UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ANTONIO CESAR DOS SANTOS ESPERANÇA

O ENSINO DE MATEMÁTICA NO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS: UM ESTUDO SOBRE AS PROVAS DO CURSO COMPLEMENTAR

PORTO ALEGRE

2011

ANTONIO CESAR DOS SANTOS ESPERANÇA

O ENSINO DE MATEMÁTICA NO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS:
UM ESTUDO SOBRE AS PROVAS DO CURSO COMPLEMENTAR

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo.

PORTO ALEGRE

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

ANTONIO CESAR DOS SANTOS ESPERANÇA

O ENSINO DE MATEMÁTICA NO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS:

UM ESTUDO SOBRE AS PROVAS DO CURSO COMPLEMENTAR

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente - UNIFESP

____
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke - UFRGS

____
Prof. Dr. Francisco Egger Moelwald - UFRGS

Porto Alegre, ... de .... de 2011

AGRADECIMENTOS

À minha família, especialmente, Neli, Kelly e Eduarda.

À professora Dr.ª Elisabete Zardo Búrigo, pela dedicação na orientação deste trabalho, e aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS.

Aos professores Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, Dr. Francisco Egger Moelwald e Dr. Wagner Rodrigues Valente, integrantes da Banca Examinadora, por suas contribuições.

Aos meus colegas professores e funcionários do Colégio Estadual Júlio de Castilhos, especialmente, Ana Julieta Gavião da Fonseca, Bernadete Costa, Gládis Inês Schwartzer, Iara Maria Rosales Gonçalves, Jaime Antonio Sichinel, João Alberto Silva Figueiró (*in memoriam*), Leda Oliveira Gloeden, Liane Teixeira Serra, Lílian Boor, Luciane Boeira de Jesus, Maria Berenice Moura Alves, Marion Michalski, Marly Flores Nuñez, Nice Maria Botomé Cousen, Vinícius Lopes, Werner Almeida Alves.

Aos meus colegas da turma de 2009 do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS.

À equipe responsável pela Biblioteca da Escola de Engenharia da UFRGS, especialmente, June Magda Rosa Scharnberg, Rejane Rataeski e Rosângela Haide Bratkowski, pelo carinho e confiança com que me receberam.

À equipe responsável pelo Museu da UFRGS.

À Fundação de Apoio ao Colégio Estadual Júlio de Castilhos, especialmente às professoras Neiva Otero Schaffer, Ione Osório, Aida Rossi e Lizette Alves Touguinha, pelo incentivo e apoio.

Aos ex-alunos do Instituto Júlio de Castihos, Damon Michalski e Alberto da Costa Castro.

E, finalmente, aos amigos professores que inspiraram a realização desta pesquisa, Deborah Thomé Sayão (*in memoriam*), Tabajara Lucas de Almeida e Vicente Hillebrand.

Dedicado à Alice,

e *in memoriam* ao meu pai e ao meu irmão.

Somos o que os séculos nos fizeram!

O que somos de razão e vontade, o que somos de pensamento e ação, o que somos de sensibilidade e frieza, de trabalho e lazer, de descrença e esperança, o que somos de bílis e coração é terem existido outros, é terem traçado rumos, e terem aberto estradas, é terem apontado caminhos!

Eis nossos predecessores!

Irineu Bicudo
(Introdução de sua tradução d'Os Elementos)

RESUMO

O trabalho apresenta um estudo sobre o ensino de matemática nos Cursos Complementares Pré-Médico e Pré-Técnico, que funcionaram no Instituto Júlio de Castilhos no período de vigência da reforma do ensino secundário que ficou conhecida como “Reforma Francisco Campos”. Está baseado na análise das questões das provas de Matemática que foram aplicadas nesses cursos nos anos de 1936 e 1937 e investiga os conteúdos ensinados, as maneiras como eram avaliados e possíveis marcas deixadas pelos professores que faziam parte das bancas de prova. Busca identificar, também, as origens do ensino de matemática praticado nos cursos, considerando, de um lado, a legislação do ensino da época, e, de outro lado, a história singular da instituição, tomando como referência relatórios da Escola de Engenharia de Porto Alegre, entrevistas e depoimentos de ex-alunos e ex-professores e bibliografia relacionada ao tema. O trabalho busca, assim, contribuir para o estudo da história do ensino de matemática e também para a historiografia do antigo Instituto Júlio de Castilhos, hoje, Colégio Estadual Júlio de Castilhos.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Instituto Júlio de Castilhos, Ensino secundário, História da educação, História das disciplinas escolares

ABSTRACT

This paper aims to investigate a historical review of mathematics teaching in the *Pré-Médico e Pré-Técnico* courses that took place at *Instituto Júlio de Castilhos*, during the period of Brazilian secondary school curricular reform (High School), which was known as 'Reforma Francisco Campos'. The study is based on the analysis of questions of Mathematics tests applied to *Cursos Complementares* in 1936 and 1937. Through those tests it is possible to examine what contents were developed, how the contents were assessed and what possible marks were left by the Mathematics teachers who prepared the tests. The study also investigates the origins of the mathematics teaching practice of Mathematics in the *Cursos Complementares*, considering both the Education policies of that time, and the unique history of the institution, based on reports of the Engineering School of Porto Alegre, interviews and testimonials of former students and former teachers and as well as on bibliography related to the topic. In this way, this research aims to contribute to the study of the history of mathematics teaching and, particularly, to the historiography of *Instituto Júlio de Castilhos*, today called Colégio Estadual Júlio de Castilhos.

Keywords: Mathematics teaching, Instituto Júlio de Castilhos, Secondary school, History of Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A história do Colégio Estadual Júlio de Castilhos, um dos mais antigos do Rio Grande do Sul, teve início no ano de 1900 por iniciativa de um grupo de professores da Escola de Engenharia de Porto Alegre que almejavam preparar seus futuros alunos. Criaram assim o Gymnasio do Rio Grande do Sul, que ao longo do tempo mudou de nome, prédio e modalidade e funcionou como Instituto dessa Escola de Engenharia até 1942. Desde então integra a rede pública estadual de ensino do estado do Rio Grande do Sul.

Seus 111 anos de existência vêm sendo resgatados, principalmente, através de depoimentos de seus ex-alunos e ex-professores, que destacam o "Julinho" - como é carinhosamente chamado – como importante instituição de ensino desse estado e que teve a peculiaridade de ter sido criado como uma escola secundária vinculada à Escola de Engenharia de Porto Alegre.

A presente dissertação pretende contribuir para esse resgate trazendo à tona questões ainda pouco exploradas, relacionadas ao seu ensino, em particular, ao ensino de matemática na década de 1930. Busca então agregar elementos à história da Instituição e contribuir para a historiografia do ensino secundário no Brasil, com especial atenção à disciplina de Matemática.

Antes de explicar como se desenvolveu o trabalho de pesquisa, faz-se necessário apresentar as razões que me levaram ao tema. Ou seja, os motivos que fizeram o professor de Matemática interessar-se por essa história.

Quando concluí o curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG), e decidi morar e trabalhar em Porto Alegre, uma amiga a quem procurei – já que não conhecia a cidade -, foi logo me aconselhando: "Se vais trabalhar em Porto Alegre, escolhe o Julinho". Lembro ainda de ter perguntado o porquê daquele conselho, "é um colégio onde as coisas acontecem", argumentou minha amiga, professora Deborah Sayão. De fato, o prestígio do Colégio Estadual Júlio de Castilhos não se restringe à capital do estado do Rio Grande do Sul.

Era o ano de 2001 e eu dava minhas primeiras aulas de Matemática quando fui nomeado, por concurso público, professor da rede estadual de ensino do Rio Grande do Sul. Mudei-me para Porto Alegre, aproveitei a vaga disponível para professor de Matemática no Colégio Estadual Júlio de Castilhos e nele trabalho desde então.

Duas motivações me trouxeram de Rio Grande para Porto Alegre: o desafio de começar uma vida nova, trabalhando numa cidade grande e com mais oportunidades; e a vontade de dar continuidade aos meus estudos relacionados ao ensino de Matemática. De certo modo, meu trabalho no Colégio Estadual Júlio de Castilhos é parte do primeiro dos desafios, e meu ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) é parte do segundo. Meu envolvimento com ambos os desafios culmina nesta dissertação.

O tema da pesquisa surgiu durante uma aula do mestrado. Nela, estudávamos a educação escolar no início do século XX. Enquanto discutíamos os primórdios da nossa educação escolar secundária - e isso até então me parecia tão distante - fui percebendo que a organização inicial do Colégio em que eu trabalhava se confundia com um momento histórico importante da educação escolar brasileira.

O Colégio Estadual Júlio de Castilhos teve seu começo naqueles primeiros anos da República e procurava organizar-se como uma instituição de ensino secundário quando essa modalidade carecia de organização, estrutura e, principalmente valorização, já que a pequena parcela da população que tinha acesso ao curso secundário buscava, de fato, atalhos para os cursos superiores. Como foi a organização inicial do Gymnasio do Rio Grande do Sul? Que motivações levaram à criação desse "Gymnasio"? Como era o ensino de matemática nessa instituição? Essas foram as primeiras questões que motivaram essa pesquisa.

Escolhido o tema e as primeiras questões que norteariam o trabalho, era necessário encontrar fontes para a pesquisa, ou seja, "vestígios, rastros deixados no presente pelo passado"[1]. Essas fontes iniciais foram encontradas nos arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos e na Biblioteca da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

O Colégio Estadual Júlio de Castilhos possui uma sala chamada de "Arquivo" onde se encontram documentos escolares, tais como históricos, livro de atas, listas de chamada e de matrícula. A parte mais recente do acervo está bem organizada e preservada, mas a parte referente à primeira metade do século XX está

---

[1] VALENTE, 2005, p. 4.

desorganizada, espalhada e desprotegida. Foi nessa segunda parte do arquivo que encontramos, entre outros documentos, as atas de provas aplicadas nos anos de 1936 e 1937. Nessas atas, havia a transcrição feita de próprio punho pelos membros das bancas das provas aplicadas aos alunos. Dentre elas havia as atas das provas de Matemática que, a partir daquele momento, passaram a ser o objeto principal da nossa pesquisa. Eram atas com as questões de prova que haviam sido aplicadas aos alunos do Curso Complementar, que funcionou no Instituto Júlio de Castilhos como segundo ciclo do Curso Secundário.

No ano de 1931, o governo de Getúlio Vargas, através do recém-criado Ministério dos Negócios da Educação e Saúde Pública[2], decretou uma reforma no ensino secundário que ficou conhecida como Reforma Francisco Campos. A partir dela

> [...] o curso secundário ficou dividido em dois ciclos: um fundamental, de 5 anos, e outro complementar, de 2 anos. O primeiro tornou-se obrigatório para ingresso em qualquer escola superior e o segundo, em determinadas escolas. Além disso, para esse ciclo complementar, foi estabelecida uma subdivisão que compreendia um certo grau de especialização, conforme se tratasse de curso preparatório para ingresso nas Faculdades de Direito, Ciências Médicas e Engenharia (ROMANELLI, 1986, p. 135).

Os documentos encontrados, ou seja, as atas das provas de Matemática que foram aplicadas nos anos de 1936 e 1937, referem-se aos dois primeiros anos de funcionamento desse Curso Complementar.

É nesse período que o vínculo do Instituto Júlio de Castilhos com a Escola de Engenharia de Porto Alegre começa a se desfazer. Esse afastamento culmina em 1942, com a criação do Colégio Estadual Júlio de Castilhos através do Decreto Estadual n. 588 de 11 de agosto de 1942.

Na Biblioteca da Escola de Engenharia da UFRGS, consultamos os relatórios que eram apresentados anualmente pelos diretores dos Institutos da Escola de Engenharia de Porto Alegre (dentre os quais o Instituto Júlio de Castilhos) e que traziam informações importantes sobre o ensino praticado nessa Escola, bem como dados referentes aos professores, alunos, funcionários e da estrutura de seus Institutos.

Considerando essas fontes iniciais que evocam o período em que o Instituto Júlio de Castilhos fez parte da Escola de Engenharia de Porto Alegre, e o estudo

---
[2] BRASIL. Decreto lei n. 19.402, de 14 de novembro de 1930.

das provas de Matemática que foram aplicadas no Curso Complementar, a pesquisa pretende contribuir para a historiografia do ensino de matemática nessa importante instituição de ensino. Essa contribuição consiste na procura por respostas às seguintes questões: i) como se caracterizavam as provas de matemática do segundo ciclo do Ensino Secundário da Reforma Francisco Campos, denominado Curso Complementar, e que foram aplicadas no Instituto Júlio de Castilhos em 1936 e 1937? ii) como os conteúdos de matemática apareciam nas questões das provas e o que elas indicam sobre o que os professores esperavam que os alunos soubessem? iii) que marcas foram deixadas nas provas pelos professores que faziam parte das bancas? iv) o que as atas das provas revelam sobre o ensino de matemática no Curso Complementar? v) de onde vem a matemática do Curso Complementar?

1 BASE TEÓRICO-METODOLÓGICA

Este trabalho apresenta um estudo sobre o ensino de matemática no Curso Complementar que funcionou no Instituto Júlio de Castilhos de 1936 a 1942, tendo como base a análise das questões das provas que foram aplicadas aos alunos desse curso nos anos de 1936 e 1937.

1.1 A HISTÓRIA DAS DISCIPLINAS ESCOLARES

Ao pesquisarmos o ensino da disciplina de Matemática, através das provas do Curso Complementar, inserimo-nos no campo do estudo da história das disciplinas escolares, um domínio ainda “marginal”, segundo Viñao (2008, p. 187), no campo da História da Educação.

Segundo o autor, as disciplinas escolares passaram a ser um objeto de estudo da história da educação devido a dois fatores: uma maior preocupação entre os docentes pela história do ensino de sua disciplina e a crescente consciência, entre os pesquisadores, da necessidade de uma historiografia dos “funcionamentos internos próprios da escola”, de suas “práticas reais” e dos resultados obtidos ou “competências realmente alcançadas pelos alunos e sua relação com os textos normativos que fixam os objetivos e o programa de uma determinada aula” (Ibid., p. 187-188).

Em relação à história das disciplinas escolares, Viñao considera que a obra de André Chervel e Dominique Julia, dentre outros autores franceses, se caracteriza por seu interesse pelas práticas, pela análise combinada e comparativa do currículo prescrito e do currículo real, pela apropriação de ambos por parte dos alunos e pelos modos de seleção do professorado. Isso os tem levado a utilizar, junto às fontes mais usuais da história da educação (normativa legal, informes e pesquisas oficiais, livros de texto, programas, etc.), outras mais inovadoras, como provas e trabalhos de alunos, cadernos e exercícios escolares (Ibid., p. 190).

Sobre o conceito de “disciplina escolar” - sua constituição e seu funcionamento -, buscamos apoio em texto de André Chervel, onde o autor escreve que, com o termo disciplina,

> os conteúdos de ensino são concebidos como entidades *sui generis*, próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de

> toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer à sua própria história [...]. Uma “disciplina”, é igualmente, para nós, em qualquer campo que se a encontre, um modo de disciplinar o espírito, quer dizer, de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte (CHERVEL, 1990, p. 180).

Para o autor, as disciplinas são uma “criação da escola”, um jeito que a escola encontrou de responder aos anseios da sociedade, produzindo conhecimentos que só fazem sentido na escola e para a escola. É, principalmente, através das disciplinas que a escola educa seus alunos: o autor destaca que as disciplinas escolares “são o preço que a sociedade deve pagar à sua cultura para poder transmiti-la no contexto da escola ou do colégio” (Ibid, p. 222).

Ao concordarmos com Chervel, percebemos a necessidade de se estudar a história do ensino de Matemática, pois essa história não coincide com a história da Matemática. Viñao escreve que:

> [As disciplinas escolares] nascem e se desenvolvem, evoluem, se transformam, desaparecem, engolem umas às outras, se atraem e se repelem, se desgarram e se unem, competem entre si, se relacionam e intercambiam informações (ou as tomam emprestadas de outras) etc. (VIÑAO, 2008, p. 204).

Chervel (1990, p. 183-184) enuncia três questões/problema sobre a constituição e funcionamento das disciplinas de ensino. São elas: 1) Como a escola age para produzi-las? 2) Elas servem para quê? Por que a escola foi levada a tomar tais iniciativas? De que forma determinada disciplina responde às expectativas dos pais, dos poderes públicos, dos que decidem? 3) Como as disciplinas funcionam? De que maneira elas realizam, sobre o espírito dos alunos, a “formação” desejada? Quais são os resultados do ensino?

A instituição escolar é peça fundamental nesse estudo. Viñao salienta que devemos considerá-la como “espaço não de reprodução ou de mera transposição de conhecimentos externos, mas de produção de saber” (Ibid., p. 188).

1.2 O INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS

Ao tratarmos do ensino praticado no Instituto Júlio de Castilhos, ou seja, de uma unidade singular do sistema escolar, consideramos também que “a construção de cada escola, mesmo imersa num movimento histórico de amplo alcance, é sempre uma versão local e particular neste movimento” (EZPELETA; ROCKWELL, 1986, p. 11). Sobre a “construção da escola”, as autoras acrescentam que:

> É uma trama em permanente construção que articula histórias locais - pessoais e coletivas -, diante das quais a vontade estatal abstrata pode ser assumida ou ignorada, mascarada ou recriada, em particular abrindo espaços variáveis a uma maior ou menor possibilidade hegemônica. Uma trama, finalmente, que é preciso conhecer, porque constitui, simultaneamente, o ponto de partida e o conteúdo real de novas alternativas tanto pedagógicas quanto políticas (Ibid., p. 12).

Segundo as autoras, a escola tem uma história documentada, a qual destaca sua existência homogênea e “difusora de um sistema de valores universais ou dominantes que transmite sem modificação” (Ibid., p. 12). Coexiste, contudo, com essa existência documentada, outra existência “não-documentada”, em que a escola ganha vida. Nessa “história não-documentada”, os professores, os alunos e os pais se “apropriam dos subsídios e das prescrições estatais e constroem a escola” (Ibid., p. 12-13). Portanto, a historiografia de uma escola não deve resumir-se ao estudo da legislação em vigor, dos programas, dos objetivos enunciados nos seus projetos, como se esses representassem por si só a realidade escolar da instituição. Ou ainda, ao contrário, observar apenas o que nela não existe, salientando apenas suas deficiências e carências.

Consideramos que, afora os relatos de lembranças de ex-alunos e ex-professores, sabe-se muito pouco sobre a vida escolar do antigo Instituto Júlio de Castilhos. Pretendemos, então, contribuir para recuperar essa “história não-documentada”. Consideramos que o ensino de matemática ocupa um lugar destacado nessa história, pela importância a ele atribuída na preparação dos futuros alunos da Escola de Engenharia de Porto Alegre, que marcou a origem e a trajetória do Instituto Júlio de Castilhos.

As provas de Matemática analisadas são registros das avaliações elaboradas pelos professores integrantes das bancas de prova - que também eram professores de Matemática do Instituto Júlio de Castilhos. O que pretendemos investigar é o que as provas do Curso Complementar podem revelar sobre o ensino efetivamente praticado na escola. Estudamos assim o ensino de matemática, buscando “as apropriações reais e potenciais que acontecem de baixo para cima, a partir dos sujeitos individuais que vivenciam diariamente a instituição” (EZPELETA; ROCKWELL, 1986, p. 30).

1.3 O PERCURSO DA PESQUISA

Inicialmente, analisamos fontes que descrevem a criação do Instituto Júlio de Castilhos, sua organização inicial, seus objetivos enquanto escola, seus partícipes - alunos, professores e comunidade. As principais fontes para esta pesquisa histórica sobre a constituição do antigo Gymnasio do Rio Grande do Sul e suas modificações posteriores foram os Relatórios da Escola de Engenharia de Porto Alegre, que se caracterizam pela organização, quantidade e qualidade das informações, e estão preservados, organizados e disponíveis para consulta na Biblioteca da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), na seção reservada à sua memória. Também buscamos agregar elementos importantes para essa história através das publicações sobre essa Instituição. Acrescentamos ainda entrevistas com os ex-alunos do Instituto Júlio de Castilhos, Damon Pinheiro Michalski e do Curso Complementar, Alberto da Costa Castro.

Estudamos também a legislação de ensino no período analisado na pesquisa. Sempre procurando as influências - quando explícitas - dessa legislação no cotidiano da instituição, além de textos que se referem à constituição e evolução do ensino secundário no Brasil, com especial atenção para a disciplina de Matemática.

Segundo Valente:

> [...] existe toda uma documentação oficial normativa e legislativa do funcionamento do ensino. Decretos, normas, leis e reformas da educação, constituem material rico para analisar como a educação é pensada em diferentes momentos históricos e de que modo se busca ordenar a sua prática (2005, p.11).

As referências sobre o ensino secundário no Brasil foram encontradas, principalmente, em textos de Wagner Rodrigues Valente (2004a, 2004b, 2007), Otaíza de Oliveira Romanelli (1986), Maria de Lourdes Marioto Haidar (1972), e Ubiratan D’Ambrosio (2008). Já em relação à década de 1930, período de vigência da Reforma Francisco Campos, apoiamo-nos nos textos de Valente (2004a, 2004b, 2007) e nas dissertações de mestrado de Tana Giannasi Alvarez (2004), Denise Franco Campelo Ribeiro (2006) e Maryneusa Cordeiro Otone e Silva (2006).

Buscamos associar o que está expresso em relatórios, na legislação de ensino e demais textos, com os "ensinos reais" evocados pelas provas que foram aplicadas para os alunos. *Grosso modo*, por um lado temos o que aparece escrito nas leis de ensino, projetos da escola e relatórios. Por outro, o que acontece efetivamente na sala de aula, na relação do professor com seus alunos. Chervel acrescenta que o estudo das finalidades do ensino

> não pode, pois, de forma alguma, abstrair os ensinos reais. Deve ser conduzido simultaneamente sobre os dois planos, e utilizar uma dupla documentação, a dos objetivos fixados e a da realidade pedagógica (CHERVEL, 1990, p. 191).

Dentre os textos através dos quais procuramos entender o contexto, os objetivos e métodos adotados, destacamos os Relatórios da Escola de Engenharia de Porto Alegre. Desses relatórios, procuramos fazer uma leitura crítica, considerando que em muitas vezes, se constituíam em prestações de contas do diretor do Instituto para com o diretor da Escola de Engenharia e, consequentemente, da Escola de Engenharia para com seus benfeitores. Procuramos manter essa "dose de desconfiança e crítica"[3] na leitura dos demais documentos analisados.

As atas das provas que foram aplicadas para os alunos do Curso Complementar no Instituto Júlio de Castilhos constituem as principais fontes primárias utilizadas nesta pesquisa. Essas atas, que continham as questões de provas, foram encontradas no arquivo do Colégio Estadual Júlio de Castilhos em meio a outros documentos escolares como históricos, listas de alunos matriculados e atas de reuniões.

Dessas provas, procuramos: analisar os enunciados das questões, identificar a composição das bancas, estudar os conteúdos envolvidos e construir possíveis soluções, consultando livros que, possivelmente, passaram pelas mãos dos alunos e/ou professores desses cursos.

[3] VALENTE, 2005, p. 18.

Também encontramos, no arquivo do Colégio Estadual Júlio de Castilhos, atas com as notas e listas de presenças dos alunos. Tais documentos serviram de apoio para as conclusões em relação à matemática das provas.

Ao transcrevermos as questões das provas, bem como os trechos de textos da época que foram utilizados nessa pesquisa, optamos por manter a grafia original, considerando-a como expressão não apenas de uma época, mas dos usos correntes entre os autores e na instituição.

Na resolução das questões das provas, buscamos apoio principalmente em livros de matemática da época. A principal referência foi o livro “Pontos de Matemática” de Gumercindo Lima (1938) por ser uma publicação organizada “segundo os programas dos cursos complementares”, direcionado para os alunos desses Cursos.

Consultamos livros cujos autores tinham algum vínculo com o Instituto Júlio de Castilhos: os livros do professor Ernesto Lassance, “Cálculo Infinitesimal”, vol. 1 (1959), vol. 2 (1961-62), vol. 3 (1963-64) e “Curso de Cálculo” (1949); “Pontos de Geometria Analítica” (1949) de Antonio Rodrigues; e “Dicionário de Matemática” (1969) de Eugênio Oscar de Brito. O professor Ernesto Lassance lecionou no Instituto Júlio de Castilhos, na Escola de Engenharia e, sobretudo, fez parte das bancas das provas dos Cursos Complementares analisados. Antonio Rodrigues foi professor da Faculdade de Filosofia da UFRGS e do Instituto Júlio de Castilhos e teve importante participação na organização inicial do Departamento de Matemática da UFRGS. Eugênio Oscar de Brito foi professor e diretor do Instituto Júlio de Castilhos no período de nosso estudo. Embora seu “Dicionário de Matemática” tenha data de publicação posterior ao período de nossa pesquisa, tal publicação apresenta definições e abordagens da matemática que, possivelmente, vinha sendo ensinada na época.

Também consultamos livros que tratavam de conteúdos abordados nas questões. Destes, destacamos: “Segunda Arithmetica” de Souza Lobo, que teve suas primeiras edições ainda no século XIX, e foi utilizado como didático nos cursos elementares do Instituto e lembrado pelos ex-alunos entrevistados nessa pesquisa como uma importante fonte de aprendizado da matemática básica; e o “Curso de Matemática” de Manoel Jairo Bezerra (1961- 5ª edição), que consideramos uma fonte interessante por se tratar de um reconhecido didático para os alunos dos cursos Clássico e Científico, posteriores aos Cursos Complementares.

Muitos conteúdos das questões das provas constam em livros clássicos de Cálculo para alunos de cursos superiores, por exemplo: “Cálculo Diferencial e Integral” de N. Piskunov (1977. 5 ed.), “Elementos de Cálculo Diferencial e Integral” de W. A. Granville, P. F. Smith e W. R. Longley (1969) e “O Cálculo com Geometria Analítica” de Louis Leithold (1968). Também encontramos referências aos conteúdos e tipos de questões em livros publicados no século XIX e no início do século XX, como “Tratado de Álgebra (1849)” e “Complemento del Álgebra (1864)” , ambos de Don Juan Cortázar, e “Cours d’álgèbre supérieure à l’usage des candidats: a l’École polytechnique, a l’École normale supérieure, a l’École centrale des arts et manufactures” (1909) de Charles Felix de Comberousse, que foi adotado como didático no Ginásio Nacional (Colégio Pedro II), conforme os Programas de Ensino dos anos de 1892, 1895 e 1898 (LORENZ; VECHIA, 2004, p. 65).

2 A ORGANIZAÇÃO ESCOLAR DO GYMNASIO DO RIO GRANDE DO SUL NOS PRIMEIROS ANOS: 1900-1930

2.1 A CRIAÇÃO DO GYMNASIO DO RIO GRANDE DO SUL

O Colégio Estadual Júlio de Castilhos iniciou sua história como Gymnasio do Rio Grande do Sul, instituição de ensino secundário laica e mantida pela Escola de Engenharia de Porto Alegre. Era a virada do século XIX para o século XX, período em que o ensino secundário no Brasil dava seus primeiros passos, voltado para os exames de preparatórios, que representavam o caminho mais curto para o ingresso nos cursos superiores.

Para entender esse momento histórico, faremos uma descrição sucinta do desenvolvimento do ensino secundário no Brasil do início do século XX e, também, comentaremos como os exames de preparatórios influenciaram na constituição de um ensino secundário mais abrangente e institucionalizado.

No decorrer do século XIX, segundo Romanelli (1986), a maioria dos colégios secundários estava nas mãos de iniciativas particulares, o que acentuava o caráter “classista e acadêmico” desse ensino, já que apenas as famílias mais abastadas podiam pagar a educação de seus filhos. Também a pressão exercida por essa elite fez com que as escolas secundárias se tornassem “meros cursos preparatórios” para o Ensino Superior, “a fim de acelerar o preparo de seus filhos e assim interligá-los no rol dos homens cultos” (Ibid., p. 40).

A dificuldade na organização do ensino secundário no país passou pelo seu objetivo meramente propedêutico, já que a posse das certidões de aprovação nos exames de preparatórios habilitava os estudantes à matrícula em cursos superiores, sem necessidade da comprovação de frequência e/ou conclusão do curso secundário.

Os exames de preparatórios (parcelados) foram instituídos pela mesma lei que criou, em 11 de agosto de 1827, as Academias de São Paulo e Olinda. Segundo seu art. 8º, os estudantes que pretendiam matricularem-se nos Cursos Jurídicos deveriam ter idade mínima de quinze anos e apresentar certidões de aprovação em Francês, Latim, Retórica, Filosofia Racional e Moral e Geometria. Tais conhecimentos seriam aferidos através de exames realizados junto aos próprios Cursos Jurídicos (HAIDAR, 1972, p. 47).

Segundo Valente,

> desde que foram criados, os exames preparatórios, também conhecidos como exames parcelados, constituíram a referência principal de ensino para aqueles que, depois de terem passado pelo ensino de primeiras letras – ler, escrever e contar -, almejavam o ingresso no ensino superior (2004b, p. 20).

A partir desse período surgiram livros e apostilas organizados pelos cursos preparatórios que continham os “pontos” a serem decorados pelos alunos de acordo com os “Programas de exames de preparatórios” divulgados no Diário Oficial. As provas eram escritas e orais, organizadas a partir de uma lista de pontos, dentre os quais, um seria sorteado[4]. Para prestar exame de aritmética, o candidato deveria, antes, habilitar-se no exame de português. Para prestar o exame de álgebra ou geometria, o candidato deveria estar habilitado em português e aritmética. Para prestar exame de trigonometria esférica, o candidato deveria estar habilitado em português, aritmética, álgebra e geometria (VALENTE, 2004b, p. 19-20).

Mesmo com denúncias de fraude e desorganização, que acabaram por desmoralizar esse sistema, os exames de preparatórios continuaram sendo o caminho mais rápido para os cursos superiores no período Imperial e durante a República Velha.

Segundo Valente (2004b, p. 23), de fato, a sociedade brasileira do século XIX não tinha necessidade de uma “formação de cultura geral, a formação do homem culto dado pelo bacharel saído dos estudos secundários”. Para essa elite da população com acesso à educação superior, o que importava era a conclusão dos cursos superiores e o título de “Bacharel em sciencias e letras”, ou seja, o título de conclusão do ensino secundário, pouco representava nessa trajetória.

Valente destaca que:

> [...] o ensino secundário seriado não se difundia. As exigências de nossas classes favorecidas estavam voltadas para a formação do doutor – deferência social dada a todo aquele que tivesse cursado estudos superiores. E, quanto mais rápido isso pudesse se realizar, tanto melhor. O caminho dos preparatórios era muito mais rápido do que o da seriação escolar secundária. Preparar-se para o ensino superior, para o ingresso nas faculdades, representava estudar os

[4] Os pontos para aritmética nesses “Programas” eram os seguintes: ponto 1 – Quantidade, número *e* numeração; ponto 2 – Estudo das operações fundamentais; ponto 3 – Potências e raízes do 2º e 3º graus; ponto 4 – Operações sobre as frações; ponto 5 – Principais propriedades dos números; ponto 6 – Noções sobre frações decimais, periódicas e contínuas; ponto 7 – Metrologia; ponto 8 – Proporções; ponto 9 – Progressões; ponto 10 – Logaritmos; ponto 11 – Regra de três, de juro, de desconto, de companhia e de anuidade, problemas e cálculos práticos (VALENTE, 2004, p. 19).

> pontos dos exames. Esses pontos organizavam, por exemplo, toda a matemática escolar e seu ensino (Ibid., p. 24).

Romanelli (1986) explica que dois aspectos começaram a pressionar o sistema de ensino no final do século XIX, a fim de que se modificasse o seu caráter elitista e propedêutico: “a estreita oferta passou a chocar-se com a crescente procura” e a “evolução de um modelo exclusivamente agrário-exportador para um modelo parcialmente urbano industrial afetou o equilíbrio estrutural dos fatores influentes no sistema educacional” (Ibid., p. 46).

É nesse contexto, dos primeiros anos do período republicano, numa Porto Alegre com aproximadamente 74 mil habitantes, que foram criados, em 1896, a Escola de Engenharia de Porto Alegre e, em 1900, o Gymnasio do Rio Grande do Sul.

Em março de 1909, iniciaram-se as obras de construção de um novo prédio para o Gymnasio (Figura 2.1), que foram concluídas em 1910 (Figura 2.2). Nas palavras de seu diretor Manoel Theophilo Barreto Vianna:

> É um belo edifício e julgo não exagerar taxando-o de modelo sob todos os pontos de vista. A distribuição interna, baseada nos princípios de hygiene e conforto, a fachada de um primoroso gosto architectonico attestam em alto gráo o genio creador do seu construtor, nosso collega, Manoel Itaqui, já tão conhecido em nosso meio (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910, p. 5).

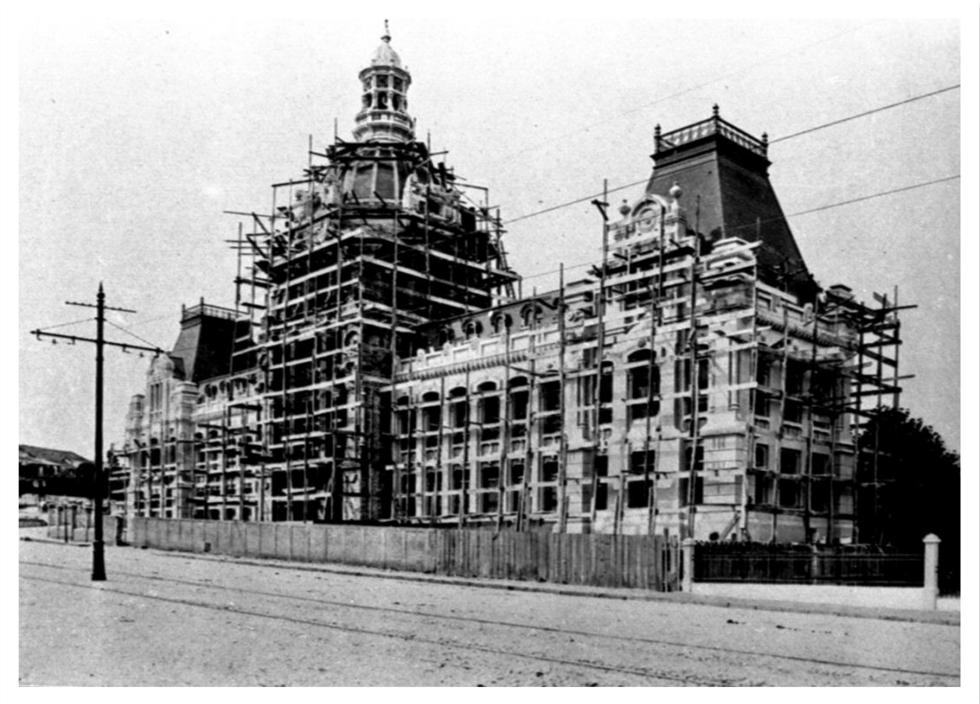


Figura 2.1: Prédio do Instituto em construção - 1909
Fonte: Museu da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Figura 2.2: Prédio do Instituto Júlio de Castilhos
Fonte: Museu da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Sobre esse novo prédio, construído especialmente para abrigar o Instituto Júlio de Castilhos, José Nunes Tietböhl - que foi aluno e professor desse Instituto -, acrescenta que:

> Era uma imponente obra arquitetônica, um palácio, com um bloco central, ladeado por dois outros, que terminava em zimbório de telhas metálicas, encimado por um lanternim de vidros vermelhos, iluminados minutos antes das 20 horas, dando todos os dias a hora certa à população de Porto Alegre. [...] Os blocos laterais tinham telhados em forma de troncos de pirâmides quadradas, revestidos de placas metálicas e terminados por gradil na parte superior. A monumental escadaria de mármore era guarnecida por dois grifos-leões de cobre oxidado. No patamar da escadaria estava o busto do patrono do Instituto, em bronze (TIETBÖHL apud LIMA, 1990, p. 12).

Flávio Heinz (2009, p. 266) traz elementos que colocam o Rio Grande do Sul como “um caso excepcional” onde a adoção, por parte das elites locais, das ideias positivistas envolveu o encaminhamento de um “projeto de administração científica” do ensino superior por parte de um núcleo intelectual de professores da Escola de Engenharia de Porto Alegre, enquanto, em outros estados, as propostas não passavam do campo da educação básica.

Ainda segundo Heinz, a Escola de Engenharia de Porto Alegre foi planejada seguindo o projeto comtiano de universidade técnica, onde o "bacharelismo típico do ensino superior brasileiro da época" era substituído por uma "escola prática, inserida no contexto social circundante". O autor cita a conclusão de René Gertz de que o modelo escolhido para a Escola de Engenharia "não fora o da escola politécnica francesa, mas sim o da Technische Hoshschule alemã e do modelo norte-americano[5]" (GERTZ apud HEINZ, 2009, p. 267).

Podemos supor que a criação do Gymnasio do Rio Grande do Sul também estava inserida no contexto dos ideais positivistas, já que, segundo Pesavento (1990, p. 84), a Escola de Engenharia surgiu pela "iniciativa de um grupo de engenheiros militares, de formação positivista, e professores da Escola Militar de Porto Alegre".

Em relação à influência positivista no ensino de Matemática, Ubiratan D'Ambrosio destaca que:

> O império havia visto o florescimento do positivismo de Augusto Comte e a República foi, efetivamente, proclamada sob um paradigma comtiano. O apostolado positivista no Brasil era uma força dominante. Matematicamente, isto significou a consolidação das propostas positivistas, já em vigor nas Escolas de Engenharia (D'AMBROSIO, 2008, p. 59).

O curso de preparação que originou o Gymnasio do Rio Grande do Sul funcionava na Escola de Engenharia desde 1897. Esse curso oferecia aos estudantes os conhecimentos necessários para aprovação nos exames de preparatórios, habilitando-os para matrícula nessa Escola, mas, segundo a avaliação de seus professores, mostrou-se insuficiente na preparação básica aos futuros estudantes de engenharia. De modo que, em 23 de março de 1900, esse curso preparatório "transformou-se"[6] em uma escola de ensino secundário[7] com objetivos

---

[5] Heinz aponta o sistema norte-americano do Land-Grant College que "já seguido com notável êxito pelos Estados Unidos da América do Norte (...) associava o ensino técnico à pesquisa científica, e à extensão rural (ou urbana, conforme o caso). Os conhecimentos hauridos na investigação seguiam dois caminhos: através do professor atingiram as salas de aula, e por meio dos agentes especializados de informação (os extensionistas) chegavam ao povo. Assim tanto as casas de ensino quanto a comunidade falariam a mesma linguagem. Os núcleos didáticos não se encontravam superpostos à sociedade, mas profundamente entrelaçados com o tecido social" (SOARES apud HEINZ, 2009, p. 287).

[6] Na página 10 do Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1901 o então diretor, Engº. João José Pereira Parobé, faz referência ao Gymnasio: "Equiparado ao Gymnasio Nacional, mantido pelo Governo da União, por decreto nº 3688 de 23 de junho de 1900, o Gymnasio do Rio Grande do Sul, transformação do extincto curso preparatório desta Escola, foi creado tendo em vista as altas razões que conheceis. Preparando até certo ponto alumnos para os cursos technicos da Escola, elle

mais abrangentes do que a simples preparação para os exames, e que continuou vinculada à Escola de Engenharia até meados da década de 1930.

Nos primeiros anos de funcionamento, o Gymnasio do Rio Grande do Sul passa a denominar-se Instituto Gymnasial Júlio de Castilhos[8] numa clara homenagem ao líder republicano e positivista (Figura 2.3). Segundo as palavras publicadas nos relatórios por seus idealizadores, o Instituto Júlio de Castilhos procurou oferecer aos seus alunos uma formação mais geral, assumindo assim a função de "viveiro" para os futuros alunos da Escola de Engenharia de Porto Alegre, além de

> dar-lhes uma educação completa, integral, proporcionando-lhes o ensino fundamental básico, tanto para o exame de conjuncto, prova de capacidade aos que se pretendam matricular nas Escolas Superiores, como para os que queiram na vida pratica dedicar sua actividade ao commercio, às industrias, à agricultura e ao funccionalismo publico (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1912, p. 4).

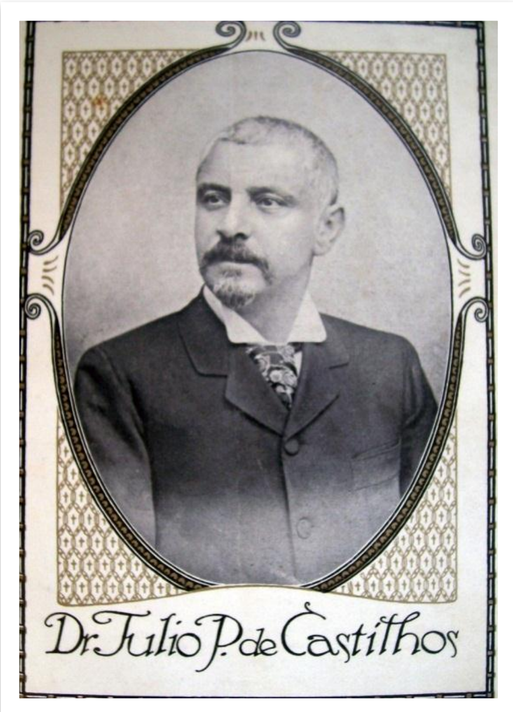


Figura 2.3: Foto de Júlio de Castilhos
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1910

---

forma candidatos à matrícula nas faculdades livres de Direito e de Medicina e Pharmacia de nosso Estado, que acham-se organisadas pelas faculdades congeneres mantidas pela União."

[7] Nível de escolaridade imediatamente subsequente ao ensino primário (ou de primeiras letras: ler, escrever e contar), anterior ao ensino superior (VALENTE, 2004).

[8] No decorrer dos anos, o Gymnasio do Rio Grande do Sul recebeu outras denominações: Instituto Gymnasial Júlio de Castilhos (1908), Instituto Júlio de Castilhos (1916) e finalmente Colégio Estadual Júlio de Castilhos (1942). Usaremos neste texto, a partir deste trecho, o nome usado na década de 1930, ou seja, Instituto Júlio de Castilhos.

Nessa época, anterior a 1930, as reformas educacionais implantadas no Brasil concentravam-se no ensino primário e no acesso ao ensino superior, não discutindo diretamente o ensino dos cursos secundários. Sobretudo, havia na cidade do Rio de Janeiro, então Capital do país, o Colégio Pedro II como um modelo que deveria ser seguido pelos institutos equiparados[9] e, por isso, nele concentravam-se as discussões e reformas sobre mudanças na estrutura e funcionamento dos cursos secundários.

A equiparação ao Colégio Pedro II (Gymnasio Nacional)[10] deu credibilidade ao Instituto Júlio de Castilhos validando os títulos de "Bacharel em Sciencias e Letras" e seus certificados de aprovação nos exames de preparatórios. Mas, nos bastidores desse Instituto, havia inquietação e descontentamento com essa equiparação e também com a "praga dos exames de preparatórios"[11]. De modo que em 1909, seu diretor, professor Manoel Theophilo Barreto Vianna, manifesta-se contrário à equiparação ao Colégio Pedro II, demonstrando preocupação com a situação das escolas secundárias de "reféns dos exames de preparatórios", que acabavam por levar seus alunos, principalmente dos últimos anos, a abandonarem o curso tão logo fossem aprovados. Numa de suas argumentações, Manoel Vianna escreve:

> [...] permitindo nutrirmos a esperança de em curto prazo de tempo achar-se o Instituto Gymnasial Júlio de Castilhos preparado para o cabal desempenho de sua importante missão que é a educação da mocidade Riograndense sob o tríplice aspecto: physico, intellectual e cívico. Julgamos que devem, todos que se interessam pela instrucção e aspiram ver quanto antes reorganizado o ensino no Brazil, promover perante os poderem públicos, quer da União, quer dos Estados a propaganda em pról da mais completa liberdade do ensino para que os Institutos de ensino superior e secundário da Republica tenham a faculdade de livremente organizar e adoptar methodos mais racionaes e exequíveis do que os do actual ensino official, pesados e incongruentes (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE DO ANO, 1909, p.83).

---

[9] "Após a proclamação da República, a partir da chamada Reforma Epitácio Pessoa (Decreto n. 3890, de 1º de janeiro de 1901), consolidou-se o regime de equiparação ao Colégio Pedro II, válido para as escolas estaduais, municipais e particulares" (NAGLE apud VALENTE, 2004b, p. 33), levando-as a funcionar com a mesma estrutura didático-pedagógica do estabelecimento padrão, Colégio Pedro II.

[10] Pelo Decreto n. 981, de 8 de novembro de 1890, assinado pelo Ministro da Instrução Pública, Benjamim Constant Botelho de Magalhães, o Imperial Colégio de Pedro II passava a denominar-se Ginásio Nacional, retornando à denominação original Colégio Pedro II, sem o "de", pelo Decreto n. 8660, de 5 de abril de 1911 (HAIDAR, 1972, p. 137; LLOPIS, 2006, p. 180-181).

[11] Termo utilizado em 1903 pelo Diretor da Escola de Medicina da Bahia e que foi citado no relatório do Instituto Júlio de Castilhos pelo seu então diretor Manoel Theophilo Barreto Vianna (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910).

De fato, a preocupação do diretor do Instituto estava relacionada também com a diminuição do número de alunos e consequente redução da receita, já que o ensino no Instituto Júlio de Castilhos era pago pelas famílias. Heinz (2009) afirma que as relações entre o Governo do Estado e a Escola de Engenharia eram "muito cordiais", e envolviam recursos públicos em abundância principalmente para a construção de instalações - "notadamente a construção de um imponente prédio em estilo Renascença alemã para abrigar o Instituto Júlio de Castilhos" (Ibid, p. 268). Mas a ideia de um vínculo privilegiado entre o Estado e a Escola é contestada nos relatórios. Neles, foi frequentemente salientado que as "receitas superavam as despesas", ou seja, que a Escola se mantinha com recursos próprios, contrariando "a lenda de que a Escola de Engenharia era a preferida pelo poder público, do qual recebia gordos auxílios" (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1907, p. 5).

Ainda segundo Heinz (2009, p. 269), o vínculo da Escola de Engenharia de Porto Alegre com o Estado "se materializaria em três níveis: na identidade comum, assegurada pelo positivismo e pelo vínculo com o Partido Republicano Rio-grandense (PRR); pela percepção estratégica da Escola 'como agente de fomento do desenvolvimento econômico e tecnológico' no Estado e, finalmente, pela ajuda financeira pública à Escola" (Figura 2.4).

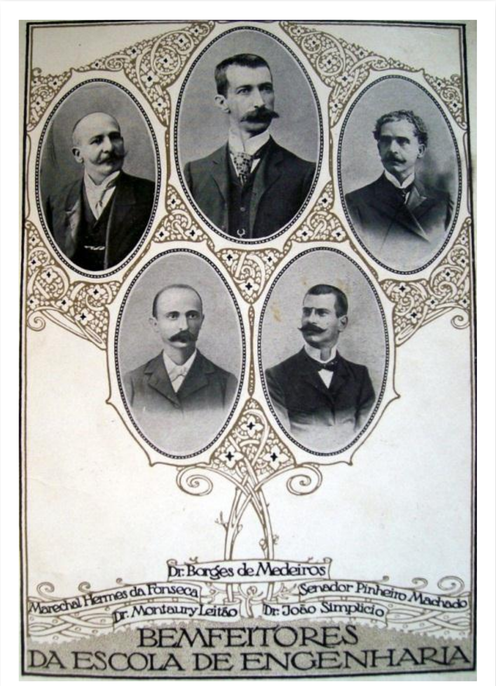


Figura 2.4: Benfeitores da Escola de Engenharia de Porto Alegre - 1910
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1910

Na figura 2.5, vemos os prédios da Escola de Engenharia, ao centro, do Instituto Júlio de Castilhos, à direita, e, ao fundo, a cidade de Porto Alegre, no início do século XX.

Figura 2.5: Escola de Engenharia
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1918

2.2 A ORGANIZAÇÃO ESCOLAR NO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS ATÉ 1930

Nos primeiros anos de funcionamento (1900-1910), o Instituto Júlio de Castilhos esteve organizado em seis séries (anos), com distribuição das disciplinas escolares conforme o Quadro 2.1:

Série (anno)	Aulas[12]
I	Portuguez, Francez, Geographia, Arithmetica e Desenho.
II	Portuguez, Francez, Inglez, Geographia, Mathematica (Arithmetica e Algebra) e Desenho.
III	Portuguez, Francez, Inglez, Latim, Geographia, Mathematica e Desenho.
IV	Portuguez, Francez, Inglez, Latim, Allemão, Grego, Historia Universal, Desenho e Mathematica.
V	Inglez, Allemão, Latim, Grego, Historia universal, Physica e Chimica, Litteratura, Mecanica e Astronomia e Historia natural.
VI	Grego, Inglez, Francez, Allemão, Latim, Mathematica, Historia do Brazil, Physica e Chimica, Litteratura, Lógica e Historia natural (Mineralogia e Geologia, Zoologia e Botanica).

Quadro 2.1: Organização das Aulas (1900-1910)
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1908, p.157-159

Desde os primeiros anos de funcionamento, percebe-se através das argumentações contidas nos relatórios, que os professores responsáveis pela organização deste “Gymnasio” buscavam oferecer aos seus alunos um ensino que fosse independente da “praga dos exames parcelados de preparatórios”. Fruto dessa busca, o currículo escolar do Instituto Júlio de Castilhos incluía aulas que não eram exigidas nos exames preparatórios: “Inglez, Latim, Allemão, Grego, História Universal, História Natural, História do Brazil, Physica e Chimica, Literattura, Mecânica, Astronomia e Lógica” (conforme Quadro 2.1). Além dessas disciplinas, os alunos estudavam as disciplinas que eram exigidas nesses exames para admissão nos cursos superiores da Escola de Engenharia de Porto Alegre, ou seja, “Portuguez, Francez, Geographia, Arithmetica, Algebra, Geometria preliminar, Trigonometria espherica e Desenho” (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1901).

Com essa organização de disciplinas, supomos que os professores do Instituto Júlio de Castilhos pretendiam contrapor-se a uma tendência predominante dos cursos secundários de organizar o ensino segundo a lógica dos exames. Haidar descreve que:

[12] Neste mesmo relatório aparece a denominação “Disciplina”, por exemplo, quando se refere aos resultados dos exames de admissão e de 2ª época.

> A pobreza dos currículos da maior parte dos colégios particulares, em geral restritos às disciplinas exigidas como preparatórios, e o sistema de estudos parcelados que continuou a imperar até mesmo em bons estabelecimentos privados, atestam que o anacrônico sistema de exames representava o mais sério obstáculo à renovação desse ramo do ensino.
> [...] Foram raríssimos, mesmo nos anos posteriores, os colégios particulares que ofereceram, em nível secundário, aulas de física, química e história natural. Tais disciplinas, desnecessárias para a matrícula nos cursos superiores e por tal razão ignoradas pela clientela das aulas secundárias [...] (1972, p. 201, 203).

Passados dez anos de funcionamento, em 1911, a direção do Instituto decidiu criar um curso primário (Figura 2.6), apresentando a argumentação de que os alunos não chegavam ao secundário com a devida preparação. Esse curso primário era composto de um curso elementar de dois anos, dividido em três seções, e um curso médio de dois anos. O curso secundário passou a ter quatro anos de duração. A expectativa era de que os alunos iniciassem seus estudos no 1º ano elementar com oito anos de idade e concluíssem seus estudos no Instituto com dezesseis. Também havia uma expectativa de que essa fosse a idade mínima exigida para que os estudantes pudessem se matricular nos cursos superiores (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910, p. 75-81), expectativa que foi concretizada mais tarde conforme Estatutos da Escola de Engenharia de 10 de março de 1922.

Figura 2.6: Sala de aula em 1912
Fonte: Museu da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Os alunos ingressantes no curso elementar realizavam um “exame de capacidade mental” na primeira semana de aulas a fim de serem avaliados e alocados em uma das três seções do curso. De modo que os alunos “mais atrasados” formavam a primeira seção, os “médios” formavam a segunda e os “mais adiantados” a terceira. As duas primeiras seções formavam uma única turma de alunos (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1922, p. 11).

Para a nova organização do ensino no Instituto, estabelecida a partir de 1911, foi definida a seguinte distribuição das disciplinas (Quadro 2.2):

Curso primário	
Primeira e segunda secções	Leitura, Noções de sciencia e hygiene, Contabilidade, Ditado, Caligraphia, Música, Grammatica, Arithmetica, Geometria e Geographia.
Terceira secção	Leitura, Grammatica, Arithmetica pratica, Geographia e instrucção cívica, Geometria pratica, Calligraphia (exercício caseiro), Lições de cousas, Desenho e Gymnastica.
1º anno medio	Portuguez, Francez, Arithmetica e Geometria, Geographia e instrucção cívica, Sciencias e hygiene (noções) e Desenho.
2º anno medio	Portuguez, Inglez, Francez, Allemão, Italiano, Mathematica, Geographia e instrucção cívica, Sciencias e hygiene (noções), História do Brazil e Desenho.
Curso secundário	
1º anno	Portuguez, Inglez, Francez, Allemão, Italiano, Chorographia, História do Brazil, Desenho, Latim, Mathematica, Physica e Chimica.
2º anno	Portuguez, Inglez, Francez, Allemão, Italiano, História Universal, Desenho, Latim, Mathematica, Physica e Chimica.
3º anno	Inglez, Allemão, História e instrução civica, Desenho, Latim, Mathematica, Physica e Chimica, História Natural (Zoologia e Botanica, Mineralogia e Gealogia).
4º anno	Italiano, Chorographia, História do Brazil, Desenho, Latim, Mathematica, Physica e Chimica.

Quadro 2.2: Organização das disciplinas escolares (a partir de 1911)
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1911, p. 13, 36-39 e Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1914, p. 24

Para complementar sua formação, os alunos do Instituto ainda tinham aulas de “gymnastica sueca” e “allemã” (figura 2.7), esgrima (figura 2.8), canto e instrução militar, com instrução de tiro de fuzil, nomenclatura, evolução e esgrima de baionetas.

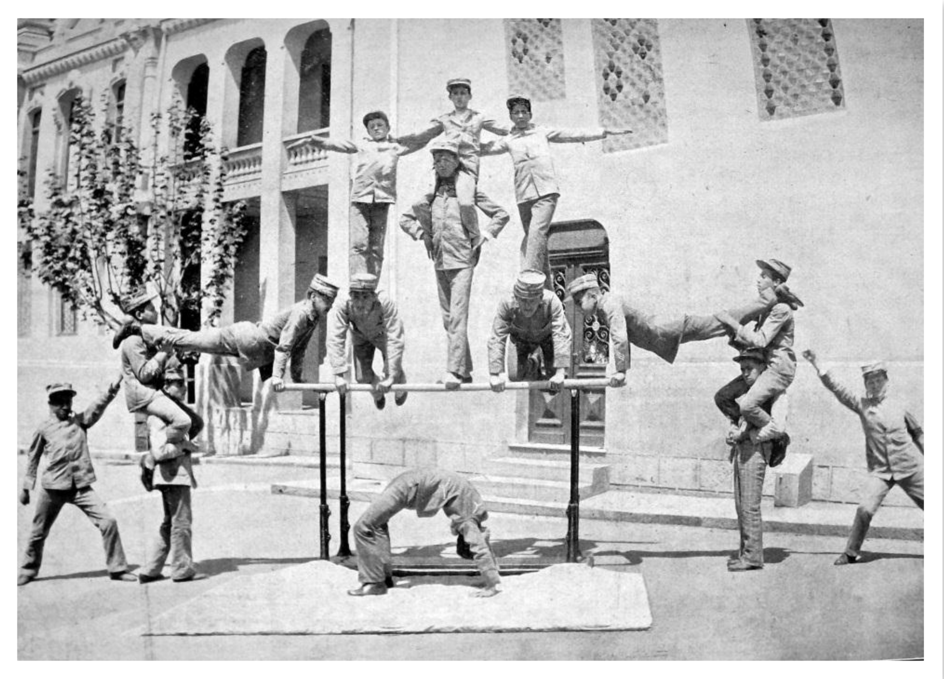


Figura 2.7: Alunos nos aparelhos e ginástica
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1909

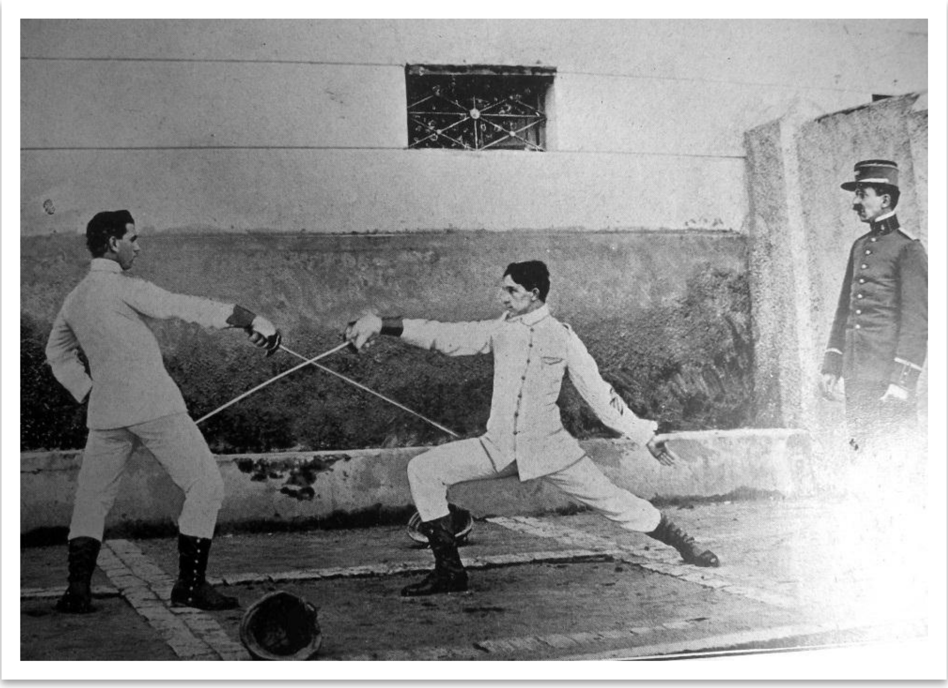


Figura 2.8: Aula de esgrima
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1909

Ao término do curso, e cumpridas as horas necessárias, o aluno maior de 16 anos recebia o certificado de reservista.

> Quanto a esta parte da educação fundamental na parte referente à instrucção militar, o Instituto Gymnasial Júlio de Castilhos, orgulha-se em ter sido o primeiro estabelecimento de ensino do Estado que a incluio em seus programmas, tres annos antes de haver o Governo Federal tornado-a obrigatória em todos os Institutos de ensino superior e secundario da Republica por Decreto nº 6947 de 8 de maio de 1908 (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1912).

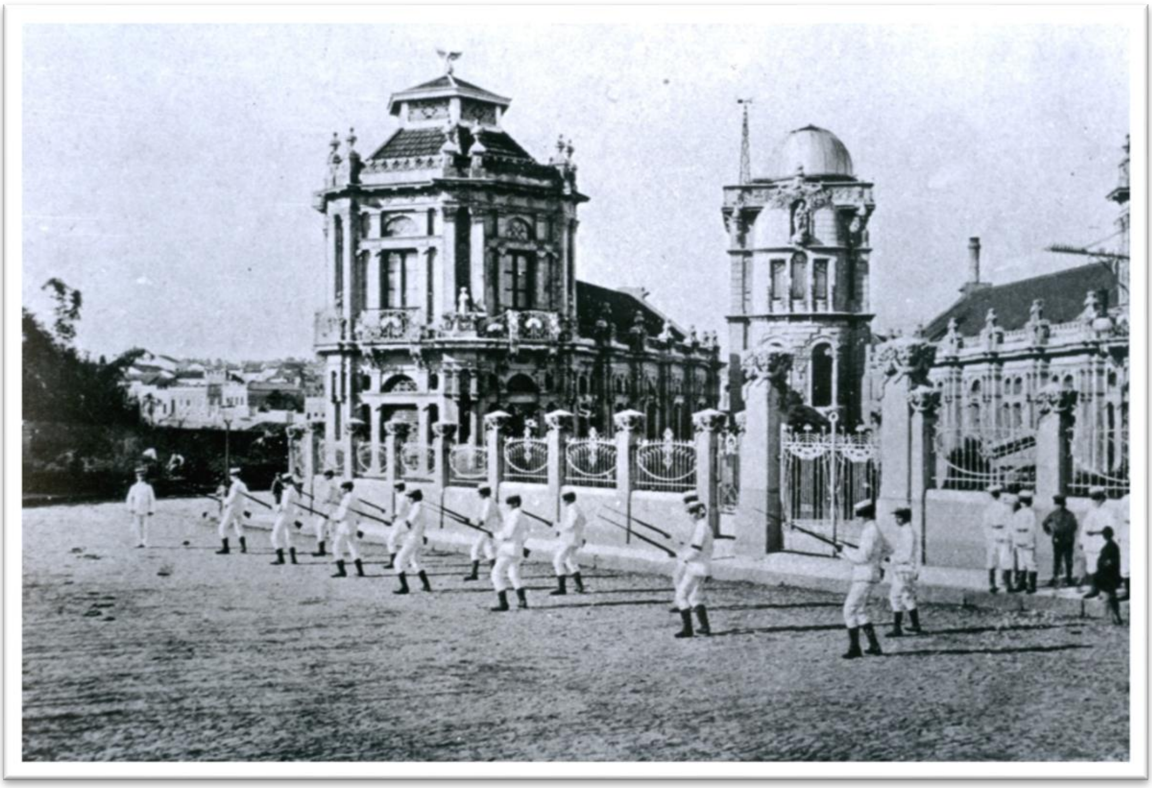


Figura 2.9: Alunos em aula de esgrima de baioneta
Fonte: Museu da Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Esses traços de escola militar (Figura 2.9) contribuíram para que o Instituto Júlio de Castilhos deixasse a imagem de uma escola exclusivamente masculina, contestada pela presença de meninas nos livros de matrículas e históricos, observada durante a pesquisa[13]. Inclusive, foi uma ex-aluna a primeira professora contratada para lecionar no Instituto, cujo corpo docente, até o ano de 1911, era composto exclusivamente por homens, predominantemente, engenheiros e/ou

[13] Nos livros de matrículas e nos relatórios analisados, encontramos os nomes das alunas: Eva Primat de Araujo (matriculada em 1904), Catharina Celina de Souza e Wanda Mallmam (matriculadas em 1905), Maria das Dores Pereira Pacheco (com matrícula indicada pelo Governo Municipal em 1909), e Lindoya de Oliveira (indicada pelo Conselho Escolar em 1909), entre outras.

militares. Em função do advento do curso elementar, a necessidade da contratação de uma professora foi justificada com a seguinte argumentação:

> Pensamos em dar a regência do primeiro anno elementar a uma professora, porque sendo a escola primária a ampliação da família, a educação nella ministrada deve ser a continuação da educação do lar, e, só em outra mulher a criança encontrará o mesmo carinho, a mesma meiguice e a mesma paciência de uma mãe. É ponto hoje que os mestres de pedagogia estão acordes, o de dar-se preferência a mulher para a missão de guia das crianças em seus primeiros passos fora do lar; substituindo os cuidados de mãe intelligente, a professora saberá conduzir pela mão, sempre com bondade e com sorriso nos lábios, os alunnos a si confiados, ao preparo para a vida e para a sociedade (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1911, p. 8).

Assim, em 10 de agosto de 1912 foi contratada a ex-aluna Pepita Leão, que havia recebido o título de “Bacharel em Sciências e Letras” no ano de 1907. Possivelmente Pepita Leão tenha sido a primeira discente a voltar ao Instituto como docente, encarregando-se das disciplinas de “Leitura, Contabilidade, Dictado, Geographia e Caligraphia” para a turma de 1º ano do curso elementar (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1912, p. 10 e 16).

2.3 O ENSINO NO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS ATÉ 1930

Nas observações realizadas nos relatórios, percebemos que havia preocupação por parte do grupo de professores com o ensino que estava sendo experimentado naquela coexistência do ensino secundário seriado com os exames de preparatórios. Respeitava-se o “Código de Ensino”, expressão da equiparação ao Gymnasio Nacional, mas isso não impedia que o Instituto Júlio de Castilhos investisse em novos métodos e programas de ensino, principalmente aqueles que estavam sendo aplicados em outros países. Conforme João José Pereira Parobé, então diretor da Escola de Engenharia, referindo-se ao ensino no Instituto Júlio de Castilhos:

> O ensino foi feito conforme o Código do Ensino, entretanto seria conveniente uma reforma nesse sentido, acabando com esse Código e deixando plena liberdade, pois só assim ter-se-á um ensino secundário conveniente e efficaz (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1909, p. 6).

Também percebem-se nesses relatórios iniciativas para melhorar o ensino que demonstram a busca de propostas pedagógicas que estavam sendo experimentadas em outros países. Sobretudo em relação ao uso de laboratórios (Figura 2.10) como apoio para o ensino de sala de aula, conforme expõe João Parobé (1910):

> [...] mas, para chegarmos ao objectivo collimado, urge que possam ser organisados e mantidos no Estado, não um, mas muitos Institutos de ensino fundamental, apparelhados segundo os principios da moderna educação, dispondo de um corpo de professores illustrados, capazes de bem cumprirem a sua sublime missão de mestres, e, de bons gabinetes, para o estudo pratico das sciencias physicas e naturaes bem como de officinas para o ensino do trabalho manual, systema de educação o mais preconisado e hoje adoptado nos Institutos de ensino da Belgica, da Allemanha e dos Estados Unidos (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910, p. 76).

Figura 2.10: Laboratório de “Sciencias fisicas e naturaes”
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1911

No relatório referente ao curso elementar, apresentado ao então diretor do Instituto Júlio de Castilhos, o professor Ulisses Cabral argumenta em favor de um ensino “sob bases practicas e intuitivas”, que comece sempre do concreto para o abstrato e de acordo com a capacidade de compreensão dos “aprendizes”. Também argumenta sobre a necessidade de os alunos decorarem os “preceitos, regras e exemplos ensinados”, já que assim estariam fazendo um “conveniente exercício à utilíssima faculdade da memória, como também para, por assim dizer, ter à mão os meios indispensáveis para trabalhos ulteriores.” Explica ainda que não se trata de decorar “vaga e papagaiamente uma regra” e sim - segundo a “pedagogia contemporânea” -, compreender para decorar. Isto sim, segundo Ulisses Cabral, daria o “melhor resultado para o aperfeiçoamento do intellecto” (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1911, p. 12).

Nesses primeiros anos de funcionamento, o Instituto Júlio de Castilhos esteve envolvido ativamente num esforço de transição entre um ensino secundário que visava tão somente a aprovação nos exames preparatórios para um ensino secundário seriado que buscava dar uma formação mais geral aos estudantes. Assim, o diretor do Instituto argumentava que:

> [...] os methodos e processos devem tender a que o ensino seja patriotico e racional, isto é, que interesse primeiro aos sentidos que à intelligencia, se bazeie nas cousas ou em suas representações em vez de bazear-se nos livros ou na palavra do professor, parta do que está mais próximo aos alumnos, para elevar-se gradualmente ao que não podem ver, porém por cuja inducção é fácil desde que se tenha uma noção exacta do que as cerca. Não se pode dizer que se estuda physica, chimica e historia natural, quando se segue methodicamente as lições de um livro a que se acrescenta as explicações theoricas do professor e uma ou outra experiencia, ou muitas, todas as possíveis, feitas por este ou por seus auxiliares. Nestas sciencias, ao livro e a explicação do professor deve seguir-se o extracto e a representação por meio de desenho, e a este, experiencia pratica feita pelo alumno (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1912, p. 5-6).

Nessas argumentações podemos supor influência do “Método de Ensino Intuitivo ou Lições de Coisas”, de origem na França e que foi divulgado no Brasil no final do século XIX em diversos manuais para professores e alunos. Segundo Vera Teresa Valdemarin (2000, p. 76-77), esses manuais visavam “modernizar a forma de ensinar”. O método era explicado e exemplificado, ou seja, vários procedimentos buscavam enfatizar que “o ato de conhecer tem início nas operações dos sentidos sobre o mundo exterior, a partir das quais são produzidas sensações e percepções sobre os fatos e objetos que constituem a matéria-prima das ideias”[14].

[14] A autora apresenta, em sua análise, alguns desses manuais: “Lições de Cousas” de autoria do Dr. Saffray, publicado em 1908; “Plan d’études et leçons de choses”, de Jules Paroz, publicado em 1875; “Exercises et travaux pour les enfants selon la méthode et les procedés de Pestalozzi et de Froebel”,

Pelo Método de Ensino Intuitivo, o ensino deveria evoluir do mais fácil para o mais difícil; do que se sabe para o que se ignora; das coisas para os nomes; ou seja, do concreto para o abstrato, conforme mencionado anteriormente. É nessa direção que seguiu a proposta para o ensino elementar no Instituto Júlio de Castilhos:

> O alumno deve ser o auxiliar, o collega, repito, do professor. O que digo das sciencias physicas e naturaes, refere-se igualmente aos outros estudos, à geographia e à historia por exemplo. No ramo das sciencias mathematicas e das letras, com excepção das mencionadas, os processos e methodos não são os mesmos, porém devem tender ao mesmo objecto. Do fácil ao difficil, do conhecido ao desconhecido, do simples ao composto, do concreto ao abstracto, eis como se deve proceder (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1912, p. 5-6).

Ainda sobre o ensino, destacamos alguns detalhes sobre como os professores lidavam com situações de indisciplina e como recompensavam os alunos com bons desempenhos. No relatório do Instituto Júlio de Castilhos referente ao ano de 1911, existe um texto denominado “Penas e recompensas” em que o professor Ulisses Cabral escreve que, naquele ano, ocorreram apenas casos de “pequenas quebras de disciplina, inattenção relapsa, conversa reincidente quando se solicita silêncio, immoderação, etc.” e apenas um “caso obsceno commettido na presença de uma porção de condiscípulos”. A este foi aplicada a pena de “reprehensão pública, seguida de tarefa escripta com dizeres análogos ao acto e perdão solicitado aos presentes, para os quaes o delicto era considerado uma offensa moral”. Nesse mesmo texto, a punição através da tarefa escrita é defendida como a melhor pena,

> para os delictos escolares, desde que seja “razoavelmente calculada, exigindo-se asseio e boa qualidade de lettra. (...) Deve ser suave de modo que a creança reconheça a possibilidade de fazê-la sem maior sacrifício, achando-se capaz de dignificar-se aos olhos do mestre. De tal forma não ha revolta na consciência do alumno contra seu preceptor, em que ele fica mais claramente percebendo um amigo guardião antes que um irado carrasco (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, p. 22-23).

---

de autoria de Fanny Ch. Delon e M. Delon, em edições de 1892 e 1913 e “Primeiras lições de coisas”, de Norman Allison Calkins, publicado em 1886, todos difundidos nas escolas e para os professores brasileiros (VALDEMARIN, 2000, p. 78).

Figura 2.11: Biblioteca
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1913

Como recompensa para os alunos que se destacaram positivamente nesse ano, “além de boas notas”, três alunos - sendo um de cada seção elementar- receberam “delicados presentes”[15] (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1911, p. 22).

Damon Pinheiro Michalski, que foi aluno do Instituto Júlio de Castilhos de 1925 a 1930, lembra que quando “havia encrenca” o diretor levava o aluno para a biblioteca (Figura 2.11) a fim de corrigir o ato de indisciplina. Damon acrescenta ainda: “Nós, a miudagem, não tínhamos acesso à biblioteca, a não ser que aprontássemos alguma. Só sabíamos da sua existência no 2º andar”[16].

Também encontramos na “Ata da 8ª reunião de professores” realizada no dia 18 de julho de 1929, a proposição feita pelo professor Alvaro Difini:

[15] No referido relatório não constava o que seriam esses “delicados presentes”. Mas na “Ata da 11ª sessão do Conselho de Instrucção”, realizada em 31 de outubro de 1930, consta que seriam oferecidas uma “machina photographica Billy” e outra “de menores dimensões” aos dois alunos com melhores aproveitamentos.

[16] Entrevista com Damon Pinheiro Michalski concedida ao autor em 20 de outubro de 2010.

> Mandar aos paes dos alumnos, quinzenalmente, um cartão com as notas de applicação e comportamento, sendo os graos distinguidos pelas cores dos mesmos cartões, conforme convenção de antemão combinada. Além desse cartão, quinzenalmente distribuído, um outro com o título de “Cartão de Honra” deveria ser enviado mensalmente a todos alumnos que fizessem jus a esta distincção (LIVRO DE ACTAS DOS PROFESSORES DO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS, 1929).

Na ata da 10ª reunião, o mesmo professor Álvaro Difini propõe a criação de um livro chamado de “Livro de Ouro”, onde deveria constar o nome dos alunos que mais de destacassem no “tirocínio escolar”, obtendo por esse meio o título de “alumno laureado”.

2.4 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS ATÉ 1930

Desde o século XIX, as escolas secundárias brasileiras, por influência dos exames preparatórios e em consequência da equiparação ao do Colégio Pedro II, ensinavam matemática em aulas de Aritmética, Álgebra e Geometria/Trigonometria. De modo que, do ponto de vista didático, essas áreas da matemática eram estudadas separadamente e, sobretudo, na ordem em que os alunos deveriam prestar os exames. Não havia, ainda, uma disciplina escolar denominada Matemática (VALENTE, 2004b, p. 81-82).

Segundo Valente (2004), esse ensino separado das matérias ditas matemáticas fez com que muitos professores de álgebra ou aritmética, dos ginásios congêneres, recusassem lecionar geometria, por exemplo. A argumentação era a de que haviam feito concurso especificamente para as respectivas matérias. Essa prática foi combatida pelo professor Euclides Roxo, sob o argumento de que:

> [ao professor] compete, obrigatoriamente, lecionar qualquer matéria designada “matemática”, ensinada nos primeiros anos, mesmo porque não se compreende que um professor esteja habilitado a ensinar aritmética e álgebra, sem que o esteja também a lecionar geometria (ROXO apud VALENTE, 2004b, p. 125).

Euclides Roxo sustentava que no Colégio Pedro II as matérias eram ensinadas por meio de um revezamento entre os professores, “de modo que todos lecionavam os diversos ramos da matemática, independentemente de seu exame de cátedra” (Ibid., p. 127).

Em 1927, o professor Euclides Roxo propôs à congregação do Colégio Pedro II, "uma alteração radical no ensino da matemática"[17]. Nela Euclides Roxo "reafirma a necessidade de unificar os ramos da matemática", e defende uma modificação na distribuição das matérias do curso secundário, ou seja, "o estudo da aritmética, álgebra, geometria e trigonometria se fará sob a denominação única de Matemática, do 1º ao 4º ano" [do curso secundário]. As "ideias modernizadoras" de Euclides Roxo se concretizaram nos programas do Colégio Pedro II referentes ao ano de 1929 e foram pouco tempo depois adotadas, em nível nacional, pelo governo de Getúlio Vargas, através da "Reforma Francisco Campos". Essa reforma, seus principais protagonistas e suas consequências no ensino do Instituto Júlio de Castilhos, serão abordados no capítulo 3.

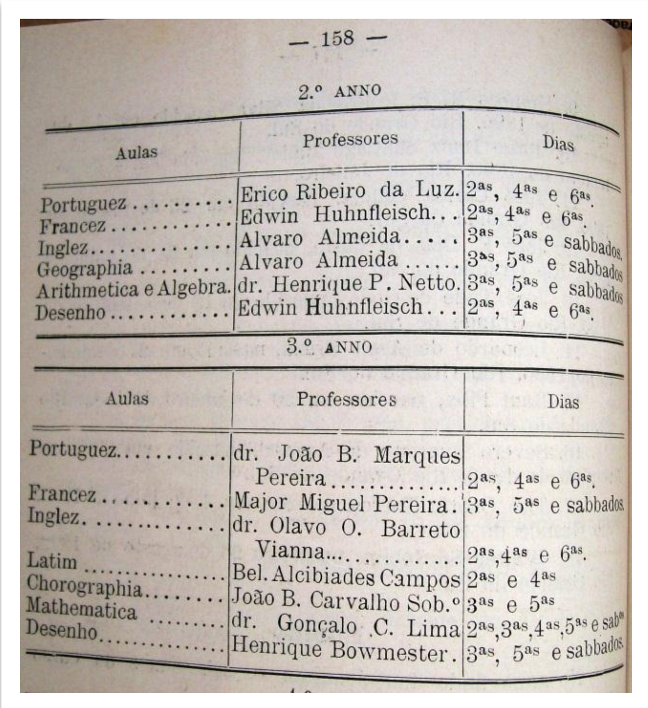
No Instituto Júlio de Castilhos, no período anterior a 1930, as disciplinas de "Arithmetica", "Álgebra" e "Geometria", mesmo sendo exigidas separadamente nos exames preparatórios, por vezes apareciam sob uma mesma rubrica denominada de "Mathematica". Também em relação à regência das aulas observamos que nos relatórios, no período anterior à Reforma Francisco Campos, o nome do professor ora aparece relacionado à "Mathematica", ora relacionado com "Arithmetica", "Álgebra" ou "Geometria" (figura 2.12), porém, nos relatórios referentes aos anos de 1934 e 1935, posteriores à reforma, vemos que o nome do professor está associado apenas à "Mathematica"[18].

Embora tenhamos poucos elementos que descrevam com maior clareza como se constituiu o ensino de matemática no período anterior a 1930, acreditamos que essas indicações de unificação dos diferentes ramos da matemática representam uma antecipação ao que viria se concretizar mais adiante, com a implantação da chamada Reforma Francisco Campos.

---

[17] LIVROS DE ATAS DA CONGREGAÇÃO DO COLÉGIO PEDRO II. Rio de Janeiro. Manuscrito, apud VALENTE, 2004, p. 71.

[18] Em alguns casos, além de "Mathematica", aparece, entre parênteses, alguma especificação complementar. Por exemplo, no ano de 1935: Ernesto de Mello Lassance – Mathematica (Geometria – Trigonometria); Mário da Silva Brasil – Mathematica (Álgebra) (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE DE 1935).



— 158 —

2.º ANNO

Aulas	Professores	Dias
Portuguez	Erico Ribeiro da Luz.	2^{as}, 4^{as} e 6^{as}.
Francez	Edwin Huhnfleisch...	2^{as}, 4^{as} e 6^{as}.
Inglez	Alvaro Almeida.....	3^{as}, 5^{as} e sabbados.
Geographia	Alvaro Almeida......	3^{as}, 5^{as} e sabbados
Arithmetica e Algebra.	dr. Henrique P. Netto.	3^{as}, 5^{as} e sabbados
Desenho	Edwin Huhnfleisch...	2^{as}, 4^{as} e 6^{as}.

3.º ANNO

Aulas	Professores	Dias
Portuguez	dr. João B. Marques Pereira	2^{as}, 4^{as} e 6^{as}.
Francez	Major Miguel Pereira.	3^{as}, 5^{as} e sabbados
Inglez	dr. Olavo O. Barreto Vianna...	2^{as}, 4^{as} e 6^{as}.
Latim	Bel. Alcibiades Campos	2^{as} e 4^{as}
Chorographia	João B. Carvalho Sob.º	3^{as} e 5^{as}
Mathematica	dr. Gonçalo C. Lima	2^{as},3^{as},4^{as},5^{as} e sab.os
Desenho	Henrique Bowmester.	3^{as}, 5^{as} e sabbados

Figura 2.12: Regência das aulas em 1908
Fonte: Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre de 1908

No Relatório da Escola de Engenharia de Porto Alegre do ano de 1910 é apresentada, nas páginas relacionadas ao Instituto Júlio de Castilhos, uma exposição de como deveria ser o ensino das disciplinas oferecidas nos cursos desse Instituto, bem como seus objetivos.

Segundo o relatório, nessa nova organização, o "estudo de mathematica elementar" buscava oferecer ao aluno "um poderoso meio de cultura mental, destinado a desenvolver o raciocínio e também proporcionar-lhe os conhecimentos dessa sciencia necessários à vida practica" (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910, p. 83). Também aparece nesse relatório a sugestão do professor Ulisses Cabral, relacionada à matemática dos cursos elementares, em favor do uso dos "aparelhos arithmometros[19] e fraccionometros para tornar menos abstracta a lógica dos números". O uso do aparelho de "Pape Carpentier" para o estudo da numeração decimal é mencionado no relatório referente ao ano de 1910, ressaltando que careciam de um aparelho maior, já que o

[19] Arithmometer era uma calculadora mecânica capaz de somar, subtrair, multiplicar e dividir. Foi patenteada na França por Charles Xavier Thomas de Colmar. Tornou-se a primeira calculadora mecânica bem sucedida comercialmente. Os Arithmometers Thomas foram produzidos e vendidos na Europa e nos Estados Unidos no século 20, e foram largamente imitados e comercializados por diversos fabricantes (CHASE, G.C. History of Mechanical Computing Machinery, Vol. 2, n. 3, 1980, p. 204).

que possuíam comportava no máximo dez alunos (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1911, p. 15).

Para o curso elementar e primeiro ano do curso médio, o estudo de "Arithmetica seria exclusivamente prático". (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910, p. 84).

Assim,

> primeiramente todo o esforço applicado é para real aquisição da interpretação dos factos numéricos com a justa comprehensão dos valores e sua expressão falada ou escripta. os princípios e regras comprehendidos passam a ser decorados, o que se faz até com deleite para os alumnos, que encontram para cada palavra das regras, um apoio mental, a que se justapõem logicamente os enunciados (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1911, p. 15).

Já no segundo ano do curso médio e primeiro do secundário, os alunos estudariam "arithmetica theorica". Nesses primeiros cinco anos, o aluno deveria adquirir conhecimento prático e teórico sobre:

> numeração em geral e decimal; operações sobre números inteiros; operações sobre frações e suas transformações; metrologia; principais propriedades e divisibilidade dos números; equidifferenças, proporções, progressões e logaritmos; regra de três simples e composta; juros simples e desconto (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910, p. 84).

O estudo de álgebra devia ser visto de modo completo nos três primeiros anos do secundário. No primário se estudaria geometria de modo prático, "devendo o aluno, no fim do curso médio, saber praticamente avaliar áreas e volumes" (Ibid., p. 84).

Também nos três primeiros anos do secundário, o aluno deveria estudar a geometria "theorica", ou seja, que:

> estude a geometria a duas e três dimensões, adquira conhecimentos relativos à igualdade, à semelhança, à equivalencia, à rectificação de circunferência, à avaliação das áreas e volumes, fazendo-se sobre esses pontos numerosas applicações práticas; se estudará ainda as secções cônicas com o respectivo traçado e principais propriedades das curvas correspondentes, terminando-se pelo estudo da trigonometria rectilínea (Ibid., 1910, p. 84).

O quarto ano do secundário ficaria reservado a revisar tudo o que havia sido estudado nos anos anteriores e também para o estudo de "Trigonometria espherica" para os alunos que se destinassem à Escola de Engenharia.

Também vale ressaltar, na disciplina de Desenho, o objetivo de que o aluno adquirisse familiaridade com a geometria:

> Durante os quatro annos do curso secundario serão aperfeiçoados os estudos de desenho feitos nos annos anteriores, devendo as pinturas estudadas serem executadas a crayon, a lapis ou a óleo. Neste curso se fará o estudo completo do desenho linear geometrico, resolvendo-se a nankin, segundo escalas convencionaes e com instrumentos próprios a esses desenhos, as questões da geometria plana, da ornamentação de motivos de architectura de estylo e decoração Egypcia, Grega, Celtica, etc., em que se apresentem dificuldades graphicas crescentes; se estudará mais o desenho perpectivo, suas principaes regras e aplicações relativas às figuras planas e aos corpos geometricos, terminando no ultimo anno do curso, pelo estudo do desenho geometral cuja necessidade se mostrará pela deficiencia do desenho perspectivo na representação das formas e proporções reaes dos corpos. No estudo de desenho geometral serão estudadas as principaes projecções do ponto, da linha recta e do plano em suas principaes posições em relação ao plano de projecção; a representação das figuras planas e dos solidos geometricos; a representação das secções desses sólidos por planos perpendiculares ao plano vertical de projecção, fazendo-se numerosas applicações desse estudo à representação de objectos segundo uma escala dada (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1910, p. 88-89).

Em 1916, depois de discussões e apelos, manifestados nos relatórios pelo seu diretor Manoel Vianna, o Instituto Júlio de Castilhos passa a contar também com um Curso Normal para formação de professores capacitados para atuar no curso elementar. Objetivando que os novos professores oriundos desse curso pudessem executar seus programas e aplicar novos métodos que já estavam sendo adotados nos “Estados Unidos, na Europa, na Argentina e no estado de São Paulo” (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1914, p.4).

Dessa reorganização, até a decretação da Reforma Francisco Campos, em 1931, o Instituto Júlio de Castilhos ainda sofreria algumas mudanças na sua estrutura de ensino. Conforme registros nos relatórios pesquisados, em 1924, por exemplo, é (re)criado o curso preparatório, constituído por uma “secção média”, de dois anos e uma secundária, com três.

Os anos finais da década de 1920 marcaram as escolas secundárias pela aplicação de um grande número de exames:

> Essa convivência do sistema seriado com o de preparatórios resultou num sistema pautado por uma grande quantidade de exames a serem elaborados pelos estabelecimentos de ensino. Esse é um período em que a principal referência em termos de ensino

> secundário, é dada por um conjunto de muitos exames. Têm eles o poder de organizar todo o sistema (VALENTE, 2004b, p. 43).

No Instituto Júlio de Castilhos, além da elaboração e aplicação dos exames parciais, finais, de segunda época e de admissão para o Instituto, aplicavam-se os exames de preparatórios para a Escola de Engenharia e demais cursos superiores e também exames parcelados aplicados em outros estabelecimentos, como o Gymnasio Lemos Júnior (Rio Grande), Gymnasio Pelotense (Pelotas), Gymnasio Anchieta (Porto Alegre), Gymnasio Santa Maria (Santa Maria) e Gymnasio Auxiliadora (Bagé).

Em 1931, com a implantação da Reforma Campos, o Instituto Júlio de Castilhos muda novamente sua organização de ensino. Os impactos dessa reforma, bem como as mudanças que ocorreram nesse período, serão abordados no capítulo seguinte.

3 A NOVA ORGANIZAÇÃO DO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS COM A IMPLANTAÇÃO DA REFORMA CAMPOS EM 1931

Considerada por Romanelli (1986) como uma virada na história do Brasil, a instalação do Governo Provisório de Getúlio Vargas, em 1930, trouxe mudanças reais "não só na quantidade como na qualidade. O país há muito sentindo insuficiências, amadureceu sua realidade e passa a enfrentá-la com decisão" (Ibid., p. 10). Era um momento de transição de uma sociedade latifundiária e escravocrata para um modelo urbano-industrial, fazendo com que novas forças sociais emergissem e redefinissem as estruturas de poder. Nesse contexto, a educação escolar, ainda marcada pela herança deixada pelos padres jesuítas da época colonial, e no caso particular do ensino secundário, ainda refém dos exames de preparatórios, "não mais se adaptava à realidade emergente" (CARVALHO et al, 2000, p. 416).

3.1 A REFORMA FRANCISCO CAMPOS

O ensino secundário no Brasil, até o final da década de 1920, tinha como referência os exames de preparatórios. Carecia de organicidade e as tentativas de mudança propostas, até então, se restringiam ao Distrito Federal (Rio de Janeiro), que tinha o Colégio Pedro II como modelo para o ensino secundário nacional. Mesmo assim, muitas dessas tentativas de mudança eram abandonadas ou modificadas radicalmente pouco depois de serem postas em prática. Frente a isso, o Governo Provisório de Getúlio Vargas, no ímpeto de dar respostas à sociedade, criou em 1930, o Ministério da Educação e Saúde Pública[20] que no ano seguinte implantou a chamada Reforma Francisco Campos (1931)[21], denominação que faz referência ao seu principal idealizador, o ministro Francisco Campos. Essa reforma trouxe "uma estrutura orgânica ao ensino secundário, comercial e superior", além de ter sido a primeira reforma que "atingiu profundamente a estrutura do ensino e, o que

[20] Romanelli (1986, p. 131) salienta que esse Ministério não constituía propriamente uma novidade, já que existira no início da República, embora com curta duração.
[21] A Reforma Francisco Campos foi efetivada através de vários decretos. São eles os seguintes: Decreto n. 19.850 – de 11 de abril de 1931; Decreto n. 19.851 – de 11 de abril de 1931; Decreto n. 19.852 – de 11 de abril de 1931; Decreto n. 19.890 – de 18 de abril de 1931; Decreto n. 20.158 – de 30 de junho de 1931; Decreto n. 21.241 – de 14 de abril de 1932 (Ibid., p. 131).

é importante, era pela primeira vez imposta a todo território nacional" (ROMANELLI, 1986, p. 131).

A partir dela, o Ensino Secundário foi organizado em dois cursos seriados chamados de Fundamental, com duração de cinco anos, e Complementar, de dois anos, sendo a conclusão do Curso Complementar requisito obrigatório para os candidatos à matrícula nos institutos de ensino superior.

O Curso Complementar estava dividido em três áreas distintas: Pré-Jurídico (Direito), Pré-Médico (Medicina, Farmácia e Odontologia) e Pré-Técnico (Engenharia e Arquitetura).

Tana Alvarez recorre a José Lourenço da Rocha para afirmar que na Reforma Francisco Campos "foi utilizada uma forma autoritária para instituir as alterações no ensino de matemática" (ROCHA apud ALVAREZ, 2004, p.9), pois foi baixada através de decretos, sem prévia discussão com órgãos representativos da sociedade brasileira. Segundo a autora, teve o mérito de ter sido uma verdadeira reforma, de extensão nacional, apesar de não ter resolvido a questão da demanda pelo ensino secundário na década de 1930, mantendo seu caráter elitista.

3.2 O ENSINO DE MATEMÁTICA NA REFORMA FRANCISCO CAMPOS

O então Ministro Francisco Campos conferiu ao professor Euclides Roxo[22] a posição de presidente da comissão encarregada de elaborar os programas de Matemática. As ideias de Euclides Roxo para o ensino de Matemática já vinham sendo experimentadas no Colégio Pedro II, desde 1929, onde era diretor. Essas ideias inovadoras para o ensino de Matemática começaram a ser debatidas em 1908, por ocasião da Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (IMUK), criada no IV Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma e que repercutiu no Brasil somente a partir de meados da década de 1920 (SCHUBRING, 2004, p. 18).

[22] Euclides de Medeiros Guimarães Roxo nasceu em Aracaju, Sergipe, em 10 de dezembro de 1890. Faleceu no Rio de Janeiro, no dia 21 de setembro de 1950. Em 1909, bacharelou-se no Colégio Pedro II, onde foi aluno interno e acumulou todos os prêmios. Formou-se em Engenharia em 1916, pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Em 1915, foi aprovado em concurso para professor substituto de Matemática no Colégio Pedro II, no qual foi também examinador nos exames de Francês, Latim e Matemática. Posteriormente foi nomeado catedrático no mesmo estabelecimento de ensino (1919). No Colégio Pedro II foi diretor de 1925 a 1935, época em que o ensino brasileiro sofreu profundas modificações (VALENTE, 2004a, p. 85-86).

Segundo Valente, as discussões realizadas no IMUK tardaram a chegar ao Brasil devido ao desinteresse pelas inovações no ensino de matemática do nosso único representante nessa comissão, o professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia[23]. O autor destaca que

> Gabaglia, na comissão internacional, teria deixado sobressair antes a sua condição de representante de governo, aquela que de fato deveria ter assumido: a de professor de matemática. Um representante oficial, político, pouco interessado em novidades que viessem a alterar o ensino tradicional e bem assentado da matemática no Pedro II (VALENTE, 2004a, p. 57).

O autor argumenta que Gabaglia não passou de um “relações públicas do governo brasileiro”, e que essa falta de interesse pelas questões do ensino de matemática pode ter tido origem nos “interesses menos idealistas e mais pragmáticos” que eram os de divulgar e dar uso aos livros F.I.C., traduzidos por Gabaglia e que vinham sendo considerados ultrapassados pelo novo ideário modernizador dessa reforma internacional (Ibid., p. 57).

Como já havíamos mencionado, enquanto presidente da comissão encarregada de elaborar os programas de matemática da Reforma Campos, Euclides Roxo pôde estender as ideias e programas que já vinham sendo aplicadas no Colégio Pedro II e que tinham influência dos matemáticos Felix Klein e Ernst Breslich. Essas ideias apresentavam três tendências gerais: 1) predominância essencial do ponto de vista psicológico; 2) escolha da matéria a ensinar em dependência com as aplicações da matemática ao conjunto das outras disciplinas; e 3) subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais da época (ROXO apud CARVALHO, 2004, p. 133).

Euclides Roxo também trouxe para o ensino de matemática, através da Reforma Francisco Campos, a ideia de fusão dos diferentes ramos da matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria), interligando-os em uma única disciplina denominada Matemática.

Euclides Roxo argumentava que

> essas partes não devem ser completamente fundidas, mas não devem ser tão separadas como acontecia nas escolas, contra o que é natural; um exemplo instrutivo é o estudo das proporções que primeiro se explicam aritmeticamente e depois – muitas vezes sem

[23] O professor Raja Gabaglia era professor de Matemática no Colégio Pedro II desde 1853, ano em que concluiu a Escola Politécnica como engenheiro e bacharel em ciências físicas e matemáticas (VALENTE, 2004a, p. 47).

> nenhuma relação com o estudo anterior – ensina-se novamente sob a forma geométrica (CARVALHO apud VALENTE, 2004a, p. 96).

A disciplina de Matemática na Reforma Francisco Campos estava presente nos programas das cinco séries do Curso Fundamental. Além disso, Matemática e Português eram as disciplinas com maior carga horária semanal prevista pela reforma (ALVAREZ, 2004, p. 16).

Euclides Roxo publicou livros e artigos em jornais defendendo seus pontos de vista. Grande parte dos artigos publicados na imprensa rebatiam as críticas lançadas por seus maiores opositores político-ideológicos: Joaquim Ignácio de Almeida Lisboa, também catedrático do Colégio Pedro II, que era partidário do "ensino tradicional da Matemática[24]" e o padre jesuíta Arlindo Vieira, que defendia a "posição da Igreja diante da escola renovada" (CARVALHO et al., 2000, p. 421-423).

Para Roxo, a matemática ainda era considerada por alguns matemáticos como uma disciplina de conteúdo definitivo e acabado, sem que fosse possível haver dúvidas ou discussões em relação ao seu "cristalizado" conteúdo. Porém, ao contrário do que consideravam, argumentava que "existe certeza em relação a seu conteúdo, mas muitas dúvidas sobre como ensinar, o que, para quem, para que e quando" (ROXO apud CARVALHO et al., 2000, p. 418).

O debate público entre Euclides Roxo e seus opositores, no início da década de 1930, colocou em pauta outra discussão: quem deve ensinar matemática? A função era exercida até então por engenheiros e militares. Esse tema já havia sido levantado no IMUK (1908) quando foi discutida a "preparação matemática dos engenheiros" concluindo-se que "os engenheiros querem aprender matemática por meio do matemático e não do engenheiro" (SCHUBRING, 2004, p. 37).

Algumas propostas implantadas por Euclides Roxo no Colégio Pedro II em 1929, e que foram levadas a nível nacional pelas Reformas Francisco Campos (1931) e Gustavo Capanema (1942), sobrevivem até hoje:

> [...] notadamente o ensino de Matemática em todas as séries do currículo e a apresentação de grande blocos da Matemática escolar – aritmética, álgebra, geometria e medidas, em cada série, sem a divisão rígida anterior, de anos de escolaridade reservados para cada um desses blocos (CARVALHO et al., 2000, p. 416).

Na próxima seção, apresentamos um estudo sobre como se deu a implantação do Curso Complementar no Instituto Júlio de Castilhos.

---

[24] Segundo Carvalho, o ensino tradicional da Matemática, defendido por Almeida Lisboa, considerava-a "essencialmente uma disciplinadora do espírito, indiferente a possíveis aplicações" (CARVALHO et al, 2000, p. 422).

3.3 O CURSO COMPLEMENTAR DO INSTITUTO JÚLIO DE CASTILHOS

Em 1931, ano da implantação da Reforma Francisco Campos, o Instituto Júlio de Castilhos estava assim organizado: Curso Elementar de três anos; Curso Médio de dois anos; e Curso Secundário de três anos (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1931). Mas, no relatório de 1932, já aparece o Curso Fundamental com seriação distribuída em cinco anos, precedida por um curso elementar seriado, de quatro anos. Portanto, com base nas observações desses relatórios, percebemos que o Instituto adaptou-se à nova legislação, já que segundo Otone e Silva (2006, p. 45), a Reforma Campos deveria ser implementada imediatamente na 1ª série do Secundário em 1931. Assim, segundo a autora, os alunos "chegariam sem repetência, à quinta série, em 1935. Então, podemos presumir que o primeiro ano do Curso Complementar só passaria a vigorar a partir de 1936".

O Curso Complementar foi implantado no Instituto Júlio de Castilhos pelo Decreto Estadual n. 5629 de 29 de junho de 1934 e organizado pelo Decreto Estadual n. 574 de 1º de abril de 1936, ano em que começaram a funcionar as primeiras turmas dos cursos Pré-Técnico, Pré-Médico e Pré-Jurídico.

Esses Cursos Complementares, segundo o Decreto Federal n. 19.890, deveriam funcionar nas instituições de ensino secundário, oficiais ou oficialmente fiscalizadas. Mas, enquanto essas não fossem suficientes, poderiam funcionar como cursos anexos aos Institutos Superiores. Nesse caso, a Reforma Francisco Campos previa a criação do Colégio Universitário, junto a esses Institutos. No Instituto Júlio de Castilhos, podemos supor certa confusão entre Curso Complementar e Colégio Universitário, já que o Instituto era uma instituição de ensino secundário "oficialmente fiscalizado", mas também um instituto da Escola de Engenharia de Porto Alegre. Essa dualidade pode ser percebida na pesquisa de documentos escolares da época realizadas nesse trabalho, onde ora aparece a denominação "Instituto Júlio de Castilhos" ora aparece "Colégio Universitário de Porto Alegre".

Segundo Otone e Silva, as diferenças entre o Colégio Universitário e o Curso Complementar ficavam apenas no fato de que

> [...] as disciplinas do Colégio Universitário poderiam ser acrescidas de outras matérias de ensino obrigatório, já que o Curso Complementar não poderia acrescentar disciplinas que fossem obrigatórias, só facultativas (2006, p. 52).

Por fim, o Colégio Universitário foi criado no Instituto Júlio de Castilhos, a partir do Decreto Estadual n. 6753 de 24 de setembro de 1937, sendo oferecidos os três Cursos Complementares: Pré-Médico, Pré-Técnico e Pré-Jurídico.

Foi ainda nesse período que a Escola de Engenharia de Porto Alegre passou a integrar a Universidade Técnica de Porto Alegre (1934) e que o Instituto Júlio de Castilhos, composto pela escola de ensino secundário e pelo curso complementar (Colégio Universitário), esteve por ser fechado. Chegou-se a sugerir a cessão do prédio do Instituto Júlio de Castilhos para a Faculdade de Educação, Ciências e Letras que deveria integrar a Universidade Técnica (SILVA; SOARES, 1992, p. 41).

Havia, entretanto, por parte do governador do Estado do Rio Grande do Sul, Osvaldo Cordeiro de Farias, “a convicção de não ser possível sem grave prejuízo para o ensino em geral, destruir aquela instituição, cujos resultados benéficos já se faziam largamente sentir” (Ibid., p. 73). A solução encontrada era a de que o Estado assumisse o controle do Instituto Júlio de Castilhos, fazendo deste “um estabelecimento padrão que, pelas prerrogativas asseguradas na legislação federal teria, indiretamente, considerável influência sobre os estabelecimentos particulares” (Ibid., p. 73). Em 11 de agosto de 1942, o Instituto Júlio de Castilhos e o Colégio Universitário, através do Decreto Estadual n. 588, foram adaptados à nova legislação do ensino secundário estabelecida pela reforma conhecida como Reforma Capanema, criando-se, assim o Colégio Estadual Júlio de Castilhos.

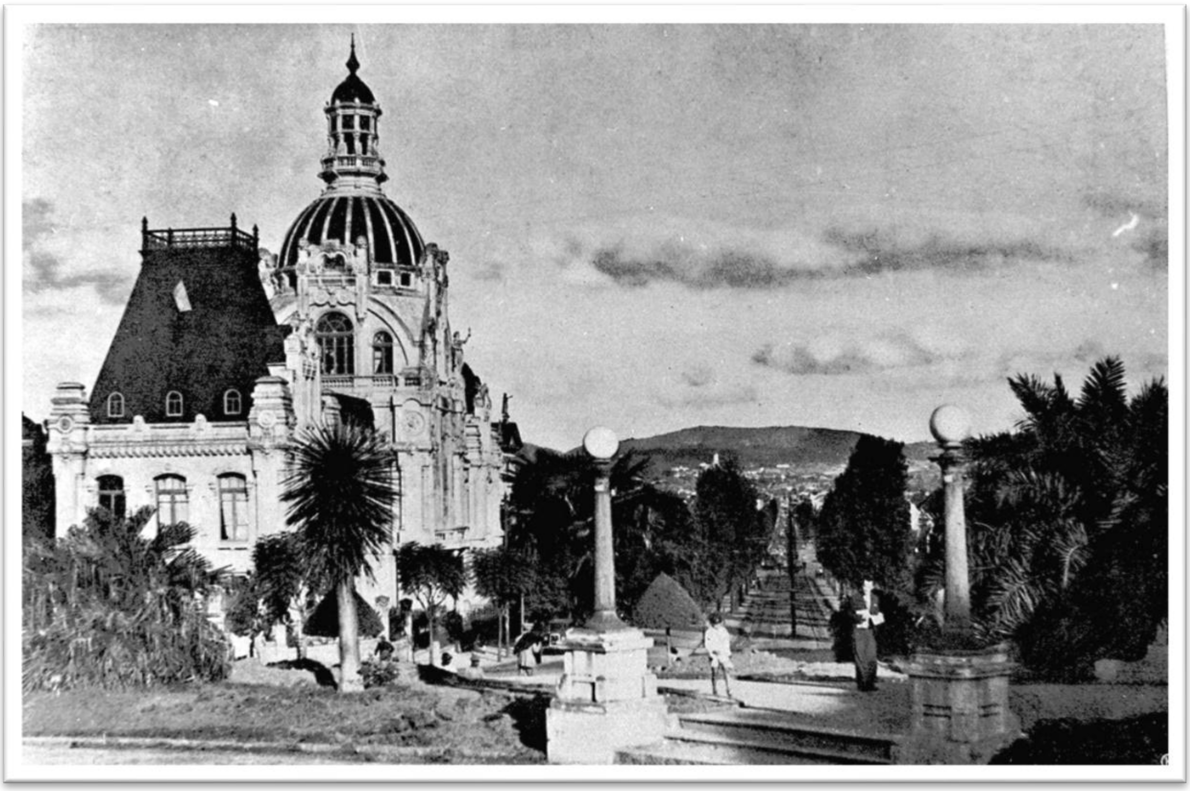


Figura 3.1: Prédio do Instituto Júlio de Castilhos e Colégio Universitário
Fonte: Museu da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

3.4 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CURSO COMPLEMENTAR

Os Cursos Complementares, segundo ciclo do ensino secundário da Reforma Francisco Campos, estavam organizados em dois anos (séries) e eram obrigatórios aos alunos que pretendiam matricularem-se em algum curso superior. Para esse ciclo complementar, "foi estabelecida uma subdivisão que compreendia certo grau de especialização, conforme se tratasse de curso preparatório para ingresso nas Faculdades de Direito, Ciências Médicas e Engenharia" (ROMANNELLI, 1986, p. 135).

A disciplina de Matemática estava prevista para as duas séries do curso Pré-Técnico e para a primeira série do curso Pré-Médico. Também havia nesses cursos, incluindo o Pré-Jurídico, outras disciplinas que estavam relacionadas com matemática, cito: Psicologia e Lógica; Desenho, Noções de Economia e Estatística.

Os programas para o Curso Complementar foram publicados em 17 de março de 1936, através de Portaria Ministerial assinada pelo ministro Gustavo Capanema. Nesses programas, a disciplina de Matemática ocupava 5 horas semanais do curso

Pré-Médico e 6 horas semanais do curso Pré-Técnico (OTONE E SILVA, 2004, p. 54-55).

Em relação ao currículo do ensino secundário da Reforma Francisco Campos, Romanelli (1986) cita Maria Tetis Nunes para dizer que “o caráter enciclopédico de seus programas a tornava educação para uma elite” (p. 136). De fato, os programas de Matemática para o Curso Complementar caracterizavam-se por uma grande quantidade de conteúdos, muitos pressupondo uma abordagem avançada, e que deveriam ser estudados num período curto de tempo.

No capítulo seguinte apresentamos a análise das questões das provas que foram aplicadas nos cursos Pré-Médico e Pré-Técnico do Instituto Júlio de Castilhos, tendo como referência os programas da disciplina de Matemática do Curso Complementar do Ensino Secundário.

4 ANÁLISE DAS QUESTÕES DAS PROVAS DE MATEMÁTICA APLICADAS NO CURSO COMPLEMENTAR EM 1936 E 1937

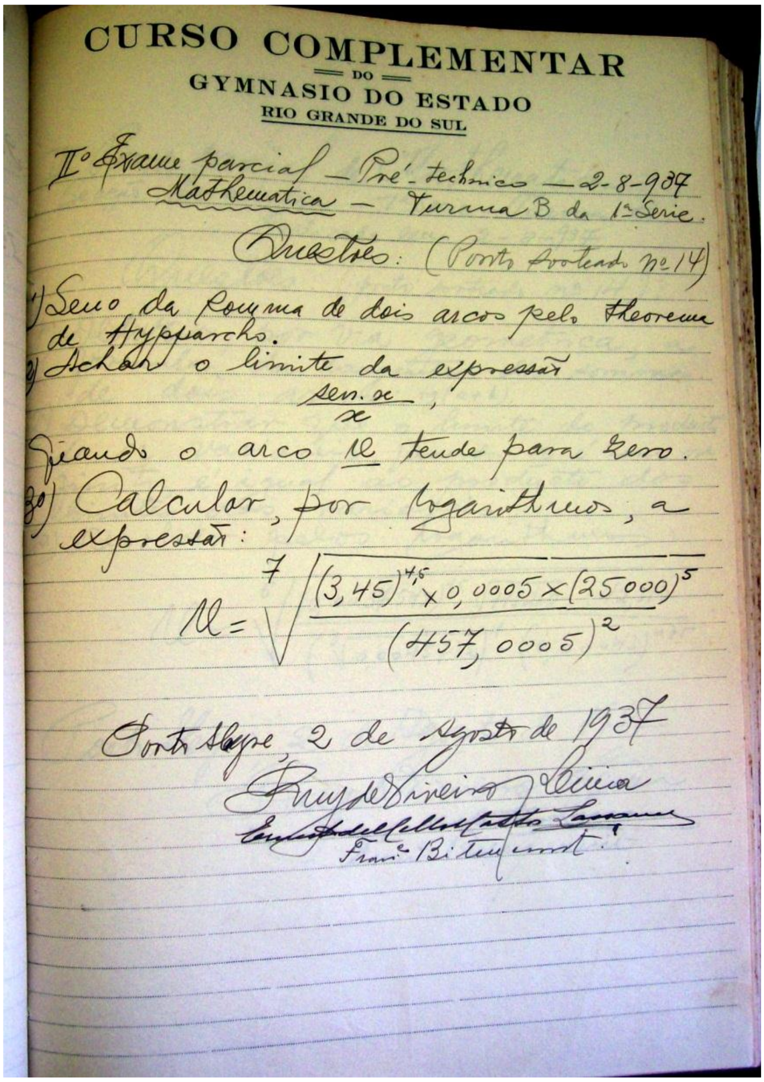
Formuladas as questões norteadoras do trabalho, procuramos nos arquivos escolares do Colégio Júlio de Castilhos, documentos que guardassem pistas sobre o ensino de matemática outrora praticado no Instituto Júlio de Castilhos. Essa procura resultou na descoberta do conjunto de atas de provas com as questões aplicadas nos anos de 1936 e 1937 aos alunos do Curso Complementar que funcionou nesse Instituto. Essas atas, desde então, passaram a ser a nossa principal fonte de pesquisa e, sobre elas, formulamos novas questões norteadoras. Através dessas questões procuramos identificar como era o ensino de matemática desses Cursos Complementares.

Neste capítulo apresentamos algumas características das provas em relação aos conteúdos envolvidos, aos conhecimentos e habilidades requeridos para sua resolução e aos professores que constituíram as bancas.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DAS ATAS DE PROVAS

Figura 4.1: Capa do livro com as provas de 1937
Fonte: Atas das provas parciais do ano de 1937. Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Em meio a outros documentos escolares, foram encontrados três livros com encadernações tipo brochura e capa marrom, com a inscrição “Colégio Universitário de Porto Alegre – ATAS DAS PROVAS PARCIAIS 1ª SÉRIE (2ª SÉRIE) 1936 (1937)” (Figura 4.1). Nesses livros encontramos as provas que foram aplicadas aos alunos do Curso Complementar. Dentre essas, 61 eram provas de Matemática, sendo que 39 do curso Pré-Médico (1ª série) e 22 do curso Pré-Técnico (1ª e 2ª séries). Cada prova (Figura 4.2) foi composta por três questões, totalizando, assim, 183 questões que foram aplicadas nos anos de 1936 e 1937.


CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

I° Exame parcial – Pré-technico – 2-8-937
Mathematica – Turma B da 1ª Serie.
Questões: (Ponto sorteado nº 14)

1) Seno da somma de dois arcos pelo theorema de Hypparcho.
2) Achar o limite da expressão $\frac{sen. x}{x}$, quando o arco x tende para zero.
3) Calcular, por logarithmos, a expressão:

$$x = \sqrt[7]{\frac{(3,45)^{4,5} \times 0,0005 \times (25000)^5}{(457,0005)^2}}$$

Porto Alegre, 2 de Agosto de 1937

Figura 4.2: Prova realizada no dia 2 de agosto de 1937
Fonte: Atas das provas parciais do ano de 1937. Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Também constam, nesses livros, atas de provas parciais de outras disciplinas[25], inclusive do curso Pré-Jurídico, que não tinha a disciplina de Matemática, mas apresentava no seu currículo "somente o estudo da matéria

[25] Cito: Inglez, Psicologia e Lógica, Physica, Quimica, Litteratura, Biologia, História Natural, Alemão, Latim, História da Civilização, Geophysica e Cosmographia, Economia Politica, Higiene, Sociologia, História da Filosofia, Desenho (prova gráfica).

intitulada Noções de Economia e Estatística, onde constavam algumas noções de Matemática Financeira e noções de Estatística" (RIBEIRO, 2006, p. 32).

As atas de provas foram escritas com caneta-tinteiro em folhas que apresentavam algumas diferenças entre elas como o tipo de pauta, o timbre, de modo que podemos acreditar que, depois de transcritas, foram agrupadas e encadernadas.

Observando a caligrafia, percebe-se que cada uma delas foi escrita de próprio punho por um dos integrantes da banca de prova que, geralmente, era composta por três professores do Colégio. As assinaturas desses professores constam nas provas e algumas ainda registram a assinatura de um inspetor federal (Figura 4.3).

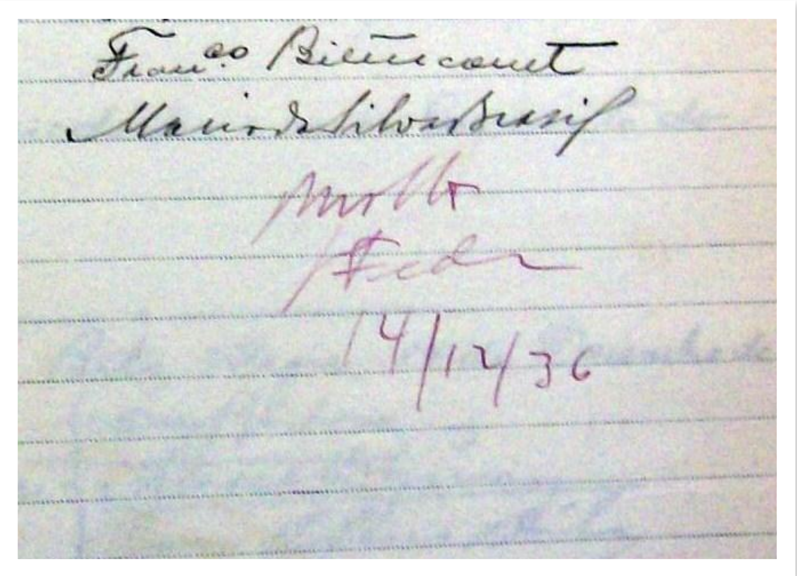


Figura 4.3: Assinaturas dos professores e do Inspetor Federal
Fonte: Atas das provas parciais do ano de 1936. Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Para cada disciplina eram realizadas quatro provas parciais por ano, com três questões cada uma[26], além das provas de segunda chamada. As questões eram elaboradas respeitando-se o ponto sorteado para a prova. Cada ponto continha três conteúdos que deveriam ser avaliados. Uma suposição possível é a de que uma lista com os pontos para cada prova fosse divulgada com antecedência, para que os alunos pudessem se preparar.

[26] Em sua pesquisa, Otone e Silva (2006) também observou que os alunos dos Cursos Complementares da Universidade de São Paulo, no mesmo período, faziam 4 provas parciais durante o ano, com três questões cada uma (2006, p. 115 e 127).

4.2 OS PROFESSORES INTEGRANTES DAS BANCAS

Os professores que constituíam as bancas das provas de Matemática no período analisado foram os seguintes: Mário da Silva Brasil, Ernesto de Mello Mattos Lassance, Ruy de Viveiros Leiria e Francisco Pinheiro Bittencourt.

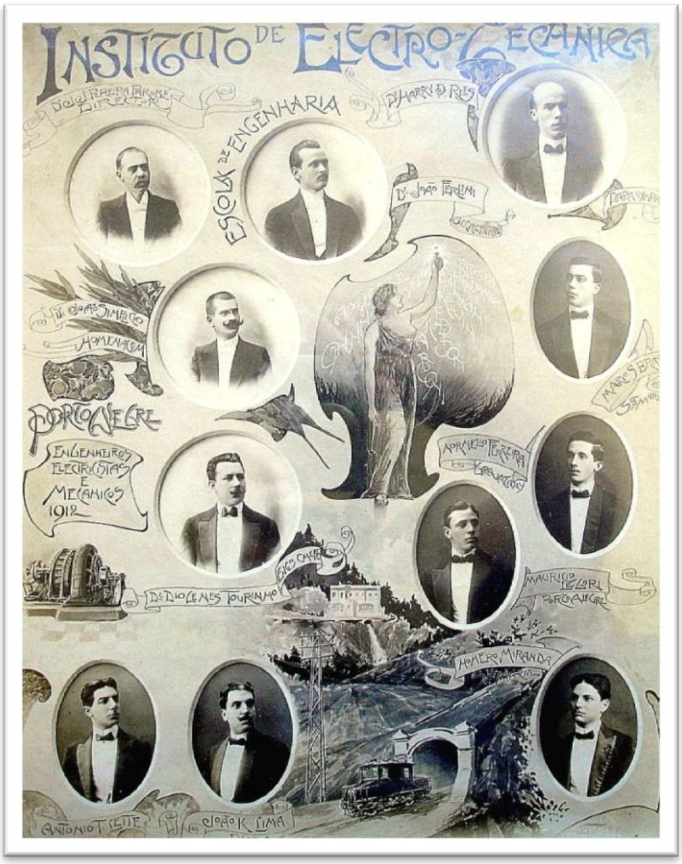


Figura 4.4: Primeira turma de formandos do Instituto de Eletro-Technica da Escola de Engenharia de Porto Alegre (1912)
Fonte: Autobiografia do professor Mário da Silva Brasil

Mário da Silva Brasil (1889-1962), segundo sua autobiografia[27], nasceu em Passo do Raimundo, localidade próxima à cidade de Santa Maria. Assistiu aulas avulsas até matricular-se no curso secundário do Colégio São Luiz (Santa Maria). Nas palavras do próprio Mário Brasil: “aplicado aos estudos, desde logo comecei a distinguir-me entre os demais colegas, especialmente em matemática e ciências” (BRASIL, 1950). Em 1910, após concluir o secundário, viajou para Porto Alegre a fim de matricular-se na Escola de Engenharia, onde mediante o diploma de “Bacharel em Sciências e Letras”, ingressou no segundo ano do curso de Engenharia Eletro-Técnica. Em 1911, matriculado no terceiro ano, Mário Brasil também ministrou aulas

[27] Mario da Silva Brasil escreveu uma autobiografia que foi publicada por seu bisneto Diego de Leão Pufal no blog Antigualhas, histórias e genealogia (http://pufal.blogspot.com).

particulares de matemática e escreveu artigos e poesia para jornais. Concluiu o curso em 1912 e integrou a primeira turma de engenheiros, eletricistas e mecânicos formados na Escola de Engenharia de Porto Alegre (Figura 4.4). No ano seguinte, foi contratado por essa Escola como engenheiro-assistente do Instituto de Agronomia, onde ministrou aulas de diversas disciplinas. Em 15 de março de 1919 foi nomeado professor de “Mathematica” do Instituto Júlio de Castilhos (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1919, p. 7) e, em meados da década de 1920, passou a desempenhar, também, a função de redator da revista Egatea. Mais tarde, foi escolhido presidente da banca de provas escritas de Matemática nos estabelecimentos de ensino secundário sujeitos à fiscalização federal. Até que, em 1936 e 1937, como professor do Colégio Universitário de Porto Alegre e professor catedrático da recém-criada Universidade de Porto Alegre, constituiu algumas bancas para provas de Matemática dos cursos Pré-Médico e Pré-Técnico.

Posteriormente, o professor Mário da Silva Brasil integrou o corpo docente do Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia da Universidade de Porto Alegre, desde quando começaram a funcionar seus primeiros cursos, em 1942, até aposentar-se, em 1958 [28].

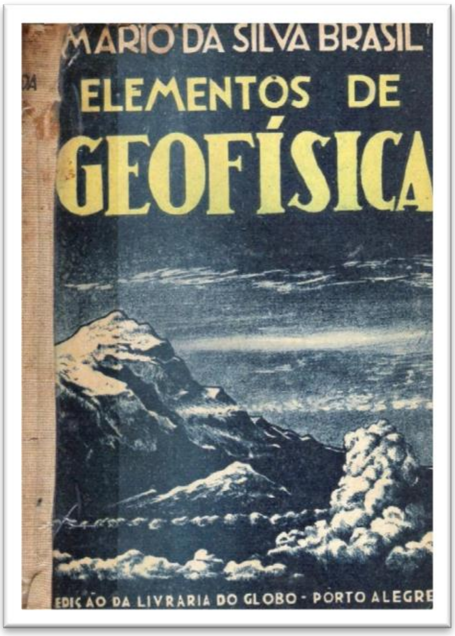


Figura 4.5: Capa do Livro Elementos de Geofísica

[28] HESSEL, L.; MOREIRA, E. D. M., orgs. Faculdade de Filosofia: 25 anos de atividade. Porto Alegre: UFRGS, 1967.

O professor Mário da Silva Brasil escreveu três livros que, possivelmente, foram usados nas suas aulas: "Notas de Astronomia Prática", publicado pela Revista Egatea, em 1928; "Elementos de Geofísica", publicado pela Livraria do Globo em 1937 e 1941 (Figura 4.5); e "Notas de Física da Escola de Engenharia da Universidade do Rio Grande do Sul", publicado pela Editora Coruja, em 1948, todos em Porto Alegre, Rio Grande do Sul.

Alberto da Costa Castro, que foi aluno no Curso Complementar Pré-Técnico nos anos 1937 e 1939, recorda que Mário Brasil "usava apostilas elaboradas por ele" e nas provas, fazia correção de acordo com elas[29].

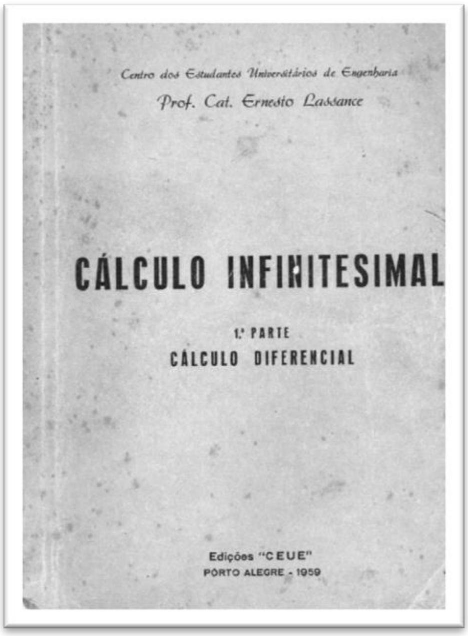


Figura 4.6: Capa do livro Cálculo Infinitesimal

Ernesto de Mello Mattos Lassance era engenheiro e lecionava Matemática ("Geometria", "Arithmetica" e "Álgebra") no Instituto Júlio de Castilhos desde 1928. Foi também professor catedrático da Escola de Engenharia de Porto Alegre. (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1928, p. 29). Publicou pelo menos cinco livros relacionados ao Cálculo e Equações Diferenciais, direcionados para os estudantes de Engenharia: "Cálculo Infinitesimal Volumes I, II e III" (Figura 4.6) em 1959; "Equações Diferenciais Volume I" em 1961, publicados por Edições CEUE[30]; e "Curso de Cálculo" publicado em 1949 pela Editora Coruja.

---

[29] Entrevista concedida por Alberto da Costa Castro ao autor em 27 de outubro de 2010.
[30] Centro dos Estudantes Universitários de Engenharia.

Francisco Pinheiro de Bittencourt era tenente do Exército e um dos mais antigos professores do Instituto Júlio de Castilhos, tendo sido nomeado em 19 de setembro de 1906. Desde então, ministrou aulas de Matemática e Desenho para os alunos do Curso Secundário (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1908, p. 145).

A indicação de Ruy de Viveiros Leiria para professor do Instituto Júlio de Castilhos aparece na Ata da 1ª reunião do Conselho de Instrução realizada em 20 de março de 1931[31], sendo que seu nome começa a constar no quadro de professores do Instituto Júlio de Castilhos a partir do ano de 1933 (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1933, p. 118). Ruy Leiria era engenheiro e ministrou aulas de "Mathematica (Álgebra)" e "Sciencias e phisicas e naturaes". Posteriormente integrou a diretoria do Sindicato dos Engenheiros do Rio Grande do Sul, ocupando os cargos de 2º secretário e delegado representante no Conselho da Federação em 1967, 2º Vice-Presidente em 1969, 1º Vice-Presidente em 1972 e 1º Vice-Presidente em 1975.

Segundo Alberto da Costa Castro, Ruy Leiria, que foi seu professor na 1ª série em 1938 e na 2ª série em 1939,

> era bom professor na explanação da matéria, mas rigoroso em excesso na correção das provas. No final do primeiro ano, a aprovação não chegou a 30 por cento - ele não poupava zeros! (CASTRO, 2010).

Como será discutido mais adiante, é possível identificar, nas atas das provas, marcas deixadas pelos professores que compunham as bancas.

4.3 A MATEMÁTICA DAS QUESTÕES DAS PROVAS

Em um primeiro exame[32] das questões das provas dos dois cursos, Pré-Médico e Pré-Técnico, observou-se que elas podem ser classificadas quanto ao tipo de solução esperada, e que fica indicado pela redação da questão. Na ampla maioria dos casos, a questão inicia com um verbo que indica uma ação.

Separamos as questões em três grupos:

[31] A ata referida foi encontrada nos arquivos do Colégio Estadual Júlio de Castilhos em meio a outros documentos antigos referentes ao Instituto Júlio de Castilhos.
[32] As questões serão resolvidas e analisadas com mais detalhes a partir da seção 4.3.2.

Grupo I: Questões que envolvem a aplicação de técnicas matemáticas na obtenção de um resultado bem definido. Nesse grupo, incluímos as questões que usam os verbos “achar”, “aplicar”, “calcular”, “classificar”, “derivar”, “desenvolver”, “determinar”, “efetuar”, “resolver”, entre outros.

São exemplos de questões que se enquadram nesse grupo:

> 1) Achar o máximo e mínimo da função $y = (x-1)^2\,(x+1)$:
> (prova da 1ª série aplicada em 15/12/1936 – curso Pré-Médico)
>
> 2) Calcular, por logarithmos, a expressão:
>
> $$\mathrm{x} = \sqrt[7]{\frac{(3{,}45)^{4{,}5} \times\ 0{,}0005\ \times (25000)^5}{(457{,}0005)^2}}$$
>
> (prova da 1ª série aplicada em 2/8/1937 – curso Pré-Técnico)

Grupo II: Questões que envolvem demonstração, dedução e prova. Nesse grupo, incluímos as questões que apresentam os verbos: “demonstrar”, “deduzir”, “estabelecer”, “provar”. São exemplos de questões desse grupo, as seguintes:

> 1) Deduzir a equação do círculo no sistema ortogonal e determinar a equação da mesma curva quando o centro está no eixo dos Y.
> (prova da 1ª série aplicada em 12/1/1937 – Curso Pré-Médico)
>
> 2) Provar que o lado do pentágono regular inscripto é a hypothenusa do triângulo rectangulo, cujos catetos são, respectivamente, o lado do decágono e o lado do hexágono regulares inscriptos no mesmo circulo e achar a expressão do lado do pentágono regular inscripto.
> (prova da 1ª série aplicada em 27/9/1937 – curso Pré-Técnico)

Grupo III: Questões que usam o verbo “definir” ou apresentam apenas o nome do conteúdo. Nessas questões, consideramos que a ideia proposta pelo professor era a de que o aluno escrevesse sobre o conteúdo, ou mesmo que o definisse. Por exemplo:

> 1) Divisão áurea: a) definição; b) construção do segmento áureo interno; expressão do segmento áureo interno.
> (prova da 1ª série aplicada em 27/9/1937 – curso Pré-Técnico)
>
> 2) Concepção de Descartes, sistema de coordenadas.
> (prova da 1ª série aplicada em10/2/1937 – curso Pré-Médico)

As questões do grupo I representam 65,8% das questões usadas nas provas do curso Pré-Médico e 56,1% nas provas do curso Pré-Técnico. De modo que questões desse tipo foram maioria nas provas dos dois cursos.

Questões do grupo II aparecem com maior frequência nas provas do curso Pré-Técnico, ou seja, em 34,8% das questões, enquanto que no curso Pré-Médico aparecem em 19,7% das questões. Cabe aqui observar que, no curso Pré-Técnico, a disciplina de Matemática era estudada nas duas séries, enquanto no curso Pré-Médico, apenas na 1ª série. Considerando apenas o curso Pré-Técnico, questões desse tipo aparecem em 35,4% das questões aplicadas na 1ª série e em 33,3% das questões aplicadas na 2ª série.

As questões de abordagem teórica (grupo III), ou seja, aquelas em que o professor esperava que o aluno escrevesse sobre um determinado assunto, ou mesmo que apresentasse uma definição, foram as que menos apareceram nas provas dos dois cursos, sendo que representaram 9,1% das questões que aparecem em provas do curso Pré-Técnico, e 14,5% nas questões utilizadas nas provas do curso Pré-Médico.

Em relação aos conteúdos abordados, as provas seguiram os Programas estabelecidos pela Reforma Campos para os Cursos Complementares (OTONE E SILVA, 2006, p. 183-188), havendo predominância de alguns conteúdos em relação a outros, e também se percebe que alguns conteúdos constantes desses programas não apareceram nas provas. Como os conteúdos para cada prova eram sorteados, não podemos afirmar que a predominância, ou a ausência, de algum conteúdo reflita a preferência dos professores, mas na análise mais detalhada de cada questão, ou seja, na maneira como a questão pretende avaliar se o aluno aprendeu ou não determinado conteúdo, podemos perceber a escolha dos professores por um determinado modelo de questão, refletindo assim, estilos característicos que revelam marcas deixadas pelos professores nessas provas.

4.3.1 Conhecimentos matemáticos envolvidos na resolução das provas

No estudo das questões das provas de matemática que foram aplicadas nesses Cursos Complementares, procuramos conhecer um pouco mais do ensino de matemática neles ministrado, identificando as relações entre as questões propostas e os tópicos previstos nos programas da Reforma Francisco Campos para o segundo ciclo do Curso Secundário[33], bem como os conhecimentos e habilidades que se pretendia avaliar.

Para esse estudo, buscamos construir o que consideramos que poderia ser uma solução esperada, colocando-nos, o máximo possível, no lugar dos alunos que precisavam resolvê-las e tomando o cuidado de não levar para o passado, nessa resolução das questões, recursos matemáticos que, com o passar do tempo, se tornaram usuais no cotidiano escolar, como, por exemplo, calculadoras, computadores e livros didáticos atuais.

Nessa construção, recorremos a livros de matemática que, possivelmente, passaram pelas mãos de alunos e, principalmente professores na época. Neles buscamos encontrar possíveis fontes para as questões encontradas nas provas. Por exemplo, em seu livro “Pontos de Matemática”, lançado em 1938, Gumercindo Lima propõe “uma compilação de pontos exigidos pelos programas dos Cursos Complementares”, conforme texto “ao leitor” que abre o livro, e ainda justifica a simplificação e resumo da “matéria”, alegando que desse modo estaria facilitando o acesso e manuseio para a maioria dos estudantes. Complementa ainda que:

> É obvio dizer que o presente livrinho destina-se apenas aqueles que não podem adquirir outros melhores, visto não ter eu a pretensão de impingi-lo como cousa original ou repositório de erudição. Longe disso: os “Pontos” nada mais querem ser do que um “aide-mémoire” para os alunos que realmente desejam seguir com proveito as lições ministradas pelo professor, sem os embaraços da consulta a autores estrangeiros de tão difícil assimilação, para quem não versa com habilidade o francês, o inglês ou o alemão (LIMA, 1938, p. 7).

Também destacamos, como referência para esse estudo, as notas das aulas do professor Ernesto de Mello Lassance, integrante das bancas de provas, que foram publicadas mais tarde: “Curso de Cálculo”, publicado pela Editora Coruja em 1949, e “Cálculo Infinitesimal”, publicado pela Editora CEUE[34] em 1961, ambas em Porto Alegre; além de outras publicações que de alguma forma estavam inseridas na educação escolar daquele período.

Os conteúdos para cada prova eram definidos pelo sorteio dos “pontos”, de modo que, na maioria das provas analisadas, aparece o número do ponto sorteado.

---

[33] Os programas para o Curso Complementar foram publicados em 17 de março de 1936, através de Portaria Ministerial assinada pelo então ministro Gustavo Capanema (OTONE E SILVA, 2006, p. 54).
[34] Centro dos Estudantes Universitários de Engenharia – Porto Alegre. RS.

O Curso Complementar preservava, assim, o modelo de avaliar já praticado no Instituto. Segundo José Nunes Tietböhl, que foi aluno do Instituto Júlio de Castilhos de 1920 a 1925 e retornou como professor em 1933, após concluir o curso de Engenharia Civil na Escola de Engenharia de Porto Alegre:

> Havia sabatinas mensais, uma prova parcial em junho, para a qual eram organizados 10 pontos com três assuntos distintos cada um, uma prova parcial em novembro para a qual eram organizados 20 pontos, também com três assuntos distintos cada um, e uma prova final oral em dezembro, prestada perante uma banca examinadora formada pelo professor da disciplina e mais dois colegas. Os alunos passavam obrigatoriamente pelos três professores da banca, e, mesmo não necessitando de nota em Física, as arguições frequentemente terminavam alta madrugada, para desespero das “vítimas” e dos sacrificados professores (TIETBÖHL, 1990, p. 14-15).

As primeiras provas, referentes ao ano de 1936, dos cursos Pré-Médico e Pré-Técnico só foram aplicadas no mês de novembro daquele ano. Uma das razões para esse atraso deve-se ao fato de que os programas para o Curso Complementar só foram publicados em março de 1936 (OTONE E SILVA, 2006, p. 54). De modo que esse primeiro ano dos cursos complementares no Instituto Júlio de Castilhos foi atípico, já que as quatro provas parciais de cada curso ocorreram no período concentrado entre novembro de 1936 e fevereiro de 1937.

Nesse primeiro ano de funcionamento dos cursos complementares, foram criadas duas turmas de primeira série do Pré-Médico, A e B, que eram subdivididas para a realização das provas, em quatro turmas 1A, 2A, 1B e 2B. Para o curso Pré-Técnico, foi criada apenas uma turma de primeira série. Já em 1937, além de duas turmas de primeira série do curso Pré-Médico, havia duas turmas do curso Pré-Técnico, sendo uma de primeira e outra de segunda série.

Para esse estudo, vamos comentar a matemática envolvida nas questões de prova que foram aplicadas em seis turmas desse Curso, sendo que: em relação ao ano de 1936, serão analisadas as provas de duas turmas da 1ª série do Pré-Médico e as provas da única turma do Pré-Técnico; em relação ao ano de 1937, serão analisadas as provas de uma das turmas do Pré-Médico e as provas das turmas de 1ª e 2ª série do Pré-Técnico. Destacamos que no Curso Pré-Médico havia a disciplina de Matemática apenas na primeira série, já no Pré-Técnico a Matemática fazia parte do currículo das duas séries.

4.3.2 Estudo das provas da 1ª série (Turma 1B) do curso Pré-Médico em 1936

A primeira prova parcial de matemática (Figura 4.3.1) foi realizada no dia 24 de novembro de 1936, com a turma 1B do curso Pré-médico e constituíram essa prova as seguintes questões:

1) Desenvolver em série pelo método de Mercator a função $\frac{a}{b+x}$.
2) Achar o limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quando m tende para o infinito.
3) Achar a derivada de $y = (4x^3 - 8)9x^4$ aplicando a lei do produto.

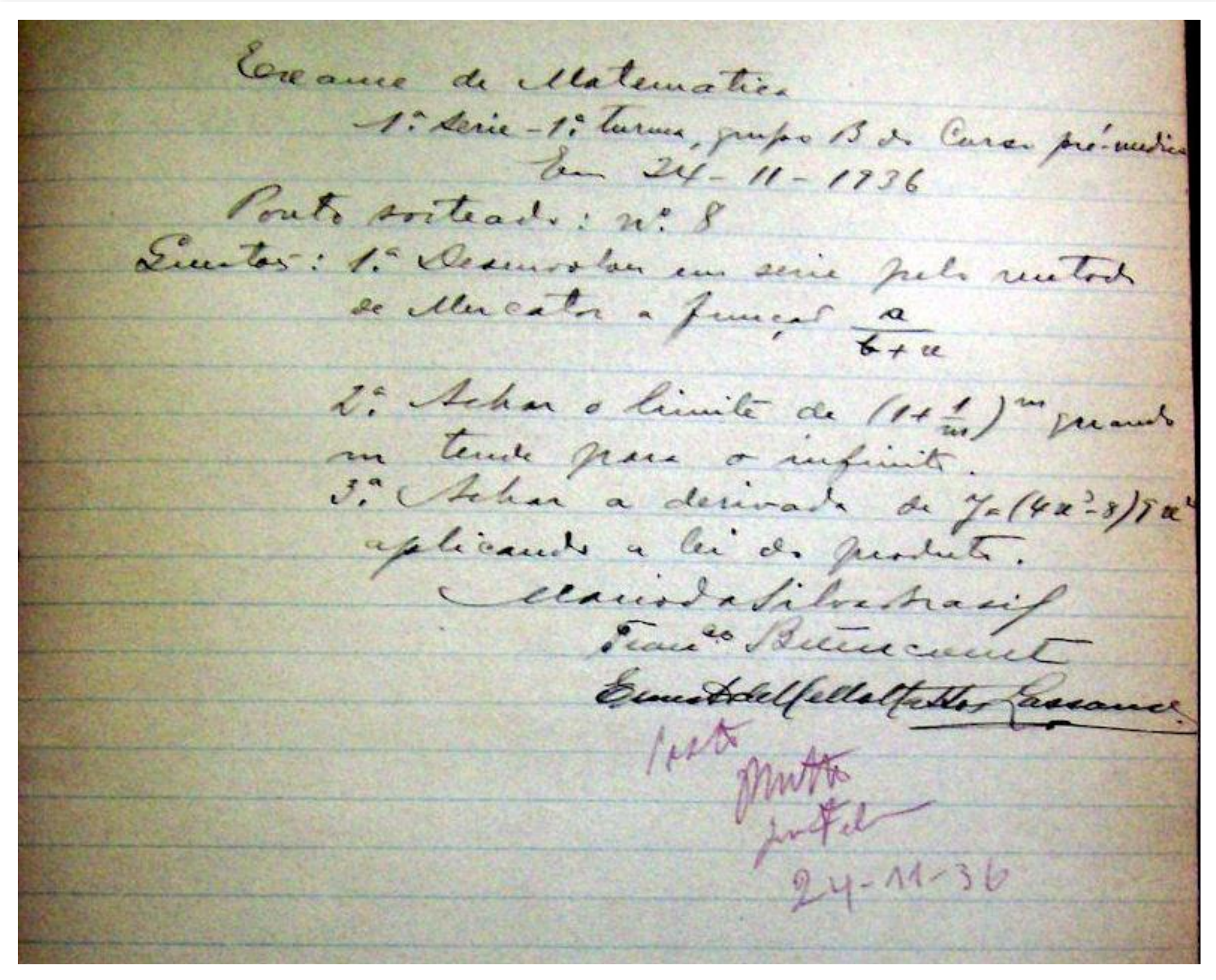

Exame de Matematica
1ª serie - 1ª turma, grupo B do Curso pré-medico
Em 24-11-1936
Ponto sorteado: nº 8
Questões: 1ª Desenvolver em serie pelo methodo de Mercator a funcção $\frac{a}{b+x}$
2ª Achar o limite de $(1+\frac{1}{m})^m$ quando m tende para o infinito.
3ª Achar a derivada de $y=(4x^3-8)9x^4$ aplicando a lei do producto.
24-11-36

Figura 4.3.1: Exame de Matemática
Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

As questões envolviam conteúdos relacionados com: desenvolvimento em série de funções de uma só variável, limites, derivadas e diferenciais das funções de uma variável, e estavam de acordo com os Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 58-59).

A primeira questão dessa prova faz referência ao "método de Mercator" que não está explicitamente previsto nos programas, mas está relacionado com desenvolvimento em série de funções.

Supomos que a indicação ao uso específico desse método pode expressar uma preferência do professor que fazia parte da banca de prova, no caso, Ernesto Lassance, já que o mesmo apresenta esse método em seu livro "Cálculo infinitesimal 2ª parte" (LASSANCE, 1961, p. 55). Nele, o autor justifica o uso do método de Mercator:

> As fórmulas de Taylor e de MacLaurin que estabelecemos no parágrafo 58 permitem desenvolver em série um grande número de funções, porém, será interessante ver antes alguns métodos de desenvolvimento elementares, que não podendo certamente serem generalizados, são contudo sumamente sugestivos (LASSANCE, 1961, p. 55).

Esse método, segundo Alves (1929, p. 394), foi considerado o primeiro método de desenvolvimento das funções em série e empregado por Mercator desenvolvendo a função $\frac{1}{a+bx}$ "pela simples divisão de 1 por $a+bx$", isto é, estendendo o algoritmo da divisão de polinômios a um caso em que o grau do divisor é maior do que o grau do dividendo.

Aplicando o algoritmo, temos:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \underline{a+bx} \\
-\frac{b}{a}x & \frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}x+\frac{b^2}{a^3}x^2-\frac{b^3}{a^4}x^3+\ldots \\
\quad +\frac{b^2}{a^2}x^2 & \\
\qquad -\frac{b^3}{a^3}x^3 & \\
\qquad\quad +\frac{b^4}{a^4}x^4 & \\
\qquad\qquad \vdots &
\end{array}
$$

que resulta no desenvolvimento procurado:

$$\frac{1}{a+bx}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}x+\frac{b^2}{a^3}x^2-\frac{b^3}{a^4}x^3+\cdots(-1)^{n+1}\frac{b^{n-1}}{a^n}x^{n-1}+\cdots$$

A segunda questão apresenta o limite que origina o número e. Uma solução concisa para essa questão aparece nos "Pontos" de Gumercindo Lima e consiste em fazer $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ e substituir sucessivamente na expressão $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, dando uma ideia intuitiva da existência do limite através dos valores obtidos:

i) $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = (2)^1 = 2$
ii) $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25$
iii) $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}37037\ldots$

Segundo o autor, quando "$x = \infty$, o limite adquire o valor e, segundo Euler", e escrevemos:

$$" \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \, "$$

Porém, essa solução não é suficiente para Ernesto Lassance que, em seu "Curso de Cálculo", apresenta o seguinte comentário:

> Com esses poucos exemplos, verificamos que nada se pode concluir sobre o valor que tomara a expressão dada, [...]. Para estudar convenientemente o limite que procuramos da expressão dada, vamos desenvolvê-la pelo binômio de Newton, considerando primeiramente m como inteiro finito, cujo valor faremos ulteriormente crescer além de todo limite (LASSANCE, 1949, p. 42).

E apresenta uma resolução mais completa, partindo do binômio de Newton:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{m!}\cdot\frac{1}{m^m}$$

Essa expressão, nas palavras do autor, "cresce com m, não só por crescer cada termo, como também por crescer o número de termos que são todos positivos."

Temos que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2$ para $m = 1$ e, para $m > 1$, que

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1 + m\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{m!}\cdot\frac{1}{m^m} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

Em seguida compara o último membro da desigualdade com a soma de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ para mostrar que: $2 < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 3$, pois,

> posto que o primeiro membro da expressão, é sempre menor que o segundo, quando m aumenta indefinidamente, o primeiro membro tenderá para um limite que será também menor do que o limite do segundo ou quando muito igual ao dito limite (LASSANCE, 1949, p. 45).

Com isso, demonstra "que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ não cresce indefinidamente, mas sim que é sempre menor que três" (Ibid., p. 43).

Ao final, o autor conclui que:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = 2.7182818284591 \ldots$$

e que o limite "é um número irracional, ao qual se convencionou chamar de 'número e', número transcendente".

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

A terceira questão, associada às anteriores, já nos leva a concluir que os conteúdos de Cálculo Diferencial se faziam presentes desde os primeiros momentos nas aulas do curso.

Ernesto Lassance, em seu "Curso de Cálculo" apresenta no capítulo IV, que trata de "Derivadas e diferenciais das funções de uma variável real", a seguinte proposição: "A derivada do produto de duas funções é igual à primeira função pela derivada da segunda mais a segunda função pela derivada da primeira". Em seguida considera a função $y = u \cdot v$, em que u e v são funções de x, e chega à regra:

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

(LASSANCE, 1949, p. 88).

Assim, a derivada da função proposta na terceira questão, $y = (4x^3 - 8)9x^4$, resulta em:

$$\frac{dy}{dx} = 252x^6 - 288x^3$$

Trinta alunos fizeram a prova e, numa escala de 0 a 100, apenas quatro obtiveram nota maior que 70. Treze ficaram com notas menores que 30, sendo que sete obtiveram nota zero.

A segunda prova parcial foi realizada no dia 15 de dezembro de 1936. Assim, menos de um mês após a primeira prova, os alunos já se viam diante da segunda avaliação, sendo que os resultados da primeira não haviam sido bons para a maioria da turma.

As questões apresentadas nessa prova foram as seguintes:

1) Achar o máximo e mínimo da função $y = (x-1)^2(x+1)$
2) Resolver por meio dos determinantes o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= 8 \\ 5x + \ \ y - 2z &= 1 \\ 2x + \ \ y + \ \ z &= 7 \end{aligned}$$

3) Deduzir a equação geral do círculo no sistema ortogonal.

Para resolver a primeira questão, o aluno deveria conhecer a interpretação geométrica da derivada e saber derivar uma função polinomial ou uma função dada como produto. Ou seja, calcular a primeira derivada e obter os valores críticos da função e, por exemplo, através do estudo da mudança de sinal da $f'(x)$ ao passar por esses pontos críticos, determinar se o ponto é de máximo, de mínimo ou nenhum dos casos. A função dada na questão atinge apenas máximos e mínimos locais. Entretanto, o enunciado fala apenas de máximos e mínimos, o que indica que não havia a preocupação em distinguir máximos e mínimos absolutos dos relativos.

A segunda questão pede que o aluno resolva um sistema de três equações com três incógnitas por meio de determinantes. Aqui, além de saber calcular determinantes de matrizes 3×3, o aluno precisava conhecer a regra de Cramer. Ao resolvê-la, o aluno deveria encontrar, como solução única, a terna $(1, 2, 3)$.

A dedução da equação geral do círculo, proposta na questão 3, leva o aluno a mostrar seus conhecimentos sobre o sistema cartesiano e sobre o cálculo da distância entre dois pontos no plano, dados através de suas coordenadas. Uma resolução possível para essa questão consta nos “Pontos” de Gumercindo Lima. Nela, o autor considera o ponto (a, b) como centro da circunferência e $P(x, y)$ um ponto cuja distância a (a, b) seja r (LIMA, 1938, p. 321).

Dos vinte e oito alunos que fizeram esta prova, apenas quatro obtiveram notas maiores que 50 e doze ficaram com notas menores do que 30.

A terceira prova parcial foi realizada no dia 18 de janeiro de 1937 e nela aparecem as seguintes questões:

> 1) Estudar as coordenadas de um ponto no systema polar e no espaço.
> 2) Determinar o máximo e mínimo da função:
> $$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$$
> 3) Diferenciar a função $y = (a + x)^3$

Os conteúdos envolvidos nessa prova, conforme os Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 58-59) foram: sistema cartesiano ortogonal: “sistema de coordenadas retilíneas e polares”; funções, concavidade, máximo e mínimo, pontos de inflexão, pontos notáveis, derivadas e diferenciais das funções de uma variável.

Possivelmente a resposta esperada para a primeira questão fosse uma exposição dos dois modos de se representar um ponto, ou seja, por coordenadas cartesianas e polares. Para isso, o aluno deveria deduzir de maneira genérica a localização de um ponto no plano e no espaço.

Como já aparecera na prova anterior aplicada na turma, a segunda questão trata de máximo e mínimo de uma função.

Para resolver a terceira questão, o aluno deveria conhecer as regras de derivação. Outra possibilidade é a de que a diferencial fosse determinada através da aplicação da definição da derivada no ponto como limite, sem uso da fórmula $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$. Essa hipótese é pouco provável, já que não havia tempo suficiente para o estudo mais prolongado de Cálculo Diferencial.

Compareceram a essa prova 27 alunos, desses, dezesseis ficaram com notas menores do que 50. Nenhum obteve nota maior que 70.

A última prova parcial dessa turma foi realizada no dia 19 de fevereiro de 1937 e com as seguintes questões:

> 1) Avaliar com a aproximação de $0{,}001$ a expressão $\frac{\sqrt{10-\sqrt{5}}}{2}$
> 2) Desenvolver em série pelo método de Mercator a função
> $$y = \frac{1}{x-2}$$
> 3) Derivar até a 2ª derivada a função $y = \sqrt{(a-x)^3}$

Os conteúdos envolvidos nessa prova, como constam nos Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário (Ibid., p. 58-59), foram: números irracionais, valores exatos e aproximados, erro absoluto, erro relativo, operações efetuadas com dada aproximação; desenvolvimento em série das funções de uma só variável; derivadas e diferenciais sucessivas.

Esses conteúdos praticamente repetem os conteúdos exigidos na primeira prova parcial aplicada nessa mesma turma. A exceção fica por conta da primeira questão, sobre expansão decimal de números reais, conteúdo que não aparece na prova anterior.

Para resolver a primeira questão, o aluno precisaria saber calcular as aproximações da raiz quadrada e conhecer técnicas de cálculos para obtenção de resultados aproximados com uma precisão dada. Gumercindo Lima, em seus "Pontos de Matemática", escreve que:

> As operações da Aritmética quase sempre dão resultados exatos; todavia, nem sempre há necessidade de se obterem tais resultados, sendo bastante sua determinação mais ou menos aproximada. Para esse fim, empregam-se meios mais rápidos que os usados nas operações ordinárias (LIMA, 1938, p. 26-30).

Em seguida apresenta técnicas para aproximação nos casos de adição, subtração, produto (Regra de Oughtred), divisão e radiciação; que resolvem o problema acima. Assim, essa questão revela-se bastante trabalhosa, já que abrange praticamente todas as regras citadas para o cálculo aproximado.

Trinta e dois alunos fizeram essa prova e as notas melhoraram em comparação com as notas das provas anteriores. Ou seja, vinte e dois alunos ficaram com notas acima de 50 e, desses, dezesseis obtiveram notas maiores do que 70. Apenas um aluno tirou nota menor do que 30 e nove ficaram com notas entre 30 e 50.

4.3.3 Estudo das provas da 1ª série (Turma 2A) do curso Pré-Médico em 1936

A turma 2A do curso Pré-médico realizou sua primeira prova no dia 25 de novembro de 1936, na qual constaram, basicamente, os mesmos conteúdos aplicados nas provas da turma 1B, com exceção de uma questão que tratava de funções. As questões aplicadas nessa prova foram:

1) Classificação das funções.
2) Derivar a função $y = 3sen^3 x - 8cos^2 x$
3) Desenvolver em série pela fórmula de MacLaurin $y = cosx$

Podemos supor que na primeira questão os professores esperavam que o aluno recordasse alguma das aulas ministradas em que se tenha abordado esse assunto. Nos “Pontos de Matemática”, Gumercindo Lima apresenta uma classificação para as funções em dois grandes grupos: algébricas, que “encerra as operações clássicas da aritmética: soma, subtração, multiplicação, divisão, elevação à potências e extração de raízes” e transcendentes, “que não são algébricas” (LIMA, 1938, p. 116).

O autor faz ainda um resgate histórico acrescentando que

> a ideia de função foi introduzida na Matemática no século XVII ao tratar-se da solução de certos problemas da Geometria e da Mecânica, segundo se infere dos escritos de Newton e Leibnitz (Ibid., p. 116).

E complementa:

> Confundia-se então, a representação geométrica da função com seu próprio conceito e, ainda hoje, a representação geométrica é o vestuário obrigatório de relações funcionais que o nosso espírito não chegaria a compreender diretamente (Ibid., p. 116).

Na segunda questão, o aluno precisava dominar as técnicas de derivação para funções trigonométricas, funções compostas e diferenças, ou seja, concluir que:

$$y' = 3[3sen^2x \cdot cosx] - 8[2cosx \cdot (-senx)]$$

$$y' = senx \cdot cosx(9senx + 16)$$

Para a resolução da terceira questão, faz-se necessária a aplicação da fórmula de MacLaurin. Essa questão aparece no livro de Gumercindo Lima como um exercício resolvido que exemplifica a aplicação dessa fórmula no desenvolvimento das funções trigonométricas

A Fórmula de MacLaurin é dada como:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(x_1)$$

onde x_1 está compreendido entre 0 e x.

Como, neste caso, o resto $\frac{x^n}{n!}f^n(x_1)$ tende a zero quando n cresce indefinidamente, podemos escrever:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0)$$

De modo que, sendo a função f dada por $f(x) = \cos x$, teremos:

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

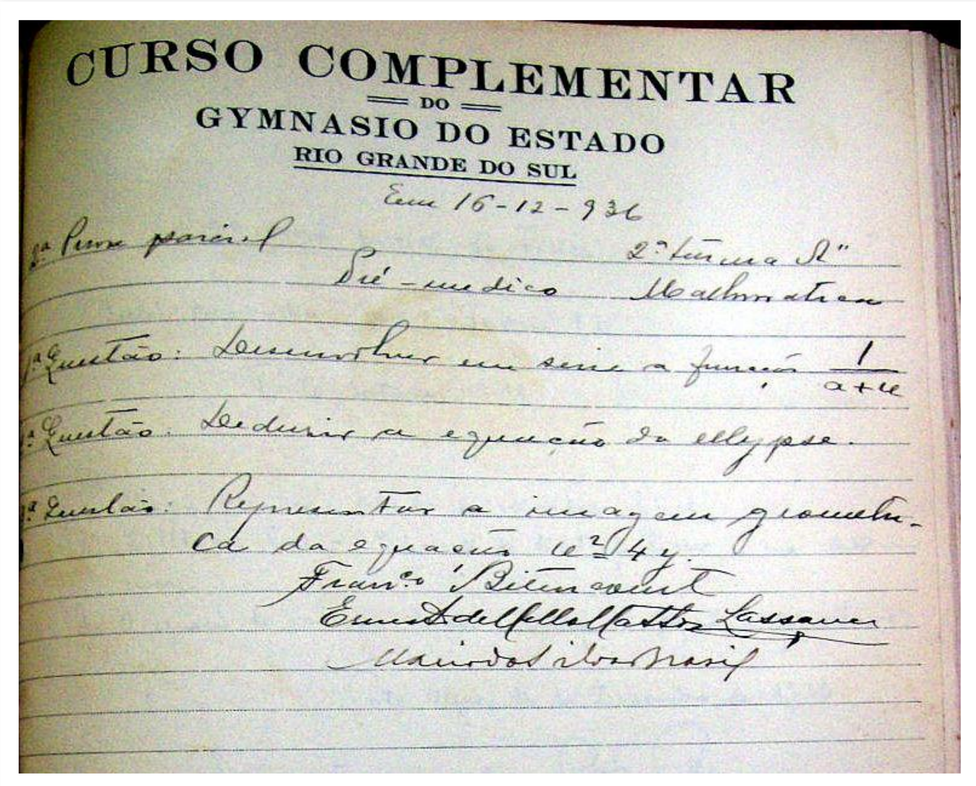
(LIMA, 1938, p. 172-173)

Uma apresentação mais completa da fórmula de MacLaurin aparece no capítulo IX do "Cálculo Infinitesimal 1ª parte" do professor Lassance (LASSANCE, 1959, p. 211-221) e continua em "Cálculo Infinitesimal 2ª parte", no capítulo que trata do desenvolvimento em séries (LASSANCE, 1961, p. 55).

Segundo o boletim dessa avaliação, 27 alunos fizeram a prova, destes, apenas dois obtiveram nota maior que 70 e dezoito ficaram com notas menores que 30.

A segunda prova parcial da turma 2A (Figura 4.3.2) foi realizada no dia 16 de dezembro de 1936, e constou das seguintes questões:

1) Desenvolver em série a função $\frac{1}{a+x}$
2) Deduzir a equação da ellipse
3) Representar a imagem geométrica da equação $x^2 = 4y$


CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

Em 16-12-936

2ª Prova parcial 2ª turma A
Pré-medico Mathematica

1ª Questão: Desenvolver em serie a função $\frac{1}{a+x}$

2ª Questão: Deduzir a equação da ellypse.

3ª Questão: Representar a imagem geometrica da equação $x^2 = 4y$.

Figura 4.3.2: Segunda prova parcial 1936
Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Para resolver a primeira questão, os alunos, novamente, necessitavam de conhecimentos sobre séries de funções, em especial, desenvolvimento em série. A solução exige dos alunos conhecimentos prévios sobre convergências de séries, álgebra elementar e polinômios, além de números binomiais.

A segunda questão pressupõe que o professor tenha apresentado para seus alunos, em algum momento nas aulas, o estudo das cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Para resolvê-la, os alunos teriam que, de posse desses conteúdos, chegar à equação da elipse. Uma solução para essa questão consiste em partir da definição:

> Elipse é a curva plana descrita por um ponto que se desloca de modo que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos de seu plano permanece constante. Os dois pontos fixos denominam-se focos da elipse (KINDLE, 1971, p. 83).

Tomando $F(c,0)$ e $F'(-c,0)$ como os pontos fixos, e $2a$ a soma constante, supondo $a > c$. $P(x,y)$ um ponto qualquer do lugar geométrico conforme a definição. Assim, pela soma das distâncias dos dois pontos fixos a P, temos a equação:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Em seguida, usando alguns artifícios matemáticos como elevar ao quadrado ambos os termos da equação, dividir a equação por uma conveniente expressão, chega-se à equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que é a forma típica da equação da elipse simétrica aos eixos coordenados e com centro $O(0,0)$.

Se o centro da elipse for um ponto qualquer do plano, $C(h,k)$, e o eixo maior paralelo ao eixo dos x, a forma típica da equação da curva é:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Na terceira questão, o aluno teria que saber identificar o lugar geométrico das soluções de uma equação quadrática a duas variáveis; ou, pelo menos, identificar a equação da parábola e seus elementos.

Vinte e cinco alunos realizaram essa prova e, desses, apenas nove obtiveram notas maiores do que 50.

No dia 16 de janeiro de 1937, os alunos da turma realizaram a terceira prova parcial. A prova apresentou as seguintes questões:

> 1) Achar a equação de um círculo cujo raio é igual a 4 e as coordenadas do centro $+3$ e -5.
> 2) Resolver por meio dos determinantes o sistema
> $$3x - 2y = 8$$
> $$5x + y = 22$$
> 3) Achar por integração a superfície do triângulo limitado pela reta $y = 2x + 5$ para os valores de $x = -2{,}5$ e $x = 4$

Os conteúdos que constaram nessa prova foram: circunferência; noções de teoria dos determinantes, aplicações; e métodos de integração, integrais definidas.

Percebe-se, nessa prova, que as questões deixam de ser genéricas e exigem que o aluno consiga aplicar as técnicas matemáticas em casos particulares. Na primeira questão, por exemplo, basta que o aluno conheça a equação do círculo e utilize-a para o caso do centro e do raio dados.

A segunda questão também não representa maiores desafios ao aluno, já que trata-se de um sistema de duas equações a duas incógnitas, que pode facilmente ser resolvido pela regra de Cramer, obtendo-se uma solução com valores de x e y inteiros.

A terceira questão, sobre cálculo de áreas por integrais definidas, pode ter representado maior dificuldade para os alunos. Mas, se considerarmos que os alunos aprenderam técnicas de integração durante as aulas, a questão poderia ser resolvida sem problemas, já que $x = -2{,}5$ é a abscissa do ponto por onde a reta y intercepta o eixo dos x. De modo que as retas $y = 2x + 5$ e $x = 4$, e o eixo dos x, determinam o triângulo em questão e que tem área:

$$A = \int_{-2{,}5}^{4} (2x + 5)dx = 42{,}25\ u.a.$$

Comparando com as provas anteriores, era de se esperar que o resultado da turma nessa avaliação fosse melhor. Mas não foi. Dos 21 alunos que fizeram a prova, apenas nove obtiveram notas maiores que 50. E ainda, nove alunos obtiveram notas inferiores a 30.

No dia 17 de fevereiro de 1937, os alunos da turma 2A realizaram a última prova parcial. Essa prova apresentou as seguintes questões:

1) Resolver graphicamente o systema

$$3x + 2y = 17$$
$$5x - 3y = 3$$

2) Differenciar a função $y = \sqrt{x^3 + 2}$
3) Definir estatística

Para essa prova, eram necessários conhecimentos sobre noções de equação da reta, representações gráficas de equações algébricas; derivadas e diferenciais das funções de uma variável; noções de estatística e suas aplicações.

Para resolver a primeira questão, o aluno precisaria saber que:

> Para resolver graficamente um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas, constrói-se o gráfico de cada equação. As coordenadas do ponto de intersecção das retas representativas de cada equação constituem a solução procurada (BRITO, 1969, p. 271)[35].

De fato, a solução gráfica proposta nessa questão consiste em encontrar o ponto de intersecção das retas que são gráficos das equações $3x + 2y = 17$ e $5x - 3y = 3$. Ou seja, o ponto $(3,4)$. Consideramos que o aluno também deveria considerar a possibilidade das retas representadas serem paralelas distintas, não havendo, nesse caso, solução para o sistema, ou ainda o caso das retas paralelas coincidentes, que corresponde a infinitas soluções.

Para resolver a segunda questão, o aluno precisaria saber derivar uma função composta.

A última questão apresenta uma rara aproximação entre os conteúdos do curso complementar e o curso superior de Medicina, já que estavam previstas nos programas desse curso Pré-Médico "Noções de estatística; suas aplicações à biologia e à medicina." (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 57-59)

Essa prova foi prestada por 18 alunos, desses, metade ficaram com notas acima de 50 e nenhum obteve nota menor do que 30.

---

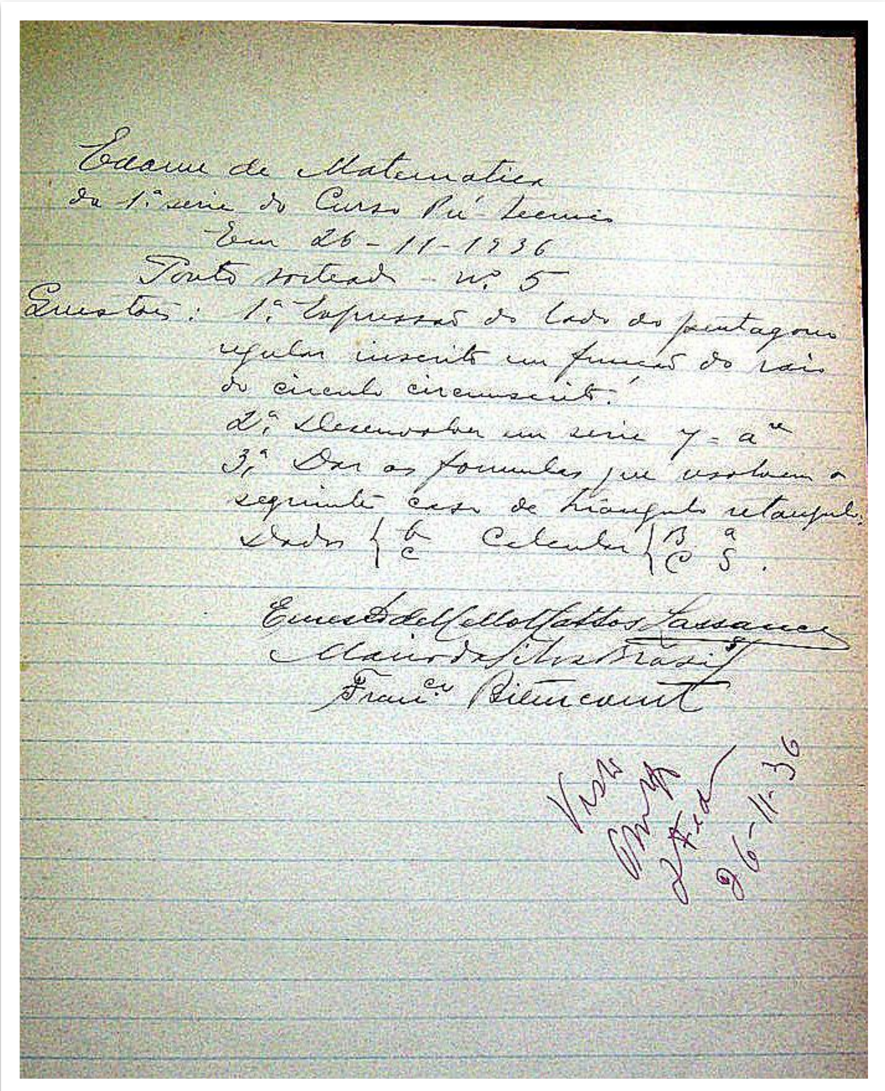
[35] Eugênio Oscar de Brito foi professor do Instituto Júlio de Castilhos e diretor na época da implantação da Reforma Francisco Campos. Organizou esse "Dicionário de Matemática", que fez parte de uma enciclopédia destinada aos estudantes, denominada "Enciclopédia do Curso Secundário", publicada pela Editora Globo, em Porto Alegre, no ano de 1969. No Dicionário, são apresentados vários verbetes com o objetivo de, segundo o prefácio do também ex-professor do Instituto Álvaro Magalhães, "secundar a tarefa do professor, oferecendo ao aluno brasileiro um instrumento de trabalho mediante o qual poderá complementar as aulas, precisar conceitos e resolver problemas".

4.3.4 Estudo das provas da 1ª série do curso Pré-Técnico em 1936

No dia 26 de novembro de 1936, os alunos do curso Pré-Técnico realizaram a primeira prova parcial (Figura 4.3.3). Para essa prova foram formuladas as seguintes questões:

> 1) Expressão do lado do pentágono regular inscrito em função do raio do círculo circunscrito.
> 2) Desenvolver em série $y = a^x$
> 3) Dar as fórmulas que resolvem o seguinte caso de triângulo retângulo.
> Dados $\begin{cases} b \\ c \end{cases}$ calcular β, C, a, S

Nessa prova, havia duas questões de geometria, uma sobre relações métricas nos polígonos e no círculo, e outra sobre equações trigonométricas e resolução de triângulos. A segunda questão tratava de desenvolvimento em série de funções.


Exame de Matematica
da 1ª serie do Curso Pré-Tecnico
Em 26-11-1936
Ponto sorteado - nº 5
Questões: 1ª Expressão do lado do pentagono regular inscrito em funcção do raio do circulo circumscrito.
2ª Desenvolver em serie $y = a^x$
3ª Dar as formulas que resolvem o seguinte caso de triangulo retangulo.
Dados $\begin{cases} b \\ c \end{cases}$ Calcular $\begin{cases} B & a \\ C & S \end{cases}$.

Visto 26-11-36

Figura 4.3.3: Exame de Matemática 1936
Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Para resolver a primeira questão, relativa ao lado do pentágono regular inscrito, o aluno teria que conhecer e saber utilizar os conceitos da geometria euclidiana, principalmente o Teorema de Pitágoras e relações de semelhança entre triângulos, além de saber operar com radicais e frações. A questão ainda traz implícita, na sua resolução, o segmento áureo, que possivelmente, foi objeto de estudo nas aulas do curso, já que torna a aparecer com mais destaque em outras provas. Uma solução relacionada a essa questão será apresentada mais adiante quando analisarmos as questões da prova aplicada no dia 27 de setembro de 1937.

O livro de Gumercindo Lima apresenta o desenvolvimento em série da função $y = a^x$, possivelmente uma solução próxima da esperada pelos professores na segunda questão da prova. Nela, a fórmula de MacLaurin é dada como:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(x_1)$$

onde x_1 está compreendido entre 0 e x.

Considerando-se que a derivada *n*-ésima de $f(x) = e^x$ é $f^n(x) = e^x$ e que $e^0 = 1$, o resto da fórmula de MacLaurin para $f(x) = e^x$ é:

$$R_n = \frac{x^n}{n!} \cdot e^{bx} = \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{(n-1)} \cdot \frac{x}{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{1} \cdot e^{bx}$$

que tende para zero quando n cresce indefinidamente. Então a função e^x se desenvolve pela série de potência:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

que é convergente para qualquer valor real de x.

Fazendo $f(x) = a^x$, escrevemos que:

$$f(x) = a^x = e^{x \log_e a}$$

Teremos então:

$$a^x = 1 + \frac{x \log_e a}{1} + \frac{(x \log_e a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x \log_e a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

(LIMA, 1938, p. 171).

Na terceira questão, o aluno teria que conhecer as fórmulas trigonométricas para os triângulos retângulos, além de saber interpretá-las e usá-las. Também era recorrente, para a resolução de questões de trigonometria, o uso de tábuas de logaritmos. De fato encontramos, num livro denominado "Novas tábuas de logaritmos" (Coleção de livros didáticos - F.T.D) de 1937, um formulário que apresentava quatro casos de resolução de triângulos retângulos, sendo o 3.º caso dado e resolvido como segue:

3.º Caso: Dados b, c, calcular: B, C, a e S $\begin{cases} tgB = \frac{b}{c} \\ C = 90° - B \\ a = \frac{b}{senB} \\ S = \frac{bc}{2} \end{cases}$

(F. T. D., 1937, p. 173)

Vinte alunos realizaram essa prova e apenas dois obtiveram nota maior ou igual a 70, sendo que um deles obteve nota máxima. Doze deles obtiveram notas menores que 50 e seis ficaram com notas entre 50 e 70. Ninguém "zerou" a prova.

Em 17 de dezembro de 1936, foi realizada a segunda prova parcial e, para essa prova, foram elaboradas as seguintes questões:

1) Deduzir as fórmulas relativas a S_l, S_t e V do cone.
2) Dar o termo geral do desenvolvimento de um binômio e demonstrar que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais.
3) Resolver a equação $(3 - 4cos^2x)sen\, x = 0$

Para a primeira questão, temos a hipótese de que o professor, em aula, tenha demonstrado ou deduzido essas fórmulas, e em função disso, estaria exigindo, na prova, que o aluno reproduzisse esse procedimento.

Na segunda questão, que trata do desenvolvimento de potências de um binômio, percebe-se que a exigência da questão vai além da simples aplicação da fórmula de Newton. O aluno teria que demonstrar que, na expansão de $(a + b)^n$, os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais.

Uma solução para essa questão consiste em observar que, no desenvolvimento de $(a + b)^n$, cada termo será da forma a^ib^{n-i}. O termo a^ib^{n-i} aparecerá a cada escolha da letra a em i dos n fatores. Ou seja, essa escolha pode ser feita de C_n^i formas diferentes. Podemos escrever então a fórmula do binômio que é:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i \, b^{n-i}$$

Nessa expansão, temos um termo distinto para cada valor de i variando de 0 a n. Logo, são $(n+1)$ termos distintos dentre o total de 2^n termos.

Para responder à segunda parte da questão, ou seja, "demonstrar que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais", basta demonstrar que $C_n^i = C_n^{n-i}$, onde C_n^i representa a combinação simples de n elementos tomados i a i. Essa demonstração pode ser verificada algebricamente:

$$C_n^i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = C_n^{n-i}$$

e é ilustrada pelo Triângulo de Pascal:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Os elementos do triângulo são da forma C_n^i, onde n é a linha e i é a coluna correspondente; a simetria verificada em cada linha, confirma que $C_n^i = C_n^{n-i}$.

Outro caminho seria partir da identidade

$$(a+b)^n = (b+a)^n$$

e obter

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i \, b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i b^i \, a^{n-i} = (b+a)^n$$

Como nas duas expansões os coeficientes dos termos semelhantes devem ser iguais, então o coeficiente do termo $a^i b^{n-i}$ deve ser igual nas duas expressões. Então $C_n^i = C_n^{n-i}$ e, portanto, concluímos que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais.

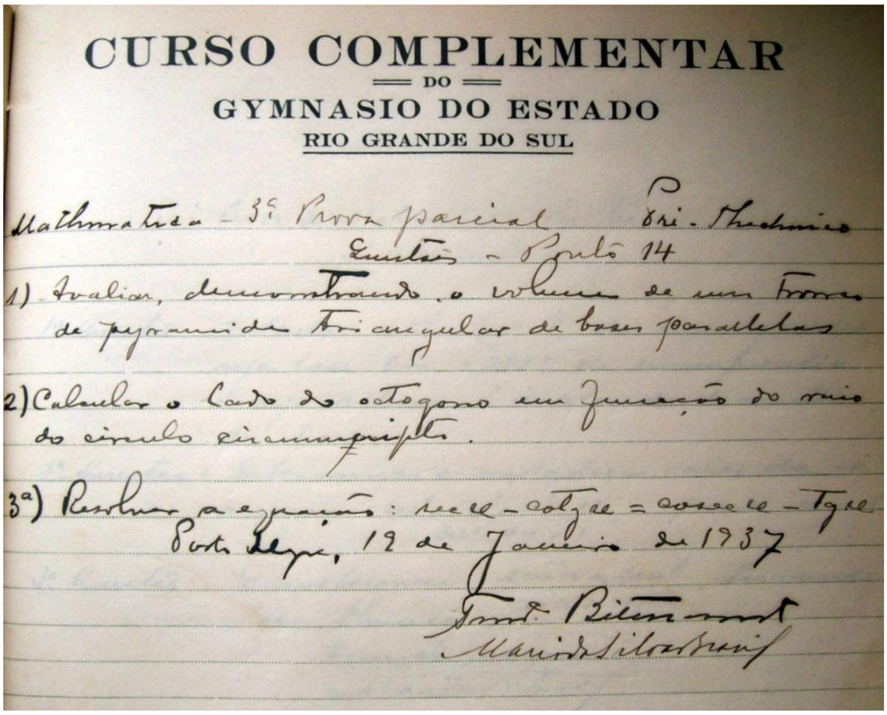
Percebe-se que o aluno deveria ter conhecimentos do binômio de Newton e dos números binomiais.

Na terceira questão, o aluno precisava resolver uma equação trigonométrica e, como se trata de um produto, poderia determinar os valores de x que zeram cada termo, isoladamente e identificar as soluções que satisfazem a igualdade.

Vinte alunos fizeram a prova. Desses, 14 obtiveram notas menores do que 50. Um aluno obteve nota 100 e dois alunos obtiveram nota zero.

A terceira prova parcial (Figura 4.3.4) foi realizada no dia 19 de janeiro de 1937 e apresentou as seguintes questões:

> 1) Avaliar, demonstrando o volume de um tronco de pyramide triangular de bases paralelas.
> 2) Calcular o lado do octógono em função do raio do círculo circunscripto.
> 3) Resolver a equação $secx - cotgx = cossecx - tgx$



CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

Mathematica – 3ª Prova parcial
Questões – Ponto 14
1) Avaliar, demonstrando o volume de um tronco de pyramide triangular de bases parallelas
2) Calcular o lado do octogono em funcção do raio do circulo circumscripto.
3ª) Resolver a equação: secx – cotgx = cossecx – Tgx
Porto Alegre, 19 de Janeiro de 1937

Figura 4.3.4: Terceira prova parcial
Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Para essa prova, os conteúdos envolvidos foram de geometria plana e espacial, relações métricas nos polígonos, no círculo e nos poliedros, além de resolução de triângulos – lei dos cossenos e equações trigonométricas.

Para resolver a primeira questão, esperava-se que o aluno chegasse à fórmula para o volume de um tronco de pirâmide pela diferença entre os volumes V_1 e V_2, onde V_1é o volume da pirâmide original de altura H e V_2 é o volume de uma pirâmide gerada ao se seccionar a pirâmide original por um plano paralelo à base, a uma distância h do vértice. O volume do tronco de pirâmide é obtido por:

$$V_t = V_1 - V_2$$

No livro "Segunda Arithmetica" de Souza Lobo, publicado em 1928 pela Livraria do Globo em Porto Alegre, que foi utilizado como didático nas séries iniciais do Instituto Júlio de Castilhos, encontramos a definição nº 140, que dá outro procedimento de cálculo:

> Para se obter o volume de uma pirâmide truncada, somam-se as áreas da grande base, da pequena base e de uma média entre estas duas superfícies; a somma multiplicam-se pela altura e o produto divide-se por 3. (para achar-se a média entre as duas superfícies das bases da pyramide truncada, multiplica-se uma pela outra e extrahe-se a raiz quadrada do produto) (LOBO, 1928, p. 330-331).

A segunda questão pode ser resolvida fazendo-se uso da fórmula do arco-metade:

$$sen\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

já que, ao inscrevermos um octógono regular no círculo, dividindo $360°$ por oito e observando que a razão entre a metade do lado do octógono e o raio do círculo circunscrito é o seno de $\frac{45°}{2}$, chegamos a:

$$\frac{l}{2r} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} \Rightarrow l = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

A terceira questão apresentou uma equação trigonométrica, isto é, uma equação que envolve funções trigonométricas de ângulos desconhecidos. Para resolvê-la o aluno deveria levar em conta que, em geral, uma equação trigonométrica possui infinitas soluções.

Para resolver a equação $\sec x - cotg\ x = cossec\ x - tg\ x$, o aluno deveria, em primeiro lugar, considerar que a equação está definida para $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in z$.

Reescrevendo em função de seno e cosseno, temos:

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{sen\ x} = \frac{1}{sen\ x} - \frac{sen\ x}{\cos x}$$

$$\frac{senx - \cos^2 x}{\cos x \cdot senx} = \frac{\cos x - sen^2 x}{\cos x \cdot senx}$$

$$sen\,x - \cos^2 x = \cos x - sen^2 x$$

$$sen\,x - \cos\,x = \cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x$$

Elevando ao quadrado:

$$(sen\,x - \cos\,x)^2 = \cos^2 2x$$

$$sen^2 x - 2senx \cdot \cos x + \cos^2 x = \cos^2 2x$$

$$1 - sen\,2x = 1 - sen^2\,2x$$

$$sen\,2x = sen^2\,2x$$

$$sen\,2x\,(sen\,2x - 1) = 0$$

As duas soluções possíveis são

i) Para $sen\,2x = 0$ temos $2x = k\pi$, e portanto $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, que deve ser descartada.

ii) Para $sen\,2x = 1$ temos $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, e portanto $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in z$

Assim, a solução esperada era $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in z$.

Percebe-se então que, para resolver a questão, o aluno precisava de bons conhecimentos de trigonometria, equações trigonométricas e lembrar relações trigonométricas e das fórmulas de arco-duplo, além de habilidade no trato das operações algébricas.

Dezessete alunos realizaram a prova, sendo que desses, apenas quatro obtiveram nota maior do que 50.

A última prova parcial do curso Pré-Técnico aconteceu no dia 17 de fevereiro de 1937 e constou das seguintes questões:

> 1) Deduzir a fórmula do volume de um tronco de um cone pelo método algébrico.
> 2) Resolver o triângulo obliquângulo do qual se conhecem $a, b\ e\ C$.
> 3) Desenvolver em série pela fórmula de MacLaurin a função
> $$y = \cos x$$

Nessa prova os conteúdos envolvidos foram: relações métricas nos polígonos, e nos corpos redondos, lei dos cossenos; desenvolvimento em série de funções elementares.

Pressupomos que na primeira questão, o método algébrico esperado consista no cálculo da diferença entre o volume de um cone original de altura H e um cone com altura $h < H$, tirada a partir do vértice, dado pela subtração algébrica das fórmulas dos respectivos volumes.

A segunda questão trata de uma aplicação direta da lei dos cossenos e a terceira, de uma aplicação da fórmula de MacLaurin conforme referimo-nos anteriormente.

Dessa prova, participaram 15 alunos, dos quais, 10 obtiveram notas maiores do que 50 e desses, sete conseguiram notas maiores do que 70.

O ano de 1937 foi o segundo ano de funcionamento dos Cursos Complementares no Instituto Júlio de Castilhos. Por ser uma instituição referência no Estado, o número de alunos cresceu consideravelmente, fazendo com que os alunos "se amontoassem nas salas"[36]. Além dos alunos do próprio Instituto, estudantes de outras instituições procuravam esse Curso Complementar oficialmente fiscalizado.

Essa demanda chegou a provocar o fechamento temporário do curso secundário, possivelmente pela falta de estrutura que suportasse o número sempre crescente de alunos[37].

Para o curso Pré-Técnico, além da turma de 2ª série, foram criadas duas turmas de 1ª série: 1A e 1B. Neste estudo, vamos acompanhar as provas realizadas pela turma 1A.

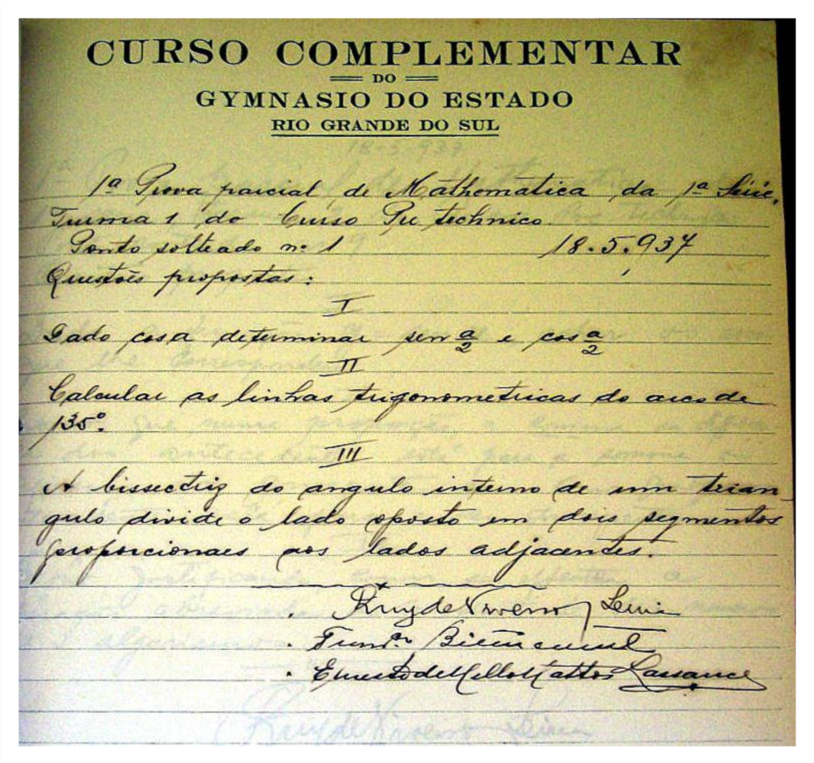
---

[36] Entrevista com Alberto da Costa Castro, ex-aluno do referido Curso Complementar, concedida em 27 de outubro de 2010.

[37] Decreto n. 5629/34, de 29 de junho de 1934, que "extingue o ginásio, que será fechado com a última turma".

4.3.5 Estudo das provas da 1ª série do curso Pré-Técnico em 1937

A primeira prova parcial dessa turma foi realizada no dia 18 de maio de 1937 (Figura 4.3.5).



CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

1ª Prova parcial de Mathematica, da 1ª Série, Turma 1, do Curso Pré technico.
Ponto sorteado n. 1 18.5.937
Questões propostas:
I
Dado cos a determinar sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$
II
Calcular as linhas trigonometricas do arco de 135º.
III
A bissectriz do angulo interno de um triangulo divide o lado oposto em dois segmentos proporcionaes aos lados adjacentes.

Figura 4.3.5: Primeira prova parcial
Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

As questões propostas foram as seguintes:

1) Dado $\cos a$ determine $\text{sen}\,\frac{a}{2}$ e $\cos\frac{a}{2}$
2) Calcular as linhas trigonométricas do arco de $135°$
3) A bissectriz do ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Os conteúdos avaliados na prova correspondem aos seguintes itens dos Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário: “linhas trigonométricas”, “operações sobre linhas trigonométricas” e “relações métricas nos polígonos” (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 186-187).

A primeira questão exigiu que o aluno soubesse manusear equações trigonométricas. Uma solução possível, que parte das fórmulas da soma de arcos aparece nos “Pontos de Matemática” de Gumercindo Lima (1938). Nela, o autor sugere uma troca de variáveis. Fazendo $\theta = 2\alpha$ e substituindo nas equações

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \cos^2\alpha$, que haviam sido deduzidas anteriormente tem-se:

$$sen^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} - sen^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

Somando as duas equações, chegamos à fórmula do cosseno do arco-metade:

$$cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

e, subtraindo, chegamos à fórmula do seno do arco-metade:

$$sen\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

(LIMA, 1938, p. 76-78)

A segunda questão trata de “linhas trigonométricas”, concluímos que essa era a terminologia usada na época para as razões seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de um arco, já que encontramos o uso dessa expressão nos programas do curso complementar e em livros da época que foram consultados.

Uma solução possível para a questão é apresentada nos “Pontos de Matemática” de Gumercindo Lima. Nela o autor apresenta uma solução baseada na construção geométrica de uma “circunferência”[38] (Figura 4.3.6) de raio unitário e que, através de dois diâmetros perpendiculares, é “dividida em quatro partes iguais a que daremos o nome de quadrantes” (LIMA, 1938, p. 73-74).

---

[38] Em alguns textos mais antigos de matemática, encontramos a nomenclatura “circunferência” para designar o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância dada (raio) de um ponto dado (centro). Elon Lages Lima (1991) argumenta que “circunferência e disco são palavras de sentido bastante claro, cada uma com um único significado na língua portuguesa. Por outro lado, círculo é uma palavra que tanto pode ser empregada no sentido de circunferência como no sentido de disco” (LIMA, 1991, p. 157). Neste texto, adotamos a nomenclatura mais usada de “círculo” para designar o lugar geométrico acima referido.

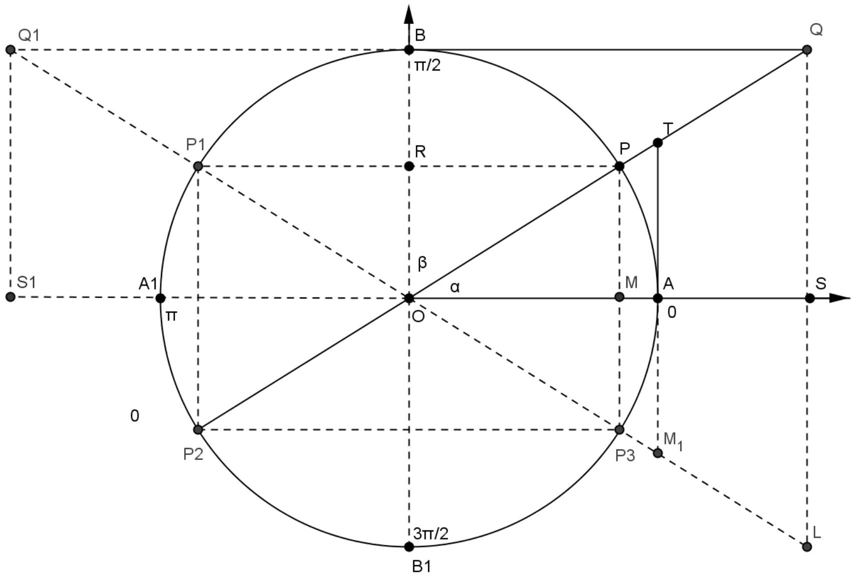


Figura 4.3.6: "Linhas trigonométricas"
Fonte: "Pontos de Matemática" de Gumercindo Lima (1938)

Partindo dessa construção, e considerando um ponto sobre a "circunferência", define as relações seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente:

> 1) seno da abcissa curvilínea AP a perpendicular MP;
> 2) coseno da mesma abcissa, a projeção OM do raio OP;
> 3) tangente, a abcissa retilínea AT;
> 4) secante, o comprimento OT, isto é, o segmento que vai do centro da circunferência à extremidade da tangente.
> 5) cosecante, o segmento OQ;
> 6) cotangente, a abcissa retilínea BQ
> (LIMA, 1938, p. 74)

Nesse capítulo que o autor chama de "Resumo de Trigonometria", Gumercindo Lima escreve que os ângulos ($0°, 30°, 45°, 90°, \ldots$) corresponderão aos seguintes arcos: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \ldots$

> A razão dessa medida origina-se da Geometria, visto como, para um ângulo de n° e o arco n correspondente, sobre a circunferência de raio 1, verifica-se a proporção: $\frac{n°}{180} = \frac{n}{\pi}$ (Ibid., p. 73).

O autor acrescenta ainda que "arcos suplementares são aqueles cuja soma é π; replementares, os de soma 2π" (Ibid., 74). Em seguida, considerando a congruência de triângulos, escreve as seguintes relações:

$$sen(\pi - a) = sen\ a$$

$$cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$tg(\pi - a) = -tg\ a$$

Para responder à questão, ou seja, calcular a tangente de $135°$, os alunos deveriam usar as relações acima considerando $a = 135°$, ou melhor, $a = \frac{3\pi}{4}$. Assim, concluiriam que:

$$sen\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = sen\frac{3\pi}{4}$$

$$cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -cos\frac{3\pi}{4}$$

$$tg\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -tg\frac{3\pi}{4}$$

ou seja,

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{3\pi}{4}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\frac{3\pi}{4}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -cos\frac{3\pi}{4}$$

Para calcular as "linhas trigonométricas" de um arco de $\frac{\pi}{4}$ $(45°)$ usaremos o triângulo retângulo isósceles cujos lados iguais medem 1, e cuja hipotenusa mede $\sqrt{2}$, pelo teorema de Pitágoras (Figura 4.3.7).

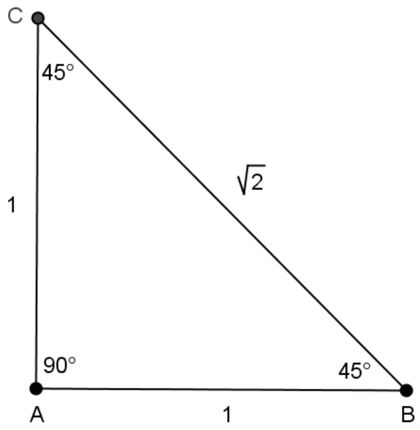


Figura 4.3.7: Triângulo retângulo

Considerando as definições das "linhas trigonométricas", calcularemos:

$$sen\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = 1$$

Pelas relações obtidas através dos arcos suplementares, determinamos o que se pede na questão, ou seja:

$$sen\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{3\pi}{4} = -1$$

e ainda,

$$cosec\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$sec\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$cotg\frac{3\pi}{4} = -1$$

Na terceira questão, podemos supor que o professor esperava uma demonstração do teorema da bissetriz interna através de conhecimentos sobre ângulos, Teorema de Tales, e semelhança de triângulos.

Essa demonstração “por via geométrica” inaugura um tipo de questão que aparecerá em outras provas assinadas pelos professores Ruy Leiria, Ernesto Lassance e Francisco Bittencourt.

Uma resolução para essa questão consiste em considerar um triângulo ABC com bissetriz AD, e a partir dele, construir outro triângulo, prolongando AC até encontrar uma paralela a AD que passa por B. Essa intersecção determina o ponto E (Figura 4.3.8).

Assim, temos que $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AE}$, pois $AD//BE$.

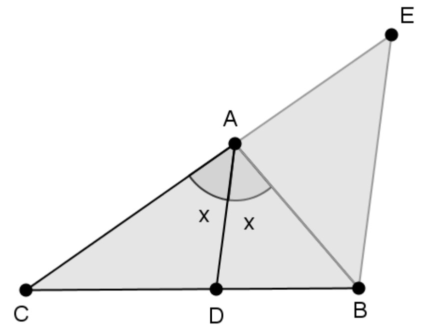


Figura 4.3.8

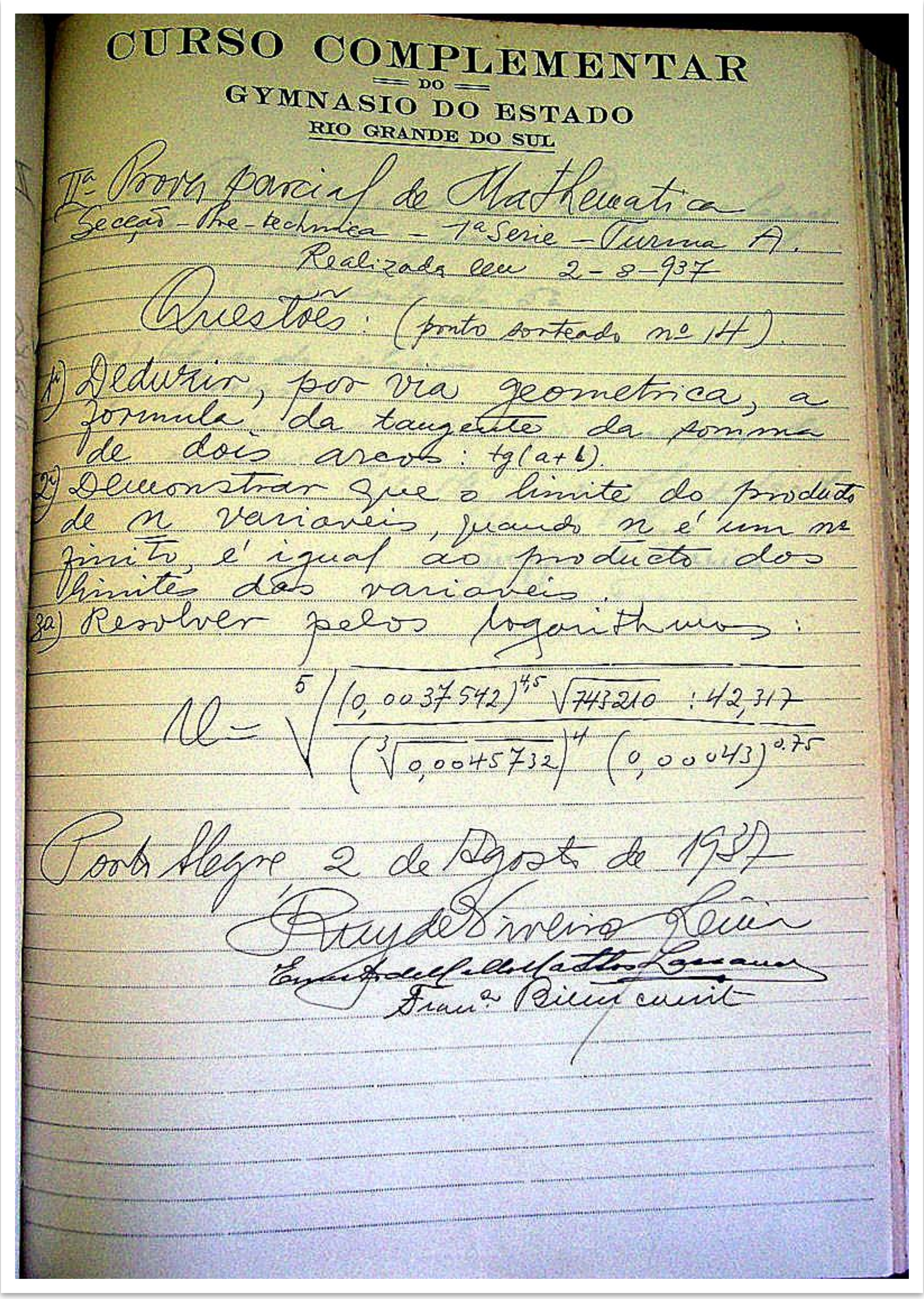
Verificamos também que o triângulo ABE é isósceles de base BE. Então $AB \equiv AE$.

Substituindo AE por AB na relação, temos $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$, que demonstra o teorema da bissetriz interna.

Dos trinta alunos que fizeram a prova, apenas quatro obtiveram nota maior do que 50, sendo que a nota mais alta foi 60. Quatro alunos “zeraram” a prova.

A segunda prova parcial (Figura 4.3.9) foi aplicada no dia 2 de agosto de 1937 com as questões:

> 1) Deduzir, por via geométrica, a fórmula da tangente da somma de dois arcos: $tg(a+b)$.
> 2) Demonstrar que o limite do produto de n variáveis, quando n é um nº finito, é igual ao produto dos limites das variáveis.
> 3) Resolver pelos logarithmos:
>
> $$x = \sqrt[5]{\frac{(0{,}0037542)^{4{,}5}\sqrt{743210} : 42{,}317}{(\sqrt[3]{0{,}0045732})^4 (0{,}00043)^{0{,}75}}}$$



CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

IIª Prova parcial de Mathematica
Secção - Pre-technica - 1ª Serie - Turma A.
Realizada em 2-8-937

Questões: (ponto sorteado nº 14).

1ª) Deduzir, por via geometrica, a formula da tangente da somma de dois arcos: tg(a+b).

2ª) Demonstrar que o limite do producto de n variaveis, quando n é um nº finito, é igual ao producto dos limites das variaveis.

3ª) Resolver pelos logarithmos:

$$x = \sqrt[5]{\frac{(0,0037542)^{4,5}\sqrt{743210} : 42,317}{\left(\sqrt[3]{0,0045732}\right)^{4}(0,00043)^{0,75}}}$$

Porto Alegre 2 de Agosto de 1937

Figura 4.3.9: Segunda prova parcial de Matemática
Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Os conteúdos avaliados na prova correspondem aos seguintes itens dos Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário: "trigonometria, limites e logaritmos" (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 186-187).

Por exemplo, uma solução geométrica esperada na primeira questão, e válida para $a + b < 90°$, consiste em considerar os ΔABC e ΔACD abaixo (Figura 4.3.10):

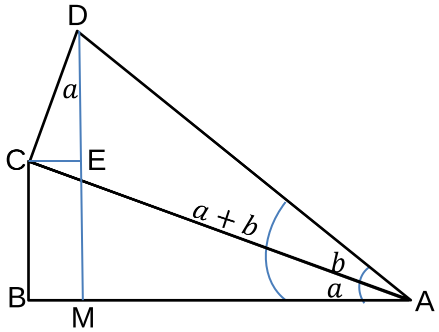


Figura 4.3.10

Nele temos os ângulos agudos e adjacentes, a e b, de modo que $a + b < 90°$.

Temos que $tg(a + b) = \frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}$. Podemos verificar geometricamente que:

$$sen(a + b) = \frac{DM}{AD} = \frac{BC + ED}{AD} = \frac{BC}{AD} + \frac{ED}{AD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{AC} + \frac{ED}{DC} \cdot \frac{DC}{AD} =$$

$$sen(a + b) = sena \cdot cosb + cosa \cdot senb$$

De modo análogo, chegamos a:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - sen\ a \cdot sen\ b$$

Então,

$$tg(a + b) = \frac{sen\ a \cdot \cos b + \cos a \cdot sen\ b}{\cos a \cdot \cos b - sen\ a \cdot sen\ b}$$

Manipulando essa expressão, chega-se a

$$tg(a + b) = \frac{tg\ a + tg\ a}{1 - tg\ a \cdot tg\ b}$$

Possivelmente, os professores que elaboraram a prova também esperavam que os alunos apresentassem a demonstração geométrica para o caso $a + b > 90°$, que pode ser obtida seguindo raciocínio análogo ao anterior (AYRES, 1954, p. 133-134)

Outra solução possível é apresentada nos "Pontos" de Gumercindo Lima, a diferença é que nela, a construção geométrica é feita no círculo trigonométrico e o autor chega ao seno e cosseno de uma soma de arcos com base nas projeções de um ponto da circunferência sobre os eixos ortogonais (LIMA, 1938, p. 77-78).

Vemos então que o aluno necessitava de conhecimentos de relações trigonométricas e saber fazer demonstrações através da geometria. Também consideramos que o sucesso na resolução dependia da criatividade do aluno, e que para desenvolvê-la, era necessário muito estudo e prática nesse tipo de exercício. Não bastava decorar fórmulas, o aluno precisava justificá-las através de argumentos matemáticos fundamentados.

A solução da segunda questão: "demonstrar que o limite do produto de n variáveis, quando n é um nº finito, é igual ao produto dos limites das variáveis", aparece no livro "Curso de Cálculo" com notas de aula do professor Ernesto de Mello Lassance, que fazia parte dessa banca de prova. Nele, o autor apresenta cinco teoremas relativos às operações com limites e suas respectivas demonstrações. A demonstração proposta refere-se ao 3º Teorema, que diz: "O limite de um produto de um número finito de funções é igual ao produto dos limites dos fatores" e parte da suposição de que, para um valor determinado *a*, para cada uma das funções o limite está bem definido em *a*. Pode-se escrever, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = B$$

A partir daí, o caminho é provar que:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

O autor apresenta uma prova fazendo uso de desigualdades, módulo, entorno de um ponto – no caso, $(a, 0)$, que exige do aluno familiaridade com técnicas e estratégias de Cálculo Diferencial.

Ao final, ainda apresenta o corolário: "O limite de uma potência de uma $f(x)$ com expoente inteiro positivo ou negativo é igual a essa potência de seu limite" (LASSANCE, 1949, p. 32-34).

A terceira questão pede que o aluno resolva, usando logaritmos, a seguinte expressão:

$$x = \sqrt[5]{\frac{(0{,}0037542)^{4{,}5} \cdot \sqrt{743210} : 42{,}317}{(\sqrt[3]{0{,}0045732})^4 \cdot (0{,}00043)^{0{,}75}}}$$

De modo que o aluno precisaria saber trabalhar com aproximações de irracionais, raiz cúbica e quíntica, além de saber usar tábua de logaritmos. A sugestão de resolver por logaritmos é oportuna, já que oferece a vantagem de transformar produtos em somas e divisões em subtrações – o que é uma vantagem considerável quando tratamos com números de extensa parte decimal.

Uma possível solução consiste em, num primeiro momento, preparar a expressão para aplicar o logaritmo, ficando assim:

$$x = \left(\frac{\left(\frac{37542}{10000000}\right)^{\frac{9}{2}} \cdot (743210)^{\frac{1}{2}} : \frac{42317}{1000}}{\left(\frac{45732}{10000000}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{43}{100000}\right)^{\frac{3}{4}}} \right)^{\frac{1}{5}}$$

Aplicando logaritmos nos dois termos da equação, temos:

$$5\log x = log\left(\frac{37542}{10000000}\right)^{\frac{9}{2}} + log(743210)^{\frac{1}{2}} - \log\left(\frac{42317}{1000}\right) - \left(log\left(\frac{45732}{10000000}\right)^{\frac{4}{3}} + log\left(\frac{43}{100000}\right)^{\frac{3}{4}} \right)$$

$$= \frac{9}{2}\left(log\frac{37542}{10000000}\right) + \frac{1}{2}(log743210) - log\left(\frac{42317}{1000}\right) - \left(\frac{4}{3}log\frac{45732}{10000000} + \frac{3}{4}log\frac{43}{100000}\right)$$

$$= \frac{9}{2}(log37542 - 7) + \frac{1}{2}(log743210) - (log42317 - 3) - \left(\frac{4}{3}(log45732 - 7) + \frac{3}{4}(log43 - 5)\right)$$

Fazendo uso da tábua de logaritmos:

$$= \frac{9}{2}(-2{,}4255) + \frac{1}{2}(5{,}8711) - (1{,}6265) - \left(\frac{4}{3}(-2{,}3398) + \frac{3}{4}(-3{,}3665)\right)$$

$$= -10{,}9148 + 2{,}9355 - 1{,}6265 - (-3{,}1197 - 2{,}5249)$$

$$= -9{,}6058 - (-5{,}6446)$$

$$= -9{,}6058 + 5{,}6446$$

$$= -3{,}9612$$

$$\log x = \frac{-3{,}9612}{5} = -0{,}79224$$

$$x \cong 0{,}16134$$

Nesse tipo de questão, o aluno deveria usar tabelas chamadas de “tábuas de logaritmos”, além de usar a interpolação para logaritmos de números maiores do que 10000, que era o maior número que tinha seu logaritmo apresentado no livro usado em nossa consulta “Novas Tábuas de Logaritmos” da coleção de livros didáticos – FTD (1937).

Com o advento das calculadoras científicas e posterior facilidade de acesso pelos estudantes, o uso das “tábuas” foi sendo abandonado e até certo ponto esquecido. Mas, por muito tempo, foi um instrumento fundamental na resolução de problemas com logaritmos. Por exemplo, no livro “Curso de Matemática” de Manoel

Jairo Bezerra, publicado por Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1976, o autor esclarece que:

> Há diversos tipos de tábuas, as quais diferem, de um modo geral, pelo número de algarismos de suas mantissas ou pelo número de logaritmos que contém. Adotaremos para os cálculos de nossas expressões e de nossos exercícios a Tábua de Logaritmos de FTD., com 7 decimais, contendo as mantissas dos 10000 primeiros números (BEZERRA, 1961, p. 72).

Vinte e três alunos realizaram essa prova, sendo que vinte e dois alunos receberam notas menores do que 40. O único aluno que ficou com nota superior, obteve nota 67. Oito alunos obtiveram nota zero.

A terceira prova parcial da turma 1A do curso Pré-Técnico, aconteceu no dia 27 de setembro de 1937. Esta prova constou das seguintes questões:

> 1) Demonstrar, fundando-se na origem algébrica, que o logarithmo de um producto é igual a somma dos logarithmos dos factores.
> 2) Provar que o lado do pentágono regular inscripto é a hypothenusa do triângulo rectangulo, cujos catetos são, respectivamente, o lado do *decágono* e o lado do hexágono regulares inscriptos no mesmo circulo e achar a expressão do lado do pentágono regular inscripto.
> 3) Achar o limite para o qual tende a função $\frac{sen\,x - sen\,a}{x-a}$ quando a variável x tende para a.

Os conteúdos avaliados na prova correspondem aos seguintes itens dos Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário: “logaritmos”, “relações métricas nos polígonos na circunferência” e “Limites” (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 186-187).

Na primeira questão o aluno deveria demostrar que:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Segundo Elon Lages Lima (1991),

> Os logaritmos foram inventados no início do século 17, a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos, com vistas à elaboração de tabelas de navegação. Com efeito, a regra $log(x \cdot y) = logx + logy$ e suas consequências, [...] permitem reduzir cada operação aritmética (exceto, naturalmente, a adição e a subtração) a uma operação mais simples, efetuada com os logaritmos (LIMA, 1991, p. 29).

Para resolver a questão, o aluno poderia considerar:

$u = \log_a x$ e $v = \log_a y \Rightarrow a^u = x$ e $a^v = y$, com x e y positivos quaisquer.

Assim, $x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$, de modo que,

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a a^{u+v} = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

> Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo (LIMA et al, 2006, p. 190).

A segunda questão:

> Provar que o lado do pentágono regular inscripto é a hypothenusa do triângulo rectangulo, cujos catetos são, respectivamente, o lado do *decágono* e o lado do hexágono regulares inscriptos no mesmo circulo e achar a expressão do lado do pentágono regular inscripto,

exige que o aluno demonstre que sendo l_5, l_6 e l_{10} lados de um pentágono, um hexágono e um decágono regulares e inscritos num mesmo círculo, então l_5 é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são l_6 e l_{10}. Daí, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(l_5)^2 = (l_{10})^2 + (l_6)^2$$

Para essa demonstração, vamos considerar a seguinte construção (Figura 4.3.11):

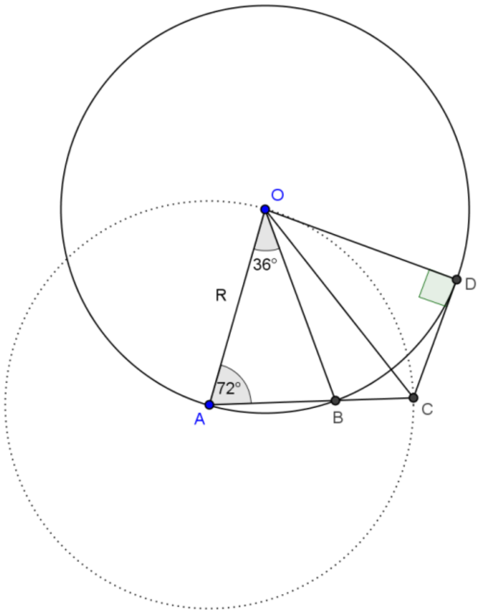


Figura 4.3.11

Seja um círculo λ de raio R e centro O, sendo A e B pontos do círculo, e o ângulo AOB com medida de 36°. Então $\overline{AB}$ é lado do decágono regular inscrito (l_{10}), pois $36° = \frac{1}{10}360°$.

Seja C um ponto no prolongamento de $\overline{AB}$, de modo que $AC = R$. Temos que $\overline{OC}$ é lado do pentágono regular inscrito (l_5), pois o triângulo OAC é isósceles e $72° = \frac{1}{5}360°$.

Seja D um ponto do círculo tal que a tangente a λ por D passa por C. Pela potência de C em relação ao círculo λ, temos:

$$(CD)^2 = AC \cdot BC \Rightarrow (CD)^2 = R(R - l_{10}) \qquad (*)$$

De volta à construção inicial, traçamos a bissetriz de $\hat{A}$ determinando o triângulo isósceles ABA' (Figura 4.3.12):

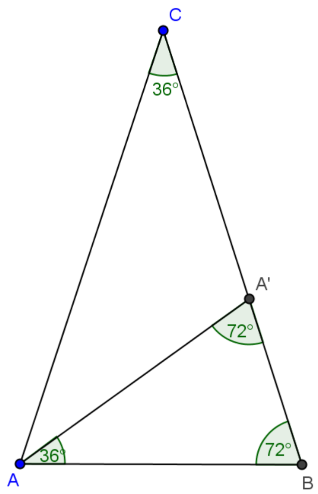


Figura 4.3.12

Pelo teorema da bissetriz interna, temos que:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC - AB} \Rightarrow \frac{R}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{R(R - l_{10})}$$

De modo que:

$$(l_{10})^2 = R(R - l_{10})$$

Assim, de $(*)$ concluímos que $CD = l_{10}$.

E, consequentemente, concluímos que no triângulo retângulo ODC, a hipotenusa tem a medida do lado do pentágono regular inscrito e os catetos têm as medidas dos lados do decágono regular e do hexágono regular, ambos inscritos no mesmo círculo.

Para "achar a expressão do lado do pentágono regular inscripto" usaremos a propriedade demonstrada acima.

O lado do hexágono regular inscrito é o próprio raio R. O lado do decágono regular inscrito é a raiz positiva da equação:

$$l_{10}^{\ 2} + l_{10}R + R^2 = 0$$

Ou seja

$$l_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{(segmento áureo)}$$

Usando o Teorema de Pitágoras,

$$l_5^{\ 2} = \left(R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + R^2$$

$$l_5^{\ 2} = \frac{R^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right)$$

Então, a expressão do lado do pentágono regular inscrito em um círculo de raio R é:

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{\left(10 - 2\sqrt{5}\right)}$$

Essa questão apresenta um problema da geometria clássica, ou seja, da geometria euclidiana. No livro XIII dos “Elementos de Euclides” (360 a. C. – 295 a. C.) encontramos a demonstração do teorema, enunciado como segue:

> (10) Caso um pentágono equilátero seja inscrito em um círculo, o lado do pentágono serve para produzir tanto o hexágono quanto o decágono, dos inscritos no mesmo círculo (EUCLIDES, 2009, p. 572).

Para responder à última questão, o aluno deveria ter em mente algumas identidades trigonométricas, em particular, saber que:

$$sen\ x - sen\ a = 2sen\,\frac{x-a}{2}\cdot cos\,\frac{x+a}{2}$$

Assim, o “limite para o qual tende a função $\frac{sen\ x - sen\ a}{x-a}$ quando x tende para a” pode ser escrito como:

$$\lim_{x\to a}\frac{sen\ x - sen\ a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2sen\,\frac{x-a}{2}\cdot cos\,\frac{x+a}{2}}{x-a}$$

Como o limite do produto é igual ao produto dos limites (esse fato foi demonstrado anteriormente na segunda prova parcial, realizada no dia 2 de agosto de 1937 nessa mesma turma de alunos), vamos calcular os limites (se existirem) separadamente, ou seja:

$$\lim_{x \to a} \frac{sen\,\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

Para facilitar os cálculos, vamos considerar $h = \frac{x-a}{2}$ e como x tende para a, h tende à zero. Assim, o limite que buscamos é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen\,h}{h}$$

Esse limite é igual a 1. Para provar, vamos considerar a circunferência de raio 1 conforme Figura 4.3.13:

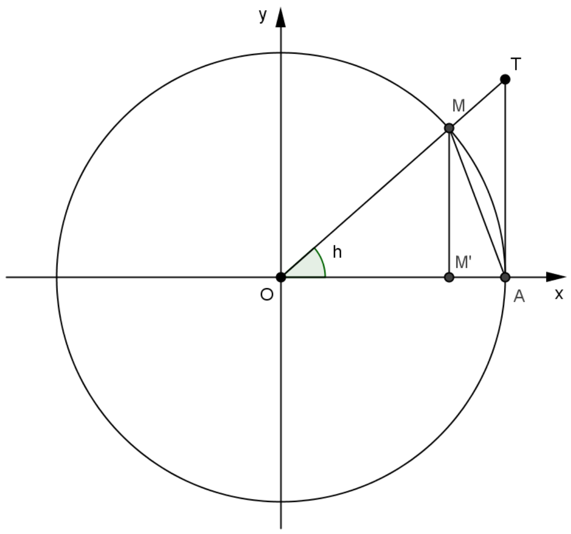


Figura 4.3.13

Seja h a medida em radianos do arco $\widehat{AOM}$ limitada à variação no intervalo $(0,\ \frac{\pi}{2})$.

Da figura 4.3.13, percebe-se que a área do triângulo OAM é menor ou igual à área do setor circular OAM, que por sua vez é menor ou igual à área do triângulo OAT. Pelas relações trigonométricas, e considerando $OA = 1$, sabemos que:

Área do $\Delta OAM = \frac{OA \cdot M'M}{2}$

Área do setor $OAM = \frac{OA \cdot m(\widehat{AM})}{2}$

Área do $\Delta OAT = \frac{OA \cdot AT}{2}$

Então temos a seguinte desigualdade:

$$\frac{OA \cdot M'M}{2} \leq \frac{OA \cdot m(\widehat{AM})}{2} \leq \frac{OA \cdot AT}{2}$$

$$M'M \leq m(\widehat{AM}) \leq AT$$

$$sen\, h \ \leq h \leq tg\, h$$

Dividindo a última desigualdade por $sen\, h$, já que $sen\, h > 0$ para $h \in (0, \frac{\pi}{2})$, temos:

$$1 \leq \frac{h}{sen\, h} \leq \frac{1}{\cos h} \Rightarrow 1 \geq \frac{sen\, h}{h} \geq \cos h$$

Como $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$, concluímos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen\, h}{h} = 1$$

Ainda falta determinar o outro limite, ou seja,

$$\lim_{x\to a} cos\frac{x+a}{2} = cos\frac{2a}{2} = \cos a$$

Daí, concluímos que:

$$\lim_{x\to a} \frac{sen\, x - sen\, a}{x-a} = \cos a$$

que vem a ser a derivada da função $sen\, a$.

Ainda sobre o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

o professor Ernesto Lassance apresenta em seus livros “Curso de Cálculo” (1949) e “Cálculo Infinitesimal I” (1959) a seguinte demonstração:

Consideremos a função

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

“que é definida em todo campo real, com exceção do ponto zero”. Vamos determinar o limite para essa função quando x tende para zero.

Primeiramente, consideremos a Figura 4.3.14, onde $\widehat{AM}$ é o arco que corresponde ao ângulo central $A\hat{O}M = x$. Consideremos também o ponto M' simétrico do ponto M em relação ao segmento $\overline{OA}$.

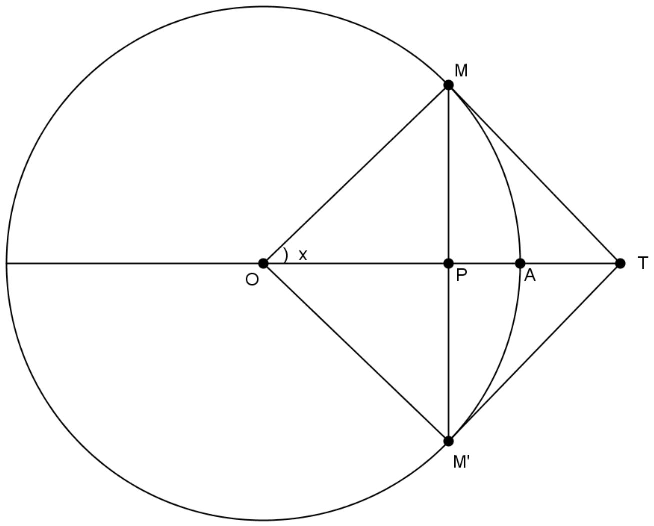


Figura 4.3.14

Tracemos por M a tangente MT e por M' a tangente $M'T$. Vemos, pela figura, que,

$$\overline{MM'} < \widehat{MAM'} < \overline{MT} + \overline{TM'}$$

desigualdade que pode também ser reescrita assim,

$$2\overline{MP} < 2\widehat{AM} < 2\overline{MT}.$$

Dividindo por 2 e, em seguida, pelo raio OA, vem,

$$\frac{\overline{MP}}{OA} < \frac{\widehat{AM}}{OA} < \frac{\overline{MT}}{OA}$$

ou, supondo que x é a medida de $\widehat{AM}$ em radianos, temos:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

que pode ser reescrita como

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Dividindo a unidade por cada um dos termos das desigualdades, teremos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Sendo $x \neq 0$, multiplicando por $\operatorname{sen} x$,

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Segundo o autor, essas desigualdades se verificam também para $x < 0$. Fazendo x tender para zero, sabemos que $\cos x$ tende para 1, de modo que $\operatorname{sen} x$ está compreendido entre 1 e um número que difere de 1 tão pouco quanto se queira.

Lassance conclui, assim, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

(LASSANCE, 1949, p. 40-41).

Essa prova foi realizada por dezesseis alunos. Sendo que dez obtiveram nota zero e a maior nota foi 43.

A última prova da primeira série do curso Pré-Técnico relativa ao ano de 1937, ocorreu no dia 30 de novembro. As questões foram as seguintes:

> 1) Demonstrar pelas progressões que o log de um producto é igual à somma dos $logs$ dos factores
> 2) Demonstrar que 2 polygonos regulares, com o mesmo nº de lados, são semelhantes.
> 3) Tornar calculável, por meio de logarithmos, a expressão $\frac{a+b}{a-b}$, empregando o methodo dos ângulos auxiliares.

Os conteúdos avaliados na prova correspondem aos seguintes itens dos Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário: “logaritmos”, “progressões”, “relações métricas nos polígonos” (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 186-187).

A primeira questão trata da propriedade dos logaritmos que transforma produto em soma, e espera que o aluno demonstre esse fato usando progressões. Encontramos um interessante texto no livro para estudantes do ensino secundário: “Álgebra Elementar” de Sebastião Francisco Alves, publicado por Livraria Francisco Alves em 1929. No que se refere à propriedade “em que o logarithmo de um producto é egual à somma dos logarithmos dos seus factores” o autor escreve que:

> Ora, como as progressões que constituem um systema de logarithmos são taes que o producto LXL' de dous termos da progressão geométrica é igual a um terceiro termo T da mesma progressão e a somma $l + l'$ dos dous termos l e l' da progressão arithmetica correspondentes aos termos L e L' é egual ao termo t correspondente ao termo T, teremos $l = logL$, $l' = logL'$, $t = logT$ e portanto $logL + logL' = LogT$, que nos mostra realmente ser o logarithmo do producto T egual a somma dos logarithmos dos seus factores L e L' (ALVES, 1929, p. 375).

Para respondê-la, tomamos, como exemplo, o sistema de logaritmos decimais. Se consideramos as potências de 10 de expoentes naturais, então temos uma progressão geométrica de razão 10, cujo primeiro elemento é $10^0 = 1$. A essa progressão fazemos corresponder uma progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo zero, cujos termos serão os logaritmos das potências. Então $log\ 10^1 = 1$, $log\ 10^n = n$ e $log\ 10^m = m$, e $log\ 10^n \cdot 10^m = log\ 10^{n+m} = n + m$.

Obtemos novos logaritmos estabelecendo outras progressões geométricas de logaritmandos, por exemplo, com razão $10^{1/5}$. Queremos que as potências de 10 estejam incluídas no sistema, então os logaritmandos serão do tipo $10^{\mathrm{n}/5}$, sendo n um número natural. Queremos manter a correspondência entre as potências de 10 e seus logaritmos, e portanto queremos que, a cada cinco termos da nova progressão, o logaritmo aumente em uma unidade. Então os logaritmos deverão formar uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{5}$. Então $log\ 10^{\frac{n}{5}} = \frac{n}{5}$, $log\ 10^{\frac{m}{5}} = \frac{m}{5}$ e $log\ \left(10^{\frac{n}{5}} \cdot\ 10^{\frac{m}{5}}\right) = log\ 10^{\left(\frac{n}{5}+\frac{m}{5}\right)} = \frac{n}{5} + \frac{m}{5}$ e assim por diante.

Acrescentamos ainda o que escreveu Sebastião Alves em sua “Álgebra Elementar”:

> Certas propriedades de que gozam os logarithmos, segundo as quaes podemos reduzir a multiplicação a uma somma e a divisão a uma subtracção, bem como a potenciação a uma multiplicação e a radiciação a uma divisão, simplificando extraordinariamente os cálculos numéricos, que ficam dependendo então das quatro operações fundamentais da arithmetica (ALVES, 1929, p. 374).

A resposta à segunda questão decorre de que “todo polígono regular é inscritível numa circunferência” (DOLCE; POMPEO, 1985, p. 214-I). De modo que podemos inscrever cada um dos polígonos em um círculo, os círculos tendo, digamos, raios R e r.

Como os polígonos são regulares, podemos decompor cada um deles em n triângulos com vértices no centro do círculo (sendo n o número de lados de cada polígono). Assim, os triângulos obtidos são isósceles com lados adjacentes ao ângulo central, congruentes entre si, com medida R ou r e ângulo central $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Como dois triângulos são semelhantes quando têm um ângulo congruente compreendido entre lados correspondentes proporcionais, cada polígono será decomposto em n triângulos semelhantes ao do outro polígono. Assim, podemos concluir que os polígonos regulares com mesmo número de lados são semelhantes.

Vinte alunos realizaram essa prova, sendo que apenas três obtiveram notas maiores do que 50 e doze ficaram com notas menores do que 20.

4.3.6 Estudo das provas da 2ª série do curso Pré-Técnico em 1937

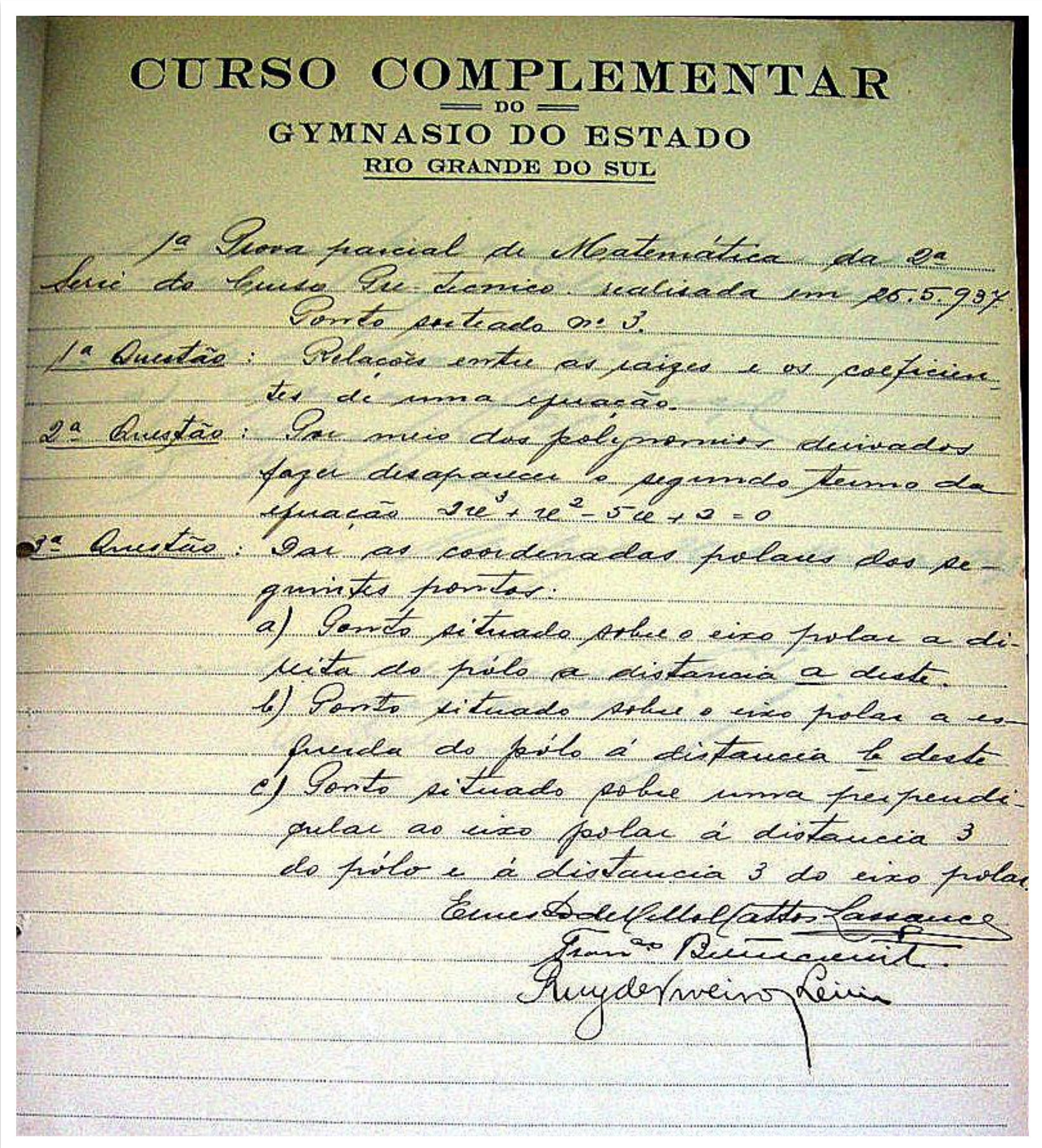
A turma da 2ª série do curso Pré-Técnico realizou sua primeira prova parcial no dia 25 de maio de 1937 (Figura 4.3.15). As questões foram as seguintes:

> 1) Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação.
> 2) Por meio dos polynomios derivados fazer desaparecer o segundo termo da equação $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$
> 3) Dar as coordenadas polares dos seguintes pontos:
>   a) Ponto situado sobre o eixo polar à direita do pólo à distância *a* deste.
>   b) Ponto situado sobre o eixo polar à esquerda do pólo à distância *b* deste.
>   c) Ponto situado sobre uma perpendicular ao eixo polar à distância 3 do pólo e à distância 3 do eixo polar.

Os conteúdos avaliados na prova correspondem aos seguintes itens dos Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário: “princípio fundamental da teoria das equações, propriedades gerais dos polinômios, concepção de Descartes, coordenadas retilíneas e polares no plano” (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 187-188).

Na primeira questão o aluno deveria, por exemplo, apresentar a seguinte relação entre coeficientes e raízes de equações, que aparece nos “Pontos de Matemática” de Gumercindo Lima (1938):

> Em toda equação algébrica cujo 1º termo tem coeficiente 1:
> 1 - O coeficiente do segundo termo é igual à soma das raízes com sinal contrário;
> 2 – O coeficiente do 3º termo é igual à soma dos produtos, dous a dous, das raízes;
> 3 – O coeficiente do 4º termo é a soma dos produtos, três a três, das raízes [com sinal contrário];
> 4 – O último termo é igual ao produto de todas as raízes com o mesmo sinal ou com sinal contrário, conforme a equação for de grau par ou de grau ímpar (LIMA, 1938, p. 253).



CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

1ª Prova parcial de Matemática da 2ª Serie do Curso Pre-Tecnico realisada em 25.5.937.
Ponto sorteado nº 3.

1ª Questão: Relações entre as raizes e os coeficientes de uma equação.

2ª Questão: Por meio dos polynomios derivados fazer desapparecer o segundo termo da equação $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

3ª Questão: Dar as coordenadas polares dos seguintes pontos:
a) Ponto situado sobre o eixo polar a direita do pólo a distancia a deste.
b) Ponto situado sobre o eixo polar a esquerda do pólo á distancia b deste
c) Ponto situado sobre uma perpendicular ao eixo polar á distancia 3 do pólo e á distancia 3 do eixo polar

Figura 4.3.15: Prova da segunda série

Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Uma demonstração para essa relação, considerando-se um polinômio de grau m com m raízes reais, é apresentada a seguir:

Dada uma equação algébrica racional inteira de coeficientes reais de grau m.

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0 \qquad (I)$$

cujas raízes reais são $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m$.

De acordo com a decomposição de um polinômio em fatores, podemos escrevê-la assim:

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)=0$$

Efetuando os produtos dos m binômios, temos:

$$a_0x^m-a_0(x_1+x_2+\ldots+x_m)x^{m-1}+a_0(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+\ldots+x_{m-1}\cdot x_m)x^{m-2}-\ldots+(-1)^m a_0x_1x_2\ldots x_m=0$$

Como os primeiros membros da (I) e desta última equação devem ser idênticos, temos:

$a_0=a_0$

$a_1=-a_0(x_1+x_2+\ldots+x_m)$

$a_2=a_0(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+\ldots+x_1\cdot x_{m-1})$

$\vdots$

$a_m=(-1)^m a_0x_1\cdot x_2\cdots x_m$

obtendo-se assim as relações entre os coeficientes e as raízes da equação (BEZERRA, 1961, p. 291-292).

Para resolver a segunda questão, usando os “polinômios derivados”, primeiro dividimos toda a equação por 2, de modo que o coeficiente do termo de maior grau seja 1. A equação agora é:

$$x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}+1=0$$

Vamos deduzir, a partir dessa equação, outra em que não apareça o segundo termo, ou seja, o termo de expoente 2.

Para isso substituiremos x na equação por $y+h$, sendo h “o coeficiente do segundo termo, com sinal contrário e dividido pelo grau da equação” (LIMA, 1938, p. 260).

$$h=-\frac{1/2}{3}=-\frac{1}{6}$$

Temos, assim, uma nova expressão:

$$\left(y-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{\left(y-\frac{1}{6}\right)^2}{2}-\frac{5\left(y-\frac{1}{6}\right)}{2}+1=0$$

O desenvolvimento desse binômio pode ser obtido pelo desenvolvimento do binômio de Newton ou pela aplicação do teorema de Taylor (CORTAZAR, 1864, p. 56). Fazendo a segunda escolha, temos que:

$$f\left(y-\frac{1}{6}\right)=f(y)+f'(y)\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{f''(y)}{2!}\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{f'''(y)}{3!}\left(-\frac{1}{6}\right)^3$$

pois as derivadas de grau maior que 3 serão todas nulas.

Calculando as derivadas sucessivas de $f(y)$, onde $f(y)=y^3+\frac{y^2}{2}-\frac{5y}{2}+1$, temos:

$f'(y)=3y^2+y-\frac{5}{2}$

$f''(y)=6y+1$

$f'''(y)=6$

Substituindo as derivadas na expressão, temos:

$$f\left(y-\frac{1}{6}\right)=\begin{array}{|c|c|c|c|}
y^3 & +\dfrac{y^2}{2} & -\dfrac{5y}{2} & +1 \\
 & -\dfrac{y^2}{2} & -\dfrac{y}{6} & +\dfrac{5}{12} \\
 & & +\dfrac{y}{12} & +\dfrac{1}{72} \\
 & & & -\dfrac{1}{216}
\end{array}$$

$$f\left(y-\frac{1}{6}\right)=y^3-\frac{31}{12}y+\frac{77}{54}$$

Uma equação transformada é, então, $y^3-\frac{31}{12}y+\frac{77}{54}=0.$

No livro de Gumercindo Lima (1938), “Pontos de Matemática”, consta uma explicação muito vaga dos polinômios derivados (LIMA, 1938, p. 260-261).

No capítulo XVIII do livro “Curso de Matemática” de Manoel Jairo Bezerra, que posteriormente foi considerado um livro clássico para os estudantes desse nível de ensino, encontramos um método que permite fazer desaparecer qualquer termo de uma equação desde que não seja o termo de maior grau nem o termo independente (grau 0). Ou seja:

> Para se obter uma transformada da equação $f(x)=0$, desprovida de um termo de grau i basta achar a transformada aditiva de $f(x)=0$, mediante a função transformatriz $y=x-h$, onde h é a raiz da equação $f^i(x)=0$ obtida igualando zero a derivada de ordem i de $f(x)$ (BEZERRA, 1961, p. 303).

Outras referências sobre esse assunto podem ser encontradas em livros antigos de álgebra, por exemplo, “Complemento del Algebra” de Don Juan Cortazar, publicado em 1864 por “Imprenta de D. F. Sanchez - Madrid” e que utilizamos para essa resolução.

A terceira questão refere-se ao sistema de coordenadas polares que “foi empregado pela primeira vez por Jaques Bernoulli e sua teoria, desenvolvida por Leonard Euler (1707-1771)” (LIMA, 1938, p. 306). Nesse sistema, todo ponto P do plano é representado pelo par de coordenadas $(r,\ \theta)$, sendo r a distância polar[39] OP e θ, o ângulo vetorial ou ângulo polar AOP, medido no “sentido trigonométrico” (Figura 4.3.16).

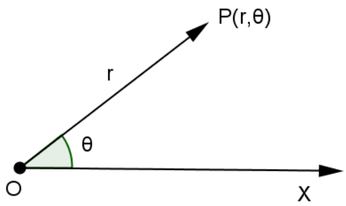


Figura 4.3.16

As coordenadas polares dos pontos que aparecem na terceira questão são:

Ponto A, “situado sobre o eixo polar a direita do pólo à distância a deste”, ou seja, $A(a, o)$;

Ponto B, “situado sobre o eixo polar a esquerda do pólo à distância b deste”, ou seja: $B(b, \pi)$;

Ponto C, “situado sobre uma perpendicular ao eixo polar à distância 3 do pólo e à distância 3 do eixo polar”, ou seja: $C\left(3\sqrt{2}\,,\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Quatorze alunos fizeram a prova, sendo que sete obtiveram notas maiores do que 50 e cinco ficaram com notas menores do que 30.

No dia três de agosto de 1937 realizou-se a segunda prova para essa turma de 2ª série do curso Pré-Técnico. A prova teve as seguintes questões:

> 1) Estabelecer a equação da linha recta em eixos rectilíneos obliquos, dando a significação correta dos parâmetros.
> 2) Estabelecer as condições necessárias para que uma equação de grau ímpar seja recíproca.
> 3) Resolver, aplicando a teoria das raízes iguais a equação
> $$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$$

[39] O autor chama de raio vector (LIMA, 1938, p. 306).

Os conteúdos avaliados na prova correspondem aos seguintes itens dos Programas para o Curso Complementar do Ensino Secundário (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 187-188): “transformação das equações, teoria das raízes iguais e teoria da linha reta no plano”.

Em relação à primeira questão, Gumercindo Lima comenta no capítulo X de seus “Pontos de Matemática”, que René Descartes considerou haver “estabelecido os princípios de sua ÁLGEBRA GEOMÉTRICA, ou melhor, de sua GEOMETRIA ANALÍTICA” (LIMA, 1938, p. 305). O autor argumenta que:

> A Geometria de Descartes funda-se na representação das funções por meio de um sistema de coordenadas. O autor exclui da Álgebra a representação de produtos por áreas ou volumes; ‘toda expressão algébrica, diz ele, deve ser figurada por uma linha simples, pois si a imagem é indispensável ao matemático, não deve, contudo, ser o objetivo nem o instrumento da demonstração’. Assim, pretendendo Descartes chegar a uma simples ilustração algébrica, contribuiu poderosamente nos progressos da Álgebra moderna, creando os métodos da Geometria Analítica a qual constitue, hoje, um dos mais poderosos engenhos da Matemática (Ibid., p. 305).

Em seguida apresenta definições de “coordenadas retilíneas” através dos eixos “$X - X'$” e “$Y - Y'$”, eixos das “abcissas e ordenadas”, respectivamente. Ainda segundo Lima, “os eixos são retangulares si fazem entre si um ângulo reto; e oblíquos, si se cortam sob um ângulo menor que 90°” (Ibid., 1938, p. 306).

Antônio Marmo de Oliveira e Agostinho Silva em “Biblioteca da matemática moderna”, Editora Lisa, São Paulo, 1969, colocam em discussão o uso de “eixos oblíquos” argumentando que:

> Muitos livros atuais de Geometria Analítica fazem o estudo utilizando-se de eixos oblíquos, sobre o pretexto que tal estudo é muito mais geral, do que o feito em eixos perpendiculares. Puro engano! Pois os resultados a que se chega com eixos perpendiculares são tão gerais quanto aos dos eixos oblíquos.
>
> Além do mais, os entes matemáticos, dos quais se ocupa a Geometria, (retas, pontos, superfícies, sólidos, etc.) não dependem se um sistema de referência (OLIVEIRA; SILVA, 1969, p. 396).

Para resolver a questão, primeiro mostramos na Figura 4.3.17 um sistema de coordenadas em eixos oblíquos, ou seja, o ângulo α formado pelos eixos das abscissas e das ordenadas é tal que $\alpha \neq 90°$.

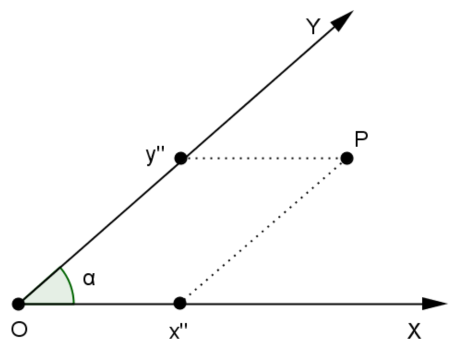


Figura 4.3.17

Nesse sistema, as convenções são as mesmas, devendo-se ter cuidado na determinação das coordenadas de P. Nele temos as retas r, paralela ao eixo Y e s, paralela ao eixo X, que determinam a abscissa x' e a ordenada y' do ponto P.

Segundo Antonio Rodrigues[40] (1949),

> Algumas fórmulas são modificadas em virtude dos eixos serem oblíquos. É o que acontece com a fórmula da distância entre dois pontos [...] que pode ser deduzida mediante o uso de uma fórmula trigonométrica (lei dos cossenos) (RODRIGUES, 1949, p. 35-36).

Para determinar uma equação de reta no sistema de coordenadas oblíquo, vamos deduzir as coordenadas de um ponto P no sistema obliquo, em função das coordenadas desse ponto no sistema ortogonal.

Seja um sistema de eixos oblíquos XY e um sistema de eixos ortogonais xy, conforme figura 4.3.18, de modo que os eixos das abscissas dos dois sistemas coincidam.

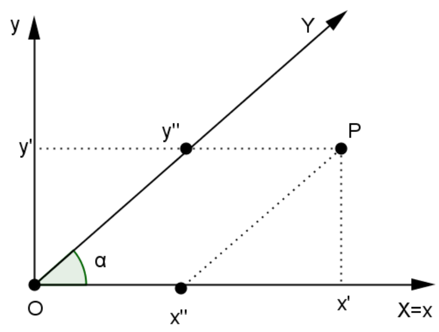


Figura 4.3.18

[40] Antonio Rodrigues foi professor catedrático da Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul e do Colégio Estadual Júlio de Castilhos. Foi um dos professores responsáveis pela criação do Instituto de Matemática da UFRGS, sendo, em 1959, o primeiro Chefe do Departamento de Matemática Pura desse Instituto. Em 1949 publicou o livro “Pontos de geometria analítica”, pela Editora Coruja. Porto Alegre - RS.

As coordenadas oblíquas do ponto P são: x'' e y'', conforme a Figura 4.3.18.

As coordenadas ortogonais do ponto P são: x' e y'.

Da figura, tiramos que:

$$x' - x'' = y'' \cos \alpha,$$

portanto

$$x' = x'' + y'' \cos \alpha$$

e

$$y' = y'' \operatorname{sen} \alpha$$

Como a equação da reta no sistema ortogonal é dada por $Ax' + By' + C = 0$, substituiremos x' e y' conforme a relação estabelecida acima. Assim, temos que:

$$A(x'' + y'' \cos \alpha) + B(y'' \operatorname{sen} \alpha) + C = 0$$

ou $\quad Ax'' + y''(A \cos \alpha + B \operatorname{sen} \alpha) + C = 0.$

Fazendo $A \cos \alpha + B \operatorname{sen} \alpha = m$, temos:

$$Ax'' + my'' + C = 0$$

que é uma equação linear da reta no sistema de coordenadas cartesianas oblíquas.

Outra solução possível para essa primeira questão consiste em escrever a equação paramétrica da reta que passa por dois pontos definidos por seus vetores posição[41] em relação a uma origem O. Esta equação não depende de medida de ângulos e, portanto, vale também para eixos oblíquos.

Dado um ponto P_0 da reta r e um vetor $\vec{a}$ paralelo à reta r, qualquer ponto P da reta pode ser expresso como $P = P_0 + \alpha\vec{a}, \quad \alpha \in IR$.

Agora, dados dois eixos oblíquos e dois vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (um paralelo a cada eixo), qualquer vetor do plano pode ser expresso como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Em particular, o vetor $\vec{a}$.

Então

$\vec{a} = \beta\vec{u} + \gamma\vec{v}$, também escrevemos $\vec{a} = (\beta, \gamma)$, para algum $\beta, \gamma \in IR$.

Então escrevemos $P = P_0 + \alpha(\beta\vec{u} + \gamma\vec{v})$

$P = P_0 + (\alpha\beta)\vec{u} + (\alpha\gamma)\vec{v}$

[41] Vetor posição de um ponto P é o vetor que tem uma extremidade na origem e outra em P.

$\beta\ e\ \gamma$ são os parâmetros que informam a direção do vetor $\vec{a}$ e a direção da reta. α informa "quanto" do vetor $\vec{a}$ precisamos somar a P_0 para chegar a P. P_0 é um ponto da reta.

Para resolver a segunda questão, "estabelecer as condições necessárias para que uma equação de grau ímpar seja recíproca", vamos definir esse tipo de equação algébrica.

Segundo Alves, "Uma equação é recíproca quando, admitindo uma raiz x', admite outra, $\frac{1}{x'}$" (ALVES, 1929, p. 430).

> Estas equações por isso mesmo que as suas raízes guardam entre si uma certa relação conhecida, que é a relação de reciprocidade, fazem parte d'aquellas que poderão ser resolvidas algebricamente, mesmo além do quarto grau, porque a sua resolução, como vamos ver, fica dependendo da resolução de equações de graus inferiores (Ibid., p. 430).

Para resolver a questão proposta, consideraremos a equação polinomial de grau ímpar:

$$x^{2m+1} + \ldots + a_n x^{2m-n+1} + \ldots + a_{2m-n+1} x^n + \ldots + a_{2m+1} = 0 \qquad (1)$$

Se a equação é recíproca, então zero não é uma solução e suas soluções serão as mesmas daquela obtida quando substituímos x por $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x^{2m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{x^{2m-n+1}} + \ldots + \frac{a_{2m-n+1}}{x^n} + \ldots + a_{2m+1} = 0$$

e igualando os denominadores[42], temos:

$$1 + \ldots + a_n x^n + \ldots + a_{2m-n+1} x^{2m-n+1} + \ldots + x^{2m+1} a_{2m+1} = 0$$

Dividindo a equação por a_{2m+1}:

$$\frac{1}{a_{2m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{a_{2m+1}} x^n + \ldots + \frac{a_{2m-n+1}}{a_{2m+1}} x^{2m-n+1} + \ldots + x^{2m+1} = 0$$

Reorganizando a equação, vem:

$$x^{2m+1} + \ldots + \frac{a_{2m-n+1}}{a_{2m+1}} x^{2m-n+1} + \ldots + \frac{a_n}{a_{2m+1}} x^n + \ldots + \frac{1}{a_{2m+1}} = 0$$

[42] No livro de Alves o termo usado é: "expellindo os denominadores" (ALVES, 1929, p. 431).

Como essa equação é equivalente a (1), então os coeficientes das mesmas potências de x são iguais. Daí, tiramos que:

$$\frac{1}{a_{2m+1}} = a_{2m+1}$$

Ou seja, $a_{2m+1} = +1$ ou $a_{2m+1} = -1$, e assim concluímos que, para um termo genérico a_n, temos:

$$a_n = +a_{2m-n+1}$$

ou

$$a_n = -a_{2m-n+1}$$

Portanto cada coeficiente é igual ou é o simétrico do coeficiente do termo equidistante.

Observamos que, numa equação de grau ímpar, o número de termos do primeiro membro é par, e portanto não existe "termo do meio". Assim, para uma equação de grau ímpar ser recíproca,

> basta que os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos sejam iguaes, do mesmo signal ou de signaes contrarios (ALVES, 1929, p. 431).

Para resolver essa questão, o aluno precisava ter estudado álgebra em particular a "teoria das equações", "equações polinomiais", além de saber argumentar algebricamente a fim de comprovar determinada proposição.

Além da referência citada anteriormente, também encontramos textos sobre as equações recíprocas no "Curso de matemática para os cursos de segundo grau" de Manoel Jairo Bezerra (1961, p. 312-318), publicado pela Companhia Editora Nacional, São Paulo.

A última questão dessa prova consiste em "resolver, aplicando a teoria das raízes iguais, a equação $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$". Por raízes iguais se designava o que hoje usualmente denominamos raízes múltiplas.

A solução que expomos aqui baseia-se na "teoria de las raices iguales" que consta no livro "Tratado de Álgebra" de Don Juan Cortázar (1849) publicado por Imprenta de D. F. Sanchez.

A "teoria das raízes iguais" está fundamentada no seguinte teorema, citado por Cortázar: "Se uma equação $p(x) = 0$ possui raízes iguais, o máximo divisor comum do primeiro membro de $p(x)$ e de sua derivada, $p'(x)$, é o produto dos fatores binomiais correspondentes a essas raízes, tendo cada binômio nesse produto, expoente inferior em uma unidade, ao que tem no primeiro membro da $p(x)$" (CORTÁZAR, 1849, p. 289, tradução nossa).

Por se tratar de uma referência para os estudantes de Engenharia, destacamos que o livro "Cálculo Diferencial e Integral" de N. Piskunov apresenta no capítulo VII, seção 7, que trata das "raízes múltiplas do polinômio", o seguinte teorema: "Se a_1 é uma raiz múltipla de ordem $k_1 > 1$ para o polinômio $f(x)$, então a_1 será uma raiz múltipla de ordem $k - 1$ para a derivada $f'(x)$" (PISKUNOV, 1977, p. 257, tradução nossa).

A questão proposta apresenta um caso particular de equação com raízes múltiplas, de modo que o método, que presumivelmente foi estudado em aula, pode ser aplicado.

Segundo a "teoria das raízes iguais", consideramos então $p(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$, e calculamos sua derivada: $p'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$.

Para determinar o *mdc* dos polinômios, precisamos fazer divisões sucessivas até encontrarmos resto zero. Neste caso, o último divisor será o *mdc* procurado (ALVES, 1929, p. 153).

Para facilitar os cálculos, vamos dividir $p'(x)$ por 2, e multiplicar $p(x)$ por 4, isso não vai interferir no cálculo do mdc já que dois não é divisor comum de $p(x)$ e $p'(x)$.

Dividindo então os polinômios obtidos, temos:

$$4x^4 - 24x^3 + 52x^2 - 48x + 16 = (2x - 3)(2x^3 - 9x^2 + 13x - 6) - (x^2 - 3x + 2)$$

Continuando, encontramos:

$$2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = (-2x + 3)(-x^2 + 3x - 2)$$

Daí, determinamos:

$$mdc\big(p(x); p'(x)\big) = (-x^2 + 3x - 2) = -(x - 1)(x - 2)$$

Então, a equação possui duas raízes iguais a 1 e duas iguais a 2, ou seja:

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x - 1)^2(x - 2)^2$$

Segundo Don Juan Cortázar (1849), o método das raízes iguais é "sumamente penoso" e deve ser evitado para equações de grau menor do que cinco e naquelas que possuem pelo menos uma raiz "comensurável" [racional]. Para essas, segundo o autor, existem métodos mais adequados (CORTÁZAR, 1849, p. 292, tradução nossa).

Para resolver essa questão, os estudantes precisavam de conhecimentos de álgebra, em especial, dos métodos de resolução de equações algébricas. E ainda, ter habilidade com cálculos algébricos, divisão de polinômios, cálculo de derivadas de funções polinomiais e mdc de polinômios.

Quinze alunos fizeram a prova e oito obtiveram notas acima de 50. Apenas quatro alunos obtiveram notas menores do que 30.

A terceira prova parcial do curso Pré-Técnico foi realizada no dia 28 de setembro de 1937 e constaram as seguintes questões:

> 1) Formar, justificando, a equação das diferenças das raízes da equação: $x^3 - 6x - 7 = 0$
> 2) Estabelecer a equação polar da linha reta para as seguintes posições particulares:
> a) Reta perpendicular ao eixo polar à esquerda do pólo.
> b) Reta paralela ao eixo polar.
> c) Reta formando com o eixo polar um ângulo de 60° e cortando este a uma distância 3 do pólo.
> 3) Resolver a equação $x^5 - 1 = 0$

A primeira questão consiste na determinação da equação das diferenças das raízes da equação $x^3 - 6x - 7 = 0$.

Encontramos em Comberousse (1909, p. 373) uma resolução análoga à que segue.

Sendo $f(x) = x^3 - 6x - 7$, queremos resolver o sistema

$$\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ f(x_2) = 0 \\ h = x_2 - x_1 \end{cases}$$

eliminando as variáveis x_1 e x_2.

Ao eliminarmos essas variáveis, obteremos uma equação em h que será a equação das diferenças.

Sendo $f(x)$ uma função polinomial de grau 3, teremos $3^2 = 9$ diferenças, entre as quais se incluem três diferenças nulas. Para eliminar essas soluções, trabalharemos então com o sistema

$$\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \\ h = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Esse sistema tem as mesmas raízes do anterior, à exceção das três soluções nulas. Portanto ao final teremos uma equação de grau 6, cujas raízes são $(x_1 - x_2)$,

$(x_2 - x_1)$, $(x_2 - x_3)$, $(x_3 - x_2)$, $(x_1 - x_3)$ e $(x_3 - x_1)$. Em geral, se uma equação é de grau m, a equação das diferenças será de grau $m(m-1)$ (CORTÁZAR, 1849, p. 395).

Substituindo $x_2 = x_1 + h$ (da terceira equação) na segunda equação, o sistema fica:

$$\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = 0 \end{cases}$$

Para simplificar a escrita, podemos agora substituir x_1 por x:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0 \end{cases}$$

No nosso caso, queremos resolver o sistema dado por

$f(x) = x^3 - 6x - 7 = 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6x - 6h - 7) - (x^3 - 6x - 7)}{h}$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2 - 6 = 0$$

eliminando a variável x.

Para essa eliminação, Comberousse (1909) propõe diferentes métodos, entre eles o de Cauchy (Ibidem, p. 351-352) e o denominado "método do máximo divisor comum", que adotaremos nesta resolução e que é também citado por Cortázar (1849).

Comberousse justifica esse método (1909, p. 322-329), de modo simplificado, como segue.

Em geral, temos um sistema de dois polinômios $f(x,h)$ e $F(x,h)$, para o qual queremos eliminar uma das variáveis, no caso, a variável x.

Começamos verificando se $f(x,h)$ e $F(x,h)$ têm algum fator em comum que seja função de x apenas ou de h apenas. Fazendo $f(x,h) = x^3 - 6x - 7$ e $F(x,h) = 3x^2 + 3xh + h^2 - 6$, observamos que não têm fatores em comum.

Designemos $f(x,h)$ por A e $F(x,h)$ por B, supondo que em relação à variável x A seja de grau maior ou igual a B. Dividimos A por B de modo a obter um resto que seja, em relação à variável x, de grau inferior ao de B. Designando o quociente por Q_1 e o resto por R_1 teremos

$$A = BQ_1 + R_1$$

Se a divisão não introduziu nenhum denominador função de h, os grupos de valores de x e de h que satisfazem $B = 0$ darão ao mesmo tempo $A = R_1$. Disso resulta que os sistemas

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} B = 0 \\ R_1 = 0 \end{cases}$$

têm o mesmo conjunto de soluções e portanto são equivalentes.

Prosseguimos então:

> Somos então levados a operar sobre os polinômios A e B *como se se tratasse de encontrar seu máximo divisor comum*. Uma vez que eles não têm qualquer divisor comum, os cálculos prosseguirão até que se chegue a um resto R_n independente de x (COMBEROUSSE, 1909, p. 327, itálico no original).

Como a última equação $R_n = 0$ contém apenas a variável h, essa é a equação final em h que resulta da eliminação de x entre as equações dadas.

Agora, para evitar a introdução de denominadores que serão função de h, em geral será preciso multiplicar antecipadamente o dividendo A por uma função inteira de h convenientemente escolhida, que designaremos Y.

Nesse caso, temos uma igualdade da forma $YA = BQ_1 + R_1$ e os grupos de valores que satisfazem $B = 0$ satisfazem ao mesmo tempo $YA = R_1$. Neste caso, o sistema

$$\begin{cases} B = 0 \\ R_1 = 0 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} YA = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

que se decompõe em dois sistemas:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Y = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ao novo sistema serão acrescidas então, as soluções particulares do sistema

$$\begin{cases} Y = 0 \\ B = 0 \end{cases}.$$

O novo sistema, entretanto, será equivalente ao anterior se o sistema

$$\begin{cases} Y = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

não tiver solução.

Vejamos como proceder no caso particular da equação dada:

Temos o dividendo $x^3 - 6x - 7$ e o divisor $3x^2 + 3xh + h^2 - 6$. Multiplicamos o dividendo $x^3 - 6x - 7$ por 3 (o que não modifica as soluções do sistema) e procedemos à divisão:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 0x^2 - 18x - 21 & \underline{3x^2 + 3hx + h^2 - 6} \\ \underline{-3x^3 - 3hx^2 - h^2x + 6x} & x - h \\ \quad -3hx^2 + (-12 - h^2)x - 21 & \\ \quad \underline{3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 6h} & \\ \qquad (-12 + 2h^2)x + (h^3 - 6h - 21) & \end{array}$$

Agora tomamos $3x^2 + 3xh + h^2 - 6$ como dividendo e $(2h^2 - 12)x + (h^3 - 6h - 21)$, como divisor. Para evitar o denominador em h, multiplicamos o dividendo por $(2h^2 - 12)$. Observamos que ao fazer esta multiplicação não estamos introduzindo nenhuma nova solução, pois quando $(2h^2 - 12) = 0$ o divisor não se anula (conforme notação anterior, não ocorre $Y = 0$ e $B = 0$ ao mesmo tempo).

$$\begin{array}{l|l} (6h^2 - 36)(x^2) + (6h^3 - 36h)x + 2h^4 - 24h^2 + 72 & \underline{(2h^2 - 12)x + h^3 - 6h - 21} \\ \underline{-(6h^2 - 36)x^2 - 3h^3x + 18hx + 63x} & 3x \\ \qquad (3h^3 - 18h + 63)x + 2h^4 - 24h^2 + 72 & \end{array}$$

Agora multiplicamos o resto por $(2h^2 - 12)$ novamente, e continuamos a divisão

$$\begin{array}{l|l} (6h^2 - 36)(x^2) + (6h^3 - 36h)x + 2h^4 - 24h^2 + 72 & \underline{(2h^2 - 12)x + h^3 - 6h - 21} \\ \underline{-(6h^2 - 36)x^2 - 3h^3x + 18hx + 63x} & 3x + (3h^3 - 18h + 63) \\ \qquad (3h^3 - 18h + 63)x + 2h^4 - 24h^2 + 72 & \\ (2h^2 - 12)(3h^3 - 18h + 63)x + (2h^2 - 12)(2h^4 - 24h^2 + 72) & \\ \underline{-(2h^2 - 12)(3h^3 - 18h + 63)x - (3h^3 - 18h + 63)(h^3 - 6h - 21)} & \\ \qquad\qquad h^6 - 36h^4 + 324h^2 + 459 & \end{array}$$

Chegamos assim à equação das diferenças, que é

$$h^6 - 36h^4 + 324h^2 + 459 = 0$$

Observamos que todos os termos da equação são de grau par, o que é esperado, uma vez que tem três pares de raízes simétricas (se h_1 é raiz, $-h_1$ também é).

O autor observa que o método do máximo divisor comum será sempre efetivo no caso em que a equação dada seja do terceiro grau, mas exigirá vários cuidados e frequentemente não será aplicável no caso mais geral (Ibid., p. 329).

Para resolver a segunda questão, os alunos precisavam ter estudado as coordenadas polares, no caso, equação da reta em coordenadas polares.

Nos itens a e b dessa questão, temos que:

> Em geral, a forma polar de uma equação de uma reta não é tão simples como a forma cartesiana. Contudo, se a reta for paralela ao eixo polar ou ao eixo $\frac{\pi}{2}$, a equação será bastante simples (LEITHOLD, 1977, p. 458).

Vimos anteriormente que um ponto do plano tem coordenadas polares definidas por uma distância r ao polo e um ângulo θ em relação ao eixo polar. Vamos agora relacionar as coordenadas polares de um ponto com suas coordenadas cartesianas, ou seja:

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Se a reta for perpendicular ao eixo polar, à esquerda do polo, passa pelo ponto $P(a, 0)$, com $a < 0$, sua equação cartesiana será $x = a$. Substituindo x por $r\cos\theta$, obtemos:

$$r\cos\theta = a$$

A reta paralela ao eixo polar, e que passa por um ponto $P(0, b)$, tem equação correspondente na forma cartesiana $y = b$. Assim, em coordenadas polares, temos a equação:

$$r\,\text{sen}\,\theta = b$$

Se b for positivo, a reta está acima do eixo polar, caso contrário, ela está abaixo do eixo polar.

A equação polar de uma reta que não passa pelo polo, é dada por:

$$\rho = r\cos(\theta - \alpha)$$

onde $P(r, \theta)$ é um ponto qualquer da reta e $N(\rho, \alpha)$ é o ponto tal que o triângulo OPN é retângulo em N.

Então, conforme o item c da segunda questão, temos os pontos da reta $P_1(3,0)$ e $N(\rho, -\frac{\pi}{6})$, sendo o triângulo OP_1N retângulo em N. Ainda podemos calcular ρ, pois:

$$\rho = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Então, a equação polar da reta que forma um ângulo de 60° com o eixo polar e corta este a uma distância 3 do polo é:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

A última questão dessa prova consiste na resolução da equação binomial:

$$x^5 - 1 = 0$$

"As equações binomiais são do tipo $x^m \pm A_1 = 0$, onde a incógnita aparece num só termo, podendo A_1 ser inteiro ou fracionário" (ALVES, 1929, p. 486).

Para resolver a questão, vamos determinar todas as 5 raízes quínticas da unidade, que são distintas, já que "as equações binomiais não possuem raízes iguais, pois a quantidade $y^m \pm 1$ e sua derivada my^{m-1} são quantidades primas entre si" (CORTÁZAR, 1849, p. 340, tradução nossa).

Como a equação admite $x' = 1$ como raiz, vamos dividir o primeiro membro da equação por $x - 1$, de modo que $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Assim, o polinômio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ nos fornecerá as outras quatro raízes.

A equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ é recíproca, pois os coeficientes dos termos equidistantes são iguais, portanto, usaremos um método de resolução aplicável a esse tipo de equação, ou seja, dividindo-a por x^2 e reescrevendo-a, temos:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

Fazendo $\left(x + \frac{1}{x}\right) = z$, então temos $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = z^2 - 2$, e, substituindo, escrevemos a equação:

$$z^2 + z - 1 = 0$$

Resolvendo-a, encontramos as soluções:

$$z' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$z'' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Substituindo de volta $z = x + \frac{1}{x}$, temos as equações quadráticas:

$$x^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x + 1 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x + 1 = 0$$

A partir dessas duas equações, calcularemos as quatro raízes faltantes da equação binomial $x^5 - 1 = 0$, que são:

$$x'' = \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$$

$$x''' = -\frac{\sqrt{5} + 1 - \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$$

$$x'^{v} = -\frac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$$

$$x^{v} = \frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-(10 + 2\sqrt{5})}}{4}$$

que, associadas a $x' = 1$, completam a resolução da equação.

Considerando que os números complexos estavam previstos nos programas, pode-se supor que outra resolução esperada fosse a da determinação das cinco raízes quínticas da unidade através da forma trigonométrica:

Se $x^5 = 1$, e x é um número complexo, então

$$x = \cos\left(j\frac{360°}{5}\right) + isen\left(j\frac{360°}{5}\right)$$

com $i^2 = -1$ e j igual a 0,1, 2, 3 ou 4.

Para $j = 0$, temos $x' = \cos 0° + isen0° = 1$

Para $j = 1$, temos $x'' = \cos 72° + isen72°$

Para $j = 2$, temos $x''' = \cos 144° + isen144°$

Para $j = 3$, temos $x^{iv} = \cos 216° + isen216°$

Para $j = 4$, temos $x^{v} = \cos 288° + isen288°$

Comparando as duas soluções, podemos concluir que

$$x'' = \cos 72° + isen72° = \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-\left(10 + 2\sqrt{5}\right)}}{4}$$

que é a única das raízes que tem a parte real e a parte imaginária ambas positivas.

Com a solução apresentada anteriormente (p. 122) chegamos aos resultados clássicos que normalmente são obtidos considerando o triângulo áureo

$$\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ e } sen\, 72° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Os conteúdos dessa prova estavam relacionados com os seguintes itens dos Programas para o Curso Complementar do Ensino Secundário: “composição das equações, propriedades gerais dos polinômios, lugares geométricos no plano, teoria da linha reta no plano e números complexos” (BICUDO, 1942 apud OTONE E SILVA, 2006, p. 187-188).

Treze alunos realizaram essa prova. A maior nota obtida foi 60 e dez alunos ficaram com notas menores do que 50.

A quarta e última prova parcial dessa turma de 2ª série do curso Pré-Técnico foi realizada no dia 1º de dezembro de 1937 e apresentou as seguintes questões:

> 1) Estabelecer a expressão analítica do ângulo de duas retas dadas por suas equações.
> Aplicar às retas: $3x + 4y = 12 \; e \; y = 2x + 3$
> 2) Resolver a equação: $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0$
> 3) Por meio dos polinômios derivados, fazer desaparecer o 2º termo da equação: $3x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 8x - 9 = 0$

Os conteúdos avaliados na prova correspondem aos seguintes itens dos Programas do Curso Complementar do Ensino Secundário: “teoria da linha reta no plano, composição das equações, cálculo das raízes reais e imaginárias, e propriedades gerais dos polinômios” (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 187-188).

Para responder à primeira questão, vamos considerar duas retas concorrentes, r e s. As retas r e s formam, respectivamente, ângulos α e β com o eixo das abscissas. Pelo teorema dos ângulos externos - que diz que a medida de um ângulo externo no vértice de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos nos dois vértices opostos do triângulo -, percebemos que o ângulo procurado é $\alpha - \beta$ (ou o seu suplementar), e aplicando a fórmula da tangente da diferença de dois ângulos, temos:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Mas, $\tan\alpha$ é coeficiente angular da reta r, e $\tan\beta$ é coeficiente angular da reta s. Escrevendo $\tan\alpha = m_r$ e $\tan\beta = m_s$, então:

$$\tan\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

que é a expressão analítica do ângulo θ entre as retas r e s, dado por $\theta = \alpha - \beta$.

Considerando as retas da questão como $r: 3x + 4y = 12$ e $s: y = 2x + 3$, determinaremos os respectivos coeficientes angulares, ou seja:

$$m_r = -\frac{3}{4} \text{ e } m_s = 2$$

Daí, temos que:

$$\tan\theta = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right) - 2}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 2}$$

$$\tan\theta = \frac{11}{2}$$

O ângulo procurado então é $\operatorname{arc}\tan\frac{11}{2} \cong 80°$

A segunda questão apresenta uma equação recíproca de grau ímpar. Então, como $x = 1$ é raiz da equação, primeiro vamos dividir o primeiro membro por $(x - 1)$. Nas equações recíprocas, se x' é raiz da equação, então $\frac{1}{x'}$ também será. Para o caso de $x' = 1$ (ou $x' = -1$), essa propriedade não contribui na determinação de outra raiz. Assim, fazendo a divisão por $(x - 1)$, encontramos:

$$12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = (x - 1)(12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12)$$

Agora precisamos encontrar as raízes de $12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$, o que faremos utilizando o método para resolução de equações recíprocas (ALVES, 1929, p. 430). Primeiramente, dividimos os dois membros da equação por x^2:

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0 \Rightarrow 12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$$

Substituindo $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ por y e $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ por $y^2 - 2$, ficamos com a equação:

$$12y^2 + 4y - 65 = 0$$

Essa equação tem como raízes $y' = -\frac{5}{2}$ e $y'' = \frac{13}{6}$.

Substituindo os valores de y em $x + \frac{1}{x} = y$, encontramos as seguintes equações:

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \text{ e } 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

Delas obtemos as raízes $x' = -2, x'' = -\frac{1}{2}, x''' = \frac{3}{2}$ e $x^{iv} = \frac{2}{3}$, que junto com $x = 1$, completam as raízes da equação $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0$.

A última questão dessa prova retoma os polinômios derivados, que também constaram na primeira prova parcial aplicada para essa turma no dia 25 de maio.

Usando os polinômios derivados, a questão pedia que o aluno “fizesse desaparecer o segundo termo da equação”: $3x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 8x - 9 = 0$. Seguindo o método anteriormente descrito, e substituindo x por $y + \frac{13}{12}$, chega-se à equação

$$3y^4 - \frac{113y^2}{8} - \frac{1681y}{72} - \frac{5593}{256} = 0$$

que é uma equação transformada sem o segundo termo, conforme solicitado na questão.

Além de extensas operações algébricas, que exigiam que o aluno soubesse trabalhar com polinômios, essa questão, a exemplo de outras, exigia muita atenção, pois um pequeno erro colocava em risco todo o desenvolvimento. Também percebemos que os professores não estavam avaliando apenas as habilidades dos alunos no manuseio com essas expressões. Ou seja, o aluno deveria conhecer estratégias matemáticas apropriadas para cada caso e saber aplicá-las. De modo que, para resolver esse tipo de questão, o aluno precisava conhecer e saber aplicar técnicas avançadas do Cálculo.

Quinze alunos fizeram a prova, dos quais, seis obtiveram notas maiores do que 50.

4.3.7 Estudo das provas da 1ª série do curso Pré-Médico em 1937

No dia 21 de maio de 1937, os alunos da 1ª série do curso Pré-Médico realizaram a primeira prova parcial. Nela, constaram as seguintes questões:

> 1) Achar o erro absoluto e relativo quando se substitui o número $34{,}1234$ pelo número $34{,}123$.
>
> 2) Determinar o número (e) desenvolvendo a expressão $(1 + \frac{1}{m})^m$ quando m tende para o infinito.
>
> 3) Simplificar os seguintes radicais $3\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{16 - 8\sqrt{2}} - \sqrt{36 - 18\sqrt{2}}$

Os conteúdos dessa prova estavam relacionados com os seguintes itens dos Programas para o Curso Complementar do Ensino Secundário: "noções de cálculo numérico", "valores exatos e aproximados, erro absoluto e erro relativo, operações efetuadas com dada aproximação", "o número e. Limite $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quando m tende para o infinito", "números irracionais; operações, aplicações" (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 183-185).

Para resolver a primeira questão, os alunos precisavam saber que: "denomina-se erro absoluto (E) a diferença entre o número exato e o número aproximado" (BEZERRA, 1961, p. 14) e também que "denomina-se erro relativo de um número aproximado ao quociente da divisão de seu erro absoluto pelo seu valor exato" (Ibd., 1976, p. 18). Assim, resolveriam a questão, primeiro calculando o erro absoluto:

$$E = 34{,}1234 - 34{,}123 = 0{,}0004$$

e, depois, calculando o erro relativo, ou seja:

$$e = \frac{0{,}0004}{34{,}1234} = \frac{2}{170617} \cong 0{,}0000117221613321064$$

Trata-se de uma divisão bastante trabalhosa.

Em relação a essa questão, encontramos nos "Pontos de Matemática" de Gumercindo Lima (1938) o seguinte comentário: "as operações da Aritmética quasi sempre dão resultados exatos; todavia, nem sempre há necessidade de se obterem tais resultados, sendo bastante sua determinação mais ou menos aproximada" (LIMA, 1938, p. 25).

A segunda questão sugere a determinação do número e partindo do desenvolvimento da expressão $(1+\frac{1}{m})^m$. Uma solução possível para essa questão foi apresentada na análise das provas aplicadas em 1936.

A terceira questão, sobre simplificação de radicais, exigia que os alunos soubessem fatorar e simplificar. De modo que ficaria assim:

$$3\sqrt{4-2\sqrt{2}} + \sqrt{16-8\sqrt{2}} - \sqrt{36-18\sqrt{2}} =$$

$$3\sqrt{2(2-\sqrt{2})} + \sqrt{8(2-\sqrt{2})} - \sqrt{18(2-\sqrt{2})} =$$

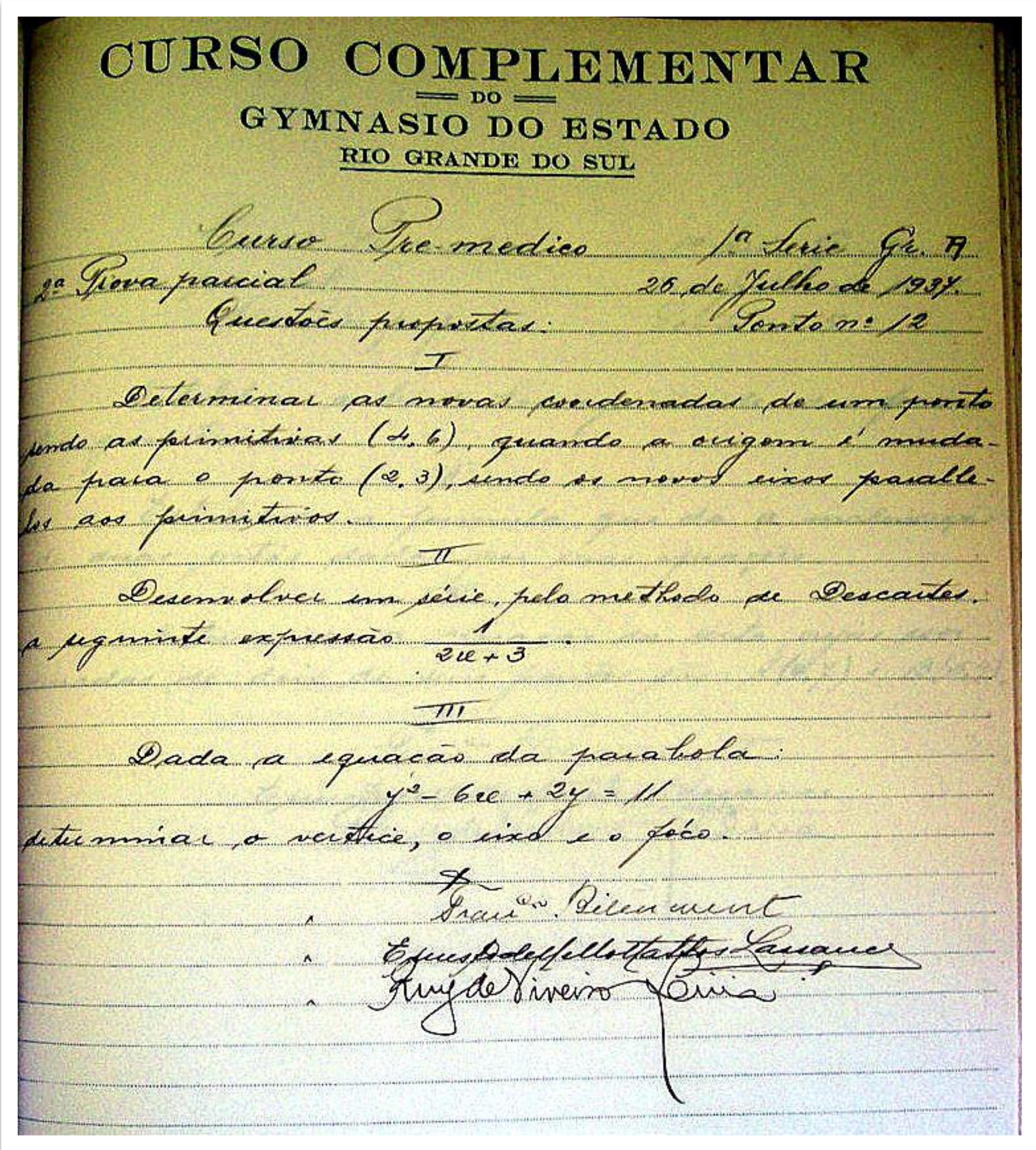
$$3\sqrt{2(2-\sqrt{2})} + 2\sqrt{2(2-\sqrt{2})} - 3\sqrt{2(2-\sqrt{2})} =$$

$$= 2\sqrt{2\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

Trinta e oito alunos fizeram a prova, sendo que quinze obtiveram notas maiores do que 50 e vinte e quatro obtiveram notas menores do que 50.

A segunda prova parcial (Figura 4.3.19) foi realizada no dia 26 de julho de 1937 e foram aplicadas as seguintes questões:

> 1) Determinar as novas coordenadas de um ponto sendo as primitivas $(4,6)$, quando a origem é mudada para o ponto $(2,3)$, sendo os novos eixos paralelos aos primitivos.
> 2) Desenvolver em série, pelo méthodo de Descartes, a seguinte expressão $\frac{1}{2x+3}$
> 3) Dada a equação da parábola:
> $$y^2 - 6x + 2y = 11$$
> Determinar o vértice, o eixo e o foco.



CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

Curso Pre-medico 1ª Serie Gr. A
2ª Prova parcial 26 de Julho de 1937.
Questões propostas: Ponto nº: 12

I

Determinar as novas coordenadas de um ponto sendo as primitivas (4,6), quando a origem é mudada para o ponto (2,3), sendo os novos eixos parallelos aos primitivos.

II

Desenvolver em série, pelo methodo de Descartes, a seguinte expressão $\frac{1}{2x+3}$.

III

Dada a equação da parabola:

$$y^2 - 6x + 2y = 11$$

determinar o vertice, o eixo e o fóco.

Figura 4.3.19

Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

As questões estavam relacionadas com os seguintes itens dos Programas para o Curso Complementar do Ensino Secundário: “transformação de coordenadas no plano, desenvolvimento em série das funções de uma só variável, aplicações às fórmulas elementares, parábola; suas equações retilíneas e polares” (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 183-185).

A primeira questão pode ser resolvida geometricamente, pois ao construir os eixos "primitivos" e os novos eixos, podemos determinar as novas coordenadas do ponto $(4,6)$, que seria $(2,3)$. Analiticamente, podemos considerar que a nova origem representa um deslocamento de duas unidades no eixo das abscissas e de três unidades no eixo das ordenadas em relação à origem "primitiva". De modo que devemos descontar esses deslocamentos na abscissa e ordenada do ponto dado. Então, as coordenadas do ponto ficam assim definidas: $(4-2\ ,\ 6-3)=(2{,}3)$.

Nos "Pontos de Matemática" de Gumercindo Lima (1938), o autor escreve que o problema de "transformações" consiste em:

> Conhecendo as coordenadas de um ponto ou a equação de uma curva em relação a um sistema de eixos, determinar essas coordenadas em relação a um novo sistema de eixos (LIMA, 1938, p. 308).

Em seguida, apresenta cinco casos de "transformação de coordenadas no plano":

> 1.º caso: os novos eixos de referência são paralelos aos primeiros e têm a mesma direção; 2.º caso: passar de um sistema de eixos retangulares a outro de mesma origem; 3.º caso: mudança de eixos e de origem; 4.º caso: passar de um sistema retangular a um sistema de eixos oblíquos de mesma origem; 5.º caso: passar de um sistema de coordenadas retangulares ao sistema de coordenadas polares, de mesma origem (LIMA, 1938, p. 308-312).

Para resolver a segunda questão, o aluno precisava conhecer e saber usar o "Método dos Coeficientes a Determinar ou Método de Descartes". Esse método, a exemplo do "Método de Mercator", também não consta explicitamente nos Programas. Porém, aparece nas notas de aula para engenharia do professor Ernesto Lassance, que foram publicadas posteriormente em três volumes sob o título de Cálculo Infinitesimal (LASSANCE, 1961, p. 56-58).

Para resolver a questão, ou seja, "desenvolver em série, pelo méthodo de Descartes, a seguinte expressão $\frac{1}{2x+3}$", é preciso determinar os coeficientes $A, B, C, D, E, \dots$ tais que:

$$\frac{1}{2x+3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\dots$$

Segundo Lassance:

> Para determinação destes coeficientes se escolherá uma propriedade da função dada, fácil de ser reconhecida, procurando exprimir esta propriedade com o auxílio da série suposta, de modo a chegar, a uma outra expressão do tipo: $P+Qx+Rx^2+Sx^3+\ldots=0$, onde $P, Q, R, S, \dots$ são independentes de x, porém compostos dos coeficientes $A, B, C, D, E, \dots$ [...] (1961, p.57).

Então, temos:

$$\frac{1}{2x+3} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$$

e, multiplicando por $(2x + 3)$ obtemos:

$$1 = A(2x+3) + Bx(2x+3) + Cx^2(2x+3) + Dx^3(2x+3) + Ex^4(2x+3) \ldots$$

Reorganizando a equação, vem

$$0 = -1 + 3A + (2A + 3B)x + (2B + 3C)x^2 + (2C + 3D)x^3 + \ldots$$

Esse polinômio é identicamente nulo, portanto:

$-1 + 3A = 0$, então $A = \frac{1}{3}$,

$2A + 3B = 0$, então $B = -\frac{2}{9}$

$2B + 3C = 0$, então $C = \frac{4}{27}$

$2C + 3D = 0$, então $D = -\frac{8}{81}$

Assim,

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}x^2 - \frac{8}{81}x^3 + \frac{16}{243}x^4 \ldots$$

que é uma série cujos termos formam uma progressão geométrica de razão $-\frac{2}{3}x$.

Na última questão dessa prova, o aluno deveria identificar o vértice, o eixo (de simetria) e o foco de uma parábola cuja equação é $y^2 - 6x + 2y = 11$.

O aluno poderia reescrever a equação de modo que:

$y^2 - 6x + 2y - 11 = 0$, ou seja, $(y + 1)^2 = 6(x + 2)$. Assim, identificamos: as coordenadas do vértice: $V(-2, -1)$; o eixo de simetria, paralelo ao eixo das abscissas interceptando o eixo das ordenadas em $y = -1$; e as coordenadas do foco, que são $F\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

Dos 34 alunos que fizeram a prova, 25 ficaram com notas entre 0 e 30. Apenas um aluno obteve nota maior do que 60.

No dia 25 de setembro de 1937, foi realizada a terceira prova parcial nessa turma do Pré-Médico. As questões da prova foram as seguintes:

> 1) Achar, applicando a regra de l'Hôpital o verdadeiro valor da função:
>
> $$\frac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}$$
>
> 2) Achar os eixos e distância focal da hyperbole representada pela equação

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$$

3) Differenciar a seguinte função:

$$y = \frac{x^3 + 5}{x^3 - 5}$$

Os conteúdos dessa prova estavam relacionados com os seguintes itens dos Programas para o Curso Complementar do Ensino Secundário: “formas indeterminadas, regra de l’Hôpital, hipérbole, suas equações retilíneas e polares, derivadas e diferenciais das funções de uma variável” (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 183-185).

A primeira questão não apresentou, em seu enunciado, o valor de x para o qual a função apresenta-se como uma indeterminação. Considerando o numerador como uma função polinomial $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$ e o denominador como uma função polinomial $g(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8$, temos que $f(x) = (x-2)^3(x+1)$ e $g(x) = (x-2)^3(x-1)$. Assim, observamos que a indeterminação $\frac{0}{0}$ é dada por $x = 2$. A omissão dessa informação pode ter sido intencional, acrescentando uma dificuldade a mais na questão, ou resultar de uma desatenção do professor que registrou a questão da prova. De qualquer maneira, o aluno deveria, diante da indeterminação, aplicar a regar de l’Hôpital. De modo que para resolver a questão, o aluno precisava, além de conhecer a regra, determinar as raízes de equações e saber calcular as derivadas sucessivas de funções polinomiais.

Em relação a essa questão, Lassance escreve que:

> Para determinar o verdadeiro valor da expressão... $f(x)/g(x)$, que para $x = a$ toma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, determinam-se as sucessivas e simultâneas derivadas do numerador e do denominador, substituindo x por a em cada fração formada, até chegar a dois termos um dos quais ou os dois, não se anulem para $x = a$, e o valor desse último quociente será o verdadeiro valor da função dada. [...] A regra é a mesma para as funções que tomam a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, verificando-se também quando $a \to \infty$ (LASSANCE, 1959, p. 198-202).

Na segunda questão é apresentada uma equação que tem como gráfico uma curva cônica denominada hipérbole, que pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cuja diferença a dois pontos fixos do mesmo plano, chamados focos, é constante.

Para resolver a segunda questão, o aluno poderia comparar a equação dada com a "forma típica" da equação da hipérbole de centro na origem e focos no eixo das abscissas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Daí, tiramos que

$$a^2 = 100 \rightarrow a = 10$$

$$b^2 = 64 \rightarrow b = 8$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 = 100 + 64 \rightarrow c = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

Assim, os vértices são $V_1 = (-10{,}0)$ e $V_2 = (10{,}0)$; os focos são: $F_1 = \left(-2\sqrt{41}, 0\right)$ e $F_2 = \left(2\sqrt{41}, 0\right)$; a distância focal é $2c = 4\sqrt{41}$. O eixo real é $2a = 20$ e o eixo imaginário é $2b = 16$.

Para resolver a terceira e última questão dessa prova, encontramos no "Curso de Cálculo" de Ernesto Lassance (1949), no capítulo que trata das "derivadas e diferenciais das funções de uma variável real", a seguinte proposição:

> A derivada de um quociente de duas funções de x é igual ao denominador pela derivada do numerador menos o numerador pela derivada do denominador, dividido tudo pelo quadrado do denominador (LASSANCE, 1949, p. 90).

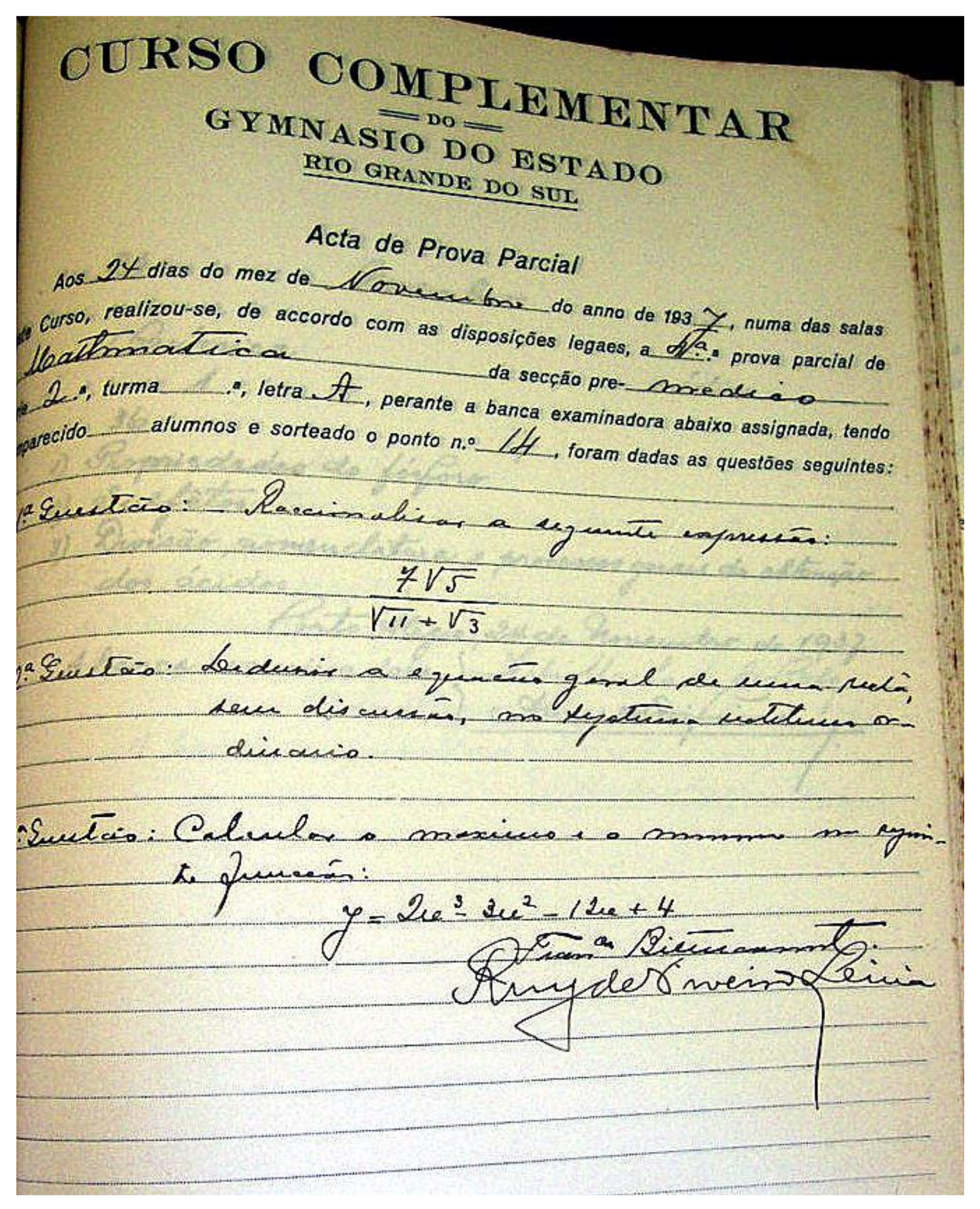
Para resolvê-la, o aluno poderia, a partir da função $y = \frac{x^3+5}{x^3-5}$, considerar $u = x^3 + 5$, $v = x^3 - 5$. Portanto $y = \frac{u}{v}$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) - u \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2} = -\frac{30x^2}{(x^3-5)^2}.$$

Vinte e nove alunos fizeram a prova, dos quais dezenove ficaram com notas iguais ou menores do que 30. Nenhum aluno obteve nota maior do que 60.

A última prova desse curso foi realizada no dia 24 de novembro de 1937 (Figura 4.3.20). A prova apresentou as seguintes questões:

> 1) Racionalizar a seguinte expressão:
> $$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$$
> 2) Deduzir a equação geral de uma recta, sem discussão, no systema retilíneo ordinário.
> 3) Calcular o máximo e o mínimo na seguinte função:
> $$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$



CURSO COMPLEMENTAR
DO
GYMNASIO DO ESTADO
RIO GRANDE DO SUL

Acta de Prova Parcial

Aos 24 dias do mez de Novembro do anno de 1937, numa das salas de Curso, realizou-se, de accordo com as disposições legaes, a 4ª prova parcial de Mathematica da secção pre-medico 2.ª, turma 1.ª, letra A, perante a banca examinadora abaixo assignada, tendo comparecido 36 alumnos e sorteado o ponto n.º 14, foram dadas as questões seguintes:

1ª Questão: Racionalisar a seguinte expressão:

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$$

2ª Questão: Deduzir a equação geral de uma recta, sua discussão, no systema cartesiano ordinario.

3ª Questão: Calcular o maximo e o minimo na seguinte função:

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

Figura 4.3.20

Fonte: Arquivos escolares do Colégio Estadual Júlio de Castilhos

Os conteúdos dessa prova estavam relacionados aos seguintes itens dos Programas para o Curso Complementar do Ensino Secundário: números irracionais; operações, aplicações, teoria da linha reta no plano, funções. (BICUDO apud OTONE E SILVA, 2006, p. 183-185).

Para resolver a primeira questão os alunos precisavam racionalizar o denominador, ou seja, transformar o denominador de um número irracional em um número racional. No caso do número $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$, o binômio que transforma o denominador num número racional é $\sqrt{11}-\sqrt{3}$, e como $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}} = 1$, podemos multiplicar $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$ por $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$, obtendo:

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}\right) = \frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}$$

A segunda questão, referente à equação da reta, já foi analisada anteriormente.

Para a terceira questão, o aluno deveria calcular o máximo e mínimo de uma função do 3º grau. Uma solução possível consiste em calcular a derivada da função y, e determinar seus pontos críticos, determinando os zeros da função derivada de y, e analisá-los posteriormente.

Primeiro calculamos a derivada da função y:

$$y' = 6x^2 - 6x - 12$$

Determinando os zeros da função, que são $x' = -1$ e $x'' = 2$, analisando os intervalos de crescimento e substituindo em y, obtemos o valor máximo e o valor mínimo da função, ou seja:

$$y_{máx.} = 11 \qquad \text{e} \qquad y_{min.} = -16$$

O conteúdo referente a “máximos e mínimos” aparece no livro “Curso de Cálculo” com as “notas das aulas ministradas pelo professor catedrático Dr. Ernesto Lassance”, no capítulo VI, denominado “aplicações imediatas das derivadas” (LASSANCE, 1949, p. 138).

Vinte e nove alunos fizeram a prova e treze obtiveram notas inferiores a 50.

4.4 CONCLUSÕES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA DAS PROVAS

Nossa pesquisa buscou responder às seguintes questões: i) como se caracterizavam as provas de matemática do segundo ciclo do Ensino Secundário da Reforma Francisco Campos, denominado Curso Complementar, e que foram aplicadas no Instituto Júlio de Castilhos em 1936 e 1937? ii) como os conteúdos de matemática apareciam nas questões das provas e o que elas indicam sobre o que os professores esperavam que os alunos soubessem? iii) que marcas foram deixadas nas provas pelos professores que faziam parte das bancas? iv) o que as atas das provas revelam sobre o ensino de matemática no Curso Complementar? v) de onde vem a matemática do Curso Complementar?

Buscando respostas para a interrogação (ii) através da análise das questões de prova dos Cursos Complementares, apresentaremos a seguir as conclusões obtidas a partir do estudo das questões apresentadas, de suas possíveis estratégias de resolução, bem como da matemática nela envolvida. Também apresentamos nossa interpretação sobre quais eram as expectativas dos professores que elaboraram as provas e sobre as possíveis referências utilizadas por eles na elaboração das questões.

4.4.1 Conhecimentos matemáticos envolvidos na resolução das provas

No estudo das questões e de suas possíveis soluções, pudemos identificar algumas qualidades que os professores que formavam as bancas de provas esperavam que os estudantes tivessem adquirido, e que, na sua visão, seriam indicativos para aprovação nesses cursos. Algumas dessas qualidades avaliadas e, presumivelmente, consideradas necessárias, foram: argumentação - os alunos precisavam usar argumentos matemáticos considerados corretos pelos professores da banca; manipulação - além de saber manipular de maneira correta a linguagem matemática, os alunos precisavam fazer escolhas de expressões e de transformações com antecipação, antevendo um possível caminho que levasse à solução do problema; e também, saber estabelecer conexões entre os diversos conteúdos matemáticos.

Em relação à argumentação, consideramos que questões com enunciados como “expressão do lado do pentágono regular inscrito em função do raio do círculo circunscrito” ou “dar o termo geral do desenvolvimento de um binômio e demonstrar que os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais”, demandavam que o aluno soubesse argumentar matematicamente, possuísse conhecimentos prévios que o auxiliassem na interpretação do problema e, também, que já tivessem alguma experiência com questões do mesmo tipo. De modo que a presença desse tipo de questão nas provas nos faz supor que o professor tivesse apresentado, em alguma de suas aulas, alguma demonstração parecida e esperava que o aluno se lembrasse dos argumentos no momento da prova.

Outro exemplo de questão em que o aluno era solicitado a apresentar boas argumentações é a que pede para “achar o limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quando m tende para o infinito”. Nela o estudante deveria concluir sobre a existência do limite e a obtenção de algumas de suas casas decimais valendo-se do uso das propriedades dos limites e continuidade, desigualdades, entre outras. É possível que os professores esperassem que as argumentações fossem desenvolvidas a partir da aprendizagem dos conceitos estudados em aula, e que os alunos, no momento da prova, tivessem criatividade e conseguissem estabelecer relações entre o que aprenderam e o problema que deveria ser resolvido. Mas também poderiam estar esperando uma simples reprodução de argumentação de alguma aula ou de algum livro. Por exemplo, os alunos poderiam ter decorado algumas demonstrações esperando que fossem exigidas na prova.

A qualidade de saber fazer manipulações matemáticas corretas foi exigida em muitas das questões das provas analisadas. Por exemplo, na questão em que o aluno era solicitado a “resolver a equação $secx - cotgx = cossecx - tgx$”, os professores da banca esperavam que os estudantes demonstrassem familiaridade com as funções trigonométricas, identidades e fórmulas de adição de arcos, a fim de que conseguissem fazer boas escolhas para as substituições a serem realizadas.

Na questão em que os alunos eram solicitados a resolver por logaritmos a expressão $x = \sqrt[5]{\frac{(0{,}0037542)^{4{,}5}\sqrt{743210}:42{,}317}{(\sqrt[3]{0{,}00732})^4(0{,}00043)^{0{,}75}}}$, percebe-se que o objetivo era a manipulação de números com extensa expansão decimal, operações com frações e aproximações de números irracionais. De modo que os alunos deveriam ter habilidade e precisão nesse manuseio. Esse tipo de exercício demandava tempo para sua resolução e exigia do aluno muita atenção e cuidado para que não cometesse erros que, por menores que fossem, trariam prejuízos ao resultado esperado pelos professores. Essa atenção e esse cuidado eram qualidades que os professores esperavam que os alunos desenvolvessem através do estudo da matemática. Essa expectativa é coerente com os Programas do Curso Fundamental do Ensino Secundário, ou seja, o ensino de Matemática deveria:

> acostumar o aluno à prática dos cálculos mentais, tornando-o seguro e desembaraçado nas operações numéricas. É, pois, necessário que ele compreenda bem o alcance e a natureza das operações elementares e adquira habilidade crescente no modo de aplicá-las. Convém ainda que desenvolva o senso de estimativa das grandezas e de apreciação do grau de exatidão dos cálculos sobre valores aproximados. Enfim, pela prática frequente das verificações dos exercícios numéricos, cumpre ao professor estimar a confiança do discípulo em si mesmo (Programas do Curso Fundamental do Ensino Secundário, 1931 apud ALVAREZ, 2004, p. 167).

Também percebemos a importância dada à manipulação em questões em que era explicitado o método que devia ser usado para resolvê-la. Por exemplo: “Por meio dos polynomios derivados fazer desaparecer o segundo termo da equação $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$”. Nela fica claro que o professor não está averiguando se o aluno conseguiria encontrar uma maneira de resolver a questão, mas, sim, se o aluno conseguiria aplicar determinado método. Outro exemplo desse tipo de questão é aquela em que o aluno deveria “resolver aplicando a teoria das raízes iguais a equação: $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$”. Nesse tipo de questões, o professor esperava que o aluno usasse o método que, presumivelmente, fora apresentado em alguma das aulas.

A manipulação matemática em aula, e posterior cobrança em avaliações é uma característica marcante da educação escolar. Elon Lages Lima afirma que “a presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até mesmo para muitos professores e alunos), é como se a matemática se resumisse a ela” (LIMA, 1999, p. 3).

Outra qualidade exigida dos alunos nessas provas era a de saber relacionar os vários conteúdos que possivelmente eram estudados separadamente em aula, mas que eram solicitados na resolução de uma mesma questão de prova. Por exemplo, “resolver a equação $x^5 - 1 = 0$” exigia que o estudante conhecesse a teoria das equações binomiais, soubesse também dividir polinômios e as propriedades das equações recíprocas e, ainda, que soubesse resolver equações quadráticas.

Outro exemplo desse tipo de abordagem aparece na questão em que, dada a função $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$, pede-se para calcular o máximo e o mínimo da função. Para resolvê-la, o aluno deveria saber usar os conceitos de derivada, de zeros de funções quadráticas e fazer interpretações geométricas de funções.

Cabe salientar que embora tenhamos encontrado, nessas provas, muitas questões trabalhosas, que exigiam muita manipulação, elas não eram repetitivas. Assim podemos concluir que, nesse período analisado, foi abordada nas provas uma quantidade considerável de conteúdos matemáticos. Também consideramos que o grau de exigência das provas indica que o ensino de matemática não era superficial ou resumido, embora se tratasse de um curso complementar preparatório realizado num período relativamente curto, abrangendo várias disciplinas e com programas extensos.

Outra característica marcante dessas provas é a de que nenhuma questão tratava de aplicações práticas da matemática em outras áreas do conhecimento ou contextualizadas por possíveis problemas do “dia a dia”.

Entretanto, segundo as orientações da Reforma Francisco Campos para o ensino de Matemática, este deveria ser,

> sempre animado com a acentuação dos vínculos existentes entre a matemática e o conjunto das demais disciplinas. Aludir-se-á constantemente às suas aplicações no domínio das ciências físicas e naturais, bem como no campo da técnica, preferindo-se exemplos e problemas que interessem às cogitações dos alunos (Programas do Curso Fundamental do Ensino Secundário, 1931 apud ALVAREZ, 2004, p. 168).

Podemos acrescentar ainda que a maneira como as questões foram apresentadas nas provas eram muito semelhantes nos dois cursos - Pré-Médico e Pré-Técnico -, tanto em relação ao tipo de questão, como em relação à matemática envolvida. De fato, o curso Pré-Técnico apresentava um programa mais amplo para Matemática em virtude dessa disciplina fazer parte do programa para as duas séries do curso complementar, enquanto o curso Pré-Médico tinha Matemática apenas na primeira série.

É notável o número de questões que tratam do Cálculo Diferencial e Integral. Essa presença do Cálculo nas provas segue os conteúdos previstos nos Programas para os Cursos Complementares e foi uma das mudanças propostas pela Reforma Francisco Campos para o secundário. Ou seja, os programas de Matemática dessa

Reforma, determinavam que, na 5ª série do Curso Fundamental, fossem estudadas "noções fundamentais e iniciais do cálculo de derivadas". Sobre essa mudança, Euclides Roxo (1937), que como já dissemos, foi o responsável pela Matemática da Reforma Francisco Campos, argumenta em favor de se levar para o ensino secundário as noções de função, de geometria analítica e do cálculo infinitesimal:

> pela necessidade de introduzir no curso certos assuntos de muito maior interesse, tanto do ponto de vista prático e utilitário quanto da formação cultural do aluno e de uma melhor compreensão das ideias gerais e básicas em que se assenta o desenvolvimento da matemática moderna. Tais assuntos tinham estado até há pouco afastados da escola secundária, para onde já vão sendo trazidos, ainda que pese pela relutância e os preconceitos (ROXO apud VALENTE, 2004, p. 167).

Euclides Roxo ainda complementa mais adiante que:

> Mesmo pondo de lado a ideia de formação profissional, a inclusão dos elementos de cálculo infinitesimal no curso secundário impõe-se pela necessidade da formação básica de cultura geral visada pelo ensino secundário (ROXO apud VALENTE, 2004, p. 171).

Nas questões das provas analisadas, conteúdos como Cálculo Diferencial e Integral, Estudo das Séries e Teoria das Equações, eram estudados de maneira abrangente nesse Curso Complementar. Embora estivessem previstos nos programas, essa abordagem intensa revela a familiaridade dos professores com esses conteúdos matemáticos que possivelmente também eram estudados nos cursos da Escola de Engenharia.

4.4.2. Objetivos dos professores componentes das bancas de provas e suas possíveis influências na elaboração das questões.

Nesta seção vamos examinar as motivações que levavam os professores a optar por um determinado modelo de questão.

Para procurar entender essas motivações, devemos antes considerar que os professores de Matemática dos Cursos Secundários tinham formação em cursos de Engenharia, e eram oriundos, em grande parte, de escolas politécnicas ou militares. Não havia, até então, cursos para formação de professores de Matemática[43]. De fato, eram engenheiros sem formação didática institucionalizada, mas com

[43] O curso de Matemática começa a funcionar em 1942 na Faculdade de Filosofia de Porto Alegre, instalada nesse mesmo ano no âmbito da então Universidade de Porto Alegre, instituição estadual criada em 1934 como reunião de estabelecimentos isolados (BÚRIGO, 2010, p. 90).

conhecimentos matemáticos que possibilitavam a prática do ensino dessa disciplina. Muitas são as hipóteses levantadas na busca por tentar entender quais os motivos que levaram esses engenheiros à docência, por exemplo, o professor Mário da Silva Brasil, relata em sua autobiografia que, ainda estudante da Escola de Engenharia de Porto Alegre, “tornei-me conhecido e comecei a lecionar particularmente, trabalho este que me dava o suficiente para cobrir todas as minhas despesas” (BRASIL, 1950). Contudo, essas hipóteses não serão investigadas nessa pesquisa.

Mas quais eram as exigências para com esses engenheiros dispostos a ensinar matemática nos cursos secundários? Segundo Valente (2005), antes da criação das Faculdades de Filosofia, onde começaram a serem oferecidos cursos superiores de Matemática, o engenheiro que optasse por ensinar matemática nos cursos secundários precisava, acima de tudo, ser um “matemático”. Ou seja, ter conhecimentos sólidos em Matemática Superior. O autor cita como exemplo a publicação no Diário Oficial de seis de julho de 1934 dos “pontos” para a prova escrita do concurso de Matemática para a cátedra do Colégio Pedro II[44]. Valente escreve que:

> Uma breve análise dessa lista de pontos mostra que os candidatos deveriam ter ciência de assuntos que hoje, pelo grau avançado dos temas, fariam parte de cursos de pós-graduação em Matemática Pura (2005, p. 12).

No caso particular do Instituto Júlio de Castilhos, esses professores de Matemática dos Cursos Complementares também eram professores do Curso Secundário e da Escola de Engenharia de Porto Alegre; consequentemente, as exigências para com esses professores incluíam as matemáticas avançadas dos cursos de Engenharia.

Além disso, pelo menos dois dos professores que faziam parte das bancas de provas, Ernesto Lassance e Mário da Silva Brasil, eram autores de livros didáticos direcionados tanto para os alunos dos Cursos Complementares quanto para os alunos dos cursos de superiores. No caso do professor Lassance, suas notas de aula para engenharia, transformadas em livros (Cálculo Infinitesimal volumes 1, 2 e

[44] Para esse concurso, inscreveram-se cinco postulantes: Alberto Nunes Serrão, Haroldo Lisboa da Cunha, Cesar Dacorso Netto, Júlio Cesar de Mello e Souza e Luiz Sauerbronn. Pelo menos dois desses candidatos notabilizaram-se por serem autores de livros relacionados ao ensino de matemática: Mello e Souza (Malba Tahan) e Alberto Serrão.

3; Curso de Cálculo, entre outros), demonstram que o professor era um estudioso da Matemática Superior, e em especial, do Cálculo Diferencial e Integral.

O professor Mário Brasil, que também era autor de livros para os alunos da Engenharia ("Notas de Astronomia Prática" e "Notas de Física da Escola de Engenharia da Universidade do Rio Grande do Sul"), também publicou "Elementos de Geofísica" pela Livraria do Globo em 1937, especificamente para os alunos dos Cursos Complementares. Nessa obra, o autor apresenta a seguinte nota:

> A premência de tempo, por termos que cumprir um programa de ensino dentro de um prazo limitado, não nos permitiu fazer o que desejávamos, tanto que esses Elementos de Geofísica não são mais do que as notas escritas às pressas e fornecidas aos alunos, durante as aulas, entre 16 de outubro de 1936 e 6 de fevereiro de 1937 (BRASIL, 1937, p. 11).

Conforme depoimento de Alberto da Costa Castro, ex-aluno do Curso Complementar no Instituto Júlio de Castilhos, nas aulas de matemática, o professor Mário Brasil usava apostila de sua autoria.

Nessas observações, percebemos que os professores mantinham um envolvimento com o ensino de matemática que superava os conhecimentos matemáticos outrora adquiridos nos cursos de Engenharia. Esses professores também eram autores de textos ligados à matemática e isso nos leva a acreditar que, de fato, os professores de matemática com origem nas escolas de Engenharia acabaram agregando, às suas formações iniciais, conhecimentos complementares da matemática, levando-os a considerarem-se habilitados para ensinar matemática nos cursos complementares.

Nossa questão agora é: o que esses "matemáticos" esperavam que seus alunos aprendessem nas suas aulas? Quais as expectativas desses professores em relação aos seus alunos?

Na análise das questões das provas observamos que os professores procuraram seguir, em termos de conteúdos, os programas da Reforma Francisco Campos para os Cursos Complementares. Também observamos que, frente às questões apresentadas nas provas, os conteúdos não foram tratados de maneira resumida ou superficial. De modo que muitas das questões apresentadas nas provas não encontravam solução satisfatória em livros da época que apresentavam os conteúdos da Reforma de maneira concisa. É o caso dos "Pontos de Matemática" de Gumercindo Lima, que, conforme esclarece o autor:

> O que se vai ler não constitue propriamente um livro. É uma compilação de pontos exigidos pelos programas dos Cursos Complementares, para admissão às Faculdades de Medicina, Farmácia, Odontologia e Engenharia.
>
> Nada encerra de meu a não ser a simplificação cuidadosa e resumo conciso das teorias desenvolvidas magistralmente em obras como o “Cours de Mathématiques Spéciales” de H. Commissaire e Cagnac. [...] É obvio dizer que o presente livrinho destina-se apenas àqueles que não podem adquirir outros melhores, visto não ter eu a pretensão de impingi-lo com cousa original ou repositório de erudição. Longe disso: os “Pontos” nada mais querem ser do que um “aide-mémoire” para os alunos que realmente desejam seguir com proveito as lições ministradas pelo professor, sem os embaraços da consulta a autores estrangeiros de tão difícil assimilação, para quem não versa com habilidade o francês, o inglês ou o alemão (LIMA, 1938, p. 5).

Embora tenhamos encontrado nesse livro grande parte dos conteúdos relacionados às questões das provas, a abordagem teórica em alguns casos não nos pareceu suficiente para resolver completamente essas questões.

Essa característica do estudo da Matemática, com traços de um estudo superior da disciplina, explica-se pelas relações próximas entre o Instituto Júlio de Castilhos e a Escola de Engenharia. Entretanto, em outras instituições em que funcionaram os Cursos Complementares, o estudo da Matemática pode ter sofrido modificações de acordo com suas finalidades. Por exemplo, em sua dissertação de mestrado, Otone e Silva (2006) constatou que o conteúdo das questões das provas de Matemática do Curso Complementar da Faculdade de Medicina de São Paulo modificou-se e acabou “conformando-se às finalidades reais, qual seja, a utilização da Matemática como ferramenta para solucionar problemas propostos nos futuros programas do Curso Médico” (2006, p. 140).

Na mesma pesquisa, em relação ao Curso Complementar Pré-Politécnico da Universidade de São Paulo, Otone e Silva destaca que a Escola já tinha um curso de um ano chamado Curso Preliminar. De modo que:

> A Escola Politécnica percebia, na implantação do Colégio Universitário, um novo Curso Preliminar, a chance de melhor preparar seus estudantes para o Curso de Engenharia. Sendo assim, os alunos precisavam estudar muita Matemática, como fase de adaptação, o que, para os responsáveis pela Escola, respondia às expectativas que se esperava de um Curso de preparação à área de Engenharia e Química (OTONE E SILVA, 2006, p. 141).

No Curso Complementar que funcionou no Instituto Júlio de Castilhos, não percebemos diferença, na matemática das provas, em relação aos cursos Pré-Médico e Pré-Técnico. Com base nessas observações, acreditamos que os professores ensinavam os conteúdos para os alunos dos dois cursos sob um mesmo ponto de vista. Agindo assim, os professores estariam oferecendo um estudo abrangente da matemática como preparação intelectual para os futuros médicos e engenheiros.

Contudo, acreditamos que os professores não consideravam que o ensino de matemática do Curso Complementar serviria apenas como preparação para as matemáticas dos cursos superiores correspondentes. Esses professores, em nossa opinião, buscavam oferecer uma cultura mais geral para esses alunos através do estudo da matemática. Essa formação mais geral, onde o estudo de matemática visava desenvolver a "cultura espiritual do aluno[45]", já vinha sendo buscada, segundo as exposições apresentadas nos relatórios do Instituto Júlio de Castilhos, desde os primeiros anos do seu funcionamento, e ao que se vê, foi preservada nesses cursos.

Devemos considerar ainda que os estudantes desses cursos pertenciam a um grupo restrito dos que tinham acesso à educação, ainda mais em nível secundário, com aspirações aos cursos superiores. Romanelli, em relação ao currículo do curso secundário, destaca que:

> De fato, para um contexto social que começava a despertar para os problemas do desenvolvimento e da educação, numa sociedade cuja maioria vivia na zona rural e era analfabeta e numa época em que a população da zona urbana ainda não era totalmente atingida, nem sequer pela educação primária, pode-se imaginar a camada social para qual havia sido elaborado um currículo assim tão vasto (ROMANELLI, 1986, p. 136).

Esses cursos representavam, de fato, a formação intelectual de uma elite, que possivelmente, ocuparia postos importantes da sociedade. Afinal, segundo Valente, "o ensino secundário brasileiro, a partir da década de 1930, apesar de ter uma população escolar cada vez maior, estará longe de deixar de ser elitista" (VALENTE, 2004, p. 149).

[45] Programas do curso fundamental do ensino secundário, nos termos do art. 10, do Decreto n. 19890 de 18 de abril de 1931, expedidos através da Portaria Ministerial de 30 de junho de 1931.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Instituto Júlio de Castilhos, nas suas primeiras décadas de funcionamento, foi um lugar de experimentação de práticas de ensino, principalmente voltadas para o curso secundário - que carecia de organicidade, estrutura e referências - mas também voltadas para o ensino primário. Das argumentações apresentadas nos relatórios desse Instituto, entendemos que seu objetivo principal era oferecer aos seus alunos "uma educação sólida e real", que não limitasse o ensino à mera preparação para o "acto do exame" (RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE, 1909, p. 83). Procurou, assim, oferecer uma formação mais abrangente para seus alunos, numa época em que a busca por essa modalidade de ensino concentrava-se tão somente no interesse dos alunos pela aprovação nos exames de preparatórios.

Durante as primeiras três décadas do século XX, os professores do Instituto Júlio de Castilhos, mesmo que obrigados a seguir os programas do Colégio Pedro II - ao qual o Instituto estava equiparado -, estiveram à frente de iniciativas que visavam estruturar o ensino secundário dessa Instituição. Essas iniciativas incluíam a experimentação de novos métodos de ensino, utilização de laboratórios de ciências, além da busca de apoio político por reformas educacionais, pois importantes lideranças políticas do Rio Grande do Sul eram também "benfeitores" da Escola de Engenharia de Porto Alegre.

Em relação ao ensino de matemática, ressaltamos que em vários momentos desde os primeiros anos do século XX, as disciplinas de "Arithmetica", Álgebra e Geometria, que eram exigidas separadamente nos exames preparatórios, aparecem na organização escolar do Instituto Júlio de Castilhos sob uma mesma rubrica, denominada "Mathematica". Consideramos esta característica como indício de uma tendência de unificação das três grandes áreas matemáticas em uma única disciplina escolar.

No ano de 1931 o Governo Vargas decretou, em nível nacional, uma reforma para o ensino secundário, conhecida como Reforma Francisco Campos. Essa nova organização para o ensino secundário foi implantada no Instituto Júlio de Castilhos nesse mesmo ano e o Curso Complementar começou a funcionar em 1936, sendo extinto em 1942 por outra reforma do ensino secundário, a Reforma Capanema. Foi também nesse período, nos anos 1930, que a Escola de Engenharia de Porto Alegre passou a integrar a Universidade de Porto Alegre (1934) e o Instituto Júlio de Castilhos, então desdobrado em Ginásio e Colégio Universitário, esteve por ser fechado.

Nossa pesquisa procurou respostas para questões sobre o ensino de matemática nesse Curso Complementar através da análise das provas de Matemática que foram aplicadas aos alunos desse Curso, considerando esse contexto histórico, ou seja, o de uma instituição de ensino secundário que fora criada no interior da Escola de Engenharia de Porto Alegre – origem que marcou a definição de seus objetivos e finalidades -, e que, em 1931, adaptou sua estrutura e programa, a fim de seguir as novas orientações propostas pela Reforma Francisco Campos.

Cada uma das atas das provas de Matemática desse Curso Complementar apresentava três questões manuscritas, cada uma referente a um dos pontos (conteúdos) sorteados para a prova e estavam organizadas em livros encadernados. Nelas podemos identificar ainda a assinatura dos professores componentes da banca de provas, data, turma, ponto sorteado e, em algumas, a assinatura de um Inspetor Federal.

Os conteúdos das provas de Matemática que foram aplicadas no Curso Complementar do Instituto Júlio de Castilhos estavam de acordo com os Programas para o Curso Complementar da Reforma Francisco Campos. A análise das questões das provas indica, portanto, que os conteúdos abordados nas aulas, pelos professores, eram os conteúdos desses programas. Esses conteúdos estavam relacionados em grande medida com o Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo Infinitesimal), Estudo das Séries, Teoria das Equações e Estudo das Funções. O Curso Complementar, nesse Instituto, não se circunscreveu, portanto, à revisão dos conteúdos do Curso Fundamental, e nesse aspecto também esteve de acordo com as orientações propostas na Reforma para o Curso Complementar, que recomendavam que, por exemplo, o Cálculo Diferencial, deveria ser visto de maneira introdutória no Curso Fundamental e estudado de modo mais abrangente no Curso Complementar.

Contrariando, em parte, as orientações da Reforma Francisco Campos para o ensino de Matemática, o qual deveria ser “sempre animado com a acentuação dos vínculos existentes entre a matemática e o conjunto das demais disciplinas”[46], as questões das provas de Matemática desses Cursos Complementares não apresentavam contextualizações ou aplicações dos conteúdos em outras áreas do conhecimento.

Mesmo que o curso Pré-Técnico apresentasse um programa mais amplo de Matemática em virtude dessa disciplina fazer parte do currículo nas duas séries, enquanto no Pré-Médico era estudado apenas na 1ª série, a maneira como as questões foram apresentadas nas provas era muito semelhante nos dois cursos, tanto em termos do tipo de questão, como em relação à matemática envolvida. Essa característica indica que os professores desse Curso Complementar não estavam preocupados com possíveis contextualizações relacionadas aos cursos de Medicina ou Engenharia.

Em relação aos professores componentes das bancas de provas desse Curso Complementar, destacamos que eram, também, professores do Instituto Júlio de Castilhos e da Escola de Engenharia de Porto Alegre. Além disso, Ernesto Lassance e Mário da Silva Brasil eram autores de livros relacionados com as disciplinas que lecionavam. Esses professores, embora não tendo frequentado curso de Matemática, que seria criado em Porto Alegre apenas em 1942, mostraram-se interessados pela matemática escolar e constituíram-se, de certo modo, em profissionais do ensino de matemática.

Na análise das questões das provas, identificamos marcas deixadas pelos professores que consideramos indícios da maneira como esses professores relacionavam-se com o ensino de Matemática. Por exemplo, questões que exigiam que o aluno soubesse fazer cálculos com números de extensa expansão decimal, ou que exigiam que os alunos soubessem definir, generalizar ou demonstrar algum conceito da matemática, são indícios da maneira com que cada professor relacionava-se pedagogicamente com seus alunos e, também, com os demais professores.

Muitas questões envolviam técnicas algébricas que, na nossa pesquisa, foram encontradas apenas em livros mais antigos de matemática publicados no século XIX. Algumas dessas técnicas praticamente desapareceram dos livros atuais de matemática. Percebemos então que muitos dos conteúdos que foram ensinados

[46] PROGRAMAS DO CURSO FUNDAMENTAL DO ENSINO SECUNDÁRIO, 1931 apud ALVAREZ, 2004, p. 168.

nesse Curso Complementar acabaram sendo deslocados para um nível mais avançado de ensino, excluídos de vez dos currículos das escolas atuais, ou substituídos por técnicas mais aprimoradas de resolução, como no caso da necessidade do uso das tábuas de logaritmos, que foi substituído pelo uso de calculadoras.

Durante a análise das provas, encontramos questões que consideramos de difícil resolução. Essas dificuldades decorrem, em parte, da exigência de conhecimento de técnicas matemáticas que, nos dias atuais, não são usualmente ensinadas. Mas também porque parte dos conteúdos explorados nessas provas não fazem mais parte dos conteúdos que são comumente trabalhados na educação básica. Por exemplo: Teoria das equações, Estudo das Séries e Cálculo Diferencial e Integral. Mas será que essas questões eram consideradas difíceis para os alunos desse Curso Complementar? Frente às notas obtidas pelos alunos nos boletins dessas provas, e ao alto índice de reprovação, concluímos que sim, essas questões também eram difíceis para os alunos. Contudo, essa dificuldade e consequente reprovação de grande parte dos alunos, não representava preocupação para os professores, já que não percebemos nenhuma mudança em relação à exigência das provas, mesmo quando a maioria da turma obteve notas baixas.

Na resolução das questões, identificamos que os professores esperavam que seus alunos: soubessem usar argumentos matemáticos considerados corretos pelos professores da banca; conseguissem manipular de maneira correta a linguagem matemática; fizessem escolhas de expressões e de transformações com antecipação, ou seja, antevendo um possível caminho que levasse à solução do problema; estabelecessem conexões entre os diversos conteúdos matemáticos e, sobretudo, que resolvessem as questões com atenção e cuidado.

Consideramos que, ao procurar desenvolver essas qualidades em seus alunos, esses professores estariam contribuindo, através do ensino de matemática, para o desenvolvimento da "cultura espiritual"[47] desses alunos, um dos objetivos principais da Reforma Francisco Campos. Contudo, observamos, a partir dos relatórios da Escola de Engenharia, que esse já era um dos objetivos do Instituto Júlio de Castilhos desde os primeiros anos de seu funcionamento, portanto num

[47] Expressão citada nos Programas do curso fundamental do ensino secundário, nos termos do art. 10, do Decreto n. 19890 de 18 de abril de 1931, expedidos através da Portaria Ministerial de 30 de junho de 1931.

período em que o ensino secundário, em geral, ainda estava centrado na formação para os exames.

A matemática das provas, embora tenha referência nos Programas para o Curso Complementar, revela características imprimidas por esses engenheiros/ professores e pela tradição escolar do Instituto Júlio de Castilhos. Os conteúdos dos Programas da Reforma Francisco Campos deveriam ser seguidos por todas as instituições de ensino secundário, públicas e privadas. Mas a maneira e a profundidade com que esses conteúdos eram ensinados e cobrados nas provas tinha a marca da cultura escolar de cada estabelecimento. No caso do Instituto Júlio de Castilhos, a matemática ensinada tinha referência na matemática que seus professores estudaram nos cursos de Engenharia, mas também estava relacionada com a orientação desse Instituto, desde seu começo, de preparar os futuros alunos da Escola de Engenharia.

Nosso estudo reafirma, desse modo, a compreensão de que, para estudar a história da educação escolar, precisamos levar em conta não apenas a legislação vigente, mas a cultura escolar peculiar a cada instituição.

Com este trabalho de pesquisa, esperamos contribuir para a história do Instituto Júlio de Castilhos, trazendo elementos sobre o ensino de matemática no Curso Complementar que funcionou nesse Instituto de 1936 a 1941.

Acreditamos que outras fontes, às quais não tivemos acesso durante a realização da pesquisa, poderiam trazer elementos novos para esse estudo. Por exemplo: cadernos de alunos e notas de aula de professores. Deixamos ainda, como motivação para novas pesquisas, questões que surgiram durante a realização desse trabalho: por que esses Engenheiros optaram pela docência? Como foi o desenvolvimento das demais disciplinas escolares nesses Cursos Complementares? O que mudou no ensino de Matemática comparando o Curso Complementar e o Ensino Médio atual?

Finalizando nossas considerações, acrescentamos que o Colégio Estadual Júlio de Castilhos possui uma grande quantidade de documentos escolares antigos, mas que carecem de organização, preservação e manutenção. Esses documentos podem servir de fontes para outras pesquisas relacionadas com a história do ensino. Consideramos então ser imprescindível um projeto para preservar a memória dessa importante instituição de ensino.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ, Tana Giannasi. **A matemática da Reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2004.

ALVES, Sebastião Francisco. **Álgebra Elementar**. Rio de Janeiro - São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1929.

BEZERRA, Manoel Jairo. **Curso de Matemática**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1961.

BRASIL, Mário da Silva. **Elementos de Geofísica**. Porto Alegre: Livraria do Globo, 1937.

BRASIL, Mário da Silva. Minha Biografia. Escrita em 6 de setembro de 1950. Porto Alegre. Disponível em **Antigualhas, histórias e genealogia**. <http://pufal.blogspot.com/2008/07/mrio-da-silva-brasil-iv.html>. Acesso em 18/10/11.

BRITO, Eugênio Oscar de. **Dicionário de matemática**. Porto Alegre: Globo, 1969.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. A Matemática Moderna na UFRGS: o protagonismo dos professores da universidade. In: FLORES, C.; ARRUDA, J.P., orgs. **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: contribuição para a história da educação matemática**. São Paulo: Annablume, 2010.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. et al. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de Matemática na década de 30. in: **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**. Brasília v. 81, n. 199, 2000.

CASTRO, Alberto da Costa. **Lembranças do Curso Complementar do Instituto Júlio de Castilhos**. Porto Alegre. 27 out. 2010. Entrevista concedida a Antonio Cesar dos Santos Esperança.

CHERVEL, André. **A História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. In: Teoria & Educação. Porto Alegre: Pannonica, 1990.

COMBEROUSSE, Charles Jules Felix de. **Cours d'álgèbre supérieure à l'usage des candidats**: a l'École polytechnique, a l'École normale supérieure, a l'École centrale des arts et manufactures. 3. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1909.

CORTÁZAR, Don Juan. **Complemento del Algebra**. Madrid: Imprenta de D. F. Sanchez, a cargo de D. Agustin Espinosa, 1864.

__________. **Tratado de Algebra**. Madrid: Imprenta de Don A. Espinosa y Compañia, 1849.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual Editora, 1985.

EUCLIDES. **Os elementos** (tradução e introdução de Irineu Bicudo). São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EZPELETA, Justa; ROCKWELL, Elsie. **Pesquisa Participante**. São Paulo: Cortez; Autores Associados, 1986.

FTD, Coleção de Livros Didáticos. **Novas Tábuas de Logaritmos**. Rio de Janeiro; São Paulo; Belo Horizonte: Livraria Francisco Alves, 1937.

HAIDAR, Maria de Lourdes Mariotto. **O Ensino Secundário no Império Brasileiro**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1972.

HEINZ, Flavio M. Positivistas e republicanos: os professores da Escola de Engenharia de Porto Alegre entre a atividade política e a administração pública (1896-1930). In: **Revista Brasileira de História** v. 29, nº 58. São Paulo: 2009.

KINDLE, Joseph H. **Geometria Analítica**. Coleção Schaum. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1950.

LASSANCE, Ernesto de Mello. **Cálculo Infinitesimal I**. Porto Alegre: CEUE, 1959.

__________. **Cálculo Infinitesimal II**. Porto Alegre: CEUE, 1961/1962.

__________. **Cálculo Infinitesimal III**. Porto Alegre: CEUE, 1963/1964.

__________. **Curso de Cálculo**. Porto Alegre: Coruja, 1949.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda., 1977.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações: As três componentes do ensino de Matemática. In: **Revista do Professor de Matemática** n. 41. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

__________ . **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, Gumercindo. **Pontos de Matemática**. São Paulo: Sociedade Impressora Paulista Ltda., 1938.

LIMA, Otávio Rojas (org). **Memórias do “Julinho”**. Porto Alegre: Sagra, 1990.

LOBO, Souza. **Segunda Arithmetica**. Porto Alegre: Livraria do Globo, 1928.

LORENZ, Karl Michael; VECHIA, Ariclê. Os livros didáticos de matemática na escola secundária brasileira no século XIX. In: **História da Educação** n. 15. Pelotas: ASPHE, 2004.

MICHALSKI, Damon Pinheiro. **Lembranças do Instituto Júlio de Castilhos**. Porto Alegre. 20 out. 2010. Entrevista concedida a Antonio Cesar dos Santos Esperança.

OLIVEIRA, Antônio Marmo de; SILVA, Agostinho. **Biblioteca da matemática moderna**. São Paulo: Lisa, 1969.

OTONE E SILVA, Maryneusa Cordeiro. **A matemática do Curso Complementar da Reforma Francisco Campos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2004.

PESAVENTO, Sandra Jatahy. **O cotidiano da república**. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 1990.

PISKUNOV, Nicolaj. **Cálculo Diferencial e Integral.** 5.ed. Moscou: Editorial Mir 1977. v.1.

RIBEIRO, Denise Franco Capello. **Dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico: A mudança na organização dos ensinos de Matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

RODRIGUES, Antonio. **Pontos de geometria analítica**. Porto Alegre: Coruja, 1949.

ROMANELLI, Otaíza de Oliveira. **História da Educação no Brasil (1930/1973)**. Petrópolis: Vozes, 1986.

SCHUBRING, Gert. O primeiro movimento Internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha. in: VALENTE, Wagner Rodrigues. (org). **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

SERRÃO, Alberto Nunes. **Análise Algébrica**. Porto Alegre: Livraria do Globo, 1945.

SILVA, Pery Pinto Diniz da; SOARES, Mozart Pereira. **Memória da Universidade Federal do Rio Grande do Sul 1934-1964**. Porto Alegre: UFRGS, 1992.

TIETBÖHL, José Nunes. O Julinho que eu vi. In: **Memórias do "Julinho"**. Porto Alegre: Sagra, 1990.

VALDEMARIN, Vera Teresa. Lições de Coisas: Concepção científica e projeto modernizador para a sociedade. 2000. In: **Cadernos Cedes**. São Paulo, ano XX, nº 52, 2000.

VALENTE, Wagner Rodrigues. (org). **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004a.

__________. (org). **O Nascimento da Matemática do Ginásio**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004b.

__________. **História da Educação Matemática: Interrogações metodológicas**. Texto elaborado para as atividades a serem desenvolvidas junto ao grupo de estudo de história da educação matemática coordenado pelo Prof. Dr. José Manuel Matos, da Universidade Nova de Lisboa, em junho de 2005.

__________. **Uma história da matemática escolar no Brasil 1730-1930**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2007.

VIÑAO, Antonio. A história das disciplinas escolares. In: **Revista Brasileira de História da Educação**, n. 18. Campinas. SP: Autores Associados, 2008.

DOCUMENTOS CONSULTADOS

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1897.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1898.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1901.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1907.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1908.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1909.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1910.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1911.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1912.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1913.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1914.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1915.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1918.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1919.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1920.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1921.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1922.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1923.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1924.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1925.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1926.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1927.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1928.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1929.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1930.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1931.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1932.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1933.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1934.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1935.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1936.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1937.

RELATÓRIO DA ESCOLA DE ENGENHARIA DE PORTO ALEGRE. Porto Alegre, 1938.