UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Desempenho do modelo estocástico de média-variância para o mercado brasileiro de ações.

Autor: Henrique Helfer Hoeltgebaum
Orientador: Professor Dr. Flávio Augusto Ziegelmann
Co-Orientador: Professor Dr. Tiago Pascoal Filomena

Porto Alegre, 06 de Dezembro de 2011.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Departamento de Estatística

Desempenho do modelo estocástico de média-variância para o mercado brasileiro de ações.

Autor: Henrique Helfer Hoeltgebaum

Monografia apresentada para obtenção
do grau de Bacharel em Estatística.

Banca Examinadora:
Professor Dr. Flávio Augusto Ziegelmann
Professor Dr. Tiago Pascoal Filomena
Professor Dr. Denis Borenstein

Porto Alegre, 06 de Dezembro de 2011.

Dedico este trabalho à minha família, a qual constantemente se faz presente em cada dia de minha vida.

“Stay Hungry, Stay Foolish”
Steve Jobs (1955-2011)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Elizabel Helfer Hoeltgebaum e Emílio Henrique Hoeltgebaum, e a minha irmã, Laura Helfer Hoeltgebaum, que me deram sempre todo o apoio que necessitei ao longo desses 22 anos de vida e que apesar da distância sempre se fizeram presentes de alguma maneira especial, me dando o apoio necessário para seguir em frente.

Agradeço a Deus por estar ao meu lado em todos os dias de minha vida.

Agradeço também a minha namorada, Adriana Ribeiro Schuchowsky que me incentivou e compreendeu minha ausência causada pelos estudos.

Agradeço aos professores Flávio Augusto Ziegelmann e Tiago Pascal Filomena por terem aceitado me orientar neste trabalho e pela amizade formada durante a realização do mesmo.

Agradeço ao professor Denis Borenstein pela oportunidade de bolsa cedida e ter aceitado o convite de fazer parte da banca.

E finalmente, porém não menos importante, agradeço aos meus amigos e colegas que estiveram ao meu lado ao longo do curso e que de alguma maneira se fizeram presente em minha vida.

Sumário

Resumo 1
Abstract 1
1. Introdução 2
2. Modelagem 4
3. Aproximação determinística 6
4. Performance no mercado brasileiro 8
4.1. Coleta dos dados 8
4.2. Avaliações no mercado brasileiro de ações 8
4.3. Discussão dos resultados 9
5. Conclusões 14
6. Bibliografia 16

Esta monografia será descrita em forma de artigo e será submetida a "REVISTA BRASILEIRA DE FINANÇAS".

Desempenho do modelo estocástico de média-variância para o mercado brasileiro de ações.

Henrique Helfer Hoeltgebaum[1]
Flávio Augusto Ziegelmann[2]
Tiago Pascal Filomena[3]

Resumo

Os modelos de otimização de carteira de investimento têm ganhado atenção desde o trabalho de média-variância proposto por Markowitz (1952). Esta análise propõe um mecanismo para seleção de um portfólio de ativos, de modo que o investidor leve em consideração o *trade-off* entre retorno versus risco (Cornuejóls e Tütüncü, 2007). Neste trabalho, são aplicados dois modelos de otimização de portfólio no mercado brasileiro de ações: Markowitz (1952) e a versão probabilística proposta por Bonami e Lejeune (2009) e reformulada por Filomena e Lejeune (2011a). Os dados utilizados serão preços de fechamento semanais. Para verificar o desempenho dos dois modelos, serão estudados retorno, volatilidade e índice Sharpe. Ênfase é dada na validação do modelo reformulado, o qual apresenta bons resultados nas previsões para 24 semanas posteriores ao período usado para otimização. Também discute-se sobre a limitação do uso do mesmo, visto que este encontra uma solução viável em apenas 12,5% das vezes entre 05 de janeiro de 2007 e 26 de agosto de 2011.

Palavras-chave: Engenharia econômica, finanças, modelos de otimização de portfólio, Markowitz.

Código JEL: C61; G11

Abstract

Portfolio optimization models have earned attention since Markowitz`s work in mean-variance (Markowitz, 1952). This analysis provides a mechanism for the selection of portfolio of securities, in a manner that the investor trades off expected return and risk (Cornuejóls e Tütüncü, 2007). In this paper, two portfolio optimization models are applied to the Brazilian stock market; Markowitz (1952) and probabilistic version proposed by Bonami and Lejeune (2009) reformulated by Filomena and Lejeune (2011a). The data used refers to quotations of weekly closing prices. To verify the performance the two models are evaluated by the following parameters: Return, volatility and Sharpe-ratio. Emphasis is placed on validation of reformulated model which produces good results in predictions for 24 weeks after the period used for optimization . Also it is discussed the issue of its limiting use since this is feasible only 12.5% times between January 5, 2007 and August 26, 2011.

Key-words: Engineering economics, finance, portfolio optimization models, Markowitz.

JEL codes: C61; G11

[1] Departamento de Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
[2] Departamento de Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
[3] Escola de Administração, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

1. Introdução

Os modelos de otimização de carteira de investimento têm ganhado atenção desde o trabalho de média-variância proposto por Markowitz (1952), que propõe um mecanismo para seleção de um portfólio de ativos de modo que o investidor leve em consideração o *trade-off* entre retorno versus risco (Cornuejóls e Tütüncü, 2007). Segundo Zenios (2008), em análise de média-variância estuda-se o desempenho de portfólios em um espaço de retorno versus risco, onde o retorno é medido pela taxa de retorno esperado do portfólio, e o risco é medido pela variância da taxa de retorno do portfólio. O principal objetivo desta análise é formar portfólios eficientes de ativos com risco mínimo e que garantam um retorno mínimo requerido denominado de *target*. Um portfólio é denominado eficiente se este tem um retorno esperado máximo entre todos os portfólios formados com a mesma variância, ou, alternativamente, se este tem a menor variância entre todos os portfólios que tem pelo menos um determinado nível de retorno esperado (Cornuejóls e Tütüncü, 2007). A coleção de portfólios eficientes para dado nível de risco forma a fronteira eficiente, a qual é obtida ao resolver-se diversas vezes o problema de média-variância para diferentes níveis de retorno alvo. No presente estudo o nível de retorno alvo, ou *target*, será fixado inviabilizando a construção da fronteira.

O modelo clássico de Markowitz, denominado aqui de **MKW**, continua sendo amplamente discutido na literatura (Corazza e Favaretto, 2007; Cornuejóls e Tütüncü, 2007; Dentcheva e Ruszczynski, 2006; Li et al., 2006; Scherer e Martin, 2005, são exemplos). Uma das críticas é de que o modelo concentra muito a alocação de alguns ativos no portfólio. Outra crítica freqüente ao modelo é que este considera que o retorno esperado dos ativos e a matriz de variância-covariância são perfeitamente conhecidos, tratando-os como parâmetros determinísticos, além de tomar os retornos médios dos ativos como os verdadeiros retornos esperados. Os dados que devem ser disponibilizados ao modelo de média-variância são respectivamente os retornos esperados dos ativos e a matriz de variâncias-covariâncias dos retornos dos ativos. Porém obter estimativas precisas destes parâmetros é algo complicado nos mercados financeiros. No presente trabalho estas estimações são realizadas a partir de dados históricos. Existem inúmeras fontes de erro que afetam essa estimação, conduzindo ao chamado risco de estimação (Bawa et. al. 1979) em seleção de portfólios. De fato, o risco de estimação tem se mostrado um fator de decisões errôneas, pois, como assinalaram vários estudos empíricos (Broadie, 1993; Ceria e Stubbs, 2006; Merton, 1980; Chopra e Ziemba, 1993), o modelo ótimo de média-variância é extremamente sensível à estimação dos retornos dos ativos, mais inclusive do que à estimação da matriz de variância-covariância. Ou seja, pequenas variações na estimativa do retorno esperado dos ativos podem levar a uma grande reformulação do portfólio com ativos distintos e a uma relação de grande rotatividade de ativos ao longo dos períodos (Ceria e Stubbs, 2006; Cornuejóls e Tütüncü, 2007).

Portanto, existe a necessidade de formular um modelo que não seja afetado por pequenas perturbações nos momentos do retorno estimado e nos estados do mercado, pois a incerteza existente no mercado e a instabilidade do modelo **MKW** dificulta sua utilização na prática (Tütüncü e Koenig, 2004). Uma nova formulação do modelo clássico de **MKW** é necessária, levando em consideração a incerteza associada com a estimação do retorno esperado. Para isso, inicialmente assume-se que o estimador para o retorno esperado é estocástico e caracterizado por uma distribuição de probabilidade qualquer na qual são considerados o primeiro e o segundo momento. Visto que existe uma probabilidade de se obter um retorno esperado extremo em séries financeiras, não há garantia de que estes sejam normalmente distribuídos. É aplicada, no mercado brasileiro de ações, a versão probabilística do modelo de **MKW** proposto por Bonami e Lejeune (2009) e reformulado por Filomena e Lejeune (2011a), no qual não há necessidade dos retornos serem normalmente distribuídos e o conhecimento incompleto do comportamento do retorno é tomado em conta pela modelagem do retorno médio do ativo como uma variável aleatória, atrelando assim incerteza na estimação do retorno esperado dos ativos objetivando a diminuição da sensibilidade do portfólio à estimativa do retorno esperado.

O presente trabalho foca na validação do modelo alternativo reformulado por Filomena e Lejeune (2011a). É dada ênfase a incerteza atrelada à estimação do retorno esperado, assumindo-se que este seja estocástico e caracterizado por uma distribuição de probabilidade e não somente pelo primeiro momento de uma distribuição normal. O modelo alternativo ao **MKW** proposto será denominado de Portfólio Estocástico (**PE**) e é constituído substituindo a restrição clássica que garante o retorno da carteira $(\mu^T w \geq R)$ por uma restrição probabilística que garante o retorno da carteira com certa probabilidade *p*, adicionando-se assim aleatoriedade ao modelo clássico de **MKW**. Ao adicionarmos essa restrição, o problema **PE** se torna da classe de programação estocástica com restrição probabilística (Birge e Louveaux, 1997), os quais são, em geral, mais complexos que os modelos de programação matemática determinísticos, como o modelo clássico de **MKW**. Neste tipo de problema, em geral, é necessária a derivação de um determinístico equivalente para que este possa ser resolvido numericamente. Este será denominado de Portfólio Estocástico Reformulado (**PER**). Maiores detalhes deste modelo serão discutidos na Seção 3.

O objetivo deste trabalho é avaliar o desempenho do modelo **PER** utilizando dados de preço de fechamento semanais do mercado brasileiro de ações. Também é estudada a estratégia de assumir que a média da distribuição de probabilidade dos retornos é um bom estimador para o futuro retorno, ou seja, o modelo de **MKW**. Para cumprir os objetivos serão utilizados os resultados de avaliações feitas com ambos os modelos de otimização, utilizando-se dados de fechamento semanal dos ativos que constaram no IBRX-50 na data de 23 de Agosto de 2011. Essas avaliações serão posteriormente detalhadas na Seção 4, mas em essência, com os resultados destas, os modelos de otimização de portfólio no mercado brasileiro de ações serão avaliados a partir de 3 métricas (retorno, volatilidade e índice Sharpe) e comparados com *benchmarks* de mercado, IBRX-50 e IBOVESPA.

Os resultados do modelo **PER** são promissores e o classificam como uma ferramenta gerencial de portfólio para médio/longo prazo, visto que este encontra melhores resultados quando estimado para 12 e 24 semanas. A média dos retornos é superior à do modelo **MKW** e à dos *benchmarks* utilizados. Sendo a média dos retornos ajustados ao risco (índice Sharpe) do modelo **PER**, em geral, superiores ao índice Sharpe dos benchmarks de mercado e indefinido quanto ao modelo **MKW**. No entanto, o modelo **PER** apresenta certas limitações e desempenha respostas viáveis em apenas 12,5% dos casos em que fora utilizado. O que também pode ser interpretado positivamente como pontos de entrada e saída do mercado. Durante o artigo, são apresentadas alternativas de fácil implementação para viabilizar o funcionamento do modelo para mais períodos. São apresentados os portfólios formados por ambos os modelos e, conforme descrito na literatura e referenciado anteriormente, o modelo **MKW** aloca indevidamente altas proporções de investimento em alguns ativos que fazem parte do portfólio, o que não acontece com o modelo **PER**.

Na próxima seção é introduzido o modelo **PER** e, em seguida, sua aproximação determinística. A aplicação no mercado brasileiro é apresentada na seção 4. Questão de performance dos modelos, diversificação de portfólio e particularidades do modelo **PER** estão na seção 4. As conclusões estão na seção 5.

2. Modelagem

Em sua forma mais básica, o modelo de otimização de média-variância determina a proporção ideal de alocação de capital no j-ésimo ativo contido no portfólio, denotado por w_j. Claramente para satisfazer a propriedade de portfólio eficiente, a restrição

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

deve ser colocada no modelo (Zenios, 2008). Caso não seja restringido no modelo que as proporções de alocação devam ser necessariamente positivas, $w_j \geq 0$, o modelo irá se utilizar de vendas a descoberto (*short-sales).* Essa técnica é considerada arriscada e o potencial de perda dessa é ilimitado; alguns fundos evitam seu uso (Zenios, 2008) e devido a isso, em ambos os modelos utilizados neste trabalho a técnica não será utilizada. Em modelos de otimização de portfólio o retorno é medido pela taxa de retorno esperado do portfólio, e o risco é medido pela variância da taxa de retorno do portfólio. Sendo assim será utilizada a expressão retorno para taxas de retorno.

Para estimar o retorno esperado de um portfólio é necessário o retorno esperado individual dos ativos que compõem o portfólio. O retorno, ou simplesmente retorno individual do ativo j no período i, denotado por $r_{i,j}$ é,

$$r_{i,j} = \frac{preço_i - preço_{i-1}}{preço_{i-1}}.$$

Com isso, o retorno esperado do ativo j seria,

$$\bar{\mu}_j = E(\xi_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_{i,j}}{m}.$$

Define-se ainda um o vetor transposto contendo os retornos esperados dos n ativos, μ^T, conforme descrito,

$$\mu^T = [\bar{\mu}_1 \quad \cdots \quad \bar{\mu}_n].$$

Suponha que seja formado um portfólio com n ativos usando as ponderações w_j. O retorno esperado do portfólio é encontrado tomando a soma ponderada do valor esperado dos retornos individuais dos ativos conforme descrito,

$$\bar{\mu} = E(\xi) = \mu^T w = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{\mu}_j.$$

Represente a variância do retorno do ativo i por σ_i^2, a variância do retorno do portfólio por σ^2 e a covariância do retorno do ativo i com o ativo j por σ_{ij}. A variância amostral do retorno nos modelos de otimização propostos no artigo é calculada conforme a seguir:

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = w^T \Sigma w.$$

Essas noções iniciais apresentadas se fazem necessárias para a apresentação dos dois modelos a seguir. O modelo clássico de média-variância de Markowitz pode ser descrito de várias maneiras (Cornuejóls e Tütüncü, 2007). No presente trabalho será utilizada a forma descrita a seguir, a qual será definida como modelo **MKW**,

$$\boldsymbol{MKW}\text{: min} \quad w^T \Sigma w \qquad (1)$$

$$Sujeito \text{ à} \qquad \mu^T w \geq R \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \qquad (3)$$

$$w_j \geq 0, j = 1, \dots, n \qquad (4)$$

onde *n* representa o número de ativos existentes no mercado, *R* é o retorno mínimo requerido (*target*), w_j é o peso do ativo j na carteira, Σ é a matriz de variância-covariância estimada e μ^T é um vetor transposto composto pelas estimativas dos retornos esperados dos *n* ativos. Note que no modelo **MKW** os retornos médios são tomados como os verdadeiros retornos esperados sem que haja qualquer penalidade atrelada. A função objetivo do modelo busca minimizar a variância do portfólio, composto pelos ativos selecionados, com a garantia de que se obtenha um retorno mínimo requerido.

O modelo alternativo proposto pode ser formulado conforme segue:

$$\boldsymbol{PE}\text{: min} \quad w^T \Sigma w \qquad (1)$$

$$Sujeito \text{ à} \quad \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j w_j \geq R\right) \geq p \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \qquad (3)$$

$$w_j \geq 0, j = 1, \dots, n \qquad (4)$$

onde ξ é um vetor aleatório composto pelas estimativas dos retornos esperados dos n ativos, p é a probabilidade com que o retorno R seja atendido. O vetor de médias e a matriz de variância-covariância são os seguintes: $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ onde $\mu_j = E(\xi_j)$ e $\Sigma = E[(\xi - \mu)(\xi - \mu)^T]$ para $j = 1, \dots, n$.

O modelo **PE**, e conseqüentemente o modelo **PER** que será descrito na Seção 3, ambos pertencem à família de risco *downside* que foca em evitar que o retorno caia abaixo de um determinado valor aceitável. Como escolher critérios para a seleção de medidas de risco é um tópico amplamente discutido na literatura, e é analisado sob diferentes ângulos e devido à variedade de critérios e objetivos, não há uma medida de risco recomendada universalmente. Nossa medida de risco é relacionada ao critério de *safety-first* de Roy (1952) que identifica como ótimo o portfólio para o qual a probabilidade do seu retorno cair abaixo de um limite mínimo aceitável é minimizada. A medida de risco de Roy é próxima do índice Sharpe (Bonami e Lejeune, 2009), o qual maximiza a relação entre retorno médio e risco do portfólio. Pelo índice de Sharpe (Sharpe, 1966) caracteriza-se o quão bem o retorno de um portfólio compensa o investidor pelo risco assumido. Quanto maior o número do índice, melhor é o indicativo para o investidor. No presente trabalho se utiliza um índice Sharpe alterado sem o ativo livre de risco, isto porque são disponibilizados apenas ativos de risco na carteira. Portanto, definimos o índice Sharpe como:

$$SR = \frac{retorno\ realizado}{volatilidade\ realizada}.$$

Na Seção 3 a seguir será apresentada uma reformulação do modelo **PE** para que este possa ser resolvido numericamente.

3. Aproximação determinística[4]

A aleatoriedade do retorno estimado dos ativos leva à existência de uma restrição probabilística descrita em (5). Devido à inclusão dessa restrição, o problema **PE** se torna da classe de programação estocástica. Nessa classe de problemas, em geral, deriva-se um determinístico equivalente para que este possa ser resolvido numericamente. As provas matemáticas dos resultados desta seção não serão apresentadas; as mesmas são encontradas em Bonami e Lejeune (2009). O equivalente determinístico da restrição probabilística é o seguinte:

$$\mathrm{\mu^T w + F^{-1}_{(w)}(1 - p)\sqrt{w^T \Sigma w} \geq R}$$

onde F é a distribuição de probabilidade acumulada do retorno da carteira padronizado (média zero e desvio padrão igual a um), e $F^{-1}_{(w)}$ a sua inversa. Com base na equação acima, buscam-se distribuições de probabilidades que tornem esta restrição cônica de segunda ordem (*second-order conic*). Segue do teorema apresentado em Bonami e Lejeune (2009) que se Σ for positiva semi-definida e se a distribuição de probabilidade de $\xi_j w_j$ for simétrica ou tiver curtose positiva, $\mathrm{F^{-1}_{(w)}(1 - p)}$ será um número não negativo, k, e o equivalente determinístico da restrição probabilística apresentado acima é uma restrição denominada cônica de segunda ordem.

[4] A seguinte Seção é discutida em Filomena e Lejeune (2011b), mas será também discutida aqui.

O resultado apresentado por Bonami e Lejeune (2009) é a restrição cônica de segunda ordem apresentada a seguir,

$$\mu^T w - k * \sqrt{w^T \Sigma w} \geq R,$$

e quando a distribuição de probabilidades é caracterizada pelos seus dois primeiros momentos, ou seja, a média e a variância, k , segundo Bonami e Lejeune (2009), é aproximado por

$$k = \sqrt{\frac{p}{1-p}}.$$

Sendo assim o modelo **PE** tomaria a seguinte forma, denominada de Portfólio Estocástico Reformulado (**PER**),

$$\boldsymbol{PER}\text{: } \min \quad w^T \Sigma\, w \qquad (1)$$

$$Sujeito \text{ à } \ \mu^T w - \sqrt{\frac{p}{1-p}} * \sqrt{w^T \Sigma w} \geq R \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \qquad (3)$$

$$w_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \qquad (4)$$

A desigualdade presente na nova restrição (6) destaca o fato de que o retorno esperado do portfólio necessário para ultrapassar o patamar de retorno *target* é aumentado por um termo de penalidade

$$\sqrt{\frac{p}{1-p}} * \sqrt{w^T \Sigma w}.$$

Agora se atenta para o fato de que o portfólio deve ter um desempenho de

$$R + \sqrt{\frac{p}{1-p}} * \sqrt{w^T \Sigma w}$$

para que o retorno *target* seja atingido com certa probabilidade *p*. Isto é um contraste com o clássico Markowitz, no qual a carteira apenas deve atingir um desempenho *R*. Caso se atribua um número que tenda a zero para *p*, estaremos novamente diante do problema **MKW**, onde o termo de penalidade apresentado acima tende a zero.

Uma das necessidades básicas para otimização deste problema é que a matriz Σ seja positiva semi-definida, propriedade que é facilmente violada quando se tenta otimizar simultaneamente o portfólio com um elevado número de ativos. Com isso Filomena e Lejeune (2011a) propuseram uma reformulação do problema que relaxa essa propriedade e ainda aumenta significativamente o desempenho computacional do problema (ver Filomena e Lejeune, 2011b).

4. Performance no mercado brasileiro

Nesta seção serão apresentadas as avaliações realizadas com os modelos **MKW** e **PER** no mercado brasileiro, descrições detalhadas dos dados, das análises e dos resultados.

4.1. Coleta dos dados

Para a coleta dos dados utilizou-se o software Economática. Através deste obtiveram-se os preços de fechamento semanal das ações negociadas na Bovespa. O preço é ajustado para dividendos e *stocks split*, com período abrangendo 01 de janeiro de 2007 a 26 de agosto de 2011. Além disso, com o objetivo de selecionar as ações mais líquidas no mercado brasileiro, utilizam-se apenas as ações que constavam no IBRX-50 na data de 23 de agosto de 2011. Sendo assim, a amostra se restringiu aos preços de fechamento semanal de 50 ativos entre 05 de janeiro de 2007 e 26 de agosto de 2011.

4.2. Avaliações no mercado brasileiro de ações

Para a realização das avaliações no mercado, os fechamentos semanais do banco de dados são divididos em períodos, os quais são compostos por 52 semanas, ou seja, 1 ano. Note que os ativos que abriram capital posteriormente ao ano de referência são utilizados apenas no ano seguinte. Desta forma, para o ano de 2007 são disponibilizados respectivamente 38 ativos para otimização; em 2008, 43; em 2009, 47 e em 2010 e 2011, 50. Para a otimização são utilizados 243 períodos no total, assim o experimento consiste no seguinte:

1. Inicialmente, selecionam-se os preços do primeiro período, que abrangem o intervalo de 5 de janeiro de 2007 até 28 de dezembro de 2007.
2. Com a definição do período de análise estima-se o retorno esperado dos ativos e a matriz de variância-covariância dos mesmos para o período. Esses dados são disponibilizados para otimização do problema com o software AMPL/CPLEX, o qual indica as ponderações que devem ser aplicadas em cada ativo no presente período para atender as respectivas restrições.
3. São utilizados os preços de 12 e 24 semanas posteriores ao período de otimização dos ativos que constam no portfólio formado pela otimização no passo 2. As ponderações indicadas pela otimização no passo 2 são aplicadas nos respectivos ativos, com a finalidade de verificar o desempenho do portfólio em 12 e 24 semanas posteriores ao período de otimização. A partir disso geram-se os três indicadores para avaliar o desempenho do portfólio formado pelos modelos **PER**, **MKW**, IBRX-50 e do IBOVESPA: retorno, volatilidade (ou risco) e índice *Sharpe*. No exemplo, faz-se uso do período da semana 1 à 52, sendo assim aplicam-se as ponderações nos ativos indicadas neste período nos preços das semanas 52 à 64 e 52 à 76.

Após finalizar o processo descrito acima de 1 a 3, passam-se 3 períodos sem análise e repete-se o processo novamente. Ou seja, após analisar o período de 1-52, analisa-se o período de 4-55 e assim analogamente até o período 190-241, que ao final compõem 64 períodos. As avaliações são realizadas em períodos de tempo que se sobrepõem, para que o modelo seja checado o maior número de vezes, procurando captar seu comportamento sob o maior número de cenários possíveis ocorridos durante esses períodos (crises, altas de mercado ou mercado estável).

4.3. Discussão dos resultados

O objetivo principal das avaliações é verificar as características dos portfólios formados em termos práticos, avaliando questões sobre o ponto de vista de um investidor. São comparados os resultados do **PER** e do **MKW** a *benchmarks* de mercado (IBRX-50 e IBOVESPA) a partir das três métricas de desempenho. Inicialmente discute-se sobre o valor do parâmetro p e suas respectivas conseqüências, a seguir sobre os portfólios formados pelos modelos, e para finalizar sobre interpretações dos resultados obtidos pelos modelos.

Sabe-se *a priori* que o mercado brasileiro de ações tem uma volatilidade mais alta do que o mercado norte americano. Dada essa informação, ao utilizarmos o modelo **PER**, devemos atentar para o fato de que, ao definir uma probabilidade p muito alta de que o retorno *target* seja atingido, isto poderá definir que a resposta do modelo seja inviável, isto é, para as dadas restrições presentes no modelo, não é encontrada uma resposta no conjunto de soluções que consiga atender a todas as restrições simultaneamente. Será definido no presente trabalho um p de 0,2 e um retorno *target* fixado de no mínimo 20% ao ano, o que equivale a um rendimento de 0,35% semanal. Portanto admite-se que exista uma probabilidade de 0,2 de que o retorno almejado de 0,35% semanal seja atendido. Com isso obtém-se do **PER**, nos 64 períodos testados, apenas 8 repostas viáveis. Porém deve-se notar que se trata do mercado de ações, o qual vem enfrentando nos últimos anos duas grandes crises (Crise Imobiliária 2008-2009 e Crise das dívidas Soberanas 2010-2011) e que está sendo disponibilizado para a formação do portfólio apenas ativos de risco. Dado isso, é improvável obter um retorno semanal maior ou igual a 0,35%. Mais improvável ainda devido à adição da penalidade definida em relação ao p, com exceção a uma grande alta de mercado, que é o que ocorre nos 8 períodos em que a resposta do modelo foi viável. Além disto, soluções não viáveis possuem uma interpretação interessante de pontos de entrada e saída do mercado. A Figura 1, evidencia a grande alavancagem nos pontos do IBOVESPA que sobem de 36.595 mil em 28 de Novembro de 2008 (período 100) a 69.421 mil em 16 de Abril de 2010 (período 172), o que representou uma alta de 89,70% do índice no período. Período no qual o modelo **PER** obteve-se resultados viáveis.

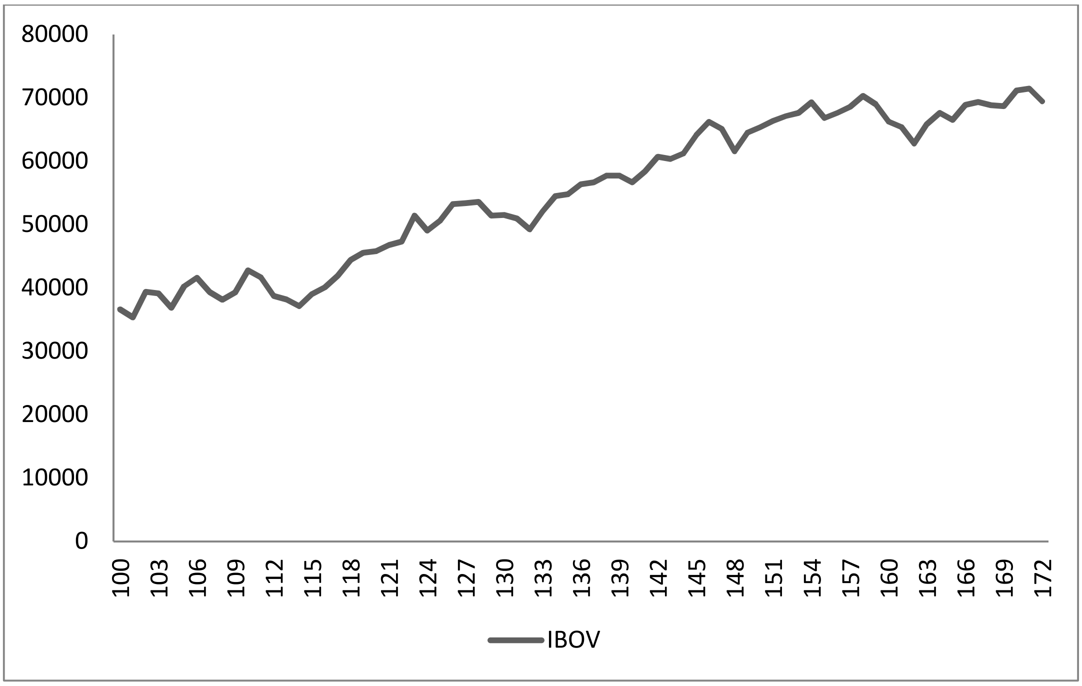

Figura 1. Pontos do IBOVESPA entre 28 de Novembro de 2008 a 16 de Abril de 2010.

Os resultados dos oito períodos testados indicam o quão "caro" é almejar um retorno *target* desta magnitude, visto que atrelado a este existe uma constante de penalidade que infla essa quantidade conforme a restrição

$$R + \sqrt{\frac{p}{1-p}} * \sqrt{w^T \Sigma w},$$

levando a resposta do modelo a ser inviável. Ou seja, o número de respostas viáveis poderia ser aumentado com a diminuição do valor do parâmetro *p*.

Considere a quantidade

$$Pe = \sqrt{\frac{p}{1-p}} * \sqrt{w^T \Sigma w},$$

na Tabela 1, temos que o retorno semanal é o retorno obtido com o portfólio selecionado pelo modelo **PER**, *R* e *Pe* são respectivamente as proporções de retorno e de penalidade da quantidade $R + Pe$. Analisando a influência de ambos no retorno do portfólio podemos concluir que à medida que o retorno diminui, a proporção da constante de penalidade também é diminuída. Um exemplo é o fato que ocorre no período 109-160, que corresponde respectivamente a 30 de janeiro de 2009 a 22 de janeiro de 2010, que tem a menor constante de penalidade atrelada, representando 2,6 vezes a proporção de retorno. Assim, o *penalty* semanal fica em 0,91%, que somado a 0,35% do retorno *target* semanal, o portfólio deve desempenhar um retorno de 1,26%. Concluindo, deve-se atentar para essa possível questão de um *trade-off* entre retorno *target* do portfólio e probabilidade de obter este retorno, pois, caso se deseje um retorno elevado com uma probabilidade alta de ser atingido, a constante de penalidade também será inflada e possivelmente o problema não será solucionado.

Tabela 1. Retorno semanal e as respectivas proporções de penalidade e retorno almejado.

Período	100-151	103-154	106-157	109-160	112-163	115-166	118-169	121-172
Retorno semanal	1,65%	1,46%	1,30%	1,26%	1,34%	1,30%	1,39%	1,46%
R	21%	24%	27%	28%	26%	27%	25%	24%
Pe	79%	76%	73%	72%	74%	73%	75%	76%

Pelos resultados obtidos com o modelo **PER**, nota-se que os portfólios formados por este ao longo desses oito períodos contemplam a questão da diversificação de setores. O portfólio formado é composto por empresas do setor telefônico, construtoras, de aviação, entre outras[5]. A Tabela 2 mostra os portfólios formados, com a respectiva participação dos ativos, formados pelo modelo **PER** nos oito períodos em que este encontra uma resposta viável. Segundo Luenberger (1998), portfólios com apenas poucos ativos podem estar sujeitos a um risco maior. A diversificação funciona como uma proteção para os investidores, visto que formando portfólios diversificados estaremos diminuindo o risco do mesmo.

Ênfase é dada na participação dos ativos, pela tabela, "NÃO" significa que o ativo não tem ponderação no portfólio. O ativo 1, por exemplo, está presente nos 8 portfólios e tem a maior média de participação nos 8 períodos, como pode ser observado pela última coluna. Já o ativo 13 obtém a menor média de participação, visto que este é selecionado apenas no portfólio formado no primeiro período. Apesar de que em média não há concentrações excessivas de ativos, todas inferiores a 20%, algumas concentrações podem ser contestadas no ponto de vista prático, pois em alguns casos há concentrações superiores a 20%.

Tabela 2. Portfólios formados e as respectivas participações dos ativos pelo modelo PER.

CÓD. ATIVO	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Média
1	6,8%	18,9%	21,4%	20,9%	25,4%	17,1%	13,6%	14,8%	17,4%
2	4,4%	3,0%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	3,7%
3	NÃO	NÃO	1,0%	1,4%	1,4%	3,7%	1,1%	3,0%	1,9%
4	6,8%	6,4%	4,3%	8,9%	3,4%	3,4%	5,2%	3,2%	5,2%
5	NÃO	8,2%	NÃO	0,9%	1,1%	NÃO	NÃO	NÃO	3,4%
6	6,1%	6,5%	0,4%	4,2%	4,4%	7,7%	7,8%	9,4%	5,8%
7	15,1%	15,9%	8,5%	9,2%	9,1%	0,1%	NÃO	NÃO	9,7%
8	9,3%	3,8%	3,1%	1,6%	1,3%	1,6%	NÃO	2,6%	3,3%
9	NÃO	NÃO	5,7%	3,0%	5,9%	8,1%	11,1%	16,5%	8,4%
10	NÃO	1,5%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	1,5%
11	NÃO	2,5%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	2,5%
12	6,7%	NÃO	NÃO	NÃO	8,8%	15,8%	18,8%	23,0%	14,6%
13	0,3%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	0,3%
14	9,7%	9,8%	7,3%	6,5%	4,3%	2,1%	3,2%	1,3%	5,5%
15	8,4%	1,9%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	1,1%	2,0%	3,3%
16	12,9%	6,6%	14,2%	12,5%	10,0%	11,2%	14,7%	7,5%	11,2%
17	NÃO	NÃO	0,2%	NÃO	NÃO	NÃO	0,8%	2,3%	1,1%
18	NÃO	9,5%	17,9%	13,1%	12,7%	7,1%	9,3%	4,3%	10,6%
19	1,5%	1,9%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	1,7%
20	NÃO	1,7%	5,0%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	3,3%
21	NÃO	NÃO	11,1%	17,9%	10,0%	16,6%	0,9%	NÃO	11,3%
22	12,1%	1,8%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	7,0%

Com o objetivo de comparação entre a concentração de alocação de ativos nos portfólios formados pelos modelos **PER** e **MKW** nesses 8 períodos, é disponibilizado pela Tabela 3 os portfólios formados por

[5] O nome das empresas foram omitidos e substituídos por nomes genéricos.

MKW, com os ativos e suas respectivas participações[6]. Conforme a crítica sobre o modelo **MKW** que consta na literatura já referenciada, a participação de alguns ativos nos portfólios formados pelo modelo é concentrada. Para ilustrar essa situação atenta-se para os portfólios 7 e 8, onde as proporções de investimento no ativo de código 16 ultrapassam uma margem de 40%, que na prática seria um resultado contestado porque o investidor racional busca diversificar seu portfólio de ações de maneira a reduzir o seu risco; essa margem de aplicação deve ser um valor menor de forma a evitar essa concentração excessiva de risco.

Tabela 3. Portfólios formados e as respectivas participações dos ativos pelo modelo MKW

CÓD. ATIVO	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Média
1	8,33%	14,84%	17,37%	15,87%	15,91%	6,09%	6,15%	13,79%	12,29%
2	5,95%	7,29%	7,01%	3,80%	4,86%	8,06%	5,62%	5,09%	5,96%
3	11,57%	7,54%	6,06%	7,24%	6,77%	6,70%	4,40%	2,88%	6,64%
4	8,88%	12,46%	7,22%	5,42%	7,67%	5,11%	8,62%	11,13%	8,31%
5	4,69%	4,82%	0,99%	3,78%	2,61%	6,29%	3,82%	3,27%	3,78%
6	18,29%	17,09%	11,72%	10,94%	12,99%	5,28%	5,32%	5,67%	10,91%
7	4,37%	3,31%	1,38%	0,52%	NÃO	0,03%	NÃO	NÃO	1,92%
8	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	0,83%	2,37%	2,04%	1,75%
9	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	4,88%	2,37%	2,83%	3,36%
10	5,73%	4,58%	3,44%	3,39%	2,75%	NÃO	0,81%	0,26%	2,99%
11	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	1,07%	0,74%	0,90%
12	0,97%	0,65%	10,18%	12,77%	14,87%	14,46%	11,87%	10,39%	9,52%
13	5,73%	2,66%	9,31%	8,22%	6,85%	3,07%	NÃO	NÃO	5,97%
14	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	1,11%	NÃO	NÃO	1,11%
15	4,22%	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	4,22%
16	21,25%	22,71%	22,83%	26,04%	24,65%	38,07%	47,57%	41,91%	30,63%
17	NÃO	2,06%	2,48%	2,01%	0,06%	NÃO	NÃO	NÃO	1,65%

O desempenho das previsões obtidas pelos portfólios formados com o modelo **PER** ao longo de 12 e 24 semanas posteriores à otimização é apresentado pela Tabela 4, onde R representa o retorno do portfólio no período, θ a volatilidade (risco) e SR o índice Sharpe.

Tabela 4. Valores dos parâmetros dos portfólios formados pelo modelo PER.

12 semanas			
Período	R	θ	SR
151-163	5,26%	2,73%	1,93
154-166	1,30%	2,55%	0,51
157-169	-2,62%	2,12%	-1,24
160-172	-4,25%	1,77%	-2,39
163-175	-1,22%	1,57%	-0,78
166-178	-0,94%	1,76%	-0,53
169-181	6,12%	2,24%	2,73
172-184	1,74%	2,69%	0,65

[6] O nome das empresas foram omitidos e substituídos por nomes genéricos.

24 semanas			
Período	R	θ	SR
151-175	-2,77%	2,39%	-1,16
154-178	-6,50%	2,23%	-2,91
157-181	2,21%	2,04%	1,08
160-184	-0,37%	1,81%	-0,20
163-187	12,11%	1,69%	7,17
166-190	11,11%	1,99%	5,59
169-193	14,07%	2,28%	6,16
172-196	21,47%	2,73%	7,86

Como os períodos de tempo se sobrepõem, não é possível concluir sobre os parâmetros conjuntamente. Todas as janelas de tempo de 52 semanas tem uma diferença de 3 semanas do próximo período, tanto no limite inferior quanto no superior, porém grande parte dos dados continua sendo a mesma. Atentando à este fato, se faz necessária a conclusão sobre estes parâmetros separadamente. Sendo assim pelo parâmetro índice Sharpe, que maximiza a relação entre retorno e volatilidade, conclui-se que a magnitude dos valores deste parâmetro quando aplicado para uma previsão de 24 semanas é superior. Isso se deve ao fato de que a magnitude dos valores dos retornos do portfólio também são altos em um maior prazo.

Acredita-se que para fins de comparação entre os modelos **PER** e **MKW** estudados neste trabalho, verificar os respectivos desempenhos das previsões estimadas para o mercado brasileiro de ações em relação aos *benchmarks* de mercado é possível. Essa comparação se dá entre a média dos parâmetros dos mesmos. Porém é inviável a conclusão sobre as médias dos parâmetros de cada modelo isoladamente, visto que os períodos estudados se sobrepõem. Os resultados podem ser observados na Tabela 5 onde $\bar{R}$ representa a média dos retornos, $\bar{\theta}$ a média da volatilidade (risco) e $\overline{SR}$ a média do índice Sharpe.

Tabela 5. Média dos parâmetros de desempenho nas oito semanas.

12 semanas	$\bar{R}$	$\bar{\theta}$	$\overline{SR}$
PER	0,67%	2,18%	0,11
MKW	0,19%	1,78%	-0,1
IBOV	-3,21%	2,92%	-1,02
IBRX-50	-3,82%	2,88%	-1,26

24 semanas	$\bar{R}$	$\bar{\theta}$	$\overline{SR}$
PER	6,42%	2,15%	2,95
MKW	5,16%	1,76%	3,02
IBOV	-3,47%	2,99%	-1,17
IBRX-50	-5,16%	2,99%	-1,75

Para os três parâmetros, são apresentadas na tabela suas respectivas médias ao longo desses 8 períodos. O valor dos retornos obtidos pelos modelos **PER** e **MKW** serem superiores ao retorno do IBOVESPA e IBRX-50 significa obter uma maior rentabilidade do que os índices de *benchmark*, já a volatilidade deve ser interpretada da forma contrária, visto que quanto maior seu valor, maior a chance de não obter o retorno. Sendo assim a volatilidade é considerada superior aos demais, caso seja menor do que os índices de *benchmark*, atrelando assim maior segurança ao investidor. O índice Sharpe deve ser interpretado de maneira análoga ao retorno, pois se tratando de um coeficiente de variação, quanto maior o seu valor, maior será o retorno e menor será a volatilidade do portfólio.

Inicialmente conclui-se que os modelos de otimização de carteira, tanto **PER** quanto **MKW** obtiveram uma média de risco menor diante dos *benchmarks* de mercado. As médias dos retornos obtidos pelo modelo **PER** são superiores aos demais em 12 e 24 semanas com as respectivas médias de risco inferiores aos de *benchmark*. Atenta-se para a grande vantagem de se utilizar o modelo **PER** ao invés do modelo **MKW** é de que **PER** fornece um indicativo de entrada no mercado. Dado que atrelado ao desempenho do portfólio existe uma constante de penalidade que irá inflar e violar a restrição fornecendo um indicativo ao investidor de não entrar no mercado de ações no período analisado. Além do que deve-se atentar aos inúmeros problemas já citados na literatura e referenciados anteriormente, em relação a utilização do modelo **MKW** na prática. Pelos resultados descritos na Tabela 5 os portfólios formados pelo modelo **PER** em longo prazo, 24 semanas, são boas ferramentas, e este pode ser classificado como uma ferramenta gerencial de carteira para a classe de ativos em questão, ativos de risco, que irá trazer rentabilidade ao investidor em um período relativamente longo (24 semanas).

Visto que o modelo **MKW** encontra soluções viáveis nos 64 períodos estudados. Realiza-se a mesma sistemática descrita na seção 4.2 e se analisa o desempenho do modelo **MKW** nas previsões para 12 e 24 semanas posteriores à otimização. Os resultados da Tabela 6 apresentam novamente a média dos retornos $\bar{R}$, a média da volatilidade (risco) $\bar{\theta}$ e a média do índice Sharpe $\overline{SR}$.

Tabela 6. Resultados do modelo MKW para 64 períodos

	12 Semanas			24 Semanas		
	$\bar{R}$	$\bar{\theta}$	$\overline{SR}$	$\bar{R}$	$\bar{\theta}$	$\overline{SR}$
MKW	2,60%	2,90%	2,12	5,3%	3,10%	4,14
IBRX-50	0,48%	3,73%	0,38	1,5%	3,95%	1,14
IBOV	0,95%	3,61%	0,57	2,7%	3,80%	1,47

Há indícios descritivamente de que a média dos retornos dos portfólios formados pelo modelo **MKW** nos 64 períodos estudados são superiores aos índices de *benchmark*. O modelo **MKW** se demonstra uma ferramenta segura, com uma média de risco inferior às de *benchmark*. No entanto, **MKW** acaba gerando portfólios muito concentrados e não fornece nenhum indicativo de entrada e saída de mercado.

5. Conclusões

Este trabalho propôs um estudo focado em termos práticos utilizando os resultados dos modelos de seleção de carteira proposto por Markowitz (1952), denominado de **MKW** e do modelo alternativo proposto por Bonami e Lejeune (2009) e reformulado por Filomena e Lejeune (2011a), denominado de **PER**. Basicamente estuda-se a performance destes no mercado brasileiro de ações, utilizando o preço de fechamento semanal dos ativos que compuseram o IBRX-50 na data de 23 de Agosto de 2011. Para a comparação de performance entre os modelos com os índices de *benchmarks*, utilizaram-se três métricas: retorno, volatilidade e índice Sharpe.

Além das limitações do modelo **MKW** discutidas demasiadamente na literatura, ao se utilizar o modelo **PER** neste trabalho pode-se constatar também algumas de suas limitações, já que quando aplicado no mercado brasileiro de ações, este gerou respostas viáveis 12,5% das vezes em que foi utilizado. Um dos problemas é que está sendo disponibilizada apenas uma classe de ativos, ativos de risco, não estão sendo incluídos ativos livres de risco, commodities e moedas, caso fosse disponibilizado na cesta de ativos as outras classes, poder-se-ia ter melhores resultados. Outra questão para se atentar é que o modelo não utiliza venda a descoberto (*short-sales*), sendo assim em uma queda de mercado talvez o ideal fosse se utilizar dessa técnica, o que limita as opções do modelo **PER**. Além disto fixou-se um valor de p de 0,2. A redução deste valor de geraria um maior sucesso na obtenção de soluções viáveis. O que não necessariamente é um benefício, já que perderíamos uma maior precisão quanto à informação de entrada e saída de mercado. Concluindo, o modelo tem apenas a opção de investir em ativos de risco sem se utilizar de vendas a descoberto e ainda deve obter um retorno relativamente alto inflado pela penalidade atrelada ao valor do parâmetro p, conseqüentemente faz sentido este encontrar respostas viáveis apenas em altas de mercado e em um baixo número de vezes.

Uma das vantagens ao se utilizar o modelo **PER** é de que a matriz de variância-covariância não necessita ser positiva-semidefinida (Filomena e Lejeune, 2011a), isto é, não há problema caso se utilize um grande número de atios. Isto é um desafio enfrentado constantemente pelos gestores de portfólio, pois existem uma infinidade de ativos no mercado, como por exemplo, somente em uma das bolsas de valores de Nova Iorque (NYSE) existem mais de 2.000 empresas listadas. Outra vantagem é de que os portfólios formados pelo modelo contemplam questões práticas como diversificação, não alocando excessivamente capital em um único ativo como o de **MKW** e ainda as previsões com o modelo **PER** superam os índices de *benchmark* nos períodos analisados neste trabalho. Sendo que os períodos no qual o modelo **PER** realiza as previsões, abrangem o período de 20 de Novembro de 2009 a 1 de Outubro de 2010, isto é, grande parte de 2010, que foi um ano que a Bovespa ficou com retorno próximo de zero, aproximadamente 0,06%.

Outra grande vantagem do modelo **PER** é de que os portfólios formados por este ficam menos expostos ao risco de estimação nos parâmetros do retorno devido à inclusão da restrição probabilística, diminuindo a sensibilidade do portfólio quanto à estimação dos retornos esperados dos ativos. Qualquer erro nessa estimação irá viesar a solução do portfólio em direção àqueles ativos para os quais o retorno esperado foi superestimado, formando portfólios ineficientes e arriscados (Chopra e Ziemba, 1993). Além do modelo **MKW** estar extremamente exposto à esse risco, pelo valor do parâmetro p no modelo **PER** é possível diferenciar níveis de incerteza diferentes associados às estimativas introduzidas no modelo, o que não era possível com o modelo **MKW**.

Deve-se atentar que o cálculo da matriz de variância-covariância no modelo **PER** é estático, o mais adequado se tratando de uma série de dados financeira seria utilizar modelos de heterocedasticidade condicional para estimá-la. A contribuição principal desses modelos é que enquanto a matriz de covariância não condicional para as variáveis de interesse pode ser invariante no tempo, a matriz de covariância condicional depende de estados passados da natureza, ou seja, a estimação da variância não é mais constante ao longo do tempo (Shumway, 2006). Fica o indicativo para futuras pesquisas, porém não há garantias de que ao estimar a matriz de variância-covariância via modelos de heterocedasticidade condicional, a matriz será positiva semi-definida para um elevado número de ativos e sendo assim impossibilita a resolução numérica do problema. Outro indicativo para posteriores trabalhos seria um foco nos possíveis valores de *p*, utilizando preços de fechamento de ações diários e não apenas semanais e disponibilizar na cesta outras classes de ativos e não apenas ativos de risco, pois caso houvesse uma queda no mercado de ações as demais classes de ativos poderiam viabilizar a solução do problema.

6. Bibliografia

Broadie, M. (1993). Computing efficient frontiers using estimated parameters. Annals of Operations Research, 45: 21–58.

Ceria, S., R. A. Stubbs. (2006). Incorporating estimation errors into portfolio selection: Portfolio construction. Journal of Asset Management, 7 (2): 109–127.

Chopra, V., W. T. Ziemba. (1993). The effects of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. Journal of Portfolio Management. 19: 6–11.

Corazza, M., Favaretto, D. (2007). On the existence of solutions to the quadratic mixed-integer meanvariance portfolio selection problem. European Journal of Operational Research, 176: 1947–1960.

Cornuejóls, G., Tütüncü, R. (2007). Optimization methods in finance. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Dentcheva, D., Ruszczynski, A. (2006). Portfolio optimization with stochastic dominance constraints. Journal of Banking and Finance, 30: 433–451.

Filomena, T. P., Lejeune, M.A. (2011 a). Stochastic Portfolio Optimization with Proportional Transaction Costs: Convex Reformulations and Computational Experiments. Working paper.

Filomena, T. P., Lejeune, M.A. (2011 b). Warm-Start Heuristic for Stochastic Portfolio Optimization with Fixed and Proportional Transaction Costs. Working paper.

Li, D., Sun, T.F., Wang, J. (2006). Optimal lot solution to cardinality constrained mean-variance formulation for portfolio selection. Mathematical Finance, 16: 83-101.

Luenberger, D.G. (1998). Investment Science. Oxford University Press, Oxford, USA.

Markowitz, H.M. (1952). Portfolio section. Journal of Finance, 7:77–91.

R. C. Merton. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. Journal of Financial Economics, 8:323–361.

R.H. Sumway, D.A. Stoffer. (2006) Time Series Analysis and Its Applications, Springer, New York, 2. ed.

Roy, A. D. (1952). Safety first and the holding assets. Econometrica, 7:431-449.

Scherer. B., D. Martin. (2005). Introduction to Modern Portfolio Optimization. Springer, New York, USA.

Sharpe, W. (1966). Mutual fund performance. Journal of Business. v. 39:119–138.

Tütüncü, R., Koenig, M. (2004). Robust asset alocation. Annals of Operations Research,132:157–187.

Zenios, S. A., (2008). Practical Financial Optimization. Blackwell Publishing, Massachussests, USA