

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

BRUNO MARQUES COLLARES

**LÓGICA & AÇÃO:**  
UMA ABORDAGEM PARA ENIGMAS DE RACIOCÍNIO LÓGICO

Porto Alegre

2011

BRUNO MARQUES COLLARES

**LÓGICA & AÇÃO:**  
UMA ABORDAGEM PARA ENIGMAS DE RACIOCÍNIO LÓGICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador (a): Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre

2011

BRUNO MARQUES COLLARES

**LÓGICA & AÇÃO:**

UMA ABORDAGEM PARA ENIGMAS DE RACIOCÍNIO LÓGICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador (a): Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

BANCA EXAMINADORA

---

(Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso)  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

---

(Prof. Dr. Carlos Hoppen)  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

## AGRADECIMENTOS

À minha família, e em especial aos meus pais e irmãos, que sempre consideraram os estudos como o passo principal que alavanca nossa vida.

À minha noiva Joseane, pelo carinho e paciência durante meu percurso na graduação, e pelo apoio motivador.

Aos colegas e amigos que fiz durante o curso e atividades de extensão, pela confiança e respeito compartilhados.

Aos professores que me apresentaram um mundo novo nos estudos, em especial aos professores e amigos Marcus Vinicius de Azevedo Basso e Francisco Egger Moellwald pelas oportunidades oferecidas na graduação e nos programas de pesquisa e extensão de que fiz parte.

À minha orientadora, professora Elisabete Zardo Búrigo, de grande caráter, pela orientação neste trabalho, pelo aprendizado, paciência e pela grande disponibilidade.

Ao Instituto Dom Diogo de Souza, à professora Gládis Delabary e aos alunos que fizeram parte deste grupo de trabalho, pela receptividade e pela disponibilidade em participar da pesquisa.

E a todos que fizeram parte desta longa caminhada, e que me auxiliaram em muitas oportunidades no decorrer dos semestres.

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma experimentação de uma proposta de atividade para o Ensino Médio que envolve a resolução de enigmas lógicos. Uma justificativa para a escolha do tema é apresentada tomando a escola e o aluno como personagens principais desta discussão. Buscamos na teoria piagetiana do desenvolvimento uma discussão a respeito do pensamento formal para compreender os raciocínios dos adolescentes. Por fim, a partir do registro das falas e das produções escritas dos alunos, analisamos a resolução dos enigmas por parte dos estudantes que participaram do trabalho.

**Palavras-chave:** Enigmas lógicos; Pensamento formal; Prática Pedagógica; Educação Matemática; Ensino Médio.

## ABSTRACT

This paper presents an experiment of an activity which involves solving logic puzzles planned to be developed with High School students. In the justification of the chosen theme, the school and the student are taken as the main characters of the discussion. We rely on the discussion around formal thinking proposed by the Piagetian theory of development to understand the reasoning of adolescents. Finally, we analyze the processes of solving puzzles by students who participated in the workshops relying on the records of the speeches and written production of those students.

**Key-words:** Logic puzzles; Formal Thought; Pedagogical Practice; Mathematical Education; High School

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Conjunto de oito moedas utilizado pelos grupos.....	32
Figura 2: Tentativa inicial dos dois grupos com quatro moedas em cada prato.....	32
Figura 3: Folha do grupo 1 corrigida pelo grupo 2, contendo a solução do enigma 19 .....	42
Figura 4: Par de luvas de procedimentos utilizado na oficina.....	47
Figura 5: Daniel tentando colocando dois pares de luvas ao mesmo tempo.....	50
Figura 6: Daniel representando os chineses em seu caderno .....	62
Figura 7: Emília se lança ao quadro para explicar seu raciocínio .....	64
Figura 8: Possibilidades apontadas por Amanda à visão do primeiro chinês .....	65
Figura 9: Esboços feitos por Daniel.....	71
Figura 10: Grupo 1 - Resolução do Enigma 9, noites 2, 3 e 5.....	72
Figura 11: Quartos nomeados genericamente, para a quinta noite .....	73
Figura 12: Grupo 2 – resolução do enigma 9, noites 1, 4 e 5.....	75
Figura 13: Solução fora do padrão estipulado pelo grupo 2 para a primeira noite.....	76

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Enigma 19.....	31
Quadro 2: Enigma 16.....	43
Quadro 3: Enigmas 1, 2 e 4.....	44
Quadro 4: Enigma 10.....	46
Quadro 5: Enigmas 17, 18 e 3.....	54
Quadro 6: Enigma 7 e solução.....	55
Quadro 7: Enigma 15.....	56
Quadro 8: Enigma 9 e subdivisões.....	69



## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>1. JUSTIFICATIVAS .....</b>	<b>12</b>
1.1 Escolha do tema.....	12
1.2 O desenvolvimento do pensamento dedutivo como uma atribuição escolar .....	13
1.3 Que raciocínio lógico é este a que me refiro no trabalho?.....	16
1.4 O projeto de pesquisa.....	17
<b>2. O PENSAMENTO FORMAL NA TEORIA PIAGETIANA .....</b>	<b>22</b>
2.1 As operações concretas e as operações formais na teoria piagetiana .....	22
2.2 A tomada de consciência.....	27
<b>3. RELATO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES.....</b>	<b>29</b>
3.1 Encontro 1 – 03/05 .....	31
3.2 Encontro 2 – 10/05 .....	45
3.3 Encontro 3 – 17/05 .....	56
3.4 Encontro 4 – 24/05 .....	69
<b>4. ANÁLISES A RESPEITO DO DESENVOLVIMENTO DOS ENCONTROS .....</b>	<b>77</b>
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>80</b>
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE .....</b>	<b>85</b>

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar a experimentação e a avaliação de uma atividade com estudantes do Ensino Médio, envolvendo a resolução de enigmas lógicos.

A ideia inicial para a escolha do tema surgiu durante um trabalho realizado na disciplina Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática III<sup>1</sup>, no primeiro semestre do ano de 2010, e foi amadurecida durante uma atividade com alunos do Ensino Médio do Instituto Estadual Professora Gema Angelina Belia, localizado em Porto Alegre, onde participei como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID)<sup>2</sup> por dois anos. Naquela oportunidade, os alunos tentavam solucionar enigmas de concursos públicos e de vestibulares, e encontravam muitas dificuldades para resolvê-los tendo apenas o enunciado em mãos; sentiam-se “travados”, sem saída, e isso os deixava angustiados. Julguei ser necessário oferecer ferramentas que os auxiliassem quando fossem resolver questões desse tipo. Daí surgiram as primeiras ideias para o trabalho.

O primeiro capítulo traz a justificativa para a escolha do tema e apresenta a escola como instituição com a atribuição de transformar seu ambiente num lugar propício para esse tipo de atividade e para uma ampla discussão a respeito do emprego de enigmas lógicos na sua grade curricular. Também apresentamos as questões que nortearam a pesquisa, bem como as metodologias utilizadas no planejamento das oficinas, na coleta e na análise dos dados.

No segundo capítulo, damos ênfase ao pensamento do aluno, neste caso o adolescente, como foco de nossa análise, a partir da visão piagetiana da psicologia do desenvolvimento. Buscamos identificar as diferenças entre o pensamento da criança e o pensamento do adolescente, e analisamos as mudanças que ocorrem em um sujeito que esteja em transição entre os estágios piagetianos.

No terceiro capítulo, apresentamos os relatos e transcrições das falas dos alunos ocorridas nas oficinas planejadas para o trabalho, e uma análise buscando compreender os mecanismos que os adolescentes utilizaram ao resolverem os enigmas propostos.

Por se tratar de uma proposta de atividade a ser implementada no Ensino Médio, os relatos trazem uma descrição de como as oficinas ocorreram, podendo servir como um referencial para a criação de outras atividades sobre o mesmo assunto.

---

<sup>1</sup> O trabalho da disciplina consistia em elaborar uma atividade inovadora com algum conceito matemático ou sobre algum assunto que julgássemos importante ser trabalhado na escola, em matemática.

<sup>2</sup> PIBID: <http://www.pibid.mat.ufrgs.br>

Ao final, são apresentadas as considerações finais, respondendo às questões iniciais e sugerindo possíveis questões para novas pesquisas.

## 1. JUSTIFICATIVAS

### 1.1. Escolha do tema

Sempre apreciei enigmas que requerem certo tipo de pensamento dedutivo na sua resolução, porém, durante a minha trajetória escolar, quase nunca conseguia resolvê-los. Para mim, ler um problema desses tomava somente alguns minutos de meu tempo, e ele em seguida não tinha mais a minha atenção, pois a desistência era instantânea. Isto parece ser uma característica comum entre os alunos na escola, e é o que tenho percebido nas práticas de ensino.

Durante uma prática realizada como bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, em um curso pré-vestibular criado pelo grupo que atuava no Instituto Estadual Professora Gema Angelina Belia, estávamos trabalhando com questões que exigiam um pensamento dedutivo para serem resolvidas. Uma das questões dizia o seguinte:

Estão presentes em uma ilha deserta um doutor cirurgião, e três pacientes que necessitam de uma cirurgia para continuar vivendo. O doutor levou consigo apenas dois pares de luvas, mas tem que realizar três cirurgias. Como ele fará as três cirurgias? (MORICONI, 2010, p. 79).

Enquanto os alunos tentavam encontrar uma solução para este problema, pensamos em disponibilizar dois pares de luvas para que experimentassem de que maneiras o médico poderia realizar as três cirurgias. A turma começou a experimentar tentativas, mas chegando ao final da aula ninguém havia conseguido encontrar uma forma de realizar as cirurgias. No entanto, alguns minutos após o término do encontro, duas alunas que já haviam deixado a escola retornaram correndo e quase sem fôlego, mas com um semblante de satisfação completa, apresentaram-nos uma maneira de o médico realizar as três cirurgias com os dois pares de luvas, inclusive ilustrando sua solução com as luvas que colocamos à disposição da turma. As alunas vibraram com sua descoberta.

Analisando as premissas do problema citado, vemos, por exemplo, que havia apenas dois pares de luvas e três cirurgias a serem realizadas, e para cada cirurgia seriam necessários dois pares. Os alunos concluíram que faltaria um par para tal ação. Mas o fato das luvas estarem presentes e poderem ser manuseadas parece ter dado mais ferramentas aos alunos, que puderam pleitear sua solução com mais contundência. Em uma manobra de

experimentação, eles descobriram que virar as luvas do avesso poderia ser uma estratégia promissora para que o médico pudesse realizar sua função.

Baseado nesta primeira percepção que tive, pensei numa proposta de abordagem de enigmas deste tipo com estudantes do Ensino Médio, como um conjunto de atividades nas quais os alunos envolvidos resolveriam enigmas, e em que pudessem também representar suas resoluções de diferentes maneiras, verbais ou não verbais, com encenações ou dramatizações. Os problemas em si já envolvem certo grau de dificuldade, mas o aluno pode não se motivar a decifrar sua solução, assim como eu não o fazia. Justamente pensando na vivência escolar que tive, trazendo esta questão ao cenário atual do ensino de matemática, escolhi abordar este tema neste meu Trabalho de Conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, intitulado “Lógica & Ação”. No título do trabalho o termo “Lógica” diz respeito ao tipo de questões empregado, e o termo “Ação” é uma menção à resolução destas questões de forma encenada ou dramatizada.

## **1.2. O desenvolvimento do pensamento dedutivo como uma atribuição escolar**

Acredito que a escola tem um papel fundamental no desenvolvimento do ser humano como um cidadão pleno de seus direitos e deveres. Creio também que seja função da escola, por exemplo, criar um ambiente de discussão e trabalho em torno do desenvolvimento do pensamento lógico. Primeiramente, vamos observar o tempo que um aluno passa na escola. Em média, ele permanece quatro horas por dia dentro da instituição, vivenciando todas as rotinas escolares. Na escola, o aluno deve encontrar condições para desenvolver ferramentas que lhe sirvam de auxílio na tomada de decisões, principalmente quando estamos tratando das escolhas de vida. A escola deveria, então, oferecer maiores chances ao aluno para ele desenvolver tais habilidades, e também mais condições para encarar os problemas com que se depara diariamente, tanto aqueles da prática cotidiana, quanto os desafios que surgem dentro do próprio contexto escolar.

A responsabilidade da escola cresce quando consideramos uma visão global da instituição, no âmbito do tempo de vivência escolar. Se um aluno passa em média quatro horas por dia durante cinco dias da semana, isso nos dá em torno de 20 horas semanais, chegando a números próximos de 80 horas mensais, podendo totalizar aproximadamente 800 horas por ano dentro da escola, levando em conta 10 meses de aulas. Ou seja, o aluno passa bastante tempo dentro de um colégio praticando esportes, estudando, realizando provas,

apresentando trabalhos, discutindo ideias e resolvendo problemas, isso tudo em meio ao seu crescimento e desenvolvimento de suas habilidades intelectuais. Uma instituição que abriga alguém por aproximadamente 800 horas anuais certamente terá uma parcela significativa das responsabilidades sobre a sua formação.

Instigar a curiosidade, praticar a busca incessante por problemas desafiadores com o intuito de solucioná-los e incluir o aluno em atividades que gerem o interesse pelo estudo são algumas das atribuições importantes da escola. A motivação para que o aluno explore problemas que requerem certo grau dedutivo é também um papel importante da instituição educativa. A escola, sobre o desenvolvimento dos alunos em várias esferas da vida, parece possuir uma responsabilidade ímpar que deve ser levada em conta. Abrir maiores possibilidades de um aluno aprender é papel da escola, mais especificamente do professor. Porém, é preciso que a escola dê sustento e condições para que o docente possa desenvolver seus planos de trabalho.

Acredito que seja importante o desenvolvimento do raciocínio lógico, isto é, uma maneira de pensar que articule ideias, possibilitando conclusões baseadas em hipóteses anteriores. A tomada de decisões, as escolhas diante de múltiplas variáveis, a sistematização e análise das possibilidades, a dedução, entre outros, são características que podem ser aprimoradas ao trabalharmos o raciocínio lógico na escola. Um dos objetivos alçados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) é:

Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade (PCN, 1999, p. 42).

Expressar-se de maneira crítica não só sobre a matemática, como também sobre outras áreas do conhecimento, parece ser um indicativo da importância do desenvolvimento do raciocínio lógico.

Penso que o ensino de matemática tem sido responsabilizado pelo trabalho com a lógica na escola, seja ela relacionada à própria natureza matemática, seja ela a lógica argumentativa que não envolva necessariamente conceitos matemáticos. Se um aluno ou professor de uma escola for perguntado sobre quem seria responsável pelo trabalho com lógica, provavelmente a resposta será a responsabilização da matemática. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), é considerado que “A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo [...]”

(Ibid., p. 40). Não considero que essa responsabilidade tenha que ser atribuída apenas à matemática, é necessário que outras áreas do conhecimento também explorem essa temática. Todavia, considero que a educação matemática deve exercer o papel de protagonista, como a principal área do conhecimento a propor atividades na escola voltadas ao desenvolvimento de uma forma de pensar estruturada e capaz de deduzir fatos. A própria matemática, em muitas linhas de pesquisa, repousa sobre uma forma de desenvolvimento dedutivo, que determina leis e padrões a partir de premissas anteriores, ou que analisa consequências a partir de axiomas.

Porém, ao mesmo tempo percebo que o estudo da lógica, em especial o trabalho com problemas cujas soluções necessitem a exploração do raciocínio lógico, tem sido relegado pelos professores, ou levado em conta em apenas alguns momentos pontuais da trajetória do estudante na escola básica. Uma ocasião em que este tipo de problema aparece, por exemplo, são as gincanas entre as turmas, e este tipo de questão parece ser encarado pelos alunos como problemas complicados que envolvem algum segredo mágico oculto que responderá a questão. Os motivos são diversos para a não exploração do tema na escola. Dentre eles, por exemplo, destaco a não obrigatoriedade de se trabalhar o tema raciocínio lógico como um conteúdo de matemática específico.

O referencial curricular do Rio Grande do Sul, Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2010), também não traz destacado um trabalho a respeito do raciocínio lógico, mas faz referências ao seu uso como ferramenta para o desenvolvimento de outras habilidades:

É recomendável que, à medida que os alunos forem demonstrando e justificando suas soluções, o professor os auxilie, relacionando os conceitos e procedimentos aritméticos, algébricos e geométricos envolvidos, bem como a sequência lógica do raciocínio dedutivo. (ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, 2010, p. 236).

Em outro trecho o documento faz referência ao termo “pensamento lógico-matemático” com ênfase no pensamento aritmético, algébrico, geométrico e estatístico-probabilístico, que se relacionam e se complementam (Ibid., p. 193).

Entre os professores, parece estar enraizada a alegação de não haver tempo para dedicar uma atenção maior a este assunto. Outros vão além destes argumentos, e afirmam não ter subsídios para poderem se apoiar e explorar com maior ênfase essa temática. Realmente, se realizarmos uma procura criteriosa por materiais e fontes que levem em conta o trabalho específico dando-se ênfase à resolução de problemas de raciocínio lógico, é possível que encontremos muito pouco para o auxílio aos professores. Existem muitos livros que destacam problemas do tipo que iremos abordar, porém não encontramos alternativas nessas obras de

como trabalhá-los na escola. É um dos objetivos deste trabalho contribuir para a mudança deste panorama, oferecendo reflexões e sugestões para que professores trabalhem com este tipo de questão com seus alunos.

### 1.3. Que raciocínio lógico é este a que me refiro no trabalho?

O tema do trabalho pode gerar muitas interpretações. A expressão “raciocínio lógico” citada como um termo solto parece possuir uma amplitude muito grande. A expressão também possui certo cunho coloquial, mencionada diariamente por muitas pessoas, mas sem uma definição específica. Neste trabalho considero que o raciocínio referido diz respeito ao pensamento hipotético-dedutivo (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 189). Em outras palavras, sempre que citar problemas que envolvam raciocínio lógico, estou me referindo a desafios que provoquem um pensamento baseado em deduções. A seguir destacamos um exemplo de desafio deste tipo:

**(Os Chineses e seus Gorros)** Três chineses foram condenados à morte. Todavia solicitaram indulto. Este lhes seria concedido, mediante uma condição. Apresentaram-lhes cinco gorros, três brancos e dois pretos e, depois de lhes vendarem os olhos, foi colocado um gorro sobre cada cabeça. Em seguida, tiraram a venda do primeiro, dizendo-lhe: *“Se adivinhares a cor do gorro que tens na cabeça, serás indultado. Podes olhar os de teus dois companheiros, pois, talvez por eles, possas saber a cor do teu, com o que salvarás a tua vida”*. O chinês olhou os gorros dos companheiros, suspirou e depois, sacudindo a cabeça, declarou-se vencido, sendo, em seguida, conduzido ao patíbulo. Depois de retirada a venda do segundo, foi-lhe feita a mesma proposta, podendo olhar, apenas, o gorro do companheiro restante. Também o segundo chinês suspirou e [...] declarou-se impotente para adivinhar. Foi, igualmente, conduzido ao patíbulo. *“Agora é a tua vez”* disseram ao terceiro deles. *“De que cor é o teu gorro?”*, e o homem respondeu *“Branco”*. Era verdade e foi indultado. Como pôde adivinhá-lo? Você, por acaso, saberá explicar? (MADEIRA, 1959, p. 6).

O enigma mencionado desafia o leitor a descobrir de que maneira o último chinês conseguiu se livrar de sua morte. A solução passa por inferências típicas do raciocínio dedutivo, e ao seu final há o resultado que é a absolvição do chinês. Esse tipo de questão requer que se realize o exercício de enunciar hipóteses e deduzir consequências.



#### 1.4. O projeto de pesquisa

A proposta de abordar enigmas com estudantes deu origem a um projeto de pesquisa. A primeira versão desse projeto surgiu na disciplina Pesquisa em Educação Matemática<sup>3</sup>; o texto produzido nessa disciplina serviu como base para o trabalho desenvolvido, que consiste na implementação, experimentação e avaliação de um conjunto de atividades com estudantes do Ensino Médio, envolvendo a resolução de problemas de raciocínio lógico.

O conjunto de atividades, que denominei “Lógica & Ação”, busca uma motivação para a resolução de enigmas de lógica através da encenação das problemáticas e da argumentação dos alunos para justificar suas conclusões. Na dinâmica proposta, os alunos receberiam cada desafio podendo transformá-lo em uma encenação, não com o intuito de apresentá-lo teatralmente, mas com o objetivo de solucioná-lo. Cada pessoa pode criar uma ou mais representações mentais de determinado problema. Considerei que a possibilidade de encenação favoreceria a criação de novas representações para os enigmas propostos, possibilitando, talvez, outras interpretações a partir de confrontações entre os alunos.

A pesquisa desenvolvida teve como objetivos principais investigar as soluções encontradas pelos alunos durante a resolução dos problemas de raciocínio lógico, e também verificar se a dinâmica adotada nos encontros auxiliaria os alunos na resolução dos enigmas.

Inúmeras questões surgiram em meio à criação desse projeto de pesquisa. Dentre elas destaco algumas que orientaram a pesquisa e o planejamento das práticas:

- *Como se expressam as características de um adolescente em transição entre formas de pensar?*
- *De que maneira os alunos adolescentes estruturam suas soluções para nos convencer de seu veredicto?*
- *As encenações realizadas em “Lógica & Ação” são uma alternativa para melhor entendimento dos enigmas propostos?*
- *A experiência fará com que os alunos passem a dar maior importância a problemas que requeiram um raciocínio dedutivo?*
- *Será que “Lógica & Ação” provocará nos alunos uma curiosidade maior a respeito de problemas deste tipo?*

Considero que o trabalho desenvolvido pode ser classificado como Pesquisa Experimental (FIORENTINI, 2007). Ao seguir o método de Pesquisa Experimental, o autor

---

<sup>3</sup> Disciplina cursada em 2010/2.

da pesquisa tenta, de certa forma, produzir um efeito sobre um número de indivíduos selecionados. Existem dois tipos de pesquisas experimentais apontados na obra de Fiorentini (2007). A primeira delas é apresentada como “quase-experimental” (Ibid., p. 105), na qual o pesquisador tem um grupo de pessoas selecionadas sem o seu controle. A segunda, norteadora deste trabalho, é a “pesquisa experimental” propriamente dita, na qual o pesquisador possui um grau maior de controle das variáveis estabelecidas, inclusive pode variar os grupos envolvidos na observação. Este trabalho se aproxima bastante da Pesquisa Experimental, pois “os estudos experimentais caracterizam-se pela realização de ‘experimentos’ que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema” (Ibid., p. 104), ou seja, no contexto do projeto “Lógica & Ação”, as hipóteses são as questões de pesquisa, que poderão ser respondidas a partir das experimentações realizadas no decorrer do trabalho.

Para a organização da experiência com os alunos, primeiramente foi necessária uma escolha de questões que pudessem ser resolvidas através de conjecturas e deduções sistemáticas. Dentre os problemas pensados para o trabalho, não incluí aqueles em que, por exemplo, fazem-se afirmações e pretende-se validar outra afirmação a partir das premissas anteriores, tais como frases do tipo “O gato azul não gosta de carne, mas o gato preto adora ração, então...”. Também não pretendi explorar questões que requeressem uma resolução baseada no enunciado dos princípios da lógica proposicional, como, por exemplo, “ $p$  implica  $q$ ”, ou “ $\neg p$  implica  $\neg q$ ”, pois não era objetivo formalizá-la. Os enigmas escolhidos para a experiência desenvolvida com os alunos foram aqueles que suscitam soluções que podem ser apresentadas de maneiras verbais, de forma argumentativa, e também não verbais, através de representações simbólicas ou de encenações. A escolha dos enigmas se deu de forma pessoal; juntei um conjunto de livros que traziam enigmas e desafios lógicos, e, na medida em que os resolvia, selecionava aqueles de que eu tinha gostado mais, cuidando também para que possibilitassem formas variadas de representação. Buscou-se escolher problemas que possibilitassem examinar com certa riqueza de detalhes as interpretações feitas pelos alunos, de modo a perceber que tipo de raciocínio é empregado pelo aluno quando apresenta sua solução através da fala ou de uma encenação. Não era objetivo forçar a encenação dos problemas por parte dos alunos. A encenação viria como uma ferramenta para a sua resolução, mas não seria a única. Considerarei importante explorar a argumentação dos alunos no momento da resolução dos enigmas, é neste momento que podemos entender quais mecanismos se revelam nas falas dos estudantes.

Foi, portanto, uma preocupação da pesquisa registrar diferentes formas de pensar, bem como representações verbais e não verbais. Para obter esses registros, busquei utilizar o método clínico de Jean Piaget. Precisamos considerar que “[...] a abordagem piagetiana sugere que se procure compreender o que os acertos e os erros revelam sobre o raciocínio do sujeito examinado” (CARRAHER, 1983, p. 22). O método clínico nos apresenta uma maneira de analisar certas características de indivíduos através de suas falas, buscando entender quais mecanismos foram utilizados para a chegada de determinada conclusão. “A ênfase no método clínico piagetiano recai sobre o processo que leva o sujeito a dar essa ou aquela resposta” (Ibid., 1983, p. 19). Isto é, um dos objetivos centrais do método clínico é focar a atenção nos processos que desencadeiam o sujeito analisado a responder determinadas questões. Carraher (1983) argumenta que “a linguagem a ser empregada deve ser considerada com cuidado” (p. 27). Devem ser levados em conta os significados empregados pelos sujeitos às palavras utilizadas. Por exemplo, “[...] se o sujeito utiliza o termo ‘bichos’, é mais aconselhável que o examinador empregue esta palavra do que a palavra ‘animais’, que poderia ser desconhecida do sujeito e dificultar sua performance” (CARRAHER, 1983, p. 27). Devemos, portanto, ter o cuidado de analisar e interpretar os significados empregados pelos sujeitos em questão, diminuindo os riscos de influenciar negativamente no seu desempenho. Outra característica essencial, dentre outras apontadas por Carraher (1983), é que o examinador deve aprender a não concluir pelo sujeito (Ibid., p. 32), permitindo que a pessoa analisada chegue sozinha às próprias conclusões.

Em terceiro lugar, busquei uma base teórica que possibilitasse compreender porque os alunos chegaram a determinadas conclusões, e que tipo de pensamento foi possível notar enquanto resolviam os enigmas, tomando sua fala como objeto central de análise. Para o entendimento e fundamentação teórica, foi buscando um referencial a partir de algumas obras de Jean Piaget, apresentadas por John Flavell em “A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget” (1988), mais especificamente sobre o estágio de desenvolvimento que ele denomina “operatório formal”. Algumas diferenças entre o desenvolvimento da criança e do adolescente, descritas na teoria de Piaget, me fizeram optar por desenvolver a pesquisa com estudantes do ensino médio. Todavia, deixo claro que acredito na possibilidade de ampliá-lo às turmas do Ensino Fundamental, evidentemente levando-se em conta outros fatores aquém dos referidos aqui. Meu foco neste momento será o desenvolvimento da atividade no Ensino Médio, deixando em aberto a possibilidade para que interessados possam explorar tal tema com alunos do Ensino Fundamental.

É de suma importância um registro bastante detalhado dos encontros em um relatório diário, e sempre que possível acompanhado de fotos das encenações e das representações protagonizadas pelos alunos. Gravações em áudio também foram considerados materiais ricos para pesquisa, pois registram detalhes que não percebemos ou podemos registrar quando fazemos as anotações em papel. As gravações foram realizadas com uma câmera digital.

O trabalho, como mencionado anteriormente, destina-se a alunos do Ensino Médio. Um dos objetivos da proposta é tornar esse tipo de problema – enigmas lógicos - um motivador no aprendizado de matemática, e também buscar entender que raciocínio um aluno pode desenvolver diante das problemáticas propostas. Nossa expectativa é de poder ajudar os alunos a criarem o hábito de se motivar para resolver problemas de raciocínio lógico. Não é objetivo tornar essa prática de resolução algo mecanizado, por meio de práticas repetidas, ou com problemas sempre parecidos. Uma das ambições desta proposta é que, tendo encenado os problemas indicados e recriado sozinho encenações de outros problemas escolhidos por eles, fora do projeto, os alunos se sintam capazes de encarar um problema de raciocínio lógico de maneira a decifrá-lo. Espera-se também que, a partir de um determinado momento, as encenações não sejam mais necessárias e que a resolução desses enigmas seja uma prática constante.

Esse exercício de recriar a situação pode também ser encarado como um espaço lúdico de aprendizagem e, como este tipo de atividade parece ser pouco explorado em sala de aula, acredito que esta seja uma proposta inovadora.

Existem muitas obras recheadas com esse tipo de enigma, mas que são desconhecidos pelos estudantes (PEREIRA, 2006; SMULLYAN, 2008; STANGROON, 2010; MORICONI, 2010; VELOSO, 1992).

O produto final do trabalho, mais do que alguns resultados de pesquisa, é um material destinado a professores de matemática e de outras áreas do conhecimento. Acredito que a atividade possa ser utilizada por professores nas escolas. Este tipo de questão que envolve lógica pode ser explorado a partir do enfoque que proponho, como uma alternativa para a sua utilização. Os enigmas aqui listados podem ser aplicados, por exemplo, durante o ano letivo em sala de aula, de forma alternada, nos minutos finais de cada aula, podendo abranger o ano letivo inteiro, inclusive em meio aos conteúdos normais da grade curricular. Por se tratarem de questões que requeiram para sua resolução um raciocínio atento a premissas e suas consequências, acredito que o emprego destas questões junto aos conteúdos comumente trabalhados no dia a dia escolar possa auxiliar no aprendizado de matemática dos estudantes,

com reflexos no interesse do aluno pela matemática, conseqüentemente poderá ser um fator de melhoria do ensino. Por esta razão acredito que empregar enigmas lógicos nas aulas de matemática não se caracteriza como uma subtração do tempo letivo, mas como um acréscimo ao aprendizado dos alunos.

## **2. O PENSAMENTO FORMAL NA TEORIA PIAGETIANA**

Para a interpretação das soluções dos estudantes, consideramos necessário entender a maneira de pensar dos adolescentes. Para tal, neste capítulo, traremos à tona uma breve discussão a respeito das fases do desenvolvimento propostas por Piaget, com ênfase nas operações formais, mencionando a noção de possível e necessário no âmbito do pensamento formal, e, por fim, o conceito de tomada de consciência. Nosso intuito será compreender os mecanismos de que um adolescente se utiliza para resolver problemas, a partir daquilo que sua estrutura de pensamento possa permitir.

### **2.1. As operações concretas e as operações formais na teoria piagetiana**

Primeiramente, antes de analisarmos o que Piaget (*apud* FLAVELL, 1988) denomina operações formais e suas relações com o desenvolvimento do adolescente, vamos apresentar, de modo resumido, uma visão comparativa entre alguns dos estágios de desenvolvimento da criança segundo Piaget, para destacar as grandes vantagens cognitivas que os adolescentes podem possuir com relação às crianças. Começamos brevemente com a comparação entre os estágios pré-operacional e operacional concreto, e, após, traçaremos um comparativo entre os estágios das operações concretas e das operações formais.

Vejamos o estágio que Piaget denomina como operações concretas. São sugeridos, como possíveis integrantes desta etapa, crianças em torno de 8 a 11 anos de idade. Nesta fase, segundo a teoria piagetiana, as crianças podem apresentar progressos significativos com relação àquelas que, tendo em torno de 2 a 7 anos de idade, estão no estágio pré-operacional, anterior ao das operações concretas. Flavell (1988) destaca as seguintes diferenças entre o estágio operatório concreto e seu antecessor:

Sua superestrutura cognitiva consiste de sistemas em equilíbrio, ou seja, conjuntos altamente coesos de operações reversíveis (agrupamentos lógicos e infralógicos, etc.) que a tornam capaz de organizar e de estabilizar o mundo de objetos e de acontecimentos num grau totalmente vedado à criança mais nova (FLAVELL, 1988, p. 208).

Percebe-se assim que os processos de aprendizagem de uma criança de um estágio operacional concreto se diferenciam dos processos de aprendizagem das crianças que estão no estágio pré-operacional. O mesmo ocorre quando comparamos uma criança com um adolescente no estágio das operações formais. Flavell (1988) apresenta três possíveis

limitações nas operações concretas que permitem traçar um paralelo. Dentre elas, afirma que “o ponto de partida das operações concretas [...] é sempre o real e não o potencial” (Ibid., p. 208). Ou seja, mesmo podendo apresentar uma coleção qualitativa de novas características com relação ao seu antecessor pré-operacional, o estágio operatório concreto ainda tenderá a se ater ao real como ponto inicial, apesar de em alguns momentos poder de maneira limitada ambicionar a categoria potencial. “Ela (a criança) é capaz de extrapolar de maneira limitada [...] esta ordenação para uma situação ausente” (Ibid., p. 208). Por exemplo, se dermos uma série comparativa contendo objetos na ordem  $A < B < C$ , é possível que a criança do estágio operacional concreto consiga antecipar os próximos elementos não ordenados da série, digamos D, E (Flavell, idem). Deve-se notar que o ponto de partida para esta dedução dos elementos D e E foi o fato de existirem os elementos A, B e C anteriormente, ou seja, a situação partiu do real e atingiu um potencial, não o contrário.

Outra limitação no estágio operatório concreto, identificada pela teoria piagetiana conforme Flavell, diz respeito à conservação de quantidades, característica marcante quando tratamos das noções de conservação de peso e volume. Por exemplo, num corredor com prateleiras, se pedirmos a alguém desta fase operatória concreta para identificar qual delas possui uma maior quantidade de vasilhames, provavelmente ele ou ela indicará com precisão a prateleira correta. Noutra ocasião, ao apresentarmos três recipientes com água, de formatos diferentes, mas com o nível da água a uma mesma altura, o indivíduo poderá não diferenciar qual deles tem maior volume de água em seu interior. Exemplifico com o caso de termos três recipientes diferentes, um com formato cilíndrico, outro cúbico, e um terceiro semiesférico. Se colocarmos água nos três recipientes de maneira que a altura atingida pelo líquido seja a mesma, uma criança poderá se confundir ao ser perguntada sobre em qual dos recipientes há maior quantidade de água.

A terceira limitação apresentada é a chave para entendermos as possíveis diferenças entre o estágio Operatório Concreto e Operatório Formal. Esta barreira parece não permitir que as crianças em questão coordenem integralmente as suas operações de reversão. A possibilidade da criança do estágio operatório concreto não conseguir interligar seus sistemas é preponderante para entendermos suas possíveis limitações. Flavell (1988) detalha a questão assim:

Os vários sistemas operacionais concretos [...] existem como ilhas de organização consideravelmente separadas [...]. A criança [...], embora possua os dois tipos de operações reversíveis, não possui um sistema total que lhe permita coordená-los e

assim resolver problemas que possuam múltiplas variáveis e que requeiram este tipo de coordenação (Ibid., 1988, p. 209).

Conforme avançamos neste estudo, notamos que durante o nosso desenvolvimento é possível que passemos por uma cadeia de aprimoramentos adquiridos durante os anos de crescimento. Isto é, à medida que passamos pelos estágios de desenvolvimento, segundo a teoria piagetiana, nossa evolução parece ser composta por um comum encadeamento de aptidões, uma formação progressiva de nossas capacidades. Desta maneira, salientamos a importância do estudo dos diferentes estágios de desenvolvimento da criança propostos por Piaget, já que este encadeamento de capacidades pode justificar muitas características apresentadas pelo adolescente. Flavell (idem) argumenta a respeito afirmando ser um “axioma na abordagem piagetiana” (p. 207) o entendimento de uma fase a partir do contexto das fases anteriores.

A partir deste quadro, no contexto das operações concretas, podemos compreender quais são os grandes possíveis avanços das operações formais em comparação ao seu predecessor.

As operações formais compõem um estágio que segundo Flavell “constitui o ápice do desenvolvimento intelectual” (1988, p. 207), e que se caracteriza, primeiramente, pela coordenação integrada das capacidades até então reconhecidas nas fases anteriores. Anteriormente a esse estágio, estávamos evidenciando as características do estágio das operações concretas, responsáveis por organizar o mundo da criança em sua fase intermediária. Agora parece haver uma maior possibilidade de controle dessas características, com uma integração pouco a pouco construída, que poderá permitir ao adolescente a formulação de hipóteses. Flavell argumenta sobre a maneira pela qual pode ocorrer esta transição das operações concretas para as formais:

Podemos agora apresentar um paradigma inicial de como os adolescentes pensam. Inicialmente organizam os vários elementos dos dados brutos com as técnicas operacionais concretas dos anos intermediários da infância. A seguir, estes elementos organizados são transformados em afirmações ou proposições que podem ser combinadas de várias maneiras (Ibid., 1988, p. 211).

Portanto, nesta fase de transição observamos uma notória evolução de um estágio para o outro. Por um lado, descrevendo desta maneira a transição, pode parecer que estamos indicando um degrau que é subido repentinamente, como se estivéssemos sendo aprovados



numa série e entrando em outra mais avançada. No entanto, esta transição não ocorre de uma vez só, ela pode ser percebida aos poucos durante o desenvolvimento da criança.

Vejam agora algumas características essenciais deste período das operações formais. A primeira delas diz respeito ao pensamento hipotético. Nesta fase, segundo Flavell (1988), o adolescente candidata-se a mergulhar no mundo das hipóteses, das suposições, é o momento em que permite o pensamento acerca das possibilidades. Um detalhe característico deste ponto é que o real passa a ser um caso particular do potencial, ou seja, as operações formais possibilitam ao adolescente que não se prenda tanto ao real como premissa inicial. “Tentar encontrar o real dentro do possível requer [...] que se considere o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser sucessivamente confirmadas ou rejeitadas” (Ibid., 1988, p. 210).

Uma segunda característica possível de se identificar nesta fase de desenvolvimento do adolescente é o surgimento do pensamento baseado em proposições. Podemos exemplificar este elemento trazendo uma breve comparação com as operações concretas. Por exemplo, para um sujeito operacional concreto, os subsídios manipulados são dados retirados do real. Já nas operações formais, estes elementos se transformam em afirmações, capazes de conter estas informações e outras mais. Poderíamos perguntar a uma criança e a um adolescente o seguinte: “Se um produto do supermercado obteve um aumento de R\$ 50,00, este acréscimo é grande ou pequeno?”, e a resposta de uma criança poderia ser “É alto, imagina se o salgadinho que compro aumenta R\$ 50,00, minha mãe nunca mais iria comprar”; já o adolescente provavelmente diria “depende da mercadoria. Se o aumento foi de algo que custava R\$ 800,00, o acréscimo de R\$ 50,00 é relativamente baixo. Se o aumento for de uma mercadoria que custava R\$ 10,00, daí é um abuso”. Surge nesse âmbito o termo “proposição” mencionado no início do parágrafo. Para Flavell, o adolescente toma os resultados obtidos pelas operações concretas recriando-os como proposições, e assim os combina de várias maneiras obtendo múltiplas conexões lógicas entre estes possíveis resultados combinados. É uma característica a qual Piaget denominou “proposições sobre proposições” (Ibid., 1988, p. 210).

[...] ao mesmo tempo em que o sujeito combina os elementos ou fatores dados no contexto experimental, combina os enunciados proposicionais que exprimem os resultados de tais combinações de fatos, e assim constrói o sistema das operações binárias de conjunções, disjunções, exclusões, etc. [...] O sistema de operações proposicionais é, na realidade, uma combinatória, da mesma forma que as operações de combinações que se referem aos dados experimentais não tem outro fim, no espírito do sujeito, a não ser permitir-lhe estabelecer tais ligações lógicas (PIAGET, INHELDER, 1976, p. 91).

Podemos também citar outra caracterização que é uma consequência desta combinação de hipóteses e proposições. Recorrendo a essas combinações, o adolescente agora poderá se certificar dos resultados a partir do esgotamento das possibilidades. Por exemplo, a um grupo possivelmente identificado pela teoria piagetiana com sujeitos das operações formais, se propusermos que decidam qual rota seguir para viajar a determinada cidade, posto que devam escolher entre ir de ônibus e trem, ou somente de carro, ou tomando dois ônibus até o destino, antes de decidir esta viagem eles poderão discutir o que seria melhor, levando em conta as suas razões, tais como, por exemplo, gasto mínimo, tempo de viagem, segurança, etc. Aqui o grupo poderá debater num primeiro momento para depois decidir a melhor rota, após levarem em conta todas as possíveis escolhas, para daí escolherem a preferida. Não seria uma escolha aleatória passível de uma decisão casual. Busca-se um domínio dos acontecimentos possíveis, com o intuito de se perceber todas as possibilidades<sup>4</sup>.

O pensamento formal é, portanto, um sistema integrado de combinações, hipóteses e deduções. Neste âmbito há uma inversão de sentido entre o real e o possível (PIAGET, INHELDER, 1976, p. 189). O real não é mais o carro chefe, ele agora faz parte das possibilidades, e surge como um potencial compatível com alguma situação dada. O real, dentro do conjunto de possibilidades, no âmbito do pensamento formal, pode surgir a partir de deduções.

O pensamento formal é, na realidade, essencialmente hipotético-dedutivo: a dedução não mais se refere diretamente a realidades percebidas, mas a enunciados hipotéticos, isto é, a proposições que se referem a hipóteses ou apresentam dados apenas como simples dados, independentemente do seu caráter real: a dedução consiste, então, em ligar entre essas suposições, e delas deduzir suas consequências necessárias, mesmo quando sua verdade experimental não ultrapassa o possível [...]. em vez de apenas introduzir um início de necessidade no real [...] realiza desde o início a síntese entre o possível e o necessário, deduzindo com rigor as conclusões das premissas [...] e assim vai do possível para o real (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 189)

Temos, portanto, uma coordenação de esquemas de pensamento que manipulam hipóteses e utilizam a dedução para verificar suas consequências necessárias. Aqui podemos citar expressões do tipo “tem que ser”, ou “tem que estar”, comumente empregadas por pessoas que estejam no estágio das operações formais. Por exemplo, se tivermos uma coleção com cinco livros, sendo três de matemática, um de física e um de química, e tomarmos três destes livros aleatoriamente, perguntando a uma pessoa desse estágio “eu peguei três destes livros,

---

<sup>4</sup> Outro grupo poderia simplesmente escolher uma alternativa sem discutir as possibilidades. Na prática, nem todas as decisões que tomamos levam em conta deduções. Por vezes tiramos conclusões baseadas em hábitos.

um deles é de matemática?”, este sujeito dirá “Sim! Tem que estar aí. Na pior das hipóteses tu pegaste somente um livro de matemática”. Ou seja, ele afirmaria que necessariamente um dos livros de matemática foi retirado da pilha inicial de cinco livros, e leva em conta, mesmo sem dizer abertamente, os casos de ter pegado dois ou três livros de matemática. Não foi preciso testar os casos, a dedução através do pensamento formal permitiu que chegasse a esta conclusão.

Sobre o papel do necessário e do possível, “não se trata de explicar a constituição de uma operação isolada [...], mas de dar-se conta do principal caráter das operações de toda natureza, que é de se agregar em sistemas gerais” (PIAGET, 1986, p. 127). A integração sistematizada entre as operações em questão é uma característica marcante do pensamento adolescente.

O adolescente é o indivíduo que, embora diante de situações vividas e reais, se volta para a consideração de possibilidades [...], o adolescente, ao contrário do que ocorre com a criança, é o indivíduo que começa a construir sistemas e teorias (PIAGET, INHELDER, 1976, p. 252 e 253).

Podemos considerar, portanto, o adolescente como um sujeito próprio que teoriza e constrói sistemas, sejam eles de hipóteses ou de deduções próprias de sua fase de desenvolvimento, situando, então, o sujeito das operações formais conforme trecho a seguir:

O pensamento formal não é este ou aquele comportamento específico, mas uma orientação generalizada, explícita ou implícita, para a solução de problemas: uma orientação no sentido de organizar os dados (análise combinatória), isolar e controlar variáveis, formular hipóteses e justificar e provar logicamente os fatos (FLAVELL, 1988, p. 215 e 216).

## **2.2. A tomada de consciência**

É essencial compreendermos de que maneira se dá a conceituação de uma ação por parte do sujeito, pois é uma oportunidade que temos para a intervenção em situações de aprendizagem (SANTOS *et al*, 2006, p. 57). Assim, trataremos na atual seção o conceito de Tomada de Consciência (PIAGET, 1977). Podemos considerar este conceito conforme trecho a seguir, retirado do Prefácio da obra “A Tomada de Consciência” (1977):

Percebeu-se, [...] com a psicologia das condutas, que uma parte considerável destas, ou de seu mecanismo, permanece inconsciente e que, conseqüentemente, a tomada de consciência exige a intervenção de atividades especiais, dependendo delas e

tornando-se, por sua vez, capaz de modificá-las. Quase que se pode chegar a dizer que a “tomada” de consciência representa algo de diferente e que vai além de uma “tomada”, isto é, de uma incorporação a um campo dado de antemão com todos os seus caracteres e que seria a “consciência”: trata-se, na realidade, de uma verdadeira construção, que consiste em elaborar, não “a” consciência considerada como um todo, mas seus diferentes níveis enquanto sistemas mais ou menos integrados (PIAGET, 1977, p. 9).

Segundo Santos (2006), o processo de Tomada de Consciência consiste nesta identificação da conceituação que o sujeito faz a respeito de sua própria ação. “Estudar o processo de Tomada de Consciência pode fornecer indícios para entender os processos inferenciais, presentes na relação sujeito – objeto, que muitas vezes não estão conscientes” (Ibid., 2006, p. 57). A importância deste estudo pode ser ressaltada como segue:

Tomar consciência não significa apenas perceber um conhecimento que já estava pronto, mas que apenas não era considerado. O processo de Tomada de Consciência [...] se constitui numa conduta capaz de gerar novas equilíbrazões. Nestas condições, o método qualitativo se apresenta como mais adequado para a investigação deste processo, na medida em que permite uma análise pormenorizada das intenções do indivíduo durante e depois de sua ação (SANTOS *et al*, 2006, p. 58).

Nas obras “A Tomada de Consciência” (PIAGET, 1977) e “Fazer e Compreender” (idem, 1978), o autor relata inúmeros experimentos cujo objetivo era descrever como se dá o processo de Tomada de Consciência. O conceito é pincelado aos poucos em cada relato, ao final dos experimentos. A pauta dos experimentos referidos consistia em um diálogo aberto entre o pesquisador e o sujeito entrevistado, onde lhes eram feitas perguntas “com o objetivo de que relatem os meios utilizados para obter êxito, ou os motivos que levaram ao fracasso em algumas situações” (SANTOS *et al*, 2006, p. 57). Não se analisa o êxito, mas o porquê de ter sido ou não alcançado.

A conceituação fornece à ação um aumento da sua capacidade de previsão, consistindo em uma melhoria do poder de coordenação, sem que o sujeito estabeleça fronteiras entre a sua prática (“o que fazer para ter êxito?”) e o seu sistema de conceitos (“por que as coisas se passam dessa maneira?”). Quando o sujeito alcança níveis nos quais a conceituação fortalece a ação, libertando-a dos planos restritos e provisórios que somente são reajustados a partir dos seus resultados, podemos falar em “práticas que se apóiam em teorias” (NEVADO, 2001, p. 34).

Trata-se, portanto, de um processo bastante complexo. Para nós, o importante será fixarmos nossa atenção nas ocasiões onde possa haver a tomada de consciência, isto se identificarmos tal incidência. Assim poderemos identificar os alcances de conceituação dos sujeitos a respeito de sua própria ação.

### 3. RELATO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

As oficinas desenvolvidas para a pesquisa foram realizadas como atividades da disciplina de Estágio em Educação Matemática II. No estágio, entre os requisitos para a aprovação, estavam previstos dois tipos de atividades: a docência por um período regular em uma turma do Ensino Fundamental, e um projeto de oficinas envolvendo qualquer série da escola. Aliando dois objetivos, um deles o projeto de Estágio, e o outro o Trabalho de Conclusão de Curso, escolhi uma turma do Ensino Médio (Curso Normal) do turno da tarde, antigo curso de magistério, e convidei os alunos dessa turma a participarem das oficinas. Elas foram preparadas para serem realizadas em quatro encontros, nas datas previamente combinadas das quartas-feiras dos dias 3, 10, 17 e 24 de maio de 2011, no período da manhã, para que não prejudicassem o andamento letivo da turma convidada. Cinco alunos participaram das oficinas, sendo que um deles as abandonaria no decorrer das atividades por motivos profissionais.

Primeiramente, antes de pensar numa dinâmica dos encontros, havia a necessidade de escolha dos enigmas que seriam aplicados nas oficinas. Porém, para facilitar essa escolha, preparei meses antes das oficinas um banco contendo 19 enigmas pré-selecionados<sup>5</sup>. Esta pré-seleção partiu de uma pesquisa realizada em alguns livros e revistas (PEREIRA, 2006; SMULLYAN, 2008; STANGROON, 2010; MORICONI, 2010; VELOSO, 1992) que trazem questões e problemas de raciocínio lógico. Para que o banco não contivesse um número elevado de enigmas, dado que em cada livro ou revista pesquisada havia um número grande de sugestões, resolvi iniciar minha busca um a um resolvendo-os no tempo livre, como uma atividade de lazer. Na medida em que eu resolvia cada questão, utilizava dois critérios para incluir ou não o enigma na lista de possíveis de serem aplicados nas oficinas. O primeiro critério era avaliar a possibilidade de se recriar a situação exposta no desafio de maneira concreta, isto é, se um enigma pudesse ser representado como uma encenação, ele teria a chance de ser incluído na lista. Já o segundo critério, este muito pessoal, levava em conta a dificuldade que tive em resolvê-los, e para a lista final escolhi um apanhado daqueles que julguei serem fáceis, médios ou difíceis, em igual quantidade. Aliando os dois critérios, escolhi um número razoavelmente pequeno para a lista de possibilidades. Não foi necessário pensar uma lista contendo muitos enigmas, dado que alguns deles poderiam tomar bastante

---

<sup>5</sup> A lista completa contendo os 19 enigmas consta em Apêndice A.

tempo dos alunos. Este fator contribuiu para que sobrassem enigmas na lista completa de questões.

Após a criação do banco de enigmas, comecei a pensar nos encontros com os alunos. Considerei que a produção deles seria essencial para a dinâmica das oficinas, pois o ritmo que empregariam em cada desafio determinaria a continuidade na sua resolução. Não me preocupei em estipular com muita precisão um tempo para cada questão. Os enigmas propostos para cada encontro eram previamente escolhidos, levando em conta a produção da turma nos encontros anteriores, isto é, para o segundo encontro, por exemplo, seria levado em conta a produção dos alunos no primeiro, e assim por diante. Esta flexibilidade permitiria que houvesse mudanças na escolha ou na ordem de aplicação de algum enigma no próprio dia da oficina. Por exemplo, se um desafio causasse apreensão dos alunos a ponto de desistirem dele, a questão poderia ser retirada ou simplesmente deixaríamos o desafio de lado por um tempo, até que os alunos voltassem a empregar sua atenção nele. Contudo, mesmo tendo esta flexibilidade e, até certo ponto, uma liberdade por parte dos alunos, os encontros foram pensados com alguns elementos que não se alterariam. Um deles seria a divisão dos alunos em pequenos grupos de discussão, ocasião em que os enigmas seriam resolvidos e discutidos entre eles. Esta divisão ocorreria sempre nos primeiros minutos de cada encontro, tentando sempre preservar os grupos por afinidade. Cada grupo iria discutir o enigma proposto de maneira que o outro grupo não pudesse ouvir as suas discussões, com o intuito de permitir que cada grupo chegasse, se possível, às suas próprias soluções. Esta característica pautaria os encontros nas oficinas.

Escolhidos os 19 enigmas para a pré-lista e pensadas as oficinas com alguns destes desafios, seria importante registrar as discussões e as conclusões a que cada grupo chegaria com relação aos enigmas dispostos. O registro seria feito com o auxílio de gravação de áudio captado com as imagens de uma câmera digital, ou com registros escritos no diário de bordo. Nem todos os momentos foram registrados em detalhes, somente alguns cujo detalhamento julguei serem de suma importância, como por exemplo, conversas entre os alunos a respeito de determinado enigma, e também ficaria inviável registrar com tanto detalhe todos os momentos dos encontros, o que poderia tornar o trabalho muito extenso.

Os relatos apresentados a seguir narram os encontros, incluindo o enunciado dos enigmas utilizados e algumas transcrições das falas dos alunos participantes das oficinas, nas suas tentativas de encontrarem as soluções. Com estes elementos, tento trazer um detalhamento dos acontecimentos presenciados nos encontros. No intuito de preservar o

anonimato dos alunos participantes, no relato, eles serão designados por nomes fictícios. Nas menções às minhas intervenções, serei tratado como Pesquisador.

### 3.1. Encontro 1 – 03/05

No primeiro encontro estavam presentes cinco alunos, aos quais nos referiremos pelos nomes Daniel, Evelise, Amanda, Taís e Emília; os alunos foram divididos em dois grupos, um com Daniel e Evelise (Grupo 1) e outro com Amanda, Taís e Emília (Grupo 2). O primeiro momento foi planejado para que pudessem ser discutidos com os alunos alguns objetivos deste trabalho e as regras estipuladas; também foi enfatizado o termo de compromisso que seria assinado pelos alunos para autorização da gravação dos encontros e para o registro escrito de suas ações.

O segundo momento iniciou-se com a divisão dos grupos e a entrega de uma lista contendo um enigma. O primeiro enigma dado foi o de número 19 (“Qual é a moeda falsa?”). Cada grupo recebeu um envelope contendo este enigma, e o desafio era descobrir um modo de identificar, dentre oito moedas aparentemente iguais, uma falsa, mais leve que as outras, podendo-se realizar apenas duas pesagens em uma balança de pratos.

Quadro 1: Enigma 19.

**Enigma 19 (Qual é a moeda falsa?):** Temos oito moedas rigorosamente iguais na sua aparência exterior. No entanto, uma delas é falsa e pesa menos que as outras sete. Como descobrir qual é falsa fazendo apenas duas pesagens numa balança de pratos? (VELOSO *et al*, 1992, p. 16).

Ambos os grupos começaram a resolver o enigma tentando imaginar a pesagem inicial das oito moedas simultaneamente, com quatro em cada prato. Em seguida foram dadas ao grupo 2 oito moedas idênticas na sua aparência exterior para auxiliá-los na representação das pesagens.



Figura 1: Conjunto de oito moedas utilizado pelos grupos

O grupo 1, ao ver as moedas sendo usadas, tratou de encontrar oito moedas também idênticas em seus pertences e utilizou-as no experimento. A balança foi representada pelas mãos, cada uma delas correspondendo a um prato de pesagem. A escolha inicial em ambos os grupos foi pesar as oito moedas já no início, na primeira tentativa.



Figura 2: Tentativa inicial dos dois grupos com quatro moedas em cada prato

O grupo 1, além de tentar pesar as oitavas moedas na primeira tentativa, com quatro em cada prato, por um momento pareceu não lembrar que eram permitidas apenas duas pesagens.

Evelise: “Balança de pratos é aquela balança que, é tipo um signo de libras, não é?”.

Pesquisador: “Isso, balança com dois pratos”.

Evelise: “Como são oito moedas, eu pego quatro para cada lado, divide, aí um lado vai ficar mais pesado que o outro” - Evelise está afirmando que colocará 4 moedas em cada prato da balança, e também conclui que um dos pratos irá necessariamente descer. Aqui podemos notar que ela está operando com a hipótese de que, colocando quatro moedas em cada prato,



necessariamente a mais leve estará num dos pratos, e conclui com uma implicação afirmando que um prato vai ficar mais pesado que o outro, ou seja, esta é a consequência inicial de sua escolha.

Daniel: “Se a gente tirar uma moeda que...”.

Evelise: “Pra descobrir a falsa, a gente vai tirando uma moeda de cada lado que vai ficar mais...” - ela está afirmando que, retirando as moedas uma a uma, conseguiremos encontrar a falsa.

Porém, esta tentativa caracteriza mais do que duas pesagens. O pesquisador intervém.

Pesquisador: “Quando tu tiras uma moeda estás caracterizando uma pesagem?”.

Evelise: “Ah bom, são só duas pesagens”.

Neste momento a dupla parece estar entendendo o enunciado, quando afirma que são permitidas “duas pesagens” apenas.

O grupo 2 também iniciou suas tentativas com a primeira pesagem de quatro moedas em cada prato. O pesquisador antecipou-se na tentativa de salientar que o enigma permite apenas duas pesagens.

Pesquisador: “São duas pesagens. Como vocês pesaram a primeira?”.

Amanda: “Pesou quatro e quatro” - Amanda faz o movimento com as mãos como se fossem os pratos de uma balança - “aí um deu menor” – ou seja, ela afirma que um dos pratos necessariamente sobe por ter um peso menor. Amanda, assim como anteriormente Evelise no outro grupo, está operando com a hipótese de que necessariamente a moeda mais leve estará em um dos pratos, caso coloquemos em cada um deles quatro moedas. A implicação desta hipótese é que um dos pratos irá subir, ao passo que o outro irá descer.

Pesquisador: “Ok, e depois?”.

Amanda: “É o que a gente estava tentando fazer, daí tu chegou e perguntou”.

Pesquisador: “Então vou deixar vocês continuarem, já volto”.

No momento citado acima, percebo que a intervenção no grupo 2 está sendo apressada. Isso foi notado pela própria aluna Amanda. Momentos depois, o pesquisador volta ao grupo.

Emília: “Eu medi quatro e esta [mão] aqui está mais pesada, daí a gente desclassifica essa daqui. Essas [que estão no prato mais leve] são as verdadeiras, sobraram quatro. A gente vai fazer outra pesagem. Essas duas aqui são mais leves”.

Emília, com as moedas nas mãos, realizou a primeira pesagem com quatro moedas em cada prato, em seguida descartou as moedas do prato mais pesado e realizou a segunda

pesagem com as moedas restantes, duas delas em cada prato. Após essa nova pesagem descartou mais duas moedas, restando duas. Porém, neste exato momento o grupo fica apreensivo, pois percebe que o número máximo de pesagens já havia sido feito, e mesmo assim ainda havia dúvida sobre as moedas.

Neste caso, percebemos que o grupo organizou uma sistemática que permite identificar a moeda falsa, mas que demanda três pesagens. A sistemática pensada, como outras que serão relatadas a seguir, envolve operações com hipóteses, pois não há verdadeiramente uma moeda que seja mais leve que as outras, e, portanto, é preciso imaginar sua existência considerando a possibilidade de que esteja nesse ou naquele prato durante as pesagens.

Depois deste impacto, Taís entra em cena.

Taís: “Eu não vou conseguir fazer com duas pesagens, com *só* duas pesagens” – Taís enfatiza o termo “só”, elevando a sua voz.

Pesquisador: “Ok, mas de repente consegues mudando alguma coisa”.

Taís: “Olha só, eu tenho oito moedas. Professor, que balança é essa?”.

Pesquisador: “É uma balança de pratos”.

Amanda: “É a balança da justiça”.

Taís: “Não vai ter resultado!” – Taís acredita que tal enigma não possui uma solução. O resto do grupo também não parecia acreditar. Como consequência da escolha inicial de oito moedas a serem pesadas, quatro a quatro na primeira pesagem, para a segunda pesagem sobriam moedas sem que se garantisse o conhecimento da mais leve. Portanto, ambos os grupos deveriam partir para outra estratégia. Isso foi percebido no grupo 2 após terem experimentado algumas vezes com as moedas em mãos.

Taís: “Eu ainda não superei” – Taís diz que não superou a convicção inicial de que não haveria uma solução para o enigma apresentado.

Emília: “Tô dizendo, acho que vai ser de três” – Emília suspeita que, pesando inicialmente três moedas em cada prato, poderia conseguir resolver a charada. Porém, esta possibilidade acaba sendo temporariamente descartada pelos demais integrantes do grupo.

Taís: “Vai dar a mesma coisa do outro!”.

Amanda: “É, e se a ‘desgraçadinha’ estiver aqui” – se a moeda leve estiver em um dos pratos – “vai ser igual” – igual à escolha feita anteriormente, que não garantiu uma solução ao enigma, de acordo com Amanda.

A ideia de que é necessário pesar as oito moedas envolve o pressuposto de que a moeda falsa tem que estar entre as moedas que serão pesadas. Eles parecem acreditar que, descartando uma ou mais moedas das pesagens, poderão estar descartando a mais leve. Nesse caso avaliam que não poderão chegar a conclusão alguma. Isto é, eles parecem acreditar que não conseguirão concluir algo sobre a falsa, se ela não estiver sendo pesada.

Pesquisador: “Na escolha anterior vocês fizeram a pesagem com quatro moedas em cada prato no início, e não deu certo”.

Emília: “Mas nada a ver, a ordem dos fatores não altera o resultado. Vai que a gente começou pelo final” – Emília parece dizer que iniciando as pesagens com menos moedas, ao final o resultado poderá ser o mesmo, e que também seria necessário pesar em algum momento 4 e 4.

Taís: “Olha só, por exemplo” – Taís simula uma pesagem com quatro moedas em cada mão e faz uma suposição – “a falsa tá aqui”.

Amanda: “Agora tu pesa 3 e 1” – com três em um prato e uma no outro.

Taís: “Mas vai dar a mesma lógica, se a mais leve estiver aqui [entre as três moedas] a gente vai continuar sem a leve, isso não garante, o que garante é 2 e 2, mas daí eu precisaria de três pesagens” - Taís parece compreender que, em qualquer tentativa, é preciso comparar números iguais de moedas, pois se houver mais moedas em um prato ele ficará mais pesado, mesmo que contenha a moeda falsa, e não se poderá chegar a nenhuma conclusão. O grupo 1 chegou à mesma constatação.

Evelise: “Se tu dividir, um lado vai ficar maior que o outro”.

Pesquisador: “Fez uma pesagem, e agora?”.

Daniel: “Tô pensando”.

Cerca de dois minutos depois, novamente entro na discussão.

Pesquisador: “Quantas moedas vocês pesaram primeiro?”

Evelise: “Quatro”.

Pesquisador: “De repente mudando alguma coisa...”.

Evelise: “Ok, mas, se eu tiver 5 aqui [em uma mão] e 3 na outra, vai continuar pesada”.

Pesquisador: “Por que 3 e 5 não dá?” - isto é, questiono sobre o porquê de não se poder fazer a pesagem com cinco moedas em um prato e três no outro.

Evelise: “Porque eu vou ter mais peso numa e menos peso na outra” – ou seja, o prato com cinco moedas, contendo ou não a moeda falsa, necessariamente descerá, apontando mais

peso que o outro prato com três moedas. Evelise está pensando de maneira dedutiva. Parece compreender que, se colocarmos cinco moedas em um prato e três no outro, o prato com cinco moedas desce; mas também, se a mais leve estiver dentre as cinco moedas do primeiro prato, então o prato novamente descerá, o que a faz concluir que necessariamente o prato com cinco moedas desce, independentemente da moeda mais leve estar ou não nele; é o que veremos a seguir.

Evelise: “A falsa pode estar entre as mais pesadas? Olha só professor, voltamos de novo à estaca zero. Aqui tem as cinco moedas que são mais pesadas [numa mão], e aqui tem três que são as mais leves” – referindo-se à balança de pratos que teria mostrado serem mais pesadas as cinco moedas que as três do outro prato – “a mão direita ela pode estar mais pesada, mas pode estar contando aqui uma moeda leve”.

Este argumento apresentado por Evelise parece ter sido a chave para que o grupo 2 não se preocupasse mais com as outras possibilidades de pesagem com um número diferente de moedas por prato. Podemos notar que em ambos os grupos, de maneira muito parecida, chegou-se à conclusão de que as pesagens devem ser feitas de tal maneira que cada prato deve conter o mesmo número de moedas do outro prato, caso contrário a moeda mais leve não será identificada. Notei que, aos poucos, as moedas foram servindo como uma ferramenta que aproximou os dois grupos das condições estabelecidas pelo problema. Assim como no enunciado do enigma, as moedas eram idênticas e, como consequência, indistinguíveis a olho nu. Além disso, as oito moedas de que os dois grupos dispunham possuíam o mesmo peso se comparadas a partir da percepção do tato, ou seja, eles não poderiam medir seu peso usando as mãos como parâmetros, sendo necessária a utilização de uma balança hipotética ou uma balança real. Ocorreu uma mistura entre a ficção, com o enigma, e a realidade da sala de aula, onde eles deveriam alcançar uma solução possível para aquela pergunta, tendo posse de oito moedas idênticas.

Em outro momento, o grupo 1 tentou fazer uma pesagem inicial com duas moedas em cada prato, sobrando quatro fora dos pratos. Se um dos pratos da balança erguesse, informaria que a moeda mais leve estava nesse prato, sendo necessário depois somente mais uma pesagem entre as moedas do prato que subiu. Acontece que há outra possibilidade, logo percebida pelo grupo, como se vê a seguir, que é a da balança equilibrar com as quatro moedas. Neste caso, sobrariam quatro moedas a serem pesadas na segunda tentativa, o que não garantiria o conhecimento da moeda falsa.

Daniel: “Eu fiz a pesagem 2 e 2. Vamos supor que esse aqui subiu e esse aqui baixou” - realizando o movimento com as mãos de um prato subindo e outro descendo – “Aí eu descarto essas aqui, e pra descobrir qual das duas é a falsa...” - referindo-se à segunda pesagem com as duas moedas que levantaram a balança na primeira pesagem – “Mas pode também acontecer das duas terem o mesmo peso das outras” - Daniel está supondo que na primeira pesagem ambos os pratos se equilibraram – “Daí iam sobrar as outras quatro, mas daí eu não vou saber qual é.” - ele acaba de descobrir que sua escolha de passos não garante o conhecimento da moeda mais leve em duas pesagens. A escolha inicial por duas moedas em cada prato pode até dar certo se tivermos a sorte de escolher a mais leve dentre as primeiras moedas da pesagem, mas não garante que a encontremos. Desta vez, o grupo parece iniciar seguindo apenas a hipótese da moeda falsa estar entre as quatro primeiras, mas também parece saber que deve considerar a outra hipótese, e ao considerá-la percebe que a estratégia é falha. Esta tentativa mostra que é preciso considerar ainda uma hipótese de cada vez, como se fosse uma experimentação, só que mental. Segundo Flavell (1988), esta é uma característica do pensamento formal, ao passo que traz elementos combinados e hipóteses experimentadas mentalmente, que não podem ou não necessitam ser experimentadas de maneira concreta.

O grupo 2 também pleiteou rapidamente esta possibilidade, mas não deu tanta ênfase a ela, pois em certo momento percebeu que esta estratégia de realizar a pesagem 2 e 2, utilizada pelo outro grupo, estava equivocada, pois envolveria mais de duas pesagens. Sendo assim desistiu de tentar esta possibilidade.

O grupo 1 não conseguiu resolver o enigma por completo. Momentos depois das ocasiões descritas acima, o grupo 2 conseguiu uma solução que garantiria o conhecimento da moeda mais leve com somente duas pesagens. Seus componentes resolveram o enigma com a seguinte justificativa. Primeiramente, realizariam a pesagem com três moedas em cada prato, com duas possibilidades de resultado: ou os pratos se equilibrariam (1) ou os pratos não se equilibrariam (2). Caso ocorresse a situação (1), as seis moedas pesadas sairiam de cena, e se realizaria a segunda pesagem com as duas moedas que haviam ficado de fora, identificando-se assim a moeda mais leve. Se ocorresse, no entanto, a situação (2), então a moeda mais leve teria que ser uma das três moedas que estavam no prato que acusou menos peso, e todas as demais seriam descartadas. Assim, seria realizada em seguida a segunda pesagem com uma moeda em cada prato; se estas não alterassem a configuração da balança, isto é, se os pratos se equilibrassem, então a terceira que sobrou seria a mais leve; se a balança indicasse pesos diferentes, então identificaríamos a mais leve em um dos pratos, justamente o que subiu. O

grupo 2 chegou a esta conclusão, como podemos ver a seguir na transcrição da conversa que culminou na descoberta da solução. Antes de concluir a questão, o grupo 2 ainda perpassou pela tentativa de se pesarem 2 e 2 no primeiro experimento.

Emília: “Agora eu tenho 2 e 2” - cada prato na primeira pesagem com duas moedas – “Ficou igual” – os pratos se equilibraram – “Descarto. A gente vai ter a última pesagem. A gente vai dividir assim no prato, dois e dois. Quando esse prato aqui descer, esse [outro] aqui vai ser grande” - mais alto, irá subir – “daí a gente vai olhar o prato e ver o lado que estiver mais ou menos assim” - afirmando que o prato que sobrou se inclina. Aqui percebo que Emília está tentando resolver o enigma afirmando que, o prato que contiver duas moedas, sendo uma delas a mais leve, ficará levemente inclinado para o lado da mais pesada das duas, podendo-se assim “microscopicamente” identificar a moeda mais leve. Porém, ao mesmo tempo em que Taís critica a escolha da colega, Emília descobre a solução, e aos poucos a vai lançando às colegas.

Taís: “Não, não!” – Taís refuta o argumento anterior de Emília.

Emília: “É verdade! Tem que ser 3 e 3! Peso, ficou igual” – os pratos não se alteraram – “Muito bom!” - festeja pois para a segunda pesagem restam duas moedas.

Amanda: “Mas se na primeira...” – Amanda quase consegue terminar sua frase, que provavelmente seria “se na 1ª não equilibrasse?”.

Emília: “Quer ver? A gente usou nossa primeira pesagem”.

Amanda: “Se a leve estiver aqui?” – em um dos pratos com 3 moedas.

Emília: “Aí tu vai ver, entendeu? Tu vai descartar estas duas” – que estão fora da balança – “e estas outras aqui” - as três do outro prato.

Amanda: “É o que tu vai fazer com essas três?” – as três do prato que se elevou, dentre as quais está a mais leve.

Emília: “Aí tu vai tirar no par ou ímpar” – aqui ela tenta desconstrair um pouco.

Pesquisador: “Não, não entendi”.

Taís: “Professor, olha só. Deixa eu te explicar a lógica. A gente vai fazer 3 e 3, a gente tem as duas hipóteses. Se nenhuma dessas aqui...” – Taís faz o gesto das balanças, com três moedas cada, se equilibrando, o que nos faria descartar todas as seis primeiras moedas – “Descarta as seis. A segunda pesagem aqui vai dar...óbvio” - afirmando que a segunda pesagem nos mostra a moeda mais leve – “Porém, se a leve estiver aqui” – isto é, se a mais leve moeda estiver entre as três moedas de um dos pratos da primeira pesagem – “a gente descarta as que são mais pesadas, e essas aqui a gente divide em 2 e vai fazer isso aqui” -

neste momento Taís surpreendentemente realiza a pesagem com duas moedas numa mão e uma na outra. Eles aparentemente haviam descartado a ideia de colocar números diferentes de moedas nos dois pratos, porém retomam esta possibilidade. Emília, ao ver isso, entra na conversa. Porém, ela também comete um equívoco, ela retira uma moeda do prato que contém duas moedas e a coloca no outro, caracterizando a mesma situação aventada por Taís. Desta vez está ocorrendo um pressuposto implícito nas pesagens, assim como havia sido nas primeiras tentativas. Eles acreditam que a moeda falsa tem que estar em alguma pesagem, não havendo a possibilidade de identificá-la por exclusão. Ou seja, mesmo excluindo a moeda falsa na primeira pesagem de 3 e 3, parecem acreditar que a moeda falsa necessariamente fará parte de uma pesagem.

Emília: “Assim, se essa aqui” - balança com 2 moedas – “descer mais, aí vai ser mais forte ainda, daí a gente vai ter certeza”.

Amanda: “O que me garante que aqui ou aqui não dá a mesma coisa?” – ou seja, Amanda percebe que usar as configuração 2 e 1 ou 1 e 2 nesta última pesagem não garante nada, como os dois grupos haviam percebido anteriormente. O grupo então recomeça com a escolha inicial de 3 e 3 na primeira pesagem. Eles tentaram, desta vez, repetir o primeiro argumento da pesagem 3 e 3 e daí partiram para o final da solução.

Pesquisador: “Tentem chegar novamente àquelas hipóteses de que a balança equilibra ou não”.

Taís: “Aqui, essa aqui é mais pesada” – ou seja, um dos pratos contendo três moedas pesou mais.

Emília: “Daí a gente vai descartar cinco direto” - cinco moedas a menos para pesar.

Pesquisador: “Vocês tem mais uma pesagem e só três moedas”.

Emília: “Ah!” - Ela escolhe para segunda pesagem a configuração 1 e 1 e vibra – “a gente vai botar duas só. Aí se tiver igual, a gente sabe que essa que sobrou é a mais leve, mas se a gente botar ali vai baixar aqui” – isto é, se a balança desequilibrar, eles já terão encontrado a moeda mais leve, que será a moeda do prato que ergueu – “E já sei!”

Taís: “Exatamente!”.

Amanda: “Professor, é isso!”.

O grupo 2 acabara de solucionar o enigma. Com isso, eles resolveram ir ao grupo 1 para discutir o resultado encontrado. O grupo 1 parecia haver desistido de solucioná-lo, daí autorizei o diálogo entre os grupos. Aceitei a proposta do grupo 2, que se dispôs a explicar ao outro grupo o seu feito.

Em seguida, abriu-se uma discussão entre os dois grupos. O grupo 2 tentou explicar a resolução do enigma, enquanto os integrantes do grupo 1 rebatiam com perguntas a respeito dos argumentos do grupo 2. Nesse diálogo o grupo 2 tentava convencer o grupo 1 de que haviam encontrado uma solução que garantiria o conhecimento da moeda mais leve, solução que abrangia todas as possibilidades.

Emília: “Vamos com seis moedas na balança para ficar igual” – ela iniciou pesando seis moedas, com três em cada prato – “Aí, vamos supor que esse lado aqui baixou, ou seja, ela [a mão = o prato da balança] é mais pesada, a gente vai descartar essas aqui” – descarta as três moedas do prato mais pesado – “e também essas daqui” – as duas moedas que não fizeram parte da pesagem – “Aí a gente tem mais uma pesagem, e nós vamos colocar duas moedas só pra poder ser igual” – note que, neste parágrafo, Emília citou duas vezes o termo “igual”, e acredito estar se referindo à necessidade de se colocar um número igual de moedas em cada prato, para poder chegar a alguma conclusão. Desta vez a pesagem em questão é 1 e 1 - “Então essa daqui vai baixar e essa daqui vai subir, porque essa aqui é a mais leve” – Emília está fazendo uma suposição, dizendo que um dos pratos é mais leve, pois supostamente contém a moeda mais leve – “Se essas duas ficarem iguais então essa daqui é a mais leve” – referindo-se à moeda que não participou da pesagem, supondo desta vez que os pratos se equilibraram na pesagem 1 e 1.

Daniel: “Tá, mas pode ser que sim, e pode ser que não” – Daniel está antecipando que a primeira pesagem poderia não ser como o grupo 2 informou. Ou seja, Daniel está apenas afirmando que há outro caso não contemplado nesta fala de Emília. Este comentário fez com que as integrantes do grupo 2 reiniciassem sua argumentação. Taís coloca seis moedas sobre a mesa, separando-as em dois conjuntos de 3 moedas cada.

Taís: “Primeira hipótese, se aqui ficar igual, toda plana, reta” - se a balança não se alterar – “a gente vai saber que todas estas daqui são pesadas” – as seis são descartadas, portanto. Note que a expressão “primeira hipótese” utilizada por ela parece ser uma apropriação da árvore de possibilidades.

Daniel: “Sim, mas e se não ficar?”.

Taís: “Espera! Na primeira hipótese sobraram duas moedas. Aí vou colocar na balança a nossa segunda pesagem. Óbvio que uma vai levantar” – a hipótese, para ela, parece ser tão simples que termina com um “óbvio que vai levantar” – “Porém, se tiver a falsa aqui” - apontando para um dos grupos com três moedas – “uma vai levantar. A gente já vai saber que



aqui está a falsa. Todas são descartadas! - todas as outras cinco moedas são descartadas - “E na pesagem a gente vai pegar só duas, que é a 2ª pesagem”.

Daniel: “Mas a falsa pode estar lá” – referindo-se ao grupo de moedas descartadas. Daniel parece não estar acompanhando o caminho que Taís fez, considerando a primeira hipótese concluída. Parece também que ela tinha apresentado a primeira hipótese muito rapidamente, pois era a que ela tinha considerado mais simples.

Taís e Emília: “Daniel, calma!”.

Taís: “Se ficar plana, a gente sabe que falsa é a que sobrou. Se uma baixar aqui e a outra levantar, óbvio que a mais alta é a leve” - referindo-se à segunda pesagem quando sobraram três moedas, e é realizada uma pesagem 1 e 1.

Taís acabou de apresentar ao grupo 1 a solução do enigma, abrangendo todos os casos possíveis de pesagem. Porém, Daniel aparentemente não se convenceu, ou não compreendeu o argumento do outro grupo. Evelise, que estava trabalhando com Daniel no grupo 1, não se pronunciou neste instante, portanto não podemos afirmar se ela havia compreendido ou não a solução apresentada. A compreensão do grupo 1 parece ter vindo posteriormente, e acredito que eles tiveram que refazer todo o raciocínio para se certificar de que todas as hipóteses tinham sido contempladas. É interessante salientar que o grupo 1 não se convenceu com a simples apresentação rápida do grupo 2, para a qual também não conseguiram acompanhar em detalhe.

Com o tempo, o grupo 1 se disse convencido, mas isso não me satisfaz. Depois que o grupo 1 informou que havia compreendido a solução dada pelo grupo 2, resolvi pedir a eles uma folha de papel com a solução escrita, como prova de que tinham resolvido a questão. Os alunos do grupo 2, sabendo deste pedido que fiz, estavam tão seguros que se sentiram capazes de avaliar os colegas, e assim propuseram que eles mesmos corrigissem a folha. É interessante perceber a atitude destes alunos por dois motivos; primeiro, esta atitude parece ter sido uma decisão de auxiliar e contribuir com os colegas que não haviam encontrado uma solução num primeiro momento; segundo, vale lembrar que são estudantes de uma modalidade especial de Ensino Médio, o curso Normal, que forma professores para as séries iniciais. Esta atitude parece nos mostrar que eles puderam se colocar no lugar do professor, e se lançaram a corrigir a resolução feita pelo outro grupo de alunos, inclusive utilizando uma caneta vermelha, prática bastante comum entre professores que corrigem provas ou trabalhos de seus alunos.

O grupo 1, de fato, conseguiu resolver o enigma e apresentou a solução de maneira correta nesta folha entregue por Daniel e Evelise.

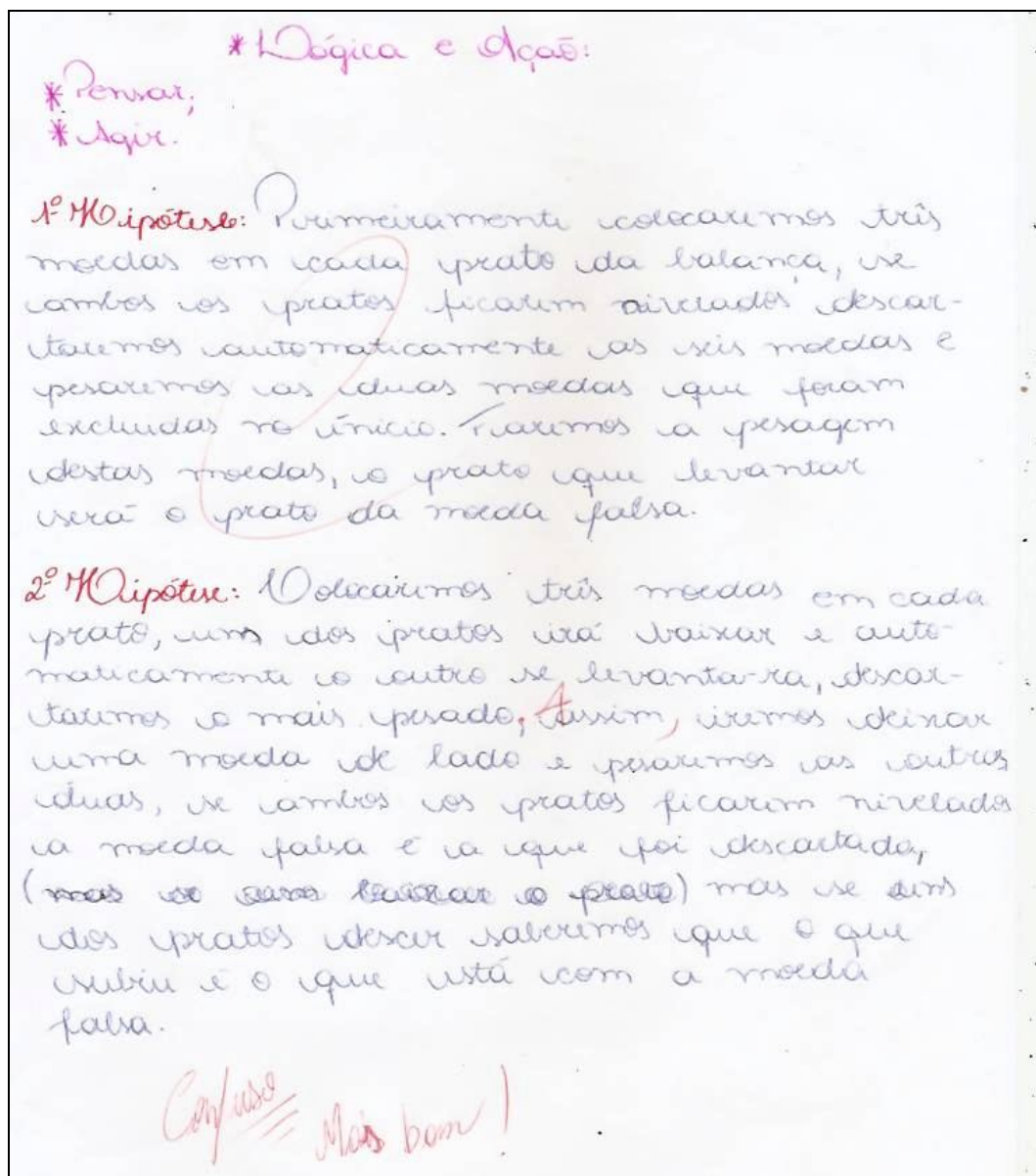


Figura 3: Folha do grupo 1 corrigida pelo grupo 2, contendo a solução do enigma 19

Na segunda parte do encontro os alunos receberam o enigma de número 16 (Número mínimo de ligações), com o desafio de descobrir qual seria o número mínimo de ligações necessárias para que uma pessoa entrasse em contato com outra, de acordo com os números de telefone que ela tinha e que os seus contatos possuíam.

Quadro 2: Enigma 16

**Enigma 16 (Número mínimo de ligações):** Vinte anos depois da formatura, cinco colegas de turma decidem organizar uma confraternização. Para marcar o dia e o local da confraternização, precisam comunicar-se por telefone. Cada um conhece o telefone de alguns colegas e desconhece o de outros. No quadro abaixo, o número “1” indica que o colega da linha correspondente conhece o telefone do colega da coluna correspondente; o número “0” indica que o colega da linha não conhece o telefone do colega da coluna. Exemplo: Beto sabe o telefone do Dino que não conhece o telefone do Aldo. Qual é o número mínimo de telefonemas que Aldo deve fazer para se comunicar com Carlos? (PEREIRA, 2006, p. 5).

	Aldo	Beto	Carlos	Dino	Ênio
Aldo	1	1	0	1	0
Beto	0	1	0	1	0
Carlos	1	0	1	1	0
Dino	0	0	0	1	1
Ênio	1	1	1	1	1

Este enigma não ofereceu dificuldades aos dois grupos, que o resolveram em questão de minutos, inclusive não foi possível um registro mais detalhado das discussões. Apenas fiz algumas perguntas sobre a possibilidade de se realizar um número de ligações ainda menor que o encontrado, mas ambos os grupos afirmaram que não havia esta possibilidade. Basicamente há duas maneiras de resolver este enigma.

Uma delas é tentar descobrir o número mínimo de ligações examinando caso a caso, a começar pela possibilidade de se realizar apenas uma ligação. Este primeiro caso é impossível, pois Aldo não tem o telefone de Carlos, portanto com apenas uma ligação não é possível Aldo ligar para Carlos. Agora temos que tentar as possibilidades com duas ligações. Como Aldo tem apenas os telefones de Beto e Dino, além do próprio, considerando os contatos de Beto e Dino, concluímos que na segunda ligação Aldo poderá ligar somente para Beto, Dino ou Ênio, o que inviabiliza Aldo contatar Carlos com apenas duas ligações. Iremos agora para a terceira ligação. Deve-se observar a possibilidade de, como no caso anterior, Aldo ligar inicialmente para Dino, e na segunda ligação para Ênio; como Ênio tem o telefone de Carlos, seria possível então que Aldo pudesse finalmente ligar para Carlos, resolvendo a questão com o mínimo de três ligações telefônicas.

A outra maneira de solucionar o enigma é identificar tudo o que é necessário para que Aldo fale com Carlos. Primeiramente, é necessário que Aldo tenha o número de telefone de Carlos, mas como não o tem, ele precisa ligar para alguém que o tenha; somente Ênio tem o seu número, logo se faz necessário que Aldo ligue para Ênio. No entanto, Aldo não tem o número de Ênio, o que o obriga a ligar para alguém que tenha o seu número. Dino é quem tem o número de Ênio, o que resolve o enigma, pois Aldo tem o número de Dino. Portanto, Aldo necessariamente precisou realizar três ligações, para Dino, depois para Ênio, e finalmente para Carlos.

As duas soluções apresentadas acima são dois caminhos inversos que podem ser tomados para que o enigma seja resolvido. É provável que os grupos tenham seguido a primeira possibilidade de solução, pois, apesar de não haver um registro em detalhes, foi notado que sempre iniciavam a questão com o lápis apontando para Aldo na tabela, e em seguida iam tentando realizar as ligações até que chegassem a Carlos.

Na terceira parte do encontro foi distribuída uma pequena folha para cada grupo contendo três enigmas, os de número 1, 2 e 4 da lista geral de enigmas.

Quadro 3: Enigmas 1, 2 e 4

**Enigma 1 (adaptado):** O que é maior que tudo, é o que os mortos comem e, se vivos comerem, acabam morrendo? (SMULLYAN, 2008, p. 14).

**Enigma 2:** Dois camelos estavam virados em direções opostas. Um estava voltado diretamente para o leste, e o outro diretamente para o oeste. Como podem olhar um para o outro sem andar, virar-se ou sequer mexer as cabeças? (SMULLYAN, 2008, p. 15).

**Enigma 4:** Era uma vez dois amigos chamados Sinbad e Hinbad (...); os dois possuíam, cada um, o mesmo número de cavalos. Quantos cavalos Sinbad precisaria dar a Hinbad para que Hinbad tivesse seis a mais que ele, Sinbad? (SMULLYAN, 2008, p. 17).

O primeiro deles foi apenas uma charada que não requeria um argumento dedutivo; o segundo buscava confundir o leitor e fazê-lo pensar que os camelos estavam dispostos de costas um para o outro; o terceiro enigma exigia uma interpretação e dedução para encontrar uma solução. Neste terceiro, o grupo 1 inicialmente não conseguiu interpretar a expressão “ter seis cavalos a mais que o outro”, pois o enunciado dizia que duas pessoas possuíam o mesmo número de cavalos e um dos personagens deveria dar certo número de cavalos ao outro, mas

no final o que recebeu deveria ter seis cavalos a mais que o primeiro; o grupo 1 pensou então que o personagem deveria dar seis cavalos, mas não perceberam que desta maneira, quem recebeu seis teria agora 12 cavalos a mais que o outro. Daniel e Evelise não parecem pensar na diferença entre eles, mas apenas em um dos personagens. Por esta razão, faltou coordenar a composição do ganho de um com a perda do outro. Resolvi deixá-los pensar um pouco sobre isso, mas não pareciam estar convencidos de que dar seis cavalos não estava correto. Neste panorama, resolvi entrar com a seguinte intervenção.

Pesquisador: “Vamos supor que tenhamos, por exemplo, 7 cavalos cada. Se eu te der seis cavalos, eu vou ficar com 1, e tu vais ficar com 13. Quantos cavalos a mais tu tens?”. Depois deste comentário pareceu perceptível o convencimento do grupo 1 de que a diferença entre os números, ao final, leva em conta uma composição entre a perda de um e o ganho de outro, somando-se ao final o número de cavalos dados e recebidos.

Após desfeita esta confusão, o grupo conseguiu resolver o enigma; eles descobriram que, seja qual for o número de cavalos, desde que cada um deles tenha no mínimo três, basta um dar ao outro três cavalos para que este tenha seis a mais que ele. Infelizmente não consegui registrar de maneira detalhada como ocorreu a descoberta da solução deste enigma por parte do grupo 1.

Depois das discussões, o tempo do encontro havia esgotado.

### **3.2. Encontro 2 – 10/05**

O segundo encontro contou com a presença de quatro alunos: Daniel, Evelise, Emília e Amanda. Taís abandonou as oficinas por questões profissionais. Dividimos os quatro alunos em duas duplas. Preferi escolher os mesmos grupos do primeiro encontro, dadas as afinidades já dispostas pelos próprios alunos.

Primeiramente, cada um dos grupos recebeu uma lista contendo o enigma 10 (O médico em uma ilha deserta).

**Enigma 10 (O Médico em uma ilha deserta):** Um médico cirurgião encontra-se em uma ilha totalmente deserta, sem água, com 3 pacientes que necessitam urgentemente de uma cirurgia cada. Porém, o cirurgião tem apenas dois pares de luvas. Como ele fará as três cirurgias sem contaminar os pacientes e a si próprio? Lembre-se que a cirurgia deve ser feita com as duas mãos em cada paciente (MORICONI, 2010, p. 79).

O desafio em questão era descobrir como o médico poderia realizar três cirurgias em três pacientes distintos com apenas dois pares de luvas. O contexto inverossímil do problema – cirurgia numa ilha deserta – não provocou estranhamento entre os alunos, que parecem ter compreendido o objetivo do problema. O grupo 1, por exemplo, composto por Daniel e Evelise, assim que recebeu a lista contendo o enigma, descobriu uma estratégia válida para resolvê-lo, mas não o resolveu por completo neste primeiro momento. A ideia trazida principalmente por Daniel mostra que o grupo está indo no caminho de uma solução possível.

Daniel: “Ele faz as duas cirurgias [supostamente usando um par de luvas em cada procedimento], aí então na segunda cirurgia ele continua com a luva” – por exemplo, ele realiza uma cirurgia e continua com o par de luvas nas mãos – “aí ele tira a luva da outra cirurgia e coloca na mão, usa o lado inverso. Por exemplo, tô com a luva assim...” - Daniel está usando luvas de lã, e pretende dar um exemplo com elas – “...essa foi a [luva] da última cirurgia [a luva utilizada na cirurgia anterior], aí eu pego e viro...e viro essa aqui e coloco assim” - coloca do avesso sobre a outra luva supostamente suja, como por exemplo, retira da mão esquerda e a coloca do avesso sobre a direita. Nesta conversa, Daniel sugere saber uma estratégia para resolver o enigma, mas não temos certeza se ele de fato apresenta a solução, pois observe que a afirmação “aí ele tira a luva da outra cirurgia e coloca na mão, usa o lado inverso”, contendo o termo “luva” no singular, não nos permite concluir com exatidão se ele conseguiu ou não resolvê-lo por completo.

Utilizando o princípio da casa dos pombos, que afirma “Se  $n+1$  pombos são colocados em  $n$  gaiolas, então pelo menos uma gaiola deverá conter 2 ou mais pombos” (SANTOS *et al*, 2007, p. 283), podemos dizer que no enigma, o médico possui dois pares de luvas e três cirurgias a serem realizadas, e assim, pelo princípio da casa dos pombos, duas luvas deverão ser utilizadas 2 ou mais vezes. Porém, utilizando o par mais do que uma vez, o cirurgião poderia contaminar um paciente. O salto está justamente na ideia de utilizar as luvas do avesso sobre outro par de luvas sujas, pois assim conseguimos utilizar um par pelo menos

duas vezes, resolvendo o enigma. De fato, uma estratégia necessária para resolver este enigma é reutilizar as luvas anteriores, colocando-as do avesso.

Após esta investida de Daniel, lancei dois pares de luvas de procedimentos<sup>6</sup> aos grupos para que pudessem, assim como Daniel fez com as suas luvas de lã, utilizá-las para tentar resolver a questão.



Figura 4: Par de luvas de procedimentos utilizado na oficina

Ainda pelo grupo 1, Evelise demonstrou interesse após receber as luvas, porém sua tentativa pareceu ser uma fuga ao contexto do enigma, ou simplesmente um desconhecimento ou uma negação das hipóteses do enigma.

Evelise: “Vamos supor que ele vai fazer a cirurgia, e normalmente o médico quando vai fazer uma cirurgia, ele suja mais uma mão do que a outra. Eu sei por que eu vi meu pai fazendo a cirurgia nele. E acredite professor, o médico sujou... uma mão ele sujou mais, ele sujou toda a luva do que a outra, e a outra ele usava mais para segurar os negócios [instrumentos cirúrgicos]. Vamos supor que esse médico, e no caso ele tem essa mão livre, um pouco limpa” – Emília diz que, por exemplo, o médico suja a mão esquerda, e a direita fica “um pouco mais limpa” que a outra – “... e a outra vai ficar suja, ou seja, tenho ainda uma luva sobrando para a próxima cirurgia” - Evelise tentou encontrar uma estratégia que contraria as hipóteses iniciais, pois mesmo sujando pouco a luva, ela fica suja e pode contaminar o próximo paciente. É uma tentativa criativa, mas não resolve a questão. Depois de Evelise tentar, resolvo deixá-los sozinhos por cerca de cinco minutos, e quando volto Daniel está com um par de luvas vestindo suas mãos.

Daniel: “Eu faço a cirurgia com essa aqui [com o primeiro par de luvas], normal, a primeira limpa [primeiro par limpo], aí eu tiro, tá sujo” - Daniel tira o primeiro par, pois estão supostamente sujas. Neste momento ele retira as luvas realizando um movimento que as deixa do avesso no momento em que saem das mãos, puxando pela manga - “Eu tiro e agora coloco a outra que tá limpinha” - veste o outro par de luvas limpas nas mãos nuas - “Aí eu coloco, faço a segunda cirurgia. Aí pra terceira eu coloco a outra [o outro par] que tá do avesso e faço a terceira cirurgia” - realizando o movimento de colocar o outro par que já estava do avesso sobre o par que se encontra vestido nas mãos, com certa dificuldade pois as luvas são bastante aderentes. Daniel acabou de apresentar uma solução, a qual chamaremos de solução A. Evelise entra na discussão.

Evelise: “Tá! Não precisa colocar a terceira” - aqui Evelise intervém argumentando que Daniel não precisaria colocar novamente o último par do avesso, dada a dificuldade em encaixá-la nas mãos, pois a demonstração da solução já havia sido suficiente, de acordo com ela. É interessante darmos uma atenção especial a este fato protagonizado por ela, pois parece que Evelise adverte que a utilização das luvas não é mais necessária. Podemos notar um salto que Evelise dá, passando a lidar com o problema de uma maneira hipotética, e isso se nota a partir do momento em que ela diz não ser necessário colocar as luvas para encenar a terceira cirurgia.

O grupo 2, composto por Emília e Amanda, também encontrou uma solução nos mesmos moldes, idêntica à solução A na estratégia tomada. Porém, assim como no outro grupo em paralelo, ela não foi achada de supetão. Emília iniciou tentando desconstruir com algumas tentativas bem criativas, mas não condizentes com as hipóteses do problema.

Emília: “Liga para o SAMU aérea... vira a luva, limpa a luva na roupa, vai no mar lá porque, se é uma ilha, tem um mar” - Emília tenta buscar uma alternativa para garantir a viabilidade das três cirurgias. Isso é característica de um pensamento concreto, que não considera a cirurgia como uma hipótese sendo o real uma possibilidade dentro de um conjunto de probabilidades, mas precisa considerar uma situação pelo menos parecida com algo já vivenciado, evitando assim abstrair as condições de sua realização.

Emília: “Se ele [paciente] tiver irmão gêmeo, vai ter o mesmo sangue então”.

Amanda: “Mas podem ter doenças diferentes” - Amanda desconsidera a hipótese apresentada pela colega, pois o fato de os irmãos serem gêmeos não resolve a questão. Para

---

<sup>6</sup> Luva de procedimentos é o nome dado às luvas brancas utilizadas normalmente por enfermeiros.



desconsiderá-la, ela teve a ideia de supor que os irmãos gêmeos tivessem doenças diferentes, o que daí gera uma contradição no argumento de Emília.

Emília: “É muito fácil a resposta?” – pergunta para mim.

Neste momento o grupo fica pensativo olhando para o enunciado do enigma. Deixo a dupla pensando, enquanto perambulo pela sala de aula para registrar também momentos do outro grupo. As discussões ocorrem praticamente em paralelo. Volto instantes depois, quando a dupla me chama. No exato momento que chego à dupla, Daniel grita do outro grupo “Tem que virar do avesso, não é?”.

Emília: “Mas espera! O nosso jeito é diferente. Eles não podem prestar atenção no que a gente tá falando!” - Aqui Emília reclama desta interrupção feita por Daniel – “Tá, eu sou o médico, e aqui tá o meu primeiro paciente” - apontando para a colega de grupo Amanda – “Olha lá! Isso não vale, eles estão cuidando o que a gente fala!” - Neste momento peço ao outro grupo que não interrompa a colega do grupo 2, que tenta me apresentar uma possível solução encontrada. Emília parece querer ganhar o crédito da descoberta, e por isso se irrita quando percebe Daniel bisbilhotando seu grupo – “Botei a primeira luva, peguei e botei o primeiro par de luvas, aí eu fui lá e fiz a primeira cirurgia” - realizando o movimento com os dedos sobre a barriga da colega representando a primeira cirurgia – “aí eu tiro essa luva aqui” - Emília fala que retira “essa luva”, mas faz o movimento de retirada do par – “... com todo o cuidado do mundo, e deixo ela [o par] assim do avesso, com o sangue para dentro. Aí eu vou...ela põe a segunda luva[segundo par de luvas]” - realiza o movimento de colocar o par de luvas, apesar de afirmar “põe a segunda luva”, só que desta vez ela recebe a ajuda da colega, a qual chamou de assistente, algo que não interfere na sua sugestão de solução até aqui – “aí faço a minha segunda cirurgia. Fiz, salvei já. Agora eu pego com todo o cuidado do mundo as outras luvas[as luvas da primeira cirurgia], porque o sangue tá aqui dentro, ponho aqui e tá limpo. Salvei o desgraçado” - faz o movimento de menção à terceira cirurgia, resolvendo o enigma.

Amanda: “E os outros dois sem se contaminar!” - Ou seja, ela realizou as duas primeiras cirurgias, assim como a terceira, sem se contaminar com o sangue dos pacientes, e sem contaminá-los uns com o sangue dos outros. Amanda faz esta afirmação com o intuito de argumentar a respeito da garantia da resposta dada por elas.

Emília: “Sem me contaminar!”.

A estratégia pensada por ambos os grupos é clara, e consistiu em realizar a primeira cirurgia normalmente com um par de luvas, depois se retiraria o par sujo e se colocaria o novo

par, deixando de lado temporariamente o par sujo; assim se realizaria a segunda cirurgia, e em seguida se tomariam novamente as luvas utilizadas na primeira cirurgia, só que desta vez do avesso, sobre as luvas sujas da segunda cirurgia, entrando em contato o sangue da primeira e da segunda cirurgia, sem contaminar o médico e o terceiro paciente, e assim se faria a última cirurgia. Esta solução foi descoberta em paralelo nos dois grupos, como pudemos notar nos diálogos.

Dada a situação, desafiei os dois grupos a encontrarem outras soluções diferentes da encontrada, posto que eu já conhecia outras soluções e queria provocá-los a encontrar alguma solução diferente da descoberta. Talvez o fato de os dois grupos terem encontrado a mesma solução possa sugerir que ela seja única, o que neste caso não é verdade. Acredito que esta conclusão possa ser importante, pois nos permite ver diferentes soluções para um mesmo problema. O que normalmente vejo são alunos buscando uma “resposta” que acreditam ser única. Por esta razão pressuponho que seja fundamental trabalharmos a ideia de múltiplas soluções para um mesmo problema, especialmente quando há mais de uma solução. O grupo 1 investiu bastante do seu tempo em busca de argumentos para encontrar outra solução. Daniel tentava colocar dois pares de luvas ao mesmo tempo, isto é, duas luvas em cada mão, conforme figura a seguir.



Figura 5: Daniel tentando colocando dois pares de luvas ao mesmo tempo

Uma tentativa que quase deu certo foi a sugestão do grupo 1 para a solução, dada da seguinte maneira: colocam-se duas luvas em cada mão, realiza-se a primeira cirurgia; depois se retira uma luva da mão esquerda e realiza-se a segunda cirurgia; por fim retira-se uma luva

da mão direita e a coloca do avesso na esquerda, realizando assim a terceira cirurgia. Deve-se observar que há um pequeno erro, localizado na afirmação “depois se retira uma luva da mão esquerda e realiza-se a segunda cirurgia”, o que nos permite concluir que se retirou apenas a luva suja da mão esquerda e não a outra, ou seja, contaminar-se-ia o paciente na segunda cirurgia. Vejamos como esta solução foi apresentada nas próprias falas do grupo 1:

Evelise: “Tá, agora olha só. O médico tá com as duas luvas nas mãos [duas em cada mão], aí agora ele vai começar a operar” - as luvas estão nas mãos de Daniel que, ao ouvir a expressão ‘ele vai começar a operar’, realiza o movimento de mexida dos dedos das duas mãos, como menção à realização da cirurgia – “Ele vai operar um, é claro, ele vai descartar aí uma luva [retira uma luva da mão esquerda]. Tá deu, não precisa tirar, deixa” - mais uma vez Evelise diz ao colega que ele não precisa tirar a luva, supostamente salientando que não é preciso mostrar tudo em detalhes visualmente – “Ele vai descartar só uma [a da mão esquerda], daí depois que ele descartar vai sobrar a de baixo, ele vai poder operar a segunda” – desta vez ela não mencionou a troca da luva da mão direita, sendo assim, irá operar com uma luva suja – “e assim ele pode voltar e colocar a outra [luva descartada na primeira cirurgia] pra operar a terceira, entendeu? É uma garantia”. O erro desta solução foi dizer que “Ele vai descartar só uma, daí depois que ele descartar vai sobrar a de baixo, ele vai poder operar a segunda”, ou seja, nesta parte ela deveria descartar duas, e não somente uma. Como afirmei anteriormente, havia um pequeno erro que, se levado ao pé da letra, não resolve o enigma por completo. Este detalhe não foi notado no momento em que o grupo resolvia o enigma, somente o notei quando transcrevi as suas falas, e daí não lembrei de questioná-los no dia da oficina.

O grupo 2 apresentou outras soluções diferentes, além de encontrar a mesma solução sugerida em primeiro lugar pelo grupo 1, a solução A, na qual o médico realiza a primeira cirurgia com um par, a segunda com outro e a terceira com as luvas da primeira cirurgia do avesso sobre as luvas da segunda. Uma das soluções apresentadas sugere que o médico realize a primeira cirurgia; algumas horas depois, a primeira paciente que está bem e supostamente também é médica, de acordo com o grupo, coloca o segundo par de luvas em suas próprias mãos e realiza a cirurgia. Ou seja, o médico realizou uma cirurgia com um par de luvas, e a suposta médica realizou a segunda cirurgia com o outro par de luvas limpas. A terceira cirurgia consistiria na retirada das luvas das mãos da médica, e a colocação delas do avesso sobre as luvas sujas do médico, podendo ele realizar a terceira cirurgia. É uma solução possível, desde que, de fato, um paciente seja médico. Ressaltei ao grupo a importância das

informações contidas no enunciado, principalmente sobre as condições que poderíamos garantir apenas a partir do enunciado, sem que nos prendêssemos a detalhes que não aparecem no desafio. A questão da médica parece ser um adereço posto pelos alunos na questão, já que o próprio médico poderia estar no papel da médica criado pelo grupo. Esta solução é praticamente a mesma solução A, com o acréscimo deste novo personagem, e com o detalhe sutil um pouco diferente da solução A, pois desta vez utilizou-se do avesso o par de luvas da segunda cirurgia, e não o par da primeira como na solução A. A esta solução chamaremos de solução A1, por se assemelhar muito à anterior. Vejamos como o grupo chegou a esta solução nas falas a seguir:

Emília: “Professor, a gente encontrou outra possibilidade. A minha possibilidade eu, médico, faço a primeira cirurgia [com uma luva em cada mão], aí passam algumas horas, daí aquela desgraçada [primeiro paciente] está bem e ela também era médica, aí eu curei ela, daí ela botou a segunda luva” – demonstrando um movimento com as mãos como se estivesse colocando um segundo par – “Aí ela foi lá e fez a cirurgia no outro, no segundo paciente. São três? Ah é são!” - Emília lembra que são três cirurgias – “Daí a gente tira no par ou ímpar para ver quem vai virar a luva de quem, daí ela vira a luva” - realizando um movimento curioso de retirada das luvas ao mesmo tempo em que ela se encaixa na mão do médico, interpretado por Emília – “Mas tecnicamente a gente ia fazer com mais cuidado” - Pois o movimento feito por elas deixou as luvas mal encaixadas nas mãos. Depois disso as alunas afirmam que ‘deu’, dizendo que realizaram as três cirurgias. Esta tentativa, com a ressalva da participação de um segundo doutor, é uma solução similar à primeira encontrada pelos dois grupos. Se, ao invés de termos dois doutores cirurgiões, e se os mesmos movimentos acima citados forem desenvolvidos por apenas um médico, ele conseguirá curar os pacientes, e os movimentos são muito parecidos com aqueles discutidos no início, com a solução A. Mesmo assim, conversei com a dupla a respeito do enunciado, e pedi que encontrassem outras soluções sem burlar o que estava estipulado pela questão. Minutos após a conversa, o grupo 2 me chamou e apresentou uma solução B, dada a seguir:

Amanda: “A gente botou três luvas numa mão [e uma na outra]. A gente teve dificuldade pra botar” - Emília coloca com a ajuda da colega três luvas na mão direita, e uma na mão esquerda. Amanda, ao dizer que tiveram dificuldades para colocá-las, apresenta uma inviabilidade no mundo real de se realizar uma cirurgia com três luvas em uma das mãos. Este momento nos apresenta uma mistura entre o realidade e a ficção, pois ao mesmo tempo se

caracterizam a inviabilidade citada e a obtenção de uma solução independentemente do contexto da situação. Aí estão os dois fatores que se entrelaçam.

Emília: “O Daniel está olhando” - Emília avisa que Daniel, do grupo 1, está olhando, mostrando-se incomodada com esta situação, novamente querendo talvez receber o crédito pela descoberta – “Ela tá morrendo, eu sou o doutor House...” – ela assume uma identidade afetiva com o personagem de um seriado de televisão, doutor House, médico que desvenda enigmas médicos bastante controversos – “... salvei ela, e ela vai me ajudar [a trocar as luvas] porque ela tá viva agora” – Emília, com a ajuda de Amanda, retira uma luva da mão direita, e a coloca do avesso sobre a mão esquerda – “fiz a segunda cirurgia, aí o meu ajudante...” – neste momento é notável a mistura entre as maneiras de pensar concretamente e formalmente; Emília viabiliza a troca de luvas ao pedir ajuda ao paciente que agora “está vivo”, ao mesmo tempo em que resolve o enigma a partir da dedução das etapas.

Amanda: “... [o ajudante] que é o outro que tá vivo agora, virou, tá tudo limpo” - Amanda ajuda Emília a retirar uma luva novamente da mão direita, e a coloca do avesso sobre a mão esquerda. Até aqui, esta é a segunda ajuda que o médico recebe para trocar as luvas, retirando da mão direita e colocando na mão esquerda pela segunda vez.

Emília: “Daí...” - Ela faz o movimento da 3ª cirurgia, mas não consegue falar, pois está rindo – “e terminou! A gente acabou!”.

Amanda: “É tá tudo limpa!” – ratifica Amanda, o que parece ser uma mostra de que elas estão convencidas de que a solução está correta, e possivelmente queriam um aval do pesquisador, apesar de terem certeza de que não houve contaminação. Outro fator interessante é a identificação delas com o médico, e para este personagem o importante é chegar ao final das três cirurgias sem contaminar os pacientes. Esta identificação alavancou as iniciativas do grupo.

De acordo com a dupla, nas falas acima, em relação à solução B, o médico colocaria três luvas na mão direita e uma na mão esquerda, realizando assim a primeira cirurgia; posteriormente tiraria da mão direita uma luva e a colocaria do avesso sobre a mão esquerda, realizando em seguida a segunda cirurgia; por fim tiraria novamente uma luva suja da mão direita e a colocaria do avesso sobre a mão esquerda, podendo assim realizar a terceira cirurgia, sendo esta a solução B. O enigma tomou bastante tempo do encontro, um pouco mais da metade do tempo da oficina.

O que podemos notar nas soluções A, A1 e B propostas pelos alunos, é uma invariante fundamental para a obtenção de uma solução neste enigma. O que é inevitável na solução

desta questão é pelo menos duas luvas serem viradas do avesso para que se consiga realizar as três cirurgias. Por exemplo, na solução A, o primeiro par era deixado de lado após a primeira cirurgia, e para a terceira operação o par era virado do avesso e colocado sobre as mãos sujas da segunda cirurgia. Na solução A1, o primeiro par também é deixado de lado na segunda cirurgia, mas é colocado novamente nas mãos, e sobre a parte suja colocou-se o segundo par do avesso. Na solução B, o grupo iniciava com uma luva na mão esquerda e três na mão direita. Após a primeira cirurgia virava-se do avesso uma luva da mão direita e a colocavam na mão esquerda, para assim poder realizar a segunda cirurgia. Após a segunda operação, viravam novamente do avesso uma luva da mão direita e a colocavam na mão esquerda. Nestas três variações de soluções podemos notar a invariante “pelo menos duas luvas são viradas do avesso”. De fato, pelo princípio da casa dos pombos, como temos três cirurgias e dois pares, duas luvas deverão ser utilizadas pelo menos duas vezes, e para utilizarmos duas vezes, elas precisam necessariamente estar do avesso na segunda tentativa, independentemente se estiverem juntas ou em cirurgias separadas.

Ainda sobrou tempo para que fossem feitos outros três enigmas, a partir de uma nova lista de grupo.

Quadro 5: Enigmas 17, 18 e 3

**Enigma 17 (Homem mais alto):** Se o Bob e o Fred são ambos mais altos do que o Tom, e se o Hal é mais alto do que o Bob, porém mais baixo que o Fred, qual dos homens é o mais alto e qual deles é o segundo mais alto? (PEREIRA, 2006, p. 5).

**Enigma 18 (Os filhos não gêmeos):** Nasceram dois meninos da mesma mãe, no mesmo dia, na mesma hora, no mesmo ano, mas não são gêmeos. Como isso pode acontecer? (STANGROOM, 2010, p. 33).

**Enigma 3:** O que é mais, seis dúzias de dúzias ou meia dúzia de dúzias? (SMULLYAN, 2008, p. 17).

O enigma 17 consistia em uma análise de afirmações sobre alguns personagens e a solução saíria à medida que se confrontassem as frases que sugeriam o enigma. O enigma 18 buscava compreender como seria possível duas pessoas distintas nascerem no mesmo dia, no mesmo ano, da mesma mãe, mas mesmo assim não serem gêmeas. Esta questão trazia implicitamente uma característica de linguagem cotidiana, pois normalmente está

subentendido que duas pessoas que nascem no mesmo dia são gêmeas. E o enigma 3 perguntava o que era maior, se seis dúzias de dúzias, ou meia dúzia de dúzias. O enigma 17 foi resolvido em poucos minutos pelos dois grupos, sem que aparecesse algo diferente. Apenas deve ser salientado que, para descobrirem o mais alto, os grupos desenharam palitinhos de alturas distintas a partir das afirmações, nomearam os palitos e no final concluíram quem era o mais alto e o segundo mais alto. O enigma 18 foi resolvido pelo grupo 2 da seguinte maneira: seus membros escreveram em seu caderno algo similar a “Dia, mês, ano”, e perceberam que no enunciado não se falava de “mês”, e encontraram uma solução para o desafio afirmando que um filho nasceu num mês, e o outro em mês distinto. Outra vez notamos uma característica fundamental do pensamento formal: a sistemática empregada pelo grupo 2 para resolver o enigma 18. Já o enigma 3 ofereceu dificuldades aos grupos, que não conseguiram encontrar uma solução possível. Este enigma poderia ser resolvido, por exemplo, traduzindo-se as palavras de seu enunciado de maneira numérica, como segue: Seis dúzias de dúzias como “ $6 \times 12 \times 12 = 864$ ”, e meia dúzia de dúzias como “ $(1/2) \times 12 \times 12 = 72$ ” ou “ $6 \times 12 = 72$ ”, o que nos mostra que 864 é maior que 72, ou seja, seis dúzias de dúzias é maior que meia dúzia de dúzias. Também se poderia comparar apenas seis dúzias com meia dúzia. As discussões entre o pesquisador e os alunos não foram registradas em detalhes como feito no enigma das luvas ou o das moedas no encontro passado.

Por fim, perto de acabar o encontro lancei o enigma 7 para ambos os grupos.

Quadro 6: Enigma 7 e solução

**Enigma 7:** Um dia Hassan encontrou três rapazes e começou a conversar com eles sobre sua famosa mula. “E de que cor ela é?” perguntou um dos três. Hassan então propôs um jogo. “Eu digo que ela é ou castanha, ou preta ou cinzenta. Cada um de vocês tenta adivinhar e, quando as informações já forem suficientes, eu farei um comentário sobre os palpites dos três e então veremos se vocês conseguem deduzir qual é a cor da mula”.

“Meu palpite é que ela não é preta”, arriscou o primeiro.

“E o meu, que é ou castanha ou cinzenta”, disse o outro.

“E eu digo que ela é castanha”, opinou o terceiro.

“Basta!” disse Hassan. “Já chega de palpites. Posso dizer que pelo menos um de vocês acertou, e pelo menos um errou”.

Qual é a cor da mula de Hassan? (SMULLYAN, 2008, p. 21).

Neste enigma, os grupos num primeiro momento dedicaram-se a pensar, sem que houvesse qualquer fala na sala de aula. O grupo 2 me disse que a mula era cinzenta, e o grupo 1 afirmou que era castanha. Perguntei a eles como haviam chegado a cada conclusão, e em ambos os casos foi mencionado o “chute”. Resolvi ajudá-los com o comentário: “Nesse enigma, Hassan coloca três afirmações que podem ou não ser falsas. Nós devemos arriscar e fazer suposições, para ver o que acontece no final”. Dito isto, o grupo 1 bradou: “Ela é cinzenta!”, e logo em seguida perguntei: “Por que vocês acham que ela é cinzenta?”. Então, recebi uma resposta semelhante a que segue: “Se ela fosse preta, os três teriam errado quando disseram as cores, mas pelo menos um tem que acertar, daí não é preta. Se ela fosse castanha, então ia acontecer o contrário e todos acertariam. Só sobrou cinzenta, o que garante pelo menos um erro e um acerto”. Parece ter sido utilizado um raciocínio por contradição, embora tivessem examinado as hipóteses caso a caso. Esta composição foi feita a partir de uma observação superficial sobre a discussão ocorrida.

Logo que esta solução foi apresentada pelo grupo 2, o tempo do encontro terminou, não podendo o grupo 1 ter a chance de fazer perguntas ou questionar a solução sugerida pelo outro grupo.

### 3.3. Encontro 3 – 17/05

Este terceiro encontro iniciou com a distribuição de uma tira de papel contendo o enigma 15 (Chineses e seus Gorros). Desta vez, o grupo era único, diferentemente dos dois primeiros encontros. Eu quis organizar desta maneira particular, pois acreditava que seria bastante produtiva a discussão entre todos para resolver esta questão.

#### Quadro 7: Enigma 15

**Enigma 15 (Os chineses e seus gorros):** Três chineses foram condenados à morte. Todavia solicitaram indulto. Este lhes seria concedido, mediante uma condição. Apresentaram-lhes cinco gorros, três brancos e dois pretos e, depois de lhes vendarem os olhos, foi colocado um gorro sobre cada cabeça. Em seguida, tiraram a venda do primeiro, dizendo-lhe: “*Se adivinhares a cor do gorro que tens na cabeça, serás indultado. Podes olhar os de teus dois companheiros, pois, talvez por eles, possas saber a cor do teu, com o que salvarás a tua vida*”. O chinês olhou os gorros dos companheiros, suspirou e depois, sacudindo a cabeça, declarou-se vencido, sendo, em seguida, conduzido ao patíbulo. Depois de retirada a venda do segundo, foi-lhe feita a mesma proposta, podendo olhar, apenas, o gorro do companheiro restante. Também o



segundo chinês suspirou e, sacudindo a cabeça, declarou-se impotente para adivinhar. Foi, igualmente, conduzido ao patíbulo. “Agora é a tua vez” disseram ao terceiro deles. “De que cor é o teu gorro?”, e o homem respondeu “Branco”. Era verdade e foi indultado. Como pôde adivinhá-lo? Você, por acaso, saberá explicar? (MADEIRA, 1959, p. 6).

Num primeiro momento, o grupo apenas lia o enigma e tentava compreender a situação. Para eles, o enunciado do enigma era relativamente longo, e por isso tiveram que ler várias vezes a questão para poder entendê-la. Durante todo o encontro, foram notadas tentativas dos alunos de justificar como o terceiro chinês teria se livrado da morte. Porém, a maioria das tentativas fixava o gorro branco no terceiro chinês. Isto é, no enunciado, ao final, está a afirmação de que o terceiro chinês concluiu que a cor do seu gorro era branca, e os alunos se basearam nesta informação para a todo instante tentar obter uma conclusão. Isso está, aparentemente, ligado à atitude de buscarem utilizar todas as informações dadas no problema para conseguirem resolvê-lo. Deve-se notar que, para resolver o enigma, não seria preciso saber, de início, que o gorro do terceiro era branco.

Emília: “... era para eles ficarem iguais e se confundirem, se fosse eu quem iria matar eles, eu faria isso” - colocaria gorros de cores iguais sobre as cabeças dos chineses, ou seja, colocaria sobre as cabeças de cada chinês um gorro branco. Ela parece considerar que a crença mais provável dos chineses seria a de que os gorros fossem diferentes. Emília assume a identidade do carrasco, e começa a ver o enigma sob o ponto de vista dele, sem considerar o raciocínio dos chineses.

Daniel: “Colocaram os três gorros brancos nas cabeças dos chineses”.

Emília: “Mas olha só, se eles botaram e depois vendaram, eles viram a cor que botaram” - Emília afirma que os chineses teriam visto a cor dos gorros em suas cabeças antes de serem vendados – “Está escrito aqui, botaram e depois vendaram” – Emília parece estar tentando burlar o enunciado, talvez para assim facilitar a obtenção de uma solução.

Pesquisador: “Onde?”.

Emília: “Aqui...”.

Amanda: “Não...” – Amanda nega a afirmação de Emília.

Emília: “Ah é, primeiro eles...”.

Amanda: “Primeiro eles mostraram...” - os cinco gorros – “... e depois eles vendaram e colocaram” - puseram os gorros sobre as cabeças já vendadas.

Evelise: “Tem uma lógica nisso. Se, como são dois gorros pretos e três brancos, os dois pretos a gente sabe que já foi”. Evelise ainda ignora as conclusões a que se pode chegar a partir da morte dos dois primeiros. Ela aparentemente está raciocinando como se valesse a implicação “se o terceiro está de branco, então os outros dois estão de preto”. Na verdade, o que vale é a recíproca: podemos concluir que se os dois primeiros estivessem de preto, o terceiro necessariamente estaria de branco. Se o terceiro chinês pudesse ver os dois primeiros, e se estes estivessem com gorros pretos, ele poderia ter chegado assim à conclusão de que seu gorro era branco. Ela desconsidera o fato de que o terceiro não vê as cores dos outros gorros. A conversa continua:

Amanda: “Por quê?” – Amanda, em muitos momentos, põe-se no lugar de questionadora, buscando nestas ocasiões validar ou não a afirmação dos colegas, talvez querendo sistematizar as hipóteses para ter certeza de que pode avançar no enigma.

Evelise: “Os dois primeiros, eles já erraram”.

Amanda: “Mas eles podem ter errado com dois brancos” - os dois primeiros poderiam ter dois gorros brancos sobre suas cabeças e não terem concluído nada. Outra vez ela está tentando ser sistemática, pois quer considerar todas as possibilidades, o que caracteriza uma tentativa de se seguir a lógica do enunciado, ao passo que Evelise tenta percorrer um caminho contrário.

Evelise: “E o terceiro disse que é branco, ou seja, os outros dois pretos e um branco” - os outros dois seriam pretos, pois o terceiro estaria de branco, ou seja, ela insiste na inversão já mencionada da implicação “se os dois primeiros são pretos, o terceiro é branco”. Essa é uma hipótese compatível com a conclusão a respeito do gorro branco do último chinês, mas que não considera a informação ou a explicação sobre porque os outros dois morreram.

Amanda: “Se um é preto e o outro é branco?” – Amanda novamente querendo garantir que sejam consideradas todas as possibilidades.

Daniel: “Se o primeiro desvendou assim” - foram retiradas as suas vendas – “...e pediu para olhar, aí ele olhou os outros dois e ele viu que os outros dois estavam com o gorro branco. Aí ele pensou ‘Eu posso estar com um gorro branco ou preto’, aí ele resolveu não arriscar e saiu né?”.

Daniel considera uma hipótese diferente de os dois primeiros terem cores pretas, mas dos outros três casos possíveis, “preto e branco”, “branco e preto” ou “branco e branco”, ele só considerou o terceiro.

Emília: “Mas e se...”.

Daniel: “Me deixa terminar, aí chegou o outro [o segundo chinês], aí ele viu o amigo dele com um gorro branco” – outra vez ele está utilizando a informação final de que o último tinha um gorro branco – “... aí ele [o segundo chinês] podia ser um gorro preto ou branco. Daí ele resolveu sair [porque não sabia a cor do próprio gorro]. Chegou a hora do outro [o terceiro], não tinha nenhum [gorro para ver], ao mesmo tempo ele raciocinou, ‘os dois podiam ser branco ou ser preto’, daí não resolveram opinar, daí ele deu a ideia de dizer que o dele era branco” – Daniel diz que o último chinês estaria informando a cor do seu gorro como um “chute”, sem conseguir explicar a resposta do terceiro chinês. Ele não procura concluir a cor dos gorros a partir das dúvidas dos chineses, mas examina uma hipótese de cada vez sobre a cor dos gorros, e verifica sua compatibilidade com o enunciado, fazendo suposições como se estivesse lendo o pensamento dos chineses em questão. Seguindo esse caminho, ele não consegue concluir que o último gorro era branco e a frase “ele deu a ideia de dizer que o dele era branco” mostra que ele está consciente de que não resolveu o enigma ainda. A conversa no grupo continua:

Emília: “Digamos que são eles três...” - aponta para os três colegas de grupo, como se eles fossem os chineses. Desta vez eles iniciam uma nova estratégia, similar à utilizada nos dias anteriores, a partir de uma dramatização do enigma. Deve-se notar que esta investida não foi proposta pelo pesquisador, foi uma decisão consciente do próprio grupo – “... e o que sobreviveu foi a Evelise. O Daniel foi o primeiro que olhou. A gente tem certeza que este aqui [o terceiro chinês] tá de branco...” - apontando para Evelise – “... porque foi o que sobrou, ele disse que tava com o gorro branco” - o enunciado afirma ao fim que o último chinês acertara a sua cor, que era branca – “então esse [primeiro chinês] que teve a oportunidade de olhar estes dois, um é certo que tava branco, e essa...” - aponta para Amanda que é quem representa o segundo chinês – “... está com que cor? Ele podia estar de preto, por isso não soube responder”. Emília, assim como os colegas, continua usando a informação de que o último gorro era branco.

Amanda: “Ele podia estar de branco ou preto” – Novamente uma maneira de pensar sistematicamente, tentando garantir que fossem contemplados todos os possíveis casos.

Emília: “Tá, espera aí, o segundo que ia morrer, ele ia olhar para o companheiro morto?” – Emília pergunta se o segundo chinês poderá ver o gorro do primeiro.

Amanda: “Não, esse foi embora. Aí eu olhei para Evelise e vi um gorro branco” – Amanda, cujas tentativas versam sempre sobre sistematizar as possibilidades, mesmo assim utiliza-se da informação a respeito do último gorro ser branco.

Emília: “Ah, tu só... [só pode ver o gorro do chinês posterior]”.

Amanda: “Aí eu tinha dois gorros brancos e dois gorros pretos”. Ela menciona todos os gorros que sobraram, afora o único supostamente conhecido, que é branco. O dela poderia então ser qualquer um desses dois brancos e dois pretos.

Emília: “Vamos sugerir que tu [Amanda, o segundo chinês] estava de preto, que foi o que o primeiro chinês viu, foi o que ele olhou, ele viu preto e branco, aí ele morreu. Só sobrou a Evelise de branco ali, só que tu [Amanda] tá de preto”. Emília, como Daniel, tenta chegar à solução por tentativa, examinando um dos casos possíveis.

Amanda: “Mas eu não sei que eu tô de preto”. Em contrapartida, Amanda busca retornar às condições do problema.

Emília: “Ele estava...” – está se referindo agora ao primeiro chinês – “... digamos que ele estava de branco. Então já temos excluído um branco, um preto e outro branco. Sobrou um preto e um branco”.

Neste momento percebo que a definição pela cor dos gorros, de maneira fixa, parece ser um elemento ao qual o grupo dá importância para tentar resolver a questão. Eles inclusive se preocupam com os gorros que sobram em cada hipótese, confundindo-se entre os que sobram e as outras hipóteses que devem ser consideradas. É possível que estejam se fixando em uma informação a respeito das cores, ao invés de se fixarem no pensamento dos chineses. Outro aspecto que noto é que estão usando o fato que já sabem a cor do gorro do último, e afirmam a todo o instante que o último chinês tem o gorro branco, de acordo com o que leem no enunciado. Deixo o grupo por alguns minutos e volto para ver se a discussão havia tomado outro curso. Chego em meio a uma conversa protagonizada por Emília.

Emília: “... ele [primeiro chinês] está vivo e olhou vocês dois, um de branco [supostamente o segundo], sobra... um branco e dois pretos” – o que nos leva a crer que ela está considerando o segundo chinês com o gorro da cor branca, já que estavam com a ideia fixa de que o último teria a cor branca sobre sua cabeça.

Depois, passam-se cerca de 10 minutos sem que haja tentativa dos alunos de expor algum argumento. Percebo que Emília e Daniel rabiscam em seus cadernos e tentam resolver o enigma. Volto ao grupo minutos mais tarde.

Emília: “Eu realmente botei o branco na Evelise, eu deixaria... digamos que eu botei branco em vocês dois” – ela, além de assumir a identidade do carrasco, coloca gorros brancos nos outros dois chineses, o primeiro e o segundo, experimentando a hipótese BBB, com os três de branco – “... e a Evelise [terceiro chinês] de branco tá aqui. Realmente excluí a Evelise

para ser a última” - Emília garante que Evelise será a última – “... aí vocês que é um número par [são dois chineses] sobraram as possibilidades de trocar, um branco e um branco, um preto para cada um, pra vocês ficarem com esta grande dúvida e morrerem” – considera dois chineses ao mesmo tempo e discorre sobre quatro gorros – “Aí eu sou a Evelise lá, eu tô com os olhos vendados” - agora Emília vai falar como se fosse o terceiro chinês pensando – “...como é que estes desgraçados vão fazer? Ah, com certeza eles vão deixar... botar a mesma cor dos dois, e vão deixar preto e branco pra eles pensarem qual que é...como tem mais brancos, então o branco tá comigo, pra eles ficarem com dúvidas e morrerem” – Emília está citando o possível pensamento do terceiro chinês, acreditando que os primeiros poderiam ter ambos a cor branca ou cores alternadas, e isso confundiria os dois primeiros chineses. Ela também parece estar pensando no lugar do carrasco, que teria dado um gorro branco ao terceiro justamente para que os dois primeiros não pudessem se salvar.

Amanda: “Que lindo!” - elogiando o argumento de Emília.

A solução sugerida é interessante, pois dá um sentido mais amplo ao que o terceiro chinês poderia ter pensado, a partir da informação de que os dois primeiros haviam morrido. De acordo com a fala de Emília, o terceiro chinês, ao saber que os dois primeiros haviam morrido, concluiu que ambos se confundiram pois não tinham certeza da cor de seus gorros, e isso é um grande salto protagonizado por Emília. Para resolver a questão, devemos levar em conta, em primeiro lugar, que o terceiro chinês descobriu a cor de seu gorro porque soube que os anteriores não conseguiram descobrir as cores dos seus. Na fala vemos que Emília não cita a possibilidade de o primeiro chinês ver dois gorros pretos, mas isto se justifica, pois ela usou desde o princípio a informação de que o terceiro chinês estava fixado com a cor branca. Minutos mais tarde, Emília e Daniel me chamam para apresentarem outros argumentos.

Daniel: “Os três gorros foram colocados, os três gorros da mesma cor, no caso os três brancos <sup>7</sup>” - Ele supõe que os três gorros colocados sejam da mesma cor – “Aí o primeiro, esse aqui...” - circula um dos bonecos desenhados no caderno – “... foi posto a olhar os outros dois. Ele olhou os outros dois e viu que eles estavam com o gorro branco, e ele pensou ‘não vou poder afirmar porque ainda restam dois gorros pretos e um gorro branco’, daí ele não pode afirmar nada. Aí ele foi condenado à morte, por não poder afirmar. Aí chegou o número dois, o segundo. Aí ele olhou o outro companheiro dele e viu que ele tava com o gorro branco, e pensou ‘eu posso estar com um gorro branco ou preto, que ainda restam estes

---

<sup>7</sup> Daniel, em seu caderno, desenhou 5 gorros, sendo três pretos e dois azuis, que eram as cores das canetas que ele possuía, e neste caso os pretos faziam o papel dos brancos, e os azuis faziam o papel de pretos no enigma dado. Para facilitar, adaptei sua fala mencionando as cores correspondentes ao enunciado.

daqui'. Aí ele foi condenado à morte. Chegou esse aqui, o cabeça, o último. Ele pensou 'o carrasco colocou os três gorros da mesma cor em nós, pois assim os dois primeiros veriam os dois gorros da mesma cor em nós, e não saberia afirmar qual deles seria, porque teria o preto, os dois pretos, os dois brancos, ele não poderia afirmar... o segundo veria um gorro branco em mim, não poderia afirmar do mesmo modo porque ainda teriam os dois pretos e os dois brancos. Então, sendo assim, eu digo que meu gorro é branco" - aqui Daniel finaliza o pensamento do terceiro chinês. No trecho em que Daniel cita "o cabeça", parece haver uma interpretação de que somente o último seria capaz de descobrir, como se ele fosse o único capaz de raciocinar logicamente. Porém, os dois primeiros também pensam de maneira lógica, e por isso não concluem nada a respeito das cores. Deve-se notar também na fala de Daniel a análise do caso BBB como possível; ele não chega a esse caso como um "necessário", a partir dos dados do problema.

Daniel, apesar de estar pensando a respeito daquilo que os chineses poderiam pensar, fixou a suposição de que os três estariam com gorros de mesma cor. Parece ser um misto entre formular hipóteses sobre o pensamento a respeito de outros pensamentos, e uma tentativa caracterizada pela fixação do caso em que os três possuem gorros com a mesma cor. Ele insiste na hipótese que tinha enunciado antes, isto é, os três de branco, e verifica que é compatível com a indecisão dos dois primeiros chineses, mas não considera a indecisão dos dois primeiros chineses como uma informação que permite concluir sobre a cor do terceiro.

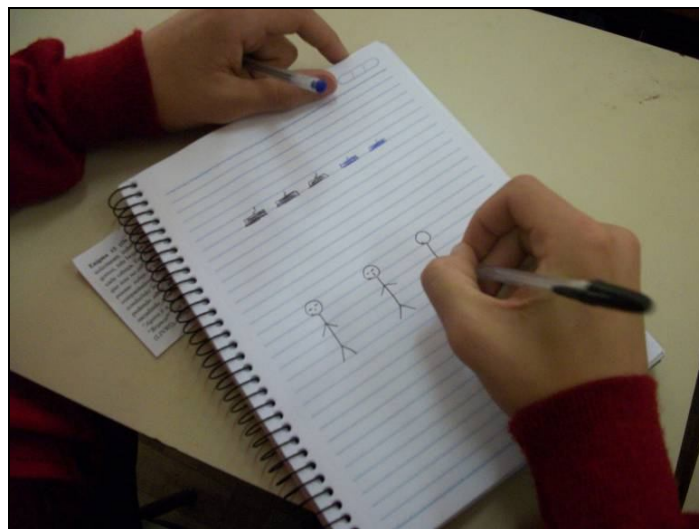


Figura 6: Daniel representando os chineses em seu caderno

Até agora, todos os argumentos dos alunos envolveram o conhecimento da cor do gorro do terceiro chinês. As afirmações consideram que, supondo o terceiro branco, podemos chegar à solução. Outra investida que surgiu foi considerar o último chinês “o cabeça”, possivelmente por ter sido mais capaz de deduzir que os outros dois, mesmo não tendo visto gorro algum. Também notamos que em alguns momentos eles se colocaram no lugar do carrasco, e imaginaram como ele teria feito para confundir os chineses, tentando entender o que aconteceria antes de eles começarem as tentativas. O grupo, da mesma maneira, examinou diferentes hipóteses, vendo se eram compatíveis com a história. No entanto, nenhum deles construiu um caminho a partir das indecisões dos dois primeiros, como se a indecisão deles não pudesse trazer informação alguma. Esta parece ser a grande dificuldade encontrada pela turma no enigma.

Houve um pequeno intervalo, a turma deixou um pouco de lado o problema por uns instantes, e depois voltou à sala de aula:

Amanda: “O último sempre tá de branco, a gente só tem que descobrir a cor dos primeiros” - Amanda afirma que a tarefa é descobrir a cor dos primeiros, quando na verdade o que deve ser descoberto é como o terceiro descobriu a sua cor branca sem olhar para os primeiros. Para isso, não é preciso que fixemos de antemão a cor branca no terceiro, apesar de no enunciado ser mencionada esta informação.

Daniel: “Eu cheguei à conclusão que, o primeiro tá com gorro branco, os outros dois colegas estão com o gorro preto” – isto é, aparentemente Daniel se despreendeu da informação enunciada, e esqueceu-se que o terceiro está de branco. Mesmo assim ele fixou um caso, com o primeiro chinês de branco e os outros dois de preto.

Pesquisador: “Por que o primeiro está com o gorro branco?”.

Daniel: “Bá, não sei professor”.

Pesquisador: “Se ele estivesse com outro, o que ia acontecer?” – isto é, pergunto sobre as consequências do primeiro estar com outro gorro diferente do branco. Neste momento, Emília está diante do quadro branco rabiscando-o em busca de alguma solução. Ela tenta explicar seu raciocínio.



Figura 7: Emília se lança ao quadro para explicar seu raciocínio

Emília: “Se colocar [nos dois primeiros] preto e branco [PB], ou branco e branco [BB], ou preto e preto [PP], os dois vão morrer, pra sobrar sempre uma forma de controvérsia, entendeu? Aí esse aqui que é o terceiro pensou ‘eu sou branco, porque branco tem mais!’” - note que, no entanto, ela baseou o pensamento do terceiro chinês na maior probabilidade da cor branca, já que há três gorros brancos e dois pretos – “Ele nem precisa pensar qual é a cor dos outros por que... meu Deus!” – Emília se demonstra ansiosa para encontrar a solução – “É por que é uma coisa óbvia!”. Ela está raciocinando como o carrasco, tomando a sua identidade e acreditando que seu objetivo seria matar os dois primeiros; de fato, se o terceiro gorro fosse preto, o primeiro ou o segundo teria se salvado. Neste momento, Emília enfileira lado a lado os outros três colegas.

Daniel: Eu sou o carrasco. Tu...” - Daniel tira Emília da fila e a vira de frente às outras duas colegas, tomando agora o papel de carrasco – “... pegou pras duas... viu um preto e um branco. Tu pensou que... o que tu pensaria?”.

Emília: “Eu pensaria que sou branco”.

Daniel: “Tu pensaria que tu é branco”.

Amanda: “Mas tu é preto!” – Amanda afirma que Emília teria um gorro preto, mas o que não podemos concluir é se ela estaria dizendo que o gorro poderia ser preto, ou está partindo do fato de que ele não sabe a cor para concluir que ele pensa na cor errada. Possivelmente ela confundiu, na fala, o “não saber a cor” com “pensar na resposta errada”.

Emília: “Mas eu pensaria que sou branco, eu pensaria pela maioria” – já que são três brancos e dois pretos no enigma, ela foi pela probabilidade – “... entendeu?”



Pesquisador: “Pensaria pela probabilidade? Daí não garantiria nada” – ou seja, argumento que utilizar a probabilidade, neste caso, não irá resolver o enigma, pois o chinês teve certeza de sua escolha, ele não supôs uma provável cor branca para o seu gorro.

Pesquisador: “Quando o primeiro olha para os outros dois, o que ele pode ter visto?”.

Emília: “Um preto e um branco”.

Pesquisador: “O que mais?”.

Emília: “Dois pretos, e dois brancos. E um branco e um preto”. Emília, neste comentário, demonstra ter percebido que a ordem das cores é importante. “Preto e branco” e “branco e preto” são situações diferentes, porque muda aquilo que o primeiro chinês vê.

Amanda: “Eu vou escrever no quadro” – Amanda escreve no quadro as possibilidades apontadas anteriormente, todas codificadas pela primeira letra da cor: PB, BP, PP, BB.

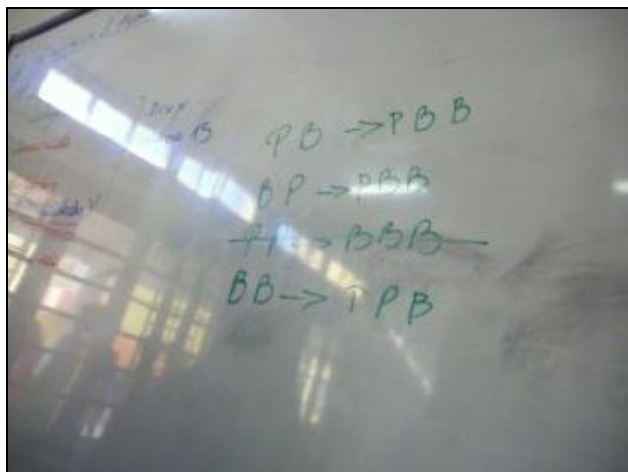


Figura 8: Possibilidades apontadas por Amanda à visão do primeiro chinês

Ao lado de cada uma das combinações, ela indicou quais cores faltariam para completar os cinco gorros.

Amanda: “Para PB, sobra PBB. Para BP a mesma coisa. Para PP, sobra BBB. Para BB, sobra PPB” - ela configura as cinco cores e as possibilidades do primeiro chinês – “Se eu enxergo dois pretos, eu vou saber que o meu é branco”.

Daniel: “A pergunta diz que o último é que sobrevive, só o último”.

Amanda: “Então a gente sabe que não é esse aqui” - Amanda risca a possibilidade PP, pois, caso contrário, o primeiro sobreviveria. Agora Amanda está resolvendo de maneira sistemática o enigma, inclusive utilizando o quadro branco como auxílio para ela e para os

colegas. Outra vez recorrem a uma representação simbólica, bastante presente nos encontros anteriores. O diálogo continua:

Emília: “É um desses três aqui” – ou seja, o primeiro chinês vê ou PB, ou BP ou BB.

Daniel: “Então o último vai saber pelos outros dois” - Daniel compreendeu que o último não morre porque ele soube que os primeiros morreram e pôde tirar conclusões disso.

Agora, Amanda escreve no quadro o que o segundo chinês veria. Neste caso ele veria ou a cor preta ou a cor branca.

Emília: “Tá professor, aqui...” - voltando na posição do quadro onde estão as possibilidades do primeiro chinês, que vê dois gorros – “... se ele ver um branco e um preto, ia sobrar estes daqui, [as cores BBP] só que ele não ia responder, porque ele não pode comprovar isso”. Emília retoma a discussão anterior, talvez para que ela mesma consiga concluir o que Amanda concluiu anteriormente.

Amanda: “Aí ele morreu”.

Emília: “Ele morreu, daí se ele enxergar um preto e um branco...” - ordem inversa do caso anterior – “... ele fica na mesma situação, porque ele também não pode comprovar. Aí se ele vê dois brancos, ele vê isso aqui...” – Emília afirma que se ele ver dois brancos, as cores que sobram são PPB, por isso ela afirmou que ele “vê isso aqui” apontado para a escrita no quadro PPB – “Também não pode comprovar. Mas não vamos descartar isso aqui porque a gente ainda tem que pensar” - ela diz que não podemos esquecer estas primeiras informações, pois serão úteis depois. Isso é um salto interessante dado por ela, pois passou a considerar estas primeiras conclusões como hipóteses para o decorrer do enigma, apesar de estar preocupada em saber a cor do primeiro, dado que não é relevante para a solução.

Emília: “Agora, vamos supor que o segundo vai olhar apenas um preto. Mas aí ele não vai responder, porque ele não sabe. Aí, ele vai olhar um branco, mas ele também não vai saber responder porque ele também não sabe” – Emília havia compreendido que a decisão do primeiro chinês influenciaria os demais, mas neste momento não aplicou esta premissa, por isso ficou confusa. Se tivesse considerado a indecisão do primeiro, teria descartado a hipótese do segundo ter visto um gorro preto; o primeiro não poderia ter visto dois gorros pretos, portanto, se o segundo visse um gorro preto, concluiria que o seu era branco.

Pesquisador: “Se ele [o segundo chinês] ver um gorro preto?”.

Amanda: “Não vai ser preto!”.

Pesquisador: “Por quê?”.

Amanda: “Por que o último é branco!” - Afirmação que se baseia no enunciado, fixado o último gorro branco. Se no enunciado não estivesse escrito que o último se salvou com a cor branca, é possível que eles considerassem, nesse momento, a hipótese do gorro preto, para a seguir descartá-la, isto é, poderiam ter concluído que se o segundo chinês visse a cor preta, saberia que sua cor é branca, e assim se salvaria, inclusive salvaria também o terceiro. Mas a presença da informação sobre a cor branca no enunciado parece impedi-los de considerar essa hipótese, e, portanto, de compreenderem a indecisão do segundo chinês.

Pesquisador: “Ok, mas a gente pode resolver a questão sem usar esta informação [de que 3º é branco] para justificar a decisão dos primeiros”.

Para a resolução deste enigma, não é preciso saber de início que a cor do último é branca. É preciso fazer suposições sobre o que os primeiros chineses teriam visto, e como esta informação ajudaria o terceiro a sobreviver, sem fixar a cor branca para o terceiro. A cor branca do terceiro é algo que devemos deduzir. Depois disso, deixei os alunos entre si pensando um pouco, mas retomei o diálogo minutos mais tarde.

Daniel: “Vocês têm que ler aqui...” - na tira de papel com o enunciado do enigma – “que diz, os dois primeiros tentaram e não acertaram, e o último era branco, então em todas as possibilidades que vocês irão colocar, o último tem que ser branco. A primeira possibilidade vai ser PPB, BPB [2ª possibilidade], BBB [3ª possibilidade] e PBB [4ª possibilidade]” – ou seja, Daniel está retomando aquela discussão entre Amanda e Emília no quadro branco. Daniel continua com a ideia de que o terceiro é fixado, de cor branca. Por esta razão afirmou que todas as possibilidades devem terminar com a cor branca.

Depois deste momento, a turma ficou por cerca de 20 minutos sem encontrar outras combinações possíveis para a solução. Mesmo assim, não desistiram.

Emília: “Pergunta. Por que ele não pode arriscar?” – ou seja, ela questiona se o chinês pode dizer a cor ao acaso e acertar, se isso valeria.

Pesquisador: “Não, por que daí ele não está comprovando que ele sabe da cor”. Neste momento, estão todos próximos ao quadro e fazem uma última tentativa de resolver o enigma, já que o tempo do encontro de hoje estava se esgotando.

Emília: “Ai meu Deus do céu!” – ela esboça uma vibração, pois teve o que chamou de “insight” – “Se esse aqui [segundo chinês] olha para esse aqui [terceiro chinês] e vê que ele é preto, e pensa que ele [segundo] pode ser preto ou branco. Se ele for preto, então o primeiro viu dois pretos, e disse que era branco” - ou seja, o primeiro teria se salvado – “Daí ele [segundo chinês] pensa ‘Eu não sou preto...’ pelo que eu acabei de explicar. ‘Eu não sou

preto, eu sou branco' porque ele não viu preto ali [na cabeça do 3º chinês]. Então ele [2º chinês] viu um branco ali [na cabeça do 3º chinês], agora eu tenho certeza que ele tem um branco ali" - Emília diz ter certeza que o terceiro chinês usa um gorro branco, e isso é verdade, sem que precisemos nos apegar ao enunciado. Porém, ela conclui que o segundo não pode ser preto. Ao considerarmos que os dois últimos não podem ser pretos, pois se fossem o primeiro se salvaria, estamos lidando com a implicação "Se não podem haver dois pretos, então o segundo ou o terceiro não podem ser pretos", e isso não implica que o segundo e o terceiro não sejam pretos, apenas podemos concluir que não podem ser pretos simultaneamente. Ela concluiu, no entanto, que nenhum podia ser preto.

Pesquisador: "E como é que o último descobre que o dele é branco?"

Infelizmente, neste momento, o tempo da aula acabou. O mais interessante é que a turma, durante todo o 3º encontro, tentou encontrar sem desistência uma solução para este problema. A dúvida que fica é o porquê de não terem conseguido sintetizar uma solução completa.

Como os alunos empregaram toda a atenção neste enigma, o encontro como um todo se resumiu às tentativas de sua resolução. Foi interessante ver que o grupo todo não desistiu em momento algum. Não se ouviu frases do tipo "Não tem solução! É impossível!". Isso revelou aos poucos algumas características peculiares dos alunos, mas também uma ideia coletiva que impediu de desistirem do enigma. Nesse encontro, porém, apesar desta dedicação empregada pelos próprios alunos, não foi sintetizada uma solução completa para o enigma. Na maioria dos momentos, o grupo se fixou na ideia de que o terceiro chinês teria um gorro branco, e a partir desta informação, tentaram desenvolver as possibilidades de resolução. Nos últimos momentos do encontro, começaram a construir uma sistemática de concluir sobre os gorros usando a informação de que os dois primeiros não puderam concluir sobre a cor dos seus. Com isso puderam concluir que o primeiro não poderia ter visto dois gorros pretos, mas não conseguiram utilizar essa conclusão para a seguir concluir que, se o último gorro fosse preto, então o segundo chinês saberia que o seu próprio gorro era branco e teria escapado.

Eu, particularmente, considero este enigma bastante difícil, talvez o mais difícil da lista de sugestões. Para resolvê-lo, é necessário que se guardem informações anteriores que serão utilizadas para a decisão do terceiro chinês. O ato de "guardar informações" talvez esteja sendo o fator que dificulta este enigma, mas também é preciso ter uma sistemática de considerar hipóteses desde o princípio até o final do enigma, coordenando-as entre si. O terceiro chinês sabe que o primeiro e o segundo morreram, daí conclui sobre o que o primeiro

poderia ter visto, daí deduz o que o segundo viu e pensou, e descobre sua cor. É uma questão na qual enunciamos hipóteses, e dentro de cada hipótese há outras, e considerando todas podemos conseguir encontrar uma solução.

Neste problema é preciso distinguir o que está acontecendo, a respeito das cores dos gorros, daquilo que se vê ou pensa. Em vários momentos a turma demonstrava uma tentativa de ver tudo, como se estivessem na posição dos carrascos, ou como se não estivessem vendados. Outra dificuldade notada é análoga ao problema de se descobrir uma moeda mais leve dentre oito idênticas. É preciso concluir a partir daquilo que não se sabe, que não se vê, ou seja, a solução envolve um raciocínio por contradição, por exemplo, “se ele tivesse visto preto, saberia que o dele é branco e teria sobrevivido, como não sobreviveu, concluímos que viu branco”. O raciocínio por contradição parece ser mais complicado de ser construído pelos alunos.

### 3.4. Encontro 4 – 24/05

O quarto e último encontro previsto teve início com a distribuição do enigma 9, referente ao rei e suas tropas. Diferentemente do que ocorreu no 3º encontro, a turma foi novamente dividida em dois grupos, sendo mantidos Daniel e Evelise no grupo 1 e Emília e Amanda no grupo 2.

Quadro 8: Enigma 9 e subdivisões

**Enigma 9 (subdividido):** Um certo rei gostava muito de caçar, e um belo dia saiu chefiando vinte e quatro de seus cavaleiros numa expedição de caça. Todos passaram várias noites num dos abrigos de caça do rei, erguido bem no meio da floresta. Nesse abrigo, havia nove quartos. O rei dormia no quarto central, e os vinte e quatro cavaleiros, entre cujas obrigações estava a guarda do rei, deviam ser distribuídos de maneira tal que houvesse exatamente nove deles de cada lado do abrigo. E foram distribuídos pelos quartos da seguinte maneira:

3	3	3
3	rei	3
3	3	3

Os cavaleiros perguntaram se, à noite, podiam frequentar os quartos uns dos outros,

para conversas e jogos. E o rei concordou, contanto que sempre houvesse nove cavaleiros guardando cada lado do abrigo.

**A primeira noite:** Na primeira noite, antes de se recolher, o rei percorreu todo o abrigo e contou o número de cavaleiros que havia guardando cada lateral, para ver se suas ordens estavam obedecidas e se nenhum dos cavaleiros tinha saído para ir à cidade mais próxima. Constatou que eram de fato exatamente nove guardando cada um dos quatro lados, e foi para a cama julgando que tudo estava bem. Mas os cavaleiros o haviam enganado! Quatro deles tinham saído sorrateiramente para a cidade, e os cavaleiros restantes, num rearranjo muito habilidoso, conseguiram manter exatamente o número de nove guardas de cada um dos lados do abrigo. Como foi que conseguiram? (SMULLYAN, 2008, p. 26).

**A segunda noite:** Na segunda noite, em vez de alguns cavaleiros irem até a cidade, quatro dos moradores locais, que eram seus amigos, vieram passar a noite no abrigo disfarçados de cavaleiros, pois a presença de estranhos não era permitida pelo rei. Ainda assim, quando ele fez sua ronda, achou que estava tudo bem, porque contou exatamente nove guardas de cada um dos lados do abrigo. Como foi que conseguiram? (SMULLYAN, 2008, p. 27).

**A terceira noite:** Na terceira noite, os visitantes foram oito, somando agora um total de trinta e dois homens (além do rei) na casa, mas ainda assim o rei encontrou exatamente nove guardando cada um dos lados e não percebeu que havia homens a mais. Como foi o arranjo? (SMULLYAN, 2008, p. 27).

**A quarta noite:** Os cavaleiros acharam a brincadeira tão divertida que, na noite seguinte, receberam doze visitantes em vez de oito. E mesmo assim, os trinta e seis homens se dispuseram de maneira a enganar o rei mais uma vez. De que modo? (SMULLYAN, 2008, p. 27).

**A quinta noite:** Já na quinta e última noite, em vez de convidarem os amigos para virem passar a noite no abrigo, os cavaleiros deram um jeito de permitir que seis deles fossem até a cidade, mantendo ainda assim exatamente nove homens de guarda em cada um dos quatro lados da casa. Como conseguiram? (SMULLYAN, 2008, p. 27).

Neste enigma, eles deveriam posicionar as tropas do rei, composta inicialmente por 24 cavaleiros, de forma a proteger o seu quarto. A exigência do rei era que em cada lateral tivessem 9 soldados guardando o quarto central. A mesma questão desafiava o leitor em cinco diferentes situações, e cada situação era uma noite diferente. O grupo 1 ficou responsável por resolver o enigma nas noites 2 e 3, e o grupo 2 se incumbiu de resolver as noites 1 e 4. A quinta noite foi destinada aos dois grupos.

Os grupos iniciaram suas tentativas nos próprios cadernos, e em determinado momento um dos grupos pediu para ir ao quadro, pois queria “enxergar melhor a disposição dos quartos”. Daniel foi quem mais utilizou o quadro branco para testar as possibilidades. Como o enigma se trata de configurar disposições de soldados em diferentes formatos, acredito que as primeiras investidas em ambos os grupos tenham sido por tentativas, mesmo que em alguns casos possam não ter sido de maneira sistemática. O caso de Daniel é similar às representações simbólicas feitas pelas colegas no enigma “Os chineses e seus gorros”. No encontro atual, ele vai ao quadro e desenha a disposição inicial dos soldados, inclusive acrescentando árvores ao cenário do desenho.

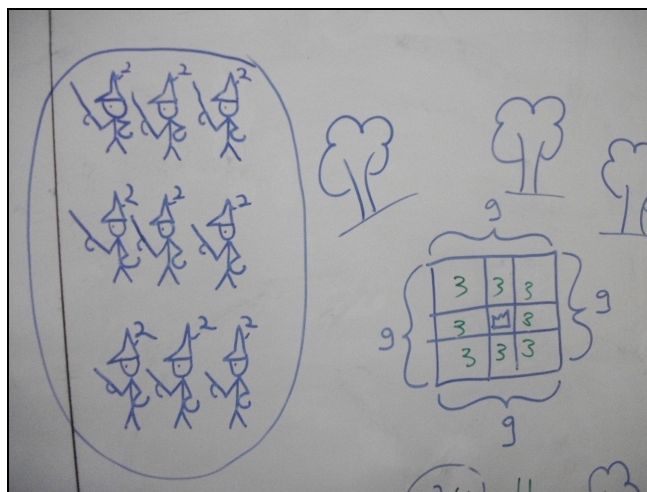


Figura 9: Esboços feitos por Daniel

Desta vez pedi aos alunos para resolverem o enigma e entregarem a solução por escrito. Em algumas situações os alunos encontraram mais de uma solução para uma mesma noite do enigma, caso, por exemplo, da dupla que conseguiu encontrar cinco soluções diferentes para a quinta noite, sendo uma delas errada. É o que vemos na figura a seguir.

**Grupo 1**

♥♥♥

2ª Noite: São dispostos em cada ponto 2 soldados e nos quartos centrais 5 soldados, fechando assim 9 soldados em cada lateral.

2	5	2
5	rei	5
2	5	2

3ª Noite: São separados em cada ponto 1 soldado e nos quartos centrais são postos 7 soldados, fechando o resultado de 52 soldados e 9 soldados em cada lateral.

1	7	1
7	rei	7
1	7	1

5ª Noite: São diferentes tipos de soluções que encontramos. São elas:

2	7
7	rei
7	2

8	1
rei	
1	8

5	4
rei	
4	5

3	6
rei	
6	3

2	1	5
1	rei	1
5	1	2

credeal

Figura 10: Grupo 1 - Resolução do Enigma 9, noites 2, 3 e 5

O grupo 1, buscando encontrar uma solução para a quinta noite, em um primeiro momento, investiu seu tempo em tentativas variadas, apenas colocando números nas laterais que se encaixassem nas condições enunciadas. Em seguida, depois de testadas várias alternativas de resposta, o grupo encontrou uma solução que satisfazia o enunciado, a primeira apresentada no terceiro item que aparece na figura 10. No entanto, um dos integrantes do grupo encontrou outra resposta diferente logo em seguida, a segunda apresentada nesse item.



O grupo observou que, em ambas as respostas, os soldados estavam localizados nas diagonais do quadrado formado pela disposição dos quartos, e assim conjecturaram que houvesse um tipo de padrão, talvez em X, e resolveram variar sistematicamente os números nesta configuração. Descobriram, assim, um padrão de respostas, obtendo na sequência as soluções 3 e 4 da folha de respostas. No entanto, o grupo não concluiu que este padrão encontrado é a única possibilidade de configuração para os soldados para a quinta noite. Podemos especular isto a partir da quinta resposta apresentada; eles dispuseram os soldados de tal maneira que as laterais ficaram guarnecidas por oito soldados; portanto, essa é uma resposta errada. De fato, na quinta noite, necessariamente os soldados devem ser dispostos em X. Vamos nomear os quartos dos soldados conforme figura a seguir, para assim justificar que o padrão em X é o único possível.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>d</i>	<i>REI</i>	<i>e</i>
<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>

Figura 11: Quartos nomeados genericamente, para a quinta noite

A primeira hipótese que temos é a de que a soma dos soldados das laterais deve ser nove. Vamos tomar, primeiramente, as laterais de cima e de baixo.

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ f+g+h=9 \end{cases} \downarrow \\ a+b+c+f+g+h=18 \text{ (1)}$$

Sabemos que a soma de todos os soldados, pelo enunciado da quinta noite, é 18.

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g+h &= 18 \\ a+b+c+f+g+h+d+e &= 18 \text{ (comutatividade)} \\ \underbrace{(a+b+c+f+g+h)} + (d+e) &= 18 \text{ (associatividade)} \\ 18 \text{ (garantido por (1))} & \\ \text{Logo, } d+e &= 0 \end{aligned}$$

Assim descobrimos que a soma de soldados nos quartos  $d$  e  $e$  é nula<sup>8</sup>, concluindo que estes quartos não devem alojar soldados na quinta noite. Analogamente<sup>9</sup> podemos descobrir que a soma do número de soldados nos quartos  $b$  e  $g$  é também zero, o que nos permite dizer que necessariamente os soldados devam se situar nos quartos em diagonal. O que acabamos de concluir é que, para a quinta noite, para dispor 18 soldados de modo que nove guardem as quatro laterais, necessariamente devemos colocá-los nos quartos dos cantos, e efetuando as variações podemos encontrar todos os casos possíveis. O grupo encontrou este padrão como um caso possível, mas não o considerou como necessário para resolver a questão.

O grupo 2 resolveu o item da quinta noite de maneira similar ao grupo anterior. As cinco soluções apresentadas por esse grupo estão corretas. Na quinta solução, os alunos colocaram nove soldados em um quarto de canto, e nove no quarto em diagonal, totalizando 18 soldados, nove em cada lateral, conforme folha de soluções entregue pelo grupo 2. Os demais quartos ficaram sem soldados. Talvez o fato deste grupo ter encontrado cinco soluções distintas para a quinta noite tenha sido descoberto pelo grupo 1, que tentou então encontrar uma quinta solução às pressas, e talvez por isso tenha dado uma solução errada mencionada anteriormente, com apenas oito soldados guarnecendo as laterais.

---

<sup>8</sup> Estamos operando com números naturais, o que garante associatividade e comutatividade nas contas efetuadas.

<sup>9</sup> A soma  $b+g=0$  é encontrada da mesma maneira que encontramos  $d+e=0$ .

Grupo 2

Enigma 9 - Primeira noite

→ Os cavaleiros conseguiram enganar o rei usando configurações que usam uma cruz de "1" no centro:

3 + 5	4 + 4
1 rei 1	1 rei 1
5 + 3	4 + 4

6 + 2	7 + 1
1 rei 1	1 rei 1
2 + 6	1 + 7

→ Obs: sem a configuração de cruz de "1" não dá.

Enigma 9 → Quarto noite

9  
 9 rei 9  
 9

Dispende 36 cavaleiros para proteger as laterais do quarto do rei.

Enigma 9 → Quinta noite

→ Com apenas 18 cavaleiros guardando as laterais do quarto do rei existem várias possibilidades dentre elas:

	8 = 1	7 = 2	6 = 3	5 = 4
	• rei •	• rei •	• rei •	• rei •
	1 = 8	2 = 7	3 = 6	4 = 5

Figura 12: Grupo 2 – resolução do enigma 9, noites 1, 4 e 5

Para a primeira noite, o grupo 2, assim como agiu na quinta noite, especulou um padrão de soluções possíveis. Os alunos primeiramente encontraram uma solução particular, e nela os quartos do meio tinham apenas quatro soldados, um em cada quarto. Ao verem esta configuração, testaram variações do número de soldados nos quartos laterais, e assim encontraram a segunda solução. A partir daí, sistematicamente testaram outras soluções contendo um soldado em cada quarto do meio, encontrando assim a terceira e a quarta solução. O grupo buscou encontrar todas as soluções que configuravam a “cruz” de números “1” nos quartos laterais. No entanto, assim como o grupo 2 em relação à quinta noite, não se preocuparam em verificar se este padrão era o único possível. Na verdade este padrão que

inclui o número 1 em todos os quartos laterais não inclui todas as respostas. A seguir apresentamos uma resposta que não se encaixa ao padrão disposto pelos alunos do grupo 2.

<b>4</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>REI</b>	<b>0</b>
<b>3</b>	<b>0</b>	<b>6</b>

Figura 13: Solução fora do padrão estipulado pelo grupo 2 para a primeira noite

De fato, se nomearmos os quartos conforme fizemos na demonstração do padrão em X no caso da quinta noite, chegaremos à conclusão<sup>10</sup> de que, na primeira noite, a soma do número de soldados da coluna central é 2, assim como a soma da linha central também resulta em 2, o que nos permite concluir que a configuração em cruz nos fornece alguns casos possíveis, mas não todos. A frase cunhada pelo grupo 2 na sua folha de respostas “[...] sem a configuração de cruz de 1’s não dá” está, portanto, equivocada, uma vez que encontramos um contraexemplo para esta afirmação.

O último momento deste encontro foi dedicado a uma autoavaliação dos alunos, orientada para um diálogo final entre eles e o pesquisador, buscando entender o ponto de vista deles sobre o que julgaram ter aprendido com a experiência, se tinham gostado de participar, quais as principais dificuldades, tudo de acordo com a visão dos próprios alunos. Este diálogo foi um fechamento das atividades e uma despedida.

---

<sup>10</sup> Considere a demonstração da primeira noite análoga aos passos efetuados na quinta noite, nomeando os quartos com letras de  $a$  até  $h$ , e executando os mesmos passos até chegar em  $d+e=2$  e  $b+g=2$ .

#### 4. ANÁLISES A RESPEITO DO DESENVOLVIMENTO DOS ENCONTROS

Diante dos fatos presenciados nos quatro encontros, sendo alguns momentos registrados e transcritos com o auxílio da gravação de áudio, permitindo assim um maior detalhamento, pudemos observar algumas características que julgamos ser importante destacar. Nosso intuito nos relatos foi o de compreendermos as estratégias exploradas na solução dos enigmas, e as conexões estabelecidas, em nível de pensamento, entre o concreto e o formal.

Primeiramente, foi possível observarmos que os alunos, em muitos casos, pensaram no problema para além de uma situação concreta, desprendendo-se do real e iniciando um processo de abstração característico do pensamento hipotético. Essa passagem se deu em momentos diversos, sendo que, os participantes analisados, por vezes agiam e pensavam segundo as premissas do problema, abstraindo das situações aquilo que importava para a solução, e noutros momentos traziam elementos externos ao enunciado na tentativa de resolver o problema ou de concluir pela sua impossibilidade. Alguns dos problemas, a uma primeira vista, pareciam não ter solução. O enigma 10 (“O médico na ilha deserta”), por exemplo, apresentava-nos uma situação inusitada numa ilha deserta em que deveriam ser feitas três cirurgias com apenas quatro luvas, sendo que, em cada procedimento, o médico usaria duas luvas. Esta situação, vista num primeiro olhar, poderia ser considerada como insolúvel, dado o contexto de um deserto. A impossibilidade poderia também ser deduzida: poderíamos supor que, se em cada cirurgia o médico usa duas luvas, para a terceira necessariamente ele deveria repetir o uso de duas luvas já usadas anteriormente, o que acarretaria a contaminação do paciente. Mesmo assim, e apesar da situação parecer não solucionável, o grupo de alunos conseguiu aos poucos se desprender da aparência de impossibilidade e concluir que tinha que fazer algo diferente para resolvê-lo. Em alguns momentos, os alunos questionaram o fato da situação ocorrer no meio de um deserto, mas, notadamente, aos poucos foram assumindo uma postura característica de um pensamento formal, abstraindo da situação os elementos essenciais e recorrendo à sistematização das variáveis do problema, a fim de que pudessem resolver o enigma, e assim o resolveram. Acredito que uma criança teria mais dificuldades em se desprender da situação real, e esbarraria no fato de a cirurgia ocorrer numa ilha deserta, sem água. Esta dificuldade de desprendimento do real é uma característica de um pensamento concreto (FLAVELL, 1988). Portanto, podemos perceber que o grupo de alunos em questão, por momentos oscilou entre

os modos de pensamento concreto e formal, o que acredito ser algo esperado, numa transição entre as fases do desenvolvimento.

Pude constatar isso exercitando o método clínico. De acordo com Carraher (1983), a compreensão da construção dos conceitos na teoria piagetiana se dá a partir de um trabalho paralelo de experimentação e exame de sujeitos, “cujas respostas possam ser tratadas como dados sobre os quais o estudante venha a refletir” (Ibid., p. 13).

Outro detalhe interessante foi o que ocorreu no primeiro encontro, quando os grupos deveriam resolver o enigma 19 (“Qual é a moeda falsa?”). Um dos grupos não havia conseguido solucioná-lo, e o outro grupo de alunos se propôs a mostrar sua solução. No primeiro momento, a apresentação oral de um dos grupos não foi suficiente para que os outros alunos compreendessem a solução do enigma. Somente depois de alguns minutos pensando sozinhos, esses outros alunos informaram que haviam se convencido da solução apresentada pelos colegas. Assim, foi pedido a eles que escrevessem sua solução e a entregassem ao pesquisador. Tão logo foi entregue, o primeiro grupo se prontificou a corrigir a solução escrita dos colegas. A decisão de corrigir a solução do outro grupo pode ser interpretada de dois modos. Primeiramente, o grupo demonstrou-se bastante confiante em relação à solução encontrada, e se sentiu capaz de corrigir a solução encontrada pelos colegas. Em segundo lugar, pode haver aí um reflexo da formação pela qual estão passando, direcionados a serem educadores, pois o grupo de alunos que participou das oficinas cursa uma modalidade especial de Ensino Médio, o chamado Curso Normal, que forma professores para as séries iniciais.

Observamos também no terceiro encontro uma curiosidade, especificamente na postura de duas alunas ao tentarem resolverem o enigma 15 (“Os chineses e seus gorros”). Por exemplo, em determinado momento uma aluna afirmou que a cor dos gorros sobre as cabeças dos dois primeiros chineses era preta, e em seguida a outra aluna afirmou que os gorros poderiam ser brancos ou pretos. Ou seja, a primeira aluna fixou as cores, enquanto a segunda, de maneira sistemática, levantou a possibilidade de as cores não serem as que a colega fixou. Esta aluna que interveio parecia estar tentando garantir que o grupo considerasse todas as possibilidades. Porém, esta postura não pareceu focada na resolução do enigma, ela pareceu ser mais um alerta aos colegas para que examinassem todas as possibilidades de maneira mais sistemática. Pode ser observado nos diálogos que esta aluna, em alguns momentos, faz perguntas que vão contra as afirmações dos colegas. Por exemplo, se afirmássemos “vamos supor que as duas primeiras cores eram brancas, então...”, teríamos como resposta da colega “Mas se as cores não forem brancas?”. Esta aluna parece estar mais habituada a um

pensamento combinatório, pois se posiciona de maneira a examinar as possibilidades em questão, não se fixando em apenas um caso, e por isso lança sempre este tipo de questionamento aos colegas.

Neste mesmo encontro, no enigma dos gorros, constatamos que poderíamos ter retirado do enunciado a informação sobre a cor do terceiro chinês, pois nós podemos descobri-la deduzindo passo a passo o enigma. A presença desta informação no enunciado foi crucial para as decisões e suposições dos alunos, que em quase todas as tentativas consideravam fixada a cor branca no gorro do terceiro chinês, quando o melhor a ser feito seria encarar esta como uma das possibilidades, e dedutivamente descobrir que a cor do terceiro só poderia ser branca, caso contrário haveria outros desdobramentos, como, por exemplo, a salvação de outro chinês.

As posturas observadas nos encontros podem ser consideradas características de uma transição entre formas de pensar, entre a fase concreta e a fase operatória formal. De fato, acredito que os alunos participantes das oficinas encontram-se num momento de passagem entre formas de pensar. Por momentos eles se prendem a questões concretas, mas noutras ocasiões se desprendem da situação e conseguem manipular as variáveis do problema.

Também é perceptível a persistência dos alunos ao resolverem as questões propostas, mesmo ocupando todo um encontro, caso do enigma dos gorros, por exemplo. A variável tempo não foi um empecilho para os grupos em sua busca por soluções aos enigmas.

No caso das cirurgias, se considerada a situação no deserto, e se não considerada a possibilidade de virar do avesso as luvas, o enigma se torna insolúvel, e, portanto, para resolvê-lo, é necessário desprender-se destas variáveis concretas, e faz-se necessário considerar situações hipotéticas. Por isso acredito que os alunos em questão transitam entre formas distintas de pensar, mas conseguem resolver os enigmas a partir de uma postura desprendida. A transição que suponho ser verdadeira é caracterizada justamente pela oscilação entre formas de pensar apresentadas pelos alunos participantes das oficinas.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho trouxe à tona, dentre muitos aspectos, alguns referentes a uma característica predominante em adolescentes em transição entre formas de pensamento. Essa passagem ocorria em meio a oscilações. Por momentos, os alunos pesquisados se detinham em pensamentos sobre situações concretas, noutras ocasiões dedicavam-se a conjecturar proposições, operando e combinando-as sistematicamente. Essa oscilação é notadamente uma característica marcante em sujeitos que estão vivendo uma transição entre fases de desenvolvimento. Esta característica foi bastante presente nas resoluções dos enigmas apresentadas pelos alunos. Em qualquer estratégia utilizada pelos grupos, pudemos observar quase sempre um movimento oscilatório de tentativas e sistematizações.

Constatamos nas oficinas, devido ao esforço empregado pelos alunos, que esse tipo de questão, de caráter lógico-dedutivo, não causou estranheza alguma, inclusive os alunos participantes demonstraram um empenho inesperado, persistente, mesmo que algum enigma estivesse ocupando muito tempo do encontro, por vezes o encontro inteiro, caso, por exemplo, do enigma dos chineses.

Por fim, vale salientar as representações construídas pelos alunos durante as oficinas do projeto “Lógica & Ação”. No enigma da pesagem das moedas, os alunos utilizaram-se de oito moedas idênticas para representar a situação do problema, e com o auxílio dessa representação resolveram o enigma. As moedas serviram de amparo manipulativo e visual para a resolução do problema. Do mesmo modo, no enigma do médico-cirurgião, as luvas tiveram um papel importante na ocorrência da ideia de virá-las do avesso, e essa escolha foi preponderante para que os alunos encontrassem as soluções que apresentaram, com a ressalva de que as luvas serviram como um primeiro amparo, apenas; houve momentos em que os alunos afirmavam que “não precisava mais”, isto é, que as luvas não precisavam ser utilizadas a todo o instante na resolução do enigma, justamente um dos objetivos deste trabalho. Na tentativa de resolução do enigma dos gorros, por vezes, os estudantes se colocaram no lugar dos diferentes personagens do enigma (chineses ou carrasco). Escrever algumas possibilidades sistemáticas no quadro branco foi também, nesse caso, uma estratégia bastante importante, como uma forma de representação utilizada pelos alunos. Já no caso do enigma do rei e suas tropas, utilizaram o papel como auxílio para sistematizar um padrão de soluções, apesar de não terem se preocupado em verificar se os padrões encontrados eram ou não as únicas configurações de resposta.



O trabalho atingiu os objetivos iniciais. Os alunos, de fato, não viram os enigmas como problemas insolúveis, buscando resolvê-los durante todo o tempo dos encontros. Isso pode ter sido favorecido pelo sucesso obtido no primeiro encontro e pelo fato de todos os problemas escolhidos terem pelo menos uma solução. Também foi possível observar as características de pensamento da fase a que fazem parte os alunos analisados, e perceber assim as estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem os enigmas. Como havíamos imaginado, as encenações foram alternativas úteis para o melhor entendimento dos enigmas propostos. Estas foram conclusões importantes no trabalho, pois buscaram responder a algumas das perguntas formuladas antes das oficinas ocorrerem.

Na minha adolescência não costumava resolver este tipo de enigma abordado nos encontros, pois encontrava muitas dificuldades, o que acarretava quase sempre na minha desistência. Eu gostava destes desafios e admirava quem conseguia resolvê-los, mas quase nunca conseguia encontrar as soluções. De certa forma, este trabalho passou a limpo esta percepção. Hoje, ao me deparar com um desafio destes, provavelmente eu tentarei resolvê-lo com todas as minhas forças, e até pensarei nele como um desafio aos meus alunos, sejam eles adolescentes ou crianças.

O projeto “Lógica & Ação” pode ser desenvolvido por professores da escola básica. Uma maneira interessante de aproveitar este material em sala de aula é utilizando-o em momentos diversos ao longo do ano letivo, desafiando os alunos com um enigma e um material de apoio que sirva de amparo para sua resolução e para a argumentação dos estudantes. Por exemplo, nos últimos vinte minutos de aula o professor pode desafiar a turma a resolver um enigma com o auxílio do material de apoio, como luvas ou moedas, dependendo do enigma, inclusive permitindo aos alunos que levem este material para casa, caso não consigam resolver no tempo de aula. Acredito que o emprego destas questões não seja uma subtração de tempo na aula de matemática, mas um acréscimo de possibilidades no aprendizado de matemática. Creio também que este tipo de questão, por se tratar de problemas que envolvam um raciocínio dedutivo apurado na sua resolução, pode auxiliar positivamente o aluno ao trabalhar os conteúdos curriculares de matemática.

Este projeto pode ser estendido a crianças, com uma nova seleção de enigmas e uma metodologia similar à aplicada com os adolescentes. Uma pesquisa interessante que também pode ser feita é a análise comparativa entre respostas de forma escrita e falada por parte dos alunos. Por exemplo, poderiam ser propostos a certo número de alunos os mesmos enigmas listados neste trabalho, e os alunos, além de resolver, apresentariam sua resolução escrita e

falada. Este campo de pesquisa está amplamente aberto, basta uma iniciativa por parte dos professores nas escolas.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: 1999.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico: usando os exames de Piaget**. Rio de Janeiro: Vozes, 1983.

ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL, Secretaria de Educação. **Lições do Rio Grande: Ensino Médio – volume 3 (parte 2)**. Rio Grande do Sul: 2010.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. São Paulo: Autores Associados, 2007.

FLAVELL, J. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. São Paulo: Ed. Pioneira, 1988.

MADEIRA, Marcos Almir (coord.). **O livro dos nossos filhos: enciclopédia para adolescentes**. 2. ed. Rio de Janeiro: Alfa, 1959. v. 2.

MORICONI, Marco. **Revista Ciência Hoje**, SBPC, São Paulo, v. 45, p. 79, maio 2010.

NEVADO, Rosane Aragón. **Espaços interativos de construção de possíveis: uma nova modalidade na formação de professores**. 2001, 232f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

PEREIRA, Ana Rita Giovani. **Raciocínio Lógico**. Projeto Teia do Saber 2006 - Programa de Formação Continuada de Professores. São Paulo: Secretaria de Estado da Educação, 2006.

PIAGET, Jean. **A Tomada de Consciência**. São Paulo: Melhoramentos, 1977.

\_\_\_\_\_. **Fazer e Compreender**. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

\_\_\_\_\_. **O possível e o necessário:** evolução dos necessários na criança. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.

\_\_\_\_\_; INHELDER, Bärbel. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** Ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais. São Paulo: Pioneira, 1976.

SANTOS, Claudimara Chisté; ROSSETTI, Claudia Broetto; ORTEGA, Antonio Carlos. O funcionamento cognitivo de idosos e de adolescentes num contexto de jogos de regras. **Estudos Interdisciplinares sobre o envelhecimento**, Porto Alegre, v. 9, p. 53-74, 2006.

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T.C. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

SMULLYAN, Raymond. **O Enigma de Sherazade;** e outros incríveis problemas das Mil e uma noites à lógica moderna. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2008.

STANGROOM, Jeremy. **O Enigma de Einstein:** Desafios Lógicos pra exercitar sua mente e testar sua inteligência. São Paulo: Marco Zero, 2010.

UFRGS, PIBID. **Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.** Subprojeto Matemática. Disponível em: <http://pibid.mat.ufrgs.br/> Acesso em: 17 de out. de 2011.

VELOSO, Eduardo; VIANA, José Paulo. **DESAFIOS 2:** 52 Problemas Matemáticos no Público. Porto: Afrontamento, 1992. v. 2.

## **APÊNDICE A – Lista completa de enigmas e sugestões de solução.**

Abaixo consta uma lista de sugestões de enigmas previamente escolhidos para serem utilizados nas oficinas. No entanto, somente alguns deles foram aplicados. As soluções apresentadas para cada enigma são sugestões retiradas dos próprios livros.

**Enigma 1 (adaptado):** O que é maior que tudo, é o que os mortos comem e, se vivos comerem, acabam morrendo? (SMULLYAN, 2008, p. 14).

**Solução:** Nada.

**Enigma 2:** Dois camelos estavam virados em direções opostas. Um estava voltado diretamente para o leste, e o outro diretamente para o oeste. Como podem olhar um para o outro sem andar, virar-se ou sequer mexer as cabeças? (SMULLYAN, 2008, p. 15).

**Solução:** Basta um estar de frente para o outro

**Enigma 3:** O que é mais, seis dúzias de dúzias ou meia dúzia de dúzias? (SMULLYAN, 2008, p. 17).

**Solução:** Seis dúzias de dúzias são  $6 \times 12 \times 12$  que são 864; meia dúzia de dúzias são  $6 \times 12$  que são 72. Portanto Seis dúzias de dúzias é mais que meia dúzia de dúzias.

**Enigma 4:** Era uma vez dois amigos chamados Sinbad e Hinbad (...); os dois possuíam, cada um, o mesmo número de cavalos. Quantos cavalos Sinbad precisaria dar a Hinbad para que Hinbad tivesse seis a mais que ele, Sinbad? (SMULLYAN, 2008, p. 17).

**Solução:** Sinbad precisa dar a Hinbad 3 cavalos. Assim ele terá 3 cavalos a menos, e Hinbad 3 cavalos a mais, resultando na diferença de 6 cavalos.

**Enigma 5:** Num dos navios em que Sinbad viajou, havia uma escada de seis degraus pendente da amurada de seu navio, e os degraus ficavam a trinta centímetros de distância um do outro. Na maré baixa, as águas chegaram até o segundo degrau, contando de baixo para cima. E depois, quando veio a maré alta, as águas subiram sessenta centímetros. Nessa hora, a que degrau chegaram as águas? (SMULLYAN, 2008, p. 17).

**Solução:** As águas continuaram chegando até o segundo degrau, o navio também sobe com a maré.

**Enigma 6 (aritmético):** Quanto é um milhão dividido por um quarto, mais cinqüenta? (SMULLYAN, 2008, p. 21).

**Solução:** Quatro milhões e cinquenta.

**Enigma 7:** Um dia Hassan encontrou três rapazes e começou a conversar com eles sobre sua famosa mula. “E de que cor ela é?” perguntou um dos três. Hassan então propôs um jogo. “Eu digo que ela é ou castanha, ou preta ou cinzenta. Cada um de vocês tenta adivinhar e, quando as informações já forem suficientes, eu farei um comentário sobre os palpites dos três e então veremos se vocês conseguem deduzir qual é a cor da mula”.

“Meu palpite é que ela não é preta”, arriscou o primeiro.

“E o meu, que é ou castanha ou cinzenta”, disse o outro.

“E eu digo que ela é castanha”, opinou o terceiro.

“Basta!” disse Hassan. “Já chega de palpites. Posso dizer que pelo menos um de vocês acertou, e pelo menos um errou”.

Qual é a cor da mula de Hassan? (SMULLYAN, 2008, p. 21).

**Solução:** Se a mula fosse preta, todos os três palpites estariam errados. Se a mula fosse castanha, todos os três palpites estariam corretos. Portanto, a mula só pode ser cinzenta (e, assim, os dois primeiros palpites estavam certos, e o terceiro estava errado).

**Enigma 8:** Hassan possuía oito camelos. Num mês infeliz, todos eles morreram, menos cinco. Quantos camelos sobraram? (SMULLYAN, 2008, p. 22)

**Solução:** Sobraram cinco.

**Enigma 9 (em partes):** Um certo rei gostava muito de caçar, e um belo dia saiu chefiando vinte e quatro de seus cavaleiros numa expedição de caça. Todos passaram várias noites num dos abrigos de caça do rei, erguido bem no meio da floresta. Nesse abrigo, havia nove quartos. O rei dormia no quarto central, e os vinte e quatro cavaleiros, entre cujas obrigações estava a guarda do rei, deviam ser distribuídos de maneira tal que houvesse exatamente nove deles de cada lado do abrigo. E foram distribuídos pelos quartos da seguinte maneira:

<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>rei</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>

Os cavaleiros perguntaram se, à noite, podiam frequentar os quartos uns dos outros, para conversas e jogos. E o rei concordou, contanto que sempre houvesse nove cavaleiros guardando cada lado do abrigo.

**A primeira noite:** Na primeira noite, antes de se recolher, o rei percorreu todo o abrigo e contou o número de cavaleiros que haviam guardando cada lateral, para ver se suas ordens estavam obedecidas e se nenhum dos cavaleiros tinha saído para ir à cidade mais próxima. Constatou que eram de fato exatamente nove guardando cada um dos quatro lados, e foi para a cama julgando que tudo estava bem. Mas os cavaleiros o haviam enganado! Quatro deles tinham saído sorrateiramente para a cidade, e os cavaleiros restantes, num rearranjo muito habilidoso, conseguiram manter exatamente o número de nove guardas de cada um dos lados do abrigo. Como foi que conseguiram? (SMULLYAN, 2008, p. 26).

**Solução – primeira noite:**

<b>4</b>	<b>1</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>rei</b>	<b>1</b>
<b>4</b>	<b>1</b>	<b>4</b>

**A segunda noite:** Na segunda noite, em vez de alguns cavaleiros irem até a cidade, quatro dos moradores locais, que eram seus amigos, vieram passar a noite no abrigo disfarçados de cavaleiros, pois a presença de estranhos não era permitida pelo rei. Ainda assim, quando ele fez sua ronda, achou que estava tudo bem, porque contou exatamente nove guardas de cada um dos lados do abrigo. Como foi que conseguiram? (SMULLYAN, 2008, p. 27).

**Solução – segunda noite:**

<b>2</b>	<b>5</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>rei</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>5</b>	<b>2</b>

**A terceira noite:** Na terceira noite, os visitantes foram oito, somando agora um total de trinta e dois homens (além do rei) na casa, mas ainda assim o rei encontrou exatamente nove guardando cada um dos lados e não percebeu que havia homens a mais. Como foi o arranjo? (SMULLYAN, 2008, p.27).

**Solução – terceira noite:**

<b>1</b>	<b>7</b>	<b>1</b>
<b>7</b>	<b>rei</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>7</b>	<b>1</b>

**A quarta noite:** Os cavaleiros acharam a brincadeira tão divertida que, na noite seguinte, receberam doze visitantes em vez de oito. E mesmo assim, os trinta e seis homens se dispuseram de maneira a enganar o rei mais uma vez. De que modo? (SMULLYAN, 2008, p. 27).

**Solução – quarta noite:**

	<b>9</b>	
<b>9</b>	<b>rei</b>	<b>9</b>
	<b>9</b>	

**A quinta noite:** Já na quinta e última noite, em vez de convidaram os amigos para virem passar a noite no abrigo, os cavaleiros deram um jeito de permitir que seis deles fossem até a cidade, mantendo ainda assim exatamente nove homens de guarda em cada um dos quatro lados da casa. Como conseguiram? (SMULLYAN, 2008, p. 27).

**Solução – quinta noite:**

<b>5</b>		<b>4</b>
	<b>rei</b>	
<b>4</b>		<b>5</b>



**Enigma 10 (O Médico em uma ilha deserta):** Um médico cirurgião se encontra em uma ilha totalmente deserta, sem água, com 3 pacientes que necessitam urgentemente de uma cirurgia cada. Porém, o cirurgião tem apenas dois pares de luvas. Como ele fará as três cirurgias sem contaminar os pacientes e a si próprio? Lembre-se que a cirurgia deve ser feita com as duas mãos em cada paciente. (MORICONI, p. 79)

**Solução:** O médico coloca uma luva em uma das mãos e outras três na outra, realizando assim a primeira cirurgia. Logo após realizada a atividade, ele retira uma luva da mão que tinha três e a coloca do avesso sobre a luva suja da outra mão, podendo em seguida realizar a segunda cirurgia. Por fim, ele retira novamente uma luva da mesma mão de que havia retirado uma luva antes e a coloca na outra mão do avesso, concluindo a terceira cirurgia. Após esta cirurgia, ele terá uma mão com três luvas e outra com uma, mas posicionadas em mãos opostas as que estavam no começo das cirurgias.

**Enigma 11 (O homem do quadro):** Um homem aponta para um retrato e diz: “Irmãos e irmãs eu não tenho, Mas o pai daquele homem é filho de meu pai”. Para o retrato de quem o homem está olhando? (STANGROOM, p. 6).

**Solução:** Ele está olhando para o retrato do seu filho.

**Enigma 12 (Os trens):** Partem trens de São Paulo a Santos o dia todo, sempre pelos mesmos trilhos, sempre sem parada e na mesma velocidade. O trem das 14 horas levou 80 minutos para completar a viagem, mas o das 16 horas levou 1 hora e 20 minutos. Por quê? (STANGROOM, p. 13).

**Solução:** Ambos levaram o mesmo tempo, pois 80 minutos é o mesmo que 1 hora e 20 minutos ( $60\text{min} + 20\text{min} = 80\text{min}$ ).

**Enigma 13 (O rei, seus filhos e seus cavalos):** O velho rei desafia cada um de seus dois filhos para ver qual deles herdaria seu trono. Ele diz que o filho cujo cavalo chegar por último à igreja na colina será o próximo rei. O filho mais novo imediatamente monta o cavalo e segue em direção à igreja a toda a velocidade. O rei cumpre a palavra e faz dele seu herdeiro ao trono. Por quê? (STANGROOM, p. 19).

**Solução:** O filho mais novo montou no cavalo do irmão mais velho, portanto o seu cavalo chegaria por último à igreja, consagrando-o o novo rei.

**Enigma 14 (Bactérias na tigela):** Numa tigela, algumas bactérias se dividem a cada minuto em duas iguais, que são do mesmo tamanho que a bactéria original, e que também se dividem no minuto seguinte e assim por diante. A tigela em que isso acontece está cheia ao meio dia. Quando a tigela está até a metade? (STANGROOM, p. 31).

**Solução:** Exatamente as 11h59min, pois um minuto depois a quantidade de bactérias dobrará, e ao meio-dia a tigela estará cheia.

**Enigma 15 (Os chineses e seus gorros):** Três chineses foram condenados à morte. Todavia solicitaram indulto. Este lhes seria concedido, mediante uma condição. Apresentaram-lhes cinco gorros, três brancos e dois pretos e, depois de lhes vendarem os olhos, foi colocado um gorro sobre cada cabeça. Em seguida, tiraram a venda do primeiro, dizendo-lhe: *“Se adivinhares a cor do gorro que tens na cabeça, serás indultado. Podes olhar os de teus dois companheiros, pois, talvez por eles, possas saber a cor do teu, com o que salvarás a tua vida”*. O chinês olhou os gorros dos companheiros, suspirou e depois, sacudindo a cabeça, declarou-se vencido, sendo, em seguida, conduzido ao patíbulo. Depois de retirada a venda do segundo, foi-lhe feita a mesma proposta, podendo olhar, apenas, o gorro do companheiro restante. Também o segundo chinês suspirou e, sacudindo a cabeça, declarou-se impotente para adivinhar. Foi, igualmente, conduzido ao patíbulo. *“Agora é a tua vez”* disseram ao terceiro deles. *“De que cor é o teu gorro?”*, e o homem respondeu *“Branco”*. Era verdade e foi indultado. Como pôde adivinhá-lo? Você, por acaso, saberá explicar? (MADEIRA, 1959, p. 6).

**Solução:** O primeiro chinês, ao ver os outros dois gorros nada conclui e vai para a morte. Se isto ocorreu, então os dois gorros que ele viu ou eram ambos da cor branca, ou um preto e um branco, pois se ambos fossem pretos, então ele saberia que seu gorro era branco, e vendo os dois brancos ou um de cada cor não possui informações necessárias para concluir. Este primeiro chinês sai de cena, restam dois. É tirada a venda deste próximo, e este não conclui nada. Se isto ocorreu, e tendo também que o primeiro desistiu, então o segundo chinês poderia ver um gorro preto ou branco. Caso ele tivesse visto um preto, então saberia a sua cor (que seria branca), mas como ele não concluiu nada, então o gorro que ele viu sobre a cabeça do terceiro chinês era branco, podendo ser o seu branco ou preto. Por esta razão seu destino foi a morte. O terceiro chinês nenhum gorro viu, mas a partir do que soube pela desistência dos outros dois, concluiu que seu gorro era branco, e por isso foi libertado.

**Enigma 16 (Número Mínimo de Ligações):** Vinte anos depois da formatura, cinco colegas de turma decidem organizar uma confraternização. Para marcar o dia e o local da confraternização, precisam comunicar-se por telefone. Cada um conhece o telefone de alguns colegas e desconhece o de outros. No quadro abaixo, o número “1” indica que o colega da linha correspondente conhece o telefone do colega da coluna correspondente; o número “0” indica que o colega da linha não conhece o telefone do colega da coluna. Exemplo: Beto sabe o telefone do Dino que não conhece o telefone do Aldo. Qual é o número mínimo de telefonemas que Aldo deve fazer para se comunicar com Carlos? (PEREIRA, 2006, p. 5)

	Aldo	Beto	Carlos	Dino	Ênio
Aldo	1	1	0	1	0
Beto	0	1	0	1	0
Carlos	1	0	1	1	0
Dino	0	0	0	1	1
Ênio	1	1	1	1	1

**Solução:** O número mínimo será 3 ligações, como podemos ver a seguir: Aldo liga para Dino e pede o telefone de Ênio. Aldo liga para Ênio e pede o telefone de Carlos. Aldo liga para Carlos.

**Enigma 17 (Homem mais alto):** Se o Bob e o Fred são ambos mais altos do que o Tom, e se o Hal é mais alto do que o Bob, porém mais baixo que o Fred, qual dos homens é o mais alto e qual deles é o segundo mais alto? (PEREIRA, 2006, p. 5)

**Solução:** Fred é o mais alto; Hal é o segundo mais alto.

**Enigma 18 (Os filhos não gêmeos):** Nasceram dois meninos da mesma mãe, no mesmo dia, na mesma hora, no mesmo ano, mas não são gêmeos. Como isso pode acontecer? (STANGROOM, 2010, p. 33).

**Solução:** Bastou nascerem em meses diferentes. Por exemplo, Ambos nasceram dia 19, às 14horas, no ano de 2010, mas um em Janeiro e o outro em Dezembro.

**Enigma 19 (Qual é a moeda falsa?):** Temos oito moedas rigorosamente iguais na sua aparência exterior. No entanto, uma delas é falsa e pesa menos que as outras sete. Como descobrir qual é a moeda falsa fazendo apenas duas pesagens numa balança de pratos? (VELOSO *et al*, 1992, p. 16).

**Solução:** São pesadas inicialmente seis moedas, sendo três em cada prato. Há duas possibilidades para esta primeira tentativa: Ou os pratos ficam equilibrados, ou em um deles

se identifica menos peso. Se ambos ficarem equilibrados, já sabemos que a moeda mais leve não está neste grupo de seis, sendo, portanto necessária apenas mais uma pesagem com as duas que sobraram para descobrirmos a moeda falsa. Se um dos pratos descer, então no outro está a moeda mais leve; neste caso faz-se novamente uma pesagem com duas das três moedas que estava no prato mais leve, e novamente aqui temos duas possibilidades: Ou a balança se equilibra, ou a balança acusa uma moeda mais leve. Se a balança se equilibrar, então a moeda que estava de fora é a mais leve. Se um dos pratos da balança descer, então a moeda que está no outro prato é a mais leve.