Estimativas para soluções fracas limitadas de uma classe geral de equações parabólicas degeneradas não conservativas

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Orientador:
Paulo Ricardo Zingano

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Porto Alegre, 05 de dezembro de 2011

Resumo

Neste trabalho, investigamos diversas propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ limitadas do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = |u|^\alpha \triangle u + b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \\ u(.,0) \ = \ u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p_{_0} < \infty \end{cases}$$

onde $\alpha \geq 1$ e $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, com ênfase em resultados sobre a norma do sup $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ destas soluções.
A análise utiliza uma combinação de estimativas de energia e principios de comparação apropriados para o problema.

Abstract

In this work we will investigate several important properties of bounded weak solutions $u(\cdot,t)$ of the initial-value problem

$$\begin{cases} u_t = |u|^{\alpha}\triangle u + b(x,t)|u|^{\lambda}|\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \\ u(.,0)\ =\ u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p_0 < \infty \end{cases}$$

where $\alpha \geq 1$, $\lambda \geq \alpha - 1$ are given constants and $b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Our emphasis is to obtain supnorm estimates $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}$ for these solutions. Our analysis is based on e suitable combination of generalized energy estimates and comparison principles specific for this problem.

Índice

Introdução

A proposta deste trabalho é estimar a velocidade de decaimento das soluções limitadas de equações de difusão degeneradas na forma não divergente.
Vamos desenvolver algumas estimativas importantes para soluções $u(\cdot, t)$ de tres tipos particulares de problemas parabólicos degenerados.

No Capítulo 2, derivamos algumas estimativas básicas para valores $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ de soluções (fracas) limitadas não negativas do problema

$$\begin{cases} u_t \;=\; u\, u_{xx} \;+\; \gamma\, |u_x|^2, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0 \\ \\ u(.,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

onde $u_0 \geq 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, para um certo $0 < p_0 < \infty$. Utilizando estimativas de energia e argumentos de comparação, provamos que tais soluções satisfazem o principio do máximo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad \forall \;\; t > t_0 \geq 0, \;\; \infty \geq q \geq \max\{p_0, \gamma\}$$

e a estimativa fundamental

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa + 1 - \gamma} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}} t^{-\frac{1}{2\kappa+1}} \| u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+1}}, \qquad \forall\, t > 0,$$

onde $\kappa \;=\; \max\{p_0, \gamma\}$.
Além disso, observamos que a taxa de decaimento obtida é optimal, considerando o caso especial de soluções com suporte compacto.

No Capítulo 3, obtemos estimativas gerais para a norma do sup $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$

de soluções (fracas) limitadas (com ou sem sinal) do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = |u|^{\alpha}\, u_{xx} + b(x,t)\, |u|^{\lambda} u_x^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ u(.,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}), \quad 0 < p_0 < \infty \end{cases}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.
Estendendo os argumentos do capítulo anterior, provamos que as soluções satisfazem as estimativas

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0,\ \infty \geq q \geq \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+2\alpha-1-\Gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|u_0\|_{L^{\kappa}(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}},$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$, $\Gamma = \mathbf{B} \cdot \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}^{\lambda-\alpha+1}$ e $\mathbf{B} = \|\, b \,\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}$.
Assim com no capitulo anterior, observamos que a taxa de decaimento obtida é optimal, considerando o caso especial de soluções com suporte compacto.
A análise da norma $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}$ apresentada nos capítulos 2 e 3 acima é restrita ao caso unidimensional ($n = 1$), visto que usa de modo essencial a desigualdade

$$\|\mathrm{u}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq K \cdot \|\mathrm{u}\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\theta}\, \|\mathrm{u}_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\theta},$$

onde $\theta = 2/(2+p)$, sendo $0 < p < \infty$, para cada constante $K > 0$ que depende de p (ver Apêndice, Teorema 5.2).
No caso $n > 1$ teremos portanto que modificar partes significativas do argumento de forma a obter as estimativas para $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}$.

No Capitulo 4, mostramos como modificar o argumento de forma a estimar $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}$ em dimensão $n \geq 1$ qualquer.
Isto requer várias modificações, que são introduzidas neste capítulo. O objetivo novamente é investigar as soluções (fracas) limitadas (com ou sem sinal) do

problema parabólico degenerado

$$\begin{cases} u_t = |u|^{\alpha} \triangle u + b(x,t)|u|^{\lambda}|\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ \\ u(.,0) \ = \ u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p_{_0} < \infty, \end{cases}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas e $b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.
Usando estimativas de energia mostramos que as soluções $u(\cdot,t)$ deste problema satisfazem o principio do máximo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \ t > t_0 \geq 0, \ \infty \geq q \geq \max\{p_{_0}, 1-\alpha+B\}$$

e usando um processo de iteração do tipo Moser, mostramos que tais soluções satisfazem também

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u_0\|_{L^{\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \ t^{\frac{-n}{2\kappa+n\alpha}},$$

onde $\kappa = \max\{p_{_0}, 1-\alpha+B\}$, $B = \| \, b \, \|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ é uma constante que depende apenas de $p_{_0}, \alpha, B$ e n.

Tanto no caso $n = 1$ (Capítulos 2 e 3) como no caso $n \geq 1$ (Capítulo 4), os resultados sobre $u(\cdot,t)$ são primeiramente obtidos para as soluções clássicas positivas do problema regularizado, e posteriormente estendidas para soluções fracas arbitrárias usando resultados de comparação apropriados.

Capítulo 2

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos desenvolver algumas estimativas importantes para soluções (fracas) $u(\cdot,t)$ limitadas e não negativas do problema parabólico

$$\begin{cases} u_t \;=\; u\,u_{xx} \;+\; \gamma\,|u_x|^2, \quad x\in\mathbb{R},\; t>t_0>0 \\ \\ u(.,0)=u_0\in L^{p_0}(\mathbb{R})\cap L^{\infty}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $u_0\geq 0$ e $\gamma\in\mathbb{R}$ para um certo $0<p_0<\infty$.

Este problema aparece como um dos modelos básicos em física e biologia, ver [5, 9, 11, 15, 16].
Como esse problema é do tipo parabólico degenerado (já que deixa de ser parabólico quando $u=0$), não podemos garantir a existência de solução clássica, então vamos precisar definir soluções num sentido mais geral, ou seja, solução no sentido fraco conforme definição abaixo.

Definição 2.1 *: Dado $0<T_*<\infty$, uma função $u = u(x,t)$ é dita solução fraca do problema (2.1) no intervalo $[0,T_*)$ se $u\in L^{\infty}(S_T)$ para cada conjunto $S_T=\mathbb{R}\times[0,T]$, $0<T<T_*$ e $u(\cdot,t)\in L^2_{loc}(\,[0,T_*),H^1_{loc}(\mathbb{R})\,)$, com*
$$\int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} u\,\varphi_t\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx \;=\; \int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}} u\,u_x\,\varphi_x\,dx\,dt+\int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}}(1-\gamma)\,u_x^2\,\varphi\,dx\,dt,$$
para toda função teste $\varphi\in C^1(\mathbb{R}\times[0,T_*))$ com suporte compacto em $\mathbb{R}\times[0,T_*)$.
A existência de tais soluções podem ser obtidas por vários métodos, [1]

[1] Construindo soluções $u(\cdot,t)$ que satisfazem (2.1) e além disso $u(\cdot,t)\in C^0(\,[0,T_*),\,L^1_{\mathtt{loc}}(\mathbb{R}))$.

Para o caso em que $\gamma \ \leq \ 0$, é mostrado em [3, 4, 5] que o problema (2.1) pode ter mais do que uma solução, possivelmente infinitas soluções, com solução maximal (correspondente as soluções chamadas soluções viscosas).
O resultado principal deste capitulo é dado pelo Teorema 2.5, onde obtemos uma estimativa para a norma do sup $\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, a saber:

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+1-\gamma} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}} t^{-\frac{1}{2\kappa+1}} \| u_0 \|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+1}}, \qquad \forall\, t>0, \tag{2.2}$$

onde $\kappa \ = \ \max\{p_0, \gamma\}$.
Para demonstrar esse resultado, vamos usar como argumento principal o fato de que $u(\cdot,t)$ pode ser limitada por cima por soluções clássicas positivas, que são muito fáceis de serem estudadas devido as suas propriedades suavizantes.
Relembrando que uma solução clássica do problema (2.1) é uma solução limitada suave (C^2 em x, C^1 em t) que satifaz a equação $u_t \ = \ u \, u_{xx} \, + \, \gamma \, |u_x|^2$, no sentido clássico para $t > 0$ e se aproxima do dado inicial em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ quando $t \searrow 0$.
As soluções clássicas deste problema, podem ser obtidas de uma maneira muito simples como segue: tomando $\varepsilon > 0$ e uma função arbitrária positiva $\mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, com $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$, $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$ e considere o problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t = u^\varepsilon \; u^\varepsilon_{xx} + \gamma |u^\varepsilon_x|^2, \quad x \in \mathbb{R}, \; t > t_0 > 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u^\varepsilon_0 \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v}, \end{cases}$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$.

2.2 Estimativas para soluções clássicas positivas

Consideremos nesta seção o problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t = u^\varepsilon u^\varepsilon_{xx} + \gamma |u^\varepsilon_x|^2, \quad x \in \mathbb{R}, \; t > t_0 > 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u^\varepsilon_0 \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v}, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, $\mathrm{v} > 0$ com $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$ e $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$.

Teorema 2.2 *(Principio do Máximo) Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma unica solução clássica limitada $u^\varepsilon(\cdot,t)$ do problema (2.3) para todo $t > 0$. Além disso, para $\infty \geq q \geq \max\{p_0, \gamma\}$, temos*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0. \tag{2.4}$$

Prova: A existência, unicidade e positividade segue da teoria básica de equações parabólicas, com existência global vista em [10, 12, 14].

Seja $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo $\psi(x) = 1$ se $|\,x\,| \leq 1$, $\psi(x) = 0$ se $|\,x\,| \geq 2$, seja a função de corte $\psi_R(x) = \psi(x/R)$, $R \gg 1$ e considere $q \geq \max\{p_0, \gamma\}$ finito. Multiplicando a equação (2.3) por $\psi_R(x)\ q\ u^\varepsilon(x,t)^{q-1}$ e integrando o resultado em $[t_0, t] \times \mathbb{R}$ obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} \psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1}\, u_t^\varepsilon dx\ d\tau \\
= & \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} \psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} u^\varepsilon(x,\tau) u^\varepsilon(x,\tau)_{xx} dx\ d\tau \\
+ & \ \gamma \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}} \psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1}\ |u_x^\varepsilon|^2 dx\ d\tau.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
& \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\, u^\varepsilon(x,t)^q\ dx \ - \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\, u^\varepsilon(x,t_0)^q\ dx \\
= & \ -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<2R} \psi_R(x)\, q^2\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1}\, |u_x^\varepsilon|^2\ dx\, d\tau - q, \int_{t_0}^{t}\int_{R<|x|<2R} \psi_R'(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(u^\varepsilon)^{q+1}}{q+1}\right)\ dx\, d\tau \\
+ & \ \gamma \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<2R} \psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1}\ |u_x^\varepsilon|^2\ dx\, d\tau \\
= & \ -\int_{t_0}^{t}\int_{|x|<2R} \psi_R(x)\, q^2\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} |u_x^\varepsilon|^2\ dx\, d\tau + \frac{q}{q+1}\int_{t_0}^{t}\int_{R<|x|<2R} \psi_R''(x)\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q+1}\ dx\, d\tau \\
+ & \ \gamma \int_{t_0}^{t}\int_{|x|<2R} \psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} |u_x^\varepsilon|^2\ dx\, d\tau.
\end{aligned}$$

Note que quando $R \to \infty$, usando o Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} |u_x^\varepsilon|^2 \, dx \to \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} |u_x^\varepsilon|^2 dx \text{ e}$$

$$\int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,t)^q dx \to \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,t)^q \, dx.$$

Além disso

$$\int_{R<|x|<2R} |\psi_R''(x)| |u^\varepsilon|^{q+1} dx d\tau = \frac{1}{R^2} \int_{R<|x|<2R} |\psi''\left(\frac{x}{R}\right)| |u^\varepsilon|^{q+1} dx d\tau \leq \frac{1}{R} \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{q+1} C \to 0.$$

Assim quando $R \to \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,t)^q \, dx + q(q-\gamma) \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} |u_x^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau \\ = & \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,t_0)^q dx \end{aligned}$$

Para garantir que ambos os membros da desigualdade acima sejam finitos, preciso que eles sejam positivos.
Assim, devemos ter $q\,(q-\gamma) \geq 0$, o que vale (pois $q \geq \max\{p_0, \gamma\}$).

Como $\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q + q\,(q-\gamma) \displaystyle\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} (u^\varepsilon)^{q-1} |u_x^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau \; = \; \|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q$, obtemos

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})} \qquad \forall \;\; t > t_0 > 0.$$

Em particular, fazendo $t_0 \to 0$, temos

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|\, u_0^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R})} \qquad \forall \;\; t > 0.$$

Finalmente fazendo $q \to \infty$ e usando o Teorema (5.7), obtemos

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall \;\; t > t_0 \geq 0.$$

$\square$

Teorema 2.3 : *Para cada $\varepsilon > 0$, seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ a solução classica do problema (2.3). Então*

$$\| u^\varepsilon(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+1-\gamma} \right)^{\frac{1}{2\kappa+1}} t^{-\frac{1}{2\kappa+1}} \| u_0^\varepsilon \|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+1}}, \qquad \forall\, t > 0, \quad (2.5)$$

onde $\kappa = \max\{ p_0, \gamma \}$.

Prova: Vamos dividir a prova de (2.5) em 2 casos.

$1^{\underline{\text{o}}}$caso: Vamos assumir que $\gamma \leq p_0$. Multiplicando a equação (2.3) por $\psi_R(x)\, t^\mu\, (p_0+1)\, u^\varepsilon(x,t)^{p_0}$, onde μ será escolhido posteriormente, $\psi_R(x) = \psi(x/R)$ é a função de corte introduzida na prova do Teorema 2.2 e integrando o resultado em $[0,t] \times \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \psi_R(x)\, \tau^\mu\, (p_0+1) u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0} u_t^\varepsilon \, dx\, d\tau \\
= & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \psi_R(x) \tau^\mu\, (p_0+1)\, u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0}\, u^\varepsilon(x,\tau)\, u^\varepsilon(x,\tau)_{xx}\, dx\, d\tau \\
+ & \ \gamma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \psi_R(x) \tau^\mu (p_0+1)\, u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0} |\, u_x^\varepsilon\,|^2\, dx\, d\tau
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
& t^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\ u^\varepsilon(x,t)^{p_0}\ dx - \mu \int_0^t \tau^{\mu-1} \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\ u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+1}\, dx\, d\tau \\
= & \ - \int_0^t \tau^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\ (p_0+1)^2\ u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0}\ |\, u_x^\varepsilon\,|^2\ dx\ d\tau \\
- & \int_0^t \tau^\mu \int_{R<|x|<2R} \psi_R'(x)\ (p_0+1)\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(u^\varepsilon)^{p_0+2}}{p_0+2} \right)\ dx\, d\tau \\
+ & \ \gamma \int_0^t \tau^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\ (p_0+1)\ u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0}\ |\, u_x^\varepsilon\,|^2\ dx\, d\tau \\
= & \ - \int_0^t \tau^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\ (p_0+1)^2\ u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0}\ |\, u_x^\varepsilon\,|^2\ dx\ d\tau \\
+ & \left(\frac{p_0+1}{p_0+2} \right) \int_0^t \tau^\mu \int_{R<|x|<2R} \psi_R''(x)\ u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+2}\ dx\, d\tau \\
+ & \ \gamma \int_0^t \tau^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x)\ q\ u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0}\ |\, u_x^\varepsilon\,|^2\ dx\, d\tau
\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$
\begin{aligned}
t^{\mu}\,\|u^{\varepsilon}(x,t)\|^{p_0+1}_{L^{p_0+1}(\mathbb{R})} \;\;&+\;\; (p_{0}+1)(p_{0}+1-\gamma)\int_{0}^{t}\tau^{\mu}\int_{\mathbb{R}} u^{\varepsilon}(x,\tau)^{p_0}|\,u^{\varepsilon}_{x}\,|^{2}\,dx\,d\tau \\
&=\;\; \mu\int_{0}^{t}\tau^{\mu-1}\|u^{\varepsilon}(\cdot,\tau)\|^{p_0+1}_{L^{p_0+1}(\mathbb{R})}\,d\tau
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

visto que $\psi_R''(x)u^{\varepsilon}(x,t)^{p_0+2} = \mathcal{O}(R^{-2})$.

Introduzindo $w(x,t) \;=\; u^{\varepsilon}(x,t)^{\eta}$, $w_x = \eta(u^{\varepsilon})^{\eta-1}u^{\varepsilon}_x$.
Queremos que $(\eta-1)2 \;=\; p_{0}$ então considero $\eta = \frac{p_0+2}{2}$.
Assim

$$
\begin{aligned}
t^{\mu}\|w(\cdot,t)\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R})} \;\;&+\;\; \frac{4(p_{0}+1)(p_{0}+1-\gamma)}{(p_{0}+2)^{2}}\int_{0}^{t}\tau^{\mu}\|w_x(.,\tau)\|^{2}_{L^{2}(\mathbb{R})}\,d\tau \\
&\le\;\; \mu\int_{0}^{t}\tau^{\mu-1}\|w(\cdot,\tau)\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R})}\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

onde $r = \frac{2p_0+2}{p_0+2}$. Agora vamos relembrar a seguinte Desigualdade de Sobolev (ver Teorema 5.3)

$$
\|\mathrm{v}(\cdot,t)\|_{L^{r}(\mathbb{R})} \;\le\; K_0\|\mathrm{v}(\cdot,t)\|^{1-\widetilde{\theta}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\|\mathrm{v}_x(\cdot,t)\|^{\widetilde{\theta}}_{L^{2}(\mathbb{R})},
\tag{2.8}
$$

onde $\beta_0 = \frac{2p_0}{p_0+2}$ e $\widetilde{\theta} = \frac{p_0+2}{2(p_0+1)^2}$.

O melhor (minimal) valor de K_0 é realizado pela função optimal $v(x) \;=\; (A - x^2)_{+}^{2/(2-r)}$, com $A \;>\; 0$ arbitrário ([1], p. 1082) e é dado por

$$
K_{0} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\;\frac{(p_{0}+1/2)\,(p_{0}+1)}{p_{0}\cdot(p_{0}+2)}\;\Big(\frac{p_{0}+1}{p_{0}+3/2}\Big)^{p_0}\frac{\Gamma(p_{0}+1/2)}{\sqrt{p_{0}+3/2}\;\cdot\Gamma(p_{0})}\right\}^{\frac{p_0+2}{2\,(p_0+1)^2}},
$$

onde $\Gamma(\cdot)$ denota a função Gama.

Aplicando (2.8) para $\mathrm{v} = w(\cdot,\tau)$, obtemos

$$
\int_{0}^{t}\tau^{\mu-1}\|w(\cdot,\tau)\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R})}\,d\tau \le K_{0}\int_{0}^{t}\tau^{\mu-1}\|w(\cdot,\tau)\|^{(1-\widetilde{\theta})\cdot r}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\;\|w_x(\cdot,\tau)\|^{\widetilde{\theta}\cdot r}_{L^{2}(\mathbb{R})}
$$

Como $\|w(\cdot,\tau)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})} = \|u^\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{p_0/\beta_0} \leq \|u_0^\varepsilon\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{p_0/\beta_0} = \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}$, obtemos

$$\begin{aligned} & t^\mu \|w(.,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}^r + \frac{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}{(p_0+2)^2} \int_0^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, d\tau \\ \leq \; & \mu \, K_0^r \, \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{(1-\widetilde{\theta})r} \int_0^t \tau^{\mu-1} \|w_x(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2\left(\frac{1}{p_0+1}\right)\frac{1}{2}} \, d\tau. \end{aligned}$$

Tomando $\mu = \frac{2p_0+2}{2p_0+1}$ e usando a Desigualdade de Hölder, chegamos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} & t^\mu \|w(.,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}^r + \frac{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}{(p_0+2)^2} \int_0^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, d\tau \\ \leq \; & K_0^r \left(\frac{2p_0+2}{2p_0+1}\right) \left(\frac{(p_0+2)^2}{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}\right)^{\frac{1}{2p_0+2}} \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{(1-\widetilde{\theta})r} \, t^{\frac{2p_0+1}{2p_0+2}} \\ & \left(\frac{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}{(p_0+2)^2} \int_0^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2p_0+2}}. \end{aligned}$$

Considere

$$E(t) = t^\mu \|w(.,t)\|_{L^r(\mathbb{R})}^r + \frac{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}{(p_0+2)^2} \int_0^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, d\tau.$$

Então

$$E(t) \leq K_0^r \left(\frac{2p_0+2}{2p_0+1}\right) \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{(1-\widetilde{\theta})r} \, t^{\frac{2p_0+1}{2p_0+2}} \left(\frac{(p_0+2)^2}{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}\right)^{\frac{1}{2p_0+2}} E(t)^{\frac{1}{2p_0+2}}.$$

Em particular

$$(i) \| \, w(\cdot,t) \, \|_{L^r(\mathbb{R})} \leq K_0^\mu \, \left(\frac{2p_0+2}{2p_0+1}\right)^{\frac{2p_0+2}{2p_0+1}} \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{(1-\widetilde{\theta})\mu} \, t^{-\alpha} \left(\frac{(p_0+2)^2}{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}\right)^\alpha,$$

$$(ii) \int_{t/2}^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, d\tau \leq \left\{\frac{2p_0+2}{2p_0+1} \; \frac{(p_0+2)^2}{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}\right\}^{\frac{2p_0+2}{2p_0+1}} K_0^{r\cdot\mu} \; t \, \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{r(1-\widetilde{\theta})\mu},$$

onde $\alpha = (p_0+2)/\{(2p_0+1)(2p_0+2)\}$ e $r = 2(p_0+1)/(p_0+2)$.

Note que $\alpha = (p_0+2)/\{(2p_0+1)(2p_0+2)\} > 0$, então para que $t^{-\alpha}$ na equação (i) não seja muito grande, não podemos tomar t muito próximo de zero.

Vamos considerar o intervalo $I = [t/2\,,\,t]$. Pelo Teorema 5.5, existe um $t_* \in I$ tal que

$$t_*^{\mu}\|\, w_x(.,t_*)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\left\{\frac{2p_0+2}{2p_0+1}\,\frac{(p_0+2)^2}{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}\right\}^{\frac{2p_0+2}{2p_0+1}} K_0^{r\,\mu}\|w_0\|^{r(1-\widetilde{\theta})\mu}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}$$

Assim para $t = t_*$

$$\|w_x(.,t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})} \;\leq\; \sqrt{2}\left\{\frac{p_0+1}{2p_0+1}\frac{(p_0+2)^2}{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}\right\}^{\frac{2p_0+2}{2p_0+1}} K_0^{r\frac{\mu}{2}}\|w_0\|^{r(1-\widetilde{\theta})\frac{\mu}{2}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\,t_*^{-\frac{\mu}{2}}\;,$$

$$\|w(.,t_*)\|_{L^r(\mathbb{R})} \;\leq\; K_0^{\mu}\left(\frac{2p_0+2}{2p_0+1}\right)^{\frac{2p_0+2}{2p_0+1}}\|w_0\|^{(1-\widetilde{\theta})\mu}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\,t_*^{-\alpha}\left(\frac{(p_0+2)^2}{4(p_0+1)(p_0+1-\gamma)}\right)^{\alpha}.$$

Desta forma $\|w(.,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pode ser realmente estimada. De fato, pelo Teorema (5.2)

$$\|\,w(\cdot,t_*)\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq G_0\|\,w(\cdot,t_*)\,\|^{\frac{p_0+1}{2p_0+3}}_{L^r(\mathbb{R})}\|\,w_x(\cdot,t_*)\,\|^{\frac{p_0+2}{2p_0+3}}_{L^2(\mathbb{R})}$$

Usando as estimativas anteriores e o fato de que $t_* \;>\; t/2$, obtemos

$$\|w(\cdot,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\lambda_0^2\cdot\frac{p_0+1}{p_0+1-\gamma}\right)^{\frac{p_0+2}{4p_0+2}}\|w_0\|^{\frac{2p_0}{2p_0+1}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\,t^{-\frac{p_0+2}{4p_0+2}},$$

onde $\lambda_0 \;=\; \frac{p_0+2}{p_0+1}\,.\,2^{\frac{2p_0+1}{2p_0+3}}\left(\frac{p_0+1}{2p_0+1}\right)^{\frac{2p_0+2}{2p_0+3}}\,.\,G_0^{\frac{2p_0+1}{p_0+2}}\,.\,K_0^{\frac{4(p_0+1)^2}{(p_0+2)(2p_0+3)}}$

Como $\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \;\leq\; \|w(\cdot,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \qquad \forall\;\, t > t_*,$

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\lambda_0^2\cdot\frac{p_0+1}{p_0+1-\gamma}\right)^{\frac{p_0+2}{4p_0+2}}\|w_0\|^{\frac{2p_0}{2p_0+1}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\,t^{-\frac{p_0+2}{4p_0+2}}.$$

Em termos de $u^{\varepsilon}(\cdot,t) = w(\cdot,t)^{\frac{2}{p_0+2}}$, chegamos a seguinte estimativa

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\lambda_0^2\cdot\frac{p_0+1}{p_0+1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2p_0+1}}\|u_0^{\varepsilon}\|^{\frac{2p_0}{2p_0+1}}_{L^{p_0}(\mathbb{R})}\,t^{-\frac{1}{2p_0+1}}\;\;\forall\, t>0, \qquad (2.9)$$

onde nós assumimos que $\gamma \;\leq\; p_0$. Isto mostra (2.5) neste caso, visto que $\lambda_0 \leq 1$ para todo $p_0 > 0$.

$2^{\underline{o}}$ caso: Vamos considerar agora o caso em que $\gamma > p_0$.

Como $u_0^\varepsilon \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ por interpolação, $u_0^\varepsilon \in L^\gamma(\mathbb{R})$.
Seja $\widetilde{p}_0 \geq \gamma$. Então multiplicando a equação (2.3) por $\psi_R(x)\, t^\mu\, (\widetilde{p}_0 + 1)\, u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{p}_0}$, onde $\mu = \frac{2\widetilde{p}_0+2}{2\widetilde{p}_0+1}$, e usando o mesmo raciocinio anterior, obtemos

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\lambda_0^2 \cdot \frac{\widetilde{p}_0+1}{\widetilde{p}_0+1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2\widetilde{p}_0+1}} \|u_0^\varepsilon\|_{L^{\widetilde{p}_0}(\mathbb{R})}^{\frac{2\widetilde{p}_0}{2\widetilde{p}_0+1}}\, t^{-\frac{1}{2\widetilde{p}_0+1}} \;\; \forall\, t > 0,$$

onde $\lambda_0 = \frac{\widetilde{p}_0+2}{\widetilde{p}_0+1} \cdot 2^{\frac{2\widetilde{p}_0+1}{2\widetilde{p}_0+3}} \left(\frac{\widetilde{p}_0+1}{2\widetilde{p}_0+1}\right)^{\frac{2\widetilde{p}_0+2}{2\widetilde{p}_0+3}} . \, G_0^{\frac{2\widetilde{p}_0+1}{\widetilde{p}_0+2}} . \, K_0^{\frac{4(\widetilde{p}_0+1)^2}{(\widetilde{p}_0+2)(2\widetilde{p}_0+3)}}$

Tomando $\widetilde{p}_0 := \gamma$, tem-se então

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\lambda_0^2 \,.\, (\gamma+1)\right)^{\frac{1}{2\gamma+1}} \|u_0^\varepsilon\|_{L^\gamma(\mathbb{R})}^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}\, t^{-\frac{1}{2\gamma+1}} \;\; \forall\, t > 0. \tag{2.10}$$

Isto mostra (2.5) neste caso, visto que $\lambda_0 \leq 1$ para todo $\widetilde{p}_0 > 0$. □

2.3 Estimativas para soluções fracas não negativas

Nesta seção vamos estimar as soluções fracas $u(\cdot,t)$ não negativas e limitadas do problema (2.1) enunciado novamente abaixo

$$\begin{cases} u_t \;=\; u\, u_{xx} \;+\; \gamma\, |u_x|^2, \quad x \in \mathbb{R},\;\; t > t_0 > 0 \\ \\ u(.,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 < p_0 < \infty \end{cases}$$

onde $u_0 \geq 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.
A ligação entre $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (2.3) e $u(\cdot,t)$ é dada no seguinte resultado de comparação.

Teorema 2.4 *Seja $u(\cdot,t)$ uma solução fraca limitada não negativa do problema (2.1) e seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica do problema (2.3). Então temos que (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário): $u(\cdot,t) \leq u^\varepsilon(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ e em q.t.p $x \in \mathbb{R}$.*

Este teorema pode ser provado exatamente como a Proposição 2.2 em [5] (ver [5], pp. 590 - 592). Assim segue imediatamente dos Teoremas (2.3) e (2.4), que para cada $t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}} t^{-\frac{1}{2\kappa+1}} \|u_0 + \varepsilon \mathrm{v}\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+1}} \tag{2.11}$$

para todo $\varepsilon > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, \gamma\}$.
Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos nosso resultado principal dado pelo Teorema abaixo.

Teorema 2.5 *(Teorema Principal) : Seja $u(\cdot,t)$ solução fraca limitada não negativa do problema (2.1). Então, (redefinindo $u(\cdot,t)$ num conjunto de medida zero no tempo, se necessário), temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}} t^{-\frac{1}{2\kappa+1}} \| u_0\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+1}}, \qquad \forall\, t > 0, \tag{2.12}$$

onde $\kappa = \max\{p_0, \gamma\}$.

2.4 Soluções com suporte compacto

Vamos concluir este capítulo com algumas observações sobre o caso especial de soluções com suporte compacto. Se $\gamma > -1/2$, podemos encontrar soluções autossimilares da seguinte forma:
Primeiramente, note que se $u(\cdot,t)$ é solução positiva da equação $u_t = u\,u_{xx} + \gamma\, u_x^2$ então $w = u^\gamma$ é solução da equação $w_t = \left(w^{\frac{1}{\gamma}} w_x\right)_x$. Assim vamos tentar buscar soluções autossimilares para o problema $w_t = \left(w^{\frac{1}{\gamma}} w_x\right)_x = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left(w^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right)_{xx}$.

Vamos procurar soluções particulares da forma $w(x,t) = t^{-\sigma}\phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$, para constantes $\sigma > 0$ e $\beta > 0$ adequadas e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função suave de suporte compacto.

Observando que as soluções da equação $w_t = \left(w^{\frac{1}{\gamma}} w_x\right)_x$ conservam a massa, devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}} w(x,t)\,dx = t^{-\sigma} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)\,dx = K; \quad K \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Além disso de $w_t = \frac{1}{\mu}\left(w^{\mu}\right)_{xx}$, onde $\mu = \frac{\gamma+1}{\gamma}$ obtemos que ϕ satisfaz

$$t^{-\sigma-1}(-\beta\, s\, \phi(s)_s - \sigma\phi(s)) = \frac{t^{-\sigma\mu-2\beta}}{\mu}\, \phi^{\mu}(s)_{ss}. \tag{2.14}$$

Para que as equações (2.13) e (2.14) independam do tempo, devemos ter $\sigma = \beta$ e $\beta = \frac{\gamma}{2\gamma+1}$.

Então obtemos a seguinte EDO

$$\phi^{\mu-1}\phi''(s) + (\mu-1)\phi^{\mu-2}(\phi'(s))^2 + \beta\, s\phi'(s) + \beta\,\phi = \frac{1}{\mu}(\phi^{\mu})'' + (\beta s\phi)' = 0,$$

cuja solução é da forma

$$\phi(s) = \left(R^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\gamma+1}\, s^2\right)_+^{\gamma}, \text{ para } R>0 \text{ arbitrário , onde } s^2 = x^2\cdot t^{-\beta}.$$

Como $w(x,t) = t^{-\beta}\phi(s)$ e $u = w^{\frac{1}{\gamma}}$, obtemos uma familia de soluções autossimilares do problema (2.1)

$$u(x,t) = (t+t_0)^{-\frac{1}{2\gamma+1}}\left(R^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\gamma+1}\,(x-x_0)^2(t+t_0)^{1-\frac{2\gamma}{1+2\gamma}}\right)_+, \tag{2.15}$$

onde $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $a_+ \equiv \max\{0, a\}$ é a parte positiva de a.

Observe que esta solução é valida para qualquer $\gamma > -1/2$.

Note que as soluções com suporte compacto dadas em (2.15) atingem o máximo quando $x = x_0$. Assim

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} = R^2\cdot(t+t_0)^{-\frac{1}{2\gamma+1}},$$

e a solução dada em (2.11) satisfaz

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} &\leq K\cdot(t+t_0)^{-\frac{1}{2\kappa+1}}, \text{ onde } \kappa = \max\{p_0,\gamma\} \quad \text{e}\\ K &= \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}}\|\,u_0\|_{L^{\kappa}(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+1}}.\end{aligned}$$

Então, quando $\gamma > 0$, a taxa de decaimento $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} = O\left(t^{-1/(1+2\kappa)}\right)$ dada em (2.11) é optimal se $p_0 = \gamma$.

Mais geralmente, se a solução inicial u_0 tem suporte compacto então a taxa de decaimento optimal é conhecida para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

De fato, se $\gamma > 0$, então segue diretamente de (2.12), Teorema 2.5, tomando $p_0 = \gamma$ que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (1+\gamma)^{\frac{1}{1+2\gamma}} \, \| u_0\|_{L^\gamma(\mathbb{R})}^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}} \, t^{-\frac{1}{1+2\gamma}} \qquad \forall\, t > 0. \tag{2.16}$$

Se $\gamma \leq 0$ então $\kappa = \max\{p_0, \gamma\} = p_0$. Seja $t > 0$ fixo no que segue.
Então para todo $p_0 > 0$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{p_0+1}{p_0+1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2p_0+1}} t^{-\frac{1}{2p_0+1}} \left(\|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{p_0}\right)^{\frac{2}{2p_0+1}}.$$

Vamos supor primeiramente que $supp\, u_0 \subseteq [a,b]$, onde $a \leq b \in \mathbb{R}$. Então, fazendo $p_0 \to 0$, obtemos

$$\limsup_{p_0\to 0} \| u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{p_0} = \limsup_{p_0\to 0} \int_a^b |u_0(x)|^{p_0}\, dx \leq \int_a^b 1\, dx = (b-a) = l$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{1-\gamma}\,\frac{l^2}{t}\,; \tag{2.17}$$

mais geralmente, sejam $[a_1,b_1], [a_2,b_2], \ldots [a_n,b_n]$ intervalos disjuntos tais que $supp\, u_0 \subseteq \bigcup_{n=1,2,\ldots} [a_n,b_n]$. Em ([5], Theorem 3.1), Bertsch e Ughi mostraram que $supp\, u(\cdot,t) \subseteq \bigcup_{n=1,2,\ldots} [a_n,b_n] \quad \forall\ t > 0$. Seja $l_j = (b_j - a_j)\ ,\ j = 1,\ldots,n$.
Então de (2.17), temos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{1-\gamma} \max_{j=1,2,\ldots,n} \frac{l_j^2}{t}.$$

Assim obtemos o seguinte Teorema.

Teorema 2.6 *Seja $u(\cdot,t)$ uma solução do problema (2.1) com uma solução inicial u_0 de suporte compacto Se $\gamma > 0$, então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (1+\gamma)^{\frac{1}{1+2\gamma}} \, \| u_0\|_{L^\gamma(\mathbb{R})}^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}} \, t^{-\frac{1}{1+2\gamma}} \qquad \forall\, t > 0, \tag{2.18}$$

e, se $\gamma \leq 0$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{1-\gamma}\,\frac{l^2}{t}\,; \tag{2.19}$$

onde $a \leq b \in \mathbb{R}$ *são tais que* $\operatorname{supp} u_0 \subseteq [a,b]$ *e* $l = b - a$*; mais geralmente, temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{1-\gamma}\,\frac{l^2}{t} \qquad \forall\, t > 0, \tag{2.20}$$

se $\operatorname{supp} u_0 \subseteq \bigcup_{n=1,2,\ldots} [a_n,b_n]$ *com* $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2], \ldots$ *disjuntos, onde* $l = \max_{n=1,2,\ldots}(b_n - a_n)$.

Para $\gamma \leq 0$, Bertsch e Ughi [5] construiram soluções com suporte compacto da forma

$$u(x,t) = (t+t_0)^{-1} \cdot R^2 \cdot U_\gamma(|x-x_0|/R), \qquad R > 0,\ t_0 \geq 0,\ x_0 \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

para alguma função apropriada $U_\gamma(\cdot)$ dependendo apenas de γ. De (2.15) e (2.21) acima, segue que a taxa de decaimento (quando $t \to \infty$) dada no Teorema 2.6 é optimal, como afirmado.

Utilizando um método de simulação numérica denominado Método Leapfrog semi-implícito e o software computacional Matlab, simulamos o comportamento das soluções do problema

$$\begin{cases} u_t = u\, u_{xx} + \gamma |u_x|^2 + \varepsilon\, u_{xx} \\ u(.,0) = u_0(x), \end{cases}$$

para alguns valores de γ, onde $\varepsilon \geq 0$ e com solução inicial dada por

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1)|x|^2 & \text{se } -1 < x < 0; \\ x^2(1-x) & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Alguns gráficos gerados por essa simulação, com $\varepsilon = 0$, podem ser vistos abaixo .

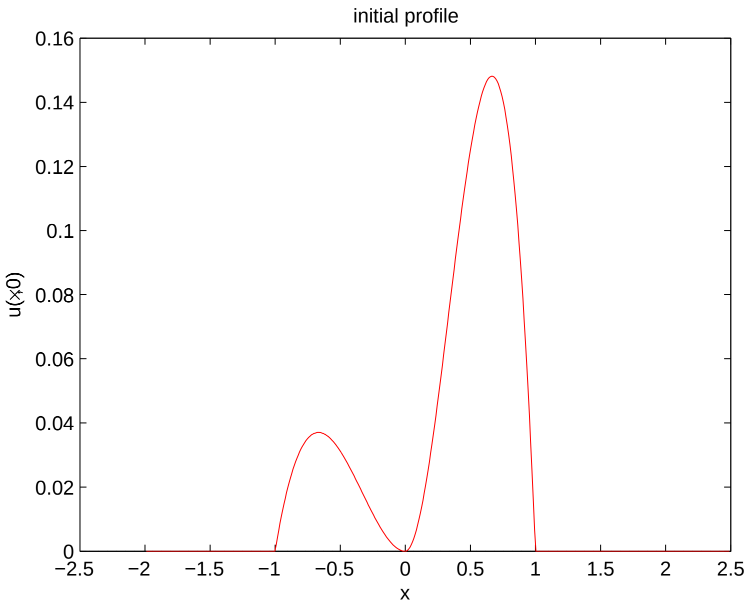

Figura 2.1: Perfil inicial

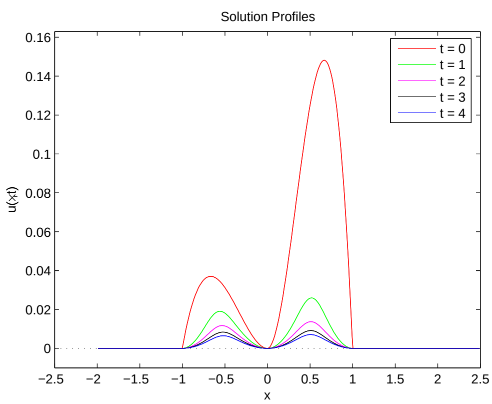

Figura 2.2: Perfil das soluções $\gamma = -2$

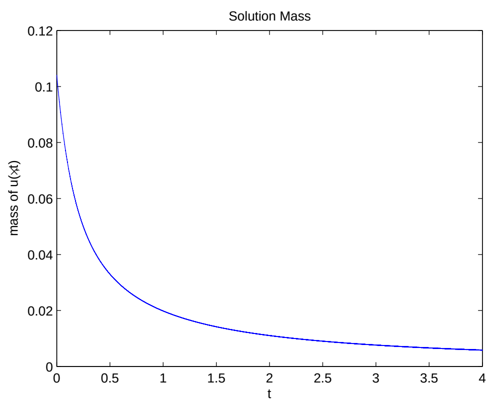

Figura 2.3: Norma L^1 de $u(\cdot, t)$

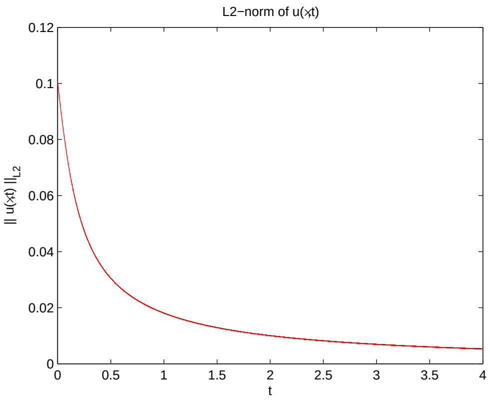

Figura 2.4: Norma L^2 de $u(\cdot, t)$

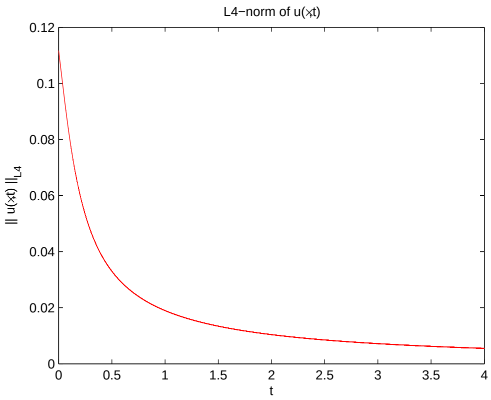

Figura 2.5: Norma L^4 de $u(\cdot, t)$

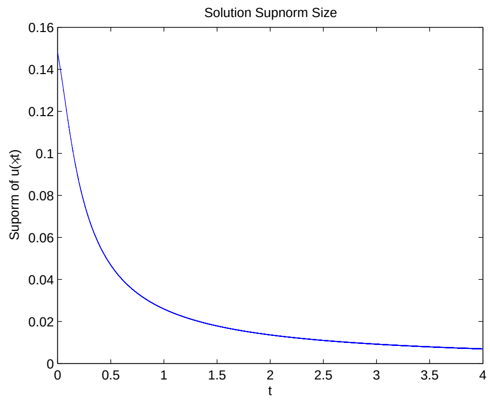

Figura 2.6: Norma do sup de $u(\cdot, t)$

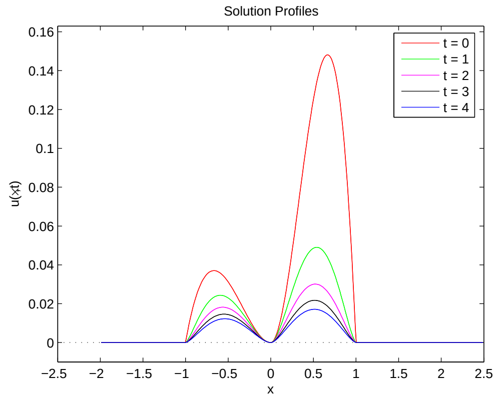

Figura 2.7: Perfil das soluções $\gamma = -1/2$

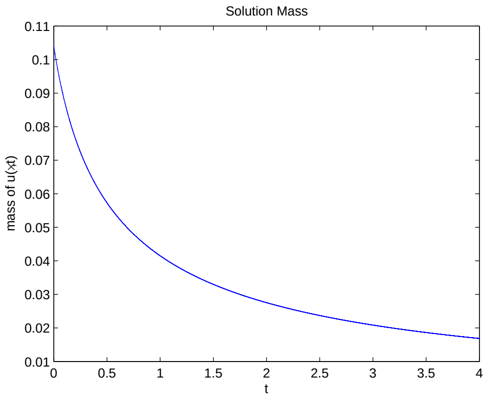

Figura 2.8: Norma L^1 de $u(\cdot, t)$

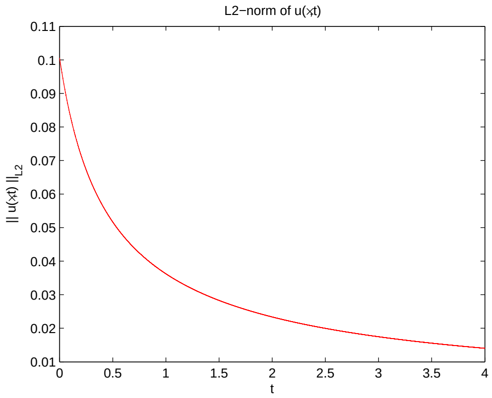

Figura 2.9: Norma L^2 de $u(\cdot, t)$

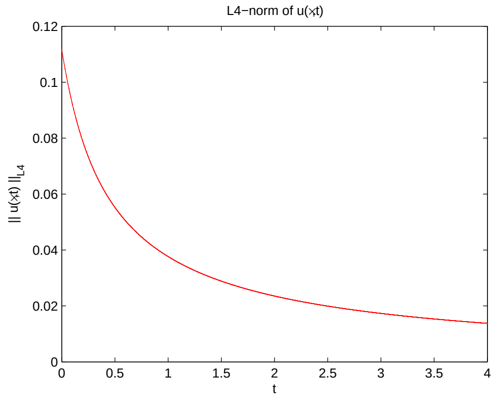

Figura 2.10: Norma L^4 de $u(\cdot, t)$

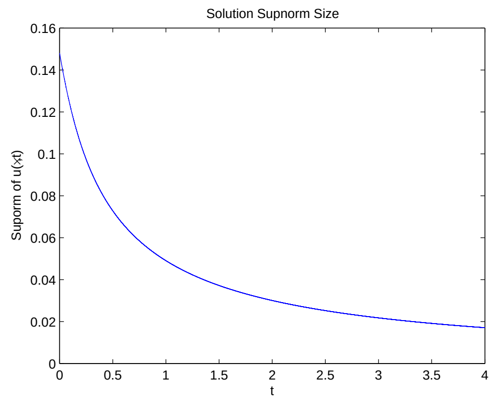

Figura 2.11: Norma do sup de $u(\cdot, t)$

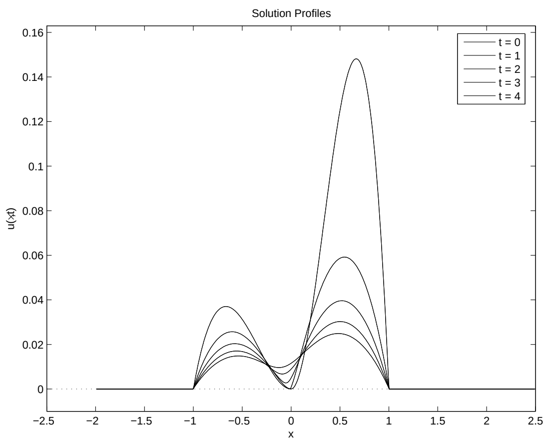

Figura 2.12: Perfil das soluções $\gamma = 0$

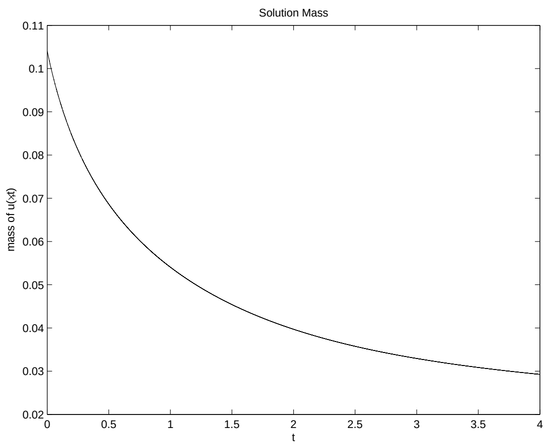

Figura 2.13: Norma L^1 de $u(\cdot, t)$

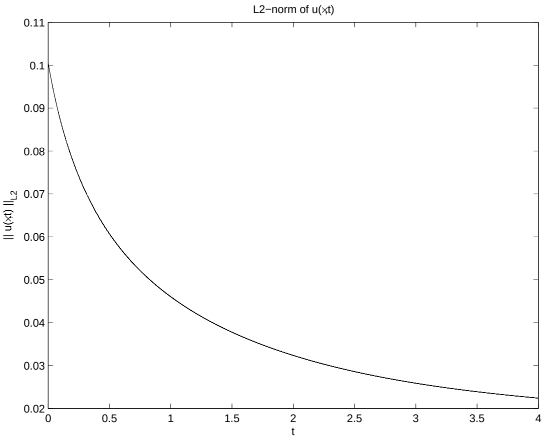

Figura 2.14: Norma L^2 de $u(\cdot, t)$

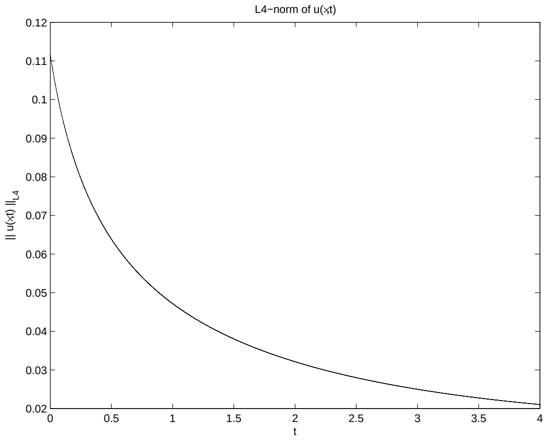

Figura 2.15: Norma L^4 de $u(\cdot, t)$

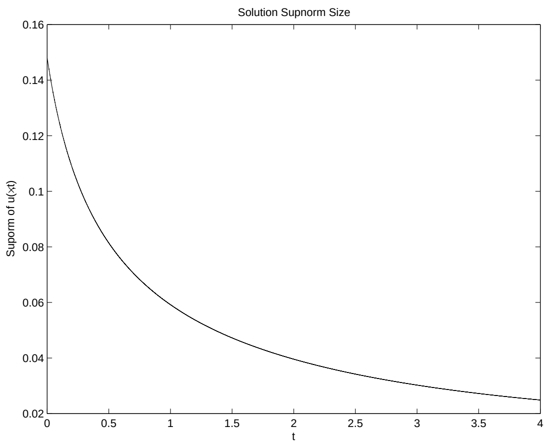

Figura 2.16: Norma do sup de $u(\cdot, t)$

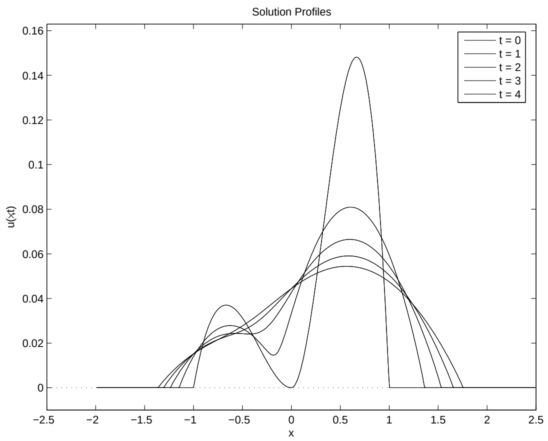

Figura 2.17: Perfil das soluções $\gamma = 1$

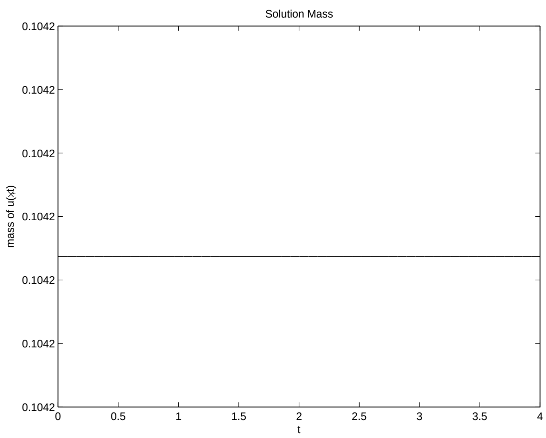

Figura 2.18: Norma L^1 de $u(\cdot, t)$

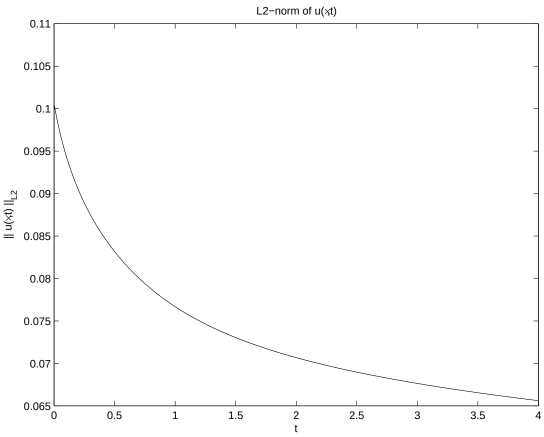

Figura 2.19: Norma L^2 de $u(\cdot, t)$

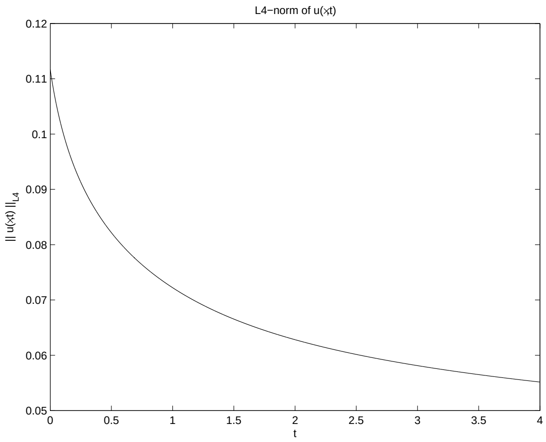

Figura 2.20: Norma L^4 de $u(\cdot, t)$

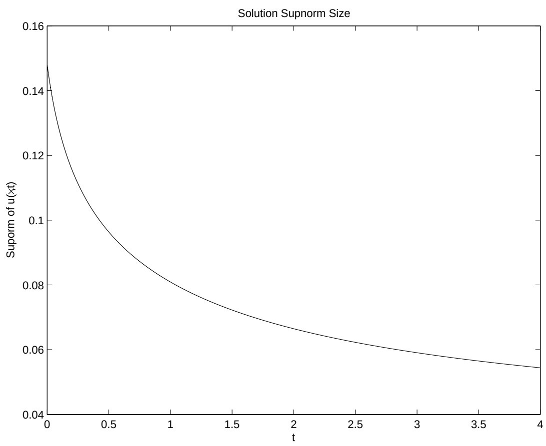

Figura 2.21: Norma do sup de $u(\cdot, t)$

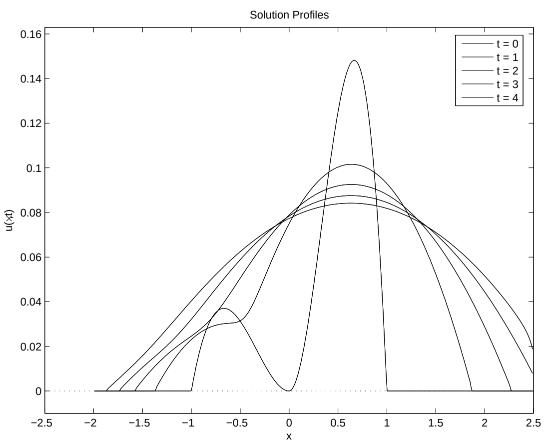

Figura 2.22: Perfil das soluções $\gamma = 3$

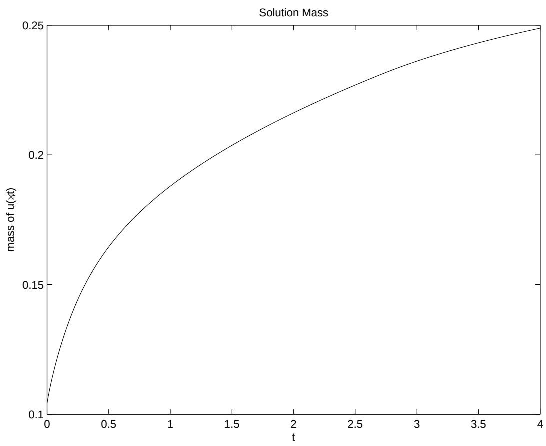

Figura 2.23: Norma L^1 de $u(\cdot, t)$

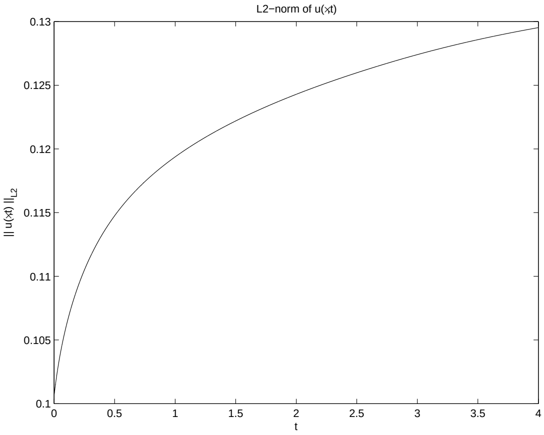

Figura 2.24: Norma L^2 de $u(\cdot, t)$

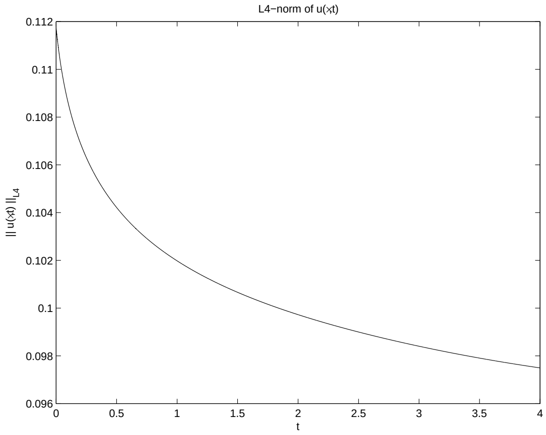

Figura 2.25: Norma L^4 de $u(\cdot, t)$

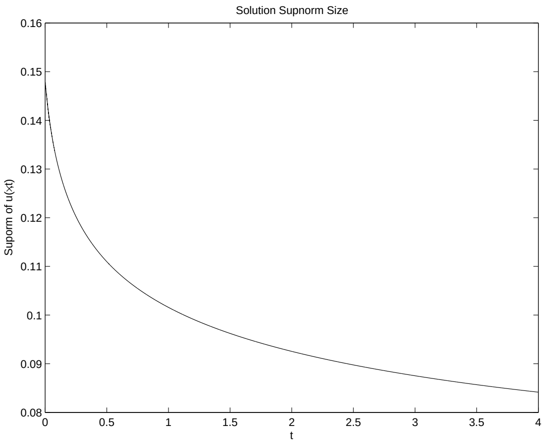

Figura 2.26: Norma do sup de $u(\cdot, t)$

Capítulo 3

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos desenvolver algumas estimativas importantes para soluções (fracas) $u(\cdot,t)$ limitadas do problema parabólico

$$\begin{cases} u_t = |u|^\alpha\, u_{xx} + b(x,t)\,|u|^\lambda u_x^2, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ u(.,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), & 0 < p_0 < \infty \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.
Tais problemas incluem casos particulares de inumeros modelos importantes em Fisica e Biologia ver e.g. [2, 5, 9, 11, 15, 16].

Como esse problema é do tipo parabólico degenerado, pois o termo parabólico desaparece quando $u = 0$, não podemos garantir a existência de solução clássica, somente a existência de solução no sentido fraco conforme definição abaixo.

Definição 3.1 *: Dado $0 < T_* < \infty$, uma função $u = u(x,t)$ é dita solução fraca do problema (3.1) no intervalo $[0,T_*)$ se $u \in L^\infty(S_T)$ para cada conjunto $S_T = \mathbb{R} \times [0,T]$, $0 < T < T_*$ e $u(\cdot,t) \in L^2_{loc}(\,[0,T_*), H^1_{loc}(\mathbb{R})\,)$, com*

$$\int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}} u\,\varphi_t\,dx\,dt \;+\; \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = \alpha \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha-1}(sgn\,u(x,t))\,u_x^2\,\varphi\,dx\,dt$$
$$+\; \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}} |u|^\alpha\,u_x\,\varphi_x\,dx\,dt - \int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}} b(x,t)\,|u|^\lambda u_x^2\varphi\,dx\,dt$$

para toda função teste $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T_*))$ com suporte compacto em $\mathbb{R} \times [0,T_*)$.

A existência de soluções fracas pode ser obtida por vários métodos (ver e.g. [3, 10, 12, 13, 14]) e segue do Teorema 3.8 dado a seguir, que elas satisfazem o principio do máximo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall\, t \in [0, T_*) \tag{3.2}$$

Em particular, soluções do problema (3.1) são globalmente definidas (i.e., $T_* = \infty$) com $\|u(\cdot, t\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ monotonicamente decrescente em $[0,\infty)$.

Quanto a unicidade, segue de [3, 4, 5] que mesmo as soluções não negativas do problema (3.11) podem não ser unicas. Em qualquer caso, todas as soluções de (3.11) satisfazem a estimativa fundamental

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+2\alpha-1-\Gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}}\ \|u_0\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}}, \qquad \forall\, t > 0, \tag{3.3}$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$, $\Gamma = B \cdot \|u(\cdot,0)\|^{\lambda-\alpha+1}$ e $B = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, conforme Teorema 3.8 e 3.13 .

Para demonstrar esses resultados, vamos usar como argumento principal o fato de que $|u(\cdot,t)|$ pode ser limitada por cima por soluções clássicas positivas, que são muito fáceis de serem estudadas devido as suas propriedades suavizantes.
Relembramos que uma solução clássica do problema (3.1) é uma solução suave limitada, (C^2 em x, C^1 em t), que satisfaz o problema no sentido clássico e se aproxima do dado inicial em $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ quando $t \searrow 0$.
Por conveniencia, vamos considerar num primeiro momento o caso das soluções limitadas não negativas $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}((0,\infty), L^\infty(\mathbb{R})) \cap L^2_{loc}((0,\infty), H^1_{loc}(\mathbb{R}))$ do problema (3.1). Soluções clássicas naturais associadas a $u(\cdot,t)$ podem ser introduzidas da seguinte forma: Escolhendo uma função positiva $\mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, com $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$, $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$,tomando $\varepsilon > 0$ e considere o problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t = |u^\varepsilon|^\alpha u^\varepsilon_{xx} + \widetilde{\gamma}\,|u^\varepsilon|^\lambda |u^\varepsilon_x|^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > t_0 \geq 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u^\varepsilon_0 \equiv u_0 + \varepsilon v, \qquad (u_0 \geq 0) \end{cases}$$

onde a constante $\widetilde{\gamma}$ é escolhida de forma que $b(x,t) \leq \widetilde{\gamma}$.

3.2 Estimativa para soluções clássicas positivas (caso $\lambda = \alpha - 1$)

Nesta seção vamos relatar alguns resultados importantes das soluções clássicas positivas para o caso particular do problema (3.1), onde $\lambda = \alpha - 1$.
Seja $u^\varepsilon(\cdot, t)$ a unica solução classica positiva do problema

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha u_{xx}^\varepsilon + \widetilde{\gamma}\,|u^\varepsilon|^{\alpha-1}|u_x^\varepsilon|^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u_0^\varepsilon \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v}, \qquad (u_0 \geq 0) \end{cases} \tag{3.4}$$

onde a constante $\widetilde{\gamma}$ é escolhida de forma que $b(x,t) \leq \widetilde{\gamma}$ e $\mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ é uma função positiva com $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$, $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$.
As principais estimativas são dadas pelo Teorema (3.2) e (3.3) a seguir.

Teorema 3.2 *(Principio do Máximo) Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma unica solução clássica limitada $u^\varepsilon(\cdot, t)$ do problema (3.4), o qual é definida positiva para todo $t > 0$. Além disso, para todo $q \geq \max\{p_0, 1 + \widetilde{\gamma} - \alpha\}$, temos*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,0)\,\|_{L^q(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > 0, \tag{3.2a}$$

e, mais geralmente,

$$\|u^\epsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0. \tag{3.2b}$$

Prova. A existência local, unicidade e positividade vem da teoria padrão de equações parabólicas, com existência global mostrada em [10, 12, 14].

Seja a função de corte $\psi_R(x)$ definida na prova do Teorema (2.2) e considere $q \geq \max\{p_0, 1 - \alpha + \widetilde{\gamma}\}$ finito.
Multiplicando a equação (3.4) por $\psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,t)^{q-1}$ e integrando o resultado em

$[t_0, t] \times \mathbb{R}$ obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} \psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} u_t^\varepsilon \; dx\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} \psi_R(x)\, q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-1} u^\varepsilon(x,\tau)_{xx} \; dx\, d\tau$$
$$+ \quad q\, \widetilde{\gamma} \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |u_x^\varepsilon|^2 \; dx\, d\tau$$

Assim

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,t)^q \; dx - \int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,t_0)^q \; dx \\ + \quad & q(q+\alpha-1-\widetilde{\gamma}) \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |u_x^\varepsilon|^2 \; dx\, d\tau \\ = \quad & \left(\frac{q}{q+\alpha} \right) \int_{t_0}^{t} \int_{R<|x|<2R} \psi_R''(x) u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha} \; dx\, d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q + q(q-1+\alpha-\widetilde{\gamma}) \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |u_x^\varepsilon|^2 \; dx\, d\tau = \|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q, \tag{3.5}$$

visto que $u^\varepsilon(\cdot,\tau)^{q+\alpha} \psi_R''(x) = \mathcal{O}(R^{-2})$.

Note que para garantir que ambos os membros da igualdade acima sejam finitos, devemos ter $q \cdot (q - 1 + \alpha - \widetilde{\gamma}) \geq 0$, o que acontece, ja que $q \geq \max\{p_0, 1 - \alpha + \widetilde{\gamma}\}$.

Desta forma

$$q \cdot (q-1+\alpha-\widetilde{\gamma}) \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |u_x^\varepsilon|^2 \; dx\, d\tau \geq 0 \;\text{ e obtemos}$$

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad \forall \; t > t_0 > 0.$$

Em particular, fazendo $t_0 \to 0$ obtem-se

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,0))\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

□

Teorema 3.3 : *Para cada $\varepsilon > 0$, seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução classica positiva, do problema (3.4). Então*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+(2\alpha-1)-\widetilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|u_0^\varepsilon\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}}, \qquad \forall\, t>0, \quad (3.6)$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\widetilde{\gamma}\}$.

Prova . Vamos supor num primeiro momento que $p_0 \geq 1-\alpha+\widetilde{\gamma}$.

Definindo $\mu = \frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}$, multiplicando a equação (3.4) por $\psi_R(x)\, t^\mu\, (p_0+\alpha)\, u^\varepsilon(x,t)^{p_0+\alpha-1}$ e integrando o resultado em $[\,0,t\,]\times\mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& t^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,t)^{p_0+\alpha}\, dx - \mu \int_0^t \tau^{\mu-1} \int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+\alpha}\, dx\, d\tau \\
= & -\int_0^t \tau^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x)(p_0+\alpha)(p_0+2\alpha-1) u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+2\alpha-2} |u_x^\varepsilon|^2\, dx\, d\tau \\
+ & \left(\frac{p_0+\alpha}{p_0+2\alpha}\right) \int_0^t \int_{R<|x|<2R} \psi_R''(x) \tau^\mu u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+2\alpha}\, dx\, d\tau \\
+ & \widetilde{\gamma} \int_0^t \int_{|x|<2R} \psi_R(x) \tau^\mu\, (p_0+\alpha)\, u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+2\alpha-2} |u^\varepsilon|^2\, dx\, d\tau
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $R\to\infty$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\begin{aligned}
t^\mu \|u^\varepsilon(x,t)\|_{L^{p_0+\alpha}(\mathbb{R})}^{p_0+\alpha} \; &+ \; (p_0+\alpha)(p_0-1+2\alpha-\widetilde{\gamma}) \int_0^t \tau^\mu \int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+2\alpha-2} |u_x^\varepsilon|^2\, dx\, d\tau \\
&= \left(\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}\right) \int_0^t \tau^{\mu-1} \|u^\varepsilon(x,\tau)\|_{L^{p_0+\alpha}(\mathbb{R})}^{p_0+\alpha}\, d\tau, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

visto que $\psi_R''(x) u^\varepsilon(x,\tau)^{p_0+2\alpha} = O(R^{-2})$.

Introduzindo $w(x,t) = u^\varepsilon(x,t)^{\frac{p_0+2\alpha}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
t^\mu \|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R})}^\beta \; &+ \; \frac{4(p_0+\alpha)(p_0+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}{(p_0+2\alpha)^2} \int_0^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2\mathbb{R}}^2\, d\tau \\
&= \frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha} \int_0^t \tau^{\mu-1} \|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R})}^\beta\, d\tau, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

onde $\beta = \frac{2p_0+2\alpha}{p_0+2\alpha} \in (1,2)$.
Vamos agora usar a Desigualdade de Sobolev (ver Apêndice, Teorema 5.3).

$$\|\mathrm{v}(\cdot,t)\|_{L^{\beta}(\mathbb{R})} \ \leq \ K_0(\beta)\, \|\mathrm{v}(\cdot,t)\|^{1-\widetilde{\theta}}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\, \|\mathrm{v}_x(\cdot,t)\|^{\widetilde{\theta}}_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{3.9}$$

onde $\beta_0 = 2(\beta-1)$ e $\widetilde{\theta} = \frac{2-\beta}{\beta^2}$.

Observação 3.1 *A estimativa maximal de G-N-S de acordo com ([1], p. 1082), que é realizada pela função optimal* $w(x) = (A-x^2)_+^{2/(2-\beta)}$, *com* $A>0$ *arbitrário, exige que* $3/2 \leq \beta < 2$.

Usando a desigualdade (3.9) para $\mathrm{v} = w(x,\tau)$, obtemos

$$\int_0^t \tau^{\mu-1}\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R})} \leq K_{0}(\beta)^{\beta}\|w_{0}\|^{\beta\cdot(1-\widetilde{\theta})}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})} \int_0^t \tau^{\mu-1}\|w_x(\cdot,\tau)\|^{\frac{\alpha}{p_0+\alpha}}_{L^2(\mathbb{R})}\, d\tau,$$

visto que $\|w(\cdot,\tau)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})} = \|u^{\varepsilon}(\cdot,\tau)\|^{p_0/\beta_0}_{L^{p_0}(\mathbb{R})} \leq \|u^{\varepsilon}(\cdot,0)\|^{p_0/\beta_0}_{L^{p_0}(\mathbb{R})} = \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}$ pelo Teorema (3.2).

Portanto, considerando

$$E(t) = t^{\mu}\|w(.,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R})} + \frac{4(p_{0}+\alpha)(p_{0}+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}{(p_{0}+2\alpha)^2}\int_0^t \tau^{\mu}\|w_x(.,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, d\tau,$$

temos por (3.8) e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{2p_{0}+2\alpha}{2p_{0}+\alpha}\, K_{0}(\beta)^{\beta}\|w_{0}\|^{\beta\cdot(1-\widetilde{\theta})}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\, t^{\frac{2p_0+\alpha}{2p_0+2\alpha}} \left(\int_0^t \tau^{\mu}\|w_x(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, d\tau\right)^{\frac{\alpha}{2p_0+2\alpha}} \\ &\leq \frac{2p_{0}+2\alpha}{2p_{0}+\alpha}\left(\frac{(p_{0}+2\alpha)^2}{4(p_{0}+\alpha)(p_{0}+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}\right)^{\frac{\alpha}{2p_0+2\alpha}} K_{0}(\beta)^{\beta}\|w_{0}\|^{\beta\cdot(1-\widetilde{\theta})}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\, t^{\frac{2p_0+\alpha}{2p_0+2\alpha}}\, E(t)^{\frac{\alpha}{2p_0+2\alpha}}. \end{aligned}$$

Então

$$E(t) \leq \left(\frac{2p_{0}+2\alpha}{2p_{0}+\alpha}\right)^{\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}} \left(\frac{(p_{0}+2\alpha)^2}{4(p_{0}+\alpha)(p_{0}+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}\right)^{\frac{\alpha}{2p_0+\alpha}} K_{0}(\beta)^{\beta\cdot\mu}\, \|w_{0}\|^{\beta\cdot(1-\widetilde{\theta})\cdot\mu}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}\, t,$$

para todo $t > 0$.
Em particular

$$(i) \quad \|w(\cdot,t)\|_{L^\beta(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}\right)^{\frac{p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}} \left(\frac{(p_0+2\alpha)^2}{4(p_0+\alpha)(p_0+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}\right)^{\frac{\widetilde{\theta}\cdot\mu}{2}}$$

$$K_0^\mu \, \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{(1-\widetilde{\theta})\cdot\mu} \, t^{-\frac{\widetilde{\theta}\cdot\mu}{2}}$$

$$(ii) \quad \int_0^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, d\tau \leq \left(\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}\frac{(p_0+2\alpha)^2}{4(p_0+\alpha)(p_0+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}\right)^{\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}}$$

$$K_0^{\beta\mu}\|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{\beta_0(1-\widetilde{\theta})\mu} t$$

Note que $-\frac{\widetilde{\theta}\cdot\mu}{2} < 0$. Então para que $t^{-\frac{\widetilde{\theta}\cdot\mu}{2}}$ na equação (i) não seja muito grande, não podemos tomar t muito próximo de zero.
Vamos considerar o intervalo $I = [t/2\,,\, t]$.
De (ii) temos que

$$\int_{t/2}^t \tau^\mu \|w_x(.,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \, d\tau \leq \left(\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}\,\frac{(p_0+2\alpha)^2}{4(p_0+\alpha)(p_0+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}\right)^{\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}} K_0^{\beta\mu}\|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{\beta_0(1-\widetilde{\theta})\mu}\, t.$$

Pelo Teorema 5.5 (ver Apêndice), existe um $t_* \in I$ tal que

$$t_*^\mu \, \|w_x(.,t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \left\{\left(\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}\,\frac{(p_0+2\alpha)^2}{4(p_0+\alpha)(p_0+2\alpha-1-\widetilde{\gamma})}\right)^{\frac{2p_0+2\alpha}{2p_0+\alpha}} K_0^{\beta\mu}\|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{\beta_0(1-\widetilde{\theta})\mu}\; t\right\}\Big/ t/2.$$

Desta forma $\|w(.,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pode ser realmente estimada. De fato, pelo Teorema (5.2)

$$\|\, w(\cdot,t_*)\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq G_0 \|w(\cdot,t_*)\|_{L^\beta(\mathbb{R})}^{1-\theta} \|w_x(\cdot,t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\theta},$$

onde $\theta = \frac{2}{2+\beta}$, $\quad 1-\theta = \frac{\beta}{2+\beta}$ e $G_0 = \left(\frac{2+\beta}{4}\right)^{\frac{2}{2+\beta}}$.

Usando as estimativas (i) , (ii) e o fato de que $t_* > t/2$, obtemos

$$\|w(\cdot,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(c_0(\beta)\cdot\frac{p_0+\alpha}{p_0+2\alpha-\widetilde{\gamma}-1}\right)^{\frac{p_0+2\alpha}{4p_0+2\alpha}} \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{\frac{2p_0}{2p_0+\alpha}}\, t^{-\frac{p_0+2\alpha}{4p_0+2\alpha}},$$

onde

$$c_0(\beta) = 2^{\frac{4\beta}{\beta+2}} \cdot \beta^{-2} \cdot K_0(\beta)^{\frac{4\beta^2}{\beta+2}} \cdot G_0(\beta)^{3\beta-2} \cdot \left(\frac{2\beta}{3\beta-2}\right)^{\frac{4\beta}{\beta+2}}.$$

Como $\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|w(\cdot,t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \qquad \forall\ t > t_*,$

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(c_0(\beta) \cdot \frac{p_0+\alpha}{p_0+(2\alpha-1)-\widetilde{\gamma}}\right)^{\frac{p_0+2\alpha}{4p_0+2\alpha}} \|w_0\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R})}^{\frac{2p_0}{2p_0+\alpha}}\, t^{-\frac{p_0+2\alpha}{4p_0+2\alpha}}.$$

Em termos de $u^\varepsilon(\cdot,t) = w(\cdot,t)^{\frac{2}{p_0+2\alpha}}$, chegamos a seguinte estimativa

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(c_0(\beta) \cdot \frac{p_0+\alpha}{p_0+(2\alpha-1)-\widetilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2p_0+\alpha}} \|u_0^\varepsilon\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{\frac{2p_0}{2p_0+\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2p_0+\alpha}}, \quad (3.10)$$

para todo $t > 0$ e $p_0 \geq 1-\alpha+\widetilde{\gamma}$.

Isto mostra (3.3) neste caso, visto que $c_0(\beta) < 1$ para todo $1 < \beta < 2$. Por ultimo, para o caso em que $p_0 < 1-\alpha+\widetilde{\gamma}$, segue de (3.10), basta renomear $p_0 := 1-\alpha+\widetilde{\gamma}$. □

Observação 3.2 *Este Teorema poderia ser provado de outra forma, conforme descrição abaixo.*

Seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha u_{xx}^\varepsilon + \widetilde{\gamma}\,|u^\varepsilon|^{\alpha-1}|u_x^\varepsilon|^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u_0^\varepsilon \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v} \in L^{\widetilde{p}_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 < \widetilde{p}_0 < \infty, \quad (u_0 \geq 0) \end{cases}$$

onde $\varepsilon > 0$, $\mathrm{v} \in L^{\widetilde{p}_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, $\mathrm{v} > 0$ com $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$ e $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$.

Então $w^\varepsilon = (u^\varepsilon)^\alpha$ é solução clássica positiva do problema

$$\begin{cases} w_t^\varepsilon = w^\varepsilon w_{xx}^\varepsilon + \gamma\,|w_x^\varepsilon|^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > t_0 > 0 \\ \\ w^\varepsilon(.,0) = w_0^\varepsilon \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 < p_0 < \infty, \quad (u_0 \geq 0) \end{cases}$$

onde $p_0 = \frac{\widetilde{p}_0}{\alpha}$, $\gamma = \frac{\widetilde{\gamma}-\alpha+1}{\alpha}$, $\varepsilon > 0$, $\mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, $\mathrm{v} > 0$ *com* $\mathrm{v}(x) \geq k\,|x|^{-\delta}$ *para certas constantes* $k > 0$ *e* $\delta > 0$ *e* $|x| \gg 1$.

Assim pelo Teorema (2.3) segue que

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|^{\alpha}_{L^{\infty}(\mathbb{R})} = \|w^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+1}{\kappa+1-\gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+1}} t^{-\frac{1}{2\kappa+1}} \|\, w^{\varepsilon}_0 \|^{\frac{2\kappa}{2\kappa+1}}_{L^{\kappa}(\mathbb{R})}, \qquad \forall\, t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{\, p_0, \gamma \,\}$.
Agora, observe que

$$\|w^{\varepsilon}_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |w^{\varepsilon}_0|^{p_0}\, dx\right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u^{\varepsilon}_0|^{\alpha p_0}\, dx\right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u^{\varepsilon}_0|^{\widetilde{p}_0}\, dx\right)^{\frac{\alpha}{\widetilde{p}_0}} = \|u^{\varepsilon}_0\|^{\alpha}_{L^{\widetilde{p}_0}(\mathbb{R})}.$$

Assim se $w^{\varepsilon}_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R})$, *então* $u^{\varepsilon}_0 \in L^{\widetilde{p}_0}(\mathbb{R})$, *onde* $\widetilde{p}_0 = p_0 \cdot \alpha$.

Seja $\widetilde{\kappa} = \max\{\widetilde{p}_0, \widetilde{\gamma} - \alpha + 1\}$. *Então*

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\widetilde{\kappa}+\alpha}{\widetilde{\kappa}+(2\alpha-1)-\widetilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2\widetilde{\kappa}+\alpha}} t^{-\frac{1}{2\widetilde{\kappa}+\alpha}} \|u^{\varepsilon}_0\|^{\frac{2\widetilde{\kappa}}{2\widetilde{\kappa}+\alpha}}_{L^{\widetilde{\kappa}}(\mathbb{R})}, \qquad \forall\, t > 0.$$

3.3 Estimativa para soluções fracas limitadas (caso $\lambda = \alpha - 1$)

Nesta seção vamos estimar as soluções fracas $u(\cdot,t)$ limitadas (com ou sem sinal) do problema

$$\begin{cases} u_t = |u|^{\alpha}\, u_{xx} + b(x,t)\,|u|^{\alpha-1}u_x^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ u(.,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}), \quad 0 < p_0 < \infty \end{cases} \tag{3.11}$$

onde $\alpha > 1$ é uma constante dada e $b \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.
Primeiramente vamos estudar o caso em que as soluções $u(\cdot,t)$ são não negativas. Seja $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (3.4). A ligação entre $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ e $u(\cdot,t)$ é dada pelos resultados de comparação, Lema (3.4) e Teorema (3.5).

Antes de enunciarmos tais resultados, considere
$u(\cdot,t) \in L^{\infty}_{loc}([0,T_*), L^{\infty}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}([0,T_*), H^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$ solução do problema

$$\begin{cases} u_t = u^{\alpha} \triangle u + F(x,t,u,\nabla u) \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \\ u(.,0) = u_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \qquad u_0 \geq 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

,onde $\alpha > 1$.

Seja $v \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $v > 0$, com $v(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$ e $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$.
Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u^{\varepsilon}_t = u^{\varepsilon}(\cdot,t)^{\alpha} \triangle u^{\varepsilon} + \gamma u^{\varepsilon}(\cdot,t)^{\alpha-1} |\nabla u^{\varepsilon}|^2 \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \\ u^{\varepsilon}(.,0) = u^{\varepsilon}_0(x) \equiv u_0(x) + \varepsilon\, v(x). \end{cases} \tag{3.13}$$

Para cada $0 < t < T_*$, defino os funcionais

$$\begin{aligned} \langle u_t, \psi \rangle &:= -\alpha \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \psi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)^{\alpha} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle\,dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} F(x,t,u,\nabla u) \psi(x)\,dx, \qquad (3.14) \\ \langle u^{\varepsilon}_t, \psi \rangle &:= -\alpha \int_{\mathbb{R}^n} u^{\varepsilon}(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u^{\varepsilon}|^2 \psi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u^{\varepsilon}(x,t)^{\alpha} \langle \nabla u^{\varepsilon}, \nabla \psi \rangle\,dx \\ &+ \gamma \int_{\mathbb{R}^n} u^{\varepsilon}(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u^{\varepsilon}|^2 \psi(x)\,dx, \end{aligned}$$

para toda função $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto.

Defino as seguintes funções:

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0; \\ 1 & \text{se } s \geq 1 \end{cases}$$

com $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi'(s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $H_{\delta}(s) := \varphi\left(\frac{s}{\delta}\right)$.
A função de corte

$$\zeta_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq R; \\ e^{-\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\sqrt{1+R^2}} & \text{se } |x| < R, \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.

A função $P(s)$ primitiva de s^γ para $s > 0$

$$P(s) \ = \ \begin{cases} \frac{s^{\gamma+1}}{\gamma+1} & \text{se } \gamma \neq -1; \\ ln\, s & \text{se } \gamma = -1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Para cada $0 < t < T_*$,

$$\psi(x,t) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{se } u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t); \\ \\ H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{\gamma-\alpha} \cdot \zeta_R(x) & \text{se } u(x,t) > u^\varepsilon(x,t), \end{cases} \tag{3.16}$$

com $supp\ \psi(x,t) \subseteq \overline{B}_R(0)$

e

$$\psi_\varepsilon(x,t) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{se } u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t); \\ \\ H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u^\varepsilon(x,t)^{\gamma-\alpha} \cdot \zeta_R(x) & \text{se } u(x,t) > u^\varepsilon(x,t), \end{cases} \tag{3.17}$$

com $supp\ \psi_\varepsilon(x,t) \subseteq \overline{B}_R(0)$.

Lema 3.4 *(M. Bertsch e M. Ughi) Com as notações acima, se γ for tal que*

$$\langle u_t, \psi \rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon \rangle \leq K \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x) \rangle \, dx,$$

para todo $0 < t < T_*$ e para algum $K \in \mathbb{R}$, então (redefinindo $u(x,t)$ num conjunto de medida zero no tempo se necessário)

$$u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t), \quad \forall\ 0 < t < T_*.$$

Prova. A prova deste Lema esta no Apêndice.

Teorema 3.5 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada não negativa do problema (3.11), e seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (3.4), onde $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ é tal que $b(x,t) \leq \widetilde{\gamma}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Então temos (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário): $u(\cdot,t) \leq u^\varepsilon(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ e em q.t.p $x \in \mathbb{R}$.*

Prova. Sejam as funções P, ψ e ψ_ε definidas em (3.15), (3.16) e (3.17), neste caso com $x \in \mathbb{R}$ e trocando γ por $\widetilde{\gamma}$, e sejam os funcionais $\langle u_t, \psi\rangle$ e $\langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle$ definidos em (3.14) com $F(x,t,u,u_x) = b(x,t)\, u^{\alpha-1}\, u_x^2$.

A mostrar:

$$\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle\, dt \leq K \int_0^T\int_{|x|<R} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u)-P(u^\varepsilon))_x\, (\zeta_R(x))_x dx\, dt,$$

para algum $K \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle u_t, \psi\rangle &= -\alpha \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha-1}\, u_x^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot u(x,t)^{\widetilde{\gamma}-\alpha}\cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha} u_x\, \left(H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot u(\cdot,t)^{\widetilde{\gamma}-\alpha}\cdot \zeta_R(x)\right)_x\, dx \\
&+ \int_{|x|<R} b(x,t) u(x,t)^{\alpha-1} u_x^2 H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot u(x,t)^{\widetilde{\gamma}-\alpha}\cdot \zeta_R(x)\, dx, \\
&= -\alpha \int_{|x|<R} u(x,t)^{\widetilde{\gamma}-1}\, u_x^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} u(x,t)^{\widetilde{\gamma}}\, u_x\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\, (\zeta_R(x))_x\, dx \\
&- (\widetilde{\gamma}-\alpha) \int_{|x|<R} u(x,t)^{\widetilde{\gamma}-1}\, u_x^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\, dx, \\
&- \int_{|x|<R} u(x,t)^{\widetilde{\gamma}}\, u_x\, H'_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\, (P(u)-P(u^\varepsilon))_x \cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&+ \int_{|x|<R} b(x,t) u(x,t)^{\widetilde{\gamma}-1}\, u_x^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\, dx
\end{aligned}$$

Como $u(x,t)^{\widetilde{\gamma}}\, u_x = (P(u))_x$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle u_t, \psi\rangle &= \int_{|x|<R} (b(x,t)-\widetilde{\gamma}) u(x,t)^{\widetilde{\gamma}-1}\, u_x^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u))_x\, (\zeta_R(x))_x\, dx \\
&- \int_{|x|<R} u(x,t)^{\widetilde{\gamma}} H'_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)(P(u))_x\, (P(u)-P(u^\varepsilon))_x\, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle u^\varepsilon_t, \psi_\varepsilon\rangle &= -\alpha \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha-1}(u^\varepsilon_x)^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}-\alpha}\cdot \zeta_R(x)\,dx \\
&- \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha} u^\varepsilon_x\, \big(H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}-\alpha}\cdot \zeta_R(x)\big)_x\,dx \\
&+ \widetilde{\gamma} \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha-1}(u^\varepsilon_x)^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}-\alpha}\cdot \zeta_R(x)\,dx \\
&= -\alpha \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}-1}(u^\varepsilon_x)^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\,dx \\
&- \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\, u^\varepsilon_x\cdot (\zeta_R(x))_x\,dx \\
&- (\widetilde{\gamma}-\alpha) \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}-1}(u^\varepsilon_x)^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\,dx \\
&- \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}} H'_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\, u^\varepsilon_x (P(u)-P(u^\varepsilon)_x\cdot \zeta_R(x)\,dx \\
&+ \widetilde{\gamma} \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}-1}(u^\varepsilon_x)^2\, H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Como $u^\varepsilon(x,t)^{\widetilde{\gamma}}\, u^\varepsilon_x = (P(u^\varepsilon))_x$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle u^\varepsilon_t, \psi_\varepsilon\rangle &= -\int_{|x|<R} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u^\varepsilon))_x\,(\zeta_R(x))_x\,dx \\
&- \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u^\varepsilon))_x\,(P(u)-P(u^\varepsilon))_x\cdot \zeta_R(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u^\varepsilon_t, \psi_\varepsilon\rangle\,dt &= \int_0^T\!\!\int_{|x|<R} (b(x,t)-\widetilde{\gamma})\, u_x^2\, u^{\widetilde{\gamma}-1} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\,dx\,dt \\
&- \int_0^T\!\!\int_{|x|<R} H'_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u)-P(u^\varepsilon))_x^2\cdot \zeta_R(x)\,dx\,dt \\
&- \int_0^T\!\!\int_{|x|<R} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u)-P(u^\varepsilon))_x\,(\zeta_R(x))_x\,dx\,dt \\
&\le \int_0^T\!\!\int_{|x|<R} (b(x,t)-\widetilde{\gamma})\, u_x^2\, u^{\widetilde{\gamma}-1} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))\cdot \zeta_R(x)\,dx\,dt \\
&- \int_0^T\!\!\int_{|x|<R} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u)-P(u^\varepsilon))_x\cdot (\zeta_R(x))_x\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u^\varepsilon_t, \psi_\varepsilon\rangle\,dt \le -\int_0^T\!\!\int_{|x|<R} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u)-P(u^\varepsilon))_x\cdot (\zeta_R(x))_x\,dx\,dt,
$$

visto que $b(x,t) - \widetilde{\gamma} \leq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0.$

Assim segue diretamente do Lema (3.4), que

$$u(\cdot, t) \leq u^{\varepsilon}(\cdot, t) \quad \forall \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0.$$

$\square$

Uma consequencia imediata dos Teoremas (3.3) e (3.5) é que, para cada $t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa + 2\alpha - 1 - \widetilde{\gamma}} \right) t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|u_0 + \varepsilon v\|_{L^{\kappa}(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}} \tag{3.18}$$

para todo $\varepsilon > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, \widetilde{\gamma} + 1 - \alpha\}$.
Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.18), obtemos o importante resultado dado pelo Teorema abaixo.

Teorema 3.6 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada não negativa do problema (3.11). Então (redefinindo $u(x,t)$ num conjunto de medida zero no tempo se necessário), temos que*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \qquad \forall \; t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa + \alpha}{\kappa + 2\alpha - 1 - \widetilde{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|u_0\|_{L^{\kappa}(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \qquad \forall \; t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1 - \alpha + \widetilde{\gamma}\}$ *e* $\widetilde{\gamma} = \sup\{b(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$.

Vamos agora concentrar nossa atenção para as soluções $u(\cdot,t)$ com sinal do problema

Dado $\varepsilon > 0$, seja agora $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ a solução clássica positiva do problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u_t^{\varepsilon} = |u^{\varepsilon}|^{\alpha} u_{xx}^{\varepsilon} + B \cdot |u^{\varepsilon}|^{\alpha-1} |u_x^{\varepsilon}|^2, \quad x \in \mathbb{R}, \; t > 0 \\ \\ u^{\varepsilon}(.,0) = u_0^{\varepsilon} \equiv |u_0| + \varepsilon \mathrm{v}, \end{cases} \tag{3.19}$$

onde $B = \| \, b \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}$ e , como antes, $\mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, $\mathrm{v} > 0$ com $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$, $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$, para um certo $0 < p_{_0} < \infty$.

Seja $u(\cdot, t)$ solução não negativa do problema (3.11).

Defino $\widehat{u} := -u$. Então

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_t &= -u_t = -|u|^\alpha u_{xx} - b(x,t)|u|^{\alpha-1}u_x^2 = |u|^\alpha(-u)_{xx} - b(x,t)|u|^{\alpha-1}u_x^2 \\
&= |\widehat{u}|^\alpha \widehat{u}_{xx} - b(x,t)|\widehat{u}|^{\alpha-1}\widehat{u}_x^2 = |\widehat{u}|^\alpha \widehat{u}_{xx}, + \widehat{b}(x,t)|\widehat{u}|^{\alpha-1}\widehat{u}_x^2,
\end{aligned}$$

onde $\widehat{b}(x,t) = -b(x,t)$.

Como $|b(x,t)| \leq B$ usando o mesmo argumento estabelecido no Teorema (3.5) acima, temos que $u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t)$ e $-u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t)$ para q.t.p $x \in \mathbb{R}$ e q.t.p $t > 0$. Desta forma o seguinte principio de comparação é obtido.

Teorema 3.7 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada do problema (3.11), e seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (3.19), onde $B \geq 0$ é tal que , $|b(x,t)| \leq B$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Então (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário): $|u(\cdot,t)| \leq u^\varepsilon(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ e em q.t.p $x \in \mathbb{R}$.*

Como o Teorema (3.2) e o Teorema (3.3) são validos para $u^\varepsilon(\cdot,t)$ com $\widetilde{\gamma}$ substituido por B, nós obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\,|\,u_0\,| + \varepsilon\, v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+2\alpha-1-B}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|\,|\,u_0\,| + \varepsilon\, v\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_{_0}, 1-\alpha+B\}$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, nós obtemos nosso resultado principal

Teorema 3.8 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada do problema (3.11). Então (redefinindo $u(x,t)$ num conjunto de medida zero no tempo se necessário), temos que*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+2\alpha-1-B}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \| u_0 \|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \quad \forall\ t>0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$ *e* $B = \| b \|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}$.

3.4 Estimativa para soluções clássicas positivas (caso $\lambda > \alpha - 1$)

Nesta seção, vamos continuar nossa análise do problema de valor inicial (3.1) considerando agora o caso em que $\lambda > \alpha - 1$.
Novamente torna-se conveniente considerarmos primeiro o caso das soluções não negativas desse problema.
Os passos básicos do argumento são praticamente os mesmos da seção anterior, mas alguns resultados a mais estão envolvidos.
Nossa análise começa com a seguinte propriedade importante.

Teorema 3.9 *Dado* $T_* > 0$, *seja* $v(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}))$ *uma solução arbitrária positiva do problema (*3.1*) com estado inicial* $v(\cdot,0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, *onde* $0 < p_0 < \infty$. *Então temos*

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|v(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall\, 0 < t < T_*,$$

em particular, $v(\cdot,t)$ *é globalmente definida, i.e., podemos sempre assumir que* $T_* = \infty$.

Prova: Dados $t > 0$, seja $M(t), \mathcal{B}(t)$ tal que $v(x,\tau) \le M(t)$ e $b(x,\tau) \le \mathcal{B}(t)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $0 < \tau < t$.
Multiplicando a equação $v_t = v^\alpha\, v_{xx} + b(x,t)\, v^\lambda\, v_x^2$ por $\psi_R(x)\, q\, v(x,t)^{q-1}$, onde $q \ge p_0$ é finito, $\psi_R(x)$ é a função de corte definida na prova do Teorema (2.2), e

integrando o resultado em $[0,t]\times\mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|<2R}\psi_R(x)v(x,t)^q\,dx+q\cdot(q+\alpha-1)\int_0^t\!\!\int_{|x|<2R}\psi_R(x)v(x,\tau)^{q+\alpha-2}v_x^2\,dx\,d\tau\\
=\;&\int_{|x|<2R}\psi_R(x)v(x,0)^q\,dx+q\int_0^t\!\!\int_{|x|<2R}\psi_R(x)b(x,\tau)v(x,\tau)^{q+\lambda-1}v_x^2\,dx\,d\tau\\
\le\;&\int_{|x|<2R}\psi_R(x)v(x,0)^q\,dx+q\,\mathcal{B}(t)_+M(t)^{\lambda-\alpha+1}\int_0^t\!\!\int_{|x|<2R}\psi_R(x)v(x,\tau)^{q+\alpha-2}v_x^2\,dx\,d\tau\\
+\;&\left(\frac{q}{q+\alpha}\right)\int_0^t\!\!\int_{R<|x|<2R}\psi''_R(x)v(x,\tau)^{q+\alpha}\,dx\,d\tau.
\end{aligned}$$

Fazendo $R\to\infty$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\|v(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R})}+q\,.\,(q-1+\alpha-\Gamma_0)\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}v(x,\tau)^{q+\alpha-2}v_x^2\,dx\,d\tau\le\|v(\cdot,0)\|^q_{L^q(\mathbb{R})},$$

onde $\Gamma_0=\mathcal{B}(t)_+\cdot M(t)^{\lambda-\alpha+1}$, $\mathcal{B}(t)_+=\max\{0,\mathcal{B}(t)\}$.
Assim para $q\ge\max\{p_0,1-\alpha+\Gamma_0\}$ arbitrário, temos

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R})}\le\|v(\cdot,0)\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Fazendo $q\to\infty$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Agora nós podemos proceder de maneira similar ao caso em que $\lambda=\alpha-1$: dada uma solução arbitrária $u(\cdot,t)\in L^\infty_{loc}([0,T_*),L^\infty(\mathbb{R}))\cap L^2_{loc}([0,\infty),H^1_{loc}(\mathbb{R}))$ não negativa do problema (3.1), fixamos uma função positiva (arbitrária) $\mathrm{w}\in L^{p_0}(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})\cap C^0(\mathbb{R})$ e tomando $\varepsilon>0$, definimos $u^\varepsilon(\cdot,t)$ como sendo a solução clássica positiva do problema parabólico regularizado

$$\begin{cases}u^\varepsilon_t=|u^\varepsilon|^\alpha u^\varepsilon_{xx}+\Gamma_0|u^\varepsilon|^{\alpha-1}|u^\varepsilon_x|^2\\[2ex] u^\varepsilon(.,0)=u^\varepsilon_0\equiv u_0+\varepsilon\mathrm{w},\qquad(u_0\ge0),\end{cases}\tag{3.20}$$

onde $\Gamma_0=\mathbf{B}_+\cdot\|u_0\|^{\lambda-\alpha+1}_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $\mathbf{B}=\sup\limits_{x\in\mathbb{R},\,t>0}b(x,t)$ e $\mathbf{B}_+=\max\{0,\mathbf{B}\}$.

Pelos Teoremas 3.2 e 3.3 da seção anterior, temos que

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le\|u^\varepsilon(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\tag{3.21}$$

e

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+(2\alpha-1)-\widetilde{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|u_0^\varepsilon\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}} \tag{3.22}$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma_0\}$.

3.5 Estimativas para soluções fracas limitadas (caso $\lambda > \alpha - 1$)

Nesta seção vamos estimar as soluções fracas limitadas (com ou sem sinal) do problema.

$$\begin{cases} u_t = |u|^\alpha\, u_{xx} + b(x,t)\,|u|^\lambda u_x^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ u(.,0) = u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 < p_0 < \infty \end{cases} \tag{3.23}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda > \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.
Primeiramente, vamos considerar as soluções $u(\cdot,t)$ não negativas do problema (3.23).
Seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (3.20), então obtemos o seguinte resultado de comparação.

Teorema 3.10 *Seja $\lambda > \alpha - 1$, $u(\cdot,t)$ solução fraca limitada não negativa do problema (3.23) e $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (3.20). Então, (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário): $u(\cdot,t) \leq u^\varepsilon(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ e em q.t.p $x \in \mathbb{R}$.*

Prova. Sejam as funções P, ψ e ψ_ε definidas em (3.15), (3.16) e (3.17), neste caso com $x \in \mathbb{R}$ e trocando γ por Γ_0.
A mostrar:

$$\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle\, dt \leq K \int_0^T\!\!\int_{|x|<R} H_\delta(P(u)-P(u^\varepsilon))(P(u)-P(u^\varepsilon))_x\,(\zeta_R(x))_x\, dx\, dt,$$

para algum $K \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle u_t, \psi \rangle &= -\alpha \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha-1} u_x^2 \, H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{\Gamma_0-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha} u_x \left(H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))\right)_x \cdot u(x,t)^{\Gamma_0-\alpha} \cdot \zeta_R(x))\, dx \\
&+ \int_{|x|<R} b(x,t) u(x,t)^{\lambda} u_x^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{\Gamma_0-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\, dx, \\
&= \int_{|x|<R} u(x,t)^{\Gamma_0-1} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x)(b(x,t)u(x,t)^{\lambda-\alpha+1} - \Gamma_0)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))(P(u))_x \, (\zeta_R(x))_x \, dx \\
&- \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x)(P(u))_x \, (P(u) - P(u^\varepsilon))_x \, dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon \rangle &= (\Gamma_0 - \alpha) \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha-1} (u_x^\varepsilon)^2 \, H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u^\varepsilon(x,t)^{\Gamma_0-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha} u_x^\varepsilon \left(H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))\right)_x \cdot u^\varepsilon(x,t)^{\Gamma_0-\alpha} \cdot \zeta_R(x))\, dx \\
&= -\int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))(P(u^\varepsilon))_x \, (\zeta_R(x))_x \, dx \\
&- \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x)(P(u^\varepsilon))_x \, (P(u) - P(u^\varepsilon))_x \, dx.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_t, \psi \rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon \rangle \, dt &= \int_0^T \int_{|x|<R} (b(x,t)u^{\lambda-\alpha+1} - \Gamma_0)\, u^{\Gamma_0-1} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x)(P(u) - P(u^\varepsilon))_x^2 \, dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))(P(u) - P(u^\varepsilon))_x \, (\zeta_R(x))_x \, dx\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{|x|<R} (b(x,t)u^{\lambda-\alpha+1} - \Gamma_0) u^{\Gamma_0-1} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))(P(u) - P(u^\varepsilon))_x \, (\zeta_R(x))_x \, dx\, dt
\end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^T \langle u_t, \psi \rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon \rangle \, dt \leq -\int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))(P(u) - P(u^\varepsilon))_x \, (\zeta_R(x))_x \, dx\, dt,$$

visto que $b(x,t)\, u^{\lambda-\alpha+1} - \Gamma_0 \leq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$

Assim, segue diretamente do Lema (3.4), que

$$u(\cdot,t) \leq u^{\varepsilon}(\cdot,t) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

□

Então $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ para cada $t > 0$ e $\varepsilon > 0$.
Fazendo $\varepsilon \to 0$, o resultado seguinte é imediatamente obtido de (3.21),(3.22) acima.

Teorema 3.11 *Seja $\lambda > \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução não negativa do problema (3.23). Então (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo, se necessário), temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+2\alpha-1-\Gamma_0}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|\, u_0 \,\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma_0\}$ *e* $\Gamma_0 = \mathcal{B}_+ \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\lambda-\alpha+1}$, $\mathcal{B} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R},\, t>0} b(x,t)$.

Vamos agora voltar nossa atenção para as soluções com sinal $u(\cdot,t)$ do problema (3.23) e para a solução $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ positiva do problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u_t^{\varepsilon} = |u^{\varepsilon}|^{\alpha} u_{xx}^{\varepsilon} + \Gamma \cdot |u^{\varepsilon}|^{\alpha-1} |u_x^{\varepsilon}|^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \\ u^{\varepsilon}(.,0) = u_0^{\varepsilon} \equiv |u_0| + \varepsilon \mathrm{w}, \end{cases} \tag{3.24}$$

onde $\Gamma = \mathbf{B} \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\lambda-\alpha+1}$, $\mathbf{B} = \|\, b \,\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)} = \sup\{|b(x,t| : x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$ e onde, como antes, $\mathrm{w} \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ é uma função positiva com $\mathrm{v}(x) \geq c|x|^{-\delta}$, para certas constantes $c > 0$, $\delta > 0$ e $|x| \gg 1$.
Defino $\mathrm{v} := -u$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_t &= -u_t = -|u|^{\alpha} u_{xx} - b(x,t)|u|^{\lambda} u_x^2 = |u|^{\alpha}(-u)_{xx} - b(x,t)|u|^{\lambda} u_x^2 \\ &= |\mathrm{v}|^{\alpha} \mathrm{v}_{xx} - b(x,t)|\mathrm{v}|^{\lambda} \mathrm{v}_x^2 = |\mathrm{v}|^{\alpha} \mathrm{v}_{xx}, + \widehat{b}(x,t)|\mathrm{v}|^{\lambda} \mathrm{v}_x^2, \end{aligned}$$

onde $\widehat{b}(x,t) = -b(x,t)$.
Como $|b(x,t)| \leq \Gamma$, temos que $\widehat{b}(x,t) \leq \Gamma$, assim usando o mesmo argumento estabelecido no Teorema 3.10, temos que $-u(x,t) \leq u^{\varepsilon}(x,t)$, para q.t.p $x \in \mathbb{R}$ (e q.t.p $t > 0$). Desta forma o seguinte principio de comparação é obtido.

Teorema 3.12 *Seja $\lambda > \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução fraca limitada do problema (3.23), e seja $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (3.24). Então (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo, se necesário) para todo $t > 0$: $|u(x,t)| \leq u^{\varepsilon}(x,t)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}$.*

Em particular, temos $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ para todo $t > 0$, e , como (3.21) e (3.22) são validos para $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ trocando Γ_0 por Γ, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\,|u_0| + \varepsilon \mathrm{w}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+2\alpha-1-\Gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|\,|u_0| + \varepsilon \mathrm{w}\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}},$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos o seguinte resultado fundamental sobre soluções fracas limitadas do problema (3.23).

Teorema 3.13 *Seja $\lambda > \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução arbitrária limitada do problema (3.23). Então (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo, se necesário),temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\kappa+\alpha}{\kappa+2\alpha-1-\Gamma}\right)^{\frac{1}{2\kappa+\alpha}} \|u_0\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+\alpha}},$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$, $\Gamma = \boldsymbol{B} \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\lambda-\alpha+1}$ e $\boldsymbol{B} = \|\, b\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}$.

3.6 Soluções com suporte compacto

Vamos concluir este capítulo com algumas observações sobre o caso especial de soluções com suporte compacto. Se $\lambda = \alpha - 1$, $b(x,t) = \gamma > \alpha/2 - 1$, γ constante, pode-se encontrar soluções autossimilares da forma [2, 7]

$$u(x,t) = (t+t_0)^{-\frac{1}{2-\alpha+2\gamma}} \left(R^{2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{2-\alpha+2\gamma}(x-x_0)^2 (t+t_0)^{-\frac{1-\alpha+\gamma}{1-\alpha/2+\gamma}} \right)_+^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.25}$$

para um $R > 0$ arbitrário, $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, onde $a_+ \equiv \max\{a, 0\}$ é a parte positiva de a.

Então quando $\lambda = \alpha - 1$ e $B > \alpha - 1$, a taxa de decaimento $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O\left(t^{-1/2\kappa+\alpha}\right)$ dada no Teorema 3.8 é optimal se $p_0 = 1 - \alpha + B$.

Mais geralmente, se $\lambda = \alpha - 1$ e se a solução inicial u_0 do problema (3.11) tem suporte compacto, então a taxa de decaimento optimal pode ser determinada.

De fato, se $B > \alpha - 1$, então segue diretamente do Teorema 3.8, tomando $p_0 = 1 - \alpha + B$ que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1+B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha+2B}} \|u(\cdot,t)\|_{L^{1-\alpha+B}(\mathbb{R})}^{\frac{2-2\alpha+2B}{2-\alpha+2B}} \, t^{-\frac{1}{2-2\alpha+2B}} \quad \forall \;\; t > 0.$$

Se $B \leq \alpha - 1$, então $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\} = p_0$. Logo para todo $t > 0$ fixo, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{p_0+\alpha}{p_0+2\alpha-1-B}\right)^{\frac{1}{2p_0+\alpha}} \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{\frac{2p_0}{2p_0+\alpha}} \, t^{-\frac{1}{2p_0+\alpha}}, \quad \forall \;\; p_0 > 0.$$

Vamos supor que $supp\, u_0 \subseteq [a_1, b_1]$.

Então fazendo $p_0 \to 0$, obtem-se $\limsup \|u_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})}^{p_0} = \limsup \int_{a_1}^{b_1} |u_0(x)|^{p_0}\, dx \leq (b_1 - a_1)$, e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\alpha}{2\alpha-1+B}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{(b_1-a_1)^2}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \text{ mais geralmente}$$

se $supp\, u_0 \subseteq \bigcup_{n=1,2,\ldots} [a_n, b_n]$ com $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2], \ldots$ disjuntos, onde $l = \max_{n=1,2,\ldots} (b_n - a_n)$, então

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\alpha}{2\alpha-1+B}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{l^2}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Assim obtemos o seguinte Teorema.

Teorema 3.14 *Seja* $\lambda = \alpha - 1$, $B = \| b \|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}$ *e* $u(\cdot, t)$ *uma solução do problema (*3.11*) com uma solução inicial* u_0 *de suporte compacto (com ou sem sinal). Então temos (redefindo* $u(\cdot, t)$ *num conjunto de medida zero no tempo, se necessário), se* $B > \alpha - 1$,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1+B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha+2B}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^{1-\alpha+B}(\mathbb{R})}^{\frac{2-\alpha+2B}{2-2\alpha+2B}} t^{-\frac{1}{2-\alpha+2B}} \tag{3.26}$$

para todo $t > 0$, *e, se* $B \leq \alpha - 1$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{(b_1 - a_1)^2}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \forall\, t > 0, \tag{3.27}$$

onde $a_1 \leq b_1 \in \mathbb{R}$ *são tais que* $\operatorname{supp} u_0 \subseteq [a_1, b_1]$*;*
mais geralmente

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{l^2}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \forall\, t > 0, \tag{3.28}$$

se $\operatorname{supp} u_0 \subseteq \bigcup_{n=1,2,\ldots} [a_n, b_n]$ *com* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots$ *disjuntos, onde* $l = \max_{n=1,2,\ldots} (b_n - a_n)$.

Para $\lambda = \alpha - 1$, $b(x, t) = \gamma \leq \alpha - 1$, arbitrário, segue de ([5], proposição 2.4) a existência de soluções com suporte compacto da forma

$$u(x, t) = (t + t_0)^{-1/\alpha} \cdot R^{2/\alpha} \cdot U_\gamma(|x - x_0|/R), \qquad R > 0,\ t_0 \geq 0,\ x_0 \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

para alguma função apropriada $U_\gamma(\cdot)$ dependendo apenas de γ. De (3.25) e (3.29) acima, segue que a taxa de decaimento (quando $t \to \infty$) dada no Teorema (3.14) é optimal, como afirmado.

Capitulo 4

Neste capítulo vamos desenvolver algumas estimativas para soluções $u(\cdot,t)$ do problema

$$\begin{cases} u_t = |u|^{\alpha} \triangle u + b(x,t)\,|u|^{\lambda} |\nabla u|^2 \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ \\ u(.,0) \ = \ u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad 0 < p_0 < \infty \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.
Tais problemas incluem casos particulares de inumeros modelos importantes em Fisica e Biologia ver e.g. [2, 5, 9, 11, 15, 16].

Como esse problema é do tipo parabólico degenerado, pois o termo parabólico desaparece quando $u = 0$, não podemos garantir a existência de solução clássica, somente a existência de solução no sentido fraco conforme definição abaixo.

Definição 4.1 *: Dado $0 < T_* < \infty$, uma função $u = u(x,t)$ é dita solução fraca do problema (4.1) no intervalo $[0,T_*)$ se $u \in L^{\infty}(S_T)$ para cada conjunto $S_T = \mathbb{R}^n \times [0,T]$, $0 < T < T_*$ e $u(\cdot,t) \in L^2_{loc}(\,[0,T_*), H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\,)$, com*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}^n} u\,\varphi_t\,dx\,dt \quad &+ \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx = \alpha \int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha-1}(sgn\,u)|\nabla u|^2 \varphi\,dx\,dt \\ &+ \quad \int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle\,dx\,dt - \int_0^{\infty}\!\!\int_{\mathbb{R}^n} b(x,t)|u|^{\lambda}|\nabla u|^2 \varphi\,dx\,dt \end{aligned}$$

para toda função teste $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T_*))$ com suporte compacto em $\mathbb{R}^n \times [0,T_*)$.

Em particular, soluções do problema (4.1) são globalmente definidas (i.e., $T_* = \infty$), com $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}$ monotonicamente decrescente em $[0,\infty)$.

Quanto a unicidade, segue de [4, 9, 15] que mesmo as soluções não negativas do problema (4.1) podem não ser unicamente definidas. Em todo caso, todas as soluções do problema (4.1) devem satisfazer a estimativa fundamental

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u_0\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \, t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}}, \qquad \forall\, t > 0, \tag{4.2}$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$ e $B = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. e $K > 0$ é uma constante que depende somente de n, p_0, α, B.

Para demonstrar os principais resultados deste capítulo, vamos usar como argumento principal o fato de que $|u(\cdot,t)|$ pode ser limitada por cima por soluções clássicas positivas.

Primeiramente vamos considerar o caso das soluções limitadas não negativas $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}((0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}((0,\infty), H^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$ do problema (4.1). Soluções clássicas naturais associadas a $u(\cdot,t)$ podem ser introduzidas da seguinte forma: Escolhendo uma função positiva $\mathrm{v} \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$, com $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$ para certas constantes $c > 0$, $\sigma > 0$ e $|x| \gg 1$, tomando $\varepsilon > 0$ e seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ a unica solução classica positiva do problema

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t = |u^\varepsilon|^\alpha \Delta u + B \cdot |u^\varepsilon|^\lambda |\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > t_0 \geq 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u^\varepsilon_0 \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v}, \qquad (u_0 \geq 0) \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas e B é escolhida de forma que $b(x,t) \leq B$.

4.1 Estimativa para soluções clássicas positivas no caso n-dimensional ($\lambda = \alpha - 1$)

Nesta seção vamos relatar alguns resultados importantes para o caso particular do problema (4.1), onde $\lambda = \alpha - 1$.

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha \Delta u + B \cdot |u^\varepsilon|^{\alpha-1}|\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; t > t_0 \geq 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u_0^\varepsilon \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v}, \qquad (u_0 \geq 0) \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $\alpha > 1$ é uma constante dada e B é escolhida de forma que $b(x,t) \leq B$.
As principais estimativas são dadas pelo Teorema 4.2 e 4.3 a seguir.

Teorema 4.2 *(Principio do Máximo) Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma unica solução clássica positiva $u^\varepsilon(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n,[0,T_*))$ do problema (4.4). Além disso, para todo $\infty \geq q \geq \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$, onde $B = \|\, b\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)}$, tem-se*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\; t > 0 \tag{4.5}$$

Prova. A existência local, unicidade e positividade vem da teoria padrão de equações parabólicas, com existência global mostrada em [10, 12, 14].
Primeiramente, vamos supor $q < \infty$. Seja $\epsilon > 0$ fixo no que segue.
Defino a seguinte função de corte

$$\zeta_R(x) \quad = \quad \begin{cases} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} & \text{se } |x| \leq R; \\ 0 & \text{se } |x| > R, \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.
Multiplicando a equação $u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha \Delta u^\varepsilon + B \cdot |u^\varepsilon|^{\alpha-1}|\nabla u^\varepsilon|^2$ por $q\, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1}\, \zeta_R(x)$

e integrando o resultado em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t)^q \, dx &= \int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t_0)^q \, dx \\
&- q \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} (q+\alpha-1-B) u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} \zeta_R(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau \\
&- q \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-1} \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla \zeta_R(x) \rangle \, dx \, d\tau \\
&= \int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t_0)^q \, dx \\
&- q \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} (q+\alpha-1-B) u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} \zeta_R(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau \\
&- \frac{q}{q+\alpha} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|=R} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha} \frac{\partial \zeta_R(x)}{\partial n} \, d\sigma(x) \, d\tau \\
&+ \frac{q}{q+\alpha} \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha} \triangle \zeta_R(x) \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Seja $M(T)$ tal que $\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T) \quad \forall\, t_0 < t < T.$

Assim

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t)^q \, dx + (q+\alpha-1-B) \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} \zeta_R(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau \\
\leq\ & \int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t_0)^q \, dx + \frac{q}{q+\alpha} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|=R} u(x,\tau)^{q+\alpha} |\nabla \zeta_R(x) \cdot n| \, d\sigma(x) \, d\tau \\
+\ & \frac{q}{q+\alpha} \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha} |\triangle \zeta_R(x)| \, dx \, d\tau \ \leq \int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t_0)^q \, dx \\
+\ & \frac{q}{q+\alpha} M(T)^{q+\alpha}\, T\, R^{n-1}\, n\, \omega_n \epsilon\, e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} + \frac{q}{q+\alpha} M(T)^{\alpha}\, n\, \epsilon \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,\tau)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \, d\tau,
\end{aligned}$$

visto que $|\triangle \zeta_R(x)| \leq n\, \epsilon\, e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$ e $|\nabla \zeta_R(x)| \leq \frac{\epsilon\,|x|}{\sqrt{1+|x|^2}} \cdot e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}$.

Então para $q \geq \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t)^q \, dx \leq \int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t_0)^q \, dx \\
+\ & M(T)^{q+\alpha}\, T\, R^{n-1}\, n\, \omega_n \epsilon\ e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} + M(T)^{\alpha}\, n\, \epsilon \int_{t_0}^{t}\!\!\int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,\tau)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} \, dx \, d\tau.
\end{aligned}$$

Fazendo $t_0 \to 0$ e usando o Teorema da Convergencia Monótona, temos

$$\int_{|x|<R} \zeta_R(x) u^\varepsilon(x,t)^q\, dx \leq \int_{|x|<R} \zeta_R(x) u_0^\varepsilon(x)^q\, dx$$
$$+ \quad M(T)^{q+\alpha}\, T\, R^{n-1}\, n\, \omega_n \epsilon\ e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} + M(T)^\alpha\, n\, \epsilon \int_0^t \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,\tau)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\, d\tau$$

para todo $R > 0$ e $\epsilon > 0$.

Fazendo $R \to \infty$, chegamos a seguinte estimativa

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x,t)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_0^\varepsilon(x)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx$$
$$+ \quad M(T)^\alpha\, n\, \epsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x,\tau)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\, d\tau$$

Então, obtemos

$$\mathrm{U}(t) \leq A + C \int_{t_0}^t \mathrm{U}(\tau), \text{ onde } U(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x,t)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx,\ C = M(T)^\alpha\, n\, \epsilon$$
$$\text{e } A = \int_{\mathbb{R}^n} u_0^\varepsilon(x)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx. \tag{4.6}$$

Logo, pelo Lema de Growall

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x,t)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_0^\varepsilon(x)^q e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\ e^{M(T)^\alpha\, n\, \epsilon} \quad \forall\, t > 0$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalmente, fazendo $q \to \infty$

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Teorema 4.3 *Seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (4.4). Então*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u_0^\varepsilon\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}}\ t^{\frac{-n}{2\kappa+n\alpha}}, \tag{4.7}$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$ e $K > 0$ é uma constante que depende apenas de p_0, α, B e n.

Prova: Vamos supor primeiramente que $p_0 \geq 1 - \alpha + B$.
Seja $q \geq p_0$ finito. Multiplicando a equação $u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha \Delta u^\varepsilon + B \cdot |u^\varepsilon|^{\alpha-1} |\nabla u^\varepsilon|^2$ por

$\psi_R(x)(t-t_0)^\mu \, q \, u^\varepsilon(x,t)^{q-1}$, onde μ será escolhido posteriormente e integrando

o resultado em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$ obtemos

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} \psi_R(x)(t-t_0)^\mu \, q \, u^\varepsilon(x,\tau)^{q-1} u_t^\varepsilon \, dx \, d\tau \\
= & \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} \psi_R(x)(\tau-t_0)^\mu \, q \, u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-1} \triangle u^\varepsilon \, dx \, d\tau \\
+ & \; B \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} \psi_R(\tau-t_0)^\mu \, q \, u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes em relação a t e o Teorema do Divergente , obtemos

$$
\begin{aligned}
& (t-t_0)^\mu \int_{|x|<2R} \psi_R(x) u^\varepsilon(x,t)^q \, dx \\
+ & \; q\,(q+\alpha-1) \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} \psi_R(x)(\tau-t_0)^\mu u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau \\
= & \; \mu \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} \psi_R(x)(\tau-t_0)^{\mu-1} u^\varepsilon(x,\tau)^q \, dx \, d\tau \\
+ & \; q\,B \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} \psi_R(x)(\tau-t_0)^\mu u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx \, d\tau \\
+ & \; \frac{q}{q+\alpha} \int_{t_0}^{t} \int_{|x|<2R} (\tau-t_0)^\mu u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha} \triangle \psi_R(x) \, dx \, d\tau
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
& \int_{|x|<2R} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha} \triangle \psi_R(x) \, dx \leq \frac{1}{R^2} \int_{|x|<2R} |u^\varepsilon(x,\tau)|^{q+\alpha} |\triangle \psi \left(\frac{x}{R}\right)| \, dx \\
\leq & \; \frac{1}{R^2} \cdot C \cdot \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{q+\alpha}(\mathbb{R}^n)}^{q+\alpha} \to 0, \text{ quando } R \to \infty.
\end{aligned}
$$

Então, fazendo $R \to \infty$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$
\begin{aligned}
(t-t_0)^\mu \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \; + & \; q\,(q+\alpha-1-B) \int_{t_0}^{t} (\tau-t_0)^\mu \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon(x,\tau)^{q+\alpha-2} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx d\tau \\
\leq & \; \mu \int_{t_0}^{t} (\tau-t_0)^{\mu-1} \|u^\varepsilon(.,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q d\tau
\end{aligned}
$$

Note que precisamos ter $q \geq 1-\alpha+B$, mas isto acontece, ja que $q \geq p_0 \geq 1-\alpha+B$. Então

$$
\begin{aligned}
(t-t_0)^{\mu}\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &+ q\,(q-\Gamma)\int_{t_0}^t(\tau-t_0)^{\mu}\int_{\mathbb{R}^n}|u^{\varepsilon}|^{q+\alpha-2}|\nabla u^{\varepsilon}|^2\,dx\,d\tau \\
&\leq \mu\int_{t_0}^t(\tau-t_0)^{\mu-1}\|u^{\varepsilon}(.,\tau)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,d\tau, \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

onde $\Gamma = 1-\alpha+B$.
Introduzindo $w(x,t) = u^{\varepsilon}(x,t)^{\frac{q+\alpha}{2}}$, obtemos

$$
\|u^{\varepsilon}(x,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|w(x,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)},\ \text{onde } \beta = \frac{2q}{q+\alpha} \in (0,2)
$$

e

$$
\int_{\mathbb{R}^n}|u^{\varepsilon}|^{q+\alpha-2}|\nabla u^{\varepsilon}|^2\,dx = \frac{4}{(q+\alpha)^2}\|\nabla w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
$$

Reescrevendo (4.8) em termos de $w(x,t)$, temos

$$
\begin{aligned}
(t-t_0)^{\mu}\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} &+ \frac{4q\,(q-\Gamma)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^t(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \qquad (4.9) \\
&\leq \mu\int_{t_0}^t(\tau-t_0)^{\mu-1}\|w(.,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\,d\tau \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Agora, escolhemos $0 < \beta_0 < \beta$ e usamos a extensão da Desigualdade de Sobolev (ver [19]),

$$
\|\mathrm{v}\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq K(\beta_0,\beta)\,\|\mathrm{v}\|^{1-\theta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla\mathrm{v}\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)},
$$

onde $\theta \in (0,1)$ é dado por $\theta = \frac{\frac{1}{\beta_0}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta_0}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$.

Então, obtemos

$$
\mu\int_{t_0}^t(\tau-t_0)^{\mu-1}\|w(.,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}d\tau \leq \mu\int_{t_0}^t(\tau-t_0)^{\mu-1}K_0(\beta)^{\beta}\|w(.,\tau)\|^{\beta\cdot(1-\theta)}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\beta\cdot\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau
$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder e o principio do máximo, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \mu\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^{\mu-1}\|w(.,\tau)\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}^{\beta}d\tau \\
\leq\ & \mu\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^{\mu-1}K_0(\beta)^{\beta}\|w(.,\tau)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot(1-\theta)}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot\theta}\,d\tau \\
\leq\ & \mu K_0(\beta)^{\beta}\|w(.,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot(1-\theta)}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu\left(1-\frac{\beta\theta}{2}\right)-1}\left((\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right)^{\frac{\beta\theta}{2}}d\tau \\
\leq\ & \mu\,\mathbb{K}^{\beta}\|w(.,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot(1-\theta)}\left(\int_{t_0}^{t}\left((\tau-t_0)^{\mu\left(\frac{2-\beta\theta}{2}\right)-1}\right)^{\frac{2}{2-\beta\theta}}dx\right)^{\frac{2-\beta\theta}{2}} \\
& \left(\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right)^{\frac{\beta\theta}{2}},
\end{aligned}
$$

onde $\mathbb{K}=\sup\limits_{q<\beta_0<\beta<2}K(\beta,\beta_0,n)$ e μ deve ser tal que $\mu-\frac{2}{2-\beta\theta}>-1$.

Considerando $\mu=\frac{2}{2-\beta\theta}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\mu\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^{\mu-1}\|w(.,\tau)\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}^{\beta}d\tau \ \leq\ & \mu\,\mathbb{K}^{\beta}\|w(.,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot(1-\theta)}(t-t_0)^{1-\frac{\beta\theta}{2}} \\
& \left(\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\,d\tau\right)^{\frac{\beta\theta}{2}}
\end{aligned}
$$

Considere

$$
E(t)=(t-t_0)^{\mu}\|w(\cdot,t)\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}^{\beta}+\frac{4q\,(q-\Gamma)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\,d\tau
$$

Então

$$
\begin{aligned}
E(t)\ \leq\ & \mu\,\mathbb{K}^{\beta}\|w(.,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot(1-\theta)}(t-t_0)^{1-\frac{\beta\theta}{2}}\left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{\beta\theta}{2}} \\
& \left(\frac{4q\,(q-\Gamma)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\,d\tau\right)^{\frac{\beta\theta}{2}} \\
\leq\ & \mu\,\mathbb{K}^{\beta}\|w(.,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot(1-\theta)}(t-t_0)^{1-\frac{\beta\theta}{2}}\left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{\beta\theta}{2}}E(t)^{\frac{\beta\theta}{2}}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
E(t)\leq\mu^{\mu}\,\mathbb{K}^{\beta\cdot\mu}\|w(.,t_0)\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\cdot(1-\theta)\cdot\mu}(t-t_0)\left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{\beta\theta}{2}\cdot\mu}. \tag{4.11}
$$

Em particular

$$\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \mu^{\mu}\,\mathbb{K}^{\beta\cdot\mu}\|w(.,t_0)\|^{\beta\cdot(1-\theta)\cdot\mu}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-(\mu-1)}\left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{\beta\theta}{2}\cdot\mu}. \quad (4.12)$$

Agora devemos voltar a função original $u^{\varepsilon}(x,t)$.
Primeiro note que

$$\begin{aligned}\|w(.,t_0)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}} &= \int_{\mathbb{R}^n}|w(\cdot,t_0)|^{\beta_0}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}|u^{\varepsilon}(\cdot,t_0)|^{\beta_0\cdot\frac{q+\alpha}{2}}\,dx \quad (4.13)\\ &= \|u^{\varepsilon}(\cdot,t_0)\|^{\beta_0\cdot\frac{q+\alpha}{2}}_{L^{\beta_0\cdot\frac{q+\alpha}{2}}}.\end{aligned}$$

Então é conveniente tormarmos $\beta_0 \in (0,\beta)$ tal que $\beta_0 \cdot \frac{q+\alpha}{2} = \frac{q}{2}$, i.é, $\beta_0 = \frac{q}{q+\alpha}$.

Desta forma obtemos $\|w(.,t_0)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}} = \|u^{\varepsilon}(.,t_0)\|^{\frac{q}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}$ e podemos estimar $\|u^{\varepsilon}(.,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u^{\varepsilon}(.,t_0)\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}$.

Então de (4.12) e (4.13)

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|^{q}_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \ \mu^{\mu}\ \ \mathbb{K}^{\beta\cdot\mu}\ \|u^{\varepsilon}(.,t_0)\|^{\frac{q}{2}\frac{1}{\beta_0}\cdot\beta\cdot(1-\theta)\cdot\mu}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-(\mu-1)}\left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{\beta\theta}{2}\cdot\mu},$$

onde $\theta = \frac{nq+n\alpha}{(n+2)\,q+2n\alpha}$, $\quad 1-\theta = \frac{nq}{(n+2)\,q+2n\alpha}\quad$ e $\mu = \frac{(n+2)\,q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}$.
Assim, obtemos

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A(q)^{\frac{1}{q}}\ \|u^{\varepsilon}(.,t_0)\|^{\frac{2q+n\alpha}{2(q+n\alpha)}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}\ (t-t_0)^{-\frac{n}{2q+n\alpha}}, \quad (4.14)$$

onde $A(q) = \left(\frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}\right)^{\frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}} \cdot \mathbb{K}^{\frac{q}{q+\alpha}\cdot\frac{(n+2)q+2n\alpha}{q+n\alpha}} \cdot \left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{nq}{22q+2n\alpha}}$.

Agora, usando uma iteração do tipo Moser, nós mostraremos nossa principal estimativa, a saber

$$\begin{aligned}\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} &\leq K(p_0,\alpha,n)\|\,u^{\varepsilon}_0\|^{\frac{2p_0}{2p_0+n\alpha}}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\ t^{-\frac{n}{2p_0+n\alpha}},\ \text{onde} \quad (4.15)\\ K(p_0,\alpha,n) &= \left[\prod_{j=1}^{n}A(2^jp_0)^{\frac{1}{2p_0+\frac{n\alpha}{2}}}\right]\cdot 2^{\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j2^jp_0}{(2^jp_0+n\alpha)(2^jp_0+\frac{n\alpha}{2})}}\end{aligned}$$

Para provar isto, seja $t > 0$ fixo no que segue.

Considere $0 < t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{k-1}^{(k)} < t_k^{(k)}$, com

$$t_k^{(k)} = t, \quad t_{k-1}^{(k)} = t_k^{(k)} - \theta_k^{(k)}.t, \quad t_{k-2}^{(k)} = t_{k-1}^{(k)} - \theta_{k-1}^{(k)}.t, \ldots, t_0^{(k)} = t_1^{(k)} - \theta_1^{(k)}.t.$$

onde $\theta_1^{(k)}, \ ,\theta_2^{(k)}, \ldots, \theta_k^{(k)} > 0$, satisfaz:

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \theta_j^{(k)} \leq 1$

(2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \theta_j^{(k)} = 1$

Por conveniência tomemos $\theta_j^{(k)} = 2^{-j}; \ \ 1 \leq j \leq k$.

Vamos aplicar a desigualdade (4.14) sucessivamente para

$$q \ = \ 2^k p_0, \ t_0 = t_{k-1}^{(k)}, \quad q = 2^{k-1} p_0, \ t_0 = t_{k-2}^{(k)}, \quad q = 2^{k-2} p_0, \ t_0 = t_{k-3}^{(k)}, \ldots$$

e desta forma estimar $\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2^k p_0}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u^\varepsilon(\cdot, t_{k-1}^{(k)})\|_{L^{2^{k-1}p_0}(\mathbb{R}^n)}$ e $\|u^\varepsilon(\cdot, t_{k-1}^{(k)})\|_{L^{2^{k-1}p_0}(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u^\varepsilon(\cdot, t_{k-2}^{(k)})\|_{L^{2^{k-2}p_0}(\mathbb{R}^n)}$, etc.

Então

$$\begin{aligned}
&\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2^k p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq A(2^k p_0)^{\frac{1}{2^k p_0}} \|u^\varepsilon(.,t_{k-1}^{(k)})\|_{L^{2^{k-1}p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2^k p_0 + \frac{n\alpha}{2}}{2^k p_0 + n\alpha)}} (t_k^{(k)} - t_{k-1}^{(k)})^{-\frac{\frac{n}{2}}{2^k p_0 + n\alpha}} \\
&\text{e} \\
&\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2^{k-1} p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq A(2^{k-1} p_0)^{\frac{1}{2^{k-1} p_0}} \|u^\varepsilon(.,t_{k-2}^{(k)})\|_{L^{2^{k-2}p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2^{k-1} p_0 + \frac{n\alpha}{2}}{2^{k-1} p_0 + n\alpha)}} (t_{k-1}^{(k)} - t_{k-2}^{(k)})^{-\frac{\frac{n}{2}}{2^{k-1} p_0 + n\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

De (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2^k p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq & A(2^k p_0)^{\frac{1}{2^k p_0}} \cdot A(2^{k-1} p_0)^{\frac{1}{2^{k-1} p_0}} \cdot \frac{2^k p_0 + \frac{n\alpha}{2}}{2^k p_{0+n\alpha}} (t_k^{(k)} - t_{k-1}^{(k)})^{-\frac{\frac{n}{2}}{2^k p_0 + n\alpha}} \\
& (t_{k-1}^{(k)} - t_{k-2}^{(k)})^{-\frac{\frac{n}{2}}{2^{k-1} p_0 + n\alpha} \cdot \frac{2^k p_0 + \frac{n\alpha}{2}}{2^k p_0 + n\alpha}} \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2^{k-2}p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2^k p_0 + \frac{n\alpha}{2}}{2^k p_{0+n\alpha}} \cdot \frac{2^{k-1} p_0 + \frac{n\alpha}{2}}{2^{k-1} p_{0+n\alpha}}}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Procedento desta forma até atingirmos o ponto $t_0^{(k)} = 2^{-k}t$, chegamos a seguinte estimativa

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2^k p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\prod_{j=1}^{k} A(2^j p_0)^{\frac{1}{2^j p_0 + \frac{n\alpha}{2}}}\right]^{\frac{p_0+n\alpha 2^{-k-1}}{p_0}}$$

$$\left[\prod_{j=1}^{k}(t_j^{(k)} - t_{j-1}^{(k)})^{\frac{1}{2^j p_0+\frac{n\alpha}{2}}\cdot\frac{2^j}{2^j p_0 + n\alpha}}\right]^{-\frac{n}{2}(p_0+n\alpha 2^{-k-1})} \|u^\varepsilon(\cdot,2^{-k}t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0+n\alpha 2^{-k-1}}{p_0+\frac{n\alpha}{2}}}$$

Lembrando que $t_j^{(k)} - t_{j-1}^{(k)} = 2^{-j}t$, $\;2^{-k}t = t_0$ e observando que

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{2^j}{(2^j p_0 + n\alpha)(2^j p_0 + \frac{n\alpha}{2})} = \frac{2}{n\alpha}\left(\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}p_0+n\alpha} - \frac{2}{2p_0+n\alpha}\right), \text{ obtemos}$$

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^{2^k p_0}(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\prod_{j=1}^{k} A(2^j p_0)^{\frac{1}{2^j p_0+\frac{n\alpha}{2}}}\right]^{\frac{p_0+n\alpha 2^{-k-1}}{p_0}} \cdot 2^{-\frac{n}{2}\left(p_0+\frac{n\alpha}{2^{K+1}}\right)\sum_{j=1}^{k}\frac{j2^j}{(2^j p_0+n\alpha)(2^j p_0+\frac{n\alpha}{2})}}$$

$$t^{-\frac{n}{2}\left(p_0+\frac{n\alpha}{2^{K+1}}\right)\cdot\frac{2}{n\alpha p_0}\left(\frac{2^{k+1}p_0}{2^{k+1}p_0+n\alpha}-\frac{2p_0}{2p_0+n\alpha}\right)}\|u^\varepsilon(\cdot,t_0)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p_0+n\alpha 2^{-k-1}}{p_0+\frac{n\alpha}{2}}}, \ \forall\, k \geq 1. \tag{4.18}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (4.18), tem-se

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; & \left[\prod_{j=1}^{\infty} A(2^j p_0)^{\frac{1}{2^j p_0+\frac{n\alpha}{2}}}\right] \cdot 2^{-\frac{np_0}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j2^j}{(2^j p_0+n\alpha)(2^j p_0+\frac{n\alpha}{2})}} \\ & t^{-\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{2p_0}{2p_0+n\alpha}\right)}\|u^\varepsilon(\cdot,0)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2p_0}{2p_0+n\alpha}}\end{aligned}$$

, i.e. ,

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \;&\leq\; K(p_0,\alpha,n)\, t^{-\frac{n}{2p_0+n\alpha}}\,\|u_0^\varepsilon\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2p_0}{2p_0+n\alpha}} \ \ \forall\ t>0, \text{ onde} \\ K(p_0,\alpha,n) \;&=\; \left[\prod_{j=1}^{\infty} A(2^j p_0)^{\frac{1}{2^j p_0+\frac{n\alpha}{2}}}\right]\cdot 2^{-\frac{np_0}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j2^j}{(2^j p_0+n\alpha)(2^j p_0+\frac{n\alpha}{2})}},\end{aligned}$$

onde nós assumimos que $p_0 \geq 1-\alpha+B$. Isto mostra (4.7) neste caso. Finalmente, quando $p_0 < 1-\alpha+B$, nós redefinimos p_0 como sendo $p_0 := 1-\alpha+B$ e repetimos a analise acima para este novo p_0. $\square$

4.2 Estimativa para soluções fracas limitadas caso n-dimensional ($\lambda = \alpha - 1$)

Nesta seção vamos estimar as soluções $u(\cdot,t)$ limitadas (com ou sem sinal) do problema

$$\begin{cases} u_t = |u|^\alpha \triangle u + b(x,t)\,|u|^{\alpha-1}|\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq t_0 > 0 \\ \\ u(.,0) \ = \ u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p_{_0} < \infty, \end{cases} \tag{4.19}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.
Primeiramete vamos estudar o caso em que as soluções $u(\cdot,t)$ são não negativas.
Seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha \Delta u + B \cdot |u^\varepsilon|^{\alpha-1}|\nabla u|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > t_0 \geq 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u_0^\varepsilon \equiv u_0 + \varepsilon \mathrm{v}, \qquad (u_0 \geq 0) \end{cases} \tag{4.20}$$

onde $\alpha > 1$ e a constante B é escolhida de forma que $b(x,t) \leq B$.
A ligação entre $u^\varepsilon(\cdot,t)$ e $u(\cdot,t)$ é dada pelos resultados de comparação, Lema (3.4) e Teorema (4.4).

Teorema 4.4 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada não negativa do problema* (4.19)*, e seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema* (4.20)*, onde $B \in \mathbb{R}$ é tal que $b(x,t) \leq B$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Então temos (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário): $u(\cdot,t) \leq u^\varepsilon(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ e em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$.*

Prova. Sejam as funções P, ψ e ψ_ε definidas em (3.15), (3.16) e (3.17), trocando γ por B.
A mostrar:

$$\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle\, dt \leq K \int_0^T\!\!\int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))\langle \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x)\rangle dx\, dt, \tag{4.21}$$

para algum $K \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle u_t, \psi\rangle &= -\alpha \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u|^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha} \langle \nabla u, \nabla \left(H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\right)\rangle \, dx \\
&+ \int_{|x|<R} b(x,t)\, u(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u|^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&= \int_{|x|<R} (b(x,t) - B)\, u(\cdot,t)^{B-1}\, |\nabla u|^2\, H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla(P(u)), \nabla \zeta_R(x)\rangle \, dx \\
&- \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) \langle \nabla(P(u)), \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon))\rangle \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u^\varepsilon_t, \psi_\varepsilon\rangle &= (B-\alpha) \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u^\varepsilon|^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u^\varepsilon(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\, dx \\
&- \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha} \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla \left(H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u^\varepsilon(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta_R(x)\right)\rangle \, dx \\
&= -\int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla(P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x)\rangle \, dx \\
&- \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) \langle \nabla(P(u^\varepsilon)), \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon))\rangle \, dx
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u^\varepsilon_t, \psi_\varepsilon\rangle \, dt &= \int_0^T \int_{|x|<R} (b(x,t) - B) u^{B-1} |\nabla u|^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) |\nabla(P(u) - P(u^\varepsilon))|^2 \, dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x)\rangle \, dx\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{|x|<R} (b(x,t) - B)\, u^{B-1} |\nabla u|^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x)\rangle \, dx\, dt
\end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u^\varepsilon_t, \psi_\varepsilon\rangle \, dt \leq -\int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x)\rangle dx\, dt,$$

ja que $b(x,t) - B \leq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$

Então, segue diretamente do Lema (3.4), que

$$u(\cdot,t) \leq u^{\varepsilon}(\cdot,t) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

$\square$

Assim para cada $t > 0$ e $\varepsilon > 0$, obtemos $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, o seguinte resultado segue diretamente dos Teoremas (4.2) e (4.3).

Teorema 4.5 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada não negativa do problema (4.19). Então, (redefinindo $u(x,t)$ num conjunto de medida zero no tempo se necessário), temos que*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|\, u_0 \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$, $B = \sup\{b(x,t) :\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ e $K > 0$ é uma constante que independe de u_0, $u(\cdot,t)$, depende somente de p_0, α, B, n.

Vamos agora novamente concentrar nossa atenção para as soluções $u(\cdot,t)$ com sinal do problema (4.19).

Dado $\varepsilon > 0$, seja agora $u^\varepsilon(\cdot,t)$ a solução clássica positiva do problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha \triangle u^\varepsilon + \Gamma \cdot |u^\varepsilon|^{\alpha-1}|\nabla u^\varepsilon|^2 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u_0^\varepsilon \equiv |u_0| + \varepsilon v, \end{cases} \tag{4.22}$$

onde $\Gamma = \|\, b\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ e , como antes, $v \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ é uma função arbitraria positiva. Seja $u(\cdot,t)$ solução não negativa do problema (4.19).

Defino $\mathrm{w} := -u$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_t &= -u_t = -|u|^\alpha \triangle u - b(x,t)|u|^{\alpha-1}|\nabla u|^2 = |u|^\alpha \triangle(-u) - b(x,t)|u|^{\alpha-1}|\nabla u|^2 \\ &= |\mathrm{w}|^\alpha \triangle \mathrm{w} - b(x,t)|\mathrm{w}|^{\alpha-1}|\nabla \mathrm{w}|^2 = |\mathrm{w}|^\alpha \triangle \mathrm{w} + \widehat{b}(x,t)|\mathrm{w}|^{\alpha-1}|\nabla \mathrm{w}|^2, \end{aligned}$$

onde $\widehat{b}(x,t) = -b(x,t)$.
Como $|b(x,t)| \leq \Gamma$ usando o mesmo argumento estabelecido no Teorema (4.4) acima, temos que $u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t)$ e $-u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t)$ para q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$ e q.t.p $t > 0$.
Desta forma o seguinte principio de comparação é obtido.

Teorema 4.6 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada do problema (4.19), e seja $u^\varepsilon(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (4.22), onde $\Gamma \geq 0$ é tal que , $|b(x,t)| \leq \Gamma$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Então, (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário): $|u(\cdot,t)| \leq u^\varepsilon(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ e em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$.*

Como os Teoremas 4.2 e 4.3 são validos para $u^\varepsilon(\cdot,t)$ com B sendo substituido por Γ, nós obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\,|\,u_0\,| + \varepsilon\, v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|\,|\,u_0\,|\, + \varepsilon\, v\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$ e $K > 0$ é uma constante que depende somente de p_0, α, n, Γ. Fazendo $\varepsilon \to 0$, nós obtemos nosso resultado principal

Teorema 4.7 *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução limitada do problema (4.19). Então, (redefinindo $u(x,t)$ num conjunto de medida zero no tempo se necessário), temos que*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|\,u_0\,\|_{L^\kappa(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}}\, t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$, $\Gamma = \|\,b\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ é uma constante que depende de p_0, α, n, Γ.

4.3 Estimativa para soluções clássicas positivas no caso n-dimensional ($\lambda > \alpha - 1$)

Nesta seção vamos continuar a analise do problema de valor inicial (4.1) considerando agora $\lambda > \alpha - 1$. Novamente torna-se conveniente considerarmos primeiro o caso das soluções não negativas. Os argumentos usados para provar as estimativas desta seção, são praticamente os mesmos da seção anterior, mas alguns resultados a mais serão obtidos. Começaremos nossa analise com a seguinte propriedade.

Teorema 4.8 *Dado $T_* > 0$, seja $v(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ uma solução arbitrária positiva do problema* (4.1) *com estado inicial $v(\cdot,0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $0 < p_0 < \infty$. Então temos*

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|v(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, 0 < t < T_*,$$

em particular, $v(\cdot,t)$ é globalmente definida, i.e., podemos sempre assumir que $T_* = \infty$.

Prova. Sejam $B(T)$ e $M(T)$ tais que $b(x,t) \leq B(T)$ e $\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < t < T$.
Primeiramente, vamos supor $q < \infty$.
Multiplicando a equação $v_t = |v|^\alpha \Delta v + b(x,t) \cdot |v|^\lambda |\nabla v|^2$ por $q\, v^{q-1}\, \zeta_R(x)$, onde $\zeta_R(x)$ é a função de corte definida no Teorema 4.2 e integrando o resultado em $[0,t] \times \mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<R} \zeta_R(x) v(x,t)^q\, dx &= \int_{|x|<R} \zeta_R(x) v(x,0)^q\, dx \\
&- q \int_0^t \int_{|x|<R} (q+\alpha-1) v(x,\tau)^{q+\alpha-2} \zeta_R(x) |\nabla v|^2\, dx\, d\tau \\
&- q \int_0^t \int_{|x|<R} v(x,\tau)^{q+\alpha-1} \langle \nabla v, \nabla \zeta_R(x) \rangle\, dx\, d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\quad q\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}\zeta_R(x)\,b(x,t)\,v(x,\tau)^{\lambda+q-1}|\nabla v|^2\,dx\,d\tau\\
&\leq\quad \int_{|x|<R}\zeta_R(x)v(x,0)^q\,dx\\
&-\quad q\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}(q+\alpha-1)v(x,\tau)^{q+\alpha-2}\zeta_R(x)|\nabla v|^2\,dx\,d\tau\\
&-\quad \frac{q}{q+\alpha}\int_0^t\int_{|x|=R}v(x,\tau)^{q+\alpha}\frac{\partial\zeta_R(x)}{\partial n}\,d\sigma(x)\,d\tau\\
&+\quad \frac{q}{q+\alpha}\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}v(x,\tau)^{q+\alpha}\triangle\zeta_R(x)\,dx\,d\tau\\
&+\quad q\,M(T)^{\lambda-\alpha+1}B(T)_+\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}\zeta_R(x)\,v(x,\tau)^{q+\alpha-2}|\nabla v|^2\,dx\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|<R}\zeta_R(x)v(x,t)^q\,dx+q(q-\Gamma_0)\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}v(x,\tau)^{q+\alpha-2}\zeta_R(x)|\nabla v|^2\,dx\,d\tau\\
\leq\ &\int_{|x|<R}\zeta_R(x)v(x,0)^q\,dx+\frac{q}{q+\alpha}\int_{t_0}^t\int_{|x|=R}v(x,\tau)^{q+\alpha}|\nabla\zeta_R(x)\cdot n|\,d\sigma(x)\,d\tau\\
+\ &\frac{q}{q+\alpha}\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}v(x,\tau)^{q+\alpha}|\triangle\zeta_R(x)|\,dx\,d\tau\leq\int_{|x|<R}\zeta_R(x)v(x,0)^q\,dx\\
+\ &\frac{q}{q+\alpha}M(T)^{q+\alpha}\,T\,R^{n-1}\,n\,\omega_n\varepsilon\,e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}+qM(T)^\alpha\,n\,\varepsilon\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}v(x,\tau)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\,d\tau,
\end{aligned}
$$

onde $\Gamma_0=1-\alpha+B(T)_+\,M(T)^{\lambda-\alpha+1},\ B(T)_+=\max\{0,B(T)\}$.

Então para $q\ \geq\ \max\{p_{_0},\Gamma_0\}$

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|<R}\zeta_R(x)v(x,t)^q\,dx\leq\int_{|x|<R}\zeta_R(x)v(x,0)^q\,dx\\
+\quad &M(T)^{q+\alpha}\,T\,R^{n-1}\,n\,\omega_n\varepsilon\ e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}+q\,M(T)^\alpha\,n\,\varepsilon\int_0^t\!\!\int_{|x|<R}v(x,\tau)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\,d\tau,
\end{aligned}
$$

para todo $R>0$ e $\varepsilon>0$. Fazendo $R\to\infty$ e usando o Teorema da Convergencia Monotona, chegamos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}v(x,t)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}v_0(x)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\\
+\quad &qM(T)^\alpha\,n\,\varepsilon\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}^n}v(x,\tau)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\,dx\,d\tau
\end{aligned}
$$

Então, obtemos

$$\mathrm{U}(t) \leq A + B\,\mathrm{U}(\tau), \text{ onde } U(t) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x,t)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx,\ B = q\, M(T)^\alpha\, n\,\varepsilon$$
$$\text{e } A = \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx. \tag{4.23}$$

Logo, pelo Lema de Growall

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x,t)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} v_0(x)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\; e^{M(T)^\alpha\, q\, n\, \varepsilon} \quad \forall\, t > 0$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e usando o Teorema da Convergencia Monotona, temos que

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|v_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Fazendo $q \to \infty$

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Agora podemos proceder de forma similar ao caso $\lambda = \alpha - 1$: dada uma solução não negativa $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}([0,\infty), H^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$ do problema (4.1), fixamos uma função positiva (arbitrária) w $\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ e tomando $\varepsilon > 0$, definimos $u^\varepsilon(\cdot,t)$ como sendo a solução clássica positiva do problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t = |u^\varepsilon|^\alpha \triangle u^\varepsilon + \Gamma_0 \cdot |u^\varepsilon|^{\alpha-1} |\nabla u^\varepsilon|^2 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u^\varepsilon_0 \equiv |u_0| + \varepsilon v, \end{cases} \tag{4.24}$$

onde $\Gamma_0 = B_+ \cdot \|u_0\|^{\lambda-\alpha+1}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $B = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n,\, t>0} b(x,t)$ e $B_+ = \max\{0, B\}$.

Pelos Teoremas 4.2 e 4.3 da seção anterior, temos que

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u^\varepsilon(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{4.25}$$

e

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u^\varepsilon_0\|^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}}_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}\; t^{\frac{-n}{2\kappa+n\alpha}}, \tag{4.26}$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1 - \alpha + \Gamma_0\}$ e $K > 0$ é uma constante que depende apenas de p_0, α, Γ_0 e n.

4.4 Estimativas para soluções fracas limitadas no caso n-dimensional ($\lambda > \alpha - 1$)

Nesta seção vamos estimar as soluções fracas limitadas (com ou sem sinal) do problema.

$$\begin{cases} u_t = |u|^{\alpha} \triangle u + b(x,t)|u|^{\lambda}|\nabla u|^2 \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ \\ u(.,0) \; = \; u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad 0 < p_0 < \infty \end{cases} \tag{4.27}$$

onde $\alpha > 1$ e $\lambda > \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

Primeiramente, vamos considerar as soluções $u(\cdot,t)$ não negativas do problema (4.27).
Seja $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (4.24), então obtemos o seguinte resultado de comparação.

Teorema 4.9 *Seja $\lambda > \alpha - 1$, $u(\cdot,t)$ solução limitada não negativa do problema (4.27) e $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (4.24). Então temos (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário): $u(\cdot,t) \leq u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ para todo $t > 0$ e em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$.*

Prova. Sejam as funções P, ψ e ψ_{ε} definidas em (3.15), (3.16) e (3.17), com γ_0 no lugar de γ A mostrar:

$$\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^{\varepsilon}, \psi_{\varepsilon}\rangle \, dt \leq K \int_0^T \int_{|x|<R} H_{\delta}(P(u) - P(u^{\varepsilon}))\langle \nabla(P(u) - P(u^{\varepsilon})), \nabla(\zeta_R(x))\, dx\, dt,$$

para algum $K \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle u_t, \psi \rangle &= -\alpha \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u|^2 \, H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{\Gamma_0 - \alpha} \cdot \zeta_R(x) \, dx \\
&- \int_{|x|<R} u(x,t)^{\alpha} \langle \nabla u, \nabla (H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))) \cdot u(x,t)^{\Gamma_0 - \alpha} \cdot \zeta_R(x)) \rangle \, dx \\
&+ \int_{|x|<R} b(x,t) u(x,t)^{\lambda} |\nabla u|^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u(x,t)^{\Gamma_0 - \alpha} \cdot \zeta_R(x) \, dx, \\
&= \int_{|x|<R} (b(x,t) u(x,t)^{\lambda - \alpha + 1} - \Gamma_0) \, |\nabla u|^2 \, u(x,t)^{\Gamma_0 - 1} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) \, dx \\
&- \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla (P(u)), \nabla (\zeta_R(x)) \rangle \, dx \\
&- \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) \langle (P(u)), \nabla (P(u) - P(u^\varepsilon)) \rangle \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon \rangle &= (B - \alpha) \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha-1} |\nabla u^\varepsilon|^2 H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u^\varepsilon(x,t)^{B - \alpha} \cdot \zeta_R(x) \, dx \\
&- \int_{|x|<R} u^\varepsilon(x,t)^{\alpha} \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla (H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot u^\varepsilon(x,t)^{B - \alpha} \cdot \zeta_R(x)) \rangle \, dx \\
&= -\int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla (P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x) \rangle \, dx \\
&- \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) \langle \nabla (P(u^\varepsilon)), \nabla (P(u) - P(u^\varepsilon)) \rangle \, dx
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_t, \psi \rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon \rangle \, dt &= \int_0^T \int_{|x|<R} (b(x,t) u^{\lambda - \alpha + 1} - \Gamma_0) \, |\nabla u|^2 \, u^{\Gamma_0 - 1} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) dx \, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H'_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) |\nabla (P(u) - P(u^\varepsilon))|^2 \, dx \, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla (P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x) \rangle \, dx \, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{|x|<R} (b(x,t) u^{\lambda - \alpha + 1} - \Gamma_0) \, |\nabla u|^2 \, u^{\Gamma_0 - 1} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \cdot \zeta_R(x) dx \, dt \\
&- \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla (P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x) \rangle \, dx \, dt
\end{aligned}$$

Como $\Gamma_0 = B_+ \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\lambda - \alpha + 1}$, $B = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n,\, t>0} b(x,t)$ e $B_+ = \max\{0, B\}$., temos que $b(x,t) u^{\lambda - \alpha + 1} - \Gamma_0 \leq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}^n, \; t > 0.$

Logo

$$\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle \, dt \le - \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon)) \langle \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla \zeta_R(x)\rangle dx \, dt.$$

Então, segue diretamente do Lema (3.4), que

$$u(\cdot, t) \le u^\varepsilon(\cdot, t) \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0.$$

$\square$

Assim segue que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ para cada $t > 0$ e $\varepsilon > 0$. Então, fazendo $\varepsilon \to 0$, o resultado seguinte é imediatamente obtido de (4.25), (4.26) acima.

Teorema 4.10 *Seja $\lambda > \alpha - 1$ e $u(\cdot, t)$ uma solução não negativa do problema (4.27). Então (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo, se necessário), temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \ t > t_0 \ge 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le K \cdot \| \, u_0 \, \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \, t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall \ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0, 1 - \alpha + \Gamma_0\}$ *e* $\Gamma_0 = \mathcal{B}_+ \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\lambda-\alpha+1}$, $\mathcal{B} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \, t>0} b(x,t)$.

Vamos agora voltar nossa atenção para as soluções com sinal $u(\cdot,t)$ do problema (4.27) e para a solução $u^\varepsilon(\cdot,t)$ positiva do problema parabólico regularizado

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = |u^\varepsilon|^\alpha \triangle u^\varepsilon + \Gamma \cdot |u^\varepsilon|^{\alpha-1} |\nabla u^\varepsilon|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ t > 0 \\ \\ u^\varepsilon(.,0) = u_0^\varepsilon \equiv |u_0| + \varepsilon \mathrm{w}, \end{cases} \tag{4.28}$$

onde $\Gamma = B \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\lambda-\alpha+1}$, $B = \| \, b \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)} = \sup\{|b(x,t|) : x \in \mathbb{R}^n, \, t > 0\}$ e onde, como antes, $\mathrm{w} \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ é uma função positiva com $\mathrm{w}(x) \ge c\,|x|^{-\delta}$ para certas constantes $c > 0$, $\delta > 0$ e $|x| \gg 1$.

Defino $\mathrm{v} := -u$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_t &= -u_t = -|u|^\alpha \triangle u - b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2 = |u|^\alpha \triangle(-u) - b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2 \\ &= |\mathrm{v}|^\alpha \triangle \mathrm{v} - b(x,t)|\mathrm{v}|^\lambda |\nabla \mathrm{v}|^2 = |\mathrm{v}|^\alpha \triangle \mathrm{v}, + \widehat{b}(x,t)|\mathrm{v}|^\lambda |\nabla \mathrm{v}|^2, \end{aligned}$$

onde $\widehat{b}(x,t) = -b(x,t)$.
Como $|b(x,t)| \leq \Gamma$, temos que $\widehat{b}(x,t) \leq \Gamma$, assim usando o mesmo argumento estabelecido no Teorema 4.9, temos que $-u(x,t) \leq u^{\varepsilon}(x,t)$, para q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$ (e q.t.p $t > 0$). Desta forma o seguinte principio de comparação é obtido.

Teorema 4.11 *Seja $\lambda > \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução arbitrária limitada do problema (4.27), e seja $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ solução clássica positiva do problema (4.28). Então (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo, se necessário) para todo $t > 0$: $|u(x,t)| \leq u^{\varepsilon}(x,t)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Em particular, temos $\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}$ para todo $t > 0$, e , como (4.25) e (4.26) são validos para $u^{\varepsilon}(\cdot,t)$ trocando Γ_0 por Γ, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \| \, |u_0| + \varepsilon \mathrm{w}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \| \, |u_0| + \varepsilon \mathrm{w}\|_{L^{\kappa}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \, t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}},$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$ e $K > 0$ é uma constante que depende apenas de p_0, n, α, Γ. Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos o seguinte resultado fundamental sobre soluções fracas limitadas do problema (4.27).

Teorema 4.12 *Seja $\lambda > \alpha - 1$ e $u(\cdot,t)$ uma solução arbitrária limitada do problema (4.27). Então (redefinindo $u(\cdot,t)$ em um conjunto de medida zero no tempo, se necesário),temos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u_0\|_{L^{\kappa}(\mathbb{R})}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \, t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}},$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+\Gamma\}$, $\Gamma = \boldsymbol{B} \cdot \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}^{\lambda-\alpha+1}$, $\boldsymbol{B} = \| \, b \, \|_{L^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ é uma constante que não depende de u_0 ne de $u(\cdot,t)$, depende apenas de p_0, n, α, Γ.

4.5 Soluções com suporte compacto

Vamos concluir este capítulo com algumas observações sobre o caso especial de soluções com suporte compacto. Se $\lambda = \alpha - 1$, $b(x,t) = \gamma > \alpha/2 - 1$, γ constante, pode-se encontrar soluções autossimilares da forma [2, 7]

Proposição 4.13 *Seja $A > 0$. Então a função abaixo é solução do problema (4.27):*

$$v(x,t) = (t+t_0)^{\frac{-n}{2(\widetilde{\gamma}-\alpha+1)+n\alpha}} \left(A - \frac{\alpha}{2(\widetilde{\gamma}-\alpha+1)+n\alpha} \frac{|x+x_0|}{(t+t_0)^{\frac{2(\widetilde{\gamma}-\alpha+1)}{2(\widetilde{\gamma}-\alpha+1)+n\alpha}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

para todo $t_0 \geq 0$, todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $A > 0$.

Prova: Vamos construir soluções autossimilares da equação

$$u_t = \mu \triangle (u^\eta). \tag{4.29}$$

Seja $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função suave com suporte compacto.

Precisamos encontrar soluções da forma $u(x,t) = t^{-\sigma} U\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$, para algum $\sigma > 0$ e $\beta > 0$ que satisfaça a equação (4.29).
Como u conserva massa,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = t^{-\sigma} \int_R^n U\left(\frac{x}{t^\beta}\right) dx = C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

Assim $t^{-\sigma+n\beta} \int_{\mathbb{R}^n} U(\xi)d\xi = C$, onde $\xi = \frac{x}{t^\beta}$.

Para que essa equação não dependa do tempo, devemos ter $\sigma = n\beta$.

Além disso U deve satisfazer

$$t^{-\sigma-1}(-\sigma U - \beta\xi\nabla_\xi U) = \mu t^{-\sigma\eta-2\beta} \eta \triangle_\xi (U^\eta).$$

Então $\beta = \frac{1}{2+n(\eta-1)}$.
Assim a função U satisfaz a EDP Eliptica degenerada

$$\mu(\triangle_\xi U^\eta) + \sigma U + \beta\xi\nabla_\xi U = 0.$$

Vamos supor que U seja uma função radial, isto é, $U(\xi) = w(r)$, onde $r = |\xi|$. Então, obtemos a seguinte EDO

$$\mu(w_{rr}^{\eta} + \left(\frac{n-1}{r}\right)(w^{\eta})_r) + n\beta w + \beta r w'(r) = 0,$$

cuja solução é $w(r) = \left(A - \frac{\beta(\eta-1)}{2\mu\eta} r^2\right)_+^{\frac{1}{\eta-1}}$, onde $A = (\eta - 1)K$ e K é a constante de integração obtida quando integramos a EDO em relação a variável r.

Agora se v é solução do problema (4.27), então $u = v^{\gamma-\alpha+1}$ é solução do problema $u_t = \left(\frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma+1}\right) \triangle(u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-\alpha+1}})$.

Assim substituindo μ por $\frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma+1}$ e η por $\frac{\gamma+1}{\gamma-\alpha+1}$, obtemos que

$$v(x,t) = (t+t_0)^{\frac{-n}{2(\gamma-\alpha+1)+n\alpha}} \left(A - \frac{\alpha}{2(\gamma-\alpha+1)+n\alpha} \frac{|x-x_0|}{(t+t_0)^{\frac{2(\gamma-\alpha+1)}{2(\gamma-\alpha+1)+n\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

é solução do problema (4.27). □

Apêndice

Definição 5.1 *(funções sinais regularizadas): Seja $S \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ definida por*

$$S(v) \;=\; \begin{cases} 1 & se\ v \geq 1; \\ 0 & se\ v = 0; \\ -1 & se\ v \leq -1, \qquad continua\ em\ \mathbb{R}^n\ e\ crecente\ em\ (-1,1). \end{cases} \tag{5.1}$$

Considere para cada $\delta > 0$ a função $S_\delta(v) = S\left(\frac{v}{\delta}\right)$.
Defino

$$L_\delta(v) = \int_0^v S_\delta(w)dw. \tag{5.2}$$

Teorema 5.2 *Para todo $0 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$*

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq G_0 \|w\|^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R})} \|w_x\|^{\theta}_{L^q(\mathbb{R})} \;\; \forall \;\; w \in L^p(\mathbb{R}) \; tal\ que\ w_x \in L^q(\mathbb{R}),$$

onde $\theta = \frac{1}{1+p.(1-\frac{1}{q})}$, $G_0 = (2\theta)^{-\theta}$.

Prova: Considere $1 < q < \infty$.
Na demonstração desse Teorema vamos fazer uso das funções sinais regularizadas definidas em (5.1).
Como L_δ é a integral de uma função $\mathcal{C}^1$ podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo. Dado $\widehat{x} \in \mathbb{R}$, $s > 1$ temos para cada $\delta > 0$

$$\begin{aligned} L_\delta(w(\widehat{x}))^s - \underbrace{L_\delta(w(-\infty))^s}_{L_\delta(0)=0} &= \int_{-\infty}^{\widehat{x}} \frac{d}{dx} L_\delta(w(\widehat{x}))^s \\ &= \int_{-\infty}^{\widehat{x}} s\ L_\delta(w(x))^{s-1} L'_\delta(w(x)) w_x\, dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\widehat{x}} s\ L_\delta(w(x))^{s-1} |L'_\delta(w(x))|\ |w_x|\, dx \end{aligned}$$

e analogamente

$$
\begin{aligned}
-(\underbrace{L_\delta(w(\infty))^s}_{L_\delta(0)=0} - L_\delta(w(\widehat{x}))^s) = - \int_{\widehat{x}}^{\infty} \frac{d}{dx} L_\delta(w(\widehat{x}))^s \\
&= -\int_{\widehat{x}}^{\infty} s\, L_\delta(w(x))^{s-1} L'_\delta(w(x)) w_x \, dx \\
&\leq \int_{\widehat{x}}^{\infty} s\, L_\delta(w(x))^{s-1} |L'_\delta(w(x))| \, |w_x| \, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Fazendo } \delta \to 0, \quad L_\delta(w(\widehat{x}))^s) &\to |w(\widehat{x})|^s \text{ e} \\
L'_\delta(w(x)) &\to sgn(w),
\end{aligned}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
|w(\widehat{x})|^s &\leq s \int_{-\infty}^{\widehat{x}} |w(x)|^{s-1} |w_x| \, dx \text{ e} \\
|w(\widehat{x})|^s &\leq s \int_{\widehat{x}}^{\infty} |w(x)|^{s-1} |w_x| \, dx
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
|w(\widehat{x})|^s &\leq \frac{s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |w(x)|^{s-1} |w_x| \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|w(x)|^{s-1})^{q'} \, dx \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}} |w_x(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{onde } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \qquad \text{(Hölder)} \\
\Rightarrow |w(x)| &\leq \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \|w\|_{L^{(s-1).q'}(\mathbb{R})}^{\frac{s-1}{s}} \|w_x\|_{L^q(\mathbb{R})}^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}
$$

Tomando $s = 1 + (1 - \frac{1}{q})$ e $\theta = \frac{1}{s}$ obtemos $(s-1).q' = p$

Logo

$$
\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2\theta)^{-\theta} \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\theta} \|w_x\|_{L^q(\mathbb{R})}^{\theta} \;\; \forall\, 1 < q < +\infty
$$

Fazendo $q \to 1$ e $q \to \infty$ obtemos respectivamente

$$
\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2\theta)^{-\theta} \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\theta} \|w_x\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\theta}, \tag{5.3}
$$

$$
\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (2\theta)^{-\theta} \|w\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\theta} \|w_x\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\theta} \tag{5.4}
$$

Teorema 5.3 *Para todo* $0 < p \leq r \leq \infty$ *e* $1 \leq q \leq \infty$

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \widetilde{K}(r,p,q)\ \|w\|^{1-\widetilde{\theta}}_{L^p(\mathbb{R})}\|w_x\|^{\widetilde{\theta}}_{L^q(\mathbb{R})}\ \ \forall\ \ w \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}),\ \ onde \qquad (5.5)\\ \widetilde{\theta} &= \frac{1-\frac{p}{r}}{1+p.(1-\frac{1}{q})},\quad \widetilde{K}(r,p,q) = (2\theta)^{-\widetilde{\theta}},\quad \theta\ =\ \frac{1}{1+p.(1-\frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Prova:

$$\begin{aligned} \|w\|^r_{L^r(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |w|^{r-p+p} \ \leq\ \|w\|^{r-p}_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \qquad (5.6)\\ \Rightarrow\ \|w\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|w\|^{1-\frac{p}{r}}_{L^\infty(\mathbb{R})}\|w\|^{\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Assim usando (5.6) e o Teorema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \Big((2\theta)^{-\theta}\|w\|^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R})}\|w_x\|^{\theta}_{L^q(\mathbb{R})}\Big)^{1-\frac{p}{r}}\ \|w\|^{\frac{p}{r}}_{L^p(\mathbb{R})}\\ &= (2\theta)^{-\theta-\frac{p\theta}{r}}\|w\|^{1-\theta+\frac{p\theta}{r}}_{L^p(\mathbb{R})}\|w_x\|^{\theta-\frac{p\theta}{r}}_{L^q(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq (2\theta)^{\widetilde{\theta}}\|w\|^{1-\widetilde{\theta}}_{L^p(\mathbb{R})}\|w_x\|^{\widetilde{\theta}}_{L^q(\mathbb{R})}\ \ \forall\ \ w \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}),\ \text{onde}\\ \widetilde{\theta} &= \theta - \frac{p\theta}{r}\ =\ \frac{1-\frac{p}{r}}{1+p.(1-\frac{1}{q})} \end{aligned}$$

Teorema 5.4 *(Desigualdade de Gangliardo-Nirenberg-Sobolev)*
Para todo $1 < p \leq r \leq \infty$ *e* $1 \leq s \leq \infty$

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &\leq C(r,p,q)\ \|w\|^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w\|^{\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\ \ \forall\ \ w \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R}^n), \qquad (5.7)\\ onde\ \ \frac{1}{r} &= \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{s^*}\ \ e\ \ s^* = \frac{ns}{n-s} \end{aligned}$$

Observação 5.1 *Este resultado vale mais geralmente para* $0 < p \leq r \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ *(ver [19], pp).*

Teorema 5.5 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *tal que* $\mu(E) > 0$ *e seja* $f \in L^1(E)$ *com* $\int_E f(x)\, d\mu(x) \leq M$.

Então existe um $x \in E$ *tal que* $f(x) \leq \dfrac{M}{\mu(E)}$ *Mais geralmente existe* $G \subseteq E$ (5.8)

com $\mu(G) > 0$ *tal que* $f(x) \leq \dfrac{M}{\mu(E)}$ $\forall\ x \in G$.

Teorema 5.6 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, *mensurável,* $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ q_0 \leq q < \infty$ *com* $\limsup_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(E)} < \infty$.

Então

(i) $u \in L^\infty(E)$,

(ii) $\exists \lim_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(E)} = \|u\|_{L^\infty(E)}$.

Teorema 5.7 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in L^{q_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Então

(i) $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ q \geq q_0$,

(ii) $\|u\|_{L^\infty(E)} = \lim_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(E)}$.

Lema 5.8 *(M. Bertsch e M. Ughi) Com as notações dadas no Capitulo 2, se* γ *for tal que*

$$\langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle \leq K \int_{|x|<R} H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))\langle \nabla(P(u) - P(u^\varepsilon)), \nabla\zeta_R(x)\rangle\, dx,$$

para todo $0 < t < T_*$ *e para algum* $K \in \mathbb{R}$, *então (redefinindo* $u(x,t)$ *num conjunto de medida zero no tempo se necessário)*

$$u(x,t) \leq u^\varepsilon(x,t), \quad \forall\ 0 < t < T_*.$$

Prova. Tome $0 < T < T^*$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle\, dt &= \int_0^T \int_{|x|<R} \left[u_t \cdot H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))u(x,t)^{\tilde{\gamma}-\alpha}\zeta_R(x)\, dx\right]\, dt \\
&= \int\int_{B_R\times[0,T]} f(u)_t H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))\zeta_R(x)\, dx\, dt,
\end{aligned}$$

onde f é definida de maneira que $f'(u) = u^{\gamma-\alpha},\ u > 0$.
Assim

$$f(\mathrm{u}) \;=\; \begin{cases} \frac{\mathrm{u}^{\gamma-\alpha+1}}{\gamma-\alpha+1} & \text{se } \gamma \neq \alpha - 1; \\ ln\,\mathrm{u} & \text{se } \gamma = \alpha - 1. \end{cases}$$

Seja $\mathrm{v} = f(\mathrm{u})$ e $g : D_g = Im_f \to \mathbb{R}_+$, tal que $\mathrm{u} = g(\mathrm{v})$, $\mathrm{u} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{v} = f(\mathrm{u})$, $\mathrm{u} > 0$, onde D_g denota o dominio da função g e Im_f denota a imagem da função f.

Defino $v(x,t) = f(u(x,t))$ e $v^\varepsilon(x,t) = f(u^\varepsilon(x,t))$.
Seja $\phi : D_g \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(\mathrm{v}) = P(\mathrm{u})$ se $\mathrm{v} = f(\mathrm{u})$ ou $\mathrm{u} = g(\mathrm{v})$, isto é, $\phi(\mathrm{v}) = P(g(\mathrm{v})),\ \ \forall\ \mathrm{v} \in D_g$.
Então

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle\, dt &= \int\!\!\int_{B_R\times[0,T]} (f(u)_t - f(u^\varepsilon)_t) H_\delta(P(u) - P(u^\varepsilon))\zeta_R(x)\, dx\, dt \\ &= \int\!\!\int_{B_R\times[0,T]} (v - v^\varepsilon)_t H_\delta(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))\zeta_R(x)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int_{v_0}^{v(x,t)} H_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\, dz &= H_\delta\left(\phi(v(x,t)) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\right)\, v_t \\ &+ \int_{v_0}^{v(x,t)} H_\delta'(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\, dz\, \phi'(v^\varepsilon)\, v_t^\varepsilon. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} H_\delta\left(\phi(v(x,t)) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\right)\, v_t &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{v_0}^{v(x,t)} H_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\, dz \\ &- \int_{v_0}^{v(x,t)} H_\delta'(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\, dz\ \phi'(v^\varepsilon)\, v_t^\varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento, temos que

$$\begin{aligned} H_\delta\left(\phi(v(x,t)) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\right)\, v_t^\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{v_0}^{v^\varepsilon(x,t)} H_\delta(\phi(v_0) - \phi(z)\, dz \\ &- \int_{v_0}^{v(x,t)} H_\delta'(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\, dz\ \phi'(z)\, v_t^\varepsilon. \end{aligned}$$

Substituindo estas ultimas igualdades em (5.9) e usando Fubbini, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle \, dt = \\
-\ &\int\int_{B_R\times[0,T]} \zeta_R(x) \left[\int_{v_0}^{v(x,t)} H'_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))(\phi'(z) - \phi'(v^\varepsilon)\, dz \right] v_t^\varepsilon \, dt\, dx \\
+\ &\int_{|x|<R} \zeta_R(x) \left[\int_{v_0}^{v(x,T)} H_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))\, dz - \int_{v_0}^{v^\varepsilon(x,T)} H_\delta(\phi(v_0) - \phi(z)\, dz \right] dx \\
-\ &\int_{|x|<R} \zeta_R(x) \left[\int_{v_0}^{v(x,0)} H_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,0))\, dz - \int_{v_0}^{v^\varepsilon(x,0)} H_\delta(\phi(v_0) - \phi(z)\, dz \right] dx
\end{aligned}
$$

Defino

$$
\mathbb{F}_\delta(v, v^\varepsilon) := \int_{v_0}^{v(x,t)} H_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon)\, dz - \int_{v_0}^{v^\varepsilon(x,t)} H_\delta(\phi(v_0) - \phi(z)\, dz.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \langle u_t, \psi\rangle - \langle u_t^\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle \, dt = \\
&\int_{|x|<R} \zeta_R(x) \left[\mathbb{F}_\delta(v(x,T), v^\varepsilon(x,T)) - \mathbb{F}_\delta(v(x,0), v^\varepsilon(x,0)) \right] dx \\
-\ &\int\int_{B_R\times[0,T]} \zeta_R(x) \left[\int_{v_0}^{v(x,t)} H'_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))(\phi'(z) - \phi'(v^\varepsilon)\, dz \right] v_t^\varepsilon \, dt\, dx
\end{aligned}
$$

Defino as seguintes funções

$$
\begin{aligned}
G_\delta(v, v^\varepsilon) &:= \int_{v_0}^{v(x,t)} H'_\delta(\phi(z) - \phi(v^\varepsilon(x,t))(\phi'(z) - \phi'(v^\varepsilon)\, dz, \\
S_\delta(w) &:= \int_0^w H_\delta(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Assim, pela hipótese do Lema

$$\begin{aligned}
&- \int\int_{B_R\times[0,T]} \zeta_R(x) G_\delta(v(x,t), v^\varepsilon(x,t))\, v_t^\varepsilon \, dx\, dt \\
&+ \int_{|x|<R} \zeta_R(x) \left[\mathbb{F}_\delta(v(x,T), v^\varepsilon(x,T)) - \mathbb{F}_\delta(v(x,0), v^\varepsilon(x,0))\right] dx \\
&\leq K \int_0^T \int_{|x|<R} H_\delta(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))\, \nabla(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon)) \nabla\zeta_R(x)\, dx\, dt \\
&= K \int_0^T \int_{|x|<R} \langle \nabla S_\delta(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon)), \nabla\zeta_R(x)\rangle \, dx\, dt \\
&= -K \int_0^T \int_{|x|<R} S_\delta(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon)) \triangle\zeta_R(x)\, dx\, dt \\
&+ K \int_0^T \left[\int_{|x|=R} S_\delta(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon)) \nabla\zeta_R(x) \overrightarrow{n}(x)\, d\sigma(x)\right] dt
\end{aligned}$$

Entao fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|<R} (v(x,T) - v^\varepsilon(x,T))_+ \, \zeta_R(x)\, dx \\
&\leq -K \int_0^T \int_{|x|<R} (\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))_+ \triangle\zeta_R(x)\, dx\, dt \\
&+ K \int_0^T \left[\int_{|x|=R} (\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))_+ \nabla\zeta_R(x) \overrightarrow{n}(x)\, d\sigma(x)\right] dt \\
&\leq |K| \int_0^T \int_{|x|<R} (\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))_+ \, n\, e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\, dt \\
&+ |K| \int_0^T \left[\int_{|x|=R} (\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))_+ \, c\, e^{-\sqrt{1+R^2}} |\overrightarrow{n}(x)|\, d\sigma(x)\right] dt
\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (v(x,T) - v^\varepsilon(x,T))_+ \, e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx \leq |K| \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} (\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))_+ \, n\, e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\, dt \tag{5.10}$$

Observação 5.2 *Observe que o lado direito da desigualdade (*5.10*) é finito. De fato,*

(i) nos pontos onde $u \leq u^\varepsilon$ *temos* $(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))_+ = (P(u) - P(u^\varepsilon)_+ = 0$*;*

(ii) nos pontos onde $u > u^\varepsilon$*, como* $u_0^\varepsilon = u_0 + \varepsilon \mathrm{v}$*, onde* $\mathrm{v}(x) \geq c\,|x|^{-\sigma}$*, temos*

que $u^\varepsilon(x,t) \geq C(T)|x|^{-\sigma}$. *Desta forma*

$$u(x,t) \geq C(T)|x|^{-\sigma}. \tag{5.11}$$

Pelo Teorema do Valor Médio

$$(\phi(v) - \phi(v^\varepsilon))_+ = (P(u) - P(u^\varepsilon)_+ = P'(\xi)|u - u^\varepsilon| = \xi^\gamma M.$$

Se $\gamma > 0$ *temos o resultado.*

Se $\gamma < 0$, *então usando (*5.11*)*

$$\xi^\gamma M \leq \left(C(T)|x|^{-\sigma}\right)^\gamma = C(T)|x|^{\sigma|\gamma|}M \leq C(T)R^{\sigma|\gamma|}M.$$

Note que quando $R \to \infty$, $e^{-\sqrt{1+|x|^2}} \to 0$, *mais rápido do que* $C(T)R^{\sigma|\gamma|}M \to \infty$. *Logo temos o resultado também neste caso.*

Então de (5.10), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (v(x,T) - v^\varepsilon(x,T))_+ \, e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx \;&\leq\; |K| \int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^n} |\phi'(\xi)|(v - v^\varepsilon)_+ \, n \, e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\, dt \\ &\leq\; |K|nM \int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^n} (v - v^\varepsilon)_+ e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx\, dt\end{aligned}$$

Defino

$$W(T) := \int_{\mathbb{R}^n} (v(x,T) - v^\varepsilon(x,T))_+ \, e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx.$$

Então

$$W(T) \leq 0 + \mathbb{K} \int_0^T W(t)\, dt, \text{ onde } \mathbb{K} = |K|nM$$

Pelo Lema de Growall

$$0 \leq W(T) \leq 0 \cdot e^{\mathbb{K}T} = 0 \qquad \forall \;\, 0 < T < T^*.$$

Assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} (v(x,T) - v^\varepsilon(x,T))_+ \, e^{-\sqrt{1+|x|^2}}\, dx = 0 \Rightarrow (v(x,T) - v^\varepsilon(x,T))_+ \, e^{-\sqrt{1+|x|^2}} = 0.$$

Logo

$$v(x,t) \leq v^{\varepsilon}(x,t) \text{ em } q.t.p \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $v = f(u)$, obtemos

$$u(x,t) \leq u^{\varepsilon}(x,t) \text{ em } q.t.p \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] M. Agueh, Sharp Gagliardo-Nirenberg inequalities and mass transport theory, *J. Dynam. Diff. Equations*, **18** (2006), 1069 – 1093.

[2] S. Angenent, Large time asymptotics for the porous media equation, `in:` W. M. Ni, L. A. Peletier and J. Serrin (Eds.), *Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States I*, Springer, New York, 1988, pp. 21 – 34.

[3] M. Bertsch, R. Dal Passo and M. Ughi, Discontinuous viscosity solutions of a degenerate parabolic equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **320** (1990), 779 – 798.

[4] M. Bertsch, R. Dal Passo and M. Ughi, Nonuniqueness of solutions of a degenerate parabolic equation, *Annali Mat. Pura Appl.*, **161** (1992), 57 – 81.

[5] M. Bertsch and M. Ughi, Positivity properties of viscosity solutions of a degenerate parabolic equation, *Nonlinear Anal. TMA*, **14** (1990), 571 – 592.

[6] P. Braz e Silva and P. R. Zingano, Some asymptotic properties for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations with Cauchy data in $L^p(\mathbb{R})$, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **342** (2006), 465 – 467.

[7] V. C. Brum, On some degenerate nonlinear diffusion problems and *a priori* estimates (in Portuguese), PhD Thesis, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, 2011.

[8] V. C. Brum, M. V. Ferreira and P. R. Zingano, Supnorm estimates for nonnegative bounded solutions of a one-dimensional degenerate diffusion equation not in divergence form (submitted).

[9] R. Dal Passo and S. Luckhaus, A degenerate diffusion problem not in divergence form, *J. Diff. Eqns.*, **69** (1987), 1 – 14.

[10] A. M. Ilin, A. S. Kalashnikov and O. A. Oleinik, Second order linear equations of parabolic type, *Russ. Math. Surv.*, **17** (1962), 1 – 143.

[11] A. S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations, *Russ. Math. Surv.*, **42** (1987), 169 – 222.

[12] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[13] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[14] O. A. Oleinik and S. N. Kruzhkov, Quasilinear second-order parabolic equations with many independent variables, *Russ. Math. Surv.*, **16** (1961), 105 – 146.

[15] M. Ughi, A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic, *Annali Mat. Pura Appl.*, **143** (1986), 385 – 400.

[16] J. L. Vázquez, The porous medium equation: mathematical theory, Clarendon Press, Oxford, 2007.

[17] P. R. Zingano, Nonlinear L^2 stability under large disturbances, *Journal Comp. Appl. Math.*, **103** (1999), 207 – 219.

[18] P. R. Zingano, Some elementary Gagliardo-Nirenberg inequalities in one dimension, available in: http://www.mat.ufrgs.br/∼zingano.

[19] L. Nirenberg, On elliptic partial diferential equations, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.*, **13** (1359), 115 – 162.