

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

**BERNARDA SOUZA DE MENEZES**

**A EXPERIÊNCIA DO PROBLEMA E A  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

PORTO ALEGRE  
2011

**BERNARDA SOUZA DE MENEZES**

**A EXPERIÊNCIA DO PROBLEMA E A  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

PORTO ALEGRE

2011

**BERNARDA SOUZA DE MENEZES**

**A EXPERIÊNCIA DO PROBLEMA E A  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de curso de Graduação  
apresentado ao Departamento de Matemática  
Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como requisito parcial para a obtenção de grau  
de Licenciada em Matemática.

Aprovada em .....

Banca Examinadora:

.....  
Prof.ª. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana – Orientadora  
Instituto de Matemática da UFRGS

.....  
Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald  
Faculdade de Educação da UFRGS

.....  
Prof. Dr. Luiz Davi Mazzei  
Colégio de Aplicação da UFRGS

## RESUMO

Este trabalho trata de uma análise sobre um ambiente de aprendizagem adequado para o ensino de Matemática. A intenção é que este propicie ao aluno a possibilidade de enunciar seu próprio problema, experimentando-o. Desta forma, o estudante poderá aprender, como observa Gallo (2008) em *O problema e a experiência do pensamento: implicações para o ensino da filosofia*. Para definir um ambiente, que possibilite tais ações, explico e uso o processo de Modelagem Matemática, caracterizado por Skovsmose (2000) e Barbosa (2001). Através deste processo, é possível que o estudante passe pela experiência do problema, por ele enunciado, rumo ao aprender.

Palavras-chave: Experiência do Problema. Modelagem Matemática. Aprender. Ambiente de Aprendizagem.

## **ABSTRACT**

This work consists of an analysis of an appropriate learning environment for teaching mathematics. The intention is that this gives the student the opportunity to state his own problem, experiencing it. Thus, students can learn, as noted by Gallo (2008) in *The problem of thought and experience: implications for the teaching of philosophy*. To set an environment that allows such actions, I explain and use the process of Mathematical Modelling, as characterized by Skovsmose (2000) and Barbosa (2001). Through Modelling it is possible that the student through the experience of the problem, stated by him, towards learning.

Keywords: Experience of The Problem. Mathematical Modelling. To Learn. Learning Environment.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - O terreno da corrida de cavalos (SKOVSMOSE, 2000, p. 10) .....	25
Figura 2 - Quatro Bolinhas Multiplicadas por Três.....	34
Figura 3 - Introdução do PIC <i>Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)</i> (CIVIERO, 2009, p. 76).....	44
Figura 4 - Materiais e Processo Utilizado do PIC <i>Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)</i> (CIVIERO, 2009, p. 79 e 80) .....	47
Figura 5 - Leiras com os cinco tipos de resíduos do PIC <i>Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)</i> (CIVIERO, 2009, p. 80).....	48
Figura 6 - Leiras identificadas com os cinco tipos de resíduos do PIC <i>Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)</i> (CIVIERO, 2009, p. 81).....	48
Figura 7 - Leiras com diversos resíduos para formação de compostagem, com altura inicial de 30cm, da EAFRS de novembro de 2006 à fevereiro de 2007. PIC <i>Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)</i> (CIVIERO, 2009, p. 81 e 82) .....	49
Figura 8 - Análise do Comportamento das Leiras do PIC <i>Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)</i> (CIVIERO, 2009, p. 83).....	50
Figura 9 - Evolução para a altura das leiras para formação de compostagem, no período de 09/11/2006 a 24/02/2007, no setor de gestão ambiental da EAFRS. PIC <i>Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)</i> (CIVIERO, 2009, p. 85).....	52
Figura 10 - Questionário aplicado aos alunos da segunda série do Ensino Médio de uma Escola Pública de Porto Alegre em 2010. ....	58

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - O aluno e o professor nos casos de Modelagem (BARBOSA, 2001, p. 9).....	21
Tabela 2 – Ambientes de Aprendizagem (SKOVSMOSE, 2000, p. 8).....	23
Tabela 3 - Tabuada .....	32
Tabela 4 - Tabela de Multiplicação .....	33

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>8</b>
<b>2 TRAZENDO SENTIDO À MATEMÁTICA .....</b>	<b>9</b>
<b>3 E FALANDO EM MODELAGEM MATEMÁTICA .....</b>	<b>19</b>
<b>4 EM BUSCA DE SUBSÍDIOS .....</b>	<b>36</b>
<b>5 UM AMBIENTE ADEQUADO PARA APRENDER .....</b>	<b>54</b>
5.1 SOBRE O AMBIENTE DE APRENDIZAGEM.....	54
5.2 SOBRE O ESTÁGIO .....	57
5.3 COMO CONSTRUIR UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM .....	60
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>65</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo verificar um ambiente de aprendizagem escolar no qual exista a possibilidade do estudante enunciar seu próprio problema e assim passar pela experiência do mesmo, em busca do aprender. Através do cenário investigativo gerado pelo processo de Modelagem Matemática, por meio de indagações e investigações, pode ser construído um ambiente em que as chances do aluno passar por sua própria experiência do problema são maiores.

Interessei-me por este assunto a partir da cadeira de Estágio em Educação Matemática (Estágio III), deste curso de licenciatura, ao perceber a dificuldade de meus alunos em lidar com a matemática abstrata. Procurando mostrar-lhes uma matemática aplicada, trabalhei com uma semi-realidade, ainda que sobre o *paradigma do exercício*, salientado por Skovsmose (2000). Observando, então, a necessidade dos estudantes abordarem assuntos de seu cotidiano e descobrirem a função da Matemática vista na escola aplicada a fatos do dia-a-dia, tento evidenciar um ambiente que facilite este aprendizado.

No capítulo 2, discuto a forma abstrata como a Matemática é abordada nas escolas e o quanto isto dificulta o aprendizado dos alunos. Também defino neste capítulo minha visão do que seria o *aprender*, baseada em conceitos de Gallo (2008), Bondía (2002) e Kohan (2007).

No capítulo 3, abordo os diferentes ambientes de aprendizagem apresentados por Skovsmose (2000) e os três casos de Modelagem Matemática salientados por Barbosa (2001). Desta forma, considero o processo de Modelagem segundo os autores acima referidos.

O capítulo 4 apresenta dois casos de Modelagem Matemática, citados por Barbosa (2001): o Caso 3, no Projeto de Iniciação Científica, do atual Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – Campos Rio do Sul; e o Caso 1, na pesquisa de Civiero (2009). Ambos os casos foram analisados através de dados coletados no trabalho de Civiero (2009).

Já no capítulo 5, proponho a análise de um ambiente de aprendizagem adequado ao ensino de Matemática, baseando-me no que foi discutido nos capítulos anteriores e no questionário que apliquei às minhas duas turmas de Estágio III.

Finalmente, no capítulo 6, apresento as considerações finais sobre a construção de um ambiente de aprendizagem que propicie ao aluno a experiência de seu próprio problema.

## 2 TRAZENDO SENTIDO À MATEMÁTICA

A partir de minha iniciação na escola tive uma afinidade maior com assuntos vinculados à matemática, assim decidi seguir meus estudos nessa área. Desde a época em que eu estudava no Ensino Fundamental e Médio, até quando dava aulas particulares, e em meus estágios, ouvia de meus colegas e agora ouço de meus alunos as mesmas questões: “Para que serve isso na minha vida? Onde vou usar isso?”, referindo-se a maior parte dos conteúdos matemáticos. Anos se passaram e sempre me questionava sobre o porquê de tanta aversão à matemática. Será que isso acontece também nas outras disciplinas?

Como é observado em Salles (2010): “A física estuda o mundo natural; a biologia, os organismos vivos. São ciências cujo objeto está ao alcance da compreensão do leigo.”. E a matemática? Na maioria das vezes ela é abordada de forma abstrata, dificultando sua compreensão pelos alunos; afinal não há sentido, não existe um porquê de suas resoluções, pelo menos na mente de muitos alunos que estão sendo iniciados nessa ciência.

Muito bem, o que poderia ser feito sobre esta dificuldade? Poderiam ser introduzidos exercícios de aplicação sobre o conteúdo estudado, o que já é uma prática de muitos professores, ou seja, trabalhar com exercícios que envolvam problemas do dia-a-dia dos estudantes ou de situações comuns de um grupo de pessoas. Um exemplo seria o estudo de sistemas lineares. Os alunos sempre se perguntam: O que significam as variáveis, os coeficientes e os termos independentes de uma equação? E no sistema, o que representam? Que sentido tem achar o valor de “ $x$ ” e “ $y$ ” no sistema, por exemplo?

Trabalhando com exercícios de aplicação, talvez os alunos encontrem mais sentido para as resoluções das questões e para o que realmente se passa com os componentes de um sistema. Nesta perspectiva, destaco duas formas para a abordagem de um assunto: uma opção é partir dos exercícios do cotidiano para generalizar as situações, formalizando, assim, o conteúdo em si; a outra maneira consiste em primeiro, apresentar ao aluno as fórmulas e maneiras de resolução e, depois, aplicar ambas aos exercícios próximos de nossa realidade.

Visto isso, surgem questões: Alunos que têm contato com problemas de aplicação e a partir deles analisam as características do novo conteúdo proposto têm maiores chances de terem contato com *sua própria* experiência do problema do que alunos que primeiro têm contato com as fórmulas e as formas de resolução da questão? Em alguma das duas situações existe a possibilidade do aluno verdadeiramente aprender o que lhe está sendo apresentado?

Afinal, aprender, ter contato com o novo, não significa pensar o que alguém já pensou e saber fazer o que está sendo exposto.

Compreender é diferente de aprender. Aprender se dá através da experiência do problema, referida acima, gerando um pensar, enquanto a compreensão pode surgir através da reconhecimento, como explica Gallo (2008). Neste caso, o professor passa para o aluno um conhecimento a ser entendido e o estudante, por sua vez, pensa o já pensado, compreendendo o que foi exposto. Então, não existe um *falso aprendizado* e sim uma compreensão. Ou aprende-se ou não.

Entra aqui também a definição de *compreender*, palavra tão criticada por Rancière (2005) e que faz parte do processo de embrutecimento do pensar: “Explicar alguma coisa a alguém é, antes de mais nada, demonstrar-lhe que não pode compreendê-la por si só” (p. 23). Ou seja, existe aí uma forma de reconhecimento, em que o mestre deve ensinar ao seu aluno o já pensado por alguém e, conseqüentemente, também já pensado pelo próprio professor. Por que o estudante não pode compreender sozinho o que alguém definiu?

Observa-se aqui a diferença entre aprender e compreender. Nós aprendemos o novo e compreendemos o que por alguém já foi pensado. Mas, no processo de compreensão, se ao invés de impormos ao aluno o que já está dito, deixarmos que ele pense e chegue a uma conclusão, mesmo que essa seja igual ou similar a alguma solução já elaborada antes, ele não estará aprendendo? Para o aluno, o elaborado poderá ser o novo.

O que importa é a forma como se obteve o conhecimento. Professores devem se preocupar com o aprendizado dos alunos e não se eles apenas estão compreendendo o ensinado. Preocupar-se com o aprendizado não significa refletir sobre uma melhor maneira de ensinar. Significa propiciar ao aluno o ato de pensar, deixando o mesmo chegar às suas próprias conclusões. O estudante deve ter espaço para pensar em uma possível solução aos problemas do conteúdo estudado. Desenvolvendo esse raciocínio, se o assunto for de interesse do aluno, se algo o instigar, ele poderá, através do problema primário que lhe foi exposto, construir um problema seu e, dessa forma, poderá passar por sua própria experiência do problema, mesmo que este esteja dentro de um conteúdo pré-determinado pelo professor. Claro, desta forma talvez o aluno não elabore um problema aleatório, poderá ser dentro de um conteúdo pré-determinado e instigado por um assunto que lhe interessou, em busca de um aprendizado sobre o conteúdo. Como o aluno estará no caminho desse aprendizado, o interessante não é induzi-lo a tomar esse problema para si, e sim deixar que ele obtenha interesse pelo mesmo, já que visa aprender. Passando por essa experiência poderá ocorrer o aprendizado e não apenas a compreensão de determinado assunto por parte do aluno. O

professor não ensinará algo pronto ao estudante, deixará que o mesmo chegue às suas conclusões. Para Deleuze (GALLO, 2008), a experiência do problema deve ser sensível, ou seja, necessita envolver algo que a própria pessoa perceba e por ela seja sentido; não algo aplicado a ela ou percebido através de experiências de outras pessoas. De outra forma, essa pessoa não estará pensando, mas buscando compreender o já pensado.

Nas escolas de hoje é difícil encontrarmos processos semelhantes a esse. Quase todo o ensino atual funciona pelo modo da reconhecimento. Porém, se os alunos fossem introduzidos nessa forma de ensino desde pequenos, talvez se tornasse comum a construção de raciocínio necessária em matérias mais avançadas. Busco, neste texto, um ambiente que aproxime cada vez mais os estudantes de sua própria experiência do problema, ou seja, do seu aprendizado. Mas, será que isso é possível se o professor pré-determina um conteúdo? Possivelmente, pois existe a chance dos alunos raciocinarem sobre um assunto previamente exposto; um problema, uma questão dada pelo professor. Sendo interessante para eles, desta situação inicial podem surgir seus próprios problemas, pelos estudantes elaborados quando inseridos em tal assunto, em busca da construção de conceitos. Ou seja, se o ambiente está inserido em uma determinada situação, não significa que o aluno não poderá enunciar seus próprios problemas. O assunto pode ser de seu interesse. O que cabe ao professor é tornar interessante o assunto aos mesmos. Na Matemática, por exemplo, trazer conteúdos com exercícios próximos à realidade pode motivar os estudantes. A matéria não fica tão abstrata como já é vista.

Exemplificando a situação acima, imagine um professor que exponha o seguinte problema para seus alunos: “Em uma pastelaria, dois pastéis mais três caldos de cana custam R\$5,40. Cinco pastéis mais dois caldos custam R\$9,10. Qual o preço de quatro pastéis e quatro caldos?” Suponha que estes estudantes não tiveram contato previamente com maneiras de resolução de sistemas lineares e que não lhes tenha sido exposto o que é um sistema ou como se monta um. O aluno terá que resolver esta questão, mas como? Aí começam a surgir seus possíveis problemas, que ele mesmo irá enunciar, por exemplo: “A quantidade de pastéis e caldos de cana primeiramente é uma, depois varia, assim como o valor total. Como represento isto?” Este pode ser o problema enunciado pelo aluno dentro de um problema primário exposto pelo professor. O estudante estará em busca da construção de conceitos, enunciando este problema e, com esta construção e tendo enunciado seu problema, ele poderá passar por sua experiência do problema.

Não podemos esquecer que, como observou Gallo (2008): “Mais importante do que resolver um problema, do que decalcar a solução sobre o problema, é vivê-lo, é experimentá-

lo sensivelmente, já que as soluções são engendradas pelo próprio problema, no próprio problema” (p. 122). Por isso não devemos enunciar problemas visando que nosso aluno os resolva. Não é essa a intenção. O interessante, para ocorrer o aprendizado, é o aluno passar pela experiência do problema e não apenas resolvê-lo. Para que isso ocorra, ele tem que enunciar um problema que seja interessante para si e, assim, construir conceitos, gerando o aprendizado. O que podemos é criar um ambiente no qual o aluno possa se instigar e gerar seu próprio problema. Esta situação não é certa, talvez não aconteça o que desejamos: o interesse do aluno. Tudo depende do aluno ter sua necessidade para enunciar seu problema, ocorrendo assim a construção de conceitos, como se verifica no trecho a seguir:

É simples: a filosofia também é uma disciplina criadora, tão inventiva como qualquer outra disciplina, e ela consiste em criar ou bem inventar conceitos. E os conceitos não existem desde já feitos, numa espécie de céu em que eles esperassem que um filósofo os agarrasse. É necessário fabricar os conceitos. Certamente não se fabrica assim, do nada. Não se diz um dia, “bem, vou inventar tal conceito”, como um pintor não diz, um dia, “bem vou fazer um quadro assim”, ou um cineasta “bem, vou fazer tal filme”! É necessário que se tenha uma necessidade, em filosofia ou nos outros casos, senão não haverá nada. Um criador não é um padre que trabalha por prazer. Um criador não faz nada além do que aquilo que absolutamente necessita. Resta que esta necessidade – que é uma coisa bastante complexa, se ela existe – faz com que um filósofo (aqui, pelo menos eu sei do que ele se ocupa) se proponha a inventar, a criar os conceitos e não se ocupar de refletir, ainda que seja sobre o cinema. (DELEUZE apud GALLO, 2008, p. 125)

Desta forma, para chegar perto de um modelo de ambiente escolar, no qual exista a possibilidade do estudante enunciar seu próprio problema e, assim, experimentá-lo, se deve pensar em algo que gere uma necessidade ao aluno, podendo ocorrer a construção de conceitos gerados pela experiência do problema, ou seja, por esta necessidade que lhe tocou. Afinal esta necessidade pode contribuir na geração do problema; talvez, desta forma, criem-se conceitos.

Devemos tomar cuidado na construção deste ambiente desejado para uma sala de aula. Segundo Gallo(2008): “Enunciar linguisticamente um problema significa transformá-lo em palavra de ordem, retirar dele seu caráter problemático” (p. 122). Será que um ambiente aberto seria mais adequado para desenvolver o pensar do aluno? Como construir isto em sala de aula?

Em meu estágio, lecionei para duas turmas do segundo ano do Ensino Médio. Comecei em ambas com o conteúdo de Sistemas Lineares. Parti direto da construção de formas de resolução dos mesmos, juntamente com os alunos. No final dessa matéria, pensei em trabalhar com exercícios de aplicação e observar como eles os resolveriam. Porém,

considerarei que, como já lhes havia ensinado as formas de resolução dos sistemas, a dificuldade de cada exercício estaria na montagem de seu correspondente sistema. Isso poderia ser uma possibilidade mas, mesmo sem possíveis dificuldades, aqueles exercícios seriam interessantes aos alunos?

Sendo-lhe expostos exercícios do dia-a-dia, o aluno poderia constatar um problema que o indagasse e o fizesse procurar a resolução do mesmo, uma nova forma de resolução. Ou seja, mesmo já tendo acesso às formas e fórmulas de resolução, seria possível o aluno interessar-se sobre o problema dado pelo professor, tornando o problema também seu e, assim, passar pela experiência do mesmo, através do raciocínio nele desenvolvido? Poderia ser algo que ele ainda não tivesse percebido e que, ao ter contato com o exercício, lhe tivesse chamado a atenção. Desse modo, surgiria um novo raciocínio do aluno, experiência pela qual ele não teria passado ainda, levando-o, desta vez, ao aprendizado.

Em princípio, quando houvesse a compreensão das formas e fórmulas de resolução do conteúdo, expostas pelo professor, não haveria aprendizado. No entanto, eventualmente, isso poderia ocorrer. Talvez o aluno aprenda, se algo o instigar nas questões do dia-a-dia, posteriormente expostas. Raciocinando sobre as mesmas, o estudante poderá tornar o problema interessante para si, visando aprender e, assim, poderá passar pela experiência do mesmo.

No estágio, apresentei aos alunos os exercícios de aplicação depois de já construídas com os mesmos as formas de resolução de sistemas. Então, pensei que eles se limitariam a construir os sistemas e resolvê-los como havíamos estudado em aula. Fiquei surpresa ao ver que enquanto os alunos estudavam o que significavam os coeficientes, as variáveis e os termos independentes, eles buscaram novas formas de resolução e seus próprios caminhos; por substituições chegavam ao resultado. Como argumentou Gallo (2008): “A cada experimentação singular do problema, novas soluções podem ser engendradas”. O problema do aluno pode já ter sido o problema de alguém, porém a experimentação e a construção conceitual ou técnica são suas.

Perguntei para um aluno o que entendia após encontrar os valores das variáveis de um sistema linear, ou seja, resolvê-lo. Ele me respondeu: “significa achar os valores das variáveis que servem ao mesmo tempo para todas as equações do sistema”. Isto foi interessante, afinal, quando apenas resolvíamos sistemas, sem uma história para ilustrar o conteúdo, quando chegávamos ao conjunto solução os alunos não entendiam o que significavam os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc, mesmo eu lhes ensinando a fazer a prova, ou seja, substituir os valores encontrados e verificar que valem para todas as equações do sistema. Ao aproximá-lo do mundo real, sem

que os guiasse, aparentemente, eles aprenderam. Isto mostra que mesmo que as fórmulas e maneiras de resolver uma matéria sejam expostas previamente, aprender é possível.

Se antes de se compreender as formas de resolução de sistemas, os exercícios de aplicação forem expostos aos alunos, a possibilidade do aprendizado será maior do que da forma inversa. Deixar os estudantes pensar sobre os exercícios, em busca de suas resoluções, quando não possuírem previamente uma maneira de resolvê-los já compreendida por eles, é uma forma de fazer com que eles passem por sua própria experiência do problema. Eles precisarão raciocinar para chegar à resposta e pode ser que nesse raciocínio surja o interesse sobre o problema, a necessidade. Devido a esta necessidade sobre um assunto exposto no problema dado, os alunos poderão enunciar, mesmo que implicitamente, seus próprios problemas e passar pela experiência dos mesmos. Assim, poderá surgir a construção conceitual pela necessidade dos estudantes, explica Deleuze (GALLO, 2008) e estes chegarão ao aprendizado, podendo resolvê-los sem que o caminho tenha sido guiado pelo professor.

Em um trecho de “O que pode um professor?”, Walter Kohan (2007) discorre sobre o pensar, o que nos esclarece a visão de que formular próprios problemas leva ao aprender: “O pensar tem mais a ver com o sentido do que com a verdade. Ele não busca resolver problemas, mas criá-los, já que os problemas abrem horizontes de sentido, inauguram perspectivas impensadas e levam à criação de conceitos” (p. 55). Mas raciocinar sobre o problema que lhe é dado, tomando o problema como seu, poderá levar ao aprender. Afinal, se o problema for de interesse da pessoa que o toma, esta raciocinará em cima deste, poderá enunciar próprios problemas deste assunto e, possivelmente, alcançará um aprendizado sobre o mesmo. Ou seja, se é apresentado um problema a alguém que o aceite como seu, por interesse, ao raciocinar, pensar, levantar questões sobre o mesmo, esse alguém poderá passar por uma experiência de problema e, dessa forma, aprender sobre o assunto envolvido.

Então, uma possibilidade é o problema ser dado pelo professor, em princípio. Mas, a partir dele, o aluno poderia perceber este interessante para si e construir questões sobre o mesmo, o que talvez o conduza passar por experiências de problemas, construindo assim novos conceitos, pelo menos para ele, e assim aprendendo. Esta é uma maneira pela qual o estudante pode aprender e não apenas compreender na escola. O tema não poderá ser tão aberto, pois precisamos que os alunos aprendam determinados conteúdos na escola, pelo menos enquanto a visão de que precisamos de um cronograma e de um guia para o aprendizado esteja presente em nossa sociedade. Talvez não estejamos prontos para esta *anarquia* cultural. Enfim, é interessante destacar que o professor, ao expor um problema,

visando a tentativa de resolução por parte de seus alunos, deixe os mesmos construírem um raciocínio sobre o conteúdo em foco, sem os induzir a formas de resolução.

É possível um professor *impulsionar* um aluno para que este possa passar por sua própria experiência de problema? Talvez, mas como fazer isso sem induzir ao mesmo tempo? Como citado acima, em meu estágio, ao apresentar aos alunos os exercícios do dia-a-dia sobre sistemas, não lhes dei possíveis respostas, não os conduzi por um caminho de solução. Apesar de previamente ter ensinado maneiras de resolução, não obriguei os estudantes a seguirem meu modelo. Para os alunos de hoje seguir o professor transformou-se em uma exigência discente para um não pensar. Quando se tenta deixar o aluno raciocinar, eis que um deles diz, do fundo da sala: “Ai, professor, dá logo a fórmula!” Mesmo assim, tentei fazer com que eles percebessem que não precisavam disso.

Ao longo das aulas e no início do estudo de sistemas lineares, a partir dos exercícios, destaquei que existem diversas possibilidades de se resolver um sistema. O que me impressionou é que a maioria dos alunos não se deteve em apenas montar o sistema e aplicar as formas de resolução. Não, eles se interessaram e se envolveram na busca de novas formas para a solução, formas que antes não haviam sido trabalhadas. É possível que algo tenha tocado os alunos. Dentro do tema estabelecido e através do raciocínio utilizado para o mesmo, talvez tenha surgido um interesse do aluno, pelo qual ele foi em busca da resolução do problema. E será que houve alguma necessidade por parte do aluno para ter ocorrido a busca por novas formas de resolução? Ele enunciou seu próprio problema? Isto é algo difícil de perceber, mas até pode acontecer.

Para um estudante obter uma experiência do problema, deve haver um problema que funcione como motor para a experiência do pensamento. (GALLO, 2008). O problema é que faz o sujeito pensar. Mas não é um problema induzido por alguém, como na maioria das vezes os mestres fazem com os alunos. Pois se o problema é induzido, enunciado como uma ordem, algo coordenado, novamente recaímos na recongnição. Então, como em uma sala de aula devemos trabalhar determinados assuntos, visando ajudar o estudante a buscar seu próprio problema?

Uma possibilidade consiste em construir um *cenário de investigação*, ou seja, um ambiente no qual os alunos são convidados a formular questões e procurar explicações (SKOVSMOSE, 2000). Sendo convidados, se for interessante a eles, os estudantes elaborarão seus próprios problemas e, em busca de explicações para os mesmos, poderão elaborar conceitos. E aí pode surgir o “viver seu próprio problema e experimentá-lo”. O convite é feito pelo professor e é a forma com que esse convite é introduzido, que pode ser interpretada como

um comando. O melhor é deixar esse convite o mais aberto possível, desde que não fuja do que se quer estudar. Agora, para o convite ser aceito é necessário que seja interessante ao aluno, que algo o instigue naquele momento. Algo que depende do estudante, pois não pode ser forçado, e um pouco do mestre, com sua arte de cativar.

Aqui está outra função do mestre a ser discutida com Rancière (2005): o interesse também do professor por impulsionar seu aluno ao aprendizado, à sua própria experiência do problema, sem induzi-lo. Trata-se de uma arte. Intuir, sentir, perceber até que ponto avançar na explicação ou, talvez, quando colocar uma palavra que funcione como um incentivo para o aluno prosseguir no seu estudo. Algo que abra o pensamento do estudante e o provoque ao raciocínio.

Se o convite for aceito pelo aluno, o cenário de investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem, no qual o aluno assume os processos de exploração e explicação, como justificativas para suas afirmações e elaborações. Dessa forma, podemos impulsionar nossos alunos aos seus próprios problemas, sem induzi-los, podendo estes aprender e não apenas compreender algo já pensado. Mesmo que alguém já tenha pensado em determinado assunto, que exista a possibilidade do aluno raciocinar; para ele será novo, construirá conceitos e assim aprenderá.

Assim, a partir da exposição de exercícios de aplicação aos alunos, de variados conteúdos, com assuntos do dia-a-dia, qual das duas seguintes formas oferecerá ao aluno uma possibilidade de passar por sua própria experiência do problema, em busca do aprender: tendo contato com os exercícios do dia-a-dia e posteriormente generalizando a forma de resolução para todo um conteúdo, ou resolvendo os exemplos do cotidiano mediante o conhecimento de fórmulas e maneiras de resolução previamente expostas? Sendo expostas previamente as formas de resolução do conteúdo é mais difícil que o professor consiga impulsionar os alunos ao aprender. Desse modo, talvez, apenas se o aluno, por algum motivo imprevisível, imperceptível desenvolvesse um raciocínio sobre a resolução da questão dada pelo professor e assim pudesse passar por sua experiência do problema. Já do outro modo, é possível convidar o aluno ao estudo e este, aceitando o convite, de acordo com Skovsmose (2000), pode criar um ambiente de aprendizado.

Eis o ponto a que chegamos: expondo a maneira de resolver determinado conteúdo previamente, dificulta mas não torna impossível que o aluno passe pela própria experiência do problema. Quando são apresentados exercícios do cotidiano aos estudantes e solicitadas sugestões de formas de solucionar os mesmos, é grande a possibilidade do aluno envolver-se no problema, tomá-lo como seu e passar pela experiência do mesmo. Nesta segunda hipótese

é que entram os cenários de investigação de Skovsmose (2000). Será feito um convite ao aluno e esse decidirá se o aceita ou não. No caso do conteúdo em pauta, sistemas lineares, ele será convidado a questionar e buscar explicações para situações envolvendo variáveis em função de duas ou mais equações, também interpretadas por ele. O estudante iniciará o estudo sobre sistemas lineares sem saber que estudará o mesmo. Assim, o aluno que aceitou o convite, porque algo o interessou, desenvolverá um raciocínio sobre as questões expostas pelo professor e, quem sabe, daí enuncie seus próprios problemas, passando pela experiência dos mesmos, construindo, assim, conceitos, ou seja, talvez surja um ambiente de aprendizagem.

Uma idéia um tanto quanto utópica, observando o ensino nas escolas de hoje, em que o processo de reconhecimento é o mais utilizado. Porém, esta idéia pode ser proposta pela Modelagem Matemática, em Barbosa (2001): “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (p. 6). Tais ambientes não são simples de serem introduzidos nas escolas e em seus currículos. Mas, para um início, existe um caso de Modelagem que é bem propício e que se encaixa com o que se busca neste texto. O caso em que o professor expõe uma situação-problema ao aluno e este não precisa buscar dados fora da sala de aula para raciocinar sobre o problema e resolvê-lo. O estudo se dá a partir da situação e do problema oferecidos pelo professor. (BARBOSA, 2001, p. 8).

Desta forma, surge o cenário de investigação, através de situações do dia-a-dia, sem uma prévia explicação sobre a resolução do assunto, e da Modelagem Matemática. Os problemas aqui são expostos pelo professor em forma de convite ao estudo. Cabe aos alunos aceitarem esse convite, se for de seu interesse, se algo lhes chamar a atenção. Aceito o convite, o aluno cria um ambiente de aprendizagem, no qual o estudante raciocinará sobre a questão exposta e, assim, talvez surjam seus próprios problemas, em busca da construção de conceitos. Ele poderá passar por sua experiência do problema e aprender o conteúdo que lhe foi sugerido, através de suas próprias elaborações, devido a sua necessidade de elaborar conceitos, para desenvolver seu raciocínio sobre o que lhe interessa. É esta necessidade e seu interesse, que possibilitam a construção de conceitos. Se o estudante não tem necessidade de explorar um assunto, este não será interessante, assim, seus problemas não surgirão, ele não terá aceito o convite.

Vejo esse caso de Modelagem Matemática como a forma mais simples da busca pelo aprendizado do aluno, de maneira que este passe por sua própria experiência do problema através do raciocínio voltado ao tema previamente sugerido. Seria ainda algo distante da realidade de nossas escolas mas, de todas as formas, a mais próxima e possível. O importante

é impulsionar o aluno sem induzi-lo e tornar interessante aos estudantes, ou pelo menos tentar tornar, o conteúdo a ser trabalhado nas escolas. Ao aluno deve ser permitido o direito ao raciocínio, que o leve a pensar e formular questões próprias; quem sabe, ele mesmo as possa resolver.

### 3 E FALANDO EM MODELAGEM MATEMÁTICA

O ambiente de aprendizagem de Modelagem, baseado na indagação e investigação, se diferencia da forma que o ensino tradicional – visivelmente hegemônico nas escolas - busca estabelecer relações com outras áreas e o dia-dia. [...] (BARBOSA, 2001, p. 8)

Deve-se a utilização de Modelagem Matemática neste estudo ao ambiente necessário para sua aplicação. Abandonando a visão de sala de aula em que os alunos simplesmente resolvem exercícios seguindo o modelo do professor, apresento aqui os *Cenários de Investigação*, discutidos por Skovsmose (2000). Neles, os estudantes são convidados pelo mestre a indagar e investigar determinada situação, buscando perguntas, possibilidades, conceitos, soluções. A partir do momento em que aluno aceita o convite, surge um *ambiente de aprendizagem*:

Toda atividade escolar oferece condições sob as quais os alunos são convidados a atuar. Isso refere-se à noção de ambiente de aprendizagem apresentada por Skovsmose (2000). No caso de Modelagem, são colocadas algumas condições que propiciam determinadas ações e discussões singulares em relação a outros ambientes de aprendizagem.

A meu ver, o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo. (BARBOSA, 2004, p. 3)

Desta forma, a Modelagem Matemática possibilita ao aluno enunciar seu próprio problema e passar pela experiência do mesmo, iniciando assim o aprendizado sobre o assunto. Este novo ambiente proporciona ao estudante a chance de “viver o problema”, ou seja, ele mesmo formular as questões. Afinal, para Gallo (2008), é mais importante fazer parte deste processo do que chegar às soluções; estas últimas acontecem com a elaboração dos problemas, experimentando-os.

Devido ao pouco espaço para estender a discussão, posso resumir dizendo que Modelagem, para mim, é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade. (BARBOSA, 2004, p. 3)

Para Barbosa (2004b), a Modelagem acontece em situações referentes à realidade, ou seja, as questões a serem trabalhadas são reais, não fictícias. Segundo o autor, assim os dados são elaborados a partir da ou na realidade considerada e não existem perguntas que gerem mais incertezas aos alunos. Como a situação será real, se existir dúvida corre-se atrás da resposta. Agora, se fosse um dado inventado, como por exemplo, um quilograma de laranja custa R\$ 3,00, os alunos poderiam indagar se não poderiam negociar o preço do quilograma da fruta. Dessa forma surgiriam contradições, o que não acontece com fatos reais. Se quem for atrás dos fatos forem os estudantes, terão subsídios. E se for o professor a trazer a questão para classe, como estará lidando com a realidade, poderá trazer também materiais suficientes para o trabalho dos alunos sem deixar dúvidas.

Barbosa (2001) cita três casos de Modelagem Matemática, em que as situações-problemas são reais, em todos eles. A diferença entre os casos se deve ao local onde é feita a coleta de dados e à pessoa que faz tal coleta. No primeiro caso o professor leva todo o material necessário para a sala de aula, não é preciso que os estudantes colem dados, eles já lhes são fornecidos. A atividade consiste em perceber a relação entre os dados, em determinar quais são comparáveis, quais as variáveis envolvidas, etc.

Já no segundo caso, o professor trará um problema para os alunos, mas além do que os mesmos fizeram acima, antes de tudo, terão que coletar os dados para resolver o problema. Aqui também será necessária a análise de quais dados são relevantes para a resolução do problema.

A partir de temas não matemáticos, no terceiro caso descrito por Barbosa (2001), os alunos participam da construção do problema em si, da coleta de dados, analisando o que é de interesse ou não, e da resolução dos mesmos. Trata-se aqui de um trabalho de pesquisa.

Na tabela a seguir, como analisa Barbosa (2001), pode-se verificar como se dão as participações do professor e do aluno nos três casos de Modelagem citados acima.

Tabela 1 - O aluno e o professor nos casos de Modelagem (BARBOSA, 2001, p. 9)

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	Professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	Professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Apesar das situações terem origem em outros campos que não a matemática (Blum e Niss, 1991), os alunos são convidados a usarem idéias, conceitos, algoritmos da matemática para abordá-las. Além de aplicar conhecimentos já adquiridos, como tradicionalmente tem sido assinalado, há a possibilidade de os alunos adquirirem novos durante o próprio trabalho de Modelagem (Tarp, 2001). (BARBOSA, 2004, p. 3)

Na Modelagem Matemática, como citado acima, tenta-se aproximar os estudantes da vida real, do que realmente acontece, tentando fugir do que é evidenciado em Salles (2010), de uma matemática abstrata, afastada de outras áreas de conhecimento, mais palpáveis, ao alcance de conhecimentos de leigos. Vários itens da matemática são utilizados em diversas áreas do conhecimento, o que remete à idéia de que ela está em tudo, que por onde se olhar se vê matemática. Matemática se utiliza na construção de uma casa, nas compras no supermercado, na conta de luz, etc. Enfim, além das possibilidades de construções de saberes e de aprendizados que se vivenciam na Modelagem, o mais interessante é a forma com que esta se refere à Matemática, colocando-a como ciência que percorre várias áreas. Isto a aproxima dos alunos e abandonando seu status de ciência sem sentido, para muitos alunos. Velhas questões como: “Para que serve isto?” “Em que momento usarei isto em minha vida?”, são deixadas de lado. Tudo que tem um real sentido é mais aceito.

Temos pouco interesse em situações fictícias elaboradas artificialmente - chamadas por Skovsmose (2000) de *semi-realidade* - para atender aos propósitos do ensino de matemática. Isto não quer dizer que elas não possam envolver os alunos em ricas discussões; podem sim e devem integrar o currículo. Apenas, tal como as investigações de matemática pura, não se enquadram confortavelmente na perspectiva de Modelagem que sustentamos aqui. (BARBOSA, 2001, p. 7)

Para Barbosa (2001), a realidade está sempre envolvida na Modelagem Matemática, facilita o desenvolvimento da mesma. Envolve uma investigação matemática sobre um fato real de outra área de conhecimento. E mais:

A investigação é o caminho pelo qual a indagação se faz. É a busca, seleção, organização e manipulação de informações. É uma atividade que não conhece procedimentos *a priori*, podendo comportar a intuição e as estratégias informais. Pode-se dizer que Modelagem é uma investigação matemática, pois ela se dá por meio de conceitos, idéias e algoritmos desta disciplina. Porém, deve-se distinguir das investigações matemáticas que tratam de situações formuladas em termos da matemática pura, sem referência a outras áreas do conhecimento (Abrantes, Ponte, Fonseca et al., 1999). (BARBOSA, 2001, p. 7)

É importante destacar aqui que, por Barbosa (2001), devemos diferenciar atividades de Modelagem Matemática de investigações sobre matemática pura. Modelagem é vista como uma investigação, em outras áreas do conhecimento, através de conceitos, idéias e algoritmos matemáticos. Enquanto isto, situações da matemática pura não propiciam o mesmo processo; fatos não matemáticos não são relevantes, não existe um envolvimento entre fatos da realidade e a matemática.

Nos argumentos de Barbosa (2001), não fica claro como ocorre o processo no qual surge um cenário de investigação. Para tal esclarecimento, serão analisados os ambientes de aprendizagem, caracterizados por Skovsmose (2000).

As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente das baseadas em exercícios. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a ver com as “referências” que visam levar os estudantes a produzirem significados para conceitos e atividades matemáticas. (SKOVSMOSE, 2000, p. 7)

Estas *referências*, tratadas por Skovsmose (2000), destinam-se à matemática pura, à semi-realidade e à realidade. Ou seja, tanto uma aula baseada em exercícios quanto uma que retrate um cenário de investigação podem ter: referência à matemática pura em si; à semi-realidade, que nada mais é do que uma realidade inventada, ou à realidade de fato.

Diferentes tipos de referência são possíveis. Primeiro, questões e atividades matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semi-realidade; não se trata de uma realidade que “de fato” observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de Matemática. Finalmente, alunos e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situações da vida real. (SKOVSMOSE, 2000, p. 7)

Combinando-se estas duas práticas de sala de aula, cenários de investigação e exercícios, com as três diferentes referências, nas quais podem se basear as aulas de matemática, se consegue construir a seguinte tabela:

**Tabela 2 – Ambientes de Aprendizagem (SKOVSMOSE, 2000, p. 8)**

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referência à matemática pura	(1)	(2)
Referência à semi-realidade	(3)	(4)
Referência à realidade	(5)	(6)

Analisando a matriz acima, é possível observar os diferentes ambientes de aprendizagem gerados pelas combinações entre *práticas em sala de aula e referências*. Assim, percebendo-se com qual referência determinada prática de aula se associa, definem-se os ambientes.

Com isto, recusamos a idéia de associar Modelagem exclusivamente à modalidade de projetos. Outros tipos de atividades de Modelagem que demandam menos tempo e são mais simplificadas também podem ser consideradas. Cada configuração curricular de Modelagem é vista em termos de *casos*, referindo-se às diferentes possibilidades de organização curricular da Modelagem. (BARBOSA, 2001, p. 8)

No ambiente (1), ocorre a prática de exercícios baseados em matemática pura. Ou seja, matemática em si. Exemplos destes exercícios:

- $(5x + 13y) - (2x - 7y) =$
- $(225 \div 5) + 33 =$
- $(13 \times 12) - (7 \times 9) =$

O ambiente (2), como é observado na tabela acima, é o ambiente em que se estabelece um cenário de investigação em torno da matemática pura. Neste tipo de ambiente, por exemplo, quando o professor está demonstrando certa fórmula aos alunos, ele faz a seguinte pergunta: “Se multiplicarmos por tal constante a fórmula, o que acontece?” Aqui, os alunos são levados a pensar apenas sobre fatos matemáticos, sem envolvimento com outras áreas de conhecimentos. Os alunos constroem juntos os processos matemáticos e, assim, talvez entendam porque se procede de tal maneira, visando determinada resolução. O professor faz o convite aos alunos e, se aceito, eles participam da construção.

Já o tipo de ambiente de aprendizagem (3) envolve exercícios com referências à semi-realidade. A situação aqui é artificial. Skovsmose (2000) considera um mito a crença de que

um exercício deste padrão se refira a alguma realidade. Porém, na sua compreensão, há uma referência: a semi-realidade imaginada pelo autor de tal situação. Para Skovsmose (2000), a semi-realidade pode ser uma referência que oferece suporte para alguns alunos na resolução de exercícios. Um exemplo trabalhado neste tipo de ambiente é o seguinte:

- Em uma padaria X o quilograma do pão francês custa R\$ 5,00. Já em outra padaria B 1,300 kg do mesmo pão custam R\$ 7,50. Em qual padaria o quilograma do pão francês é mais barato?

Para resolver o exercício acima não é preciso fazer uma pesquisa sobre os preços do quilograma de pão francês em diferentes padarias. Os dados podem ser inventados dentro de uma semi-realidade próxima a fatos do dia-a-dia, por isso, muitas vezes, os exemplos parecem tão reais. Aliás, até pode acontecer uma situação idêntica à que ocorre no exercício, na vida real, mas por coincidência.

Trabalhar com os exercícios do ambiente (3), que se referem a uma semi-realidade, pode não ser tão simples se certas regras não forem previamente estabelecidas entre professores e alunos. Deve estar claro que nenhuma informação além das fornecidas no exercício são necessárias, ou seja, o que está sendo fornecido é o bastante para resolvê-lo. Aliás, isto é o propósito da apresentação do mesmo. O que aconteceu ou deixou de acontecer para que estes dados existissem não importa e não será discutido. O que se tem basta.

[...] A combinação da exatidão das medidas com o pressuposto de que a semi-realidade é completamente descrita pelas informações fornecidas torna possível sustentar o pressuposto de que há somente uma resposta correta. A metafísica da semi-realidade assegura que esse pressuposto pode ser mantido, não somente quando a referência é exclusivamente para números e figuras geométricas, mas também quando são “compras”, “maçãs”, “quilogramas”, “preços”, “distâncias” bem como outras entidades empíricas parecidas. Em particular, essa metafísica tem estruturado a comunicação entre professor e alunos. (SKOVSMOSE, 2000, p. 9)

Este “acordo” estabelecido entre professor e aluno, quando se trabalha com a semi-realidade, é fundamental ao desenrolar do estudo, para não se perder o foco. Se não é estabelecida tal conversa prévia, podem acontecer muitas discussões em torno da questão. Não que isto seja inválido. Envolver os estudantes na situação inicial é maravilhoso, porém depende do contexto no qual se encontra. Por exemplo, se a questão estudada é baseada na realidade, quanto mais investigações forem feitas sobre a mesma, maior será o envolvimento e, conseqüentemente, o aprendizado. Cada dúvida e busca, neste caso, talvez propicie um novo caminho rumo ao aprender; os alunos poderão experimentar e enunciar problemas sobre a situação apresentada. A realidade permite isto; se não se possui dados suficientes, busca-se,

estabelecendo-se novas teorias. E isto é diferente do que acontece ao se trabalhar com uma semi-realidade, na maioria das vezes: como levantar novas questões sobre um fato exposto se este for inventado? Aquilo não aconteceu realmente. Por isto investigações em torno do mesmo são inválidas e deve-se trabalhar somente com os dados que se tem.

Contudo, existe outra forma de estudar com fatos de uma semi-realidade. Neste ambiente, o (4), os alunos são convidados a investigar e, a partir de suas investigações, exporem suas explicações. Reproduzo aqui a situação que Skovsmose (2000) usa para exemplificar este tipo de ambiente de aprendizagem: uma “corrida de grandes cavalos”. No quadro-negro o professor desenha uma tabela com 11 colunas, numeradas a partir de 2, como segue: 2, 3, 4, ..., 12. Cada coluna representa uma pista a ser percorrida por cada cavalo. Começa o jogo: jogam-se dois dados e somam-se os números tirados. O valor da soma é marcado com um X na tabela, como mostra a Figura 1. O cavalo 6 é o vencedor, até então, pois a soma 6 aconteceu 3 vezes. Os cavalos 7 e 10 empatam em segundo lugar.

			X							
			X	X			X			
X	X		X	X	X	X	X		X	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2

**Figura 1 - O terreno da corrida de cavalos (SKOVSMOSE, 2000, p. 10)**

Ole Skovsmose sugeriu desenvolver esta atividade com crianças em torno de 11 anos. Porém, dependendo do que o professor planeja, ele pode conduzir esta atividade em torno do conteúdo que deseja. Como este ambiente é um cenário de investigação, o professor pode, em forma de convite, fazer perguntas propícias ao conteúdo a ser trabalhado. Por exemplo, ao trabalhar com combinatória, ele poderia perguntar: “qual ou quais cavalos tem mais chances de ganhar a corrida?” Neste caso, então, seria possível trabalhar inclusive com alunos de graduação.

A quantidade de rodadas em cada corrida pode ser previamente estabelecida em sala de aula. O interessante é o que acontece durante o jogo. A partir do momento em que os dados começam a ser jogados e as colunas vão sendo marcadas, surgem observações dos alunos, tais

como: “O cavalo dois é muito devagar, não irá ganhar!” “O número 12 também!” Neste momento, o professor pode perguntar por que os cavalos de números 2 e 12 possuem tal comportamento, se existe alguma semelhança, etc.

Depois de várias corridas, não há cheiro de cavalos na sala de aula. A grande corrida de cavalos está acontecendo numa semi-realidade, mas não no paradigma do exercício. E as muitas observações sobre as habilidades dos diferentes cavalos (o cavalo número 11 precisa de algumas pílulas de vitamina) não são percebidas como obstruções. A lógica estrita que governa a semi-realidade do ambiente de aprendizagem número (3) não está em operação. A atividade toda está localizada num cenário para investigação. Muitas descobertas estão esperando as crianças. Estratégias estão para ser produzidas e aperfeiçoadas. E, uma vez que essa atividade foi escolhida para ser descrita, o aluno certamente aceitou o convite para participar da grande corrida de cavalos. (SKOVSMOSE, 2000, p. 11)

Neste ambiente os alunos farão parte da construção de tal situação. Indagações aqui serão válidas e os porquês estarão ao alcance dos estudantes, pois eles farão parte desta semi-realidade. Muitas questões poderão ser levantadas, tais como: “por que só tem 11 cavalos participando da corrida?” “Por que não existe o cavalo de número 1?” “E se aumentassem o número de dados para 3, quantos cavalos poderíamos ter?” Com o passar do tempo, os alunos estabeleceriam relações sobre a corrida, geradas na resolução de dúvidas surgidas em seu decorrer. Tais dúvidas e relações levam ao aprendizado. Aqui se vive dentro do problema, passa-se pela experiência do mesmo.

Dentro deste ambiente de aprendizagem número quatro é possível perceber o que já fora mencionado antes: “experiência é algo que nos acontece” (p. 21), como ressaltou Bondía (2002). Aqui o aluno passa pela experiência da situação original levada à sala de aula. Se, nesta situação, o mesmo aceitar o convite para tal cenário de investigação, então se formará um ambiente de aprendizagem, no qual o estudante poderá construir seus próprios problemas dentro da questão inicial. Acontecendo isto, o aluno poderá passar por sua própria experiência do problema. Como para Gallo (2008), mais importante do que resolver um problema é vivê-lo, ou seja, é pensar no problema, enunciá-lo para si. A partir de uma situação introduzida por alguém, aceito o convite para estudá-la, tornar sua uma questão correspondente e por ela, para entendê-la, engendrar suas próprias questões. E, em busca de respostas destas últimas questões, enunciar mais e mais problemas e, assim, vivê-lo. Desta forma, vivendo o problema, adquire-se sua experiência do mesmo. O aprender pode acontecer vivendo-se tal experiência. Eis que, neste ambiente de aprendizagem, é possível os alunos viverem as experiências de seus problemas e, ainda, as compartilhem.

No ambiente (5) volta-se ao *paradigma do exercício*, referido por Skovsmose (2000), em que a única intenção é resolver o exercício, assim como nos ambientes (1) e (3). No tipo (5) verificamos exercícios baseados na vida real. Um exemplo seria estudar em sala de aula gráficos do analfabetismo. Neste caso, poderiam ser elaboradas questões sobre a classe social envolvida, os países, diferentes períodos, entre outras. No ambiente de tipo (5) os exercícios são baseados na vida real, as perguntas levantadas, nas quais as informações tenham que ser investigados fora, deverão constituir o motor para um bom rendimento em sala de aula. Ou seja, aqui não existe um acordo entre o professor e o aluno de que tudo está exposto no exercício e que isto basta à resolução do mesmo. Não. Aqui, o aluno deverá pensar em outras formas para resolver a questão, tendo que buscar informações e questioná-las se o professor permitir. Como se trata da realidade, os dados existem e são reais. Uma história construiu-se de tais fatos, então é possível buscá-los. O que não ocorria no ambiente (3), em que a realidade era inventada, então não se podia ter certeza do caminho tomado até ali. Será que tal situação fora construída de tal forma? Não se sabe, o exercício neste caso foi inventado. Mas, no ambiente (5) se tem esta possibilidade de argumentar e questionar, quando permitido pelo professor. Afinal, as situações são reais.

No tipo de ambiente de aprendizagem número (5), quando é permitido que os alunos argumentem e questionem os exercícios expostos, deixa-se surgir o ambiente (6). Se um convite para discutir um problema que envolva fatos reais, for aceito pelos estudantes, cria-se um novo cenário de investigação. No ambiente (5), *exercícios* baseados na realidade eram trabalhados com os alunos, apenas com o intuito de achar suas soluções. Contudo, se as questões estudadas nestes exercícios tornarem-se *problemas*, e os alunos fizessem indagações e investigações, surgirá o cenário de investigação do ambiente (6), explicado mais adiante.

No ambiente (5), como citado acima, trabalha-se com a realidade, porém não é possível os alunos participarem da situação envolvida. Se for analisado um gráfico dos níveis de desemprego, o processo já estará pronto para estudo, os estudantes não coletarão dados e por eles mesmos desenvolverão um sistema de análise. O gráfico já estará pronto para ser analisado. Enquanto isto, no tipo de ambiente de aprendizagem (4), apesar de trabalhar-se com uma semi-realidade, os alunos se envolvem na construção da situação, como foi visto no exemplo da *grande corrida de cavalos*, em que passo a passo todos contribuem com o processo. Ao longo da corrida, as análises são feitas a partir de cada informação nova e, assim, podem surgir os próprios problemas dos estudantes e seus conceitos sobre a situação ali montada.

Quando se une a realidade envolvida no ambiente (5) com a possibilidade de participar do processo de montagem da situação a ser estudada, se aceita o convite, como no caso do ambiente (4), obtêm-se um cenário de investigação com um grau maior de realidade: o ambiente de aprendizagem (6). Skovsmose (2000) exemplifica este cenário com trabalhos de projetos ilustrados em “Towards a philosophy of critical mathematics education”.

O projeto “Energia” concentrou-se sobre o *input-output* de energia. Como introdução, os estudantes calcularam a quantidade de energia em certos tipos de pequeno almoço (a energia foi medida em kJ). Então, usando fórmulas oriundas de pesquisas sobre desporto, foi calculada a quantidade de energia gasta durante uma determinada viagem de bicicleta. As fórmulas expressavam o uso da energia em função de parâmetros diferentes como velocidade, tipo de bicicleta e “área frontal” do ciclista. Como medir essa área? Os estudantes desenvolveram um método e concluíram seus cálculos. Dessa forma, eles foram introduzidos à idéia de fazer um modelo de *input-output* para energia. (SKOVSMOSE, 2000, p. 11-12)

Neste projeto, como explicou Skovsmose (2000), os alunos analisaram o *input-output* de energia, ou seja, estudaram a relação entre o que é consumido de energia e o que é gasto. Assim, é possível perceber o que existe de energia inicial e o que resta no final de um processo. Dependendo do caso, é mais vantajoso que a quantidade de energia restante seja maior; em outros casos, menor. No exemplo acima, é interessante que a energia restante seja a menor possível, pois assim existirá um equilíbrio entre a energia ingerida pela pessoa e a que ela gasta, com suas atividades. Quanto maior a energia final, mais esta se acumulará ao término de cada processo, e assim existirá um aumento de massa corporal. Hoje em dia, isto não é o procurado, pela maioria das pessoas, para uma vida saudável. A não ser que a pessoa precise aumentar sua massa corporal.

A partir deste foco inicial, este projeto tomou novo rumo: *input-output* na agricultura.

[...] Os estudantes investigaram uma fazenda relativamente próxima da escola. Primeiro, calculou-se a quantidade de energia em termos, por exemplo, da gasolina usada na preparação de um certo campo durante um ano. No celeiro, os alunos ouviram do agricultor explicações sobre os métodos de preparação do campo. Depois, eles mediram a largura dos diferentes instrumentos – o arado, a colheitadeira, etc. – e, com isso, estimaram quantos quilômetros o agricultor tem que dirigir o trator anualmente na preparação do campo. No campo pesquisado, a cevada estava crescendo e foi calculada a quantidade de energia que havia na cevada colhida. [...] (SKOVSMOSE, 2000, p. 12)

Já nesta análise, a quantidade de energia restante ao final do processo, a energia presente na cevada, era seis vezes maior do que a inicial, necessária para preparação do campo de plantio. Isto ocorre devido a um grande fornecedor de energia durante o crescimento da cevada: o Sol. Neste caso, é positivo o resultado de energia final maior do que

o inicialmente gasto. É gasta energia para plantar a cevada, mas a energia final da mesma chega a ser seis vezes maior.

Porém, o caminho da energia em torno da cevada não para por aí, segundo o autor. Existe ainda quem irá consumir esta cevada e suas calorias.

Nessa fazenda, a cevada era usada como alimento para os porcos e, assim, os alunos puderam montar um novo modelo *input-output*. Eles recolheram informações sobre a quantidade de porcos que estava comendo cevada em relação aos seus pesos e sobre o tempo necessário para serem levados para o matadouro. O fator foi calculado em torno de 0,2; somente um quinto de energia contida na comida fornecida aos porcos estava na carne. A produção de carne, portanto, parece ser uma atividade econômica ruim do ponto de vista da energia. (SKOVSMOSE, 2000, p. 12)

Desta vez, os fins da energia não foram lucrativos. A energia restante na carne dos porcos foi um quinto da ingerida pelos mesmos na cevada. Aqui a energia final foi menor do que a inicial e este resultado considera-se negativo, economicamente falando. Mas, se estivesse sendo estudado o caso de alimentação humana e o gasto da energia consumida em atividades, a energia restante negativa talvez não fosse um problema, se a intenção fosse perder massa corporal.

O resultado encontrado pelos alunos nesta fazenda da Dinamarca não se aplica somente ali. Os relatos são muito similares às estatísticas oficiais da agricultura dinamarquesa. Os estudos deste projeto mostram que a transformação da energia, obtida na cevada, em carne não é rentável. Os custos serão muito elevados. Este é o valor de um trabalho de projeto: que a pesquisa envolvida tenha valia para algum procedimento.

Neste projeto, o envolvimento dos alunos é total. O professor, neste caso, apenas serve como orientador. Os processos de elaboração da situação-problema, simplificação, coleta de dados e resolução tem participação integral dos alunos. Este seria um exemplo de Caso 3 de Modelagem Matemática, descrito por Barbosa (2001) e já referenciado neste trabalho. Neste ambiente de aprendizagem (6), os alunos, além de conceitos, produzem significados para as atividades. Afinal, os fatos são reais. Aceito o convite, neste cenário, o aluno pode *entrar* no assunto escolhido para debate, tomar tal questão inicial para si e enunciar seus próprios problemas. Enunciando-os, é possível que o estudante passe pela experiência dos mesmos, alcançando o aprendizado. Afinal, para aprender é preciso pensar e, como explicou Deleuze (GALLO, 2008), se a intenção é fugir de compreender o que por outro já foi pensado, deve-se perceber e sentir a situação; a experiência do problema parte do sensível, de um signo que nos violenta. As possibilidades que os estudantes têm neste ambiente de questionar e buscar

soluções, testando os conceitos, por eles descobertos, para ver se estão corretos, fogem do paradigma do exercício, no qual as chances são limitadas.

Mas, como avaliar os alunos através do ambiente de aprendizagem (6)? Skovsmose (2000) explica a forma de avaliação adotada na Dinamarca, onde este tipo de ambiente é comumente inserido em salas de aula.

Na Dinamarca, o currículo oficial não é um obstáculo para os alunos e os professores trabalhem no ambiente de aprendizagem (6). Não há exames após cada ano escolar para decidir se os alunos são aprovados ou não. Neste país a passagem de ano é automática. Somente após o 9º ano, os alunos fazem um exame nacional em matemática, em que todos passarão independente das notas que tirarem. Esse exame inclui uma abordagem de investigação, em sua parte escrita, que não pressupõe nenhum conhecimento memorizado e, em sua parte oral, concentra-se sobre grupos de alunos, fazendo investigações matemáticas. Apesar disso, o paradigma do exercício também tem um forte apoio neste canto do mundo. (SKOVSMOSE, 2000, p. 13)

Não se mudam repentinamente as formas de avaliação adotadas. Mas, aos poucos, é possível introduzir diferentes formas de trabalho em sala de aula. Nos ambientes em que o paradigma do exercício está presente, é mais difícil os alunos tomarem os problemas para si. Ou seja, é difícil de ser feito o convite e o estudante, por sua vez, aceitá-lo, para surgir o ambiente de aprendizagem. Afinal, como Skovsmose (2000) evidencia, a prática de exercícios busca, na maioria das vezes, somente a solução. Existe a possibilidade de um aluno enunciar seus problemas ao resolver exercícios, porém as chances são bem menores do que em cenários de investigação.

O que o professor deveria ensinar – porque ele próprio deveria sabê-lo – seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntar é que se deve sair em busca de respostas e não o contrário (FREIRE apud BARBOSA, 2001, p.6)

Deixar o aluno envolver-se, se questionar e testar suas próprias idéias: isto leva ao aprender. Nos tipos de ambiente de aprendizagem (2), (4) e (6) estas atitudes são mais propícias. Devido ao cenário de investigação, o desenvolvimento do pensar surge com maior possibilidade, os alunos são convidados a isto. Mas, qual destes ambientes se encaixa melhor na atual conjuntura da educação brasileira? Continuar com os exercícios seria o melhor a fazer? Não se arriscar em busca do aprender é válido? Ou, ser radical é o melhor caminho? Pode se proceder como no caso do ensino na Dinamarca, inclusive, se adotando todas as suas formas de avaliação. Embora, extremos geralmente não sejam ideais, importa que se tenha um ambiente de aprendizagem que propicie aos estudantes o ato de pensar.

[...] A linha vertical que separa o paradigma do exercício dos cenários para investigação é, por certo, um linha muito “espessa”, simbolizando um terreno imenso de possibilidades. Alguns exercícios podem provocar atividades de resolução de problemas, as quais poderiam transformar-se em genuínas investigações matemáticas. Propor problemas significa um passo adiante em direção aos cenários para investigação, embora atividades de formulação de problemas possam ser muito diferentes de um trabalho de projeto. Não há dúvida de que as linhas horizontais também são “fluidas”. [...] (SKOVSMOSE, 2000, p. 13)

Não existe um ambiente ideal. De acordo com o que irá ser estudado, cabe ao professor verificar qual tipo de ambiente é o mais adequado para introduzir determinado conteúdo. Este professor deve ter em mente que, o interessante, não é apenas pensar em uma maneira na qual a matéria fique bem apresentada. Mas, sim, em uma forma de exposição em que os alunos se interessem pelo assunto. Se for interessante para eles, seja em exercícios ou em problemas investigatórios, os estudantes participarão da aula e, para seu aprendizado, talvez enunciem seus próprios problemas e vivam a experiência dos mesmos, aprendendo, assim, o conteúdo.

Antigamente, e ainda em muitas aulas de hoje, a tabuada é exposta desta forma:

Tabela 3 - Tabuada

1 x 1 = 1	2 x 1 = 2	3 x 1 = 3	4 x 1 = 4	5 x 1 = 5
1 x 2 = 2	2 x 2 = 4	3 x 2 = 6	4 x 2 = 8	5 x 2 = 10
1 x 3 = 3	2 x 3 = 6	3 x 3 = 9	4 x 3 = 12	5 x 3 = 15
1 x 4 = 4	2 x 4 = 8	3 x 4 = 12	4 x 4 = 16	5 x 4 = 20
1 x 5 = 5	2 x 5 = 10	3 x 5 = 15	4 x 5 = 20	5 x 5 = 25
1 x 6 = 6	2 x 6 = 12	3 x 6 = 18	4 x 6 = 24	5 x 6 = 30
1 x 7 = 7	2 x 7 = 14	3 x 7 = 21	4 x 7 = 28	5 x 7 = 35
1 x 8 = 8	2 x 8 = 16	3 x 8 = 24	4 x 8 = 32	5 x 8 = 40
1 x 9 = 9	2 x 9 = 18	3 x 9 = 27	4 x 9 = 36	5 x 9 = 45
1 x 10 = 10	2 x 10 = 20	3 x 10 = 30	4 x 10 = 40	5 x 10 = 50
6 x 1 = 6	7 x 1 = 7	8 x 1 = 8	9 x 1 = 9	10 x 1 = 10
6 x 2 = 12	7 x 2 = 14	8 x 2 = 16	9 x 2 = 18	10 x 2 = 20
6 x 3 = 18	7 x 3 = 21	8 x 3 = 24	9 x 3 = 27	10 x 3 = 30
6 x 4 = 24	7 x 4 = 28	8 x 4 = 32	9 x 4 = 36	10 x 4 = 40
6 x 5 = 30	7 x 5 = 35	8 x 5 = 40	9 x 5 = 45	10 x 5 = 50
6 x 6 = 36	7 x 6 = 42	8 x 6 = 48	9 x 6 = 54	10 x 6 = 60
6 x 7 = 42	7 x 7 = 49	8 x 7 = 56	9 x 7 = 63	10 x 7 = 70
6 x 8 = 48	7 x 8 = 56	8 x 8 = 64	9 x 8 = 72	10 x 8 = 80
6 x 9 = 54	7 x 9 = 63	8 x 9 = 72	9 x 9 = 81	10 x 9 = 90
6 x 10 = 60	7 x 10 = 70	8 x 10 = 80	9 x 10 = 90	10 x 10 = 100

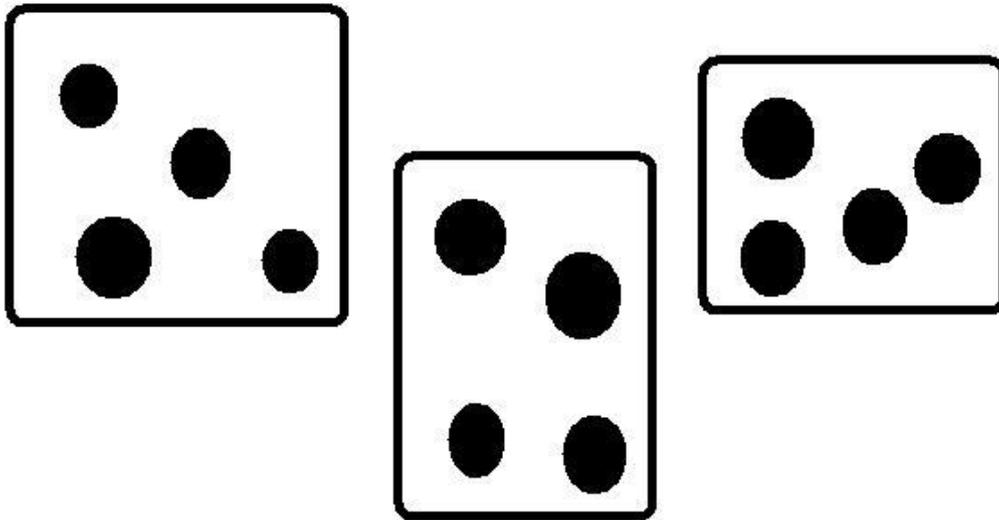
Pode ser exposta também desta maneira:

**Tabela 4 - Tabela de Multiplicação**

<b>X</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>2</b>	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
<b>3</b>	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
<b>4</b>	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
<b>5</b>	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
<b>6</b>	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
<b>7</b>	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
<b>8</b>	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
<b>9</b>	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
<b>10</b>	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

A Tabela 4 resume o que é apresentado na tabuada. Basta tomar o número desejado da primeira coluna e multiplicá-lo por outro da primeira linha. O resultado encontra-se na linha do primeiro número e na coluna do segundo. Ou seja, para saber quanto é sete multiplicado por três, olha-se na linha do 7 e na coluna do 3; o produto é 21.

Porém, tanto na Tabela 3 quanto na Tabela 4 os produtos são exibidos de tal forma que o estudante deve memorizá-los. Não existe um aprendizado, pois o porquê do resultado é ignorado. Por que o número três multiplicado por quatro resulta em 12? Aqui entra a forma como foi abordada esta multiplicação de números naturais até o dez. Se ao invés de exposta uma tabela para memorizar, fossem manipuladas três caixas com quatro bolinhas cada: quatro bolinhas de uma caixa mais quatro da outra, mais as outras quatro da próxima caixa, somadas, resultariam 12 bolinhas. Como podemos observar na figura a seguir:



**Figura 2 - Quatro Bolinhas Multiplicadas por Três**

Quando exposto desta forma ao aluno, é possível que ele raciocine sobre o que foi apresentado. Na verdade, o que significa multiplicar três por quatro? Com o exemplo das caixas, é possível perceber que, para obter o resultado, basta somar os conteúdos das caixas. É o mesmo que efetuar:  $4 + 4 + 4$ , que é igual a 12. Afinal, soma-se três vezes o que existe no interior das caixas; soma-se três vezes o número quatro. Assim, se o estudante perceber isto, ele não vai precisar memorizar a tabuada, os resultados das multiplicações virão naturalmente, com um pouco de raciocínio. Se apenas é exposta a tabuada, o aluno pode não ter esta percepção e, talvez, seja difícil entender que dois multiplicado por cinco nada mais é que cinco mais cinco. A maneira como se aborda um assunto pode diferenciar a assimilação do mesmo pelos alunos. Não se deve privar o estudante de pensar, estabelecer conexões, indagar, investigar. O importante é que não existe apenas uma forma de entender um conteúdo. Deve ser permitido que o aluno encontre sua própria maneira de aprender o estudado. O professor deve prestar atenção ao rumo que ele está seguindo e orientá-lo, se for necessário.

Às vezes, em discussões com professores, tem sido sugerido que, antes de os alunos se envolverem com investigação em algum ambiente, eles devem compreender algumas técnicas que podem, mais eficientemente, ser produzidas dentro do paradigma do exercício. A grande corrida de cavalo ilustra por que, em minha opinião, isso geralmente não é adequado. Suponhamos que as crianças, antes da corrida, tenham sido introduzidas a algumas noções de probabilidade através do diagrama canônico: o número tirado no dado vermelho é mostrado no eixo x; o número tirado no dado azul é mostrado no eixo y, e a soma... então, o jogo poderia

perder o fascínio. Portanto, uma rota oposta é relevante em muitos casos, isto é, a rota de (4) para (3). Uma vez que o jogo tenha sido experimentado e as crianças tenham ganho familiaridade com as características dos diferentes cavalos, obtendo confiança nas vantagens, então os alunos e o professor podem fazer observações específicas e encontrar explicações. E os exercícios podem ser usados como um meio para fixar algumas experiências. (SKOVSMOSE, 2000, p 16)

O que Skovsmose salienta no trecho acima impossibilita a chance do aluno investigar um novo conteúdo a ser explorado à sua maneira. Também, desta citação, posso debater a questão do início deste estudo. Ou seja, quando se apresenta uma das formas de desenvolvimento de um exercício ou se expõe um conteúdo, assim resolvendo as questões envolvidas, o aluno, na maioria das vezes, não sente a necessidade de explorar o exercício ou o problema, que já foi explicado. O que o motiva a pensar, aprender e indagar é, também, a curiosidade. Se já foi aprendido, seja resolvendo um exercício ou através de exemplos, a chance de buscar outro caminho, rumo ao aprendizado, é pouca.

Assim, a procura por um ambiente de aprendizado adequado pode não ser tão fácil. Observo que para um cenário de investigação ter sentido é preciso, preferentemente, que seu objeto de investigação, o conteúdo, não seja conhecido. No entanto, se o que está para ser descoberto já é entendido, o intuito do cenário proposto perde o valor. Como investigar o que já se sabe? A ordem na qual é exposto determinado conteúdo deve ser avaliada para que os objetivos não sejam desmerecidos.

## 4 EM BUSCA DE SUBSÍDIOS

Neste capítulo, irei analisar o Projeto de Iniciação Científica, do qual Civiero (2009) fez uso para seu trabalho, e o próprio estudo da autora quando leva este projeto para análise em sala de aula. Ela argumenta os dados de sua pesquisa, baseada na teoria de *Transposição Didática* de Chevallard (1991), que auxilia na adaptação e transformação dos conhecimentos produzidos nos projetos de Iniciação Científica para um saber desenvolvido em sala de aula. Civiero (2009) também se baseia no que é salientado por Skovsmose (2001), em *Educação Matemática Crítica*. Já neste estudo, farei as análises a partir do ponto de vista de Skovsmose, salientando seu *Cenários para Investigação*, em que o autor apresenta tipos possíveis de ambientes de aprendizagem, diferenciando entre o paradigma do exercício e o cenário de investigação. Considero o que é defendido por Barbosa (2004b). Utilizo argumentos de Gallo (2008) e Bondía (2002), que se referem à experiência do problema de cada aluno e o “viver a experiência”. Então, nesta parte de meu estudo, saliento minha visão sobre a pesquisa de Civiero (2009), baseada nos discursos dos autores referidos acima e que não foram adotados para a análise da autora em sua dissertação. Civiero (2009) aborda a sua pesquisa por um caminho diferente do que veremos neste capítulo, embora certas justificativas da mesma combinem com meus argumentos.

Muito se tem discutido sobre as razões para a inclusão de Modelagem no currículo (Bassanezi, 1994). Em geral, são apresentados cinco argumentos: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática. (BARBOSA, 2004, p. 2)

Como já observado nos ambientes de aprendizagem citados por Skovsmose (2000), os que constituem cenários de investigações são os dos tipos (2), (4) e (6). Porém, segundo Barbosa (2001), devemos diferenciar atividades de Modelagem Matemática de investigações sobre matemática pura. Esse autor considera Modelagem uma investigação, em outras áreas do conhecimento, por meio de conceitos, idéias e algoritmos matemáticos. Afinal, as investigações acerca da matemática pura não possuem envolvimento direto com outros setores de conhecimento. E isto é importantíssimo para a Modelagem: aproximar a matemática de outras áreas. E, deve-se salientar também, Modelagem Matemática trata apenas de questões que envolvem a realidade; uma situação real, na qual os alunos viverão o problema.

O Caso 1 de Modelagem, citado por Barbosa (2001), está mais próximo do tipo de ambiente de aprendizagem (5), abordado por Skovsmose (2000). Afinal, nas duas situações os estudantes envolvem-se com situações reais, em que os dados necessários para ser desenvolvido o assunto se encontram em sala de aula; não é necessário buscá-los fora do ambiente. A diferença é que no ambiente (5) a intenção é apenas resolver o problema, pois predomina o *paradigma do exercício*. Já no Caso 1 de Modelagem, a intenção é que seja constituído um cenário de investigação, em que o aluno proponha-se a indagar e investigar o problema exposto. Porém, apesar da semelhança das situações acima, é dentro do ambiente (6) que encaixamos os três casos de Modelagem evidenciados por Barbosa (2001). Por exemplo, o projeto *input-output* de energia, destacado por Skovsmose (2000), representa o ambiente (6), descrito pelo mesmo; é um cenário de investigação constituído sobre fatos reais. Possui também as características do Caso 3, salientadas por Barbosa (2001):

*Caso 3.* A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema. É via do trabalho de projetos. Devido à falta de espaço, limitamo-nos a remeter às experiências relatadas em Bassanezi (1990), Borba, Meneghetti e Hermini (1997), Biembengut (1990, 1999) e Franchi (1993). (BARBOSA, 2001, p. 9)

Analisando os possíveis tipos de ambiente de aprendizagem, destaca-se, como exemplo de Modelagem Matemática, o ambiente do tipo (6). O ambiente número (6) trabalha com a realidade em si, abrangendo outras áreas do conhecimento e desmitificando a antiga fala de muitos estudantes: “Para que serve matemática, nunca vou usar isto em minha vida.” Esta fala refere-se às fórmulas estudadas que, fora de um contexto, muitas vezes parecem não ter sentido. Quando não tratamos de uma matemática abstrata a curiosidade dos alunos aumenta, eles produzem sentido ao buscar conceitos e se questionar; querem participar da situação envolvida.

Barbosa (2001) considera que as atividades de Modelagem ocorrem apenas quando envolvidas em uma realidade; histórias fictícias não são consideradas de grande valor para o envolvimento do aluno. Já Skovsmose (2000) percebe que a *semi-realidade*, como ele intitulou a realidade inventada, pode ter grande valia para a construção dos cenários de investigação. Na verdade, o interessante é que se criem esses cenários e, assim, surjam os ambientes de aprendizagem. No ambiente (4), que esse autor descreve, surgem esses cenários em uma realidade inventada. Não se trata de um caso de Modelagem Matemática, pois os fatos não são reais, porém é composto um cenário de investigação.

Paula Andréa Grawieski Civiero (2009) descreve um exemplo do tipo de ambiente de aprendizagem (6), em sua dissertação “Transposição didática reflexiva: um olhar voltado para a prática pedagógica”. Ela traz para a sala de aula uma situação-problema de um projeto desenvolvido por alunos de Iniciação Científica. Este projeto, quando elaborado, exemplificava o ambiente (6) de Skovsmose (2000) e o Caso 3 de Modelagem de Barbosa (2001). Agora, para sua análise, o caso, no qual se enquadra a nova prática, irá mudar. Começarei explicando como se construiu tal projeto.

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – Campos Rio do Sul – tem como missão capacitar através da formação, qualificação e requalificação profissional, por meio de conteúdos programáticos planejados, estudantes, trabalhadores, produtores rurais e egressos, desenvolvendo ensino pesquisa e extensão com vistas ao exercício da cidadania e à integração de sua clientela à força de trabalho; e, produzir bens e serviços que promovam o seu desenvolvimento institucional e o da comunidade. (CIVIERO, 2009, p. 50)

O Instituto citado acima, onde se desenvolveu o projeto e a nova prática testada por Civiero (2009), antes de 2009, constituía a EAFRS – Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul. E foi nessa época que ocorreu o projeto e a maior parte do trabalho da autora. Como o espaço escolar da Escola Agrotécnica não teve grandes mudanças pedagógicas, ao tornar-se o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, as renovações não interferiram na pesquisa de Civiero (2009); ela manteve a descrição do espaço da escola em seu estudo.

Os cursos desenvolvidos pela instituição, até o momento do estudo que será analisado, eram: Técnico Agrícola com habilitação em Agropecuária concomitante com o Ensino Médio ou após a conclusão do mesmo; Técnico Agrícola com habilitação em Agroecologia concomitante com o Ensino Médio; Técnico Florestal e Técnico em informática, ambos após a conclusão do Ensino Médio; PROEJA (Programa de Integração da Educação Profissional ao Ensino Médio na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos) e Curso Superior de Tecnologia em Horticultura.

Desenvolvendo estes cursos profissionalizantes, o instituto caracteriza o principal laboratório de formação técnica da região. Oferece ainda cursos e treinamentos de pequena duração para agricultores. A instituição é considerada um centro de referência para as redes de ensino municipais e estaduais da região.

Ao final de cada ano, é feito um teste de seleção para quem busca estudar no estabelecimento. Este teste é composto por uma prova objetiva e uma entrevista, visando analisar o perfil do candidato.

O Curso Técnico Agrícola com habilitação em Agropecuária e o Curso Técnico Agrícola com habilitação em Agroecologia, quando ambos são concomitantes ao Ensino Médio, têm oito horas diárias de aula, divididas em dois turnos: matutino e vespertino. É necessária a realização do estágio de 240 horas. Após concluir o mesmo, o aluno deve produzir um relatório de sua prática para defendê-lo oralmente à banca examinadora e, assim, poder finalizar seu curso. Os cursos que são oferecidos após a conclusão do Ensino Médio têm duração de três semestres, mais o tempo de estágio.

Neste contexto, percebo que a escola tem papel fundamental, como palco dessas experiências e, penso que a experiência é em primeiro lugar um encontro ou uma relação com algo que se experimenta, que se prova. Assim, entendo ser necessário ampliar esse espaço oportunizando aos alunos e professores as diversas experiências que ali são vivenciadas, pois, o tempo escolar é único e é preciso ser sujeito da transformação da sua própria realidade. (CIVIERO, 2009, p. 52)

A autora evidencia o significado de experiência similar ao de Bondía (2002), quando se refere à experiência como algo que nos acontece. E este palco que será analisado, é propício para tal experimentação. Ou seja, os ambientes de aprendizagem que serão retratados aqui, ambos aconteceram nesta instituição onde o processo de ensino incentiva os alunos a experimentar. E experimentando determinadas situações, surge a oportunidade de questionar e argumentar. Desta forma, poderão enunciar seus próprios problemas e passar por uma nova experiência, a de seus problemas, como defende Gallo (2008).

O trabalho realizado por alunos anteriores aos que Civiero (2009) analisa, foi desenvolvido no PIC - Projeto de Iniciação Científica da instituição. Este projeto surgiu da necessidade de diversificar a matriz curricular da antiga EAFRS, por ocorrer trabalhos de iniciação científica extracurriculares, destinados às feiras de Matemática - FEIMAS. Desenvolveu-se, assim, um espaço em que os alunos pudessem estar em contato com este tipo de atividade. O principal objetivo deste projeto, era tornar interessante a iniciação dos alunos na pesquisa científica, aproximando-os de conhecimentos científicos e tecnológicos. Dessa forma, desenvolve-se a construção e a sistematização de conhecimentos pelos alunos.

[...] Criar uma harmonia entre o trabalho de projeto e as atividades da sala de aula tem sido o grande desafio para a educação matemática baseada em projetos (não importa se estamos tratando de projetos num curso universitário ou em escolas). (SKOVSMOSE, 2000, p. 16)

Este tipo de projeto incentiva a interação de diversas áreas do conhecimento. Ou seja, professores de distintas disciplinas unem-se para um bem comum: o aprendizado de seus

alunos. O interessante nestes PICs é a similaridade de seus objetivos com os da Modelagem Matemática: construir e sistematizar conhecimentos; analisar certos acontecimentos de uma área e explicar com demonstrações de outra; experimentar e, a partir de seus experimentos, definir conceitos.

O projeto é desenvolvido durante três semestres. No primeiro, é estimulado o senso crítico dos alunos. Eles são orientados a instigar, duvidar, questionar, criar contraposições. Acreditar em tudo que é exposto não faz parte de uma pesquisa, é preciso provas para se acreditar. E o principal: os estudantes desenvolvem sua curiosidade. O famoso “Por quê?” deve estar presente no vocabulário, sempre. E aqui, vemos mais uma proximidade do trabalho de pesquisa com a Modelagem Matemática.

Creio que as atividades de Modelagem podem contribuir para desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática. Discussões na sala de aula podem agendar questões como as seguintes: O que representam? Quais os pressupostos assumidos? Quem as realizou? A quem servem? Etc. Trata-se de uma dimensão devotada a discutir a natureza das aplicações, os critérios utilizados e o significado social, chamado por Skovsmose (1990) de conhecimento reflexivo. (BARBOSA, 2004b, p. 2)

Ainda neste semestre inicial, os alunos discutem sobre diferentes saberes e técnicas, sobre suas aplicações, estabelecem diferenças entre trabalho manual e trabalho intelectual, refletindo sobre as mesmas, e dialogam sobre sua consciência como seres humanos. O aluno aprende a viver com o meio onde se encontra e com a sociedade à qual pertence, observando criticamente o que acontece em sua volta. Neste ambiente, ele recebe educação para vida, importante para seu crescimento crítico e observador. A importância da pesquisa é salientada aos estudantes, percorrendo-se a trajetória entre o conhecimento popular e o científico.

Junto a todos os itens citados acima, os alunos tem acesso a noções básicas do processo científico. Através da leitura de textos distintos, eles são apresentados às estruturas científicas, interpretando-as. Os estudantes aprendem a analisar um texto criticamente, identificando as partes que o compõem.

Após esta introdução ao *mundo* científico exposta aos alunos, eles são instigados a produzir um trabalho de iniciação à pesquisa. Aprendem a fazer isto em grupo, uma modalidade de estudo potencialmente promissora. Os grupos são formados por três estudantes. Eles precisam conversar bastante entre si, apresentar idéias, discordar e, depois, buscar acordo para definir os objetivos de sua pesquisa e organizar-se como grupo. O próximo passo é escolher o assunto a ser abordado, dentro de alguma das linhas de pesquisa dos professores da escola. Assim, elege-se um professor orientador, da área técnica ou do Ensino

Médio. Este ajudará seus orientandos em tarefas, tais como: viabilização e construção do cronograma do projeto; indicação de bibliografias para argumentação teórica; observação das práticas, orientando na coleta de dados e na análise dos mesmos.

No segundo semestre, os estudantes são orientados a desenvolver a fundamentação teórica de seus projetos e a definir o que precisam para executar a prática. Seus professores orientadores lhes acompanham e, nas aulas semanais, os estudantes tem a companhia dos professores coordenadores. No decorrer do trabalho, mais noções que envolvem o processo científico são conhecidas. Como os alunos precisam de bibliografia para suas pesquisas, as aulas, frequentemente, acontecem na biblioteca ou na sala de informática.

E é no terceiro semestre, feita a coleta dos dados da pesquisa, que os estudantes colocam-se a analisá-los. Neste momento, em alguns grupos, acontece a Modelagem Matemática. Este processo é uma opção do grupo e Scheller (2009) explica como é desenvolvida a escolha do mesmo no Projeto de Iniciação Científica. Então, quando a Modelagem é a opção escolhida, com o auxílio dos professores de matemática, os alunos constroem representações, em termos matemáticos, da situação real vivenciada.

Ao final do terceiro semestre, os alunos devem entregar um relatório referente ao projeto. Uma prévia do mesmo é analisada pelos professores ao término do segundo semestre. Concluído o trabalho de iniciação à pesquisa, os estudantes são convidados a expô-lo na FETEC – Feira de Conhecimento Tecnológico e Científico. Nesta feira ocorre a visitação de instituições locais e regionais, socializando, assim, os trabalhos desenvolvidos. Existem, também, oportunidades de participar de outros eventos de socialização, tais como: Mostra do MERCOSUL de Produção Científica e Tecnológica, Mostra Nacional de Produção Científica e Tecnológica, Mostra da Região Sul de Produção Científica e Tecnológica, Feira Regional de Matemática, Feira Catarinense de Matemática, entre outros.

É a partir de alguns destes Projetos de Iniciação Científica que Civiero (2009) articula sua pesquisa. A autora seleciona projetos, desenvolvidos pela via da Modelagem Matemática, para serem explorados em suas aulas de Matemática. Ela traz, para sala de aula, situações-problema abordadas nos projetos escolhidos, com o intuito de construir um novo cenário de investigação, partindo da análise de seus alunos sobre as questões discutidas nos antigos trabalhos.

Os projetos inicialmente selecionados por Civiero (2009) para estudo no ambiente de aprendizagem construído por ela e seus alunos foram: Influência da linhagem do desempenho dos frangos de corte (2006/2007); Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007); Respostas do milho em sistema de plantio direto e convencional no município

de Agrolândia – SC, safra 2005-06 (2005/2006); e Aspectos econômicos da conservação de cebola roxa e crioula no Alto vale do Itajaí, safra 2004-05 (2004/2005). Todos estes projetos foram acompanhados por um professor orientador da área técnica e outro da Matemática.

Com os projetos a serem trabalhados em mãos, Paula partiu para o próximo passo: construir outro cenário de investigação. O primeiro cenário já havia se constituído, a partir do momento em que os estudantes do Projeto de Iniciação Científica aceitaram o convite, feito pelo professor, para indagar e investigar sobre as situações-problema que surgiram nos projetos. Exemplos deste processo podem ser vistos em Scheller (2009). Agora, a autora convida seus alunos, para que eles também possam viver a experiência de um problema, tomando-o para si e, assim, elaborando suas próprias questões sobre o mesmo. A intenção não é explicar aos estudantes o que aconteceu em tal estudo; é possibilitar, através de uma questão abordada anteriormente e de dados já levantados, que os alunos vivam tal situação e seus próprios problemas, indagando e investigando. Experimentar algo é o que faz adquirir conhecimento sobre o mesmo. Vivendo determinada situação, pode-se saber o que realmente ocorre; se for percebido.

Fazer uma experiência com algo significa que algo nos acontece, nos alcança; que se apodera de nós, que nos tomba e nos transforma. Quando falamos em “fazer” uma experiência, isso não significa precisamente que nós a façamos acontecer, “fazer” significa aqui: sofrer, padecer, tomar o que nos alcança receptivamente, aceitar, à medida que nos submetemos a algo. Fazer uma experiência quer dizer, portanto, deixar-nos abordar em nós próprios pelo que nos interpela, entrando e submetendo-nos a isso. Podemos ser assim transformados por tais experiências, de um dia para o outro ou no transcurso do tempo. (HEIDEGGER apud BONDÍA, 2002, p. 25)

Civiero (2009) desenvolve sua pesquisa no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – Campos Rio do Sul, palco dos Projetos de Iniciação Científica. A autora, também professora de Matemática, constrói um ambiente de aprendizagem tipo (6), citado por Skovsmose (2000) e já esclarecido neste estudo. Ela faz o convite a alunos de quatro turmas de 1ª série do Ensino Médio: três são do curso Técnico Agrícola com Habilitação em Agropecuária (Turmas A, B e C) e uma do curso Técnico Agrícola com Habilitação em Agroecologia (Turma E). Em sua dissertação, Paula analisa as experiências das turmas A e E. Ambas selecionaram para estudo o PIC “Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)”. As turmas selecionadas, cada uma com 35 alunos, pertencem a cursos diferentes e, no entanto, escolheram o mesmo projeto. As discussões pertinentes ao projeto podem tomar rumos distintos, caso os participantes de cada curso se envolvam em argumentos do seu cotidiano.

Civiero (2009), ao conversar com os alunos sobre a proposta de sua pesquisa, esclarece a necessidade de um trabalho em conjunto e de que maneira aconteceria o mesmo. Define a forma de coleta dos dados: cabe à ela anotar as falas que considerar importantes e recolher o material escrito dos alunos, para poder concluir sobre reflexões dos mesmos a respeito da nova proposta. Esta pesquisa ocorreu em 14 encontros semanais sendo que cada encontro era composto por duas aulas de 50 minutos cada.

Diremos que atualmente a tecnologia pode ser caracterizada pelo domínio de métodos formais. Por isso, debruçar-nos-emos sobre o papel da Matemática na sociedade. A tese que iremos discutir afirma que a Matemática tem uma intervenção real na sociedade, não apenas no sentido de que novas idéias podem alterar interpretações, mas também no sentido de que a Matemática coloniza e reorganiza parte da realidade. A tese é a de que a Matemática está a configurar a nossa sociedade. Esta tese sobre o poder de configuração inerente à Matemática não significa que a Matemática não possa ser vista como uma construção social (que é o modo como eu a entendo) colonizada por interesses econômicos e culturais. O que é salientado pela tese da configuração é o fato de este constructo social, embora formal, ser capaz de fazer algo à realidade. [...] (SKOVSMOSE, 1992, p.11-12)

Deixando de lado a idéia de que Matemática é uma ciência abstrata e enxergando-a em situações reais, de nosso próprio cotidiano, nesta análise do referido Projeto de Iniciação Científica e da pesquisa de Civiero (2009) sobre o mesmo será possível observar o quanto as noções matemáticas facilitam nosso dia-a-dia. Matemática e realidade formam uma dupla interessante para o aprendizado dos alunos. Certas dificuldades da matemática abstrata podem ser compreendidas quando aplicadas à realidade. Assim como situações reais podem ser explicadas com processos matemáticos. A aliança é bem-vinda neste setor.

Como já foi relatado, em sua pesquisa, Civiero (2009) selecionou para análise o trabalho desenvolvido com o PIC *Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)*, escolhido pelas turmas de primeira série do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – Campus Rio do Sul; turmas 1ªA do Curso Técnico Agrícola com Habilitação em Agropecuária e 1ªE Curso Técnico Agrícola com Habilitação em Agroecologia. Então, analisarei o que foi desenvolvido no projeto e na pesquisa de Civiero (2009).

No primeiro encontro de sua pesquisa, a autora citada repassa aos seus alunos a introdução do projeto desenvolvido por outros estudantes. Esta aula inicial ocorreu no laboratório de informática. Antes de terem contato com a introdução de trabalho anterior, os estudantes estavam curiosos. Já sabiam qual projeto iriam estudar, porém não imaginavam o que aconteceria nas aulas. Neste palco de incertezas, Paula construiria um cenário de investigação. Mas como? O sentimento de curiosidade por parte dos alunos era um bom

presságio, isto podia instigá-los, motivá-los a estudar. Foi então que, apresentando-se apenas como uma orientadora, a professora fez o convite aos seus alunos. Separados em grupos, iniciam o trabalho, tendo como primeiro passo a leitura da introdução e o conhecimento do projeto a ser estudado.

O interessante a ser reparado aqui é que tanto o grupo que desenvolveu o projeto quanto o que o analisou tem contato com a realidade em questão; as diferenças no processo de trabalho serão destacadas ao longo de minha pesquisa.

Abaixo segue a introdução do Projeto de Iniciação Científica abordado na pesquisa:

O composto é de muita importância para a agricultura por seguir os conceitos da agroecologia, pois é uma maneira de nutrir as plantas com todos os macros e micronutrientes que ela necessita sem precisar usar qualquer tipo de insumos externos que podem prejudicar a natureza.

Visando a isso, achamos interessante pesquisar um resíduo orgânico que melhor atenderia as necessidades da alface. A pesquisa utilizará a alface, uma verdura de grande importância nutricional que geralmente segue a mesa de várias pessoas no mundo.

Se conseguirmos achar um resíduo que seja interessante na compostagem, produzindo alfaces de melhor qualidade, a experiência criaria um procedimento de compostagem em escala maior, para uma produção mais eficiente. O projeto zela pelos princípios da agroecologia por sermos estudantes deste curso na Escola Agrotécnica Federal de Rio do Sul e percebemos que os resíduos da escola não estavam sendo bem aproveitados. Assim surgiu um questionamento: quais resíduos podem resultar numa boa compostagem, ao ser testado com uma variedade de alface?

Sendo assim, nosso trabalho visa encontrar um resíduo que ao formar a compostagem melhor interfere na produção de alface, analisando sua efetividade no crescimento dessa cultura. Os resíduos utilizados para a compostagem são: esterco bovino, esterco de aves com uma pequena porcentagem de maravalha (pó de madeira), resíduos de cozinha crus, resíduos de cozinha cozidos e uma leira teste apenas com material fibroso (capim-elefante picado).

Os compostos foram feitos em camadas, começando por uma de palha e intercalando palha e o resíduo que cada um possuía até serem feitas cinco camadas, logo após o término, as leiras foram molhadas com seis litros de água cada.

No final da compostagem foi feito um canteiro com cinco divisões (uma para cada tipo de composto) e espalhados 1,5kg de composto para cada divisão sendo revolvido até ficar uniforme. Depois deste processo, foram transplantadas oito mudas de alface para cada tipo de composto, totalizando 40 mudas.

No final, fizemos o desenvolvimento matemático, através de análise matemática para o decréscimo das leiras.

**Figura 3 - Introdução do PIC *Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)* (CIVIERO, 2009, p. 76)**

Após a leitura da introdução, a professora instigou os alunos com questões, as quais, se investigadas, fazem com que o aluno aprenda a teoria para dar continuidade ao processo.

“O que é matéria orgânica?”, “O que é um composto?”, “Quais os benefícios proporcionados pela existência da compostagem no solo?”. Inicialmente, não é possível dizer onde se encaixa a Matemática neste trabalho, mas no decorrer dos encontros os estudantes podem explorar esta outra face do projeto.

[...] As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são “fins”, mas sim “meios” para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. [...] (BARBOSA, 2001, p. 4)

Os questionamentos iniciais de Civiero (2009) despertaram a curiosidade dos alunos e estes acabaram enunciando seus próprios problemas. Dessa forma, o convite foi aceito pelos estudantes e, assim, constitui-se um cenário de investigação, segundo Skovsmose (2000). Os participantes do trabalho começaram a se perguntar como se faz a compostagem, que tipos de materiais podem ser usados para fazer um composto, como preparar uma pilha de composto, como é feita a manutenção deste composto, de que maneira é verificada a maturidade deste composto, quais serão as fases da compostagem, entre outras questões. Aqui apareceu uma variação entre as preocupações de cada turma, referentes aos seus cursos. A turma da agroecologia estava mais preocupada com a questão ecológica do processo, enquanto os estudantes de agropecuária preocupavam-se com a parte financeira.

Alguns alunos mostraram-se resistentes ao trabalho, alegando que não viam relação entre o assunto abordado até o momento e a Matemática. Isto pode ser uma insistência ao *paradigma do exercício*. Ou seja, para os alunos é muito mais simples continuar no processo de reconhecimento, enunciado por Gallo (2008), em que o professor passa para o aluno o que já foi pensado por alguém e este estudante compreende o que lhe foi exposto. Desta forma, não ocorre aprendizado e, sim, a compreensão sobre o que lhe foi exposto. A forma como foram adquiridos os conhecimentos, tanto no PIC quanto na pesquisa de Civiero (2009), não contemplam o paradigma do exercício que, na maioria das vezes, envolve a reconhecimento. Neste processo, a professora não irá abordar o conteúdo explicando como se resolvem exercícios. Aqui os alunos serão convidados a pensar; indagando e investigando dentro do ambiente construído pela Modelagem Matemática.

Para tentar acabar com a resistência, a professora explicou que o trabalho seria desenvolvido da seguinte maneira: através dos projetos escolhidos pelos estudantes, seriam estudados conteúdos matemáticos necessários para análise do material. Os alunos não se

sentiam muito seguros, mas gostaram da idéia e propuseram-se ao trabalho. Para a teoria necessária ao trabalho, os estudantes procuraram recursos tanto na biblioteca quanto na internet, no laboratório de informática. Eles também foram convidados a interagir com o meio onde foi realizado o projeto, afinal esta pesquisa ocorreu no mesmo local do projeto.

A aula ficou mais movimentada após os alunos aceitarem o convite ao trabalho. No segundo encontro, Civiero (2009) expôs, em um *data show*, a parte teórica do Projeto de Iniciação Científica, que estava sendo analisado por seus alunos. Como eles, na aula anterior, já haviam pesquisado sobre a teoria necessária ao projeto, nesta confrontaram suas descobertas com as desenvolvidas anteriormente. Assim, puderam estabelecer uma comparação entre as fundamentações teóricas, expandir seus conhecimentos e enriquecer o material produzido. Nesta aula, a autora conta que sentiu seus alunos mais instigados. Estavam curiosos sobre o que iria acontecer, achando diferente o tipo da aula e questionando sobre o momento em que a Matemática apareceria. Os estudantes estranharam o tipo de abordagem, estavam acostumados com o *paradigma do exercício*, em que suas posições eram mais confortáveis e seguras. E não só os estudantes: Civiero (2009) também se sentiu na *zona de risco*, evidenciada por Skovsmose (2000). Mas, o seu desejo, de que o cenário de investigação acontecesse, era maior.

[...] Quando, inicialmente, sugeri desafiar o paradigma do exercício, isso pode ser visto também como uma sugestão de quebrar o contrato da tradição da matemática escolar.

Da perspectiva dos professores, isso pode parecer o movimento de uma zona de conforto para um zona de risco. Essa noção tem sido introduzida por Penteadó (manuscrito) em seu estudo sobre as experiências do professor num novo meio de aprendizagem onde os computadores representam um papel crucial. O movimento entre os diferentes ambientes possíveis de aprendizagem e a ênfase especial no cenário para investigação causarão um grau elevado de incerteza. A meu ver, a incerteza não deve ser eliminada. O desafio é enfrentá-la. (SKOVSMOSE, 2000, p. 17)

Seguindo o ritmo da pesquisa, a autora observou, de acordo com os questionamentos de seus alunos, a necessidade de eles terem acesso aos materiais utilizados e ao tipo de processo desenvolvido no projeto. Então, a mesma disponibilizou o seguinte texto:

#### **Materiais utilizados**

Os seguintes resíduos fazem parte do processo:

- \* Esterco Bovino;
- \* Esterco de aves com uma pequena porcentagem de maravalha (pó de madeira);
- \* Resíduos de cozinha crus
- \* Resíduos de cozinha cozidos;
- \* Material Fibroso (capim-elefante picado).

Para realizar o trabalho, foram utilizados pás, enxadadas, triturador, mudas de alface e os resíduos. Sendo que os três autores foram os recursos humanos que executaram as atividades.

#### **Como fizemos a compostagem:**

Começamos limpando o local onde seria feito o composto. Em seguida foi coletado o material fibroso.

No dia 09/11/06 foram feitas cinco leiras de 90cm de comprimento por 50cm de largura, cada um com um tipo diferente de resíduo orgânico, com exceção do material fibroso que estava presente em todas as leiras.

Começamos o composto com uma base de capim, com 10cm de altura, 50cm de largura e 90cm de comprimento. No mesmo dia passamos para a segunda camada utilizando os outros resíduos (resíduos de cozinha crus, resíduos de cozinha cozidos, esterco bovino, esterco de aves com pó de madeira) cada leira com um tipo de resíduo de 2cm de altura.

Na terceira camada, novamente foi posto 10cm material fibroso, na quarta 2cm de resíduos e terminamos com uma quinta camada de capim.

Logo após ter terminado cada leira com 36cm de altura, molhamos o composto com 6 litros de água. E por final, limpamos as laterais com uma enxada.

No dia 01/03/07, capinamos novamente os espaçamentos entre as leiras e limpamos sobre elas manualmente, o composto estava quase todo pronto, com exceção da palha, que ainda estava um pouco fibrosa, por isso foram molhadas com 3 litros de água cada uma.

**Figura 4 - Materiais e Processo Utilizado do PIC Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007) (CIVIERO, 2009, p. 79 e 80)**

Após a leitura do processo e identificação dos materiais, os grupos começaram a entender o que ocorreu no projeto. Um dos alunos de Civiero (2009) exclamou: “Que interessante, uma idéia simples e efetiva!”. Os alunos do curso de agroecologia já queriam utilizar a idéia para produzir tomates e cerejas, pois estavam enfrentando dificuldades para produzi-los. Os estudantes de agropecuária, por sua vez, estavam preocupados com o tempo gasto para tal produção e a rentabilidade do produtor. As imagens a seguir foram exibidas pela professora para a visualização do processo de plantio do projeto.



**Figura 5 - Leiras com os cinco tipos de resíduos do PIC Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007) (CIVIERO, 2009, p. 80)**



**Figura 6 - Leiras identificadas com os cinco tipos de resíduos do PIC Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007) (CIVIERO, 2009, p. 81)**

Com as imagens, melhorou a percepção dos alunos referente ao projeto desenvolvido. Assim, o próximo passo seria a análise dos dados do mesmo. A professora indagou seus alunos, antes dos dados serem expostos, sobre o possível comportamento das leiras. As

perguntas foram sobre como eles imaginavam que teria ocorrido a compostagem, qual teria sido o comportamento de cada leira, qual teria se decomposto mais rápido e como. Dessa forma, os alunos questionaram-se e fizeram estimativas acerca do processo. Mas, eles precisavam de mais dados; estavam curiosos. Então, um dos estudantes os solicitou. Através do *data show* a professora exibiu a seguinte tabela:

Datas	Leiras de outros tipos		Leira fibrosa	
	Variação da altura/semana (cm)	Altura final por semana (cm)	Variação da altura/semana (cm)	Altura final/semana
Início: 09/11/06	0	30	0	30
16/11/06	-1.2	28.8	-2.4	27.6
23/11/06	-1.2	27.6	-3.6	24
30/11/06	-1.2	26.4	-1.2	22.8
07/12/06	-1.2	25.2	-2.4	20.4
14/12/06	-1.2	24	-2.4	18
21/12/06	-1.2	22.8	-1.8	16.8
28/12/06	-1.2	21.6	-1.8	15
05/01/07	-1.2	20.4	-0.9	14.1
12/01/07	-1.2	19.2	-0.7	13.4
19/01/07	-1.2	18	-0.5	12.9
26/01/07	-1.2	16.8	-0.7	12.2
03/02/07	-1.2	15.6	-1.2	11
10/02/07	-1.2	14.4	0	11
17/02/07	-1.2	13.2	0	11
24/02/07	-1.2	12	0	11

**Figura 7 - Leiras com diversos resíduos para formação de compostagem, com altura inicial de 30cm, da EAFRS de novembro de 2006 à fevereiro de 2007. PIC Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007) (CIVIERO, 2009, p. 81 e 82)**

Posteriormente ao quadro exposto, Civiero (2009) atuou como uma questionadora, fazendo perguntas, que envolviam pensar se os dados são expostos pelo título do quadro, se este título identifica o que será apresentado, se informa quando e onde aconteceu o experimento, o que era possível perceber na variação das alturas das leiras e qual era a altura inicial. A partir destas questões, os estudantes observaram que a leira orgânica sempre diminuiu a mesma altura. Queriam saber se estes dados eram reais, se realmente essa variação manteve-se igual. E realmente, a taxa de variação da altura desta leira, por semana, foi constante. Indagados pela professora sobre o comportamento de cada leira, os alunos

observaram a diferença entre a variação das leiras de material orgânico e fibrosa. E chegaram a conclusão de que enquanto as leiras de material orgânico diminuem lentamente, as fibrosas diminuía rapidamente. Porém, ambas pararam de baixar praticamente na mesma altura.

A análise do comportamento das leiras do Projeto de Iniciação Científica foi apresentada aos estudantes da pesquisa de Civiero (2009). Ao compararem esta análise com as suas, evidenciaram-se muitas semelhanças. Neste momento, os alunos manifestaram à professora que começaram a perceber a Matemática introduzida no processo. Apesar das semelhanças, os estudantes observaram que a análise exposta poderia ter sido escrita com mais detalhes. Civiero (2009) salienta que esta visão é muito importante, tendo os incentivado a reescrever a análise com suas melhorias.

*A leira de material fibroso baixou mais rápido por desestruturação, e variando o decréscimo. Enquanto que os demais baixaram gradativamente 1,2cm por semana.*

*As leiras foram feitas intercaladamente entre material fibroso e resíduo orgânico, no final, cada leira estava com 30 cm de altura.*

*Observou-se que as leiras diversas baixavam gradativamente em torno de 1,2cm a cada semana e no mês de fevereiro sua altura estabilizou com 12cm.*

*A leira que possuía somente palha baixou mais rápido, variando seu decréscimo por decomposição e por desestruturação do composto, porém terminou com a mesma altura que os diversos.*

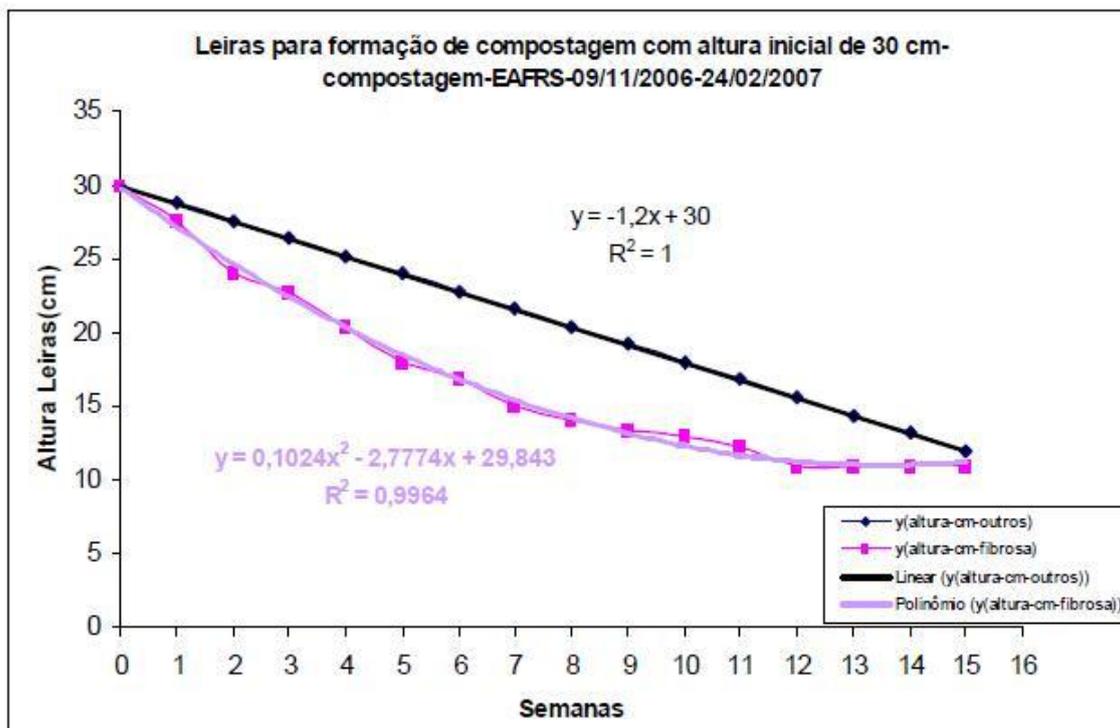
**Figura 8 - Análise do Comportamento das Leiras do PIC Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007) (CIVIERO, 2009, p. 83)**

Depois de analisados os dados, a professora voltou a questionar os alunos sobre a forma de representar os dados expostos. Os próprios alunos haviam percebido a possibilidade de representar graficamente tais dados. Aqui, os alunos mostraram-se envolvidos no problema inicialmente exposto pela professora; algo os fizera pensar, algo os motivara. De um problema inicial é possível que os estudantes tomem este como seu ou enunciem seus próprios problemas a partir do mesmo, vivenciando a experiência dele. Pois, mais importante do que resolver um problema, é vivê-lo, como observa Gallo (2008). Assim, desenvolve-se o aprender. E se para aprender existe a necessidade de passar pela experiência do problema, não

importa este já ter sido experimentado de alguém. Bondía (2002) evidencia que cada experiência é singular; subjetiva.

Se a experiência é o que nos acontece e se o saber da experiência tem a ver com a elaboração do sentido ou do sem-sentido do que nos acontece, trata-se de um saber finito, ligado à existência de um indivíduo ou de uma comunidade humana particular; ou, de um modo ainda mais explícito, trata-se de um saber que revela ao homem concreto e singular, entendido individual ou coletivamente, o sentido ou o sem-sentido de sua própria existência, de sua própria finitude. Por isso, o saber da experiência é um saber particular, subjetivo, relativo, contingente, pessoal. Se a experiência não é o que acontece, mas o que nos acontece, duas pessoas, ainda que enfrentem o mesmo acontecimento, não fazem a mesma experiência. O acontecimento é comum, mas a experiência é para cada qual sua, singular e de alguma maneira impossível de ser repetida. O saber da experiência é um saber que não pode separar-se do indivíduo concreto em quem encarna. Não está, como o conhecimento científico, fora de nós, mas somente tem sentido no modo como configura uma personalidade, um caráter, uma sensibilidade ou, em definitivo, uma forma humana singular de estar no mundo, que é por sua vez uma ética (um modo de conduzir-se) e uma estética (um estilo). Por isso, também o saber da experiência não pode beneficiar-se de qualquer alforria, quer dizer, ninguém pode aprender da experiência de outro, a menos que essa experiência seja de algum modo revivida e tornada própria. (BONDÍA, 2002, p. 27)

Como tarefa de casa, os alunos ficaram de trazer para o terceiro encontro um esboço da representação gráfica dos dados do projeto. Antes de começar a aula, os estudantes compartilharam conhecimentos sobre o projeto e seus esboços. A interação entre os participantes era grande, maior que nas aulas comuns de matemática. Então, a professora novamente através do *data show*, expôs a figura a seguir. Ela explicou aos alunos que esta figura, construída com o auxílio da ferramenta *Excel*, representa graficamente o comportamento dos dados do projeto. A professora também apresentou os modelos matemáticos que melhor se adaptaram com os dados. Esses modelos matemáticos não precisavam ser oferecidos pela professora; os estudantes podiam construí-los. Porém, havia a necessidade de um tempo maior para desenvolver este processo.



**Figura 9 - Evolução para a altura das leiras para formação de compostagem, no período de 09/11/2006 a 24/02/2007, no setor de gestão ambiental da EAFRS. PIC Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007) (CIVIERO, 2009, p. 85)**

Com o gráfico e os modelos exibidos, a professora questionou os alunos sobre o que representava a figura, que tipos de curvas apareciam e qual dos modelos matemáticos expostos, melhor representava a curva. Veja que ao longo do processo os alunos foram instigados pela orientadora, porém, a orientação não souo como uma ordem. Isto é importante para que o aluno venha a viver a experiência de seu próprio problema. Busca-se tentar conduzir por um caminho o pensamento do aluno, mas é difícil controlar o rumo de seu pensamento. Isto depende de muitos fatores, tais como a curiosidade, a necessidade e a vontade do aluno; não é algo que se possa obrigar a fazer. Por isso o ambiente de Modelagem Matemática é propício em tal situação: a partir do momento em que o estudante aceita o convite do professor para estudar determinado assunto, ele demonstra certo interesse no mesmo, toma-o para si e, é possível que, através do mesmo, enuncie seus próprios problemas.

Neste ambiente de indagações e investigações, com a orientação de Civiero (2009), foram descobertos muitos outros significados. Os conceitos matemáticos adquiridos foram necessários para justificar a situação real analisada no projeto. Por exemplo, os alunos identificaram os dados da tabela com os da função, o modelo matemático. Repararam que a leira orgânica baixava 1,2 cm cada semana e a expressão que representava tal acontecimento era  $y = -1,2x + 30$ , em que  $y$  é a altura das leiras em centímetros e  $x$  o número de semanas. O

número 1,2 aparecia na expressão. Assim, a professora aproveitou para explicar o que este número representava: a taxa de variação. Quando essa taxa de variação se mantinha constante, obtinha-se uma função de primeiro grau. Um aluno salientou que isto explicava o fato do gráfico ser representado por uma reta.

Como pode ser observado até aqui, os conceitos foram surgindo ao longo de toda pesquisa de Civiero (2009), baseados em questionamentos, análises e investigações. Tanto no Projeto de Iniciação Científica quanto em sua pesquisa sobre o mesmo, o estudo de Funções de Primeiro Grau e de Segundo Grau foi contemplado, a partir da análise de modelos matemáticos que representavam uma situação real. Quem orientou o projeto até poderia saber o que resultaria neste estudo, mas não a forma como o mesmo seria abordado. O Caso 3 de Modelagem Matemática, segundo Barbosa (2001), é evidenciado nesta situação, pois desde o assunto até os dados necessários para o trabalho foram selecionados pelos alunos. Já na pesquisa de Civiero (2009) podemos verificar o Caso 1 de Modelagem. Tanto o problema quanto os dados do mesmo são fornecidos pela professora, cabem aos alunos as análises e as investigações. Neste caso, a orientadora podia imaginar como seriam estudados os assuntos, pois os dados ao longo do trabalho foram expostos pela mesma.

## 5 UM AMBIENTE ADEQUADO PARA APRENDER

### 5.1 SOBRE O AMBIENTE DE APRENDIZAGEM

Ao se trabalhar com Modelagem Matemática é possível construir um ambiente propício para o aprendizado. O aluno escolhe uma situação para sua análise ou aceita trabalhar com uma que lhe foi exposta. A partir desta situação, aceito o convite por parte do estudante, surge um cenário de investigações, em que, apenas orientados pela professora, irão indagar e investigar. Tudo bem, mas o fato é que se este convite foi aceito, foi porque o aluno sentiu curiosidade pelo assunto previamente estabelecido ou teve interesse de investigar uma determinada situação por ele escolhida. Se a questão foi estabelecida pelo estudante, ele mesmo a enunciou. Agora, se não foi, quando ele aceita o convite, é porque algo lhe despertou curiosidade, o problema, que está sendo exposto, desperta seu interesse e, assim, ele toma-o como seu. Para estudar as questões iniciais, nesse processo de aprendizado, é maior a possibilidade, então, do aluno enunciar seus próprios problemas. Desta forma, poderá passar pela experiência do problema, ou seja, aprender.

Mas, será que esse é o processo mais adequado para se implantar em sala de aula? Ou melhor, será que só com Modelagem Matemática conseguimos construir um ambiente adequado para aprender? Na verdade, seria ótimo poder sempre trabalhar com este processo. Mas, em determinados conteúdos, em que é necessário um rumo certo para as atividades, fica difícil utilizar Modelagem.

Modelagem pode ser entendida em termos mais específicos. Do nosso ponto de vista, trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e idéias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade. Porém, alguns casos podem ser mais propícios a alguns conceitos matemáticos – por exemplo, situações que envolvem variação podem levar a idéias do Cálculo ou Pré-cálculo -, mas nada garante que os alunos se inclinam por eles. Esta natureza “aberta” que sustentamos para as atividades de Modelagem nos impossibilita de garantir a presença de um modelo matemático propriamente dito na abordagem dos alunos. Somente a análise dos caminhos seguidos na resolução pode nos falar sobre sua ocorrência; eles podem desenvolver encaminhamentos que não passem pela construção de um modelo matemático. (BARBOSA, 2001, p. 5)

Como já foi explicado neste estudo, o rumo das atividades do Projeto de Iniciação Científica, do atual Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – Campos Rio do Sul, e das atividades da pesquisa de Civiero (2009), feita sobre um destes projetos, desenvolveu-se de forma distinta. Enquanto os alunos escolheram desde o assunto a ser estudado no projeto, na pesquisa tiveram apenas algumas situações, previamente selecionadas pela professora, para sua escolha. No projeto, típico Caso 3 de Modelagem Matemática, como verifica Barbosa (2001), o caminho seguido para as conclusões dos estudantes sobre o assunto foi livre. Previamente, não era possível imaginar que direções seriam tomadas. Já na pesquisa da autora, acima citada, evidencia-se o Caso 1 de Modelagem, sendo que os dados necessários para a análise do problema foram todos fornecidos pela professora. Neste caso, através da forma como a orientadora do trabalho expôs os dados, é possível sugerir um rumo para o estudo. Na pesquisa de Civiero (2009), por exemplo, os dados foram apresentados na forma como foram concluídos por quem os definiu no Projeto de Iniciação Científica. Os alunos de sua pesquisa, por sua vez, não chegariam exatamente às mesmas conclusões, mas se aproximariam delas. Afinal, a base fornecida pela professora, para suas análises, era proveniente dos dados levantados e das conclusões realizadas pelos estudantes que desenvolveram tal projeto. Assim, dependendo do tipo de caso de Modelagem trabalhado, é possível imaginar o rumo que as atividades desenvolvidas neste trabalho irão seguir.

Na verdade, a grande dificuldade é saber através de qual processo de ensino as chances do aluno aprender são maiores. O aprender não depende somente do professor, como já foi visto neste trabalho. O aprender gira em torno de muitos fatores que propiciam o ato de pensar. Este pensar pode originar-se da experiência de um problema, vivida por quem o enunciou. Porém, não é possível prever quando um aluno enunciará seu próprio problema e nem planejar atividades esperando que isto aconteça. Apenas existem processos, geradores de tipos de ambiente de aprendizagem, em que a possibilidade do estudante enunciar seu problema e, assim, aprender, é maior. É isto que se discute neste trabalho, a busca do aprender e não apenas compreender.

Os falsos problemas não são problemas, de fato, e para o movimento do pensamento de nada valeria o desenvolvimento de uma “pedagogia do problema” que o tomasse de maneira artificial, apenas como algo que permitisse uma construção racional argumentativa. De novo, estaríamos no reino da reconhecimento, e não do pensamento “virgem”, “genital” de que fala Deleuze. Seria como o interlocutor de Sócrates, nos diálogos de Platão, que não passa de “uma escada” para a construção argumentativa do mestre. Uma verdadeira “pedagogia do problema” perderia, necessariamente, seu caráter de “pedagogia”, de condução. Pois o

enfrentamento do problema não pode ser conduzido, a experiência do pensamento não pode ser conduzida, ou deixa de ser experimentação, perde sua “objetividade”, sua “genitalidade” em nome de uma construção artificial da ordem da reconhecimento. (GALLO, 2008. p. 120-121)

Então, visto que o aprender, discutido neste estudo, acontece mediante o ato de pensar, que se origina da experiência de um problema e segue pela enunciação de quem passa por esta experiência, busco um ambiente que propicie a possibilidade de aprendizado ao aluno. Ou seja, não se trata de desenvolver um processo no qual o estudante gere seus problemas, pois isto acabaria com o caráter de experiência do mesmo, como observa Gallo (2008) acima. Mas de buscar um ensino de Matemática, aberto à possibilidade de construir ambientes provadores de signos que violentem nosso sentido.

O processo de Modelagem Matemática é similar à experiência de um problema, engendrado por quem passa pela mesma. Não é possível também em Modelagem conduzir o pensamento do estudante por um caminho, forçá-lo a construir determinados modelos. Para ocorrer Modelagem o aluno precisa estar interessado na situação que irá ser abordada, deve aceitar o convite ao trabalho, feito pelo professor. A partir desse ponto, o estudante propõe-se a indagar e investigar, movido por curiosidade, necessidade, interesse. Nesta situação é que talvez o aluno enuncie seus problemas, mesmo que seja a partir de um fato inicial. Mas o verdadeiro problema, o que será enunciado por ele, após ser forçado a pensar e a buscar conceitos. Assim, é possível ver que a Modelagem Matemática propicia ambientes nos quais os espaços para os alunos pensarem são preservados.

Porém, como a experiência do problema não pode ser conduzida nem planejada, sua ocorrência depende do envolvimento do estudante diante do processo de ensino em pauta. Não é apenas em Modelagem que existe a chance de se desenvolver o pensar. Em outros ambientes de aprendizagem também podemos observar o envolvimento dos alunos. Modelagem possui um espaço mais aberto para as construções dos alunos, o que facilita o desenvolvimento das mesmas. Skovsmose (2000) defende que os diferentes tipos de ambientes de aprendizagem, da matriz apresentada por ele, devem ser percorridos em sala de aula.

Sustento que a educação matemática deve mover-se entre os diferentes ambientes tal como apresentado na matriz. Particularmente, não considero a idéia de abandonar por completo os exercícios da educação matemática. Poderia fazer sentido, por exemplo, após a grande corrida de cavalos, usar um período para “consolidar” o que os alunos trabalharam por meio de exercícios relacionados com a noção de probabilidade. É importante que os alunos e professores, juntos, achem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem. A rota “ótima” não pode ser determinada apressadamente, mas tem que ser decidida pelos alunos e pelo

professor. A matriz dos ambientes de aprendizagem pode também ser usada como um instrumento analítico. Por exemplo, é possível que alunos e professor considerem a rota seguida no último ano: Que ambientes de aprendizagem experimentamos? Gastamos todo o tempo com um ou dois ambientes? Em que ambiente tivemos experiências com mais sucesso? Algum movimento de um ambiente para outro causou dificuldade? Muitas considerações de planejamento podem ser relacionadas à matriz. (SKOVSMOSE, 2000, p. 14)

Realmente, em muitas ocasiões, em sala de aula de Matemática, precisamos definir certos conceitos de forma geral, que são mais esclarecidos através de ambientes do tipo (1), (3) e (5), através do *paradigma do exercício*. Os tipos de ambiente (2) e (4) podem ser interessantes para introduzir o caráter de cenário investigativo, necessário para desenvolver o ambiente (6); ambiente de Modelagem Matemática. Porém, ao invés de discutir sobre a Matemática pura ou uma semi-realidade, é mais interessante para os alunos estudar situações que envolvam a realidade.

## 5.2 SOBRE O ESTÁGIO

No estágio de docência que realizei, em uma escola pública de Porto Alegre, trabalhei com alunos de duas turmas da segunda série do Ensino Médio. Minhas aulas moveram-se entre os ambientes de aprendizagem do tipo (1) e (3), no ensino de Sistemas Lineares. Junto com os estudantes, iniciei o conteúdo através da construção das formas de resolução dos sistemas. Depois disso, entramos no *paradigma do exercício*, pela via da matemática pura e de uma semi-realidade. Apesar de não ter trabalhado com fatos reais, reparei a curiosidade dos alunos em saber onde usariam o conteúdo estudado em suas vidas, quando foram estudados os exercícios dessa semi-realidade. No último encontro com os estudantes, elaborei, então, o seguinte questionário, visando descobrir suas opiniões quanto a estudar matemática utilizando situações do cotidiano, ou seja, fatos reais.

<u>Questionário</u>	
(Assinale sua escolha e justifique)	
De que forma você realmente entende o que é trabalhado em determinados conteúdos matemáticos?	
<input type="radio"/>	Quando o conteúdo é exposto-lhe através de fórmulas, das quais você faz uso para resolver um exercício, mesmo que este não seja um problema do seu cotidiano.
<u>OU</u>	
<input type="radio"/>	Quando o conteúdo é explorado através de questões do cotidiano e, a partir delas, formam-se relações para a resolução dos possíveis problemas sobre o assunto.
Justifique sua resposta: _____	
_____	
_____	
_____	
_____	

**Figura 10 - Questionário aplicado aos alunos da segunda série do Ensino Médio de uma Escola Pública de Porto Alegre em 2010.**

Distribuí o questionário para as duas turmas em que eu era estagiária. Expliquei aos estudantes que era apenas uma pesquisa minha; eles não precisariam se identificar e não eram obrigados a responder. Neste dia, participavam da aula 25 alunos de uma turma e 24 da outra, totalizando 49 alunos. Destes, 8 assinalaram a primeira alternativa e 41 a segunda. A diferença foi grande. Isto salienta a idéia de que em muitos casos as dificuldades dos alunos perante a matemática se vinculam à forma abstrata na qual é apresentada. A seguir, seguem justificativas de alguns alunos que se destacaram das demais.

- Justificativas quanto à primeira alternativa:

Aluno A: “Porque a fórmula já está pronta, basta calcular. No cotidiano, às vezes, entendemos o que devemos calcular, mas não sabemos como”.

Aluno B: “Porque as fórmulas são mais fáceis de decorar”.

Aluno C: “Acho que as fórmulas auxiliam no caminho a ser seguido, mas o melhor é aplicá-las ao cotidiano. Assim compreendemos mais”.

- Justificativas quanto à segunda alternativa:

Aluno D: “Utilizar questões cotidianas implica em uma compreensão mais adaptável, pois o assunto pode ocorrer com certos alunos, deixando de lado aquela pergunta: *onde vou ver isso na minha vida?*”.

Aluno E: “Porque nos ajudam, lá fora, a não sermos enganados com os descontos”.

Aluno F: “Porque é muito mais fácil quando realmente entendemos, do que quando temos que decorar e aplicar fórmulas, sem saber para que são usadas”.

Aluno G: “Pois, em minha opinião, o aluno foca em vários fatores para a determinada resolução. Assim, surgem formas mais fáceis para o assunto.

Aluno H: “Pois, assim, vejo que o conteúdo poderá ser usado para algo em minha vida. Ou seja, não será improdutivo”.

Aluno I: “Porque com a realidade podemos imaginar e concluir melhor o pensamento da questão”.

Aluno J: “Pois, dessa forma, possuímos uma noção e, até mesmo, um conhecimento sobre o cálculo. Mesmo que, ainda, não tenhamos aprendido sua fórmula”.

Aluno L: “Sendo usados fatos reais o problema é mais fácil de ser visualizado e interpretado, além de ser mais motivador ao aprendizado”.

Ao analisar as justificativas perante a primeira alternativa, notei que foram respondidas por alunos sem interesse, talvez, em aprender o que está sendo discutido. Afinal, preferir a utilização de fórmulas para solucionar um exercício, porque é mais fácil de decorar, não demonstra muita atração pelo que está sendo exposto. Porém, entre os argumentos dos que escolheram esta alternativa, um se destacou: o do aluno C, quando considera que as fórmulas auxiliam no caminho a ser seguido para desenvolver a questão, contudo seria melhor aplicá-las ao cotidiano. O aluno explica que, desta forma, compreenderiam mais o assunto tratado. Nesta justificativa, o estudante talvez esteja demonstrando sua vontade em descobrir a matemática aplicada e não apenas a abstrata, como é geralmente vista.

Os argumentos dos alunos que escolheram a segunda opção deixam transparecer a vontade dos mesmos em aprender para que serve a Matemática e no que é possível utilizá-la. De forma geral, as justificativas giram em torno de que ao se trabalhar com assuntos do cotidiano, fatos reais, o envolvimento dos estudantes é maior. Muitos argumentam que ao estudar um problema real é possível observar diversos caminhos para desenvolvê-lo. Não precisam utilizar uma fórmula pré-exposta, podem fazer do seu jeito. Uma resposta que se sobressaiu foi a do Aluno E: “Porque nos ajudam, lá fora, a não sermos enganados com os descontos”. Ao justificar sua escolha, o estudante imaginou uma situação real de seu

interesse, talvez que já tenha vivido e que tenha curiosidade de analisar. Afinal, no mundo consumista de hoje, a situação descrita pelo aluno é comum: os descontos estão por todos os lugares. E, em busca de uma melhor oferta, é necessário entender o que significam os descontos ofertados.

Como pode ser observado no estudo de Civiero (2009), o processo de Modelagem Matemática desenvolvido pelos alunos, tanto do Projeto de Iniciação Científica quanto da pesquisa da autora, foi baseado em fatos do cotidiano desses estudantes. Na análise deste projeto e desta pesquisa é possível perceber que, em função da realidade trabalhada fazer parte do dia-a-dia dos alunos, ambos tornaram-se mais interessante, despertando a curiosidade dos mesmos. Então, quanto mais a realidade a ser estudada, em Modelagem, estiver próxima dos alunos, mais interessante será o estudo para os mesmos. Naturalmente, quando expostos a um Caso 3 deste processo, segundo Barbosa (2001), as chances do assunto escolhido para o trabalho fazer parte do cotidiano dos estudantes é grande. Afinal, neste caso, fica a critério dos alunos a escolha da situação-problema que será analisada.

Assim, quando um professor for trabalhar com o Caso 1 ou o Caso 2 de Modelagem Matemática deve estar atento às escolhas e às sugestões de situações para estudo. Quanto mais próxima a realidade abordada for do dia-a-dia dos estudantes, mais facilmente estes aceitarão o convite para construir o cenário de investigação. Isto pode ser observado tanto na pesquisa de Civiero (2009) quanto na análise das respostas do questionário que apliquei em meu estágio. Os alunos poderão, desta forma, ser instigados pela curiosidade a entender a situação por eles vivida, sentindo interesse pelo assunto. Então, poderão tomar como seu o problema inicial e, a partir do mesmo, enunciar seus próprios problemas, vivendo-os; aprendendo com a experiência deste.

### 5.3 COMO CONSTRUIR UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM

De um questionário aplicado em sala de aula já surgiram argumentos e propostas de situações reais, a partir dos quais alguns fatores matemáticos podem ser analisados. Claro, o professor deve seguir o currículo, não pode, geralmente, deixar as idéias muito abertas, pois, como sendo uma característica da Modelagem Matemática, não é possível prever exatamente que rumo o desenvolvimento do problema irá seguir. Porém, voltando ao assunto inicial do

qual tratava, Sistemas Lineares, ao invés de expor aos alunos um exercício de semi-realidade ou, até mesmo, construir um cenário de semi-realidade, por que não ir com os alunos, por exemplo, a distintas fruteiras? Dados poderiam ser coletados pelos alunos e o professor, apenas levantando certas questões, poderia auxiliá-los no estudo de Sistemas Lineares.

Consideremos o Caso 2 de Modelagem, por hipótese. O professor traria para a turma o seguinte problema: quanto custa cada maçã, laranja e pêra em uma determinada fruteira? Poderiam ser formados grupos, cada um deles visitaria uma fruteira diferente para a coleta de dados; a fruteira freqüentada por uma de suas famílias, por exemplo. Após os dados serem coletados, os mesmos seriam levados para sala de aula. O professor, como orientador do processo, poderia questioná-los sobre o preço de três maçãs mais duas laranjas na fruteira escolhida, por exemplo. Outras várias combinações poderiam ser exploradas, até se chegar ao problema de quanto seria o custo comum de cada fruta, em todas as equações selecionadas, ou seja, o preço de cada fruta cobrado em todas as fruteiras, respeitadas as relações coletadas inicialmente. Esta seria uma maneira de se introduzir o estudo de Sistemas Lineares através de Modelagem Matemática.

Barbosa (2004a) considera a Modelagem Matemática como:

[...] uma atividade que convida os alunos a discutirem matemática no contexto de situações do dia-a-dia e/ou da realidade. Não se trata, portanto, de contextualizar a matemática, mas de discuti-la à luz de um contexto que não é o da área específica. (BARBOSA, 2004a, p. 3)

O que discuto, finalmente, é que trabalhando com Modelagem Matemática e buscando uma realidade próxima ao cotidiano dos alunos, é grande a possibilidade de envolvimento dos mesmos com a situação. Os estudantes tem curiosidade de entender os porquês dos fatos ao seu redor e, assim, podem entender a utilidade da Matemática, não apenas sua forma abstrata. A resposta ao processo desenvolvido no estudo de Civiero (2009) e as justificativas do questionário que apliquei em meu estágio em 2010 comprovam este argumento. Existe uma necessidade por parte dos estudantes em tornar matemática algo palpável; que tenha sentido em ser estudado. E a Modelagem é um processo que possibilita este encontro: resolver situações da realidade por meio da construção de modelos Matemáticos.

O interesse, a curiosidade, a necessidade são sentimentos que movem o aprender. Se estes existem, então pode surgir o próprio problema, oriundo de uma situação inicial ou não. Mas, existindo o problema, enunciado por um aprendiz, é possível que ele viva a experiência

do mesmo. Por aprendiz refero-me àquele que aprende. E se esta experiência for vivida, estimula-se o pensar e, assim, é provável que exista o aprendizado.

[...] Este é o saber da experiência: o que se adquire no modo como alguém vai respondendo ao que vai lhe acontecendo ao longo da vida e no modo como vamos dando sentido ao acontecer do que nos acontece. No saber da experiência não se trata da verdade do que são as coisas, mas do sentido ou do sem-sentido do que nos acontece. [...] (BONDÍA, 2002, p. 27)

Permitir aos alunos possibilidades. É nisto que se deve focar. Instigá-los e deixá-los indagar, questionar, testar e, acima de tudo, experimentar. A experiência é algo único; subjetivo e singular. O que eu posso aprender em determinada experiência pode não ser o mesmo que outra pessoa aprenderia. Para aprender é preciso viver a experiência do problema. Problema este enunciado por quem o experimenta. Ou, se lhe interessar, que um problema inicial vire seu próprio problema, que a Modelagem Matemática seja uma das portas, mesmo que não a única, rumo ao aprender.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Busquei neste trabalho investigar um processo de ensino de Matemática em que seja possível ampliar as chances de se adquirir conhecimento. Por meio da Modelagem Matemática, salientada por Skovsmose (2000) e Barbosa (2001), destaquei a possibilidade de que os ambientes de aprendizagem, construídos por meio dos cenários investigativos formados neste tipo de abordagem, propiciem um aprender pela experiência de um problema, como explica Gallo (2008).

Para que um aluno viva sua experiência do problema, deve enunciar seu próprio problema (GALLO, 2008). O problema pode surgir por vários motivos. Porém, neste estudo, analisei uma forma de construir um ambiente de aprendizagem em que tais enunciações tenham maiores chances de ocorrer. Não pensei, em momento algum, em estabelecer uma pedagogia que vise conduzir os estudantes a enfrentar seus problemas. Como observa Gallo (2008), tal pedagogia seria uma forma de reconhecimento e o aprendizado, que viria da experimentação do problema construído pelo aluno, se tornaria apenas uma compreensão do assunto abordado, trilhada pelo professor. Então, apenas visei, neste trabalho, a construção de um ambiente, através de processos de ensino, nos quais os estudantes possam passar pela experiência e enunciar seus próprios problemas.

A Modelagem Matemática é um processo pelo qual as idéias dos alunos envolvidos tomam rumos mais livres do que em outras formas de se abordar o conteúdo. Os estudantes, na Modelagem, são convidados a indagar e investigar sobre um assunto já pré-estabelecido ou escolhido pelos mesmos. Nesta abordagem, é estudada a matemática envolvida na realidade tratada. A partir de um fato real, uma situação ocorrida, as formas matemáticas que justificam tal ocorrência são analisadas.

Existem diferentes maneiras de organizar e conduzir atividades de Modelagem no ambiente escolar, desde apresentar uma situação estruturada até solicitar que os alunos formulem problemas a partir de temas genéricos escolhidos por eles. Para mim, entretanto, existem dois aspectos centrais para essas atividades. O primeiro é que elas devem se constituir como problemas para os alunos, ou seja, eles não devem possuir esquemas prévios para abordá-las, mas terão que demandar um certo esforço intelectual. O segundo refere-se ao fato de que atividades devem se sustentar no mundo-vida das pessoas, envolvendo dados empíricos reais. (BARBOSA, 2004a, p. 4)

Barbosa (2004a) salienta o fato de que a situação a ser analisada deve tornar-se um problema real para o aluno. Ou seja, para existir envolvimento com o assunto abordado, este lhe deve ser interessante ao estudante, provocar sua curiosidade, para que o aluno sinta a necessidade de aprofundar seus estudos sobre o mesmo. E, quanto mais esta realidade estudada estiver próxima do cotidiano do aluno, mais este sentirá vontade de abordá-la, como conclui ao analisar os questionários aplicados às turmas que estagiei e ao estudar os casos de Modelagem do Projeto de Iniciação Científica e da pesquisa de Civiero (2009).

No Projeto de Iniciação Científica, acima citado, ocorreu um Caso 3 de Modelagem Matemática, como observa Barbosa (2001). Os estudantes trabalharam com uma situação, por eles elegida, que fazia parte de seu cotidiano: “Compostagem a partir de diversos resíduos orgânicos (2006/2007)”. Os alunos de Civiero (2009), por sua vez, também conviviam com a situação em seu dia-a-dia. Afinal, nos cursos técnicos que freqüentavam, no mesmo instituto, tanto os alunos do projeto quanto da pesquisa da autora eram expostos a esta realidade. Civiero (2009) estabeleceu um Caso 1 de Modelagem, levando a questão a ser trabalhada e seus dados para sala de aula. Em sua pesquisa, apesar de trabalhar com Modelagem, em que os resultados do processo são incertos, ela apresentou os dados do problema em certa ordem, mesmo confrontando-os com as descobertas de seus alunos, desta forma foi possível imaginar o caminho dos estudos a ser seguido pelos estudantes. Isto mostra que a dificuldade em inserir Modelagem Matemática no currículo pode ser quebrada. Devido à incerteza quanto ao rumo das descobertas em um caso deste processo, quando existe a necessidade de se estudar determinado conteúdo, nem sempre é possível aplicá-lo. Porém, trabalhando em um Caso 1 de Modelagem, de acordo com a ordem em que o orientador expor os dados, o conteúdo necessário poderá ser alcançado. E, ainda, o ambiente de aprendizagem continua livre para as experiências serem vividas, propício para os alunos enunciarem seus próprios problemas.

Enunciar um problema depende do próprio interesse, curiosidade ou necessidade sobre o assunto a ser problematizado. Porém, se o professor trabalha com assuntos referentes à realidade vivida pelo aluno, de seu cotidiano, a possibilidade da questão inicial tornar-se interessante ao mesmo é grande. Então, se a situação inicial despertar sua curiosidade o estudante poderá enunciar seus próprios problemas e, assim, viver a experiência deles. Nada forçado ou conduzido; apenas movido por seus interesses. Desenvolvendo, talvez, o aprender. Por isso, um ambiente de aprendizagem agradável, que possibilite aos alunos pensar e levantar hipóteses, que mostre as duas faces da Matemática (não somente a abstrata, mas também a aplicada) e que, ao mesmo tempo, consiga abordar conteúdos necessários ao currículo, constitui um exemplo do que espero para o ensino de Matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 8., 2004, Recife. *Anais...* Recife: SBEM, 2004a. 1 CD-ROM..

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004b.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: *Reunião Anual da ANPED*, 24. 2001, Caxambu. *Anais...* Rio Janeiro: ANPED, 2001

BONDÍA, Jorge Larrosa. Perfis de uma conversação. In: *Linguagem e educação depois de Babel*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 267-275.

BONDÍA, Jorge Larrosa. Notas sobre a experiência e o saber da experiência. *Revista Brasileira de Educação*. Campinas – SP: Autores Associados; ANPED, n. 19, p. 20-28, jan./fev./mar./abr., 2002.

BONDÍA, Jorge Larrosa. Sobre a lição. In: *Pedagogia Profana: Danças, piruetas e mascaradas*. Belo Horizonte: Autêntica, 1999. p.173-183.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1991.

CIVIERO, Paula A. G. *Transposição didática reflexiva: Um olhar voltado para a prática pedagógica*. 2009. 179p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GALLO, Silvio. O problema e a experiência do pensamento: implicações para o ensino da filosofia. In: KOHAN, W; BORBA, S. (Orgs.). *Filosofia, aprendizagem e experiência*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p.115-130.

KOHAN, Walter. O que pode um professor? *Educação*. Deleuze pensa a educação. São Paulo: Segmento, 2007. p. 48-57.

RANCIÈRE, Jacques. Uma aventura intelectual. In: *O mestre ignorante – Cinco lições sobre a emancipação intelectual*. Trad. Lílian do Valle. 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 17-38.

SALLES, João Moreira. Artur tem um problema. *Revista Piauí*, nº 40. 2010.

SHELLER, Morgana. *Modelagem Matemática na Iniciação Científica: Contribuições para o Ensino Médio Técnico*. 2009. 229p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SKOVSMOSE, Olé. *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de educação Matemática*. Rio Claro (SP), n. 14, 2000. p. 66-91

SKOVSMOSE, Olé. Competência Democrática e Conhecimento Reflexivo em Matemática. *For the Learning of Mathematics* 12, 2 (junho, 1992). Tradução de Luiza Carrera Dias. In: <[www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/.../skovsmose-competencia.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/.../skovsmose-competencia.pdf)> Acesso em 01 de outubro de 2011.