



X Oktoberfórum – PPGEQ

04 a 07 de outubro de 2011

USO DE SPLINES PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Dalciana B. Waller, Jorge O. Trierweiler

Grupo de Intensificação, Modelagem, Simulação, Controle e Otimização de Processos (GIMSCOP)
Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
R. Eng. Luis Englert, s/n. Campus Central. CEP: 90040-040 - Porto Alegre - RS - BRASIL,
E-MAIL: {dwaller, jorge}@enq.ufrgs.br

Resumo: O presente trabalho propõe um algoritmo para identificação de modelos lineares monovariáveis black-box. Tal algoritmo considera informações conhecidas sobre o sistema e promove a utilização de curvas splines de interpolação de pontos para prever o comportamento da resposta de saída a uma perturbação tipo degrau. A Spline considerada para elaboração do algoritmo foi Kochakek-Bartels, que possui 3 parâmetros de ajuste por nó. O critério de minimização da derivada do erro na otimização na etapa de ajuste da componente y dos nós também foi explorado e comparado com o critério tradicional de medida do erro, na etapa de identificação e de validação. O critério da derivada do erro se mostrou muito útil na etapa de validação de modelos identificados na presença de distúrbios não medidos, por captar a tendência da resposta. O algoritmo mostra um potencial de desenvolvimento e aplicação.

Palavras-chave: identificação de sistemas black-box ajuste de splines, critério de otimização, derivada do erro.

1. INTRODUÇÃO

Para projetar um bom controlador é necessário se ter um modelo dinâmico capaz de capturar o comportamento entre as variáveis de manipuladas e as controladas.

Este artigo apresenta uma metodologia nova e versátil para identificação de modelos utilizando utilizando curvas interpolantes. Tais curvas são chamadas de splines, obtidas a partir de segmentos de polinômios entre dados interpolados. Possuem ainda parâmetros de ajuste que concedem uma grande flexibilidade em ajustar a mesma.

Outro aspecto importante no algoritmo desenvolvido é um comparativo entre critérios diferentes utilizados na etapa de identificação e na etapa de validação dos modelos: critério da derivada do erro entre sinal de saída real e valor simulado.

O artigo é estruturado da seguinte forma: na seção 2 será apresentada a metodologia do algoritmo desenvolvido; na seção 3, o estudo de caso é apresentado e na seção 4, são apresentados os resultados da aplicação do algoritmo proposto no estudo de caso.

2. METODOLOGIA

2.1. INTERPOLAÇÃO DE DADOS COM SPLINES

Splines são funções paramétricas que permitem interpolar dados pontuais, chamados nós, e obter uma curva de ajuste. O polinômio existente entre 2 nós pode ser quadrático, cúbico ou de ordens superiores, sendo a cúbica

uma das mais aplicadas. Cada segmento entre dois nós é contínuo e diferenciável. Se a spline é ou não diferenciável nos nós depende da escolha dos vetores tangente à esquerda ou à direita de cada nó (Eberly, 2008).

Dentre os tipos mais comuns de splines pode-se citar a de tipo Kochanek Bartels (Eberly, 2008), que possui três parâmetros de ajuste que compõe sua estrutura: tensão, bias e continuidade. Cada um deles afeta a tangente dos nós. Maiores detalhes podem ser encontrados em Eberly (2008), Shikin (1995) e Plass (1983).

2.2. INTERFACE UTILIZADA

O algoritmo de identificação do presente trabalho foi elaborado na linguagem interpretável Python (Langtangen), que possui implementação fácil. O programa possui diversas bibliotecas matemáticas para uso na engenharia e além da vantagem de conter funções similares a softwares já consolidados como Matlab®, o software Python é gratuito.

Os pacotes utilizados nessa etapa foram o Scipy, PyIMSL (IMSL em Python), biblioteca que possui as funções responsáveis pela criação das Splines TCB.

2.3. ALGORITMO PROPOSTO

O esquema básico do algoritmo é apresentado na Figura 1. Para gerar uma curva spline é necessário que se determine quem serão os nós, cada um com uma componente y (altura) e t (tempo). Uma etapa necessária para o início do algoritmo é a determinação do número desejado de nós e os respectivos tempos. Como ponto de

partida pode-se se fazer uso de algum conhecimento prévio do sistema, como por exemplo, a ordem da constante de tempo dominante do processo. Visto que as componentes y (alturas) dos nós são as variáveis de decisão do problema de otimização presente na etapa de identificação, o algoritmo funciona até que o valor das componentes y dos nós forneça o mínimo de uma função objetivo e representem a resposta estimada do sistema a uma perturbação degrau (Figura 2). Com os nós iniciais estabelecidos, aplica-se o algoritmo e obtêm-se os demais valores da função (na Figura 2 representados pelos valores betas)

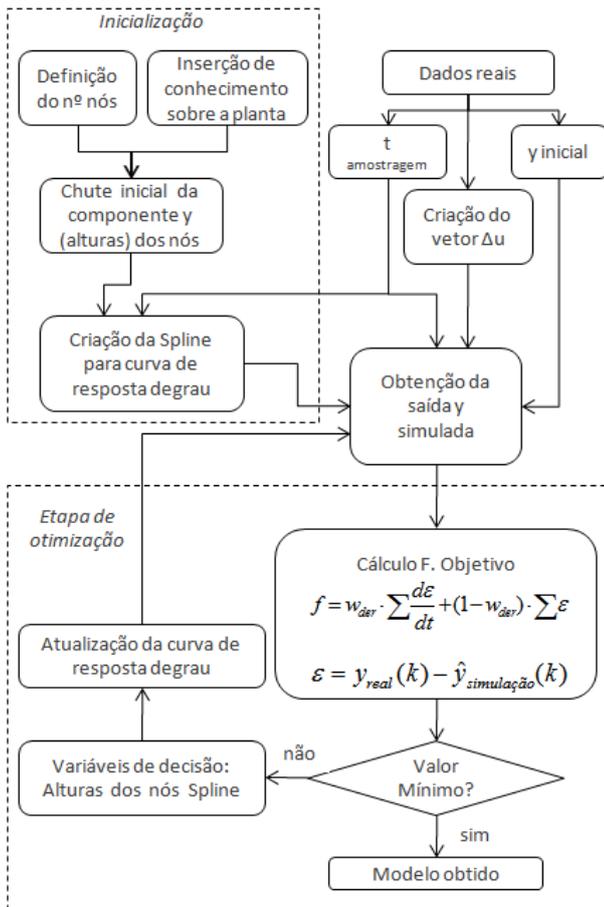


Figura 1: Esquema do algoritmo de identificação de sistemas black-box com splines

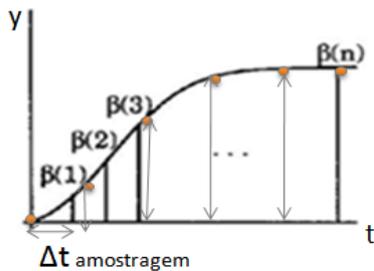


Figura 2: Representação esquemática resposta de um sistema a uma perturbação degrau com os nós e as alturas geradas

O posicionamento dos nós tem influência significativa sobre a resposta gerada. Deve-se considerar pelo menos um nó na origem (ponto de abscissa e ordenada nulas) e um nó onde seria o início do estado estacionário.

Para gerar os nós esse sistema foi feita uma divisão simples. Os parâmetros tensão, bias e continuidade para cada um dos nós receberam valor zero (o valor poderia ser entre -1 e 1), menos o parâmetro bias para o último e penúltimo nó, em que assumiram o valor de -1 e +1 respectivamente. O parâmetro bias pondera o peso das tangentes de antes e depois do nó, assim tentou-se forçar que as tangentes do último e penúltimo nós fossem iguais.

A premissa de que se conhece a ordem do ganho e da constante de tempo auxiliará na identificação do modelo.

2.1. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

2.1.1. CRITÉRIO DA DERIVADA

A maioria dos métodos paramétricos de identificação consideram a minimização do erro quadrático nos problemas de otimização tanto das etapas de identificação do modelo como na etapa de validação do mesmo (Ljung, 2004). Esta abordagem é conhecida como *Prediction error models* (PEM) e está representada na Equação (3).

$$\sum [e(t)]^2 = \sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_{k|k-1})^2 \quad (1)$$

onde n é o número de dados experimentais, y_k é o k-ésimo valor da variável controlada e $\hat{y}_{k|k-1}$ é o valor predito para a resposta do modelo.

Contudo, esse tipo de abordagem pode fornecer resultados insatisfatórios se usados com dados de planta que estejam afetados por distúrbios ou muito ruidosos, o que é muito comum em processos industriais (Trierweiler e Machado, 2004). O critério da derivada do erro, proposto para contornar esse problema, é assim definido:

$$\sum \left[\frac{de(t)}{dt} \right]^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} y_k - \frac{d}{dt} \hat{y}_{k|k-1} \right)^2 \quad (2)$$

A idéia é de que a tendência da resposta seja captada.

Na função objetivo que se quer minimizar, do algoritmo foi implementada a Equação (3 a). Nela, ambos os critérios do erro e da derivada do erro são considerados, ponderados por um fator denominado w_{der} , representando o peso da derivada, com valor entre 0 e 1, e seu complemento, $(1-w_{der})$. Dessa maneira a função objetivo para cada um dos critérios efetivamente calculadoi são representados nas equações (3b) e (3c).

$$f_{objetivo} = w_{der} \cdot \sqrt{\sum \left[\frac{de(t)}{dt} \right]^2} + (1-w_{der}) \cdot \sqrt{\sum [e(t)]^2} \quad (3a)$$

$$f_{objetivo(crit.erro)} = \sqrt{\sum [e(t)]^2} \quad (3b)$$

$$f_{objetivo(crit.deriv.erro)} = \sqrt{\sum \left[\frac{de(t)}{dt} \right]^2} \quad (3c)$$

Para fins de implementação dessa função objetivo, a derivada entre os pontos foi estimada com a função gradiente do Python.

2.2. CONVEXIDADE DO PROBLEMA

A utilização de splines como ferramenta de identificação de modelos lineares foi proposta também com a finalidade de contornar o aspecto da não convexidade de problemas de otimização referentes à estimação de parâmetros em métodos de identificação de sistemas tradicionais.

A explicação para esta é apresentada a seguir. Se considerarmos por exemplo, um sistema de 2ª ordem com resposta inversa, o modelo na forma de função de transferência é representado pela Equação (4) e a correspondente resposta da saída do sistema a uma perturbação degrau é dada pela Equação (5) (Seborg, 2010). O problema de estimação de parâmetros desse tipo de sistema é não convexo, pela presença de termos contendo multiplicação entre um parâmetro e uma exponencial contendo outro parâmetro (conforme equação 5). Isso pode gerar um esforço computacional importante e resultados insatisfatórios devido à obtenção de mínimos locais.

$$G(s) = \frac{k(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta \cdot s} \quad (4)$$

$$\hat{y}(t) = k\Delta u \left(1 + \left(\frac{\beta - \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) e^{-\frac{t-\theta}{\tau_1}} + \left(\frac{\beta - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \right) e^{-\frac{t-\theta}{\tau_2}} \right) \quad (5)$$

O algoritmo utilizando splines foi elaborado de forma que o problema de otimização fosse convexo, já que as splines geradas são funções cúbicas.

3. ESTUDO DE CASO

Para a aplicação do algoritmo produzido neste trabalho serão utilizados dados reais de num experimento feito em uma planta piloto, contendo dois tanques ligados em série, onde há um sistema de aquecimento no primeiro deles, conforme a Figura 3 (Trierweiler e Machado, 2004). O primeiro tanque é alimentado com uma corrente de água fria (F) à temperatura T0 e possui um sistema que regula a potência de aquecimento, usada como variável manipulada. A variável controlada é a temperatura de saída o segundo tanque. A variável controlada do sistema, T2 é influenciada tanto pelo calor fornecido ao tanque (Q) quanto pelo distúrbio T0.

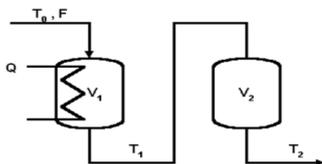


Figura 3: Representação esquemática da planta com sistema de aquecimento

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O algoritmo foi testado com um conjunto de dados experimentais da planta apresentada na seção 3. Mesmo que os valores do distúrbio T0 tenham sido obtidos no experimento, foi considerado como um distúrbio não medido em um dos conjuntos de dados. A ideia é de que o modelo possa ser identificado mesmo com a presença de distúrbios não medidos.

Na etapa de identificação, o conjunto de dados usado, “Set 1”, não considera o efeito do distúrbio T0 (o distúrbio existe e no caso do experimento foi medido, mas foi excluído nesse conjunto para fins de comparação). É definido como: $\Delta T_2 = T_2(t) - T_2(0)$. Para a etapa de validação, será usado um conjunto de dados em que o distúrbio T0 é compensado, sendo o conjunto (“Set 2”) definido como: $\Delta \Delta T = \Delta T(t) - \Delta T(0) = [T_2(t) - T_0(t)] - [T_2(0) - T_0(0)]$. A ideia é isolar o real efeito da carga térmica na temperatura de saída, computando-se a diferença entre a temperatura de saída e a de entrada. Os dados utilizados para testar o algoritmo desenvolvido se encontram na Figura 4.

Um dos objetivos do método é que o algoritmo seja flexível para que possa representar sistemas de diversas ordens, com ou sem tempo morto.

No entanto, para a estimativa inicial da altura dos nós pode ser considerada uma função de primeira ordem (Equação (6)). O ganho do sistema é de $K_{ss} = 0.0025$ °C/watt e a constante de tempo foi estimada em 150s. Foi então gerada a resposta degrau de um sistema linear invariante no tempo (LTI), da equação (6), que é apenas uma estimativa inicial.

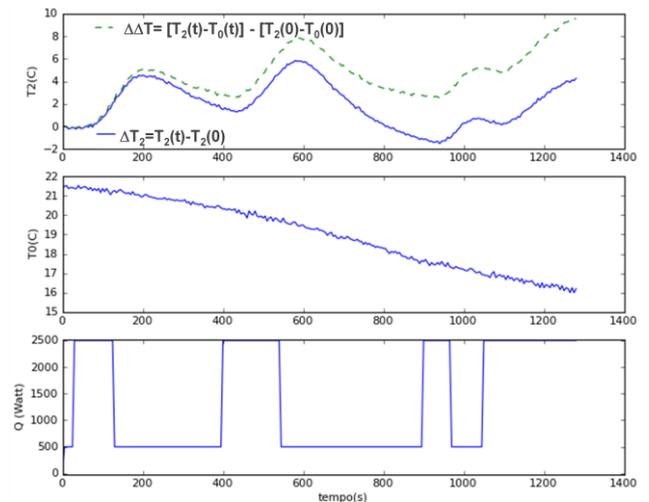


Figura 4: Dados experimentais das variáveis T2 sem compensação de distúrbio (ΔT_2), com compensação ($\Delta \Delta T$) e T0 (distúrbio na entrada) em resposta a perturbações na potência de aquecimento do tanque.

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (6)$$

Salienta-se que se escolheu uma função de primeira ordem apenas para gerar os dados das alturas iniciais, mas que o resultado pode convergir para funções de ordem maior.

Para resolução do problema de otimização, foi utilizado o pacote *Scipy Optimize* do Python. O método explorado foi o de Nelder, do tipo otimização sem restrições (função `scipy.optimize.fmin`).

4.1. É TAPA DE IDENTIFICAÇÃO

Um dos fatores a entrar no algoritmo é o número de nós para gerar a curva desejada. Foram testados 2 cenários para observar a influência destes parâmetros no algoritmo.

4.1.1. SPLINE COM 8 NÓS

Aplicando o algoritmo de identificação para o conjunto de dados Set1, com a estimativa de alturas iniciais dos nós prevista na Figura 5, obtêm-se os nós otimizados e as respectivas curvas splines formadas a partir deles, representados na Figura 6. No caso de serem definidos 8 nós, os vetores utilizados para os parâmetros da spline forma os seguintes:

Continuidade = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]

Tensão = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]

Bias = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1, 1]

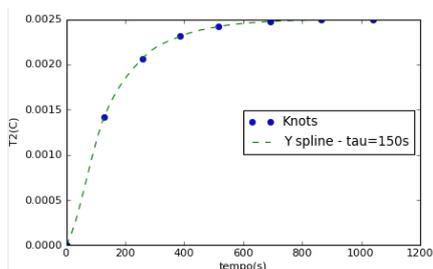


Figura 5: Estimativa inicial das alturas da spline a partir da resposta de T2 a uma perturbação tipo degrau unitário em Q – tau=150s

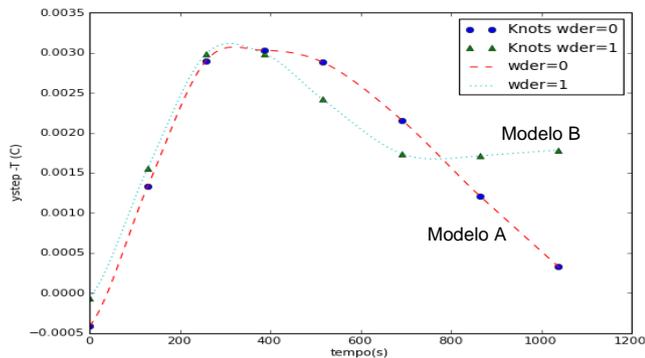


Figura 6: Resposta degrau otimizada para tau=150s com dados sem compensação de distúrbio p/ 8 nós –
Modelo A: otimização com critério do erro
Modelo B: otimização com critério da derivada do erro

A simulação completa com os dados usados na identificação com o modelo obtido (a partir de splines geradas com os nós otimizados) está representada na Figura 7.

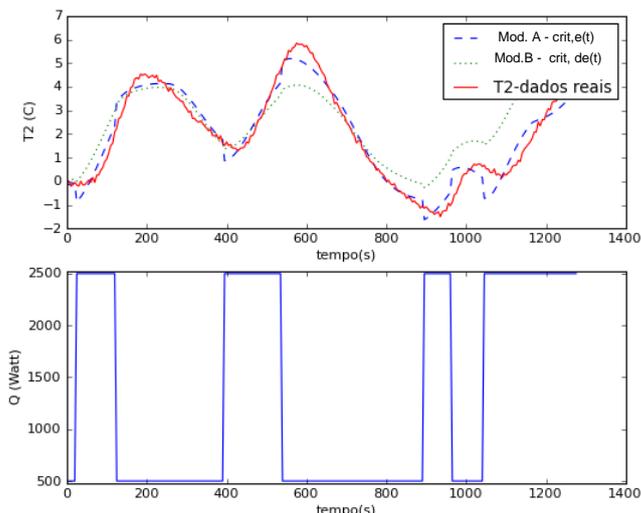


Figura 7: Simulação do sistema com modelo otimizado para tau=150s com dados sem compensação de distúrbio

4.1.2. SPLINE COM 5 NÓS

De modo a observar a influência do número de nós na geração do modelo do sistema, foi realizado um teste paralelo estabelecendo 5 nós para a Spline. Foram obtidos os resultados da Figura 8 e -da Figura 9.

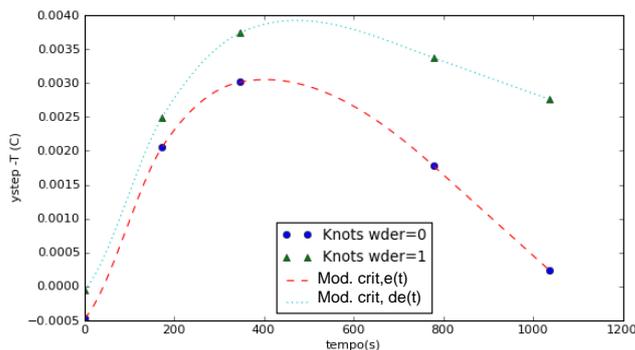


Figura 8: Resposta à perturbação degrau otimizada para tau=150s com dados sem compensação de distúrbio – 5 nós

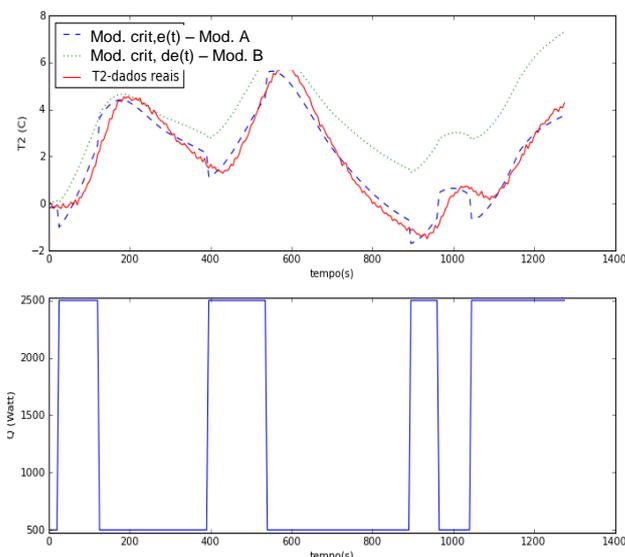


Figura 9: Simulação do sistema com modelo otimizado para tau=150s com dados sem compensação de distúrbio – 5 nós

Os dados obtidos com o critério do erro e da derivada do erro para as 2 splines geradas com número de nós diferentes estão comparados na Tabela 1.

Após esta análise prévia, o número de nós adotado para a sequencia do estudo foi 8, por apresentar menor valor em todos os critérios adotados (erro e derivada do erro de predição) além do fato de possibilitar uma maior versatilidade para representar sistemas amortecidos .

Tabela 1: Qualidade da identificação de modelos gerados a partir de splines com 5 e 8 nós

Critério	Modelo com	
	5 nós	8 nós
$\ e(t)\ $	7,1	7,2
$\ de(t)/dt\ $	32,9	19,88

4.2. VALIDAÇÃO DOS MODELOS

Na etapa de validação dos modelos, os modelos obtidos na etapa de identificação são avaliados por critérios de validação que indicam quais são aqueles mais adequados a representar o sistema. Sendo assim, a etapa de validação é de extrema importância dentro do processo de identificação. Na etapa de identificação, foram gerados os modelos A e B, conforme a Figura 6.

Uma forma de validar os modelos obtidos na etapa anterior é usar um conjunto de dados em que os valores de T_0 são compensados. É importante salientar que o critério da derivada para a validação dos modelos pode ser utilizado em modelos que não foram identificados utilizando-se o critério da derivada no algoritmo da identificação.

Os valores da função objetivo obtidos a partir do algoritmo proposto para as etapas de identificação e validação estão resumidos na

Tabela 2: Resultados dos problemas de otimização para identificação e validação dos modelos

Modelo	Critério para Identificação do modelo	Valor F. obj. Identificação (ΔT_2)	Etapa de Validação ($\Delta \Delta T$)	
			Fmin= $\ e(t)\ $	Fmin= $\ de/dt\ $
A	$\ e(t)\ $	7,2	48,7	2,1
B	$\ de(t)/dt\ $	19,9	37,0	1,5

Analisando globalmente a Figura 10, não parece visível que nenhum dos modelos, A ou B, seja o melhor para representar o sistema. Contudo, se for considerando o critério da derivada na etapa de validação, o modelo identificado com o critério da derivada (B) é o mais adequado entre os dois, pois o valor da função de avaliação é o mais baixo(1,5). No gráfico, pode-se também notar que a curva captura um pouco melhor a tendência do sistema.

Segundo Machado (2004), se a derivada do erro de predição for utilizada na validação dos dados, melhor será a representação do sistema e a qualidade do modelo identificado, especialmente quando os dados de identificação apresentam distúrbios não medidos. Esta afirmação pode ser feita uma vez que necessariamente a presença de distúrbios não medidos obriga a predição do modelo determinístico (quando a saída depende apenas das entradas do sistema). De acordo com a literatura, o melhor modelo é aquele que minimiza os erros de predição, mas com a presença de distúrbios não medidos, nem sempre isso ocorre.

Considerando as splines e sua utilização nesse trabalho, nota-se que são uma ferramenta versátil para representar respostas à perturbação degrau, porém é necessário que o algoritmo de otimização das alturas da spline admita restrições nas variáveis de decisão (exemplo: forçar que a altura de um nó seja maior que a do nó anterior, para uma função de primeira ordem) e de preferência que seja de busca global, para que a solução encontrada não seja um mínimo local. Isso é necessário, para que não ocorra nós com ordenada negativa, como foi encontrado na Figura 7: Simulação do sistema com modelo otimizado para $\tau=150s$ com dados sem compensação de distúrbio Figura 6.

5. CONCLUSÕES

A metodologia, em seu estado atual, atendeu parcialmente as expectativa de identificação. Há um potencial para identificar modelos de diversas ordens.

As vantagens da técnica incluem a possibilidade do usuário inserir informações já conhecidas sobre o sistema. O algoritmo fornece solução de um problema de otimização não convexo de maneira rápida.

O uso de splines se mostrou satisfatório no quesito

Tabela 2 e na Figura 10.

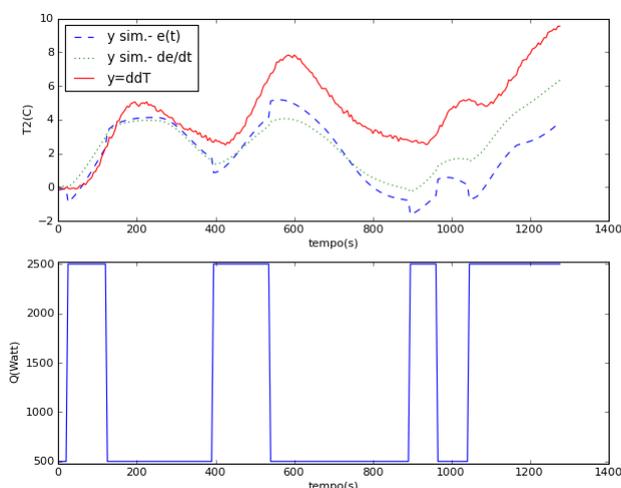


Figura 10: Validação dos modelos A e B com dados com compensação de distúrbio

facilidade de implementação e flexibilidade de ajuste. O número de nós influencia na qualidade da spline.

O critério da derivada do erro de predição se mostrou uma importante ferramenta na escolha do melhor modelo.

As próximas etapas contemplam a elaboração do problema de otimização para incluir a identificação de funções de 2ª ordem amortecidas e subamortecidas bem como o refinamento do algoritmo para melhor detectar o tempo morto e resposta inversa do sistema. Um outro aspecto a ser explorado é o método a ser utilizado para otimizar o problema.

6. REFERÊNCIAS

EBERLY, D. Kochanek-Bartels Cubic Splines (TCB Splines). Geometric Tools, LLC, 2008.

LANGTANGEN, H. P. *Python Scripting for Computational Science*. 3ª ed., Springer, 2008.

LJUNG, L. State of the art in linear system identification: Time and frequency domain methods. In Proc. AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Boston, July 2004.

MACHADO, V.C. Planejamento de perturbações para identificação de modelos dinâmicos. Dissertação de mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 2004.

PLASS, M. F.; STONE, M. Curve-fitting with piecewise parametric cubics. Proceedings of the 10th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques; 1983 July 25-29; Detroit, MI. NY: ACM; 1983; 229-239.

ROGUEWAVE. PyIMSL User guide. Volume 1 of 2: Math Library.

SCIPY. SciPy Reference Guide, Release 0.10.0.dev6665.

SEBORG, D.E.; EDGAR, T.F.; MELLICHAMP D.A.; DOYLE III, F.J. *Process Dynamics and Control*. 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 2010.

SHIKIN, E. V.; PLIS, A. I. *Handbook on Splines for the User*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1995.

TRIERWEILER, J. O.; MACHADO, V. C. Which is the Best Criterion for Identification of Dynamic Models. In: Proceedings of the 7th DYCOPS, Boston, 2004.