando com as relações acima, temos:

$$\left. \begin{array}{l} my' < \overline{A'B'} < (m + 1)y' \\ ny' = \overline{C'D'} = ny' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m + 1}{n} \quad (4)$$

Ora,  $y$  é um múltiplo de  $\overline{CD}$  que se pode variar; dividindo  $y$ , aumentamos  $n$  e

nestas condições  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{m + 1}{n}$  formam um par de classes contíguas que definem um

número real, que é  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$  pela expressão (3), e é  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$  pela expressão (4). Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Observação:

As igualdades também são válidas.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

O que permite concluir que a razão entre segmentos correspondentes é constante.



## **CAPÍTULO 3: A ótica Geométrica e suas aplicações**

### **3.1 Ótica Geométrica e o conceito de Semelhança**

O conceito de semelhança, na Física, está presente em diferentes situações que estudam os fenômenos da ótica Geométrica. Defini-se Óptica pelo estudo da luz e dos fenômenos ópticos em geral.

Para representar graficamente a propagação da luz, utilizamos a noção de raio de luz. Considerando uma chama de vela, temos uma fonte que emite luz em todas as direções. A sua propagação em um meio homogêneo é considerada retilínea, sendo assim as direções em que a luz se propaga são representadas por linhas retas, que são denominadas raios de luz.

O conjunto de raios de luz constituem um feixe de luz. Sabendo que a luz se propaga em linha reta, temos condições de determinar o tamanho e a posição da sombra de um objeto sobre um anteparo qualquer. Ao inserir um objeto entre a fonte e o anteparo, a passagem de parte dessa luz é interrompida, originando a sombra.

### **3.2 Ótica Geométrica**

#### **3.2.1 Fontes de Luz**

Para que possamos ver um objeto, por exemplo, é necessário que este seja uma fonte de luz, que pode ser, de acordo com Bosquilha e Pelegrini (2003):

Primária - são as fontes que emitem luz própria como o Sol, uma chama, uma lâmpada acesa etc.

Secundária - apenas refletem a luz de fontes primárias. Assim todos os objetos iluminados são fontes secundárias.

Uma fonte de luz luminosa é chamada *puntiforme* quando suas dimensões podem ser desprezadas em relação às distâncias que separam de outros corpos; caso contrário, é chamada *extensa*. A lâmpada acesa de um poste, vista por um passageiro através da janela de um avião, é uma fonte puntiforme, ao passo que a mesma lâmpada, vista por alguém que travessa a rua, por exemplo, é uma fonte extensa.

### 3.2.2 Meios de Propagação

Ainda de acordo com Bosquilha e Pelegrini (2003), um meio é chamado *transparente* à luz quando nele a luz se propaga por distâncias consideráveis e segundo trajetórias bem definidas, com formas geométricas determinadas. O vácuo, o ar, pequenas espessuras de água ou vidro, por exemplo, são transparentes.

Denomina-se *translúcido* o meio no qual a luz se propaga através de distâncias consideráveis, mas segundo trajetórias estatisticamente irregulares, de formas imprevisíveis. O vapor de água, o vidro leitoso e o papel vegetal são alguns exemplos de meios translúcidos.

Quando a luz praticamente não consegue se propagar através de um meio, ele é denominado *opaco*. A madeira e os metais são exemplos de matérias opacas, a não ser que apresentem espessura muito pequena.

### 3.2.3 Princípio da propagação retilínea da luz

Nas situações analisadas, podemos considerar que em um meio homogêneo e transparente a luz se propaga sempre em trajetórias retilíneas.

Para representar a propagação da luz entre dois pontos, utilizamos, em nossos estudos, a ideia do raio de luz. E um raio de luz não interfere na propagação de outro.

Quando uma "porção de luz", que se propaga em um determinado meio, atinge a superfície de outro meio, podem ocorrer vários fenômenos simultâneos, entre eles a reflexão. Reflexão ocorre quando a luz se propaga em um determinado meio atinge uma superfície e retorna para o meio em que estava.

Consideremos uma superfície perfeitamente polida, plana e regular, atingida por um feixe incidente de raios paralelos de luz. Este feixe irá se refletir também em raios paralelos. Nesse caso, segundo com Bosquilha e Pelegrini (2003) chamamos a reflexão de regular ou especular.

Caso a superfície não seja regular, quando atingida por um feixe incidente de raios paralelos, haverá raios de luz refletidos em várias direções. Nesse caso, chamamos a reflexão de difusa.

A reflexão da luz é regida por duas leis:

Primeira - O raio incidente, a reta normal à superfície de fronteira entre dois meios, e o raio refletido estão no mesmo plano, ou seja, são coplanares.

Segunda - O ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

O desenho a seguir resume o que trata-se nas Leis da Reflexão da Luz.

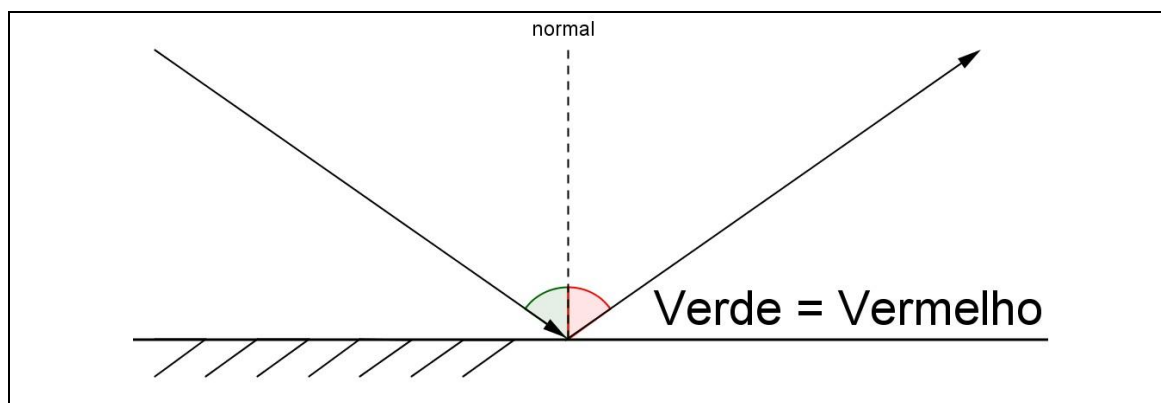


Figura 9: esquema de Leis de Reflexão.

## **CAPÍTULO 4: Proposta Didática**

### **4.1 - Prática Pedagógica**

#### **Objetivos:**

- Definir e estudar relações de semelhanças,
- Aplicação e definição do Teorema de Thales,
- Definir e aplicar Leis de Óptica,
- Usar o critério de semelhança na resolução de problemas.

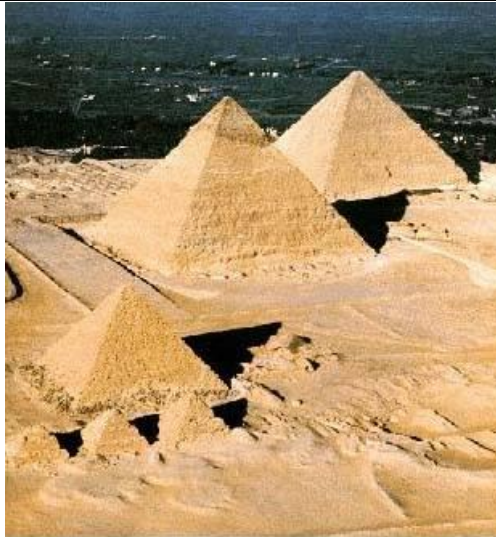
**Conteúdos:** Geometria plana - Teorema de Thales.

#### **Metodologias:**

As aulas serão expositivas, na modalidade teórico-práticas. No decorrer da prática, serão oportunamente distribuídas listas de exercícios.

#### **Desenvolvimento:**

A aula começou com a exposição do problema vivido por Thales ao ser solicitado que o mesmo tivesse que calcular a altura de uma pirâmide no Egito Antigo. Para que os alunos tenham uma real dimensão da situação, irei fazer uso do Datashow (aparelho de multimídia) com recurso computacional (através de fotos) para podermos ver todas as questões que envolvem o problema.



Great Pyramid of Giza



Fonte: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Kheops-Pyramid.jpg>

Figura 10: Pirâmides. Fontes:

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/kheops-pyramid.jpg>

Após ver as fotos, sugeri maneiras de se calcular a altura das pirâmides, considerando, por exemplo, as impossibilidades de se escalar as mesmas.

Neste momento da aula, seria adequado começar a discutir com a turma a maneira com que Thales resolveu este problema, visto que, muitos dos alunos já devam conhecer algo sobre essa resolução. O entusiasmo dos alunos me permitiu falar sobre Thales sem muitas resistências, por se tratar de um grande sábio que resolveu um problema que para todos, naquele momento, tornou-se importante e de difícil solução.

Thales de Mileto foi um importante filósofo, astrônomo e matemático grego que viveu antes de Cristo. Ele usou seus conhecimentos sobre Geometria e

proporcionalidade para determinar a altura da pirâmide. Em seus estudos, Thales observou que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinada e eram paralelos, dessa forma, ele concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura dos objetos, observe a ilustração:

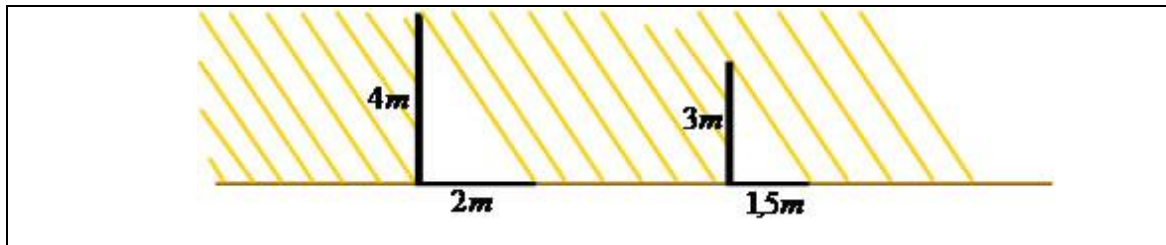


Figura 11: Fonte: <http://www.brasilecola.com/matemática/teorema-tales.html> - Acesso em 04 de Outubro de 2009

Através deste esquema, Thales conseguiu medir a altura de uma pirâmide com base no tamanho da sua sombra. Para tal situação ele procedeu da seguinte forma: fincou uma estaca na areia, mediu as sombras respectivas da pirâmide e da estaca em uma determinada hora do dia e estabeleceu a proporção:

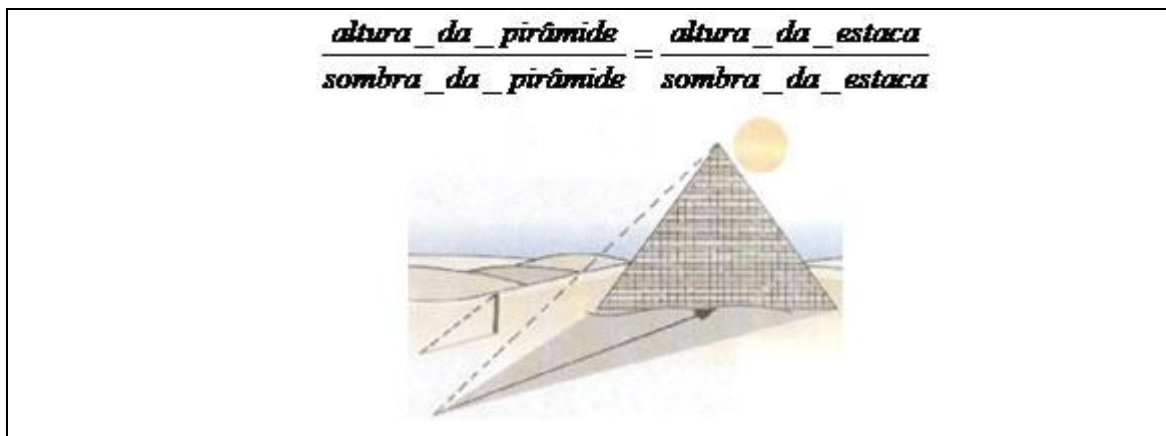


Figura 12: Fonte: <http://www.brasilecola.com/matemática/teorema-tales.html> - Acesso em 04 de Outubro de 2009

Esquematisando melhor ficamos com:

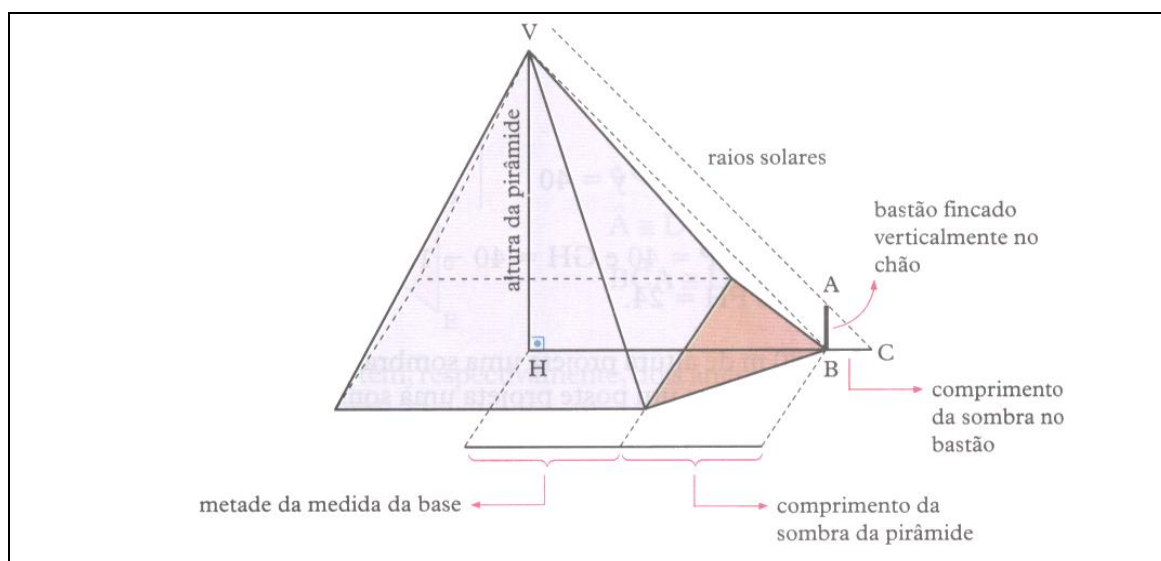


Figura 13: Fonte: <http://www.brasilecola.com/matemática/teorema-tales.html> - Acesso em 04 de Outubro de 2009

Neste momento, é importante colocar as definições de Óptica, mais precisamente, falar sobre as projeções da luz e reflexão da mesma. Observamos que as mesmas constam neste trabalho no Capítulo 3.

Para representar graficamente a propagação da luz, utilizamos a noção de raio de luz. Considerando uma chama de vela, temos uma fonte que emite luz em todas as direções. A sua propagação em um meio homogêneo é considerada retilínea, sendo assim as direções em que a luz se propaga são representadas por linhas retas, que são denominadas raios de luz.

O conjunto de raios de luz constituem um feixe de luz. Sabendo que a luz se propaga em linha reta, temos condições de determinar o tamanho e a posição da sombra de um objeto sobre um anteparo qualquer. Ao inserir um objeto entre a fonte e o anteparo, a passagem de parte dessa luz é interrompida, originando a sombra.

Quando uma "porção de luz", que se propaga em um determinado meio, atinge a superfície de outro meio, podem ocorrer vários fenômenos simultâneos, entre eles a reflexão. Reflexão ocorre quando a luz se propaga em um determinado meio atinge uma superfície e retorna para o meio em que estava.

Consideremos uma superfície perfeitamente polida, plana e regular, atingida por um feixe incidente de raios paralelos de luz. Este feixe irá se refletir também em raios paralelos. Nesse caso, chamamos a reflexão de regular ou especular.

A reflexão da luz é regida por duas leis:

- Primeira - O raio incidente, a reta normal à superfície de fronteira entre dois meios, e o raio refletido estão no mesmo plano, ou seja, são coplanares.
- Segunda - O ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

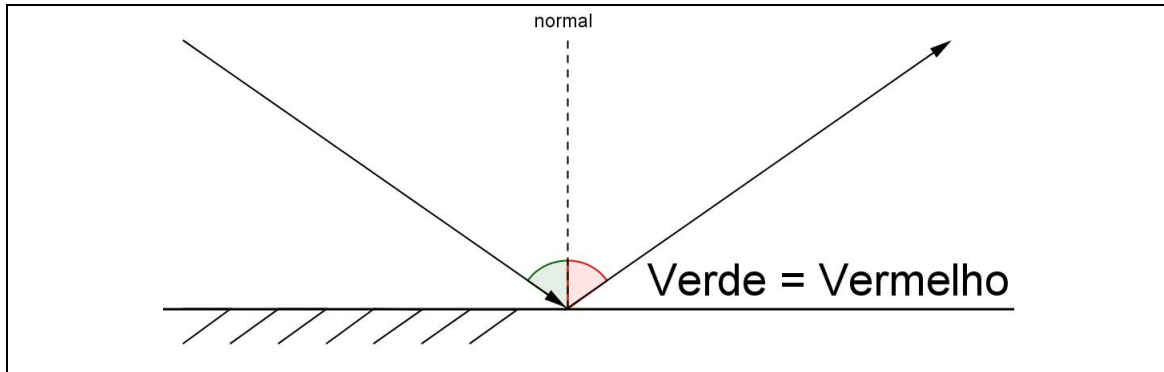


Figura 9: esquema de Leis de Reflexão.

Em seguida, mostrar a relação feita por Thales e definir o Teorema de Thales como segue abaixo. Mas antes, relembrar algumas definições importantes de Geometria Euclidiana.

**Definições importantes:**

- *Feixe de retas paralelas* é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.
- *Transversal do feixe de retas paralelas* é uma reta do plano do feixe que concorre com as retas do feixe.
- *Pontos correspondentes de duas transversais* são os pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.
- *Segmentos correspondentes de duas retas transversais* são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.



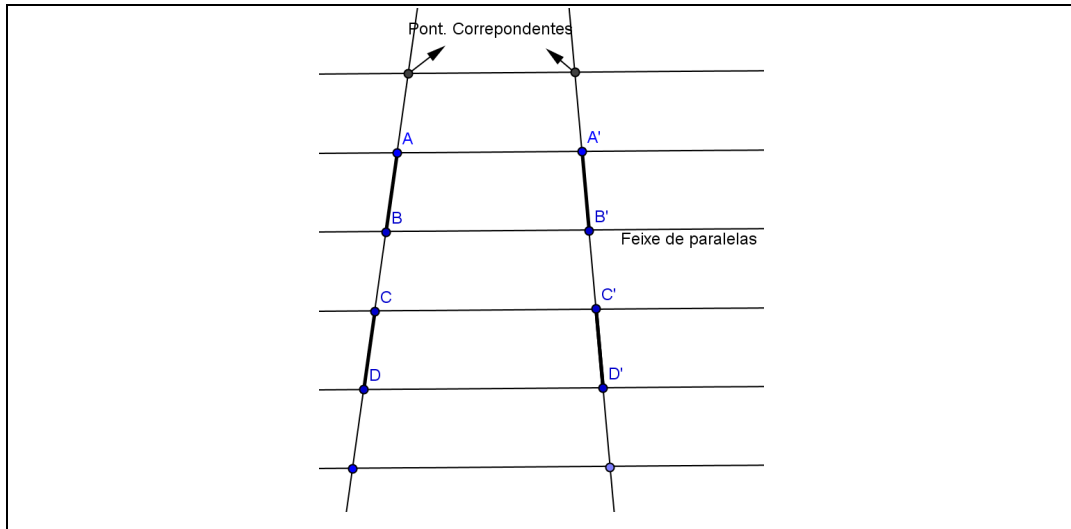


Figura 5: retas transversais a um feixe de retas paralelas.

A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.

$\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$  são segmentos correspondentes.

- Segmentos comensuráveis: os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são ditos comensuráveis se existirem  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que:  $m \cdot \overline{AB} = n \cdot \overline{CD}$

O Teorema de Thales pode ser determinado pela seguinte lei de correspondência:

*"Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra"*. Dulce, Osvaldo. Pompeo, Jose Nicolau. 1985. **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Plana, v. 9.**

*"Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes"* (Dante, 2008).

Para compreender melhor o teorema observe o esquema representativo a seguir:

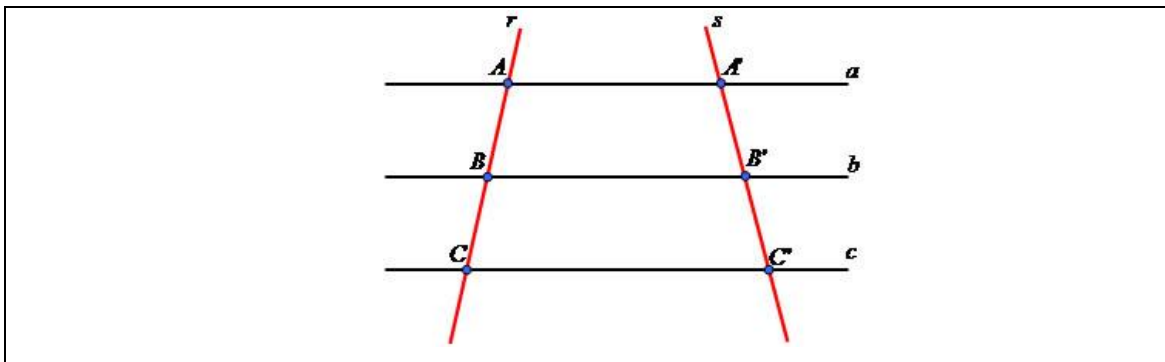


Figura 14: Feixe de retas paralelas.

Pelas relações existentes no Teorema, temos a seguinte situação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

**Observação:**

As igualdades também são válidas.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

O que permite concluir que a razão entre segmentos correspondentes é constante.

**Exemplo 1**

Aplicando a proporcionalidade existente no Teorema de Tales determine o valor dos segmentos AB e BC na ilustração a seguir:

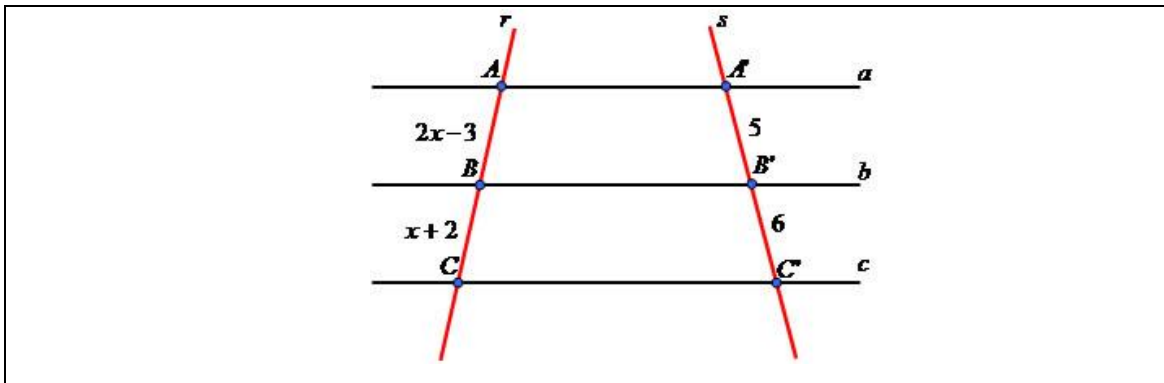


Figura 15: Aplicação do Teorema de Tales

Depois disso, utilizei o espelho, a projeção da luz interna, o astrolábio e os demais matérias para medir a altura da parede da sala.

Pedi a um aluno para olhar pelo espelho o topo da parede a ser calculada e com o auxílio de uma trena medir a sua distância ao espelho e a distância do espelho à parede. Assim construímos triângulos semelhantes como mostra a figura abaixo:

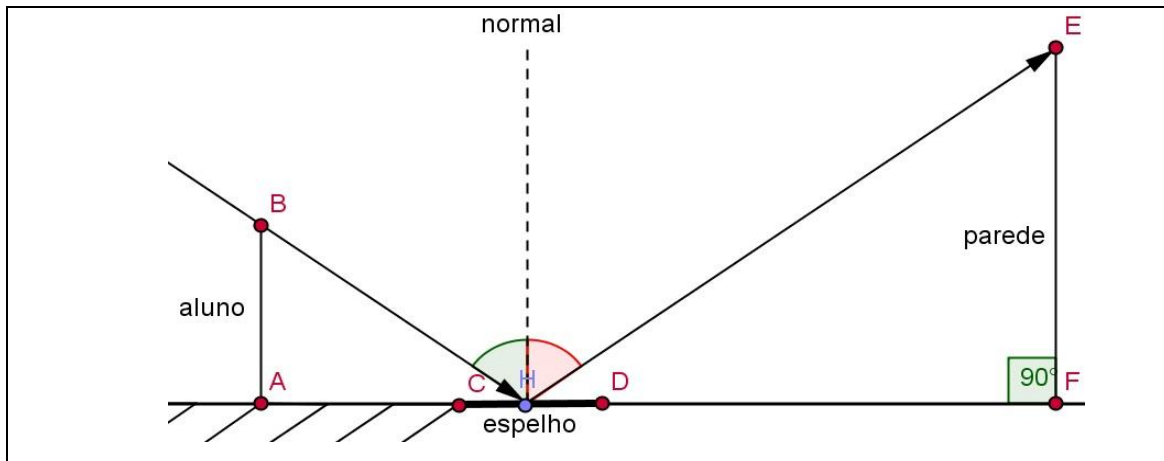


Figura 16: triângulos semelhantes.

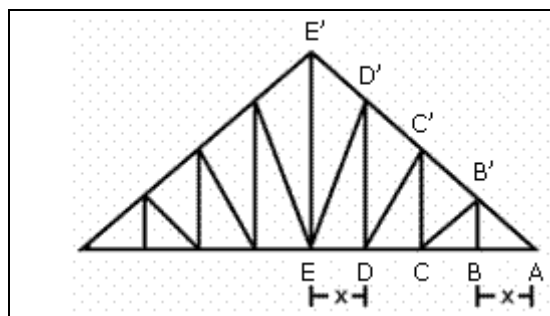
Após construir os triângulos semelhantes com os alunos, então passamos para as relações de semelhança entre os triângulos ABH e HEF. A seguir, concluindo que a

relação que nos interessa para resolver o problema é:  $\frac{\text{altura do aluno}}{\text{altura da parede}} = \frac{AH}{HF}$

Em seguida, passar a lista de exercícios e fazer com que os alunos trabalhem em grupos ou individuais e apresentem para seus colegas os seus resultados.

### Exercícios propostos:

1 (UFRGS - 2003) A figura abaixo representa a estrutura de madeira que apóia o telhado de um pavilhão. A altura do pilar EE' é de y metros. A distância entre dois pilares consecutivos quaisquer é de x metros, assim como a distância da base do pilar BB' ao ponto A.



Então, a sequência das alturas dos pilares BB', CC' e DD' forma uma progressão

(A) aritmética de razão  $\frac{1}{4}$ .

(B) aritmética de razão  $\frac{y}{4}$ .

- (C) aritmética de razão  $\frac{x}{4}$  .
- (D) geométrica de razão  $\frac{1}{4}$  .
- (E) geométrica de razão  $\frac{xy}{4}$

Figura 17: Questão 1. Fonte: Vestibular UFRGS 2003.

Solução:

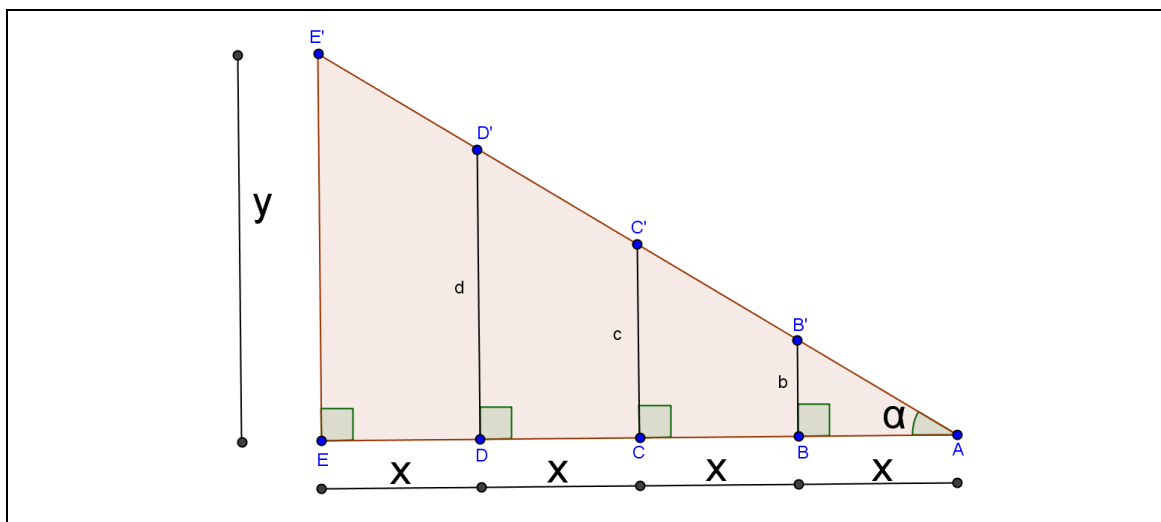


Figura 18: Ilustração para solução da questão 1.

Os triângulos  $ABB'$ ,  $ACC'$ ,  $ADD'$  e  $AEE'$  são semelhantes porque todos tem os ângulos correspondentes, respectivamente, congruentes (iguais), ou seja, o ângulo  $\alpha$  é comum a todos os triângulos, todos têm um ângulo reto ( $90^\circ$ ) e, por Tales, os terceiros ângulos são obrigatoriamente congruentes (a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ ). Representante  $\overline{BB'}$  por b,  $\overline{CC'}$  por c,  $\overline{DD'}$  por d e aplicando a proporcionalidade

entre os lados homólogos de triângulos semelhantes, temos  $\frac{b}{x} = \frac{c}{2x} = \frac{d}{3x} = \frac{y}{4x}$  ,

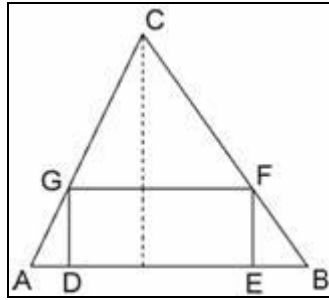
obtendo-se daí  $\frac{b}{x} = \frac{y}{4x}$  ,  $\frac{c}{2x} = \frac{y}{4x}$  ,  $\frac{d}{3x} = \frac{y}{4x}$  ou  $b = \frac{y}{4}$  ,  $c = \frac{y}{2}$  e  $d = \frac{3y}{4}$  .

Agora, a sequência  $\overline{BB'}$  ,  $\overline{CC'}$  ,  $\overline{DD'}$  , ou seja, b, c, d, é uma progressão aritmética ou geométrica? Basta observar que é uma progressão aritmética de razão  $\frac{y}{4}$

pois, devemos ter  $c - b = d - c$  ou  $\frac{y}{2} - \frac{y}{4} = \frac{3y}{4} - \frac{y}{2}$  ou  $\frac{y}{4} = \frac{y}{4}$ , o que prova ser uma progressão aritmética de razão  $\frac{y}{4}$ .

Gabarito: B

2 - (UFRGS - 2003) Na figura abaixo, DEFG é um retângulo inscrito no triângulo ABC, cuja área é **a**.



Se  $h$  é a altura desse triângulo relativa ao lado  $\overline{AB}$  e  $DG = \frac{1}{3}h$ , a área do retângulo DEFG é

(A)  $\frac{1}{3}a$ .

(B)  $\frac{2}{3}a$ .

(C)  $\frac{1}{2}a$ .

(D)  $\frac{4}{9}a$ .

(E)  $\frac{5}{9}a$ .

Figura 19: Questão 2. Fonte: Vestibular UFRGS 2003.

Solução:

Na resolução será usado o cálculo da área do triângulo  $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ , a área do retângulo  $\text{base} \cdot \text{altura}$  e a proporcionalidade entre os lados homólogos de triângulos semelhantes.

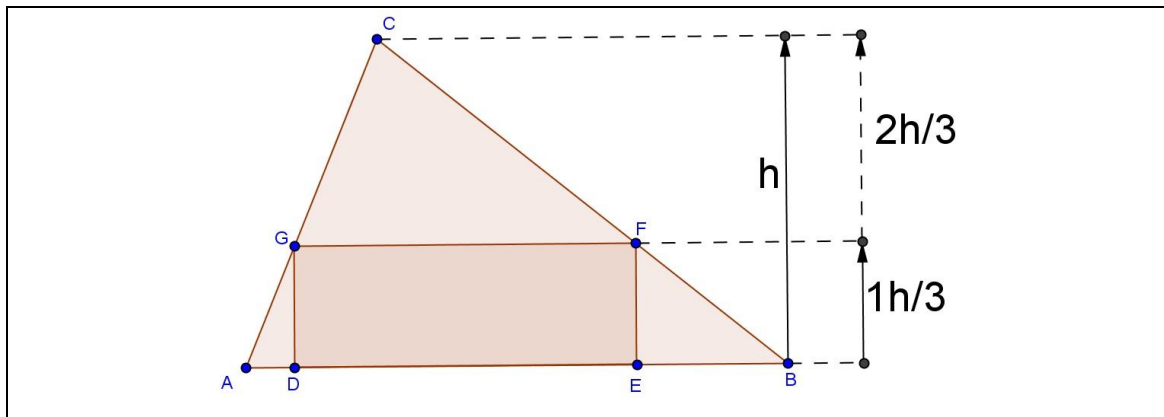


Figura 20: Ilustração para solução da questão 2.

Os triângulos ABC e CGF são semelhantes porque possuem os três pares de ângulos, respectivamente, congruentes (iguais), ou seja,  $\hat{C}$  é ângulo comum aos dois triângulos,  $\hat{A} = \hat{G}$  e  $\hat{B} = \hat{F}$  devido ao fato de serem ângulos correspondentes (duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, pois trata-se de um retângulo). Como  $\overline{DG}$  é  $\frac{1}{3}$  da altura do triângulo ABC, isto é,  $\overline{DG} = \frac{1}{3}h$ , segue que a altura do triângulo CGF é  $\frac{2}{3}h$ . A área do retângulo é  $A = \overline{GF} \cdot \overline{DG}$  ou  $A = \overline{GF} \cdot \frac{1}{3}h$  (1)

E a área do triângulo ABC é  $a = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2}$  (2). Através da semelhança de triângulos,

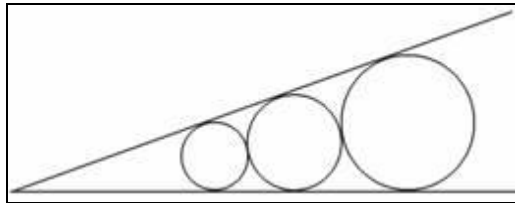
estabelece-se a relação  $\frac{\overline{AB}}{h} = \frac{\overline{GF}}{\frac{2h}{3}}$  ou  $\overline{AB} = \frac{3\overline{GF}}{2}$  e, substituindo na (2), vem

$a = \frac{3}{2} \cdot \overline{GF} \cdot h$  ou  $\overline{GF} \cdot h = \frac{4a}{3}$ . Finalmente, levando esse último resultado na (1), obtêm-

se  $A = \frac{4a}{3 \cdot 1}$  ou  $A = \frac{4a}{9}$  unidades de área.

Gabarito: D

3 - (UFRGS - 2004) Na figura abaixo, os círculos que se interceptam são tangentes, e as duas retas são tangentes a todos os círculos. Sabendo que a área do disco menor é  $6 \text{ m}^2$  e a do maior é  $24 \text{ m}^2$ , conclui-se que a área do outro disco é



- (A)  $8 \text{ m}^2$ .
- (B)  $10 \text{ m}^2$ .
- (C)  $11 \text{ m}^2$ .
- (D)  $12 \text{ m}^2$ .
- (E)  $15 \text{ m}^2$ .

Figura 21: Questão 3. Fonte: Vestibular UFRGS 2004.

Solução:

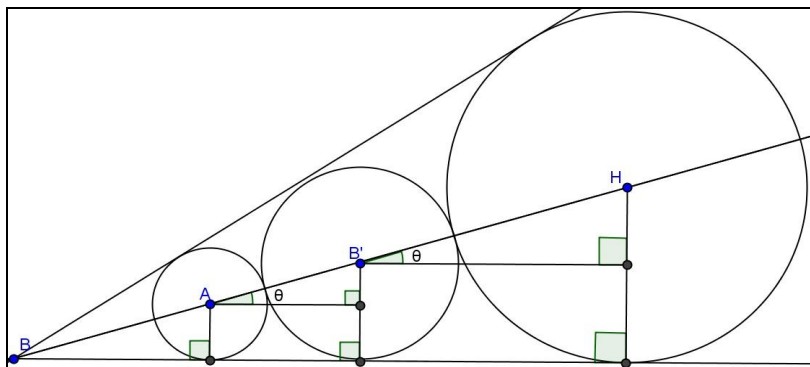


Figura 22: Ilustração para solução da questão 3.

A figura mostra as duas retas e os três círculos em questão, cujos raios medem  $R_1, R_2, R_3$ , com  $R_1 < R_2 < R_3$ , e a reta que contém os centros dos três círculos. Observe que os triângulos sombreados são semelhantes por termos os três pares de ângulos, respectivamente, congruentes (iguais), pois ambos possuem ângulos retos, os

ângulos  $\alpha$  por serem correspondentes (duas retas paralelas interceptadas por uma transversal) e, por Tales (a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ ), o par de ângulos que resta é formado por ângulos congruentes. Assim, aplicando a proporcionalidade entre os lados homólogos de triângulos semelhantes, temos

$$\frac{R_3 - R_2}{R_2 + R_3} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \text{ ou } (R_3 - R_2) \cdot (R_1 + R_2) = (R_2 + R_3) \cdot (R_2 - R_1) \text{ ou}$$

$$R_1 R_3 + R_2 R_3 - R_1 R_2 - R_2^2 = R_2^2 - R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3 \text{ ou, eliminando os}$$

$$\text{termos comuns aos dois membros, } R_1 R_3 + R_1 R_3 = R_2^2 + R_2^2 \text{ ou } 2 \cdot R_1 R_3 = 2 \cdot R_2^2$$

ou  $R_1 R_3 = R_2^2$  ou  $R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_2$  ou  $\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_2}{R_1}$ . Agora, tendo em vista que a área de qualquer círculo é dada por  $\pi \cdot (\text{raio})^2$ , e que a área do círculo menor é 6 ou  $\pi \cdot R_2^2 = 6$ , que a área do círculo maior é 24 ou  $\pi \cdot R_3^2 = 24$  e elevando ao quadrado

ambos os lados da igualdade da última relação entre os raios, vem  $\frac{R_3^2}{R_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$  ou,

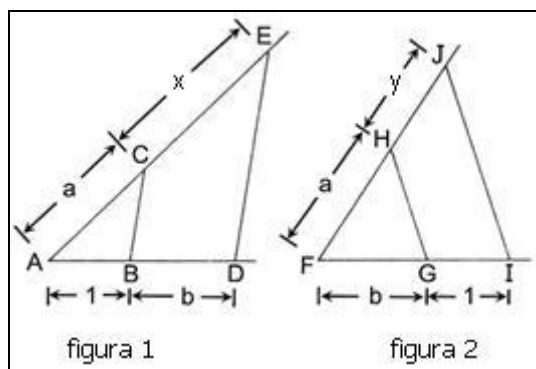
multiplicando e dividindo numerador e denominador de ambas as frações por  $\pi$ , temos

$$\frac{\pi R_3^2}{\pi R_2^2} = \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2} \text{ a área } \frac{24}{\pi R_2^2} = \frac{\pi R_2^2}{6} \text{ ou}$$

$$(\pi R_2^2)^2 = 24 \cdot 6 = 144 \text{ ou } \pi R_2^2 = 12 \text{ . Logo, a área do outro disco é } 12 \text{ m}^2.$$

Gabarito: D

4 - (UFRGS - 2004) Na figura 1,  $\overline{BC}$  é paralelo a  $\overline{DE}$  e, na figura 2,  $\overline{GH}$  é paralelo a  $\overline{IJ}$ .



Então, x e y valem, respectivamente,

(A)  $ab$  e  $\frac{a}{b}$ .



- (B)  $ab$  e  $\frac{b}{a}$ .
- (C)  $\frac{a}{b}$  e  $ab$ .
- (D)  $\frac{b}{a}$  e  $ab$ .
- (E)  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{1}{b}$ .

Figura 23: Questão 4. Fonte: Vestibular UFRGS 2004.

Solução:

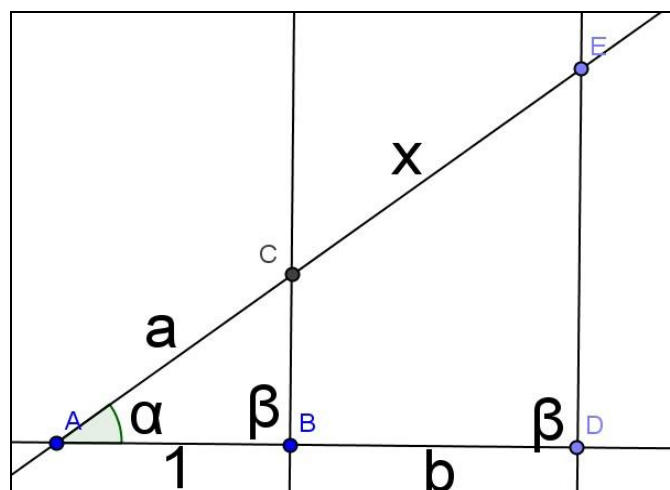


Figura 24: Ilustração para solução da questão 3.

Os triângulos em questão, nas duas figuras, são semelhantes. Na figura 1, os triângulos ABC e ADE são semelhantes por terem os três pares de ângulos, respectivamente, congruentes (iguais), a saber:  $\alpha$  é ângulo comum aos dois triângulos, os ângulos  $\beta$  por serem ângulos correspondentes (duas retas paralelas interceptadas por uma transversal) e, por Thales (a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre  $180^\circ$ ), o par de ângulos que resta é formado por ângulos congruentes. De forma análoga mostra-se que os triângulos FGH e FIJ, na figura 2, são semelhantes. Logo, aplicando a proporcionalidade entre os lados homólogos de triângulos semelhantes, vem:

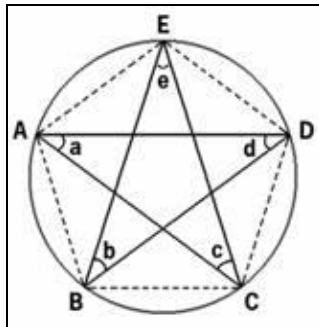
Figura 1:  $\frac{a}{1} = \frac{a+x}{1+b}$  ou  $a(1+b) = a+x$  ou  $a+ab = a+x$  ou  $x = ab$ .

Figura 2:  $\frac{a}{b} = \frac{a+y}{b+1}$  ou  $b(a+y) = a(b+1)$  ou  $ab+a = ab+by$  ou  $by = a$  ou

$$y = \frac{a}{b}$$

Gabarito: A

5 - (UFRGS - 2005) Na figura abaixo, o pentágono ABCDE, inscrito no círculo, é regular.



A soma das medidas dos ângulos **a**, **b**, **c**, **d** e **e**, indicados na figura, é

- (A) 150°.
- (B) 180°.
- (C) 270°.
- (D) 360°.
- (E) 450°.

Figura 25: Questão 5. Fonte: Vestibular UFRGS 2005.

Solução:

Cada um dos cinco ângulos  $a, b, c, d, e$  é subtendido, respectivamente, por um arco,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{DE}$ ,  $\widehat{EA}$ ,  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{BC}$ , sendo que esses cinco arcos juntos formam uma circunferência. Como todos esses ângulos ( $a, b, c, d, e$ ) são inscritos, a medida de cada um deles é igual a metade da medida do arco que o subtende e, conseqüentemente, a soma das medidas de todos eles é igual a metade da medida da circunferência, ou seja,

$$\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Gabarito: B

Observação: Denomina-se ângulo inscrito a todo ângulo que tem o vértice na circunferência, sendo seus lados secantes a ela. Na figura abaixo,  $\widehat{CAD}$  é um ângulo inscrito, assim sendo temos que 
$$e = \frac{med(\widehat{CD})}{2}$$

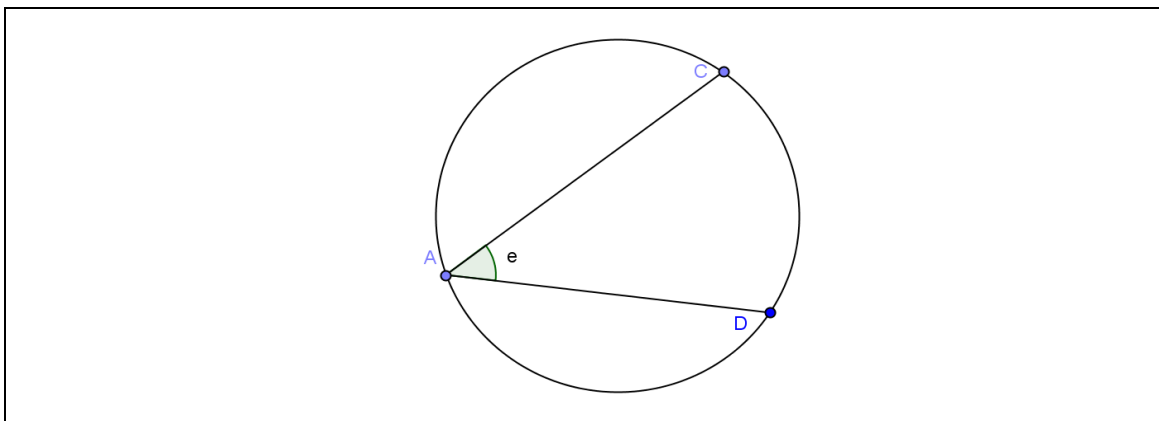


Figura 26: Ilustração para solução da questão 5.

Para essa atividade, considero importante, mas não essencial, que os alunos tenham um bom conhecimento sobre as definições de ângulos, triângulos e de retas paralelas e retas transversais.

Após as atividades previstas, e descritas acima, foi entregue aos alunos uma lista de exercícios e uma lista com um resumo do conteúdo contextualizado e formalizado, ou seja, colocando a maneira como Thales abordou o assunto e depois formalizamos o conteúdo através da definição axiomática, para que os alunos possam continuar a desenvolver o assunto sozinho, através da consulta de outros materiais bibliográficos.

Com o trabalho desenvolvido, pretendo que os alunos adquiram habilidades não apenas na resolução de exercícios, mas também, que saibam determinar as condições necessárias para poder usar as semelhanças entre triângulos em qualquer contexto.

Ao finalizar o trabalho, pedi aos alunos que fizessem um resumo do que é para eles a definição do Teorema de Thales, como pode ser usado e se já haviam visto na escola e, se for o caso, de que maneira foi visto.

## 4.2 Relatório da Prática de Ensino

A prática foi desenvolvida no Instituto Estadual Professora Gema Angelina Belia, com uma turma do segundo ano do Ensino Médio, no dia 20/11/2009 (sexta-feira), no turno da noite às 21h:30min às 22h:15min (tendo então, um período de 45 minutos de duração). A prática contou com a presença de dois alunos, regularmente matriculados na escola.

Os desenvolvimentos das ações não ocorreram exatamente como esperados, alguns contratemplos mudaram um pouco o planejamento e a execução final. Ao chegar à escola me deparei com uma situação que não havia previsto. Havia deixado reservado na escola a sala com os aparelhos de multimídia, o qual não foi possível ser usado, pois fui informado pela direção da escola que um equipamento havia sido furtado da mesma, ficando assim inviabilizada qualquer atividade. Outro contratempo que surgiu foi a ausência e o atraso da maioria dos alunos, passou mais de dez minutos do início da aula para que os primeiros alunos chegassem à sala. Com a chegada dos alunos começamos a discutir como faríamos para calcular a altura da parede da sala de aula da escola, o que seria preciso para isso, se seria possível fazê-lo sem usar uma escada ou algo de gênero.

A maior dificuldade que tive com os alunos, foi ter que contar com a falta de recursos, havia planejado apresentar os slides com imagens, nas quais, os alunos poderiam ver detalhes importantes para a resolução dos problemas, considerar relações fundamentais dos trabalhos de Thales no cálculo das medidas das pirâmides. Ao invés disso, tiveram que usar muito de sua imaginação, para não somente interpretar as situações apresentadas, mas também, os meus desenhos no quadro (que poderiam ser melhores, se não fossem pelo desconforto causado pelas circunstâncias inesperadas). Ao falar das pirâmides, relatei para os alunos como Thales de Mileto havia pensado e resolvido esse problema.

Após a exibição das imagens, desenhada no quadro, deveria ter formalizado o Teorema de Thales e passado exercícios. Porém, não foi possível, pois terminou a aula, faltando dar continuidade ao programado.

Uma das hipóteses usadas na prática está relacionada ao uso da História da Matemática para introduzir um contexto, no qual o aluno se sinta envolvido pela situação apresentada. Na prática, pude observar que de fato isso ocorreu, percebia certo alvoroço dos alunos quando eu havia falava de alguns feitos de Thales, como no caso em que Thales usou seu conhecimento de Astronomia e Matemática para prever

condições do clima. Percebi também, que os alunos arriscavam palpites sobre a altura do prédio da escola, faziam desenhos no caderno com projeções das sombras, o assunto parecia ter mexido com eles. No entanto, pela situação descrita acima não pude fazer com os alunos os cálculos que nos levassem a conhecer a altura da parede da sala, e no final da aula passei um questionário que os alunos deveriam responder e me entregar para avaliar os resultados da prática, só que, não conseguiram terminar ou responderam pela metade e depois se deu por encerrada a atividade.

## **CAPÍTULO 5: Considerações Finais**

### **5.1 - Avaliação Discente da Prática Pedagógica**

A seguir, a avaliação dos dois alunos que se fizeram presentes na prática da pesquisa:

**Avaliação discente sobre a prática de pesquisa:**

O que você achou sobre o conteúdo apresentado?

LEGAL.

Você já conhecia o Teorema de Thales?

NÃO.

Como você define o Teorema de Thales após a aula?

RETAS PARALELAS DO SOL GERAM TRIÂNGULOS SEMELHANTES  
E NÃO IGUAIS.

A associação do conteúdo com a história da matemática lhe ajudou a compreender melhor o conteúdo?

Sim.

Faça um comentário sobre a aula, e depois de uma nota de 0 à 10 pela mesma:

Nota 10.

**Avaliação discente sobre a prática de pesquisa:**

O que você achou sobre o conteúdo apresentado?

Interessante, o cara descobriu como calcular a altura da pirâmide sem usar uma escada.

Você já conhecia o Teorema de Thales?

Não.

Como você define o Teorema de Thales após a aula?

Proporção entre medidas de triângulos semelhantes.

A associação do conteúdo com a história da matemática lhe ajudou a compreender melhor o conteúdo?

Sim, o Tales é o cara!

Faça um comentário sobre a aula, e depois de uma nota de 0 à 10 pela mesma:

Nota 10. só faltou ver se funcionava mesmo com o prédio da direção



## 5.2 - Ponderações Finais

A pesquisa foi feita com alunos do Ensino Médio, como previsto inicialmente. Com esses alunos foi trabalhado além do Teorema de Thales e a semelhança entre triângulos, questões de trigonometria no triângulo retângulo e as relações de seno e cosseno. Os alunos trouxeram questões que faziam parte de sua avaliação trimestral, na semana seguinte.

Como já havia previsto, um dos grandes problemas decorrentes do ensino do Teorema de Thales deve-se ao fato de que os alunos não identificam as situações que possam fazer uso do Teorema, ou seja, associam o conteúdo unicamente ao uso de retas transversais e paralelas, sem relacionar os fatos ao uso de figuras semelhantes. Ao utilizar a história da Matemática como instrumento didático, permeando todo o trabalho, de tal forma que possibilite aos alunos perceber a matemática como uma construção histórica em constante evolução, reconhecendo a sua contribuição na interpretação e explicação dos fenômenos das ciências, relacionando com diferentes manifestações artísticas ao longo da história e na sua própria realidade, o aluno poderia perceber a matemática como uma ferramenta que pode auxiliá-lo em sua realidade.

As situações problemas que apresentam sequências e regularidades possibilitam a identificação de padrões que permitem, a partir delas, estabeleçam-se relações que, levem à generalização de expressões analíticas que representam equações, leis de funções e fórmulas de cálculos que modelam os fenômenos naturais e sociais. A relação apresentada pela geometria com a álgebra sistematiza-se na geometria analítica, representada a partir de um contexto histórico.

A Física e a Matemática assumem papéis complementares passando a ser um instrumento de conceituação dos conteúdos científicos, emprestando-lhes mais consistência, atuando mais do que como um simples modelo (cinemático ou axiomático). A interdisciplinaridade, então, se mostra um caminho importante na construção de um conhecimento que enfatiza a cooperação entre as áreas das ciências e que auxilia na compreensão das múltiplas interseções entre os saberes, muitas vezes, aparentemente distintos, contribuindo para a formação de um sujeito mais autônomo e crítico, na medida em que uma visão global do conhecimento o situa melhor dentro do universo escolar. Essa integração é vantajosa sim, pois proporciona um ganho pedagógico a partir do momento que um conceito empresta mais significação para o

outro e que amplia o universo de aplicação de ambos os conteúdos no contexto interdisciplinar vivenciado pelo aluno.

Ao concluir o Ensino Médio, etapa final da educação básica, é esperado que o aluno tenha construído conhecimentos que lhe permitam ler e interpretar a realidade, desenvolvendo habilidades e competências para atuar na sociedade e na sua vida profissional, estando ainda, apto para continuar seus estudos, como podemos ver no trecho retirado dos PCNs (2006), “o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade dos estudos, mas também a preparação para o trabalho e o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.”. No entanto, com a prática que fiz constatei que os alunos estão longe disso (pelo menos na escola que estive), são educandos que têm muitas dificuldades em interpretar o que lêem, todos os alunos apresentaram sérios problemas com fundamentos de matemática, como no caso que tiveram que trabalhar com frações, relações de proporções e suas representações, também me pareceram assuntos novos para alunos do segundo ano do Ensino Médio. Ao falar de representações, não posso deixar de registrar que nenhum aluno soube me explicar o que seria um número irracional. Aliás, me pareceu que eles não sabiam distinguir os conjuntos numéricos.

Dentro de minha visão de ensino, entendo que o contrato didático deve ser estabelecido de forma a permitir que os alunos avancem no projeto de ensino de forma autônoma, que possam caminhar com seus próprios pés, que possam construir o conhecimento num processo dinâmico e interativo como os colegas e com o professor. O professor deve, manter uma postura que transforme o processo de aprendizagem em algo cômodo para os educandos, que facilite ao máximo a transmissão do conhecimento, explicando tudo com detalhamentos.

Enfim, pude observar que a escola pública está longe da realidade sugerida pelos PCNs, como já esperava. Percebi também, um sério problema quanto ao senso lógico apresentado pelos alunos ao fazerem as tarefas que eu pedia. Fato que decorre-se, ao meu ver, aos objetivos que são traçados pela escola, uma grande quantidade de conteúdos que muitas vezes são abordados de maneira imediatista, no qual, o contato que o aluno tem com o conhecimento se faz de maneira rápida e ineficiente, algo que exige do professor que ensine uma quantidade imensa de conteúdos num curto espaço de tempo, fazendo com que as aulas se tornem uma exposição rápida de conteúdos e não

permitindo que os alunos exercitem seu pensamento. Como podemos esperar por um aluno com autonomia intelectual num contexto desses?

## CAPÍTULO 6: Referências

- BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática Atual 8ª série*. São Paulo. Editora Atual. 1994.
- Bosquilha, Alessandra. Pelegrini, Márcio. 2003. *Minimanual Compacto de Física - Teoria e Prática*. São Paulo. Editora Rideel.
- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. 2006. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Matemática*. Brasília: MEC
- Brousseau, Guy. *Fondements ET Méthodes de La Didactique des Mathématiques*. França: Recherches en Didactiques des Mathématiques, vol 7, nº 2 pp. 33-115. 1986.
- Chevallard, Y. *Sur l'analyse didactique: deux études sur les notions de contract et de situation*. Publication de l'IREM d' Aix Marseille, 14. 1988.
- Dante, Luiz Roberto. *Matemática contexto e aplicações*. São Paulo: Editora Atica, 2008.
- Dulce, Osvaldo. Pompeo, Jose Nicolau. 1985. *Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Plana, v. 9*. 6ª edição. São Paulo: Atual
- Duval, Raymond. 1995. *Sémiosis ET Pensée Humaine: Registres sémiotiques ET apprentissages intellectuels*. Paris: Peter Lang S. A.
- Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 1995.
- Haruna, Nancy Cury Andraus. *Teorema de Thales: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. 2000. 294f. Dissertação (Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000. Disponível em <[http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/nancy\\_cury\\_haruna.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/nancy_cury_haruna.pdf)> . Acesso em 18 de Setembro de 2009

<<http://www.brasilecola.com/matematica/teorema-tales.htm>>. Acesso em 04 de Outubro de 2009

Iezzi, Gelson; Dolce; Osvaldo; PÉRIGO, Roberto. *Matemática: Volume Único*. Local: São Paulo Ed. Atual S/A. 1999.

Imenes e Lelis. *Matemática – 8º*. São Paulo: Editora Scipione. 1999.

Jacubo, José Jakubovic; Lellis, Marcelo. *Matemática na medida certa*. 2º Ed. São Paulo: Ed. Scipione, 1991.

Plane, Henry. 1995. *Le théorème de Thalès: Une investion Française du XX siècle*. França: IREM de Dijon. Bulletin IREM, Commission Premier Cycle.

Serres, Michel. *As origens da Geometria*. Tradução: Ana Simões e Maria da Graça Pinhão. Portugal. Editora Terramar. 1997.

Wagner, Eduardo. *Semelhança: pizzas e chopes*. – Revista do Professor de Matemática 25. São Paulo: IME/ USP. 1994.