

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS CONTÍNUAS
SUBMETIDAS A RESTRIÇÕES DE FLEXIBILIDADE E TENSÃO**

por

Hervandil Morosini Sant'Anna

Dissertação para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, março de 2002.

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS CONTÍNUAS
SUBMETIDAS A RESTRIÇÕES DE FLEXIBILIDADE E TENSÃO**

por

Hervandil Morosini Sant'Anna
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Área de concentração: Mecânica dos sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Prof. Dr. Argimiro Resende Secchi

Prof. Dr. Alberto Tamagna

Prof. Dr. Alberto Tamagna
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, março de 2002.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer inicialmente ao professor Jun Sérgio Ono Fonseca que considero um excelente professor e orientador e, acima de tudo, um grande amigo, sempre auxiliando de uma forma bastante criativa nas incontáveis dúvidas que surgiram durante a realização deste trabalho. Agradeço também ao professor Rogério Marczak que sempre se mostrou disposto a me auxiliar quando tive dúvidas, principalmente em programação na linguagem C.

Aos professores Armando Miguel Awruch, Argimiro Resende Secchi e Alberto Tamagna pelas revisões, correções e sugestões. Um agradecimento especial ao professor Alberto Tamagna, pelas discussões filosóficas sobre os mais diversos assuntos, inclusive sobre engenharia.

À minha mãe e a meu pai que sempre me incentivaram a alcançar caminhos cada vez mais distantes.

Às minhas avós Martha Sant'Anna e Irene Morosini, que sempre me incentivaram e me deram carinho para continuar seguindo em frente na constante busca pelo conhecimento.

Aos colegas e amigos do GMAP, em especial Eduardo Lenz Cardoso, Pablo Andrés Muñoz-Rojas e Carlos Eduardo Marcos Guilherme, pelos diversos artigos cedidos e discussões sobre otimização, entre outros assuntos não menos interessantes. Mais um agradecimento para Eduardo Lenz Cardoso pela excelente revisão nos estágios finais da minha dissertação.

Aos meus amigos, que sempre compreenderam a importância do mestrado para mim. Um agradecimento especial ao amigo filósofo Rodrigo Scaravonato Pinto, pela revisão e contribuições aos capítulos introdutórios.

Finalmente, gostaria de agradecer à UFRGS pelo ensino gratuito de qualidade (comprovado pelo “provão” do MEC), ao PROMEC, ao CESUP e à CAPES, sem os quais essa dissertação dificilmente poderia ter sido realizada e a todos mais que eu não tenha citado nesta lista de agradecimentos, mas que de uma forma ou de outra contribuíram não apenas para a minha dissertação, mas também para eu ser quem eu sou.

RESUMO

Neste trabalho é resolvido o problema da minimização do volume de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições sobre a flexibilidade (trabalho das forças externas) e sobre as tensões, utilizando a técnica chamada otimização topológica, que visa encontrar a melhor distribuição de material dentro de um domínio de projeto pré-estabelecido.

As equações de equilíbrio são resolvidas através do método dos elementos finitos, discretizando a geometria e aproximando o campo de deslocamentos. Dessa forma, essas equações diferenciais são transformadas em um sistema de equações lineares, obtendo como resposta os deslocamentos nodais de cada elemento.

A distribuição de material é discretizada como uma densidade fictícia constante por elemento finito. Esta densidade define um material isotrópico poroso de uma seqüência pré-estabelecida (SIMP).

A otimização é feita através da Programação Linear Seqüencial. Para tal, a função objetivo e as restrições são sucessivamente linearizadas por expansão em Série de Taylor.

A análise de sensibilidade para a restrição de flexibilidade é resolvida utilizando o cálculo da sensibilidade analítico adaptado para elementos finitos de elasticidade plana.

Quando as restrições consideradas são as tensões, o problema torna-se mais complexo. Diferente da flexibilidade, que é uma restrição global, cada elemento finito deve ter sua tensão controlada. A tensão de Von Mises é o critério de falha considerado, cuja sensibilidade foi calculada de acordo com a metodologia empregada por Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998].

Problemas como a instabilidade de tabuleiro e dependência da malha sempre aparecem na otimização topológica de estruturas contínuas. A fim de minimizar seus efeitos, um filtro de vizinhança foi implementado, restringindo a variação da densidade entre elementos adjacentes.

Restrições sobre as tensões causam um problema adicional, conhecido como singularidade das tensões, fazendo com que os algoritmos não convirjam para o mínimo global. Para contornar essa situação, é empregada uma técnica matemática de perturbação visando modificar o espaço onde se encontra a solução, de forma que o mínimo global possa ser encontrado. Esse método desenvolvido por Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997] é conhecido por relaxação- ϵ e foi implementado nesse trabalho.

ABSTRACT

“TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM TWO-DIMENSIONAL STRUCTURES UNDER COMPLIANCE AND STRESS CONSTRAINTS”

This work presents the problem of volume minimization of two-dimensional continuous structures with compliance and stress constraints. These constraints are independently applied to the analyzed structures. Problems are solved by a topology optimization technique, formulated as finding the best material distribution into the domain.

Discretizing the geometry into simpler pieces and approximating the displacement field, equilibrium equations are solved through the finite element method. Thus, these partial differential equations are approximated by a set of linear equations, where the structural response now is given by nodal displacements.

A constant fictitious density is used to represent the material distribution into each finite element. This density defines the elastic properties of an isotropic porous material, chosen from one pre-established sequence of possible ones (SIMP).

Sequential Linear Programming is used to solve the optimization problem. Thus, objective function and constraints are successively linearized applying a Taylor series expansion.

For compliance constrained problems, an analytical sensitivity analysis for elastic behavior is derived.

Solving the stress constrained problem is a harder task. While the compliance is a global constraint, the stress field must be checked in each finite element. Von Mises equivalent stress is the failure criteria considered, and its sensibility is calculated according to Duysinx and Bendsøe [Duysinx and Bendsøe, 1998] approach.

Checkerboard patterns and mesh dependency are common problems associated to topology optimization of continuum structures. A neighborhood filter was implemented to minimize these effects, since the density gradient of neighbor elements is restricted.

Stress constrained problems have a further difficulty, called stress singularity. This prevents the algorithm to reach global minimum. To overcome this problem, the feasible domain is modified using a mathematical perturbation technique. In this work it is used a technique called ϵ -relaxation, firstly proposed by Cheng and Guo [Cheng and Guo, 1997].

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	5
3.	CONCEITOS BÁSICOS DE UM PROJETO OTIMIZADO	7
3.1.	ESQUEMA GERAL DE UM ALGORITMO DE PROJETO OTIMIZADO	7
3.2.	ELASTICIDADE LINEAR INFINITESIMAL ISOTRÓPICA	9
3.3.	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF): SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	14
3.3.1.	BREVE HISTÓRICO	14
3.3.2.	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO.....	15
3.3.3.	ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS	21
4.	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	23
4.1.	CONCEITOS BÁSICOS	23
4.1.1.	VARIÁVEIS DE PROJETO	23
4.1.2.	FUNÇÃO OBJETIVO (OU FUNÇÃO CUSTO)	23
4.1.3.	RESTRICÇÕES DO PROJETO	24
4.1.4.	VETOR GRADIENTE E MATRIZ HESSIANA	25
4.1.5.	TIPOS DE PROBLEMAS	26
4.2.	FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	27
4.3.	CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT).....	29
4.4.	TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	32
4.4.1.	CRITÉRIOS DE ÓTIMO.....	32
4.4.2.	PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA.....	33
4.4.3.	PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP).....	35
4.4.4.	PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQÜENCIAL (SLP)	38
4.4.5.	OUTROS ALGORITMOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA	42
5.	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	45
5.1.	MODELOS MATERIAIS E OUTROS CONCEITOS.....	45
5.2.	ALGUNS PROBLEMAS ASSOCIADOS À OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	53
5.2.1.	INSTABILIDADE DE TABULEIRO	54
5.2.2.	DEPENDÊNCIA DA MALHA	57
5.2.3.	MÍNIMOS LOCAIS.....	60
5.2.4.	ÓTIMOS SINGULARES E RESTRICÇÕES NAS TENSÕES.....	62

6.	IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO	73
6.1.	MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DA FLEXIBILIDADE (TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS).....	74
6.1.1.	LINEARIZAÇÃO DAS RESTRIÇÕES E CÁLCULO DAS DERIVADAS.....	77
6.2.	MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DA TENSÃO	81
6.2.1.	LINEARIZAÇÃO DAS RESTRIÇÕES E CÁLCULO DAS DERIVADAS.....	85
6.3.	DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO EM MATLAB	90
6.3.1.	INTRODUÇÃO	90
6.3.2.	ALGORITMO	90
7.	RESULTADOS	93
7.1.	INTRODUÇÃO	93
7.2.	MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FLEXIBILIDADE	93
7.3.	MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO	107
8.	CONCLUSÕES.....	119
9.	SUGESTÕES PARA APRIMORAMENTO DO TRABALHO.....	123
10.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125
AI.	APÊNDICE I: FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS.....	135
AI.1.	ELEMENTO QUADRILÁTERO BILINEAR ISOPARAMÉTRICO	135
AI.1.1.	PROBLEMAS DO ELEMENTO QUADRILÁTERO BILINEAR ISOPARAMÉTRICO	141
AI.2.	ELEMENTO QUADRILÁTERO NÃO-CONFORME (ELEMENTO DE TAYLOR).....	143
AI.2.1.	CONDENSAÇÃO NODAL	145
AI.3.	ELEMENTO TRIANGULAR COM GRAUS DE ROTAÇÃO DE MEMBRANA.....	147
AI.3.1.	FORMULAÇÃO.....	148
AII.	APÊNDICE II: DETALHAMENTO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO	151

LISTA DE SÍMBOLOS

∇	Vetor gradiente	
λ	Coefficiente de Lamé	[N/m ²]
	Multiplicador de Lagrange	
μ	Coefficiente de Lamé	[N/m ²]
	Multiplicador de Lagrange	
Ω	Domínio	[m ³]
ν	Coefficiente de Poisson	
ω	Função de teste	
δ	Operador diferencial de Gateaux	
\emptyset	Conjunto vazio	
\cap	Interseção de conjuntos	
ρ	Densidade de material	
\otimes	Operador de convolução	
ε	Valor da perturbação aplicada às restrições de tensão	
\times	Operador produto vetorial	
Φ	Conjunto das funções de teste	
Ψ	Conjunto das funções peso	
$\langle \sigma_{ij} \rangle$	Medida de tensão equivalente	[N/m ²]
Γ_d	Superfície de aplicação das condições de contorno de Dirichlet	[m ²]
Ω^e	Domínio do elemento	[m ³]
σ_{ij}	Tensão na direção de j perpendicular ao eixo i	[N/m ²]
ε_{ij}	Deformação infinitesimal na direção j perpendicular ao eixo i	
Γ_n	Superfície de aplicação das condições de contorno de Neumann	[m ²]
$\delta \mathbf{u}$	Deslocamento virtual	[m]
σ_{vm}	Tensão equivalente de Von Mises	[N/m ²]
\cdot^{-1}	Inversa de uma matriz quadrada	
\cdot^T	Transposta de uma matriz ou vetor	
$:$	Operador tensorial de contração	
$ \cdot ^2$	Norma euclidiana	
$ \mathbf{J} $	Determinante da matriz jacobiana	
$\mathbf{a}_i^L, \mathbf{a}_i^U$	Limites móveis	

b	Vetor das forças de corpo	[N/m ³]
B	Matriz das derivadas das funções de interpolação	
B(u,v)	Forma bilinear da energia interna	
E	Módulo de elasticidade	[N/m ²]
E⁰_{ijkl}	Tensor constitutivo do material de base	[N/m ²]
E_{ijkl}	Tensor constitutivo homogeneizado	[N/m ²]
f(x)	Função objetivo	
G	Módulo de elasticidade transversal	[N/m ²]
g(x)	Conjunto das restrições de desigualdade	
h	Espessura do elemento finito	[m]
h(x)	Conjunto das restrições de igualdade	
H¹	Espaço de Hilbert das funções com primeira derivada contínua com norma de energia	
I	Matriz identidade	
iter	Iteração atual	
J	Matriz jacobiana	
K	Matriz de rigidez global	
K_e	Matriz de rigidez local	
L	Função de Lagrange	
L[∞]	Espaço de norma $\ \cdot\ _{L^\infty(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} (\cdot) < \infty$	
M	Momento	[Nm]
n	Vetor normal unitário a uma superfície	
n_e	Número de restrições de igualdade	
	Número de variáveis de projeto	
	Número de elementos da malha	
n_g	Número de restrições de desigualdade	
N_I	Função de interpolação do nó I	
t	Vetor de trações superficiais	[N/m ²]
u	Vetor de deslocamentos	[m]
W_ε	Domínio de projeto ε-relaxado	
w_i	Pesos do filtro gaussiano	
W^k	Trabalho das forças externas no caso de carregamento <i>k</i>	[Nm]
W_{lim}	Limite de flexibilidade	[Nm]
x*	Ponto extremo de um funcional	

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1: Algoritmo geral de solução de um problema de projeto ótimo.	9
Figura 3.2: Estado de tensões em torno do ponto P em um corpo tridimensional.	10
Figura 3.3: Uma treliça (a) e uma placa (b) estaticamente equivalentes.	15
Figura 4.1: Vetor gradiente para a função $f(x_1, x_2, x_3)$ no ponto x^*	25
Figura 4.2: Tipos de otimização estrutural: (A) dimensional, (B) forma, (C) topológica [Pereira, 2001].	26
Figura 4.3: Representação da minimização de um funcional com uma restrição.	28
Figura 4.4: Representação gráfica dos pontos ótimos: (A) Domínio ilimitado; (B) Domínio limitado.	28
Figura 4.5: Representação geométrica das condições KKT para o caso de duas restrições ativas.	31
Figura 4.6: Representação de um problema de otimização com restrições sendo resolvido por programação linear.	38
Figura 4.7: Representação do efeito dos limites móveis impostos sobre o ponto x^* : o novo ponto se encontrará dentro do retângulo ABCD.	41
Figura 5.1: Representação do problema de otimização topológica o qual busca a melhor distribuição de material no domínio Ω	45
Figura 5.2: Gráfico da função $y(x) = \frac{4}{\pi} + \sum_{i=1}^n \frac{\sin(2i-1)x}{(2i-1)}$ para alguns valores de n	46
Figura 5.3: Representação de uma estrutura constituída de um material composto formado por uma microestrutura periódica.	49
Figura 5.4: Algumas funções exponenciais utilizadas para aproximar a função densidade artificial.	51
Figura 5.5: Instabilidade de tabuleiro visualizada principalmente na região central da figura. Esta figura foi obtida no programa desenvolvido neste trabalho e corresponde a um problema de minimização de volume com restrição no trabalho das forças externas.	54
Figura 5.6: Abrangência do filtro espacial em uma malha irregular.	56
Figura 5.7: Filtro gaussiano aplicado para controlar a instabilidade de tabuleiro.	57
Figura 5.8: Dependência da malha no problema da minimização de volume com restrição de flexibilidade. (A) Malha com 600 elementos; (B) Malha com 3300 elementos.	58
Figura 5.9: Exemplo de não unicidade da solução, no qual (A) é domínio inicial, (B) e (C) são duas soluções viáveis.	58

Figura 5.10: Representação dos tipos de solução em problemas de otimização topológica. (a) Função não-convexa, onde A e B representam duas diferentes topologias; (b) Função não estritamente convexa: existe um valor mínimo (C e D), que correspondem a vários conjuntos distintos de valores para a variável de projeto x ; (c) Função convexa com unicidade na solução (ponto E).....	61
Figura 5.11: Singularidade das tensões em uma treliça de 3 barras [Hoback, 1996].....	64
Figura 5.12: Representação qualitativa do domínio do problema das 3 barras [Hoback, 1996].	65
Figura 6.1: Representação das principais etapas em um processo de otimização estrutural.	73
Figura 6.2: Esquema geral de um algoritmo de otimização (adaptado de uma palestra de Bendsøe, M. P., MPB-slides, Oberwolfach, jan. 9-15, 2000).	74
Figura 6.3: Curvas obtidas para diferentes valores de p na equação (6.4).	76
Figura 6.4: Soluções da equação (6.5) para alguns valores de α e $p=1/8$	76
Figura 6.5: Algoritmo de programação utilizado no programa desenvolvido em MATLAB.....	91
Figura 7.1: Viga MBB sob flexão (unidades no SI).....	94
Figura 7.2: Topologia obtida com a função objetivo não penalizada.	94
Figura 7.3: Topologia obtida com expoente $p=0,125$ na função objetivo.....	95
Figura 7.4: Topologia final "limpa".	95
Figura 7.5: Estrutura analisada no ANSYS 5.7.....	96
Figura 7.6: Distribuição ótima de material usando distribuição de material do tipo rank-2, penalizando as densidades intermediárias e o perímetro. (A) Distribuição das densidades sem restrições. (B), (C) Densidades intermediárias penalizadas [Bendsøe, 1995].....	96
Figura 7.7: Geometria e condições de contorno da viga MBB (unidades no SI). As medidas destacadas indicam as diferenças em relação ao problema anterior (figura 7.1).	97
Figura 7.8: Estrutura otimizada, com expoente na densidade $p=1$	98
Figura 7.9: Estrutura obtida após a penalização da função objetivo com $p=1/8$	98
Figura 7.10: Geometria e condições de contorno da viga em balanço com carga central.	99
Figura 7.11: Estrutura otimizada, com expoente na densidade $p=1$	100
Figura 7.12: Estrutura otimizada com (A) função objetivo penalizada com $p=1/8$ e (B) função objetivo penalizada com $p=1/8$ e $\alpha=0,3$	100
Figura 7.13: Soluções obtidas aplicando o método da homogeneização. (A) Solução obtida sem penalizar as densidades intermediárias. (B) Solução não interpretada com densidades intermediárias penalizadas [Kim et al., 2002].	101
Figura 7.14: Representação da busca do ponto ótimo utilizando o algoritmo SLP.	102
Figura 7.15: Geometria e condições de contorno.....	102

Figura 7.16: Topologia obtida na primeira etapa do método da continuação.....	103
Figura 7.17: Convergência do volume (função objetivo não-penalizada).....	103
Figura 7.18: Convergência da flexibilidade (1° caso de carga).....	104
Figura 7.19: Função objetivo penaliza com: (A) $p=1/8$ e filtro gaussiano ativado. (B) $p=1/8$ e $\alpha=0,3$ com filtro gaussiano desativado.....	104
Figura 7.20: Geometria e condições de contorno da viga em balanço.....	105
Figura 7.21: Estrutura gerada sem penalização das densidades intermediárias, com filtro gaussiano ativado. A malha é composta por 3240 elementos finitos.....	105
Figura 7.22: Topologia obtida com função objetivo penalizada ($p=1/8$) e filtro gaussiano ativado.....	106
Figura 7.23: Topologia obtida com função objetivo penalizada ($p=1/8$, $\alpha=0,3$) e filtro gaussiano desativado.....	106
Figura 7.24: Interpretação da topologia mostrada na figura 7.23.....	107
Figura 7.25: Geometria e condições de contorno (unidades no SI).....	108
Figura 7.26: Distribuição das densidades. (A) Filtro de vizinhança ativado e função objetivo não penalizada. (B) Filtro de vizinhança ativado e função objetivo com expoente $p=1/8$. (C) Filtro de vizinhança desativado e função objetivo penalizada com $p=1/8$ e $\alpha=0,3$	109
Figura 7.27: Tensões de Von Mises; $\sigma_{m\acute{a}x}=35,003 \text{ N/m}^2$	110
Figura 7.28: Problema do mínimo volume com restrições de tensão (figura 7.26 (C)) interpretado.....	110
Figura 7.29: Estrutura interpretada aplicando restrições de flexibilidade.....	111
Figura 7.30: Definição do problema (geometria e condições de contorno).....	112
Figura 7.31: Distribuição das densidades com restrições de tensão relaxadas. (A) $\epsilon=0,1$. (A) $\epsilon=0,0001$	113
Figura 7.32: Distribuição de material obtida após a penalização da função objetivo ($p=1/8$ e $\alpha=0,3$).....	113
Figura 7.33: Distribuição das tensões de Von Mises no domínio; $\sigma_{m\acute{a}x}=40,077 \text{ N/m}^2$	114
Figura 7.34: Interpretação dos resultados.....	114
Figura 7.35: (A) Campo de densidades; (B) Campo de tensões; $\sigma_{m\acute{a}x}=50,505 \text{ N/m}^2$	115
Figura 7.36: Resultados interpretados.....	116
Figura 7.37: (A) Campo das densidades. (B) Campo das tensões; $\sigma_{m\acute{a}x}=148,46 \text{ N/m}^2$	116
Figura 7.38: Distribuições de densidade obtidas por: (A) Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998] usando uma malha com 1225 elementos quadriláteros com 9 nós e (B) Pereira [Pereira, 2001], utilizando uma malha com 5218 elementos triangulares CST. A	

região destacada mostra a solução correta para eliminar as concentrações de tensão geradas pelo canto-vivo.	117
Figura I.1: Mapeamento isoparamétrico	135
Figura I.2: (A) Elemento finito submetido a momento puro; (B) Elemento finito deformado pela aplicação do momento; (C) Deformação "real" segundo a teoria de vigas	142
Figura I.3: Funções bolha	144
Figura I.4: Pontos ótimos para o cálculo das tensões	147
Figura I.5: Graus de liberdade do elemento GT-9 e coordenadas de área	148
Figura I.6: Permutação cíclica	149
Figura I.7: Pontos ótimos para o cálculo das tensões	150
Figura II.1: Representação esquemática do posicionamento de elementos não-nulos em uma matriz esparsa de dimensão $n \times n$	154

1. INTRODUÇÃO

A técnica de caça de uma certa tribo primitiva era mais eficiente do que a de outras: podia dispor de menos homens e de menos tempo para obter o mesmo número de presas que as outras tribos. Dispondo de mais homens que se dedicavam, por exemplo, exclusivamente à guerra, pôde esta tribo ser dominadora e deixar mais descendentes. A repetição de processos semelhantes por milênios constituiu o caráter da humanidade, ou seja, a economia de esforço é um instinto natural do homem.

As técnicas melhor sucedidas eram obtidas por acaso, através da tentativa e erro. Por exemplo: várias técnicas que utilizavam algo como um apoio e algo como uma barra, descobertas para determinadas tarefas bem independentes e provavelmente surgidas por acaso, foram unificadas por alguém que percebeu seu princípio comum e deu o nome de alavanca. Assim tem-se a roldana, a cunha, a roda, etc., que foram abstraídas das suas diversas situações particulares de aplicação para uma idéia geral. Dessa forma, o homem pôde **projetar** novas máquinas para novas aplicações, adquirindo uma certa independência do processo natural de tentativa e erro.

O passo mais fértil neste sentido foi a criação da Matemática: os princípios são os mais gerais e a independência da tentativa e erro é a maior possível. Somente aqui tem maturidade o conceito de “projeto ótimo”, definido como o melhor projeto admissível de acordo com quantidades de medida e de efetividade pré-selecionados [Arora, 1989].

O desenvolvimento desse instinto segue passos na engenharia: vários projetos dessa ciência foram aperfeiçoados ao longo dos anos, como a **concepção de estruturas**. Uma estrutura pode ser considerada como uma quantidade de material distribuído sobre um domínio de projeto com a finalidade de suportar cargas estáticas ou dinâmicas, absorver energia e transmiti-las para os apoios. Distribuir esse material da forma mais eficiente possível é um dos principais objetivos da **otimização estrutural**. Durante um longo período de tempo, essa tarefa tem sido executada pelo método da tentativa e erro: na concepção de um novo produto, o projetista costuma basear-se quase que unicamente em sua experiência para a solução desse tipo de problema. Quando lhe faltava conhecimento, procurava a solução em problemas semelhantes.

Assim como o cálculo estrutural, os primeiros passos da otimização estrutural também consistiram de métodos analíticos para solução. Esses métodos, entretanto, não eram muito eficientes, pois apenas uma classe bastante limitada de problemas podia ser resolvida: aqueles cujas equações diferenciais eram relativamente simples [Haftka e Gürdal, 1992].

Essa idéia foi introduzida já no final do século XIX, com o pioneiro trabalho de Maxwell [Maxwell, 1872], no qual buscava o menor volume para estruturas uniaxiais submetidas a

carregamentos. Michell [Michell, 1904] deu continuidade ao trabalho de Maxwell. Suas famosas estruturas ainda hoje são referência na teoria moderna de Otimização Topológica. Michell projetou estruturas treliçadas nas quais buscava o menor peso observando as tensões nas barras para cada caso de carga.

O progresso recente da otimização estrutural coincidiu com o surgimento dos computadores digitais, que também trouxe consigo técnicas emergentes para solução das complexas equações que regem os fenômenos da engenharia estrutural. No final dos anos 50 computadores mais velozes começaram a surgir. Isto teve profundos efeitos nos procedimentos de análise estrutural. Técnicas como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos de Contorno, o Método dos Volumes Finitos e o Método dos Mínimos Quadrados entre outros passaram a fazer parte do cotidiano do engenheiro estrutural.

Antes de existirem computadores baratos e rápidos o suficiente para se efetuarem cálculos complexos, a maioria das soluções de problemas de análise estrutural eram baseadas unicamente em soluções derivadas de equações diferenciais. Essas equações eram resolvidas analiticamente. As incógnitas do problema eram funções (representando deslocamentos, deformações ou tensões) definidas sobre um domínio contínuo.

O MEF é sem dúvida o mais popular entre os métodos citados, existindo inúmeros programas já consolidados no mercado. Dessa forma, muitas de suas vantagens e limitações já são bem conhecidas. Basicamente, o método particiona a estrutura em subdomínios geometricamente mais simples. Dessa forma, as equações diferenciais outrora resolvidas analiticamente são substituídas por sistemas de equações lineares que descrevem o comportamento estrutural do sistema discretizado. Assim, a solução do problema que antes correspondia a uma função do deslocamento definida em cada ponto infinitesimal do domínio passa a ser os valores discretos de deslocamentos definidos em pontos específicos dos subdomínios (os nós) ou tensões e deformações definidas no interior desses subdomínios.

Uma transformação semelhante começou no início da década de 60 no campo da otimização estrutural. Quando uma estrutura é discretizada utilizando o MEF, naturalmente são também discretizados os parâmetros estruturais que serão otimizados. Em contraste com o modelo contínuo, onde se busca a extremização de uma função objetivo, no modelo discreto busca-se um conjunto de parâmetros discretos que representam o ponto ótimo. O trabalho de Schmit [Schmit, 1960] em otimização de treliças muitas vezes é considerado o início da moderna otimização estrutural. Após isso, inúmeros estudos em diversas áreas da otimização estrutural foram e ainda vêm sendo efetuados [Cheng, 1992; Rozvany, 1995].

A otimização estrutural em meios contínuos iniciou-se com a formulação de um problema de natureza discreta no qual a estrutura gerada possuiria somente pontos com material e pontos sem material. Entretanto, essa aproximação gera um problema mau-condicionado e de difícil solução, sendo apenas recentemente resolvido de uma forma eficiente por Beckers [Beckers, 1997], por exemplo.

Kohn e Strang [Kohn e Strang, 1983], em um importante trabalho nessa área concluíram que uma relaxação do problema evita o problema discreto 0-1, mas conduz a três tipos de região na solução: regiões sólidas (com material), regiões vazias (sem material) e regiões porosas (com uma determinada quantidade de material misturado com microcavidades tão pequenas quanto se queira, ou seja, um tipo de material composto). Outros autores desenvolveram independentemente esse conceito de materiais compostos, citando os trabalhos de Murat e Tartar [Murat e Tartar, 1985], Kohn e Strang [Kohn e Strang, 1986a, 1986b e 1986c]. Um recente livro de Cherkaev e Kohn [Cherkaev e Kohn, 1997] reporta os mais recentes avanços na teoria matemática de materiais compostos, que, como será visto, relacionam-se diretamente com a otimização topológica. Na década de 80, Bendsøe e Kikuchi [Bendsøe e Kikuchi, 1988] estenderam esses conceitos através do uso das chamadas microestruturas artificiais. A partir daí, a otimização topológica começou a tornar-se um problema mais acessível.

Até então, a maior parte dos trabalhos consistia na minimização do volume ou na maximização da rigidez de estrutura linear elástica. A partir daí, vários outros problemas puderam ser resolvidos, tais como projeto de reforços em placas, maximização ou minimização de frequências naturais e carga crítica de flambagem, criação de materiais avançados (com coeficiente de Poisson negativo, por exemplo), etc.

A importância do projeto de estruturas de mínimo volume (ou peso) inicialmente surgiu como uma necessidade da indústria aeroespacial. Devido a sua principal característica, que é a busca do projeto ótimo, a otimização topológica é um dos campos mais promissores para o projeto de estruturas nas indústrias aeroespacial e automobilística, aplicações mecânicas e em muitos outros campos.

2. OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho tem por objetivo resolver o problema da minimização do volume de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições na flexibilidade ou nas tensões, utilizando um programa desenvolvido em ambiente MATLAB.

Discretizando a estrutura através de um modelo de elementos finitos, o problema de otimização estrutural é resolvido utilizando um algoritmo de programação matemática conhecido como Programação Linear Seqüencial aplicado às técnicas da otimização topológica de estruturas. Para tal, foram desenvolvidas rotinas que calculam as sensibilidades das restrições tanto para o problema da flexibilidade quanto para o problema da tensão, etapa essa crucial para a obtenção de um resultado correto com o método utilizado. Resultados são apresentados para comprovar a validade dos métodos utilizados.

Em relação à apresentação, este trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo é feita uma introdução situando um problema de otimização no contexto da engenharia enquanto que no segundo capítulo são descritos os objetivos deste trabalho bem como essa breve descrição.

No terceiro capítulo é feita uma revisão sobre elasticidade plana e o método dos elementos finitos, ferramenta utilizada para resolver as equações de equilíbrio enquanto que no capítulo 4 são definidos conceitos importantes utilizados em grande parte dos projetos envolvendo otimização estrutural.

O quinto capítulo é dedicado inteiramente à otimização topológica, mostrando os principais conceitos e problemas associados a essa técnica.

No sexto capítulo é apresentada a formulação utilizada neste trabalho, referente aos problemas de minimização do volume com restrições de flexibilidade e de tensão.

Nos capítulos seguintes são mostradas os resultados e as conclusões. São também propostas sugestões para futuros trabalhos que porventura venham a seguir essa linha de pesquisa, indicando uma extensa lista de referências bibliográficas.

No apêndice I é mostrada a formulação geral dos elementos finitos implementados enquanto que no apêndice II encontram-se detalhes da implementação computacional da formulação discutida no capítulo 6.

3. CONCEITOS BÁSICOS DE UM PROJETO OTIMIZADO

Equation Chapter 3 Section 1

3.1. ESQUEMA GERAL DE UM ALGORITMO DE PROJETO OTIMIZADO

Quando se deseja criar um novo projeto ou melhorar um já existente de uma maneira científica e sistemática, algumas etapas lógicas devem ser cumpridas. Inicialmente, deve-se definir um objetivo, que surge da necessidade de se criar um certo objeto (ou sistema) que pode vir de uma pesquisa de mercado, ou simplesmente de uma boa idéia. A natureza, a utilidade e outras características desse objeto são descritas de uma maneira bastante geral. Isto permite que sejam identificados e especificados os requerimentos que esse objeto deve satisfazer, bem como o tipo de critério que será usado para medir sua utilidade e assim selecionar um projeto viável que seja preferível entre outros possíveis projetos para o mesmo fim.

Nesse contexto, o adjetivo “ótimo” é derivado da palavra latina “optimum” que, por sua vez, teve sua origem a partir do nome de “Ops”, deusa Sabina¹ da fertilidade e da abundância na agricultura. Leibniz, no século XVIII, foi o primeiro a usar a palavra “optimum” significando “o melhor de todos os possíveis” [Kim, Querin e Steven, 2002].

Os métodos de otimização referem-se ao processo de extremar um funcional, encontrando seus pontos máximos ou mínimos, utilizando o cálculo variacional como ferramenta de busca. Muitos dos métodos utilizados atualmente são baseados no cálculo de gradientes (análise de sensibilidade), que envolvem um grande número de cálculos matemáticos complexos. Esse é um motivo que fez o computador tornar-se uma ferramenta indispensável na busca da solução ótima.

Conforme mencionado, a concepção de um novo projeto deve seguir alguns passos antes da criação do projeto final. Nessa seção, o termo objeto terá uma conotação geral, podendo ser um novo produto ou projeto, bem como a melhoria de um produto já existente. De um modo geral, o programa desenvolvido nesse estudo segue as etapas que são descritas a seguir.

Inicialmente é necessário definir qual será a *utilidade* do novo produto, qual será o mercado que o utilizará. Em geral, o objeto irá interagir com o ambiente para o qual foi projetado. O *comportamento* do objeto será determinado pela sua natureza e por sua interação com o ambiente. Nessa etapa, um ou mais *fenômenos físicos* podem estar envolvidos nessa interação. Para avaliar a utilidade desse objeto, e ao mesmo tempo verificar se os requerimentos

¹ Um dos inúmeros povos da Idade Antiga conquistados pelo Império Romano.

impostos estão satisfeitos, é necessário selecionar um conjunto de *variáveis de controle*, que estão relacionadas direta ou indiretamente com a natureza e comportamento do objeto.

Depois dos objetivos do novo objeto serem estabelecidos, o modelo deve ser construído (numérica ou experimentalmente, nesta etapa), ou seja, uma determinada *topologia* deve ser selecionada, bem como as formas com que esse objeto interage com o ambiente (suas *condições de contorno*). A topologia e as formas de interação com o ambiente correspondem ao chamado *modelo estrutural*. Para cada modelo estrutural, o objeto será descrito por um conjunto de *propriedades fundamentais*; o ambiente também será descrito por um modelo, que igualmente possui um conjunto definido de propriedades.

Costuma-se expressar esse conjunto de propriedades como função de um conjunto maior chamado de *parâmetros de projeto*. Esses parâmetros podem ser subdivididos em dois conjuntos menores: *constantes de projeto* se os seus valores são inicialmente tomados como fixos ou *variáveis de projeto* se os seus valores são inicialmente desconhecidos. Dessa forma, diz-se que o modelo está *parametrizado*. A parametrização pode ser conveniente por diferentes razões: uma parametrização adequada permite um manuseio sistemático das propriedades fundamentais; simplifica a busca por uma relação desejável entre as propriedades do modelo, restringindo o número de variáveis livres, etc.

Cabe ressaltar que para qualquer valor dos parâmetros de projeto, o modelo representa um certo objeto, podendo este ser satisfatório (*viável*) ou não, segundo critérios de medida pré-estabelecidos (*restrições*).

Em geral, as variáveis de controle não são funções diretas das propriedades fundamentais do modelo e do ambiente. Geralmente elas também dependem de outras *propriedades indiretas* (ou *propriedades derivadas*) e de um conjunto de *variáveis de comportamento* (também chamadas de *variáveis de estado*), que descrevem o comportamento (mecânico, neste caso) do objeto. Em razão disso, para um dado projeto definido (ou seja, para um dado conjunto de valores de propriedades fundamentais e do meio-ambiente) as variáveis de estado e as propriedades derivadas devem ser calculadas para verificar se os requerimentos de projeto estão sendo satisfeitos ou não. Os novos valores das variáveis são calculados numa etapa chamada de *análise* do modelo. Dependendo do tipo de análise e fenômenos físicos envolvidos, esta pode receber classificações distintas, podendo ser análise estática, dinâmica, modal, entre outras.

Completada esta etapa, inicia-se o processo de aperfeiçoamento do projeto. Na maior parte dos casos, o problema analisado é demasiadamente complexo, o que torna difícil o cálculo direto dos valores ótimos das variáveis de projeto. Dessa forma, surge a necessidade de se criar um *processo iterativo*, que vai atualizando os valores dessas grandezas a cada nova iteração. O

projetista escolhe inicialmente um conjunto de valores para as variáveis de projeto, que atuarão como ponto de partida na busca do projeto otimizado. Após a análise deste projeto inicial, verifica-se se ele é viável ou não (se está respeitando as restrições), avaliando o quanto pode ser considerado um bom projeto (verificando o valor função objetivo). Finalmente, utiliza-se um critério coerente para modificar o projeto existente, melhorando-o (através de uma *programação matemática* ou algum *critério de ótimo*). Este processo é executado iterativamente até que o problema atinja a convergência, encontrando uma solução satisfatória. Se nenhum projeto admissível for encontrado, alguma hipótese deve ser modificada. A impossibilidade de se obter uma solução final viável pode ocorrer se a parametrização do modelo ou se o conjunto de valores iniciais não estiverem adequados.

Essas idéias descritas nos parágrafos anteriores podem ser sumarizadas num fluxograma, mostrado na figura 3.1:



Figura 3.1: Algoritmo geral de solução de um problema de projeto ótimo.

3.2. ELASTICIDADE LINEAR INFINITESIMAL ISOTRÓPICA

Uma etapa fundamental na solução de um problema de otimização estrutural consiste na solução das equações de equilíbrio, seja analiticamente ou numericamente. Nesses problemas, é comum que as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições dependam direta ou

indiretamente da solução das equações de equilíbrio. Por esse motivo, a correta solução dessas equações é uma etapa fundamental na busca do ótimo.

Entre as diversas teorias abrangidas pela Mecânica dos Meios Contínuos, neste trabalho utilizam-se as equações da Teoria da Elasticidade Linear Infinitesimal Isotrópica para o cálculo da resposta estrutural do sistema. Essa escolha foi realizada com base no problema que se deseja resolver: todas as estruturas analisadas apresentarão uma relação entre tensão e deformação dentro do regime elástico, não interessando fenômenos relacionados à não-linearidade física e geométrica como plastificação e fratura, que podem ocorrer principalmente na região de aplicação das cargas e deslocamentos prescritos.

Os textos de Sokolnikoff [Sokolnikoff, 1956], Love [Love, 1944] e Boresi e Chong [Boresi e Chong, 1987] fornecem um estudo completo sobre a Teoria da Elasticidade. Esta seção contém os principais conceitos e equações da elasticidade que são direta ou indiretamente utilizadas neste trabalho.

As equações da elasticidade para um corpo no espaço \mathcal{R}^3 são resolvidas com o objetivo de encontrar um total de 15 incógnitas: 6 tensões, 6 deformações e 3 deslocamentos. A figura 3.2 ilustra o estado de tensões em um ponto qualquer de um corpo deformado. Estas funções devem satisfazer a 3 equações de equilíbrio (derivadas das Leis de Newton), 6 equações que relacionam deformação com deslocamento (relações cinemáticas) e 6 equações que relacionam tensão com deformação (equações constitutivas, que dependem das características dos materiais).

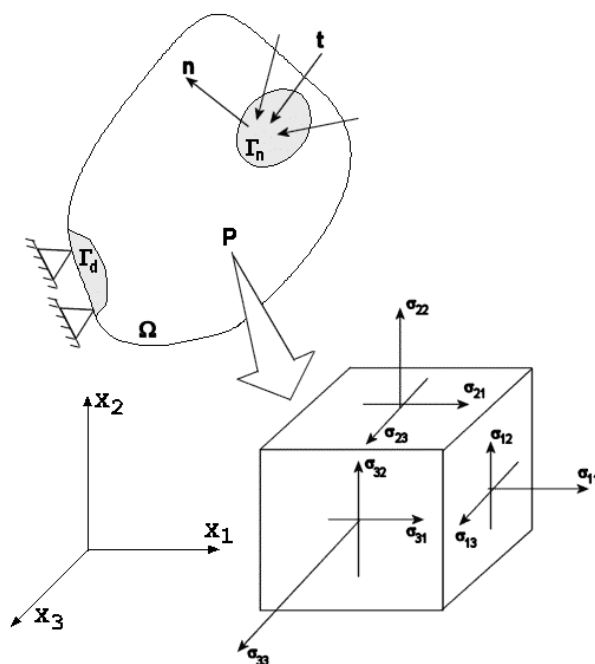


Figura 3.2: Estado de tensões em torno do ponto P em um corpo tridimensional.

Em notação vetorial, as equações de equilíbrio são escritas da seguinte forma:

$$\nabla \underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = \underline{0} \quad (3.1)$$

onde um traço sob a grandeza indica ser um vetor, enquanto que dois traços indicam que a grandeza se trata de um tensor de segunda ordem, e assim por diante. Cada componente do tensor σ é denotada por σ_{ij} , na qual os índices referem-se à tensão na direção do eixo j perpendicular ao eixo i (figura 3.2) enquanto que \underline{b} são as forças de corpo por unidade de volume. Como o sistema deve respeitar o princípio da conservação da quantidade de momento angular [Atkin e Fox, 1980], na ausência de um torque distribuído externo, a seguinte relação deve ser satisfeita (figura 3.2):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.2)$$

Seja $\Gamma_n \in \Omega$ uma região da superfície do corpo na qual estão aplicadas as forças, e seja $\Gamma_d \in \Omega$ outra região do corpo onde há deslocamentos prescritos (figura 3.2). As condições de contorno em Γ_n são, em notação vetorial:

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \quad (3.3)$$

onde \underline{n} é vetor unitário normal à superfície e \underline{t} é o vetor das trações superficiais (forças prescritas por unidade de área). As condições de contorno em Γ_d são:

$$\underline{u} = \underline{u}^0(x_1, x_2, x_3) \quad (3.4)$$

onde \underline{u}^0 são as funções deslocamento prescritas em Γ_d . A relação cinemática infinitesimal entre deslocamento e deformação é dada pela equação (3.5):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

onde ε_{ij} é a componente da deformação infinitesimal na direção j perpendicular ao eixo i (figura 3.2).

A equação que relaciona as tensões com as deformações infinitesimais, em sua forma tensorial, é a seguinte:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.6)$$

onde $\underline{\underline{C}}$ é o tensor constitutivo de 4ª ordem que contém as propriedades do material. É um tensor simétrico e positivo definido (possui todos os seus autovalores maiores do que zero), caso contrário estaria violando as leis da termodinâmica (nesse caso, o material poderia se deformar sem que nenhuma força, externa ou residual, agisse sobre o corpo).

Neste trabalho foram utilizados apenas materiais isotrópicos. Dessa forma, em domínios tridimensionais, a equação (3.6) pode ser expandida da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Conforme mencionado anteriormente, este trabalho será restrito à Elasticidade Bidimensional, utilizando as hipóteses de Estado Plano de Deformações ou Estado Plano de Tensões. Poucas estruturas utilizadas na construção mecânica podem ser corretamente analisadas utilizando essa simplificação. Entretanto, os modelos resolvidos nesse trabalho são estruturas simples, usadas como exemplos acadêmicos, sendo basicamente chapas pouco espessas (ou de espessura unitária), que respeitam as hipóteses do estado plano de tensões ou deformações. Além disso, neste trabalho pretende-se analisar apenas casos considerados como “estruturas de teste” pela literatura. Dessa forma, o uso da elasticidade bidimensional torna-se perfeitamente justificável, visto que essa teoria requer um esforço computacional bastante reduzido quando comparada a outras áreas da engenharia estrutural, como Elasticidade Tridimensional ou a Plasticidade. Fica claro, porém, que o método abordado nesse trabalho é perfeitamente extensível para problemas mais complexos, ficando como sugestão para trabalhos futuros nessa área.

Dessa forma, utilizando as hipóteses da elasticidade plana, a equação (3.7) pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

onde λ e μ são os coeficientes de Lamé [Atkin e Fox, 1980]. Os coeficientes de Lamé estão relacionados ao Módulo de Young e ao Coeficiente de Poisson pelas seguintes expressões:

$$\lambda = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \rightarrow (\text{Modelo EPT}) \quad (3.9)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \rightarrow (\text{Modelo EPD})$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.10)$$

onde E é o módulo de elasticidade (Módulo de Young), ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal. As siglas EPT e EPD indicam, respectivamente, estado plano de tensões ($\sigma_{33} = 0$) e estado plano de deformações ($\varepsilon_{33} = 0$). Conforme mostram as equações (3.9) e (3.10), um material isotrópico (que é o caso da maioria dos metais utilizados em construções mecânicas) possui apenas duas propriedades elásticas independentes (E e ν , λ e μ ou ainda K e G).

O fato de a matriz constitutiva ser obrigatoriamente positiva definida implica nas seguintes propriedades para os coeficientes elásticos de materiais isotrópicos:

$$\begin{aligned} E &> 0 \\ G &> 0 \\ \lambda &> 0 \\ 0 &< \nu < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Com essas equações, o problema da elasticidade pode ser formulado em termos das funções de deslocamentos. Entretanto, a notação mais geral das equações de equilíbrio é dada em função das tensões, conforme mostrado na equação (3.1).

No processo de otimização as equações de equilíbrio funcionam como restrições de igualdade que devem ser satisfeitas em cada iteração, sob pena de a estrutura otimizada não se encontrar em equilíbrio estático.

Conforme mencionado, as equações de equilíbrio resultam em funções deslocamento, que são as incógnitas primárias (Equação de Navier), sendo que as deformações resultantes a partir desses deslocamentos devem satisfazer as *equações de compatibilidade* [Atkin e Fox, 1980]. Se, por outro lado, as incógnitas fossem as tensões, as mesmas são obtidas a partir das equações de compatibilidade e fornecem as equações de Beltrami-Mitchell.

3.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF): SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

3.3.1. BREVE HISTÓRICO

“Quando engenheiros encontram um problema matemático que eles não conseguem resolver, é comum não desistir simplesmente do problema, mas, em vez disso, tentar encontrar uma formulação alternativa que seja solucionável e contribua na solução do problema original. O mais proeminente exemplo deste tipo de aproximação se deu, talvez, com a introdução do Método dos Elementos Finitos”. [Vicente, 2001]. Essa afirmação define a essência e a importância do método dos elementos finitos na solução de problemas da engenharia estrutural, entre outros campos.

Existem inúmeras publicações e livros que tratam sobre o MEF. Alguns livros clássicos, que contêm a formulação completa do método são as referências [Bathe, 1996; Hughes, 1987; Texas Series, 1981; Zienkiewicz, 1979] entre outras. Em um artigo não muito recente [Noor, 1991], estão compilados os títulos de mais de 100 livros e artigos publicados até o janeiro de 1991 sobre o MEF. Outro artigo que busca fazer uma revisão histórica das origens do método é o trabalho de Felippa [Felippa, 2001]. Em seu artigo é traçada uma revisão histórica não apenas do MEF, mas também do seu antecessor: a análise estrutural através de métodos matriciais, englobando o período de 1930 a 1970.

“Quem montou pela primeira vez uma matriz de rigidez?”. Essa pergunta inicia um artigo de Felippa [Felippa, 1995]. Neste mesmo artigo o autor responde a sua pergunta: “alguém trabalhando na indústria aeronáutica no final da década de 20 ou no início da década de 30” [Felippa, 1995]. Entretanto, após uma pesquisa mais refinada, concluiu que a análise estrutural matricial surgiu em pesquisas na área da aeroelasticidade no National Physics Laboratory (NPL), em Teddington, hoje um subúrbio de Londres.

Desde então, o método foi evoluindo. Entre 1934 e 1935 foram criados os primeiros dois jornais especializados no tópico [Duncan e Collar, 1934 e 1935]. Intuitivamente já se pensava em representar o domínio complexo de uma estrutura contínua em pedaços geometricamente mais simples. Essa foi a idéia do pesquisador Hrenikoff [Hrenikoff, 1941], que afirmou que a dificuldade em se representar estruturas contínuas podia ser superada se o domínio fosse dividido em elementos interconectados por um número finito de nós, transformando-o em uma treliça ou pórtico equivalente, que poderia ser resolvido com as técnicas existentes.

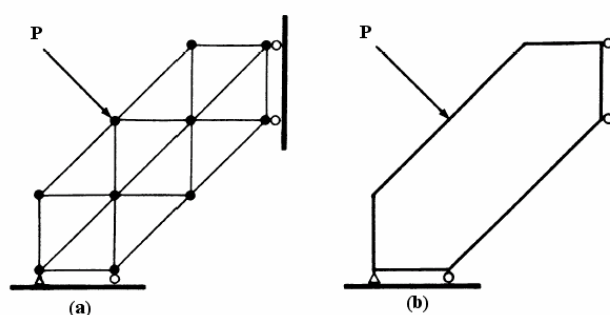


Figura 3.3: Uma treliça (a) e uma placa (b) estaticamente equivalentes.

O conceito de “elemento contínuo” propriamente dito foi introduzido pela primeira vez em 1943, com o trabalho de Courant [Courant, 1943]. Ele foi o criador do elemento triangular de deformação constante (CST), utilizado até hoje para resolver problemas de elasticidade plana.

Entre 1954 e 1955, Argyris e Kelsey [Argyris e Kelsey, 1960] publicaram um artigo apresentando uma unificação dos métodos das forças e dos deslocamentos aplicando os teoremas de energia. Alguns autores como Bathe [Bathe, 1996] e de Navarra [de Navarra, 1995] consideram este artigo com um dos precursores do MEF. Outro artigo que também é citado como precursor do MEF foi publicado por Turner [Turner et al, 1956]. Nesse trabalho ele propõe o Método da Rigidez Direta como uma implementação geral e eficiente de um método que viria a ser a base do MEF. Esta técnica foi documentada num artigo posterior, no qual foram incluídos diversos exemplos (modelos estáticos, dinâmicos, lineares e não-lineares) para mostrar a validade do método. A denominação “Elemento Finito” foi citada pela primeira vez em um texto de Clough [Clough, 1960].

3.3.2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Os principais constituintes do MEF para a solução de um problema de valor de contorno podem ser definidos como [Hughes, 1987]:

- A forma variacional (ou fraca) do problema;
- A solução aproximada das equações variacionais usando funções que definem uma base de elementos finitos.

A equação (3.1) é a forma mais geral do problema de valor de contorno que é resolvido na etapa de análise de um problema de otimização estrutural. Conforme já mencionado, neste trabalho utiliza-se a formulação da elasticidade linear infinitesimal isotrópica.

Um problema de valor de contorno implica na imposição de *condições de contorno*. Neste caso específico, após uma análise nas equações de equilíbrio, verifica-se que são equações diferenciais parciais de 2ª ordem sobre a função deslocamento u . Dessa forma, a função vetorial u deve satisfazer a condições de contorno na seguinte forma (assim chamadas de essenciais e naturais, respectivamente):

$$\underline{u}(x_a) = g \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \right|_{x_b} = h \quad (3.13)$$

onde g e h são funções ou constantes dadas. As equações (3.12) e (3.13) requerem que u assumo o valor de g em $x = x_a$ e que sua declividade assumo o valor de h em $x = x_b$, sendo x_a e x_b dois pontos quaisquer do domínio. Na análise estrutural proposta, as condições de contorno são representadas pelas equações (3.3) e (3.4) Assim, a forma forte do problema é posta da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado vetor } \underline{b}, \text{ encontrar vetor } \underline{u} \text{ tal que} \\ \nabla \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) + \underline{b} = 0 \\ \underline{u} = \underline{k} \quad \text{em } \Gamma_d \\ \underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \quad \text{em } \Gamma_n \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Solucionando esse conjunto de equações, obtém-se a solução *exata* da função deslocamento \underline{u} . Entretanto, esse método só é aplicável para estruturas cuja geometria seja relativamente simples, existindo várias soluções analíticas já encontradas. Essas soluções obtidas pela simplificação da geometria dão origem às Teorias Estruturais, tais como barras, vigas, cascas e placas.

Contudo, no caso de estruturas que possuam geometria mais complexa, onde não é possível que sejam feitas aproximações, torna-se muito difícil, ou mesmo impossível encontrar

uma solução exata para o problema (3.14). Por esse motivo, em vez de encontrar uma solução exata, procura-se uma solução aproximada.

Neste trabalho foi usado o Método dos Elementos Finitos para resolver as equações de equilíbrio. Esse método utiliza a formulação fraca de algum método de resíduos ponderados, ou a formulação variacional quando existe um funcional associado ao problema.

A forma fraca de um problema de valor de contorno resolvido pelo MEF necessita que sejam definidas duas classes de funções. A primeira é composta por funções que são candidatas à solução (as funções de teste). Essas funções devem obrigatoriamente respeitar as condições de contorno do problema. Além disso, para existir sentido físico nessa formulação, as funções de teste devem estar contidas em um espaço de Hilbert² H^1 (devem ser pelo menos contínuas por partes e possuírem a primeira derivada contínua) além de respeitarem a seguinte norma:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\Omega \leq \infty \quad (3.15)$$

Dessa forma, o conjunto das funções de teste, denotado por Φ , consiste de todas as funções cujas derivadas possuem quadrado integrável respeitando um dado conjunto de condições de contorno. Essa afirmação pode ser escrita matematicamente da seguinte forma:

$$\Phi = \{u \mid u \in H^1, u(x_a) = g\} \quad (3.16)$$

A segunda classe de funções é chamada de funções peso (ou variações). Este conjunto é bastante similar ao conjunto das funções de teste, exceto que agora essas funções devem respeitar a condição de contorno homogênea do problema. Esse conjunto, denotado por Ψ é definido da seguinte forma:

$$\Psi = \{w \mid w \in H^1, w(x_a) = 0\} \quad (3.17)$$

² Um espaço de Hilbert é um espaço linear, normado e completo sendo que a sua norma provém de um produto interno.

Formulações deste tipo conduzem a uma expressão idêntica à que resulta do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), onde, nesse caso, as funções w são os deslocamentos virtuais [Hughes, 1987].

Dado um problema definido pela equação diferencial na forma $A(u) = b$, a forma “forte” do princípio dos resíduos ponderados vem dada por:

$$\int_{\Omega} [A(u) - b] w \, d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

onde Ω é o domínio em estudo. Integrando sucessivamente por partes a expressão (3.18), obtém-se:

$$\int_{\Omega} [F(u)G(w) + bw] \, d\Omega - \int_{\Gamma} M(u)N(w) \, d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

onde Γ é o contorno de Ω . Esta expressão contém derivadas de u de menor ordem, diminuindo os requerimentos de continuidade da função teste, sendo denominada de “forma fraca”.

Uma das etapas fundamentais do cálculo de estruturas utilizando MEF consiste na obtenção da equação de equilíbrio da estrutura analisada, que relaciona as forças atuantes com os deslocamentos nos nós.

No caso de estruturas naturalmente simples ou que permitam algum tipo de simplificação geométrica através da redução de dimensões, pode-se encontrar diretamente as equações diferenciais que governam a estrutura e as vezes sua correspondente solução. Entretanto, estruturas mais complexas requerem procedimentos mais gerais. O PTV é bastante utilizado para resolver esse problema, e é enunciado como segue: “Uma estrutura submetida à ação de forças externas está em equilíbrio quando, ao se imporem deslocamentos arbitrários (virtuais) compatíveis com as condições de contorno, o trabalho realizado pelas forças externas sobre os deslocamentos virtuais é igual ao trabalho que realizam as tensões sobre as deformações produzidas pelos deslocamentos virtuais” [de Navarra, 1995].

O PTV é condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de toda a estrutura, bem como de qualquer uma de suas partes. Alternativamente, uma expressão similar é obtida a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total (PMEP), sendo válido, nesse caso, apenas para problemas de elasticidade. Assim, partindo do funcional de energia Π em sua forma bilinear:

$$\Pi = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}) \quad (3.20)$$

onde

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (3.21)$$

é a parcela da energia potencial interna de deformação onde \mathbf{C} é uma matriz que contém as componentes do tensor das propriedades elásticas do material, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor que contém as componentes do tensor das deformações infinitesimais, \mathbf{u} e \mathbf{v} são as componentes do vetor de deslocamento e

$$f(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.22)$$

é a energia potencial externa, ou seja, a parcela que corresponde ao trabalho das forças externas. O primeiro termo de (3.22) corresponde ao trabalho das forças de corpo enquanto que o segundo termo corresponde ao trabalho das trações superficiais. Admite-se que as cargas externas derivam de um potencial.

Procura-se um ponto de mínima energia do funcional (3.20), o qual representa a estrutura em equilíbrio estável. Calculando a primeira variação do funcional e igualando-o a zero, ($\delta\Pi = 0$) obtém-se uma expressão matemática coincidente com a do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* aplicado ao problema da elasticidade infinitesimal:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (3.23)$$

Os termos da equação (3.23) tem dimensão de energia. Ela representa uma formulação geral (para qualquer tipo de elemento finito) de onde se deduzem a matriz de rigidez (primeira parcela) e o vetor de forças (demais parcelas). Em forma matricial, a equação (3.23) dá origem a conhecida equação, que relaciona a rigidez com as forças externas:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.24)$$

onde \mathbf{K} e \mathbf{f} são calculados respectivamente pelas equações (3.21) e (3.22). A matriz de rigidez \mathbf{K} é uma matriz simétrica e positiva semidefinida, ou seja, seus valores característicos são maiores ou iguais a zero. Após a aplicação das condições de contorno (fazendo com que a estrutura não fique “solta” no espaço), a matriz \mathbf{K} se torna positiva definida, possibilitando que o sistema seja solucionado.

A seguir é mostrado um roteiro explicando as etapas necessárias para se efetuar a análise estrutural de um modelo utilizando o Método dos Elementos Finitos:

- a) A partir da realidade física da estrutura, suas vinculações e carregamentos, é necessário inicialmente selecionar um *modelo matemático* adequado que descreva corretamente o comportamento da estrutura (teoria de placas, de vigas, de barras, elasticidade, etc). Devem ser definidas também as propriedades mecânicas dos materiais e o tipo de análise que se deseja realizar (pequenos ou grandes deslocamentos, análise estática ou dinâmica, etc);
- b) Uma vez selecionado o modelo matemático, deve-se discretizar a estrutura em partes cuja medida entre suas interseções seja nula. Essas partes são chamadas de *elementos finitos*, dentro dos quais se interpolam as variáveis principais (deslocamentos, no caso de se efetuar uma análise estrutural) em função de seus valores em uma série de pontos discretos do elemento denominados *nós*. Os elementos se conectam entre si pelos nós situados no contorno do elemento. O domínio Ω é dividido em n elementos Ω^e . As seguintes relações devem ser respeitadas na construção da malha:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{ne} \Omega_i^e \quad (3.25)$$

$$\Omega_i^e \cap \Omega_j^e = \phi$$

- c) A partir da expressão do PTV (equação (3.23)), são obtidas as matrizes de rigidez \mathbf{K}_e e o vetor de forças \mathbf{f}_e para cada elemento;
- d) Cada elemento tem sua posição espacial definida em um sistema de coordenados fixo (sistema cartesiano, por exemplo). Entretanto, para fins de cálculo, as matrizes de rigidez são definidas em um sistema de coordenadas local definido para cada elemento da malha. Aplicando o princípio da superposição de efeitos, a matriz de rigidez global e o vetor de forças global são construídos, representando toda a malha de elementos finitos;

- e) Utilizando-se algum método de resolução de sistemas de equações lineares (eliminação de Gauss, Cholesky, gradientes conjugados, etc), resolve-se o sistema de equações resultante, na forma $\mathbf{Ku}=\mathbf{f}$, de onde se encontra o vetor de deslocamentos \mathbf{u} da estrutura discretizada;
- f) Com o resultado obtido, podem-se calcular as deformações e tensões em cada elemento, bem como as reações nos nós em que foram prescritos deslocamentos;
- g) A última etapa consiste na interpretação e visualização dos resultados obtidos (muitas vezes nessa etapa encontra-se a maior fonte de erros, pois esta interpretação depende do conhecimento teórico do projetista).

3.3.3. ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

Neste trabalho foram utilizadas apenas *malhas regulares*, que são formadas por elementos retangulares iguais. Assim, mantendo todos os elementos da malha com as mesmas características, somente um elemento necessita ter sua matriz de rigidez local calculada para que a matriz de rigidez global seja montada, pois as matrizes de rigidez são similares, a menos de uma constante multiplicativa, que será visto na definição do problema de otimização (capítulo 4). Outro motivo pelo qual são utilizadas malhas regulares consiste na facilidade de implementação de filtros de vizinhança fixa.

Uma desvantagem consiste no fato de esse método limitar uma aplicação mais geral do programa de otimização. Além disso, esse resultado só é válido para problemas lineares. Casos em que não linearidades são consideradas, mesmo elementos geometricamente iguais podem possuir matrizes de rigidez locais diferentes.

Dentre as diversas formulações de elementos finitos existentes para resolver o problema da elasticidade plana, estão implementados no programa desenvolvido os seguintes elementos:

- Elemento quadrilátero bilinear isoparamétrico [Bathe, 1996; Hughes, 1987];
- Elemento não-conforme de Taylor [Taylor et al, 1976, Hughes, 1987];
- Elemento triangular com rotação de membrana (GT-9) [Yuqiu e Yin, 1994].

A disponibilidade de diferentes formulações de elementos finitos permite comparar o desempenho desses elementos frente aos problemas comuns da otimização topológica, como a instabilidade de tabuleiro e a influência da discretização [Bendsøe, 1989]. Elementos como o quadrilátero bilinear isoparamétrico, apesar de possuir uma formulação relativamente simples e de fácil implementação, muitas vezes não consegue descrever com precisão o comportamento

estrutural da peça, a menos que uma malha bastante refinada (com muitos elementos) seja usada. Isso resolveria o problema da precisão da análise estrutural. Porém, o processo de otimização requer um número considerável de análises estruturais, além do fato que geralmente o número de variáveis de projeto está associado ao número de elementos da malha de elementos finitos. Por esse motivo, uma malha extremamente refinada pode tornar inviável o processo de otimização, devido ao elevado custo computacional. Assim, utilizam-se os elementos não compatíveis como o elemento de Taylor e os elementos com graus de rotação de membrana (GT-9), que permitem uma descrição mais fiel do comportamento da estrutura sem aumentar demasiadamente o número de graus de liberdade.

Os três primeiros elementos descritos estão implementados no programa, porém apenas os dois primeiros (bilinear e Taylor) foram usados nos exemplos de otimização, devido à maior facilidade na geração de malhas regulares. Entretanto, todas as rotinas de análise estrutural correspondentes ao elemento GT-9 estão implementadas.

A formulação detalhada dos elementos finitos implementados encontra-se no apêndice I.

4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Equation Chapter (Next) Section 1

4.1. CONCEITOS BÁSICOS

Os componentes básicos da formulação de um problema de otimização são:

- A função objetivo;
- O modelo do processo;
- As restrições.

A função objetivo representa lucro, custo, energia, produção, distância, etc., em termos das variáveis de decisão do processo ou sistema em análise. O modelo do processo e as restrições descrevem as inter-relações entre estas variáveis. Os conceitos que serão apresentados nessa seção estão baseados principalmente nos trabalhos de Bendsøe [Bendsøe, 1995], Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1992] e Arora [Arora, 1989].

4.1.1. VARIÁVEIS DE PROJETO

As variáveis de projeto são parâmetros escolhidos para descrever o projeto de um sistema ou estrutura [Arora, 1989], sendo geralmente expressos na forma de um vetor:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

As variáveis de projeto podem ser de natureza *discreta* (assumem apenas valores isolados dentro de um conjunto na forma $\{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x} = (k_1, k_2, \dots, k_n)\}$) ou *contínua* (as variáveis podem assumir qualquer valor dentro de um conjunto na forma $\{\mathbf{x} \in X \mid k_{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq k_{\text{sup}}\}$).

Se os valores especificados não satisfazem todas as restrições do problema, o projeto é dito não admissível. Caso contrário, quando o projeto é viável, o sistema, se fosse fabricado, executaria corretamente todas as funções para o qual fora projetado dentro das hipóteses de análise. É importante que as variáveis sejam escolhidas de forma que sejam independentes umas em relação às outras, para evitar complicações adicionais ao problema [Arora, 1989].

4.1.2. FUNÇÃO OBJETIVO (OU FUNÇÃO CUSTO)

Em um processo de otimização, podem existir inúmeros projetos viáveis, sendo alguns melhores que os outros. Deve então ser estabelecido um critério numérico (geralmente um

funcional) cujo valor possa ser obtido a partir de um conjunto de variáveis de projeto. Esse critério numérico é chamado de função objetivo, sendo denotada por $f(x)$ ou $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)]$ no caso de existirem mais de uma função objetivo. Problemas de otimização em que existem mais de uma função objetivo são chamados de *Otimização Multi-Objetivo*. Uma boa revisão sobre esse assunto pode ser vista no trabalho de Karwan, Spronk e Wallenius [Karwan et al., 1997]. Nesse caso, o problema pode ser solucionado utilizando a técnica de programação matemática chamada *Otimização Edgeworth-Pareto*.

Contudo, devido a grande dificuldade de se trabalhar com múltiplas funções objetivo, geralmente se escolhe a mais importante para ser a função objetivo, transformando as demais em restrições. A seleção de uma função objetivo é de extrema importância no processo. Sempre deve ser função das variáveis de projeto, e muitas vezes está relacionada também com questões financeiras. Neste trabalho, por exemplo, o funcional a ser minimizado representa o volume da estrutura. Minimizando o volume, está-se minimizando a quantidade de material gasto, que por sua vez, **pode** acarretar uma diminuição nos custos com material.

É importante ter-se em mente que essa afirmação nem sempre é verdadeira. Um dos fatores que reduzem o custo de um projeto é realmente um menor gasto de matéria-prima. Será visto que a otimização topológica pode aumentar a complexidade do desenho gerado, através da inclusão de furos e reforços. Este trabalho não considerou os custos de fabricação na função objetivo, ficando destacada aqui sua importância.

4.1.3. RESTRIÇÕES DO PROJETO

O projeto de um sistema, segundo a ótica da otimização, consiste de um conjunto de valores numéricos para as variáveis de projeto. Mesmo se esse projeto for absurdo (valores negativos para áreas da seção transversal de barras, por exemplo) ou inadequado, ele ainda pode ser chamado de projeto. Isso faz com que alguns projetos sejam úteis, e outros não.

Dessa forma, definem-se restrições como todos os requerimentos impostos às variáveis de projeto. Podem ser bastante simples, como limites superiores e inferiores para os valores admissíveis (*restrições laterais*), bem como funções mais complexas, como restrição sobre a tensão e flexibilidade (muitas vezes chamadas de restrições tecnológicas). Podem ser de *desigualdade* ou *igualdade*. Restrições de igualdade que estão sempre presentes em problemas de otimização estrutural são as equações de equilíbrio. As demais restrições geralmente aparecem na forma de desigualdades (a tensão em cada ponto da estrutura, por exemplo, deve ser inferior a um limite admissível).

As restrições laterais são de extrema importância para o correto funcionamento do algoritmo utilizado nesse trabalho (Programação Linear Sequencial), no qual todas as funções são linearizadas e sucessivos problemas lineares são resolvidos até a convergência. Dessa forma, a fim de garantir a validade da aproximação, é aplicada uma restrição lateral sobre a solução atual (chamada de *limites móveis*), de forma que não ocorra uma variação muito grande em relação ao valor atual.

4.1.4. VETOR GRADIENTE E MATRIZ HESSIANA

O *vetor gradiente* e a *matriz hessiana* são entes matemáticos bastante utilizados nos processos de otimização. Assim sendo, serão sucintamente definidos nessa seção.

O vetor gradiente é calculado pela expressão (4.2). Sejam $f(x)$ uma função objetivo, x_n as componentes do vetor das variáveis de projeto e \mathbf{x}^* um ponto extremo, têm-se que o gradiente de $f(x)$ em \mathbf{x}^* vem dado por

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Essa expressão é mais facilmente entendida em sua representação geométrica, na qual o vetor gradiente é definido como sendo normal ao plano tangente no ponto \mathbf{x}^* . O vetor gradiente sempre aponta na direção do máximo aumento da função objetivo. A figura 4.1 ilustra esse conceito para uma função de 3 variáveis:

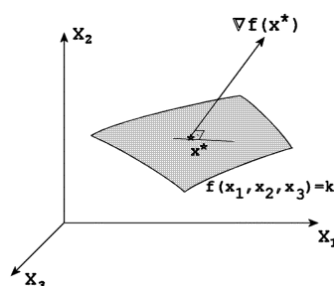


Figura 4.1: Vetor gradiente para a função $f(x_1, x_2, x_3)$ no ponto \mathbf{x}^* .

Derivando novamente o vetor gradiente em relação às variáveis de projeto, obtém-se a matriz das segundas derivadas parciais, chamada de matriz hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.1.5. TIPOS DE PROBLEMAS

Um problema de otimização estrutural pode ser classificado em três tipos, que remetem a diferentes soluções finais: otimização dimensional (*size optimization*), otimização de forma (*shape optimization*) e otimização topológica (*topology optimization*). A figura 4.2 ilustra esses conceitos:

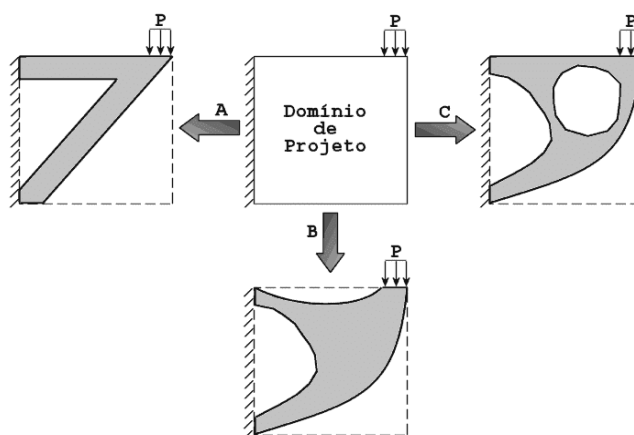


Figura 4.2: Tipos de otimização estrutural: (A) dimensional, (B) forma, (C) topológica [Pereira, 2001].

Num problema típico de *otimização dimensional*, as variáveis de projeto descrevem características geométricas da estrutura, tais como áreas de seção transversal em barras, momentos de inércia em vigas (problemas discretos) ou espessuras de placas (problema contínuo). No caso das barras, por exemplo, busca-se uma distribuição ótima para a área da seção transversal de cada barra, de modo que minimize (ou maximize) uma grandeza física, tal como flexibilidade ou tensão enquanto o equilíbrio e as restrições são satisfeitas. A principal

característica desse tipo de problema é a existência de um domínio fixo, ou seja, a malha de elementos finitos não é alterada no processo de otimização.

Num problema de *otimização de forma*, o contorno do modelo é o objeto da otimização, onde se busca a forma ótima para o domínio de projeto. As variáveis de projeto são geralmente os pontos de controle dos polinômios ou das *B-splines*³ que definem o contorno da estrutura. Um problema comum na otimização de forma é a distorção da malha, que pode muitas vezes invalidar os resultados devido a problemas de convergência da solução de elementos finitos. Alguns autores, destacando o trabalho de Salagame e Belegundu [Salagame e Belegundu, 1995] aconselham que o processo de otimização seja acompanhado de um processo de adaptatividade da malha e estimativa de erros.

A *otimização topológica* de estruturas visa a determinação da distribuição ótima de material no domínio, inserindo furos e reforçando outros pontos da malha de elementos finitos. A variável de projeto geralmente está associada com a distribuição de material no domínio, que por sua vez está relacionada com a malha de elementos finitos. Dessa forma, um problema típico de otimização topológica apresenta um número considerável de variáveis de projeto. Essa correlação entre as variáveis de projeto com a malha de elementos finitos causa um problema bastante comum, que é a solução final dependente da discretização da malha de elementos finitos [Bendsøe, 1995, Sigmund e Petersson, 1998].

4.2. FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

De uma forma geral, um problema de otimização com restrições é apresentado da seguinte forma [Haftka e Gürdal, 1992; Arora, 1989].

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \\ & \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde \mathbf{x} é o vetor das variáveis de projeto, \mathbf{g}_j e \mathbf{h}_k são respectivamente matrizes que contém as restrições de desigualdade e igualdade. Foi assumido um problema de minimização do funcional

³ Uma curva do tipo “B-Spline” é definida por equações do tipo $p(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\mathbf{u}) \mathbf{p}_i$, onde $N_{i,p}(\mathbf{u})$ são funções de base de grau p , \mathbf{p} é um conjunto com n pontos de controle e \mathbf{u} é um vetor de m nós, de tal forma que $m = n + p + 1$.

f , porém, sem nenhuma perda de generalidade, o problema poderia ser maximizar o funcional $f(x)$, bastando para isso inverter o sinal do funcional.

Uma restrição de desigualdade $g_j(x^*)$ é chamada de *ativa* em um ponto viável (agora chamado de x^*) se $g_j(x^*) = 0$, caso contrário ela é uma restrição *inativa*. As restrições ativas restringem a região de viabilidade, enquanto que as inativas não impõem restrição alguma na vizinhança do ponto x^* , definida pela hipersfera⁴ de raio ε em torno desse ponto, denotada por $B_\varepsilon(x^*)$. Na figura 4.3 representa-se a minimização de um funcional com uma restrição:

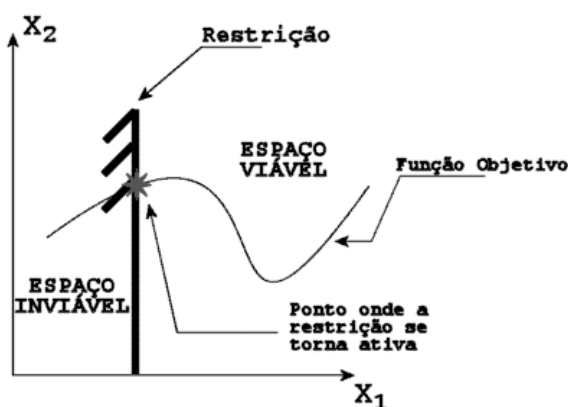


Figura 4.3: Representação da minimização de um funcional com uma restrição.

O problema definido em (4.4) pode apresentar inúmeros mínimos locais, aumentando a dificuldade no processo de solução. A diferença entre mínimo local (relativo) e mínimo global (absoluto) é mostrada na figura 4.4:

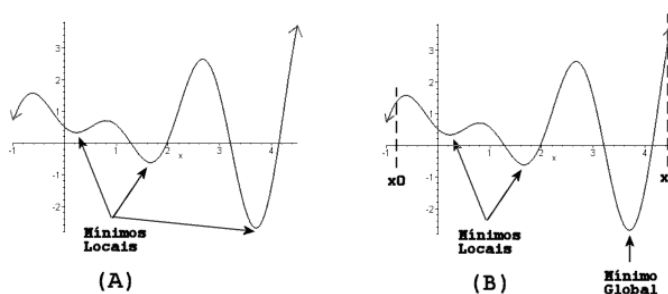


Figura 4.4: Representação gráfica dos pontos ótimos: (A) Domínio ilimitado; (B) Domínio limitado.

⁴ Hipersfera é o ente geométrico definido em um espaço n -dimensional \mathfrak{R}^n , que segue a seguinte equação:

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + \dots + (x_n - x_{n0})^2 = \varepsilon^2$$

De um modo geral, quando um problema de otimização é resolvido, não se sabe a priori se ele terá solução (viável ou não). Entretanto, se o funcional satisfizer algumas condições, é possível garantir a existência de um mínimo. Essas condições estão enunciadas no *Teorema de Weierstrass* [Arora, 1989, Luenberger, 1969], que, quando satisfeito, assegura a existência de um mínimo global. O teorema diz o seguinte: “se $f(\mathbf{x})$, um funcional definido em um espaço S fracamente fechado e limitado for semicontínuo inferior em S , então $f(\mathbf{x})$ possui um mínimo global em S ”. Se as condições do teorema forem satisfeitas, a existência do mínimo global está garantida, caso contrário, nada pode ser afirmado. É importante ressaltar que o teorema nada afirma sobre como encontrar o mínimo. O exemplo mostrado na figura 4.4 mostra claramente essa idéia: em (A), apesar de a função ser contínua, o domínio é ilimitado, enquanto que em (B), que possui domínio limitado e fechado (os pontos limite fazem parte do domínio), o mínimo global está presente.

4.3. CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)

Em 1951, Kuhn e Tucker propuseram as condições matemáticas para um dado ponto no espaço ser considerado um ponto ótimo. Como esses critérios matemáticos haviam sido anteriormente (e independentemente) propostos por Karush, esses teoremas e proposições passaram a ser conhecidos como condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

As condições de Karush-Kuhn-Tucker, se satisfeitas, garantem que um ponto \mathbf{x}^* é realmente um ponto extremo. As condições necessárias e suficientes que definem um ponto como sendo de mínimo (ou máximo) são definidas para um problema de otimização sem restrições.

Seja $f(\mathbf{x})$ um funcional tal que $f : X \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, o qual define a função objetivo, $\mathbf{x} \in X$ um vetor que define as variáveis de projeto e \mathbf{x}^* um ponto extremo do funcional $f(\mathbf{x})$, têm-se as seguintes condições de otimalidade:

- Condição necessária de 1ª ordem:

Para que \mathbf{x}^* seja um mínimo (ou máximo) local da função $f(\mathbf{x})$, diferenciável em \mathbf{x}^* , é necessário que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (4.5)$$

- Condição necessária de 2ª ordem:

Para que \mathbf{x}^* seja um mínimo (ou máximo) local da função $f(\mathbf{x})$, duas vezes diferenciável em \mathbf{x}^* , é necessário que a equação (4.5) seja satisfeita e que::

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \equiv \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \text{ seja positiva (ou negativa) semi-definida} \quad (4.6)$$

onde \mathbf{H} é a matriz hessiana. O fato de a matriz hessiana precisar ser positiva semidefinida significa que todos os seus autovalores devem ser maiores ou iguais a zero para o ponto ser um mínimo local. Se for negativa semidefinida, significa que o ponto \mathbf{x}^* é um máximo local.

Observa-se que estas condições são apenas necessárias porque os termos de primeira e segunda ordem podem ser nulos, deixando ainda dúvida sobre a natureza de \mathbf{x}^* .

- Condição suficiente:

Seja $f(\mathbf{x})$ duas vezes diferenciável em \mathbf{x}^* tal que a equação (4.5) esteja satisfeita e que:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \text{ seja positiva (ou negativa) definida} \quad (4.7)$$

Dessa forma, \mathbf{x}^* é mínimo (ou máximo) estrito de $f(\mathbf{x})$.

Na maior parte dos casos, os problemas de engenharia apresentam algum tipo de restrição, podendo ser alguma restrição funcional (por exemplo, o deslocamento máximo em algum ponto da estrutura não pode ultrapassar um certo limite) ou tecnológica (nesse caso, a tensão em cada ponto da peça deve respeitar o limite de resistência do material). Em sua forma geral, o problema de minimização de uma dada função objetivo sujeito a restrições de igualdade e desigualdade é formulado de acordo com a equação (4.4).

A idéia chave para desenvolver as condições necessárias e suficientes para um problema de otimização com restrições é transformá-lo em um problema de otimização sem restrições e aplicar as condições para este caso. Uma forma de fazer esta transformação é através da introdução de uma função auxiliar, chamada de função de Lagrange definida como:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_k^T h_k(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}_j^T g_j(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

onde λ e μ são os multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

Utilizando-se desses conceitos, serão então definidas as condições necessárias de otimalidade para um problema com restrições [Haftka e Gürdal, 1992; Duysinx et al., 2000]: “Se \mathbf{x}^* é um ponto de ótimo do problema (4.4) e se \mathbf{x}^* é um ponto regular⁵, então um vetor de multiplicadores de Lagrange pode ser encontrado de tal forma que”:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + (\boldsymbol{\lambda}^*)^T \nabla h(\mathbf{x}^*) + (\boldsymbol{\mu}^*)^T \nabla g(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (4.9)$$

$$h(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (4.10)$$

$$g(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\mu}_j^{*T} g_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n_g \quad (\text{condição de complementaridade}) \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\mu}^* \geq 0 \quad (4.13)$$

Uma interpretação geométrica das condições KKT está ilustrada na figura 4.5, onde são consideradas duas restrições ativas. O vetor s mostra uma típica direção viável que não causaria nenhuma violação direta nas restrições.

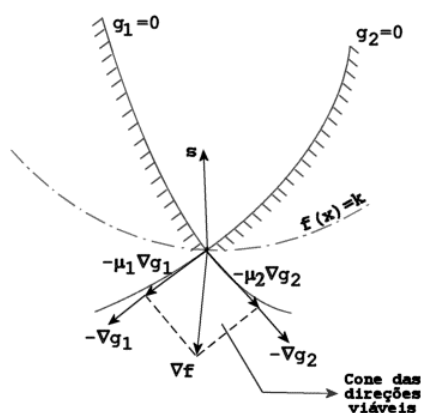


Figura 4.5: Representação geométrica das condições KKT para o caso de duas restrições ativas.

Resumindo, as condições de Karush-Kuhn-Tucker consistem de 4 tipos de condições:

- A função de Lagrange é estacionária em relação a \mathbf{x} ;
- Viabilidade primal, que significa que \mathbf{x}^* é um ponto viável;

⁵ Um ponto \mathbf{x}^* é um ponto regular do problema se todos os vetores gradientes ∇g_j das restrições de desigualdade ativas ($g_j(\mathbf{x}^*)$) são linearmente independentes.

- Viabilidade dual⁶, que significa que os multiplicadores de Lagrange μ^* , correspondentes às restrições de desigualdade ativas são não-negativos;
- Condição de complementaridade, que significa que os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições inativas são iguais à zero.

4.4. TÉCNICAS DE SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Em nenhum momento, até então, foi comentado **como** um problema de otimização poderia ser resolvido. Dessa forma, a questão que naturalmente surge é: “Como então resolver um problema de otimização?”.

As técnicas para solucionar esse tipo de problema podem ser classificadas em duas grandes categorias [Kirsch, 1989]:

1. Métodos analíticos: critérios de ótimo;
2. Métodos numéricos ou métodos de busca: não utilizam informações das derivadas.

4.4.1. CRITÉRIOS DE ÓTIMO

Os critérios de ótimo projeto começaram a ser desenvolvidos no final dos anos 60, como uma alternativa para as técnicas de programação matemática, que, segundo autores como Hassani et al. [Hassani e Hinton, 1998], não são ainda aplicáveis a problemas com muitas variáveis de projeto. Apesar de diversos autores mostrarem que a programação matemática é mais eficiente e já se encontra em um grau de maturidade suficiente para resolver problemas complexos [Swan e Kosaka, 1997; Yang e Chuang, 1994; Fonseca, 1997; Papadrakakis et al., 1998], o critério de ótimo é ainda bastante utilizado, fornecendo uma percepção maior do problema além de freqüentemente fornecer limites inferiores e superiores para as possíveis soluções ótimas [Kirsch, 1989]. Por esse motivo, será agora feita uma breve revisão histórica sobre o assunto, baseada principalmente nos trabalhos de Rozvany et al. [Rozvani, Bendsøe e Kirsch, 1995], Hassani et al. [Hassani e Hinton, 1998] e Cheng [Cheng, 1992], apesar de o método de solução escolhido nesse trabalho ser a programação matemática linear seqüencial, que será posteriormente estudada com mais detalhes.

O primeiro autor a desenvolver idéias relacionadas com o critério de ótimo foi Michell [Michell, 1904], que realizou suas pesquisas sobre otimização em treliças. Entretanto, somente

⁶ Os conceitos de primal / dual serão explicados na seção 4.4.3 (Programação Linear).

no final da década de 60 com uso de computadores, pesquisadores como Berke, Venkayya et al. e Berke e Khot [Berke, 1970; Venkayya et. al, 1973; Berke et. al, 1974], entre outros, começaram a aplicar o método mais eficientemente. Enquanto os métodos que utilizam a programação matemática otimizam diretamente a função objetivo, os métodos baseados no critério de ótimo tentam satisfazer um conjunto de critérios relacionados com o comportamento da estrutura.

O critério de saturação de tensões (*fully stressed design*), o critério dos modos simultâneos de falha (*simultaneous failure mode design*) e as condições de ótimo de Kuhn-Tucker são alguns exemplos de aplicação do método.

Outros exemplos mais recentes são as técnicas COC (*Continuum-based Optimality Criteria*) [Rozvany e Zhou, 1991a, 1991b], que posteriormente foi reformulada sob a denominação de DCOC (*Discretized Continuum-based Optimality Criteria*) [Zhou e Rozvany, 1992, 1993], utilizando então uma formulação de elementos finitos. Dessa forma, problemas com um grande número de variáveis de projeto puderam ser resolvidos. Posteriormente, os próprios autores reformularam o algoritmo [Zhou e Rozvany, 1995], que apresentava problemas de convergência em alguns casos. Nessa nova formulação, em vez das restrições de deslocamento serem expressas em função do PTV, eram agora representadas em termos de uma aproximação recíproca.

Em outro trabalho, Canfield, Grandhi e Venkayya [Canfield et al., 1988] fazem uma comparação entre os métodos de otimização em problemas com muitas restrições (direcionado para estruturas aeroespaciais), usando a programação matemática e critérios de ótimo.

4.4.2. PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Apesar de Hassani e Hinton [Hassani e Hinton, 1998] afirmarem que a programação matemática não se aplica a problemas de larga escala (com muitas variáveis de projeto), trabalhos de inúmeros pesquisadores citados anteriormente têm mostrado o oposto: a programação matemática é uma classe de métodos bem mais geral que o critério de ótimo, que necessita ser deduzido para cada novo problema a ser analisado.

A programação matemática é uma classe especial de método numérico iterativo. A partir de uma estimativa inicial usada como ponto de partida, uma busca sistemática iterativa vai sendo feita no domínio de projeto até que um projeto próximo do ótimo seja gerado. Esse “projeto intermediário” (sub-ótimo) necessariamente deve satisfazer as condições de equilíbrio e as restrições (no caso da programação linear, utilizada nesse trabalho). A busca termina quando um

determinado critério é satisfeito, indicando que o atual projeto está suficientemente perto do ótimo.

De acordo com a literatura [Cheng, 1992, Rozvany, 1995], Schmit [Schmit, 1960] é apontado como primeiro pesquisador a formular e resolver um problema de otimização estrutural aplicando a programação matemática.

O problema que se deseja resolver é o mesmo indicado em (4.4). Dependendo dos tipos de funções que constituem as restrições e a função objetivo, a programação matemática recebe diferentes denominações, destacando-se:

- **Programação Linear (LP):** função objetivo e restrições lineares;
- **Programação Quadrática (QP):** função objetivo quadrática e restrições lineares;
- **Programação Não-Linear (NLP):** função objetivo e/ou as restrições não-lineares;
- **Programação Inteira (IP):** busca a solução ótima dentro de um conjunto de valores discretos. Os algoritmos de solução para este tipo de problema são de natureza combinatória, pois não é possível calcular derivadas neste tipo de problema. Este problema ainda pode ser classificado como Programação Linear Inteira, Programação Não-Linear Inteira, Programação Linear Mista-Inteira ou Programação Não-Linear Mista-Inteira, dependendo da natureza das funções e restrições bem como se também existem variáveis contínuas além das discretas. Os algoritmos mais usados são o *branch and bound*, *algoritmos genéticos* e *simulated annealing*. Atualmente, alguns autores vêm cada vez mais pesquisando otimização topológica utilizando programação inteira, ou mista inteira, buscando uma solução mais próxima da formulação original do problema, que será mostrada na equação (5.1), o problema 0-1. Autores como Stolpe e Svanberg [Stolpe e Svanberg, 2001], e Ohsaki e Katoh [Ohsaki e Katoh, 2001] publicaram trabalhos nessa área, minimizando o peso de treliças com restrições nas tensões. Beckers [Beckers, 1997] utilizou programação mista-inteira para resolver o problema da maximização da rigidez com restrições de volume e perímetro em estruturas contínuas.

É um resultado conhecido [Cheng, 1992; Haftka e Gürdal, 1992; Arora, 1989; Bendsøe, 1989] que se o funcional objetivo e o domínio admissível formado pelas restrições do problema

(4.4) forem convexos⁷ [Luenberger, 1969; Arora, 1989], ele apresentará um mínimo, que será o mínimo global do funcional. Esse resultado também é aplicável se a função objetivo e as restrições forem apenas funções lineares, o que garante a convergência de cada subproblema gerado pela linearização da função objetivo e das restrições (seção 4.4.4), desde que não ocorra a degeneração do problema.

4.4.3. PROGRAMAÇÃO LINEAR (LP)

A programação linear é uma classe de métodos baseados na programação matemática, em que a função objetivo e as restrições são lineares. Muitos problemas práticos podem ser diretamente aplicados a essa técnica, que é relativamente simples e robusta. Quando as funções não são lineares, ainda assim é possível utilizar esse método, expandindo as funções em termos de uma Série de Taylor truncada nos termos lineares, resolvendo então sucessivos problemas lineares até a convergência. Essa variação da programação linear, conhecida por *Programação Linear Seqüencial (SLP)* foi o método de solução escolhido nesse trabalho, principalmente devido a sua simplicidade de implementação.

A forma geral de um problema de minimização aplicando a programação linear é a seguinte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{encontrar} & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \text{tal que faça mínimo} & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{sujeito a:} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq 0
 \end{array} \tag{4.14}$$

onde n é o número de variáveis de projeto, \mathbf{c} é o vetor dos coeficientes de dimensão $n \times 1$, \mathbf{A} é uma matriz de dimensão $m \times n$, com m restrições, e \mathbf{b} é um vetor de dimensão $m \times 1$. A matriz \mathbf{A} pode ser composta por restrições de igualdade e desigualdade. As restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade através da introdução de *variáveis de folga*, por exemplo: seja a seguinte restrição de desigualdade:

⁷ Uma função convexa é definida da seguinte forma: $f(\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1) \leq \alpha f(x_2) + (1-\alpha)f(x_1)$, $0 < \alpha < 1$

onde x_1 e x_2 são pontos do domínio. Geometricamente, essa definição significa que qualquer reta que une dois pontos de uma função deve ter todos os seus pontos acima do gráfico formado pela função.

$$kx \leq b \quad (4.15)$$

onde k e b são escalares. Adicionando uma variável de folga, s , obtém-se a seguinte equação:

$$kx + s = b \quad (4.16)$$

onde todas as variáveis são positivas.

A solução da programação linear pode ser enunciada através do seguinte teorema: “O ótimo de uma função linear em um poliedro convexo⁸ $P \subseteq \mathfrak{R}^n$ encontra-se pelo menos em um vértice. Se encontrar-se em mais de um vértice, então ele é obtido em todos os pontos pertencentes a combinação convexa destes vértices” [Dantzig, 1963].

Esse teorema tem como consequência o fato de que a solução do problema de otimização necessariamente estará em um dos vértices formados pela interseção entre duas ou mais restrições, e a busca por soluções melhores se dará apenas sobre as restrições⁹.

O primeiro e mais simples algoritmo LP surgiu em 1947, conhecido por SIMPLEX, que basicamente procura reduzir continuamente o valor da função objetivo, percorrendo os conjuntos de soluções viáveis até que o mínimo seja atingido.

Expandindo os coeficientes de (4.14), o problema de otimização utilizando LP na forma padrão pode ser reescrito da seguinte forma:

$$P \left\{ \begin{array}{ll} \min & f_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (n \text{ variáveis}) \\ \text{sujeito a:} & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (m \text{ restrições}) \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.17)$$

O problema posto dessa forma é chamado de *problema primal* da minimização do funcional f_p . Segundo Dantzig [Dantzig, 1963], o problema (4.17) é equivalente a um problema

⁸ Um poliedro convexo é a região no espaço \mathfrak{R}^n formada pela interseção das m restrições lineares, que devem formar um semi-espaço vetorial fechado.

⁹ Existe uma classe de métodos dentro da programação linear em que uma solução melhor não é só procurada nos vértices do poliedro convexo, mas sim no interior do domínio formado por esse espaço. Essa classe de métodos é conhecida por *Métodos de Ponto Interior*, e o primeiro algoritmo foi desenvolvido por Karmarkar [Karmarkar, 1984].

de maximização de outro funcional linear definido sobre outro conjunto de restrições. Esse problema, chamado de *problema dual*, é definido da seguinte forma:

$$D \left\{ \begin{array}{ll} \text{máx} & f_d = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \dots + b_m\lambda_m \quad (m \text{ variáveis}) \\ \text{sujeito a:} & \sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i = c_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (n \text{ restrições}) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

onde λ_i são os Multiplicadores de Lagrange. Maiores detalhes sobre a dualidade do problema da programação linear podem ser encontrados, por exemplo, no artigo de Beckers e Fleury [Beckers e Fleury, 1997], no qual mostram o problema aplicado à treliças e na tese de Beckers [Beckers, 1997], que aplica a dualidade para otimizar estruturas contínuas. A teoria matemática envolvida nesse problema encontra-se, por exemplo, no livro “Optimization by Vector Space Methods” [Luenberger, 1969].

Uma constatação que pode ser percebida é que a escolha entre as formulações primal ou dual depende do número de variáveis de projeto e de restrições. De acordo com a literatura [Haftka e Gürdal, 1992, Rozvany, 1995], o esforço computacional para resolver um problema LP aumenta com o aumento do número de restrições. Este fato foi verificado na prática, através dos dois tipos de restrições utilizadas nesse trabalho: flexibilidade e tensão. Considerando apenas um caso de carregamento nas estruturas, nos problemas que envolvem flexibilidade, não importa quanto forem as variáveis de projeto, existe apenas uma restrição de desigualdade (consideradas restrições globais, aplicadas sobre toda a estrutura). Se a mesma estrutura for analisada aplicando restrição de tensão (que é uma restrição local, aplicada em cada elemento, individualmente), existirá um número idêntico de restrições e variáveis de projeto. Foi constatado, então, que os algoritmos LP utilizados nesse trabalho levam muito mais tempo para resolver o problema da tensão que o problema da flexibilidade.

Neste trabalho foram utilizados dois algoritmos para resolver problemas LP: o programa **LINPROG**, pertencente ao pacote de otimização do MATLAB e o algoritmo **DSPLP**, programa desenvolvido em FORTRAN pertencente à biblioteca matemática SLATEC. Ambos os programas se baseiam em um algoritmo conhecido como *primal-dual*. Estes algoritmos começam com uma solução viável no espaço dual, que é sucessivamente melhorada otimizando o problema primal associado [Haftka e Gürdal, 1992]. Os problemas exemplo foram analisados em dois computadores K6-II 500 MHz com 65 Mb de memória, nos ambientes WINDOWS 95 e LINUX. O programa DSPLP foi compilado na plataforma LINUX sendo mais eficiente (pelo fato de ser compilado). O mesmo não pôde ser feito no computador usando WINDOWS, pois

algumas das bibliotecas utilizadas pelo DSPLP não funcionaram corretamente no WINDOWS 95.

A figura 4.6 ilustra uma analogia do problema de otimização com restrições utilizando um algoritmo de programação linear: um homem cego caminha por um terreno acidentado, procurando o maior de todos os buracos (num problema de minimização). Além de só poder caminhar próximo às cercas (restrições), ele não percebe as formas do terreno (2^{a} derivada), apenas se está subindo ou descendo (1^{a} derivada).



Figura 4.6: Representação de um problema de otimização com restrições sendo resolvido por programação linear.

4.4.4. PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL (SLP)

Conforme visto até aqui, o uso de algoritmos LP têm a grande vantagem de não necessitar o cálculo de derivadas de ordem mais elevada para alcançar a solução ótima. Além disso, mesmo que as funções envolvidas no problema sejam não lineares, elas podem ser linearizadas pela aplicação de *Séries de Taylor*: “qualquer função contínua pode ser aproximada por polinômios na vizinhança de um dado ponto em termos de suas derivadas utilizando-se a

expansão por Séries de Taylor” [Arora, 1989]. Dessa forma, uma função $f(\mathbf{x}) \in \Re$ e $\mathbf{x} \in \Re^n$ é expandida por séries de Taylor na vizinhança de \mathbf{x}^* da seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + R \quad (4.19)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, R é o resíduo, de magnitude inferior aos demais termos, ∇f e \mathbf{H} são respectivamente o vetor gradiente e a matriz Hessiana.

O algoritmo utilizado nesse trabalho resolve apenas problemas lineares. Dessa forma, a Série de Taylor é truncada após os termos lineares. Assim, a informação proveniente da matriz Hessiana não é utilizada. Com isso, o problema (4.14) é redefinido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}^*} \\ \text{sujeito a:} \quad & g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}^*} \leq 0 \\ & h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}^*} = 0 \\ & \mathbf{a}_i^l \leq x_i - x_i^* \leq \mathbf{a}_i^u \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde n é o número de variáveis de projeto, nesse caso igual ao número de elementos da malha. O último conjunto de inequações é chamado de *limites móveis*. Eles são artificialmente adicionados ao problema original pelo fato de a aproximação de 1ª ordem por séries de Taylor só ser válida na vizinhança do ponto \mathbf{x}^* .

O método SLP é um algoritmo iterativo, que resolve o problema (4.20) da seguinte forma: a partir de uma estimativa inicial para as variáveis de projeto, são calculadas a resposta estrutural (deslocamentos, deformações e tensões) e a sensibilidade do sistema¹⁰. A seguir, são estabelecidos os valores dos limites móveis, utilizando-se algum critério matemático [Wujek e Renaud, 1998; Lamberti e Pappalettere, 2000; Duysinx, Bruyneel, Fleury, 2000] ou mesmo heurístico. Após, as restrições e a função objetivo são linearizadas e aplicadas em algum

¹⁰ A análise de sensibilidade informa como a função objetivo e as restrições variam com uma variação nas variáveis de projeto. Essa é uma etapa muito importante no processo de solução, pois informa a direção de busca no espaço das soluções.

algoritmo LP. Com isso, um novo conjunto de valores é gerado, verificando se nenhuma restrição é violada. Nesse caso, ou se a convergência não foi atingida, o novo conjunto de valores é reintroduzido para um novo cálculo da resposta do sistema, e todo o processo se repete, até a convergência. Se ocorrer uma mudança de sinal na variação de alguma das variáveis de projeto, o limite móvel correspondente é reduzido, diminuindo assim o intervalo de variação dessa variável.

Em problemas de grandes dimensões e não-linearidades moderadas, o método SLP é bastante competitivo em relação a outros métodos específicos para problemas não-lineares. Além disso, se a solução se encontrar em um dos vértices do poliedro convexo, a convergência pode ser bastante rápida. Mesmo se o problema original for não-convexo, a aproximação linear é sempre convexa, garantindo a existência de um mínimo (mesmo que seja um mínimo local).

Entretanto, o maior problema associado ao algoritmo SLP é justamente a escolha adequada dos limites móveis. Uma má escolha no valor dos limites móveis pode inviabilizar o problema. Se for estabelecido um valor muito pequeno, o processo de convergência pode tornar-se excessivamente lento, podendo inclusive causar uma parada prematura no processo de solução. Por outro lado, se o valor selecionado for muito elevado, o algoritmo pode não encontrar nenhuma solução. Esse possível problema decorre da natureza dos algoritmos de programação linear, que procuram soluções apenas nos vértices de um poliedro convexo gerado pelas restrições. Nesse caso, o algoritmo pode ficar “preso” em dois vértices, que representam dois conjuntos de soluções viáveis.

Como esse é um tópico crucial para a convergência do método, vários autores dedicaram pesquisas exclusivas sobre o assunto.

Os limites móveis são geralmente expressos em função de uma porcentagem aplicada sobre o valor atual das variáveis de projeto, gerando limites superiores e inferiores para as variáveis em cada iteração, a fim de garantir que os novos valores fiquem na vizinhança do ponto \mathbf{x}^* , pelas razões mencionadas anteriormente. Expressões gerais para atualização do valor das variáveis de projeto utilizando limites móveis são mostradas a seguir:

$$\begin{aligned} x_i^U &= x_i + A|x_i| && \rightarrow && \text{Define o limite superior} \\ x_i^L &= x_i - A|x_i| && \rightarrow && \text{Define o limite inferior} \end{aligned} \tag{4.21}$$

onde A é um valor percentual. A aproximação mais simples é manter um valor constante para A durante todo o processo. Entretanto, essa não é uma boa estratégia, pois pode impossibilitar a convergência perto do ótimo.

Uma boa revisão sobre outras estratégias de atualização dos limites móveis encontra-se no artigo de Wujek e Renaud [Wujek e Renaud, 1998], no qual também é proposto um método de atualização dos limites móveis baseado nos gradientes das funções envolvidas. Em outro trabalho, Lamberti e Pappalettere, [Lamberti e Pappalettere, 2000] comparam algumas estratégias de aproximação para limites móveis baseadas em gradientes, aplicando ao problema de minimização do peso de treliças.

No entanto, muitos autores preferem atualizar os limites móveis através de métodos heurísticos [Haftka e Gürdal, 1992, Fonseca, 1997, Cardoso, 2000]. Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1992], por exemplo, propõem uma redução dos limites de 10 à 50% do seu valor inicial até o final do processo. É proposto inclusive um valor inicial para os limites, variando entre 10 e 30%. Neste trabalho é utilizado um método heurístico, semelhante ao utilizado por Fonseca [Fonseca, 1997], que será explicado com mais detalhes nos capítulos seguintes. Nesse trabalho é proposta uma atualização baseada na história das iterações, aumentando ou reduzindo o valor dos limites dependendo do comportamento das variáveis de projeto.

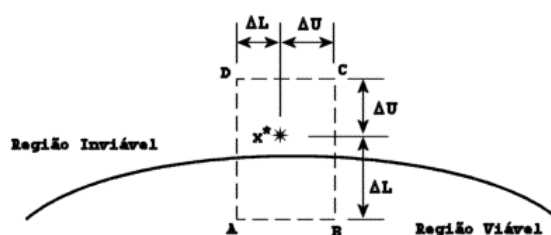


Figura 4.7: Representação do efeito dos limites móveis impostos sobre o ponto x^* : o novo ponto se encontrará dentro do retângulo ABCD.

Um outro problema associado ao SLP pode ocorrer quando o projeto inicial encontra-se numa região inviável do espaço (figura 4.7). É possível que o ponto inicial se encontre, por exemplo, em um vale da função (ponto de mínimo local, figura 4.4), que esteja dentro da região inviável. Nesse caso, se os limites forem muito pequenos, será provável que nenhuma solução seja alcançada, pois o algoritmo ficara “preso” nesse ponto. Entretanto, esse não chega a ser um problema muito grave, pois na maior parte dos casos, o próprio algoritmo irá se assegurar de respeitar as restrições, pois dificilmente se inicia o processo com limites móveis muito pequenos.

4.4.5. OUTROS ALGORITMOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Nas seções anteriores foram mostradas as principais vantagens e desvantagens do algoritmo de programação matemática utilizado nesse trabalho para resolver o problema de otimização proposto. A programação linear seqüencial é um algoritmo bastante robusto e confiável, possibilitando a solução de um grande número de problemas práticos.

Apesar de ser possível resolver quase todo tipo de problema de otimização utilizando o SLP, pode-se pensar em algoritmos mais adequados para resolver principalmente problemas com muitas não-linearidades nas restrições e na função objetivo.

O problema da minimização do volume com restrições sobre as tensões é um bom exemplo dessa situação: apesar de ter resolvido corretamente o problema proposto, existem outros algoritmos que o resolveriam de maneira mais eficiente. Optou-se nesse trabalho pela utilização do SLP, pois o mesmo já vinha sendo utilizado em outros trabalhos desenvolvidos pelo laboratório no qual o presente estudo foi realizado.

A fim de se ter alguma relação com o SLP, serão abordados nessa seção apenas métodos que não utilizam nenhum tipo de aproximação para a matriz Hessiana.

A) EXPANSÃO POR VARIÁVEIS RECÍPROCAS

Schmidt e Farshi [Schmidt e Farshi, 1980] mostraram que uma modificação das variáveis de projeto na forma $y_i = 1/x_i$ pode reduzir a não-linearidade da resposta em problemas de otimização dimensional. Assim, as funções são expandidas da seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^n -(x_i^*)^2 \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^*} \right) \quad (4.22)$$

Essa aproximação é especialmente eficiente quando a 1ª derivada da função $f(\mathbf{x})$ for negativa (problemas com restrições de flexibilidade, por exemplo). Se as derivadas possuírem sinais tanto positivos quanto negativos, o método perde sua eficiência.

B) LINEARIZAÇÃO CONVEXA (CONLIN)

Fleury e Braibant [Fleury e Braibant, 1986] propuseram um método que combina a aproximação linear com a expansão por variáveis recíprocas, expandindo a função da seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \sum_{+} \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_i^*) - \sum_{-} (x_i^*)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^*} \right) \quad (4.23)$$

onde \sum_{+} é a soma sobre todos os termos que possuam derivadas positivas e \sum_{-} é a soma sobre todos os termos cuja derivada seja negativa.

Derivando a expressão (4.23), conclui-se que a derivada segunda é sempre positiva, conduzindo sempre, dessa forma, a um problema convexo. A principal desvantagem do método está no fato de a curvatura da função aproximadora ser sempre a mesma, podendo não se ajustar corretamente a qualquer função.

C) MÉTODO DAS ASSÍNTOTAS MÓVEIS (MMA)

O MMA, proposto por Svanberg [Svanberg, 1987], é basicamente uma extensão do método CONLIN. A curvatura da aproximação pode agora ser ajustada, aproximando melhor a função original que define o problema:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^* + \sum_{i=1}^n \frac{p_{ij}}{U_i - x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{q_{ij}}{x_i - L_i} \quad (4.24)$$

onde \mathbf{r}^* reúne todos os termos de ordem zero que ajustam o valor da restrição em \mathbf{x}^* , U_i e L_i são as assíntotas verticais e

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \max \left\{ 0, (U_i - x_i^*)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \\ q_{ij} &= \max \left\{ 0, -(x_i^* - L_i)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

As retas assíntotas têm o mesmo papel dos limites móveis na aproximação linear.

Este método não necessita que as funções sejam linearizadas, porém, encontrar uma curvatura que se ajuste bem às funções é uma limitação do algoritmo.

D) MÉTODO DAS ASSÍNTOTAS MÓVEIS GLOBALMENTE CONVERGENTES (GCMMA)

Esse algoritmo é uma variação do MMA, tendo sido igualmente proposto por Svanberg [Svanberg, 1995].

Ao contrário do MMA, que aproxima a função usando uma assíntota de cada vez, o GCMMA utiliza simultaneamente duas assíntotas verticais, aproximando a função da seguinte forma:

$$f(x) = r^* + \sum_{i=1}^n \frac{p_{ij}^k}{U_i - x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{q_{ij}^k}{x_i - L_i} \quad (4.26)$$

onde

$$\begin{aligned} p_{ij}^k &= (U_i^k - x_i^k)^2 \left(\max \left\{ 0, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + \frac{\rho^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \\ q_{ij}^k &= (x_i^k - L_i^k)^2 \left(\max \left\{ 0, -\frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + \frac{\rho^k}{2} (U_i^k - L_i^k) \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que ρ^k é um parâmetro estritamente positivo que garante a convexidade da aproximação.

Apesar de ser mais lento, o GCMMA é mais robusto que o seu antecessor, principalmente pelo fato de ser menos sensível à atualização das assíntotas.

Um inconveniente do GCMMA está no fato de que o valor correto da função objetivo no ponto ótimo pode estar defasado (*biased approach*). Analisando as equações (4.26) e (4.27) observa-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^*) \quad \text{apenas se} \quad U_i^k \rightarrow L_i^k \quad (4.28)$$

5. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Equation Chapter (Next) Section 1

5.1. MODELOS MATERIAIS E OUTROS CONCEITOS

O principal objetivo da otimização topológica consiste em encontrar a melhor distribuição de material dentro de um domínio de projeto fixo. A distribuição do material é modificada levando em consideração alterações em algum comportamento mecânico da estrutura, tal como flexibilidade, frequências naturais ou tensão, entre outros. Esse conceito está representado na figura 5.1:

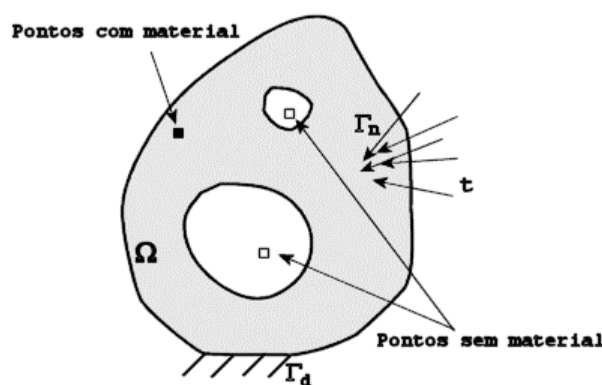


Figura 5.1: Representação do problema de otimização topológica o qual busca a melhor distribuição de material no domínio Ω .

De acordo com Bendsøe [Bendsøe, 1995], essa distribuição ótima de material consiste em se verificar quais pontos do domínio Ω conterão material isotrópico e quais pontos estarão vazios (problema binário, do tipo 0-1). Assim, reformulando o conceito de otimização topológica citado anteriormente, o objetivo é encontrar o subconjunto $\{\Omega^m \mid \Omega^m \subseteq \Omega\}$ dos pontos que contém material ou ainda, encontrar o melhor tensor constitutivo E_{ijkl} , que é variável no domínio. A parametrização do material que constitui o domínio do problema da figura 5.1, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 E_{ijkl} &\in L^\infty \\
 E_{ijkl} &= 1_{\Omega^m} E_{ijkl}^0 \quad \text{onde} \quad 1_{\Omega^m} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases} \\
 \int_{\Omega^m} d\Omega &= \text{vol}(\Omega^m) \leq V = \text{vol}(\Omega)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde a última integral calcula a quantidade de material disponível, considerando um domínio inicial fixo, E_{ijkl}^0 é o tensor constitutivo linear de quarta ordem, que define o material isotrópico de base e L^∞ é o espaço das funções integráveis limitadas segundo Lebesgue, descartando as funções de medida zero.

Resolver esse problema sob a ótica da otimização seria uma tarefa bastante complicada, visto que o problema, por ser de natureza discreta, é um problema que possui muitas variáveis de projeto. Alguns autores trabalharam diretamente com o problema da aproximação discreta, tais como Anagnostou, Rønquist e Patera [Anagnostou et al., 1992] e Beckers [Beckers, 1997].

Entretanto, a utilização do domínio contínuo conduz a um problema mal posto, para o qual não existe solução. De acordo com Bendsøe e Kikuchi, [Bendsøe e Kikuchi, 1988] e Rozvany [Rozvany et al., 1995], o problema de encontrar uma função que descreve a ótima distribuição de material utilizando as equações da elasticidade não é fechado nem limitado, ou seja, busca-se a solução em um determinado espaço (nesse caso, o espaço das funções contínuas, que possui dimensão infinita), no qual não necessariamente estará a solução. O problema pode convergir para uma solução fora desse espaço, o espaço das funções contínuas por partes. Basta lembrar que, nesse caso, o processo de solução utiliza séries convergentes de funções contínuas, e funções contínuas podem convergir para funções contínuas por partes. No caso de funções definidas como séries de senos ou cossenos, por exemplo, esse fenômeno costuma ocorrer (figura 5.2).

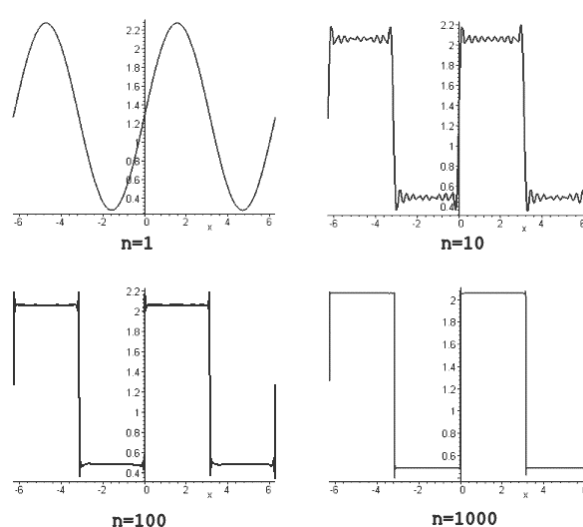


Figura 5.2: Gráfico da função $y(x) = \frac{4}{\pi} + \sum_{i=1}^n \frac{\sin(2i-1)x}{(2i-1)}$ para alguns valores de n .

Quando se discretiza a estrutura através de um modelo de elementos finitos, por exemplo, o problema do fechamento do espaço é resolvido. Naturalmente, um modelo discreto tem dimensão finita, satisfazendo, dessa forma, as condições do Teorema de Weierstrass. Entretanto, simplesmente discretizar a estrutura não resolve totalmente o problema, pois um novo inconveniente aparece: o resultado final torna-se dependente da malha de elementos finitos. Assim, cada nova discretização gera um novo sub-problema de otimização, os quais possuirão soluções finais diferentes.

Para garantir a existência de uma solução é necessário introduzir o conceito de materiais compostos construídos a partir de materiais de base, (geralmente isotrópicos ou ortotrópicos), representados pelo tensor E_{ijkl}^0 . A variável de projeto é a densidade contínua do material de base que forma esses compostos. Esse tipo de parametrização transforma o problema 0-1 em um problema de natureza contínua, cuja existência de solução é garantida, além de o tornar mais tratável computacionalmente [Bendsøe, 1995; Rozvany et al., 1995]. Esse método utiliza resultados da Teoria das Misturas e da Teoria da Homogeneização para calcular a rigidez efetiva do material composto formado pela combinação dos diferentes constituintes. Por esse motivo essa aproximação é chamada de *Método da Homogeneização*¹¹.

A mistura de dois materiais isotrópicos, por exemplo, pode gerar materiais compostos com uma vasta gama de propriedades anisotrópicas (fechamento-G). O projeto ótimo contém áreas com compostos anisotrópicos. Esse modelo tenta imitar um comportamento comum na natureza, onde estruturas auto-otimizantes, como ossos, são normalmente anisotrópicas.

Alguns autores vêem o método da homogeneização como uma extensão natural do trabalho pioneiro de Reiss [Reiss, 1976] e de outros como Cheng [Cheng, 1981] e Cheng e Olhoff [Cheng e Olhoff, 1981 e 1982]. Esses pesquisadores iniciaram pesquisas relativas à maximização da rigidez de placas com restrições no volume, encontrando uma relação cúbica entre a rigidez e a espessura. Concluíram que, a medida que a discretização do domínio é refinada, a placa começa a ter um maior número de elementos com espessura incrementada (esse efeito foi interpretado como sendo reforços na estrutura). Cheng [Cheng, 1981] também concluiu que a distribuição ótima das espessuras em uma placa corresponde a uma rigidez ortotrópica, que é obtida devido à consideração da microestrutura formada pelo material isotrópico de base, e não pela consideração de um material anisotrópico.

¹¹ Um outro método relacionado com microestruturas é conhecido por *Ranked Layered Material* (microestruturas ótimas de rank-1, rank-2, até rank-n), discutido por Allaire e Kohn [Allaire e Kohn, 1993].

Em um artigo de 1988, Bendsøe e Kikuchi [Bendsøe e Kikuchi, 1988] propuseram o método da homogeneização para descrever as propriedades efetivas de um material composto formado a partir de um material isotrópico de base. Essa técnica fornece um método de parametrização consistente para resolver o problema da melhor distribuição de material em um domínio relaxado.

A homogeneização permite uma descrição contínua de meios não contínuos. As propriedades físicas dos materiais, como peso específico e módulo de elasticidade são descontínuos e oscilam muito rapidamente entre os valores associados a cada componente do material composto.

A solução proposta consiste em se criarem células de material que possuem comportamento constante de célula para célula. As microestruturas são formadas pela mistura de materiais homogêneos, criando então um meio não homogêneo. Assume-se que o material é formado pelo agrupamento periódico dessas células unitárias, de modo que as propriedades efetivas do meio homogeneizado sejam parametrizadas apenas por características geométricas dessas microestruturas artificiais [Cardoso, 2000].

Nessa aproximação existem dois tipos de variáveis: a densidade de material e os parâmetros que descrevem a geometria da célula unitária. Dessa forma, os tensores constitutivos são parametrizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 E_{ijkl}(x) &= \tilde{E}_{ijkl}(\mu(x), \gamma(x), \dots, \theta(x)) \\
 \rho(x) &= \rho(\mu(x), \gamma(x), \dots) \\
 \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V \\
 0 &\leq \rho(x) \leq 1 \\
 x &\in \Omega
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde μ, γ, \dots e $\theta \in L^{\infty}$ são respectivamente os parâmetros geométricos e a orientação da célula unitária, $\tilde{E}_{ijkl}(x)$ é o tensor constitutivo equivalente homogeneizado e $\rho(x)$ é a densidade de material na célula. A introdução da função densidade resolve o problema binário, sem solução. A natureza 0-1 do problema é então evitada com a introdução dessa densidade artificial, com $\rho = 0$ correspondendo a um ponto sem material, e $\rho = 1$ equivale a um ponto com material. Qualquer valor de densidade entre 0 e 1 corresponde a um material composto poroso e periódico. A figura 5.3 ilustra o conceito de microestrutura:

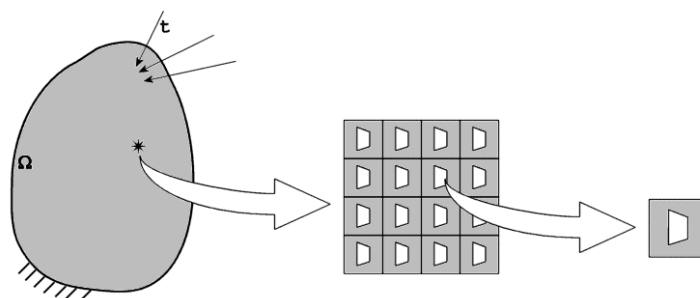


Figura 5.3: Representação de uma estrutura constituída de um material composto formado por uma microestrutura periódica.

Conforme estudado por Bendsøe [Bendsøe, 1995], qualquer material constituído de uma microestrutura formada pela inclusão de microfuros, pontos cuja densidade de material seja diferente de 0 ou 1 contribuirão para a formação de uma estrutura macroscópica com rigidez menor do que a que seria esperada.

O método da homogeneização conduz a um problema de otimização muito caro computacionalmente, pois, dependendo da geometria da célula unitária, muitos parâmetros devem ser otimizados. Devido a isso, vários autores tem utilizado microestruturas artificiais nas quais a única variável de projeto é a densidade de material $\rho(x)$. O uso de microestruturas artificiais, além de garantir a existência da mistura entre os dois materiais isotrópicos de base, conduz naturalmente a projetos mais simples, principalmente se forem utilizadas em conjunto com alguma técnica de filtragem.

A aproximação mais utilizada parametriza o tensor constitutivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x &\in \Omega \\
 \rho(x) &\in L^\infty(\Omega) \\
 E_{ijkl}(x) &= \rho^n(x) E_{ijkl}^0 \\
 \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V \\
 0 &\leq \rho(x) \leq 1
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Essa aproximação é algumas vezes conhecida pela sigla **SIMP** (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*). A formulação mostrada em (5.3) foi proposta por Bendsøe [Bendsøe, 1989] e continua sendo usada extensivamente por autores como Rozvany, Zhou e Birker [Rozvany et al., 1992].

Entretanto, a idéia de se utilizar microestruturas artificiais é considerada como a extensão natural dos trabalhos de outros pesquisadores. Estudando o problema da maximização da rigidez de sistemas elásticos, Prager e Taylor [Prager e Taylor, 1968] desenvolveram um critério de ótimo relacionando a energia de deformação específica com a rigidez.

Em um importante trabalho, Rossow e Taylor [Rossow e Taylor, 1973] propuseram um problema de otimização de membranas em estado plano de tensões, minimizando a flexibilidade da estrutura. Essa membrana era discretizada usando o MEF. As variáveis de projeto eram as espessuras de cada elemento da malha, que são proporcionais à rigidez, segundo a equação:

$$E = hE^0 \quad (5.4)$$

onde h é a espessura. Considerando um limite inferior e um limite superior para a espessura, os autores obtiveram como solução uma estrutura com espessuras máximas, mínimas e “intermediárias”. Como pode ser visto, apesar de não considerar a existência de microestruturas artificiais, a equação (5.4) em muito se assemelha com a parametrização do tensor de rigidez mostrada em (5.3), com expoente $n=1$.

O método SIMP basicamente propõe que a microestrutura é desconhecida¹² (daí a denominação artificial), mas sua rigidez é conhecida [Pereira, 2001]. O problema mostrado em (5.3) mostra claramente a proporcionalidade entre o tensor constitutivo homogeneizado (E_{ijkl}) e o tensor constitutivo isotrópico “poroso” do material de base (E_{ijkl}^0).

Essa formulação está intimamente relacionada com a Teoria da Homogeneização, visto que a expressão (5.3) é arbitrada com base no postulado de que, após a aplicação do método da homogeneização sobre uma célula com densidade de material ρ , o tensor constitutivo isotrópico homogeneizado (obtido pelas equações do método da homogeneização) será igual a E_{ijkl} .

A formulação mostrada em (5.3) tem sido a mais utilizada na literatura, inclusive em problemas que envolvem outros tipos de restrições diferentes da flexibilidade. Duysinx e

¹² Em um recente trabalho, Bendsøe e Sigmund [Bendsøe e Sigmund, 1999] obtiveram numericamente estruturas compostas e periódicas com as mesmas propriedades do SIMP, utilizando a homogeneização inversa. Nesse trabalho, porém, os autores não consideraram se a microestrutura obtida respeitaria os limites estipulados pela teoria das misturas.

Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998; Duysinx, 1999], por exemplo, utilizaram o SIMP em sua formulação para tensão equivalente.

Quando o expoente n é maior que 1, esta relação artificial possibilita a penalização das densidades intermediárias a fim de deixar a maior parte da estrutura apenas com elementos “cheios” ou “vazios” (com material e sem material), nos quais as propriedades de material estão bem definidas. Elementos com densidades intermediárias possuem uma rigidez pequena quando comparada com a rigidez do material poroso formado, consistindo dessa maneira em um problema do ponto de vista econômico.

Além disso, um outro problema decorre da natureza físico-química da mistura entre dois materiais isotrópicos: as densidades intermediárias que aparecem na solução do problema (5.3) apresentam um valor de rigidez artificial impossível de ser atingido, ou seja, os valores calculados representam na verdade um limite superior para a rigidez que poderia ser obtida para uma dada mistura entre dois materiais. A figura 5.4 ilustra o efeito da escolha do expoente n na relação entre os tensores constitutivos:

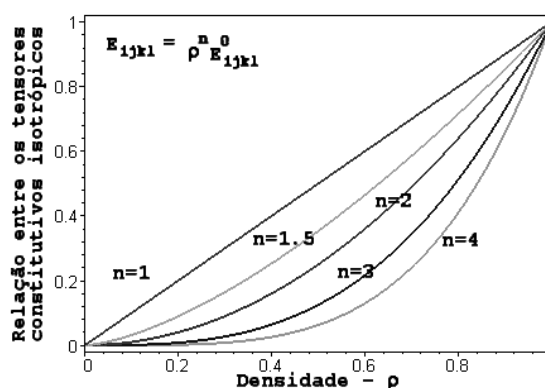


Figura 5.4: Algumas funções exponenciais utilizadas para aproximar a função densidade artificial.

O maior problema associado à formulação SIMP está no fato de ser não-convexa para qualquer expoente $n > 1$. Um método para contornar esse problema é sugerido por Kohn [citado por Rozvany, 1995], que sugere que o problema de otimização seja resolvido em duas etapas. Inicialmente encontra-se o ótimo usando uma aproximação linear para a densidade (ou seja, sem penalização), pelo fato de esse problema ser convexo. Essa solução gerada consiste na estimativa inicial para o novo problema gerado, agora penalizado. Dessa forma, essa segunda solução estará próxima da solução do problema modificado. Esse procedimento, semelhante ao *Método da Continuação* (que será explicado a seguir), foi implementado por Rozvany, Sigmund e Birker [Rozvany et al., 1993] em um recente trabalho, no qual foram gerados diversos exemplos validando o método.

Nesse trabalho foi usado o caso em que $n=1$. Dessa forma, o problema (5.3) se reduz ao bem conhecido problema da otimização da espessura de uma membrana, no qual a densidade de material passa a ter o mesmo significado físico da espessura (em problemas de elasticidade plana). O problema é parametrizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & x \in \Omega \\
 & \rho(x) \in L^\infty(\Omega) \\
 & E_{ijkl}(x) = \rho(x) E_{ijkl}^0 \\
 & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V \\
 & 0 < \rho(x) \leq 1
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Em problemas envolvendo flexibilidade e volume com apenas um caso de carregamento, a relação linear entre os tensores constitutivos garante a existência de uma única solução [Bendsøe, 1995; Rozvany et al., 1995], pois essa aproximação torna o espaço fechado e convexo¹³. Bendsøe [Bendsøe, 1995] inclusive fornece uma prova matemática da existência de solução para o problema da mínima flexibilidade com restrição do volume da estrutura, mas conclui dizendo que esse resultado pode ser estendido para outros tipos de problemas. A última desigualdade indica que os valores de densidade não podem ser identicamente nulos, pois causaria problemas de mau-condicionamento na matriz de rigidez.

Por outro lado, apesar da simplicidade da formulação e das claras vantagens no uso de microestruturas artificiais aproximadas linearmente, um grande inconveniente pode ser enumerado: a topologia final encontrada no problema (5.5) possui uma grande quantidade de regiões com densidades intermediárias, que, conforme comentado, são difíceis de construir na prática.

Entretanto, esse inconveniente é facilmente solucionado aplicando algum tipo de penalização à estrutura, seja na parametrização do material ou na função objetivo. Métodos de penalização visam retirar elementos com densidades intermediárias, formados de material composto.

Autores, como Allaire e Francfort, Allaire e Kohn, e Haber et al. [Allaire e Francfort, 1993; Allaire e Kohn; 1993; Haber et al., 1996] utilizam penalizações diretamente na função

¹³ Essa consideração, entretanto, não elimina o problema da dependência da malha de elementos finitos.

objetivo $f(\rho)$, substituindo-a por uma expressão na forma $f(\rho) + c \int_{\Omega} \rho(1-\rho) d\Omega$, onde c determina o grau de penalização.

Cardoso e Fonseca [Cardoso e Fonseca, 1999] e Cardoso [Cardoso, 2000] utilizam um método chamado *Método da Continuação*, no qual utilizam a formulação do problema (5.5), penalizando a função objetivo através de uma relação exponencial na forma:

$$f(\rho) = \int_{\Omega} \rho^p d\Omega \quad (5.6)$$

onde $p \leq 1$.

Partindo de uma função sem penalização ($p=1$), obtém-se um domínio inicial. A partir desse resultado, o valor do expoente vai sendo reduzido, gerando novas topologias com cada vez menos regiões com densidades intermediárias.

A penalização acima descrita foi utilizada neste trabalho, constituindo uma alternativa à penalização na rigidez do material (método SIMP). Entretanto, segundo Rozvany [Rozvany et al., 1995] é preciso ter certo cuidado na escolha de expoentes, pois o problema pode não ter mais solução.

Inicia-se o problema com $p=1$, cuja existência de solução é garantida. Após a convergência, o valor é reduzido para $\frac{1}{8}$, de modo a reduzir as regiões com densidades intermediárias. Se ainda houver muito material composto, a função objetivo é novamente alterada. Maiores detalhes desse método encontram-se na seção 6.1.

5.2. ALGUNS PROBLEMAS ASSOCIADOS À OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Muitos problemas relativos à otimização topológica de estruturas vêm sendo exhaustivamente discutidos por autores como Kirsch [Kirsch, 1989], que estudou estruturas discretas (treliças e pórticos) e Rozvany [Rozvany, 1995], que fez uma excelente revisão sobre vários aspectos pertinentes à otimização topológica.

Outros autores, destacando Cheng [Cheng, 1995] e Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997], mostraram muitos problemas que acontecem na otimização topológica de treliças, como o problema de negligenciar as condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações. Essa aproximação, segundo os autores, facilita a implementação computacional, pois torna o problema “menos” não-linear. Mas, por outro lado, pode gerar estruturas ótimas estaticamente indeterminadas ou mesmo inviáveis. Outro problema citado pelos autores discute a possibilidade de o ótimo encontrar-se em pontos singulares do domínio de projeto, que não podem ser

alcançados pelos algoritmos baseados nas condições de Karush-Khun-Tucker (KKT). Os autores concluem que esses problemas podem ocorrer em outros tipos de estruturas diferentes de treliças.

Essa seção baseia-se principalmente nos trabalhos de Bendsøe [Bendsøe, 1995], Sigmund e Petersson, [Sigmund & Peterson, 1998] e Rozvany [Rozvany, 1995], na qual serão brevemente discutidos os principais problemas, segundo a ótica dos autores, decorrentes da modificação do problema binário (5.1) na forma discretizada mostrada em (5.3) ou (5.5):

- Instabilidades de tabuleiro (*Checkerboard patterns*): regiões da malha que alternam elementos com material e sem material;
- Dependência da malha (*Mesh dependence*): diferentes discretizações produzem diferentes topologias finais;
- Mínimos locais (*Local minima*): soluções finais diferentes para uma mesma discretização;
- Ótimos singulares (*Singular topologies*): a solução se encontra em regiões degeneradas (ou de dimensão inferior) do domínio de projeto, inatingíveis pelos métodos tradicionais de otimização.

5.2.1. INSTABILIDADE DE TABULEIRO

A instabilidade de tabuleiro é um problema bastante comum na otimização topológica de estruturas contínuas. Até pouco tempo atrás, suas causas não eram muito conhecidas. O mesmo não podia ser dito das suas conseqüências, pois se sabia que a topologia final na forma de um tabuleiro aumentava a rigidez da estrutura. Os primeiros trabalhos pesquisando esse fenômeno acreditavam que o resultado obtido na figura 5.5 correspondia a algum tipo de microestrutura ótima. Entretanto, logo se descobriu que essa rigidez extra era artificial e que de forma nenhuma correspondia a algum tipo de microestrutura ótima.



Figura 5.5: Instabilidade de tabuleiro visualizada principalmente na região central da figura. Esta figura foi obtida no programa desenvolvido neste trabalho e corresponde a um problema de minimização de volume com restrição no trabalho das forças externas.

Provou-se que esse fenômeno é decorrente da discretização do modelo contínuo, e decorre principalmente devido a problemas numéricos na convergência do método dos elementos finitos [Díaz e Sigmund, 1995; Jog e Haber, 1996]. O grande mérito desses trabalhos foi conjecturar que tanto o método da homogeneização quanto o uso de microestruturas artificiais, tais como o SIMP estão sujeitos ao aparecimento da instabilidade de tabuleiro (ou instabilidade xadrez), fenômeno esse causado pelo mau-condicionamento das soluções das equações de equilíbrio ocasionadas pelo uso do método dos elementos finitos. Os autores mostraram também que o uso de elementos finitos de alta ordem (como os quadriláteros de 8 e 9 nós) podem prevenir esse fenômeno, devido ao enriquecimento do campo de deslocamentos (se o expoente utilizado na parametrização do tensor constitutivo não for muito elevado).

De acordo com Kikuchi, Oden e Song [Kikuchi et al., 1984], uma alternativa para contornar o “problema” de usar elementos de alta ordem é criar uma malha formada por “super-elementos”, constituídos de, por exemplo, 4 elementos bilineares isoparamétricos agrupados, todos com os mesmos valores de densidade. Essa estratégia é, de certa forma, um controle de gradiente nas densidades, pois grupos de elementos vizinhos não podem sofrer variações bruscas em suas densidades. Apesar desse “super-elemento” ser formado apenas por quadriláteros de baixa ordem, o super-elemento se comporta como se tivesse graus de liberdade extras, aumentando o custo computacional para solução do problema.

Elementos finitos como o Elemento de Taylor, que possui um campo de deslocamentos enriquecido não reduzem o problema. Entretanto, pelo fato de possuir uma interpolação polinomial de baixa ordem, esse elemento não oferece um grande aumento no tempo computacional. Dessa forma, aliado a uma estratégia de filtragem gaussiana, como a proposta por Fonseca [Fonseca, 1997] o problema da instabilidade de tabuleiro pode ser minimizado.

Existem diversos tipos de filtros utilizados para contornar esse problema, a maioria deles baseadas em técnicas de processamento de imagens digitais. Uma técnica proposta por Sigmund [Sigmund, 1994] consiste em aplicar uma modificação diretamente na análise de sensibilidade em cada iteração, fazendo com que a sensibilidade de cada elemento individualmente dependa de uma média ponderada de 8 elementos vizinhos. Os elementos vizinhos são facilmente identificados, pois Sigmund utilizou malhas regulares em suas discretizações.

Cardoso [Cardoso, 2000] propõe uma técnica de filtragem espacial, no qual os elementos vizinhos são obtidos por um raio de varredura (fixo ou variável) em torno de um elemento central. Se o centróide de um determinado elemento estiver dentro do círculo de raio ε (figura 5.6), esse elemento terá sua densidade considerada no cálculo da densidade do elemento central.

Com essa técnica, além de poder usar malhas genéricas, o resultado final fica menos dependente da discretização.

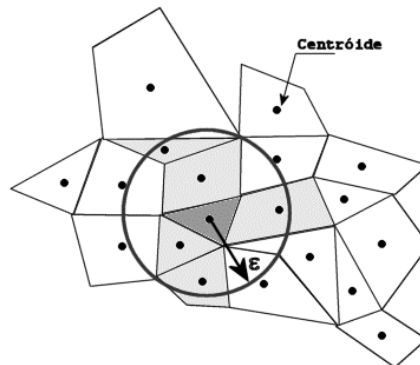


Figura 5.6: Abrangência do filtro espacial em uma malha irregular.

Conforme mencionado anteriormente, a técnica de filtragem utilizada nesse trabalho é semelhante à utilizada por Fonseca [Fonseca, 1997], que utiliza o *filtro gaussiano* (*Gaussian Blur*), aplicado diretamente nos limites superiores e inferiores das variáveis de projeto em cada iteração. Uma boa revisão sobre tratamento digital de imagens foi elaborada por Young, I. T., Gerbrands, J. J. e van Vliet, L. J. [Young et al., 1998].

Em cada iteração, os limites superiores e inferiores da densidade de cada elemento finito (calculadas usando os limites móveis) são modificados pela seguinte equação:

$$x_i = w_1 x_{i-1} + w_2 x_i + w_3 x_{i+1} \quad (5.7)$$

onde w_j são os pesos do filtro e x_k são os valores limite de densidade dos elementos nas direções X_1 e X_2 . A diferença em relação ao trabalho de Fonseca é que este considera 2 elementos vizinhos de cada lado, enquanto que no presente trabalho optou-se por utilizar apenas 1 elemento vizinho de cada lado. Ressalta-se aqui que “cada lado” refere-se aos elementos vizinhos tanto na direção X_1 quanto na direção X_2 . Neste trabalho foi escolhida uma filtragem do tipo **0,02-0,96-0,02**, que, conforme mencionado anteriormente, representa uma média ponderada entre 3 elementos adjacentes, considerando 96% da densidade do elemento central e 2% dos elementos vizinhos. Inicialmente aplica-se o filtro considerando os elementos na direção horizontal, considerando em seguida os elementos na direção vertical.

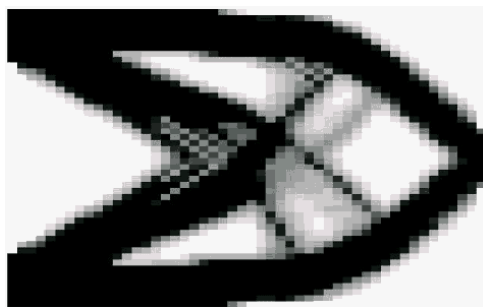


Figura 5.7: Filtro gaussiano aplicado para controlar a instabilidade de tabuleiro.

As principais vantagens dessa técnica de filtragem são:

- Reduz o aparecimento da instabilidade de tabuleiro, mesmo usando elementos de baixa ordem, como o elemento bilinear isoparamétrico;
- Simplifica a topologia final, facilitando sua interpretação;
- Reduz o problema da não-unicidade da solução, pois restringe a variação das densidades.

Algumas desvantagens que podem ser citadas são:

- Aparecem grandes áreas com material composto;
- Necessidade de malhas refinadas para garantir a convergência;
- A filtragem faz com que o processo de otimização leve mais iterações para convergir, as vezes até duas vezes mais iterações do que sem o filtro [Fonseca, 1997].

5.2.2. DEPENDÊNCIA DA MALHA

O problema da dependência da malha, que ocasiona diferentes soluções finais para diferentes discretizações surge justamente do fato de se discretizar o domínio. O problema original contínuo (equação (5.1)) não possui solução. Quando o domínio contínuo é discretizado, o espaço das soluções passa a ter dimensão finita. Assim, a cada nova discretização, uma nova solução mais refinada pode ser encontrada.

Intuitivamente espera-se que quanto maior o refino da malha de elementos finitos, a topologia ótima deveria ser uma estrutura que descreva com maior fidelidade as condições de contorno do problema. Entretanto, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, malhas mais refinadas resultam em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo resultado de uma malha mais grosseira (figura 5.8).

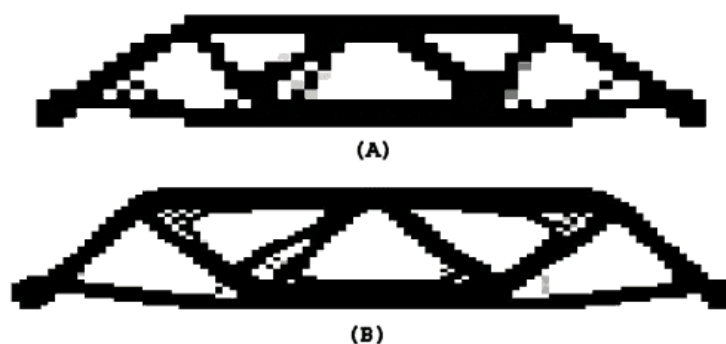


Figura 5.8: Dependência da malha no problema da minimização de volume com restrição de flexibilidade. (A) Malha com 600 elementos; (B) Malha com 3300 elementos.

De acordo com Sigmund e Petersson [Sigmund e Petersson, 1998], o problema da dependência da malha pode ser dividido em duas categorias:

- Obtenção de topologias finais cada vez mais complexas a medida que a malha de elementos finitos vai sendo refinada. Nesse caso, malhas mais refinadas produzem estruturas “melhores” (ou seja, com valores cada vez menor na função objetivo, se o problema for a minimização do volume) quando comparadas com estruturas geradas a partir de malhas menos refinadas;
- Obtenção de diversas soluções ótimas com mesmo valor da função objetivo. Este problema aparece devido a não-unicidade da solução do problema discretizado e ocorre, por exemplo, no projeto de uma estrutura uniaxial sob tensão em uma dada área A figura 5.9 ilustra esse problema. Tanto a estrutura (B) quanto a estrutura (C) funcionariam perfeitamente sob o dado caso de carregamento [Bendsøe, 1995, Sigmund e Petersson, 1998].

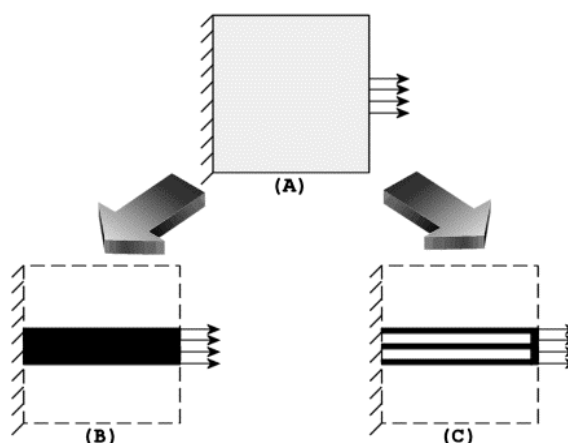


Figura 5.9: Exemplo de não unicidade da solução, no qual (A) é domínio inicial, (B) e (C) são duas soluções viáveis.

Apesar de não existirem maneiras de resolver diretamente o problema da não-existência da solução única, uma restrição na complexidade da topologia final pode minimizar a aparição desse fenômeno. Em relação à dependência do refino da malha, soluções comumente utilizadas são as seguintes:

- Restrição global do gradiente das densidades: essa técnica foi introduzida por Bendsøe [Bendsøe, 1995]. Consiste em uma modificação do problema (5.5), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \rho \in H^1 \\
 & E_{ijkl}(x) = \rho^n E_{ijkl}^0, \quad n > 1 \\
 & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V \\
 & 0 < \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \\
 & \|\rho\|_{H^1} = \left[\int_{\Omega} (\rho^2 + (\nabla \rho)^2) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \leq M
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde a última desigualdade corresponde a uma norma de energia definida em um Espaço de Sobolev H^1 , enquanto que o escalar M é um valor limite para essa norma.

Valores elevados para M tornam a restrição de energia inativa, tornando o problema (5.8) equivalente ao problema (5.5). Essa formulação também evita o problema da não-existência da solução.

- Restrição local do gradiente das densidades: esse método foi inicialmente proposto por Niordson [Niordson, 1983], que aplicou uma restrição na variação das espessuras de uma placa. Alguns anos mais tarde, Petersson e Sigmund [Petersson e Sigmund, 1998b] realizaram um trabalho no qual provaram a existência da solução e implementaram o método inicialmente proposto por Niordson. A restrição adicional nos gradientes das densidades tem a seguinte forma:

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right| \leq c \quad (i = 1, 2) \tag{5.9}$$

A equação (5.9) estabelece uma espécie de “caixa” no qual as densidades podem sofrer variação, funcionando como um filtro. Essa restrição não apenas elimina a

dependência da malha, mas também outros problemas numéricos, como a instabilidade de tabuleiro. O grande inconveniente é que o número de restrições dobra, aumentando incrivelmente o custo computacional, principalmente se for utilizada uma programação linear.

- Filtragem: a técnica de filtragem proposta por Sigmund [Sigmund, 1997] é uma extensão de um método proposto pelo mesmo autor [Sigmund, 1994], que promovia apenas o controle da instabilidade xadrez. Esse filtro modifica diretamente o cálculo das sensibilidades através de uma média ponderada sobre elementos vizinhos, baseada em critérios heurísticos. Nesse método, o cálculo das derivadas é modificado da seguinte forma:

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial \rho_k} = (\rho_k)^{-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^{ne} \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^{ne} \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (5.10)$$

onde o operador \widehat{H}_i é um fator de peso (operador de convolução¹⁴) que obedece à seguinte expressão:

$$\widehat{H}_i = r_{\min} - \text{dist}(k, i), \quad \{i \in ne \mid \text{dist}(k, i) \leq r_{\min}\} \\ k = 1, 2, \dots, ne \quad (5.11)$$

onde o operador $\text{dist}(k, i)$ define a distância entre os centros dos elementos k e i .

5.2.3. MÍNIMOS LOCAIS

As funções e funcionais envolvidos no problema da otimização topológica geralmente são não-convexas, tanto devido à não-linearidades na função objetivo quanto nas restrições, podendo dessa forma possuir inúmeros mínimos locais.

¹⁴ Convolução é uma operação matemática que, a partir de uma combinação entre dois sinais, um terceiro é produzido. Num espaço bidimensional contínuo, o operador convolução é definido da seguinte forma:

$$c(x_1, x_2) = a(x_1, x_2) \otimes b(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(\chi, \zeta) b(x_1 - \chi, x_2 - \zeta) d\chi d\zeta .$$

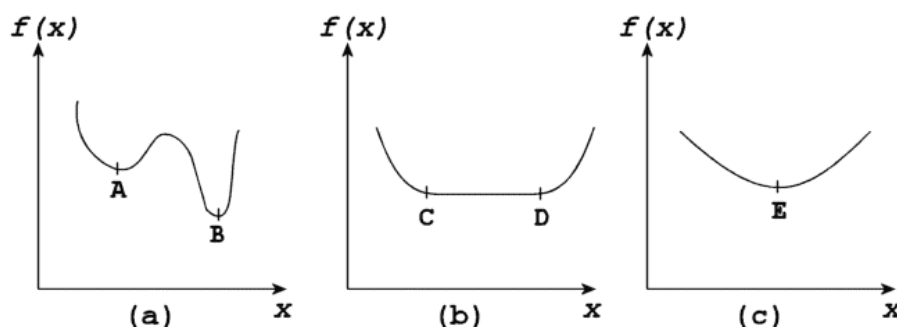


Figura 5.10: Representação dos tipos de solução em problemas de otimização topológica. (a) Função não-convexa, onde A e B representam duas diferentes topologias; (b) Função não estritamente convexa: existe um valor mínimo (C e D), que correspondem a vários conjuntos distintos de valores para a variável de projeto x ; (c) Função convexa com unicidade na solução (ponto E).

As técnicas descritas anteriormente para controlar o aparecimento de instabilidades xadrez e dependência da malha tendem a tornar o problema convexo, fazendo que, dessa forma, não alterados os parâmetros, a topologia final possa ser reproduzida [Sigmund e Petersson, 1998]. Da mesma forma, quando se utiliza a programação linear seqüencial, um problema não convexo é aproximado por séries convergentes de problemas convexos, garantindo a unicidade da solução, também se determinados parâmetros forem mantidos.

É justamente esse o entrave: o problema é extremamente sensível a pequenas modificações em parâmetros como número de elementos, limites móveis e geometria inicial, por exemplo. A experiência mostra que a modificação do valor dos limites móveis na programação linear seqüencial pode conduzir a soluções completamente diferentes, ou mesmo causar a não convergência do problema, quando o problema em questão for não-convexo.

Esse problema está geralmente relacionado aos algoritmos utilizados, pois, buscando um ponto de mínimo, o algoritmo de programação convexa pode ignorar que o problema é não-convexo podendo existir um mínimo “melhor” do que aquele encontrado pelo algoritmo.

Uma maneira de contornar esse problema é iniciar o processo de otimização a partir de valores aleatórios para cada uma das variáveis de projeto (geralmente se utilizam valores iniciais idênticos para todas as densidades). Dessa forma, partindo de pontos diferentes do espaço das soluções, a cada novo processo de otimização o algoritmo pode convergir para pontos de diferentes soluções, cabendo ao projetista decidir pela melhor delas. Esse método traz alguns problemas. O primeiro deles é que, mesmo começando a partir de diversos pontos distintos, dificilmente se terá a certeza de que o projeto escolhido é o melhor, ou seja, ainda existirá a possibilidade de o algoritmo ter convergido para um mínimo local. O outro problema é o fato do

enorme número de análises que devem ser feitas para se garantir um bom resultado, o que torna inviável esse método para problemas com muitas variáveis de projeto e restrições. Fica claro, entretanto, que esse é o método mais geral na busca do ótimo global, voltando, de certa forma, ao método da tentativa e erro discutido na introdução (Capítulo 1).

Assim, autores como Allaire e Francfort [Allaire e Francfort, 1993] e Allaire e Kohn [Allaire e Kohn, 1993b] propuseram pela primeira vez o *Método da Continuação*, descrito anteriormente. Os métodos que utilizam essa idéia parecem ser mais imunes ao problema dos mínimos locais, geralmente convergindo para melhores projetos finais [Sigmund e Petersson, 1998].

A idéia de qualquer tipo de método de continuação consiste em gradualmente modificar o problema de otimização de uma forma artificial e convexa (o qual permite regiões cinzas) para o problema original não-convexo, praticamente composto apenas por regiões com ou sem material (o problema 0-1).

Com essa idéia em mente, vários outros autores propuseram trabalhos utilizando algum tipo de método de continuação. Haber et al. [Haber et al., 1996] propuseram uma penalização gradual para a restrição de perímetro. Sigmund [Sigmund, 1997] e Sigmund e Torquato [Sigmund e Torquato, 1997] propuseram penalizações graduais em um método de filtragem espacial, alterando os valores do raio de abrangência ε (figura 5.6). Guedes e Taylor [Guedes e Taylor, 1997] propuseram uma penalização gradual das densidades intermediárias aplicando um fator multiplicativo na restrição de volume.

Neste trabalho também se utiliza um método de continuação baseado no trabalho de Cardoso [Cardoso, 2000] e Guilherme [Guilherme, 2001], os quais aplicam penalizações exponenciais diretamente na função objetivo, obtendo um efeito semelhante ao do método SIMP.

5.2.4. ÓTIMOS SINGULARES E RESTRIÇÕES NAS TENSÕES

O fenômeno dos ótimos singulares aparece quando são incluídas restrições locais nas tensões em cada elemento finito, e foi apontado pela primeira vez em um artigo de Sved e Ginos [Sved e Ginos, 1968]. Estudando um caso de uma treliça com 3 barras sujeita a 3 casos de carga, os autores descobriram que o ótimo global só poderia ser alcançado se uma das barras fosse completamente retirada da estrutura, violando dessa forma a restrição de tensão. A consequência desse problema encontra-se no fato de que os algoritmos convencionais de solução baseados nas condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker não conseguem “penetrar” em regiões do espaço das soluções onde esses pontos estão localizados (domínios degenerados). Assim, o algoritmo não consegue retirar alguns elementos cujas densidades tendem a zero.

Como os problemas de otimização envolvendo restrições de tensão foram inicialmente estudados em treliças, nesse ponto será feita uma breve revisão histórica sobre o assunto.

Otimização topológica de estruturas discretas foi inicialmente realizada por Dorn et al¹⁵ [Dorn et al., 1964], o qual apresentou a estrutura conhecida como “ground structure”, ou universo inicial de barras. Essa estrutura consiste de uma malha na qual estão incluídas todas as cargas, fixações e juntas nodais. Todos os nós da estrutura estavam conectados entre si. Nesse trabalho, o pesquisador aplicou a programação linear para achar a estrutura ótima, reduzindo o peso da estrutura através da “eliminação” das barras que atingiam um valor mínimo pré-determinado da área da seção transversal. É importante ressaltar que as barras não eram efetivamente eliminadas da estrutura, apesar de atingirem o valor mínimo, não alterando dessa forma a malha de elementos finitos. Desde então, a aproximação baseada no universo inicial de barras, aplicada em conjunto com a programação matemática tem sido extensivamente utilizada para remover membros desnecessários da estrutura.

Alguns anos mais tarde Dobbs e Felton [Dobbs e Felton, 1968] usaram propriedades da seção transversal como variável de projeto. A estrutura era submetida a múltiplos casos de carga e era aplicada restrição de tensão. Foi usado o algoritmo conhecido como “steepest descent-alternate mode”, que basicamente busca a redução do valor da função objetivo ao longo de uma direção, baseado nas informações advindas dos gradientes. Nesse trabalho, quando uma determinada barra atingisse o valor mínimo, era removida da estrutura, e não mais podia re-entrar na análise. Eles observaram também que freqüentemente membros da estrutura não podiam ser eliminados, apesar de não compreenderem o porquê.

Após a constatação do problema por Sved e Ginos [Sved e Ginos, 1968], outros pesquisadores começaram a dar uma maior atenção ao problema. Kirsch [Kirsch, 1990], por exemplo, concluiu que, “no caso de ocorrerem soluções singulares, pode ser muito difícil ou mesmo impossível de se atingir o ótimo global usando métodos numéricos”.

Cheng e Jiang [Cheng e Jiang, 1992] abordaram o fenômeno dos ótimos singulares sob um diferente ponto de vista. Estudando o problema da otimização topológica de treliças sujeitas a restrições nas tensões, eles demonstraram que a existência de ótimos singulares está relacionada com a descontinuidade da função tensão quando a área de alguma barra tende ao valor nulo. Nesse trabalho, eles também mostraram a “forma” do domínio da solução ocasionado pela descontinuidade nas tensões (figura 5.12): o domínio de projeto não é um conjunto disjunto,

¹⁵ Apesar de a otimização topológica de estruturas ser considerado um estudo recente, outros tipos de otimização (otimização dimensional e de forma) já vinham sendo feitos desde o início do século [Michell, 1904].

e o ponto ótimo está conectado ao resto do domínio através de um segmento de linha, ou seja, é dimensionalmente inferior ao domínio de projeto no qual se busca a solução [Rozvany e Birker, 1994].

De forma análoga, a explicação desse problema se aplica aos modelos contínuos, cuja variável de projeto é a densidade de material em cada elemento: regiões de baixa densidade, que deveriam naturalmente desaparecer, permanecem altamente tensionadas¹⁶. Quando a densidade de um elemento se reduz a zero, o valor limite de tensão nesse elemento tende a um valor diferente de zero, geralmente violando o limite de tensão. Assim, os algoritmos de solução não conseguem retirar material dessas regiões. O ponto crucial é que, se todo o material fosse retirado, a restrição de tensão se tornaria inativa.

Em um recente artigo, Hoback [Hoback, 1996] ilustra de uma maneira bastante simples e intuitiva o fenômeno da singularidade das tensões em uma treliça composta por 3 barras de mesmo comprimento e dois valores distintos de áreas de seção transversal, conforme mostrado na figura 5.11.

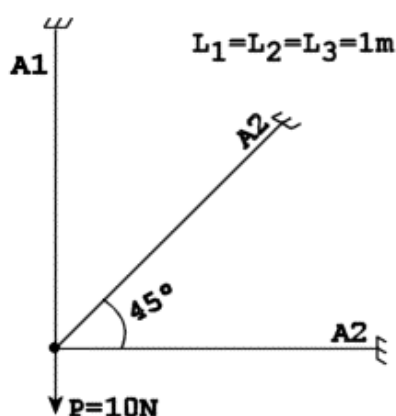


Figura 5.11: Singularidade das tensões em uma treliça de 3 barras [Hoback, 1996].

O problema proposto nesse artigo foi a minimização do volume, sujeito a restrições de tensão. O domínio de projeto está ilustrado na figura 5.12. Era permitido às barras atingirem valor nulo de área (o que é muito difícil de se fazer na prática, valendo-se de métodos numéricos, pois zerar a área de uma barra, ou a densidade em um elemento contínuo pode levar a uma matriz de rigidez singular).

¹⁶ Será mostrado posteriormente que cada componente do tensor das tensões é inversamente proporcional à densidade de material, da mesma forma que é inversamente proporcional à área da seção transversal de barras.

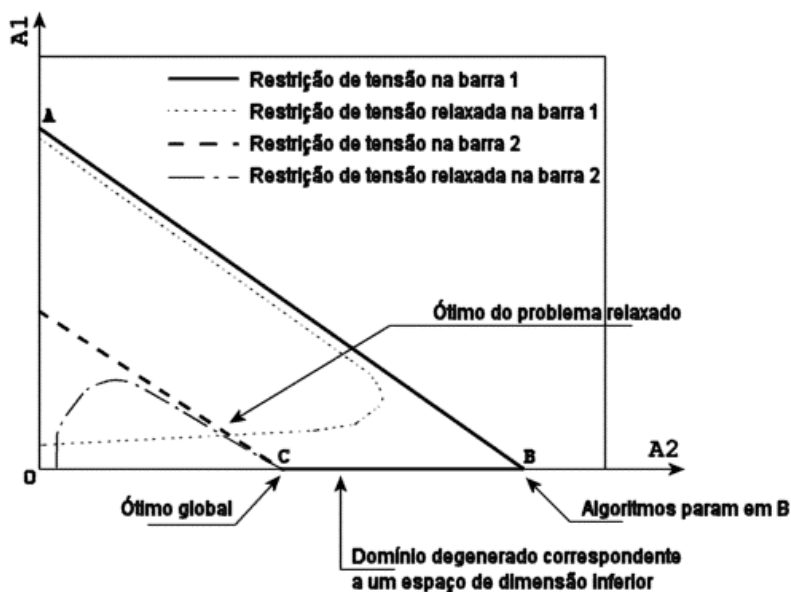


Figura 5.12: Representação qualitativa do domínio do problema das 3 barras [Hoback, 1996].

Apesar de a figura 5.12 representar apenas qualitativamente a solução do problema mostrado na figura 5.11, os cálculos foram efetuados pelo autor, que verificou que o ótimo global realmente se encontra no ponto C, que corresponde à remoção da barra com área A_1 (figura 5.11). Entretanto, os algoritmos de solução baseados nas condições de Karush-Kuhn-Tucker não conseguem penetrar na região degenerada do domínio, representada pelo segmento de linha BC, que faz parte do domínio de projeto. Dessa forma, algoritmos como o SLP, por exemplo, encontram o ótimo como sendo o ponto B, uma vez que computacionalmente não é possível a remoção total de uma determinada barra.

Conforme mencionado, problemas de natureza contínua também podem apresentar problemas de ótimos singulares quando submetidos a restrições de tensão.

De acordo com Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998], um critério de tensão para meios contínuos deve principalmente imitar o comportamento real da distribuição de tensões na estrutura (bem como na micro-estrutura, tratando-se de problemas de otimização topológica). Dessa forma, é definida uma *função de tensão local* da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\rho^q} \quad (5.12)$$

onde $\langle \sigma_{ij} \rangle$ é uma medida de tensão equivalente homogeneizada derivada de algum critério de falha de material (critério de Von Mises, por exemplo, que foi utilizado nesse trabalho), σ_{ij} é

uma componente do tensor de tensões de Cauchy, ρ^q é a função densidade de material e q é um número geralmente maior do que 1, que deve satisfazer o requerimento de coerência com o critério de tensão derivado de materiais do tipo *rank-2*, ou seja, deve ser igual ao expoente da densidade de material selecionado para utilização no método SIMP.

Restrições sobre as tensões são restrições de desigualdade, comumente apresentadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\leq \sigma_{eq} \\ \text{ou} \\ \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{eq}} &\leq 1 \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde σ_{eq} corresponde a alguma medida de tensão equivalente.

Em vista dessas dificuldades, problemas de otimização topológica em meios contínuos com restrições sobre as tensões começaram a ser tratados apenas recentemente, se comparados com outros tipos de problemas de otimização.

Em um recente trabalho, Yang e Chen [Yang e Chen, 1996] minimizam uma função objetivo composta pela combinação linear entre a flexibilidade e uma norma-p relativa às tensões macroscópicas, na seguinte forma:

$$\left\| \frac{\sigma_{vm}(\rho)}{\sigma_{adm}} \right\|_{L_p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\sigma_{vm}(\rho)}{\sigma_{adm}} \right)^p d\Omega \right]^{\frac{1}{p}} \tag{5.14}$$

onde σ_{vm} é a tensão de Von Mises, σ_{adm} é o valor de tensão admissível (tensão de escoamento, por exemplo) e p é um valor arbitrado. Os autores utilizaram um valor elevado de p para simular a norma L_{∞} . Um ponto negativo desse trabalho está no fato de que a soma entre a norma-p nas tensões com a flexibilidade constitui a adição de quantidades sem um mesmo significado físico.

Shim e Manoocheri [Shim e Manoocheri, 1997] resolvem o problema da minimização do volume de uma estrutura sujeita a limitações sobre as tensões utilizando um algoritmo do tipo *simulated annealing*¹⁷ aplicado-o na formulação discreta do problema.

Um trabalho bastante influente nesse tópico foi publicado por Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998], no qual utilizam a densidade de material como variável de projeto a fim de relaxar o problema e um critério de tensão baseado em um modelo micromecânico para materiais porosos especiais. A restrição de tensão é tratada localmente, ou seja, o valor da tensão em um elemento i da malha depende do valor da tensão no elemento j . Além disso, utilizando o método SIMP os autores conseguem eficientemente penalizar as densidades intermediárias, resolvendo então um problema na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \rho \leq 1} \quad & \int_{\Omega} \rho d\Omega \\ \text{sujeito a} \quad & \langle \|\sigma(\rho)\| \rangle \leq \sigma_{eq} \end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $\langle \|\sigma\| \rangle$ é uma medida de tensão homogeneizada. Diferentemente dos problemas envolvendo a flexibilidade como restrição, nos quais existem ne (número total de elementos da malha) variáveis de projeto e pelo menos uma restrição, problemas que utilizam a formulação apresentada na equação (5.15) possuem os mesmos ne variáveis de projeto e pelo menos ne restrições de tensão (se forem considerados apenas 1 valor de tensão central por elemento e 1 caso de carga). Ou seja, é um problema “de larga escala”. Além disso, assim como no caso das treliças, essa formulação também pode apresentar o problema dos ótimos singulares. Uma variação desse método é utilizada nesse trabalho. A diferença fundamental consiste na maneira em que é feita a penalização das densidades intermediárias, que são penalizadas diretamente na função objetivo, aplicando o método da continuação.

Talvez por ser uma das limitações naturais mais importantes (e críticas) dos materiais e das estruturas, outros autores também estudaram os efeitos das restrições sobre as tensões na otimização topológica.

¹⁷ Algoritmo de busca probabilístico baseado em uma analogia ao processo de recozimento de sólidos (onde um sólido é aquecido a altas temperaturas e gradualmente resfriado para permitir a sua cristalização). Algoritmos desse tipo são baseados na energia do sistema, que atinge o equilíbrio estável apenas em pontos de mínimos globais [Laarhoven, 1987].

Sheu e Schmit [Sheu e Schmit, 1972] aplicaram o método “branch and bound” de busca discreta ramificada para obter o ótimo global do problema de minimização do peso de treliças submetidas a restrições de tensão e deslocamento submetidas a múltiplos casos de carga.

Um método proposto por Ramm et al. [Ramm et al., 1998] emprega materiais artificiais do tipo SIMP e uma função objetivo composta de uma combinação linear entre a flexibilidade e uma norma-p nas tensões, da mesma forma que a mostrada na equação (5.14). Nesse trabalho, a principal restrição é a quantidade de material que pode ser utilizado durante o processo de otimização.

Cursi [Cursi, 1994], Cursi e Pagnaco [Cursi e Pagnaco, 1995] e Pagnaco [Pagnaco, 1998] abordaram o problema sob uma ótica diferente: utilizaram a metodologia da saturação dos valores da tensão efetiva, ou *fully stressed design*, na qual a variável de projeto é a espessura de cada elemento finito, ou seja, um parâmetro geométrico, e não a densidade de um material fictício. Esse método possui algumas limitações que merecem ser citadas: o método não se estende a problemas de elasticidade tridimensional, pois, a princípio, não existe uma definição concreta para o que viria a ser uma “espessura” num modelo tridimensional. Além disso, a espessura deve aparecer explicitamente nas equações de equilíbrio, não existindo um limite superior para seu valor.

Outros autores desenvolveram também trabalhos relativos à otimização com restrição nas tensões. Um trabalho bastante interessante foi proposto por Hsu, Sheppard e Wilde [Hsu et al., 1993] no qual desenvolveram um método baseado no critério de ótimo *fully stressed design* utilizando uma função de curvatura que descreve o domínio, dispensando o cálculo das sensibilidades. Entretanto, esse método foi usado apenas em problemas de otimização de forma em estruturas bidimensionais.

Um artigo de Duysinx [Duysinx, 1999] dá continuidade ao trabalho por ele iniciado, em conjunto com Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998]. Nesse artigo, o autor considera outros tipos de critérios de falha de material como restrição nas tensões, tais como o Critério de Raghava e o Critério de Ishaia. Diferentemente do Critério de Von Mises, essas teorias incluem os efeitos da pressão hidrostática e valores limites diferentes em pontos submetidos a tração e à compressão. Isso implicaria em projetos mais realistas sob o ponto de vista estrutural bem como a necessidade de se estender as técnicas de otimização para materiais diferentes, tais como vidro, concreto, etc. O critério de Raghava é um critério de falha quadrático usado geralmente para materiais adesivos, podendo ser interpretado como um caso particular do critério de Tsai-Wu para materiais ortotrópicos, quando as tensões limites nas 3 direções ortotrópicas são as mesmas [Laschet, 1994]. Segundo a mesma referência, o critério de Ishaia pertence à família de critérios

de plasticidade de Drucker-Prager, utilizados para análise de solos, rochas e calcário, por exemplo. A teoria de Ishaia prevê uma falha devido à tensão hidrostática com uma magnitude duas vezes maior que o valor previsto pelo critério de Raghava, ou seja, esta última é mais conservativa, principalmente quando comparada com o critério de Von Mises, que não prevê falha por pressão hidrostática.

Finalmente, Pereira [Pereira, 2001] incorpora as restrições de tensão à função objetivo utilizando a Técnica de Lagrangeano Aumentado. Este trabalho apresenta também uma formulação considerando qualquer tipo de critério de falha material, desde que posto em termos do campo de tensões ou de deformações. Pereira definiu uma análise de sensibilidade adjunta, criando uma restrição global para as tensões, diminuindo em muito o tempo computacional gasto para calcular as derivadas. A partir desse trabalho, o problema da minimização do volume com restrições sobre as tensões pôde ser tratado de uma forma mais eficiente, pois, utilizando uma malha de elementos finitos mais refinada obtém-se uma melhor representação do campo de tensões, possibilitando a obtenção de uma estrutura final mais realista.

De acordo com o que foi mostrado nessa seção, vê-se que vários autores, de uma forma ou de outra, depararam-se com o problema da singularidade das tensões.

Tentando resolver esse problema, várias técnicas foram propostas, Numa primeira tentativa, tentou-se modificar a formulação da restrição de tensão da seguinte forma:

$$\rho \left(\frac{\langle \|\sigma\| \rangle}{\sigma_1} - 1 \right) \leq 0 \quad (5.16)$$

No caso de barras em treliças, a restrição escrita nessa forma é equivalente a considerar as forças em vez das tensões, como proposto inicialmente por Vanderplaats e Salajegheh [Vanderplaats e Salajegheh, 1987] e ratificado por Kirsch [Kirsch, 1990]. Essa formulação diminui alguns problemas de instabilidade por tornar o problema “menos” não-linear, porém não resolve de fato o problema da singularidade, pois o domínio de projeto não é alterado.

Esse problema foi definitivamente resolvido em 1997, por Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997], que propuseram uma técnica de perturbação do problema original através da introdução de um parâmetro adicional, denotado pela letra grega ε . Essa técnica matemática é conhecida como *relaxação- ε* , e resolve o problema dos ótimos singulares, relaxando o espaço de busca, permitindo dessa forma que os algoritmos de solução possam penetrar nas regiões do espaço outrora degeneradas (figura 5.12). Em outras palavras, a relaxação- ε faz com que a função tensão

seja definida quando a área da seção transversal (no caso de barras) ou a densidade assume valor nulo.

No caso dos modelos contínuos utilizados nesse trabalho, a equação (5.16) é modificada, introduzindo a perturbação e um vetor modificado de restrições laterais [Duysinx e Bendsøe, 1998]:

$$\rho \left(\frac{\langle \|\sigma\| \rangle}{\sigma_1} - 1 \right) \leq \varepsilon \quad (5.17)$$

$$\varepsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho$$

onde ε é o parâmetro de perturbação que define a relaxação- ε . Se $\varepsilon=0$, a equação (5.17) se torna equivalente à equação (5.16). Para qualquer valor positivo de ε , o problema de otimização sujeito ao conjunto de restrições definidas em (5.17) apresenta um domínio de projeto denotado por W_ε , que não apresenta mais o domínio degenerado, ou seja, o ótimo desse problema modificado, denotado por \mathbf{x}_ε^* está localizado em regiões do espaço em que algoritmos como o SLP, baseados nas condições KKT possam atingir.

Na prática, começa-se com um valor elevado de ε para relaxar todas as regiões degeneradas do espaço. Quando esse sub-problema (W_ε) converge, valendo-se novamente do método da continuação, reduz-se o valor de ε , gerando-se um novo subproblema (W_ε'), e assim sucessivamente. Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997] mostraram que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a seqüência convergente de problemas W_ε com soluções \mathbf{x}_ε^* convergem para o problema original degenerado, atingindo a solução ótima associada. Assim, o procedimento de solução consiste em resolver uma seqüência de problemas de otimização com valores cada vez menores de ε .

Desde a introdução da técnica de relaxação do espaço das soluções a fim de contornar o problema da singularidade das tensões, muitos autores desenvolveram trabalhos utilizando a relaxação- ε , cabendo citar os trabalhos de Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998], Duysinx [Duysinx, 1999] e Pereira [Pereira, 2001]. A aplicação dessa técnica apresenta resultados bastante promissores, sendo relativamente simples sua implementação.

Entretanto, como são necessárias diversas iterações até a convergência de cada subproblema gerado por um dado valor de ε , a solução do problema até a convergência final (que é atingida quando $\varepsilon \rightarrow 0$) torna-se bastante custosa, lembrando que problemas com restrições de tensão apresentam um grande número de restrições e de variáveis de projeto. Dessa forma, em um trabalho bastante recente, Guo e Cheng [Guo e Cheng, 2000] propuseram uma nova técnica,

baseada na extrapolação dos resultados de sensibilidade obtidos com valores elevados de ε , evitando assim os altos custos computacionais associados com o método da continuação utilizado na técnica da relaxação- ε .

A principal etapa dessa nova técnica consiste na determinação das sensibilidades das variáveis de projeto e dos Multiplicadores de Lagrange associados às restrições ativas, ambos em relação ao parâmetro de relaxação. Usando essas sensibilidades, o método da continuação utilizado no processo de otimização pode ser parado em valores relativamente elevados de ε , encontrando dessa forma um valor aproximado por extrapolação para o ótimo singular. Como pode ser percebido, o emprego dessa técnica poderia reduzir as dificuldades numéricas e computacionais.

Os autores resolvem o problema aplicando a formulação em estruturas do tipo treliças. A solução do problema relaxado com valores elevados de ε é denotada por A_{opt}^* . A solução extrapolada a partir de A_{opt}^* é calculada da seguinte forma:

$$A_{opt}(\bar{\varepsilon}) = A_{opt}(\varepsilon^*) + \frac{\partial A_{opt}}{\partial \varepsilon}(\bar{\varepsilon} - \varepsilon^*) \quad (5.18)$$

onde $A_{opt}(\bar{\varepsilon})$ é o ponto ótimo extrapolado utilizando a expansão por série de Taylor mostrada na equação (5.18). É importante ressaltar que a implementação desse método não é uma tarefa fácil [Ohsaki e Katoh, 2001], uma vez que é necessário calcular a Hessiana das restrições.

Desde o seu surgimento em 1997, a técnica da relaxação- ε desenvolvida por Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997] para contornar o problema dos ótimos singulares que aparecem em problemas com restrições nas tensões vem sendo amplamente utilizada e aprimorada. Iniciou-se o trabalho com problemas discretos (barras), nos quais as bases matemáticas bem como as provas de convergência e existência de solução foram estabelecidas. Naturalmente, esse trabalho logo foi estendido para problemas da elasticidade plana, cujo domínio é obviamente contínuo. Em suma, a busca de soluções singulares encontra-se atualmente em um estágio bastante maduro e já consolidado através de diversos exemplos.

Entretanto, em um recente trabalho [Stolpe e Svanberg, 2001], os autores, de certa forma, questionam a validade **geral** da técnica da relaxação- ε , ou seja, em alguns casos, a solução do problema relaxado pode não convergir para a solução do problema original. Os autores fizeram essa constatação estudando alguns problemas de minimização do peso de treliças submetido a restrições de tensão para múltiplos casos de carga, ou seja, um problema bastante não-linear e

não-convexo. Nesses exemplos, o ótimo não convergia para o ponto singular, mesmo se o ponto de partida estivesse em uma vizinhança do ótimo global. Esse fato não chega a ser um fator comprometedor do método, pois foi constatado apenas em alguns exemplos patológicos, porém faz com que seja aberta uma nova gama de estudos futuros a respeito desse problema.

6. IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO

Equation Chapter (Next) Section 1

Nos capítulos anteriores foram revisados os principais conceitos relativos ao problema de otimização que foi abordado nesse trabalho, dando enfoque aos principais trabalhos desenvolvidos até os dias de hoje. Foi também estabelecida uma sólida fundamentação teórica nos tópicos abordados, ou seja, a minimização do volume de estruturas contínuas bidimensionais sujeitas a restrições de flexibilidade ou tensão, utilizando o método dos elementos finitos para discretizar o domínio e resolver as equações de equilíbrio.

Deixou-se claro que a abordagem sob a ótica da otimização na mecânica estrutural consiste, em última análise, **construir** a melhor estrutura possível para suportar os esforços que estão sendo solicitados.

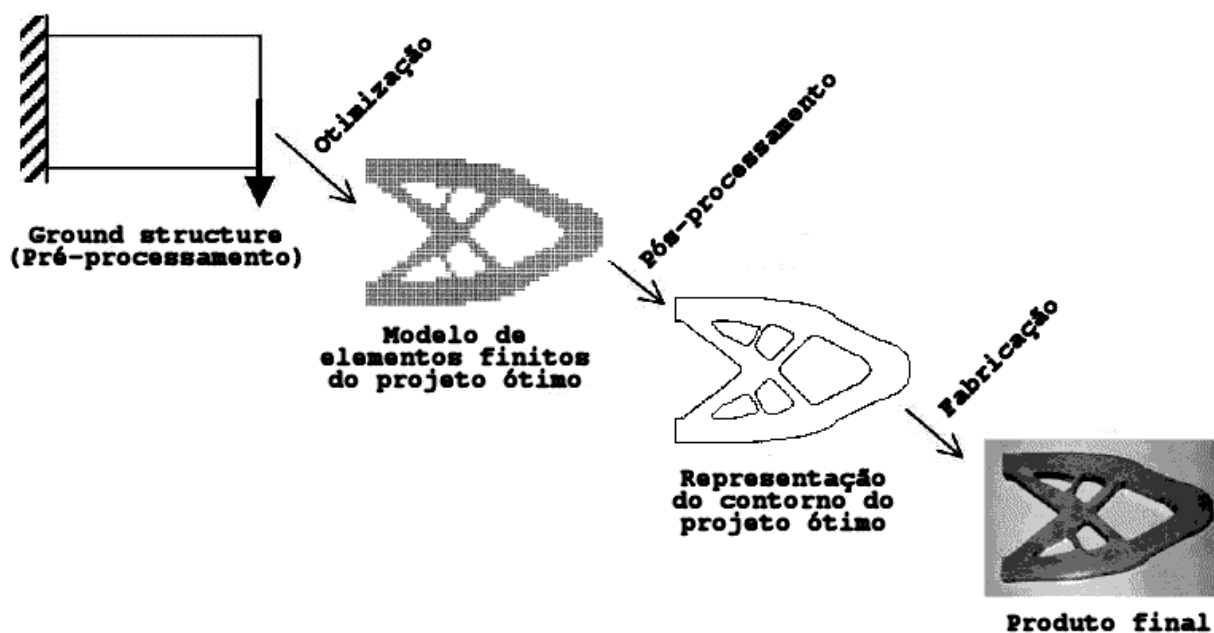


Figura 6.1: Representação das principais etapas em um processo de otimização estrutural.

As primeiras 3 etapas indicadas na figura 6.1 são executadas no computador. Neste trabalho foi desenvolvido um programa em ambiente MATLAB (Apêndice III) que obedece ao algoritmo geral mostrado na figura 6.2:

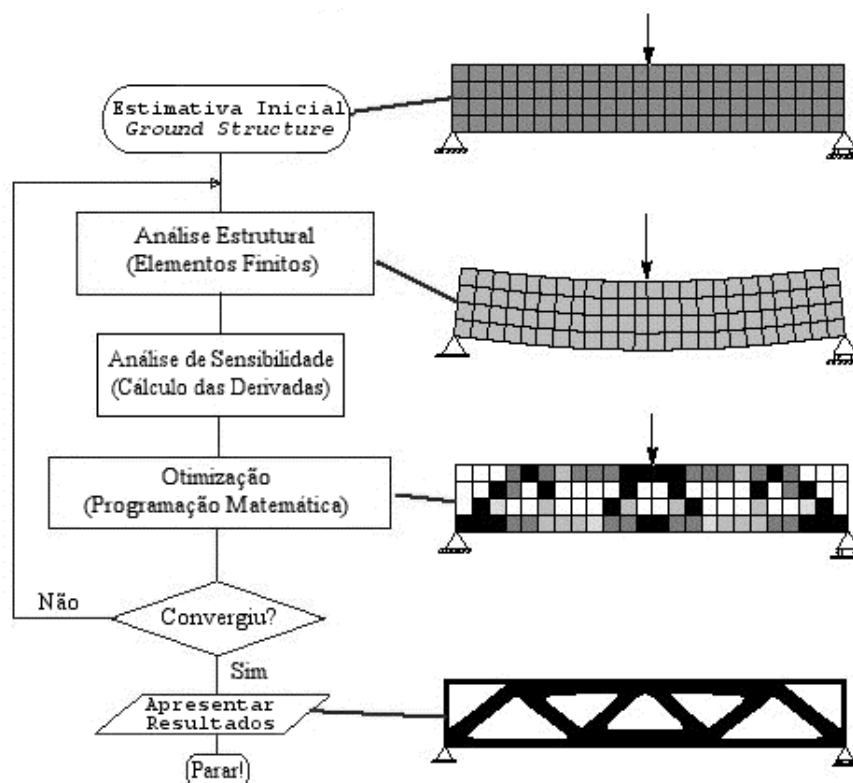


Figura 6.2: Esquema geral de um algoritmo de otimização (adaptado de uma palestra de Bendsøe, M. P., MPB-slides, Oberwolfach, jan. 9-15, 2000).

Este estudo chega até a segunda etapa da figura 6.1, ou seja, o objetivo final do trabalho consiste em se gerar um modelo do projeto ótimo, respeitando todas as restrições impostas. Serão então resolvidos dois problemas distintos, assim sendo:

6.1. MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DA FLEXIBILIDADE (TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS)

Deseja-se encontrar o mínimo volume de estrutura sem que o trabalho das forças externas seja superior a um limite pré-estabelecido. A prova não é trivial, mas Bendsøe [Bendsøe, 1995] mostrou que esse problema é convexo, e apresenta solução.

O trabalho da forças externas, que é a restrição tecnológica do problema é calculado da seguinte forma:

$$W^k = (\mathbf{f}^k)^T \mathbf{u}^k \quad (6.1)$$

onde \mathbf{f}^k e \mathbf{u}^k são respectivamente o vetor de forças e o vetor deslocamento de um dado caso de carregamento k .

A partir da configuração inicial da estrutura é possível decidir se a estrutura otimizada será mais rígida ou mais flexível que a original, diminuindo ou aumentando o valor limite de flexibilidade, respectivamente. Essa conclusão a respeito dos efeitos do valor limite da flexibilidade sobre o comportamento estrutural é obtida após uma simples análise da equação (6.1), de onde se verifica que o trabalho é diretamente proporcional ao deslocamento da estrutura, em termos de ordem de grandeza (pois trabalho é um escalar, enquanto que o deslocamento é um vetor).

Matematicamente, o problema de otimização é formulado como se segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & V \\ \text{suj. a} \quad & W^k \leq W_{\text{lim}} \\ & \rho_{\text{min}} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde W_{lim} é o valor limite de flexibilidade, W^k é a flexibilidade na iteração atual quando a estrutura está submetida ao caso de carregamento k e V , a função objetivo, é o volume da estrutura calculado pela seguinte equação:

$$V = \int_{\Omega} \rho^p d\Omega \quad (6.3)$$

Resolvendo essa integral e aplicando o Método dos Elementos Finitos, obtém-se:

$$V = \sum_{i=1}^{ne} \rho_i^p V_i \quad (6.4)$$

onde ne é o número de elementos da malha, V_i é o volume do elemento i e p é um expoente de penalização das densidades intermediárias. Quando $p=1$, o problema (6.2) é convexo e é equivalente ao problema da minimização da espessura de uma membrana [Rozvany, 1995].

Quando $p>1$, a relação (6.4) torna-se não-convexa, mas faz com que os elementos com densidades intermediárias tendam a desaparecer (se não for usado nenhum tipo de filtro), o que é mais conveniente do ponto de vista da engenharia pois, conforme explicado anteriormente, materiais porosos são muito difíceis de serem construídos. A figura 6.3 mostra a relação entre volume e densidade para diferentes expoentes p :

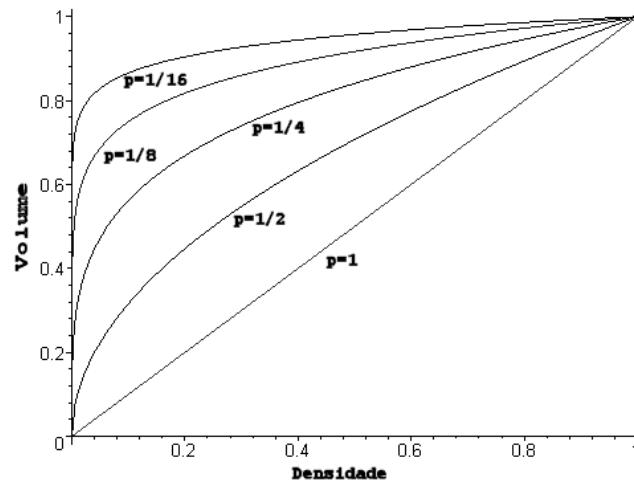


Figura 6.3: Curvas obtidas para diferentes valores de p na equação (6.4).

Quando necessário, outros tipos de penalização podem ser utilizados, a fim de “limpar” ainda mais o resultado final, que deve conter o menor número possível de elementos com densidades intermediárias. Uma relação bastante interessante é mostrada na equação (6.5), utilizada na última etapa do método da continuação:

$$V = \sum_{i=1}^{ne} [\rho_i^p + \alpha \rho_i (1 - \rho_i)] V_i \quad (6.5)$$

onde α é um valor selecionado heurísticamente. Quando $\alpha=0$, a equação (6.5) torna-se equivalente à equação (6.4). A figura seguinte mostra uma família de curvas representando a equação (6.5) para $p = \frac{1}{8}$, valor utilizado neste trabalho:

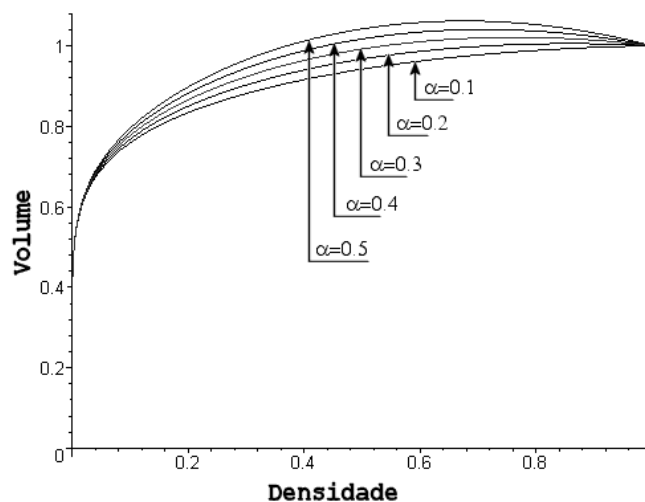


Figura 6.4: Soluções da equação (6.5) para alguns valores de α e $p=1/8$.

Diferente de uma penalização na rigidez do material (SIMP), em que a rigidez de elementos com densidades intermediárias é baixa a rigidez da estrutura, penalizações na função objetivo apresentam um conceito diferente. Como pode ser visto nas figuras 6.3 e 6.4, elementos com densidades intermediárias tendem aumentar o valor da função objetivo.

6.1.1. LINEARIZAÇÃO DAS RESTRIÇÕES E CÁLCULO DAS DERIVADAS

Em geral, os algoritmos de programação matemática utilizados para encontrar as soluções ótimas necessitam de informações provenientes do cálculo das derivadas da função objetivo e das restrições, e não apenas dos valores das funções, como ocorre em alguns métodos de busca¹⁸. Além disso, o método da programação linear seqüencial utilizado nesse trabalho requer o uso de função objetivo e restrições lineares. Por esse motivo, aplica-se a técnica da expansão por Séries de Taylor truncadas na parte linear nas funções envolvidas.

Existem diversos métodos para o cálculo das derivadas, tais como diferenças finitas, métodos variacionais, métodos analíticos e semi-analíticos [Haftka e Gürdal, 1992]. Sem dúvida, os métodos analíticos são os mais eficientes e de menor custo computacional. Muitas vezes, porém, pode ser difícil encontrar uma relação direta ou mesmo indireta da função com relação às variáveis de projeto. Assim, apesar de ser mais suscetível à erros de aproximação e computacionalmente mais dispendioso, o método das diferenças finitas é mais geral e bastante utilizado por autores como Guilherme [Guilherme, 2001], que utilizou diferenças finitas para calcular a sensibilidade dos autovalores em problemas envolvendo restrições de flambagem global em barras e vigas.

A função objetivo, tanto em sua forma convexa quanto nas formas não-convexas, é função direta da variável de projeto. Assim, derivando a equação (6.5), a forma mais geral, em relação à ρ_i , obtém-se:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = [p(\rho_i^{p-1}) + \alpha(1 - 2\rho_i)]V_i \quad (6.6)$$

Quando $p=1$ e $\alpha=0$, a expressão (6.6), fica da seguinte forma:

¹⁸ Existe uma classe de algoritmos de programação matemática conhecidos por *métodos de busca direta*, que não utilizam derivadas. Os principais algoritmos desse tipo são: Método da Seção Áurea, Método de Rosenbrock, Método de Powell, Algoritmos Genéticos, Simulated Annealing e Monte Carlo.

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = V_i \quad (6.7)$$

ou seja, a derivada da função objetivo é constante e equivale ao volume de cada elemento finito da malha. Quando $p < 1$, mas $\alpha = 0$, a equação obtida é a seguinte:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = [p(\rho_i^{p-1})] V_i \quad (6.8)$$

A restrição do trabalho das forças externas, além de ser uma função implícita das variáveis de projeto¹⁹, é uma função não-linear.

Como o LP resolve apenas problemas de natureza linear, todos os parâmetros de entrada não-lineares devem ser linearizados. Deseja-se calcular a derivada da restrição em relação à variável de projeto. Assim, partindo-se da restrição de desigualdade $W^k \leq W_{\text{lim}}$ e aplicando a Série de Taylor em ambos os lados, obtém-se:

$$W^k(\rho_{0_i}) + \left. \frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} \right|_{\rho_{0_i}} (\rho_i - \rho_{0_i}) \leq W_{\text{lim}}(\rho_{0_i}) + \left. \frac{\partial W_{\text{lim}}}{\partial \rho_i} \right|_{\rho_{0_i}} (\rho_i - \rho_{0_i}) \quad (6.9)$$

Reagrupando os termos da inequação (6.9) para ficar a forma $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, que é o padrão para a rotina de programação linear utilizada, e sabendo que o limite de flexibilidade é um valor constante, obtém-se (lembrando que índices repetidos em termos multiplicativos indicam somatório):

$$\frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} \rho_i \leq W_{\text{lim}}(\rho_{0_i}) - W^k(\rho_{0_i}) + \frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} \rho_{0_i} \quad (6.10)$$

¹⁹ A densidade não aparece diretamente na equação (6.1). Nesse caso, o vetor deslocamento \mathbf{u} depende implicitamente da densidade, uma vez que $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{f}$.

Da expressão (6.10) vê-se a origem da necessidade de se calcular a sensibilidade das restrições. Ao linearizar a restrição, surgiu o termo $\frac{\partial W^k}{\partial \rho_i}$, que indica o quanto a flexibilidade do sistema varia com uma mudança nas variáveis de projeto. Nesse caso, espera-se que as derivadas sejam negativas, pois, fisicamente, um aumento na densidade causa uma redução no valor da flexibilidade, ou seja, a estrutura fica mais rígida.

O cálculo dessa derivada é relativamente simples, sendo o procedimento utilizado por diversos autores, citando Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1992], por exemplo. Isolando o termo do deslocamento na equação (3.24), obtém-se:

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^k \quad (6.11)$$

onde k é um dado caso de carga. Substituindo esse resultado na equação do trabalho das forças externas, a equação (6.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$W^k = (\mathbf{f}^k)^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^k \quad (6.12)$$

Calculando a derivada da equação (6.12) em relação às variáveis de projeto ρ_i , obtém-se:

$$\frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} = \frac{\partial [(\mathbf{f}^k)^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^k]}{\partial \rho_i} \quad (6.13)$$

Sabendo que todas as grandezas da equação acima dependem direta ou indiretamente da densidade, aplicando a regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} = (\mathbf{f}^k)^T \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_i} \mathbf{f}^k + 2(\mathbf{f}^k)^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}^k}{\partial \rho_i} \quad (6.14)$$

A equação (6.14) é uma expressão analítica geral, que pode ser utilizada no cálculo da derivada da flexibilidade. Essa expressão, entretanto, não se encontra em uma forma conveniente. A derivada da matriz de rigidez global é facilmente calculada, pois tem dependência direta com a densidade. Sua inversa, porém, deve ser calculada. Esse cálculo é bastante simples. Uma propriedade básica, mas bastante conveniente da álgebra linear afirma

que qualquer matriz quadrada multiplicada pela sua inversa resulta em uma matriz identidade de mesma dimensão. Aplicando essa propriedade à matriz de rigidez global, obtém-se:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{I} \quad (6.15)$$

Derivando ambos os lados da equação (6.15) em relação à ρ_i têm-se:

$$\frac{\partial(\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^{-1})}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \rho_i} \quad (6.16)$$

A matriz identidade é constante em relação às variáveis de projeto. Assim, aplicando a regra da cadeia à equação (6.16), obtém-se:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{K}^{-1} = 0 \quad (6.17)$$

Isolando o termo $\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_i}$ na equação (6.17) obtém-se a derivada desejada:

$$\frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \rho_i} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{K}^{-1} \quad (6.18)$$

Substituindo a equação (6.18) na equação (6.14), o cálculo da derivada da matriz de rigidez inversa torna-se desnecessário. Assim:

$$\frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} = (\mathbf{f}^k)^T \left[-\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{K}^{-1} \right] \mathbf{f}^k + 2(\mathbf{f}^k)^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}^k}{\partial \rho_i} \quad (6.19)$$

Aplicando a álgebra necessária, e substituindo o resultado da equação (6.11), obtém-se:

$$\frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} = -(\mathbf{u}^k)^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{u}^k + 2(\mathbf{u}^k)^T \frac{\partial \mathbf{f}^k}{\partial \rho_i} \quad (6.20)$$

6.2. MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DA TENSÃO

Via de regra, qualquer estrutura é projetada para suportar um determinado conjunto de cargas sem falhar por tensão excessiva em qualquer membro da estrutura. Por esse motivo, restringir a tensão admissível na estrutura muitas vezes é considerado como a mais fundamental das restrições impostas [Vanderplaats, 1987].

No capítulo anterior foi vista uma breve revisão histórica sobre a otimização topológica com restrições sobre as tensões, incluindo alguns problemas associados (domínios degenerados) a esse tipo de estudo. Nessa seção será vista a formulação do problema estudado nesse trabalho, bem como o cálculo da sensibilidade das restrições. Esse estudo é baseado principalmente no artigo de Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998].

O problema é formulado de uma maneira relativamente simples:

$$\begin{aligned} \min \quad & V \\ \text{suj. a} \quad & \sigma^k \leq \bar{\sigma} \\ & \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde σ^k é uma medida de tensão equivalente em um elemento relativa ao caso de carga k , $\bar{\sigma}$ é a medida de tensão equivalente limite e V é o volume da estrutura (função objetivo), calculado pela equação (6.4), seguindo os mesmos procedimentos de penalização utilizados nos problemas com restrição na flexibilidade (equação (6.5)).

Restrições sobre as tensões apresentam várias peculiaridades. Uma delas já foi mostrada anteriormente, tratando-se do problema da singularidade, criando o conhecido paradoxo das tensões [Cheng e Guo, 1997], no qual elementos com baixas densidades, que tenderiam a desaparecer, violam a restrição de tensão, fazendo com que, dessa forma, os algoritmos baseados nas condições de ótimo de Karush-Kuhn-Tucker não consigam atingir a solução ótima.

A outra característica de problemas de otimização envolvendo restrições sobre as tensões refere-se à dimensão do problema. Desde a introdução das técnicas de distribuição de material que possibilitaram o uso do computador como ferramenta para resolver problemas de otimização topológica em estruturas contínuas [Bendsøe e Kikuchi, 1988], muita pesquisa vem sendo feita, principalmente em problemas envolvendo a flexibilidade como restrição, ou como função objetivo.

Problemas dessa natureza podem apresentar um grande número de variáveis de projeto. O número de restrições, entretanto, é bastante baixo. Geralmente, os problemas envolvendo flexibilidade (ou flambagem global) apresentam apenas uma restrição, conhecida como *restrição*

global. Esse tipo de restrição tem efeito sob a estrutura como um todo. Exemplificando, a flexibilidade da estrutura (e não de apenas alguns elementos) deve respeitar um dado limite, ou ainda, a estrutura tem uma carga crítica de flambagem que não deve ultrapassar um determinado limite. Novamente, não faz sentido procurar condições para que apenas um determinado elemento da estrutura flambe²⁰.

Restrições sobre as tensões são de natureza *local*, ou seja, cada ponto da estrutura elástica linear (ou cada elemento da estrutura discretizada por elementos finitos) deve ter seu limite de tensão controlado. Dessa forma, o problema pode apresentar um número muito elevado de restrições, o que nem todos os algoritmos de programação matemática conseguem manusear. Além disso, a única formulação na qual a tensão está bem definida corresponde ao problema 0-1 (equação (5.1)). Qualquer outro problema de otimização que permita o aparecimento de elementos com densidades intermediárias não possui, a priori, uma medida de tensão bem definida (no que diz respeito à sua forma funcional).

Assim como a densidade de um material homogeneizado (“exato”, de acordo com a teoria da homogeneização, ou aproximado, segundo o método SIMP) é usada para descrever a estrutura, o critério de tensão deve ser também microestruturalmente consistente [Duysinx e Bendsøe, 1998].

Estes autores desenvolveram um critério de tensão para materiais compostos (do tipo sanduíche), estabelecendo uma relação entre as tensões microscópica e macroscópica nesse tipo de material composto. Esse critério de tensão torna-se a base das restrições de tensão utilizadas no processo de otimização. O ponto fundamental desse critério consiste em assegurar que todos os pontos microscópicos e macroscópicos da estrutura encontram-se sob o regime linear elástico.

Nesse trabalho, entretanto, foi adotado um critério de tensão bem mais simples, igualmente detalhado por Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998]. Esse outro critério é baseado no modelo SIMP, que parametriza o tensor constitutivo segundo a equação (5.3), que é reproduzida aqui:

$$\mathbf{E}_{ijkl} = \rho^n \mathbf{E}_{ijkl}^0 \quad (6.22)$$

²⁰ Isso não é sempre verdade em estruturas discretas. Nesses casos, a treliça ou pórtico pode flambar tanto localmente (uma determinada barra – flambagem de Euler) quanto globalmente (a estrutura toda se instabiliza, atingindo algum modo de flambagem, sem que nenhuma barra individualmente tenha sofrido o fenômeno).

Essa aproximação em muito facilita a busca de um projeto final constituído apenas por pontos com material e sem material a nível macroscópico, evitando assim os problemas associados à formulação original (formulação 0-1, sem relaxação), que são a não existência de solução e a necessidade de se utilizar uma programação matemática de busca discreta.

Conforme mencionado, as tensões não são bem definidas em materiais com densidades intermediárias. Dessa forma, deve ser proposta uma forma de relacionar a tensão com essas densidades, que, por conveniência deve também ser válida em pontos onde não ocorre a formação desse tipo de microestrutura.

Existe uma certa liberdade para formular essa relação entre tensão e densidade. Entretanto, para se ter alguma utilidade no campo da engenharia e não apenas na matemática, critérios de tensão dessa natureza devem satisfazer alguns requerimentos. Em primeiro lugar, é interessante que o critério estabelecido seja tão simples quanto possível, a fim de facilitar a implementação computacional. Leis de tensão muito complexas podem até fornecer resultados com maior precisão, mas é preciso levar em conta uma possível dificuldade de implementação e custo computacional, bem como saber se essa precisão poderia ser atingida na prática, considerando que a estrutura gerada poderá ser construída.

Além de poder representar as tensões nos materiais porosos, outro critério não menos importante obriga que as tensões à nível macroscópico sejam consistentes com as tensões na microestrutura.

Dessa forma, Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998] mostraram que uma função tensão inversamente proporcional à densidade satisfaz todas essas imposições simultaneamente. Assim, para o modelo SIMP, a melhor medida de tensão, que melhor considera o comportamento microestrutural é o representado pela equação (5.12), que será novamente mostrada a seguir:

$$\sigma_{ij} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\rho^m} \quad (6.23)$$

onde o expoente m é introduzido para tornar a lei coerente com o modelo SIMP. Substituindo as equações (6.22) e (6.23) na equação da relação constitutiva (equação (3.6), na qual \mathbf{C} é o tensor constitutivo equivalente, \mathbf{E}_{ijkl}), obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho^n}{\rho^m} \mathbf{E}_{ijkl} \langle \epsilon_{kl}^0 \rangle \quad (6.24)$$

Essa medida de tensão deve permanecer finita e diferente de zero quando a densidade for nula. A única condição que satisfaz essa hipótese é a seguinte:

$$n = m \quad (6.25)$$

Qualquer escolha de expoentes diferente da mostrada em (6.25) resulta em soluções inconsistentes sob ponto de vista físico. Este trabalho, obviamente, respeitou essa condição. Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998] e Duysinx [Duysinx, 1999] sugerem o uso de expoente $m=n>1$ (segundo os autores, os melhores resultados foram obtidos com $m=n=3$), de modo a penalizar as densidades intermediárias. Entretanto, optou-se por usar o expoente unitário, não penalizando o tensor constitutivo (conforme explicado anteriormente, a penalização foi feita na função objetivo, a fim de não mascarar a relação entre a quantidade real de material e a densidade em cada ponto do desenho final, uma vez que a relação entre o tensor constitutivo equivalente e o tensor constitutivo do material de base se mantém linear). Dessa forma, a densidade de material ρ possui um significado físico definido, equivalendo à espessura de uma placa.

Assim, utilizando o modelo local de tensões mostrado na equação (6.23) e uma medida de tensão equivalente, o problema de minimização de volume com restrições sobre as tensões (equação (6.21)) pode ser reformulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & V \\ \text{suj. a} \quad & \frac{\langle \|\sigma^k\| \rangle}{\rho} \leq \bar{\sigma} \\ & \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Nesse trabalho foi utilizado o critério de Von Mises, comumente usado para analisar materiais dúcteis (aço e alumínio, por exemplo, bastante utilizados nas construções mecânicas). Porém, é importante ressaltar que existem outros critérios de falha, atendendo a outros tipos de materiais [Duysinx, 1999; Pereira, 2001].

A formulação (6.26), entretanto, não resolve o problema da singularidade das tensões, fenômeno já estudado por diversos autores [Kirsch, 1990, Cheng e Jiang, 1992] e resolvido de uma maneira eficiente por Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997], usando uma técnica denominada relaxação- ϵ .

Então o problema é reformulado como se segue:

$$\begin{aligned}
& \min \quad V \\
& \text{sujeito a} \quad \rho \left(\frac{\langle \|\sigma^k\| \rangle}{\bar{\sigma}} - 1 \right) \leq \varepsilon \\
& \quad \varepsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho \\
& \quad \rho_{\min} \leq \rho \leq 1
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Como pode ser visto na equação (6.27), as restrições são reformuladas, de modo a acrescentar a perturbação. Na prática, aplica-se o método da continuação começando com valores elevados de ε (0,1, por exemplo), resolvendo sucessivos problemas de otimização com valores cada vez menores para ε (10^{-6} à 10^{-8} são valores típicos utilizados).

6.2.1. LINEARIZAÇÃO DAS RESTRIÇÕES E CÁLCULO DAS DERIVADAS

Novamente foi utilizado o algoritmo de programação linear, dessa vez para resolver o problema da minimização do volume com restrição sobre as tensões. Dessa forma, as sensibilidades da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto devem ser calculadas.

A derivada do volume é calculada analiticamente utilizando os mesmos procedimentos descritos anteriormente, sendo obtida pela equação (6.6).

O cálculo da sensibilidade da tensão tem um custo computacional bastante elevado. Para se obter bons resultados de tensão, a malha de elementos finitos não pode ser muito grosseira, caso contrário fenômenos como concentração de tensões não são corretamente captados. Além disso, pelo fato de ser uma restrição de natureza local, o número de restrições de tensão é bastante elevado, sendo proporcional ao número de elementos da malha.

Inicialmente, pelos motivos anteriormente mencionados, é necessário que a restrição seja linearizada. Para tal, utiliza-se novamente a expansão por Séries de Taylor na restrição de tensão, reescrita de uma maneira mais conveniente, mostrada na equação (6.28) (as densidades são estritamente positivas para qualquer valor positivo de ε [Duysinx e Bendsøe, 1998]):

$$\frac{\sigma^k}{\bar{\sigma}} - \frac{\varepsilon}{\rho} \leq 1 \tag{6.28}$$

Aplicando a linearização da tensão equivalente, σ^k , na equação (6.28), obtém-se:

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\sigma^k(\rho_0) + \frac{\partial \sigma^k}{\partial \rho} (\rho - \rho_0) \right] - \frac{\varepsilon}{\rho} \leq 1 \quad (6.29)$$

Efetuada as operações necessárias e agrupando os termos desconhecidos do lado esquerdo da desigualdade (novamente, para deixar na forma padrão do algoritmo de LP utilizado, $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$), obtém-se a forma linearizada das restrições:

$$\frac{\partial \sigma^k}{\partial \rho} \rho \leq \bar{\sigma} - \sigma^k(\rho_0) + \frac{\partial \sigma^k}{\partial \rho} \rho_0 + \bar{\sigma} \frac{\varepsilon}{\rho} \quad (6.30)$$

Conforme comentado anteriormente, o problema apresenta um elevado número de restrições. Diferentemente da flexibilidade, cuja derivada é um vetor, a derivada da tensão é uma matriz. Se existir apenas um caso de carga, essa matriz será quadrada, com dimensão do número de elementos da malha. Isso ocorre devido a natureza local dessas restrições, ou seja, a variação da tensão em um elemento i da malha depende da variação da tensão em um elemento j .

A tensão equivalente utilizada nesse trabalho é o Critério de Von Mises, calculado a partir dos autovalores do tensor das tensões de Cauchy, uma medida euleriana de tensões, que considera a posição inicial sendo uma função da posição final de cada ponto do corpo, ou seja, uma espécie de referencial móvel [Atkin e Fox, 1980].

Existem diversas formas de se escrever a tensão equivalente de Von Mises, utilizando as tensões nas direções principais ou nos eixos coordenados. Uma das representações mais comuns desse critério de falha, aplicado ao problema da elasticidade bidimensional (EPT) é mostrado a seguir:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}} \quad (6.31)$$

Neste trabalho adotou-se uma formulação mais conveniente para o cálculo da tensão equivalente, utilizando diretamente o vetor deslocamento:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \quad (6.32)$$

onde \mathbf{u} é o vetor deslocamento global, calculado pelo Método dos Elementos Finitos e \mathbf{M} é uma matriz calculada pela seguinte equação:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^T \mathbf{V} \mathbf{T} \quad (6.33)$$

onde \mathbf{V} é a matriz mostrada em (6.34)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

e \mathbf{T} é um termo que relaciona tensão com deslocamento, calculado pelo Método dos Elementos Finitos através da seguinte equação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} \mathbf{B} \quad (6.35)$$

onde \mathbf{E} é o tensor constitutivo homogeneizado, e \mathbf{B} é a matriz das derivadas das funções de interpolação dos elementos finitos, que depende do tipo de elemento utilizado (matriz (I.11) para o elemento quadrado bilinear isoparamétrico ou (I.38) para o elemento de Taylor).

Aplicando a parametrização do tensor constitutivo, a equação (6.35) é reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \rho \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \quad (6.36)$$

Dessa forma, fica estabelecida a relação entre a tensão de Von Mises e a densidade material. Substituindo as equações (6.34) à (6.36) na equação (6.33), a matriz \mathbf{M} é então calculada pela seguinte equação (as dimensões de cada termo estão indicadas):

$$\underline{\mathbf{M}}_{8 \times 8} = \rho^2 \underline{\mathbf{B}}_{8 \times 3}^T \overbrace{\mathbf{E}^0}^{3 \times 3} \underline{\mathbf{V}}_{3 \times 3} \overbrace{\mathbf{E}^0}^{3 \times 3} \underline{\mathbf{B}}_{3 \times 8} \quad (6.37)$$

Substituindo a equação (6.37) na equação (6.32), obtém-se:

$$\sigma_{vm} = \rho \sqrt{\underbrace{\mathbf{u}^T}_{1 \times 8} \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B}}_{8 \times 8} \underbrace{\mathbf{u}}_{8 \times 1}} \quad (6.38)$$

Essa expressão é utilizada no cálculo da derivada. Substituindo a equação (6.38) na equação (6.23), que define a tensão para materiais porosos, obtém-se²¹:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{eq}}{\rho} = \frac{\rho \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}}}{\rho} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B} \mathbf{u}} \quad (6.39)$$

Essa equação representa a tensão em um elemento i da malha, ou seja, pode ser rescrita como σ_i , na qual os únicos termos que dependem do elemento i são as matrizes das derivadas das funções de interpolação, que podem ser rescritas como \mathbf{B}_i .

Assim, derivando a equação (6.39) em relação a densidade de um elemento j , obtém-se a expressão a seguir (apesar de essa derivada ter um valor para cada caso de carga, o índice k , que indica o número do caso será omitido):

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{2 \sqrt{\mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{B}_i^T}_{T^T} \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \underbrace{\mathbf{E}^0 \mathbf{B}_i}_{T} \mathbf{u}}} \frac{\partial}{\partial \rho_j} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B}_i \mathbf{u}) \quad (6.40)$$

Analisando a equação (6.40), vê-se que o termo sem derivada corresponde à tensão de Von Mises do elemento i , sem o termo da densidade, aqui denotado por σ_{vm}^0 (será visto a seguir que, na verdade, a densidade ρ_i está implícita, pois ela está multiplicando a matriz de rigidez local desse elemento, a partir da qual se calculam as tensões). O 2º termo da equação deve ser derivado. Entretanto, os únicos termos que dependem da densidade são os deslocamentos. Os demais podem sair da derivada²². Assim, a equação (6.40) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{2 \sigma_{vm}^0} (\mathbf{B}_i^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B}_i) \frac{\partial (\mathbf{u}^T \mathbf{u})}{\partial \rho_j} \quad (6.41)$$

²¹ Conforme explicado anteriormente, σ_{ij} representa como a tensão em um elemento i se relaciona com a tensão em um elemento j . Além disso, define-se $\sigma_{vm} = \sigma_{eq}$.

²² Essa afirmação só é válida porque a matriz \mathbf{V} é simétrica, pois, em geral, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \neq \mathbf{A} \mathbf{x}^T \mathbf{x}$

Assim como a tensão de Von Mises, os termos entre parênteses correspondem à matriz definida na equação (6.37), sem o termo da densidade; pela mesma razão, será então denotado por \mathbf{M}_i^0 . Dessa forma, aplicando a regra da cadeia ao termo dentro da derivada, obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{2\sigma_{vm}^0} \mathbf{M}_i^0 \left[\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \rho_j} \mathbf{u} \right] \quad (6.42)$$

Os termos entre colchetes são idênticos, podendo ser agrupados. Dessa forma, obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{\sigma_{vm}^0} \mathbf{u}^T \mathbf{M}_i^0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j} \quad (6.43)$$

A equação (6.43) requer o cálculo da derivada do deslocamento. O procedimento é bastante simples, sendo utilizado por diversos autores, citando novamente o livro de Haftka e Gürdal [Haftka e Gürdal, 1992] como fonte de referência. Assim, derivando ambos os lados da equação de equilíbrio discretizada (equação (3.24)) em relação à ρ_j , obtém-se:

$$\frac{\partial (\mathbf{K}\mathbf{u})}{\partial \rho_j} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_j} \quad (6.44)$$

Aplicando a regra da cadeia e isolando a derivada desejada, chega-se à seguinte equação:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u} \right) \quad (6.45)$$

onde \mathbf{K}^{-1} é a inversa da matriz de rigidez global e $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j}$ é facilmente calculado, pois a matriz de rigidez global tem relação direta com a densidade de material.

Finalmente, substituindo a equação (6.45) na equação (6.43) obtém-se a forma final da equação que calcula a sensibilidade da tensão de Von Mises em relação à densidade de material:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{\sigma_{vm}^0} \mathbf{u}^T \mathbf{M}_i^0 \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u} \right) \quad (6.46)$$

6.3. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO EM MATLAB

6.3.1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi desenvolvido um programa de otimização que resolve o problema da minimização do volume de estruturas contínuas bidimensionais (em estado plano de tensões ou deformações), submetidas a restrições de flexibilidade ou tensão. O programa foi desenvolvido em ambiente MATLAB que, na visão do autor, é um ambiente de programação que tem suas limitações (principalmente em relação à velocidade), mas é uma linguagem bastante flexível e poderosa, permitindo sua utilização em diversas áreas das ciências exatas.

Esse é um dos pontos que se deseja enfatizar: a escolha do MATLAB como ambiente de programação foi feita principalmente por ser mais prático utilizar um programa matemático geral para desenvolver um programa sério, e altamente complexo, como é o caso de um programa de otimização. Não deve ser esquecido que engenheiros são treinados para **resolver** problemas, e não criar outros na tentativa de resolver um determinado problema.

Logo, com computadores cada vez mais velozes, o uso de programas como o MATLAB (ou similares, como o SCILAB, de distribuição gratuita) serão cada vez mais utilizados, pelo simples fato de que muitas rotinas não tão simples e necessárias não precisarão ser programadas (como rotinas para manipular matrizes esparsas), pois já estão reunidas no mesmo pacote, evitando a necessidade de se buscar bibliotecas existentes em outras linguagens, cada uma tendo sua lógica de utilização, dependendo muitas vezes um grande período de tempo do programador apenas para compreender a utilização de uma determinada sub-rotina.

6.3.2. ALGORITMO

Em linhas gerais, o programa desenvolvido segue os padrões de outros programas de otimização já existentes, incluindo alguns desenvolvidos no Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) [Cardoso, 2000; Guilherme, 2001], laboratório no qual o autor desenvolveu essa pesquisa.

O algoritmo básico do programa pode ser visto na figura 6.5:

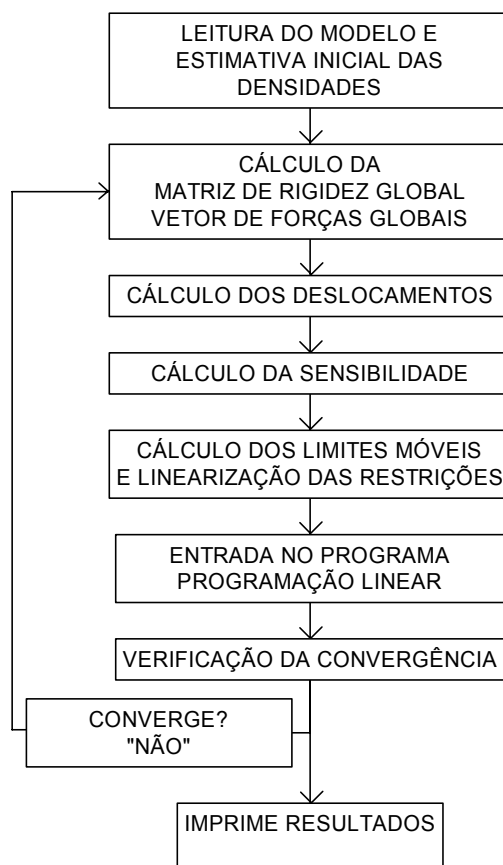


Figura 6.5: Algoritmo de programação utilizado no programa desenvolvido em MATLAB.

O procedimento geral de solução é relativamente simples; a maioria das técnicas utilizadas já foram descritas nos capítulos anteriores. Resumindo as principais etapas, inicialmente o programa lê um arquivo de texto que contém os dados necessários para se gerar um modelo de elementos finitos. Esse arquivo pode ser gerado manualmente se o modelo for pequeno; modelos com maior número de elementos são gerados no ANSYS e convertidos para o formato utilizado.

Esse modelo é então resolvido, encontrando-se os deslocamentos nodais. Com essa informação, as deformações, tensões e trabalho das forças externas podem ser calculados, bem como a sensibilidade das restrições e da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Essas informações são dados de entrada para as rotinas de programação linear utilizadas (da biblioteca SLATEC ou do próprio MATLAB). Um novo conjunto de densidades é gerado, realimentando o modelo de elementos finitos. Se o valor de uma determinada densidade começar a oscilar, reduz-se o valor do limite móvel em 20%, a fim de reduzir o intervalo de variação da densidade para o elemento. Essas etapas são executadas até a convergência que, se verificada, o processo finaliza, gerando um arquivo de saída que é lido em um programa pós-processamento.

Conforme explicado anteriormente, o modelo gerado apresenta uma grande fração de sua área formada por elementos com densidades intermediárias (cinza), as quais devem ser eliminadas. Dessa forma, utilizando o método da continuação, reduz-se o expoente da densidade, alterando a função objetivo (equação (6.5)). Um novo processo de otimização é iniciado, procurando qual dos elementos com densidades intermediárias tendem ao valor máximo ou ao valor mínimo. Assim, apesar da função objetivo ser reduzida, o volume da estrutura aumenta um pouco. Quando o algoritmo convergir novamente, a estrutura será composta quase que totalmente por elementos “cheios” ou “vazios”. Essa etapa é bastante suscetível ao aparecimento da instabilidade de tabuleiro, podendo ser então utilizado o filtro gaussiano, implementado nesse trabalho.

Se for utilizada restrição de tensão, pode ser necessário utilizar a relaxação- ϵ . Quando for o caso, inicia-se o processo com a função objetivo não penalizada e um valor de epsilon diferente de zero (geralmente inicia-se com 0,1). Quando esse modelo converge, reduz-se o valor de epsilon por um fator de 10. Esse processo vai sendo executado até que não haja mais alterações na função objetivo. Então o filtro pode ser ativado, e a função objetivo modificada.

7. RESULTADOS

Equation Chapter (Next) Section 1

7.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão mostrados alguns resultados obtidos com o uso dos métodos descritos nos capítulos anteriores. Em todos os exemplos foi utilizado o elemento de Taylor, descrito no apêndice I (seção AI.2).

Inicialmente serão mostrados alguns resultados referentes ao problema da minimização de volume com restrição de flexibilidade, comparando com resultados similares obtidos na literatura especializada. Em seguida, serão mostrados outros exemplos referentes ao problema da minimização do volume com restrição nas tensões. Sempre que possível será feita uma comparação entre a topologia final obtida entre os dois tipos de problemas que, como foi visto, podem apresentar características bastante distintas.

É importante ressaltar que, em todos os exemplos, as cargas e os deslocamentos prescritos não foram aplicadas sobre um único ponto (nó) da malha, e sim sobre um linha (que representa uma área na estrutura real tridimensional). Dessa forma, alguns problemas como concentrações de tensões, por exemplo, são evitados (basta lembrar que uma força pontual não existe na realidade, pois causaria tensão infinita no modelo).

7.2. MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE FLEXIBILIDADE

Os exemplos mostrados nessa seção são soluções das equações mostradas na seção 6.1 (equações (6.2) até (6.20)), para diferentes domínios discretizados (com diferentes condições de contorno aplicadas). Em todos os casos analisados foi usado o código DSPLP, uma rotina de programação linear primal-dual existente no pacote SLATEC, desenvolvido em FORTRAN.

O primeiro exemplo simulado é a chamada viga MBB, denominação essa originada da empresa aeronáutica alemã *Messerschmitt-Bolkow-Blohm GmbH* [Pereira, 2001].

Esse exemplo visa simular uma viga semi-longa bi-apoiada sob estado de flexão. A geometria e as condições de contorno são mostradas na figura 7.1:

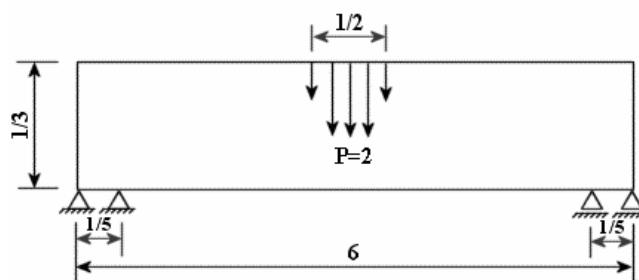


Figura 7.1: Viga MBB sob flexão (unidades no SI).

A estrutura contínua é discretizada em um modelo de elementos finitos com 3330 elementos. É utilizado um material “normalizado” com módulo de elasticidade $E=1 \text{ N/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. As unidades de todas as grandezas envolvidas são compatíveis entre si. Esse problema apresenta **3330 variáveis de projeto** e apenas **1 restrição**. Deseja-se obter um valor de flexibilidade 50% superior ao valor inicial.

Conforme mencionado anteriormente, utiliza-se o método da continuação. Na primeira etapa, a função objetivo (equação (6.4)) não é penalizada ($p=1$), obtendo-se então a seguinte topologia (figura 7.2):

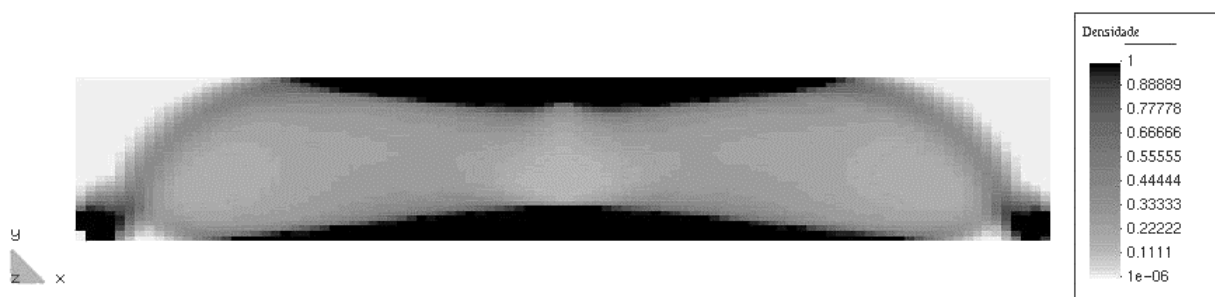


Figura 7.2: Topologia obtida com a função objetivo não penalizada.

Partindo da estrutura mostrada na figura 7.2 e aplicando o processo de filtragem em conjunto com a penalização da função objetivo com $p=0,125$, obtém-se a seguinte topologia (figura 7.3):



Figura 7.3: Topologia obtida com expoente $p=0,125$ na função objetivo.

Como pode ser percebido, a estrutura já encontra-se bem mais “limpa”, sendo o novo ponto de partida para mais uma etapa no método da continuação, aplicando uma nova penalização na função objetivo (equação (6.5)), com $p=0,125$ e $\alpha=0,3$. O filtro é desativado e os limites móveis encontram-se bastante reduzidos. A topologia final é dada na figura 7.4):

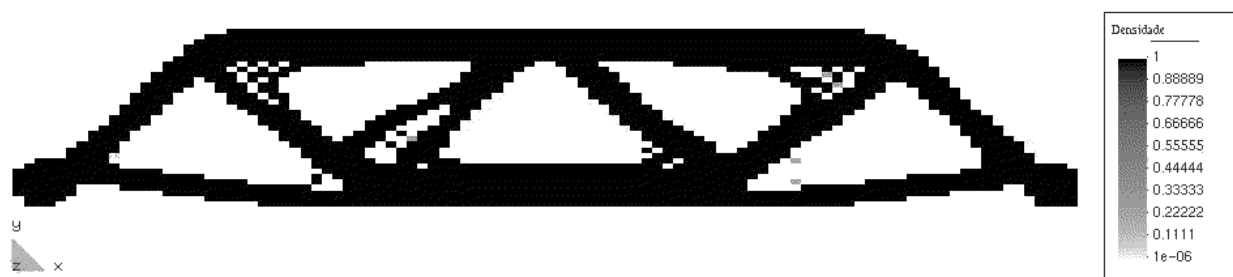


Figura 7.4: Topologia final "limpa".

A flexibilidade atingiu o valor limite ($W=300,8053 \text{ Nm}$) e encontra-se quase totalmente livre de regiões com densidades intermediárias, apresentando, entretanto, algumas regiões com instabilidade de tabuleiro.

Essa estrutura foi exportada para o ANSYS, a fim de verificar se esse valor de flexibilidade seria respeitado, lembrando que os elementos que “desaparecem”, na verdade ainda estão presentes na malha, apenas atingiram o valor mínimo da densidade. Dessa forma, foram exportados apenas elementos com pelo menos 75% de material na sua composição (equivalendo a um valor de densidade de 0,75). A estrutura obtida está mostrada na figura 7.5:

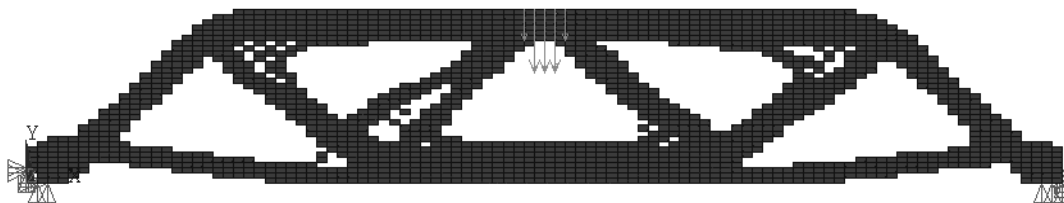


Figura 7.5: Estrutura analisada no ANSYS 5.7.

O valor obtido para flexibilidade foi de $W=302,4525$ Nm, o seja, a diferença entre o modelo otimizado e o modelo analisado foi de 0,55%.

Apenas a título qualitativo, as figuras a seguir mostram topologias obtidas por Jog, Haber e Bendsøe [Jog et al., 1994] para a mesma estrutura, utilizando inclusive diferentes métodos de solução:

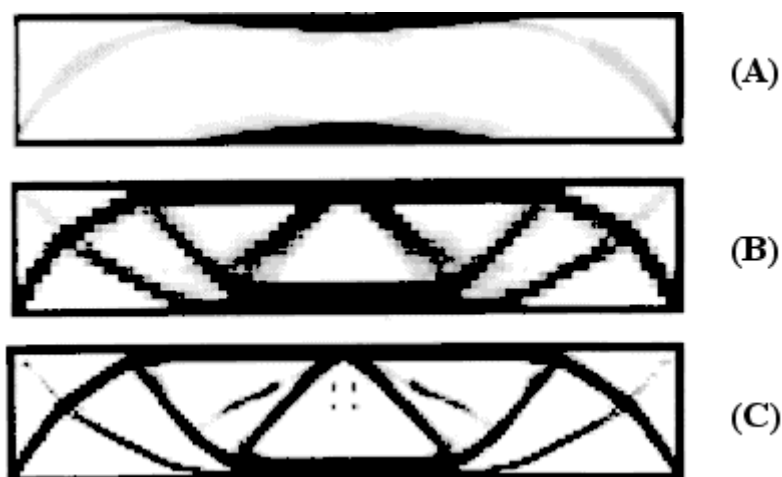


Figura 7.6: Distribuição ótima de material usando distribuição de material do tipo rank-2, penalizando as densidades intermediárias e o perímetro. (A) Distribuição das densidades sem restrições. (B), (C) Densidades intermediárias penalizadas [Bendsøe, 1995].

Uma consequência de se usar uma malha de elementos finitos para resolver um problema de otimização é o **contorno serrilhado** (não suave) que aparece nas soluções, podendo ser visto na figura 7.4, por exemplo. Numa primeira análise, isso pode parecer um problema do ponto de vista da engenharia, pois nenhum tipo de estrutura é construída dessa maneira. Entretanto, deve-se ter em mente que a malha de elementos finitos é apenas a representação de uma função contínua (densidade), tendo seu valor calculado apenas em um ponto no centro de cada elemento finito. Dessa forma, os resultados obtidos deveriam ser submetidos a mais uma etapa de “filtragem”, na qual o contorno seria suavizado. Existem técnicas de interpretação dos resultados, que suavizam o contorno da peça, eliminando o serrilhado indesejado.

Em alguns trabalhos, após a otimização topológica é efetuada uma otimização de forma na topologia gerada, a fim de melhorar os contornos da peça. Papalambros e Chirehdast [Papalambros e Chirehdast, 1990], Bendsøe e Rodrigues [Bendsøe e Rodrigues, 1991] e Olhoff, Bendsøe e Rasmussen [Olhoff, Bendsøe e Rasmussen, 1992], por exemplo, utilizam o método da homogeneização para resolver o problema de otimização topológica. Após isso, efetuam uma otimização de forma para suavizar o contorno. Além da otimização de forma, Papalambros e Chirehdast [Papalambros e Chirehdast, 1990] implementaram um algoritmo que elimina outros efeitos indesejados, como os elementos ligados por apenas 1 nó e os elementos com densidades intermediárias.

Existem também programas desenvolvidos especialmente para interpretação de soluções de problemas de otimização. Fonseca [Fonseca, 1997], trabalhando com homogeneização, utilizou um programa desenvolvido por Marsan et al. [Marsan et al., 1996], que, por sua vez, baseou-se nas rotinas desenvolvidas por Papalambros e Chirehdast [Papalambros e Chirehdast, 1990]. Esse programa efetua a filtragem dos elementos com densidades intermediárias, eliminando elementos conectados por um único nó (*hinges*), elementos isolados, suavizando o contorno das microestruturas utilizando splines.

Mais recentemente, Hsu e Chen [Hsu et. al., 2001], por exemplo, propõem um método baseado nas densidades dos elementos extrapoladas para os nós, gerando um contorno suavizado que respeita as restrições impostas (quantidade de material, nesse caso). Os autores fornecem inclusive exemplos de estruturas tridimensionais interpretadas por esse método.

O segundo problema resolvido utilizando-se a formulação (6.2) é bastante semelhante ao resolvido anteriormente, ou seja, novamente está sendo resolvido o problema da viga MBB, com as dimensões ligeiramente modificadas, conforme mostrado na figura 7.7:

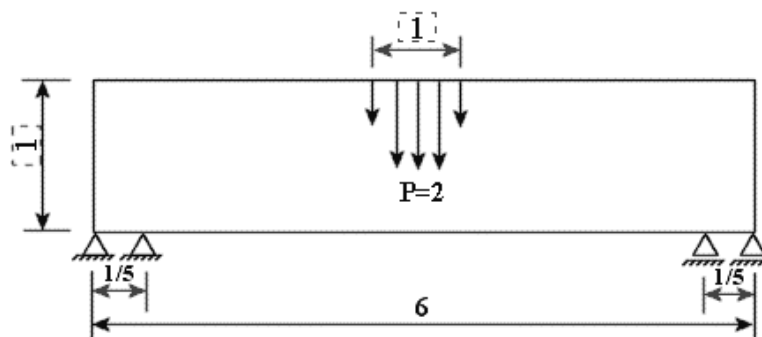


Figura 7.7: Geometria e condições de contorno da viga MBB (unidades no SI). As medidas destacadas indicam as diferenças em relação ao problema anterior (figura 7.1).

Esse modelo foi discretizado com **2400 elementos finitos**, significando que a solução será procurada em um espaço de dimensão inferior. Novamente, existe apenas **uma restrição**, e o valor da flexibilidade limite corresponde a um valor 50% superior ao valor inicial.

A estrutura obtida sem penalização alguma, mas com filtro gaussiano aplicado pode ser visualizada na figura 7.8:

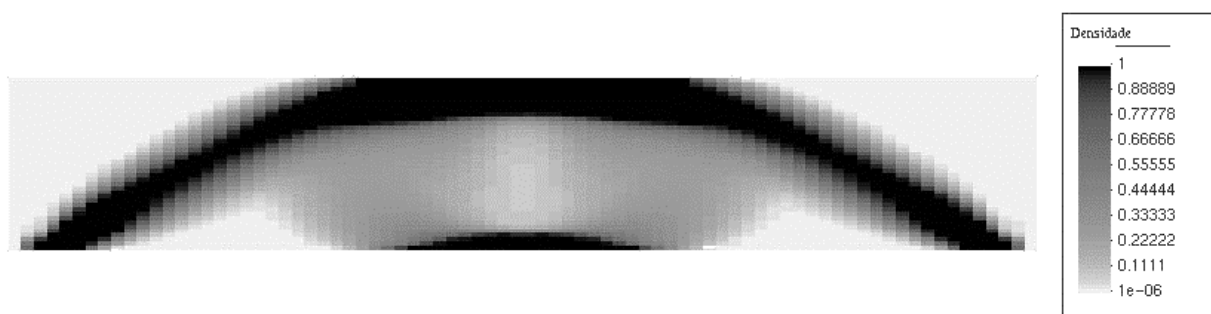


Figura 7.8: Estrutura otimizada, com expoente na densidade $p=1$.

Nesse exemplo aplicou-se apenas a primeira etapa de penalização, obtendo-se a seguinte estrutura:

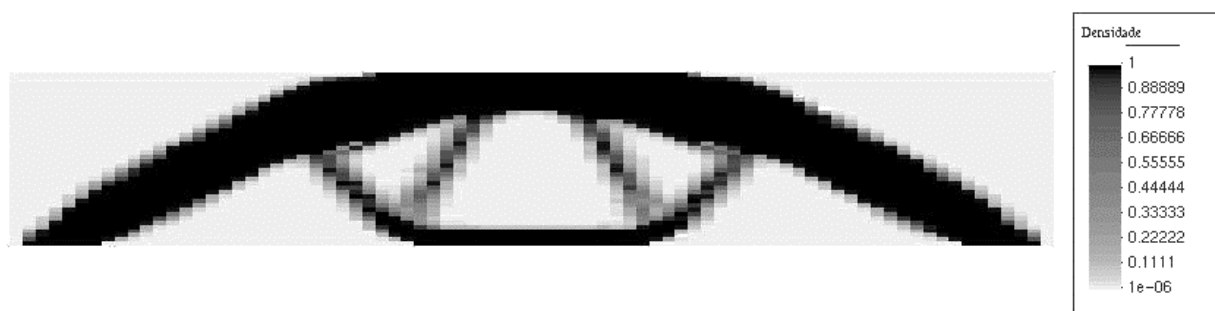


Figura 7.9: Estrutura obtida após a penalização da função objetivo com $p=1/8$.

Apesar do problema da minimização do volume com restrições de flexibilidade ser um problema convexo, ele não é imune ao problema da dependência da malha. O valor de flexibilidade obtido foi de **147,7647 Nm**. Exportando os elementos com pelo menos 75% de material, o modelo foi reanalisado no ANSYS, obtendo-se como resultado uma flexibilidade de **171,0347 Nm**, ou seja, a estrutura “interpretada”, sem elementos com densidades intermediárias está cerca de 15% mais flexível do que deveria.

Esse problema é interessante pois ilustra também o problema que ocorre quando a topologia final apresenta muitas regiões com densidades intermediárias. Foi mostrado que esses elementos cinza não são interessantes do ponto de vista da engenharia, pois não é fácil sua construção. Entretanto, matematicamente esses elementos estão contribuindo para aumentar a rigidez da estrutura. Se a estrutura “final” apresentar ainda muitas regiões com densidades intermediárias, pode acontecer que na interpretação (onde são retirados todos os elementos abaixo de certo valor de densidade) um número muito elevado de elementos seja retirado, inviabilizando a estrutura, diminuindo excessivamente a rigidez, fenômeno este ilustrado no exemplo.

O exemplo a seguir visa simular uma viga em balanço (nesse caso, uma cantoneira), com uma carga aplicada na extremidade central oposta ao engaste. A geometria bem como as condições de contorno aplicadas podem ser vistas na figura 7.10. Este exemplo apresenta todas as dimensões no SI (Sistema Internacional). O material isotrópico utilizado é o aço, com módulo de elasticidade valendo $E=2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ e um coeficiente de Poisson valendo $\nu=0,3$.

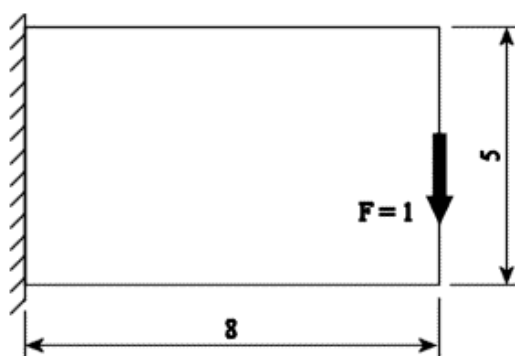


Figura 7.10: Geometria e condições de contorno da viga em balanço com carga central.

A estrutura obtida sem nenhum tipo de penalização, com uma malha de **2560 elementos** finitos é vista na figura 7.11:

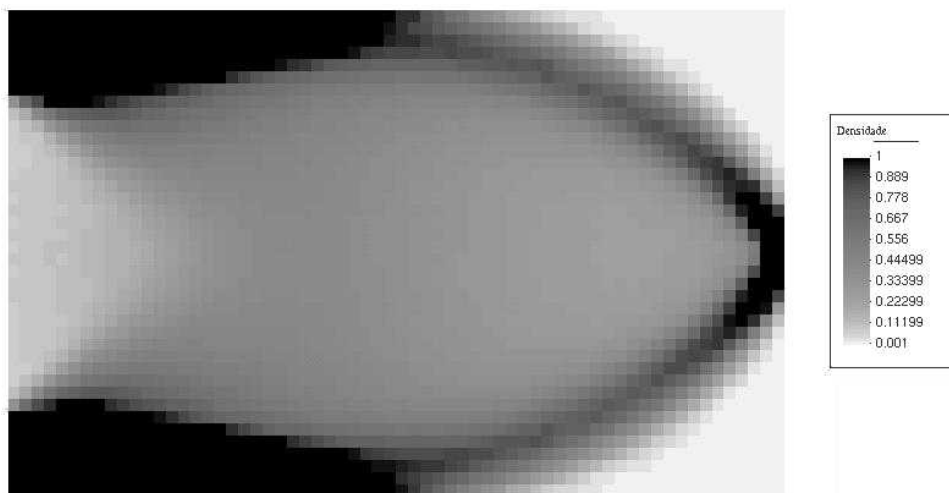


Figura 7.11: Estrutura otimizada, com expoente na densidade $p=1$.

Como era esperado, a topologia está repleta de regiões cinza. Efetuando os processos de filtragem e penalização, obtém-se as seguintes estruturas otimizadas:



(A)



(B)

Figura 7.12: Estrutura otimizada com (A) função objetivo penalizada com $p=1/8$ e (B) função objetivo penalizada com $p=1/8$ e $\alpha=0,3$.

A estrutura mostrada na figura 7.12 (B) apresentou um valor de flexibilidade $W=1,5732 \times 10^{-10} \text{ Nm}$. Quando os elementos que atingiram a mínima densidade são retirados, o valor de flexibilidade aumenta para $W=1,5841 \times 10^{-10} \text{ Nm}$, ou seja, sofreu um aumento de apenas 0,7% em relação ao projeto ótimo.

A figura a seguir ilustra soluções obtidas por outros autores para este problema:

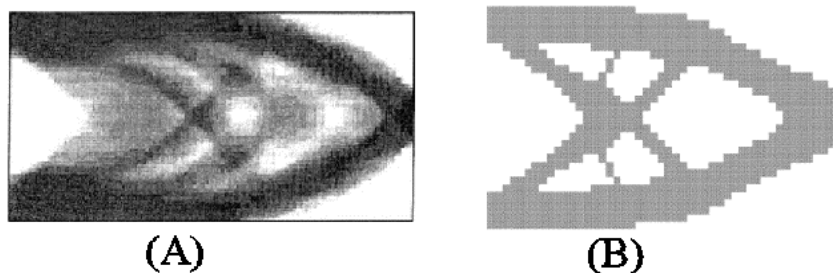


Figura 7.13: Soluções obtidas aplicando o método da homogeneização. (A) Solução obtida sem penalizar as densidades intermediárias. (B) Solução não interpretada com densidades intermediárias penalizadas [Kim et al., 2002].

Analisando a figura 7.12, verifica-se a existência de um problema não esperado. Esperava-se obter uma estrutura **completamente** simétrica, uma vez que as cargas aplicadas e os deslocamentos prescritos o são. Entretanto, Kosaka e Svan [Kosaka e Svan, 1999] afirmam que isso nem sempre acontece. Analisando alguns dos prováveis motivos, os autores destacam duas principais razões para o aparecimento de assimetrias em projetos ótimos:

1. Erros causados por arredondamentos nos cálculos referentes à análise de sensibilidade ou nas rotinas de otimização;
2. A formulação do problema de otimização conduz a um problema não estritamente convexo, no qual podem existir diversos mínimos locais.

Entretanto, acredita-se que a causa da topologia não simétrica obtida na figura 7.12 (B) seja o próprio algoritmo SLP, somado ao fato que o ponto de ótimo pode estar em uma região quase plana do espaço. A figura 7.14 ilustra essa idéia:

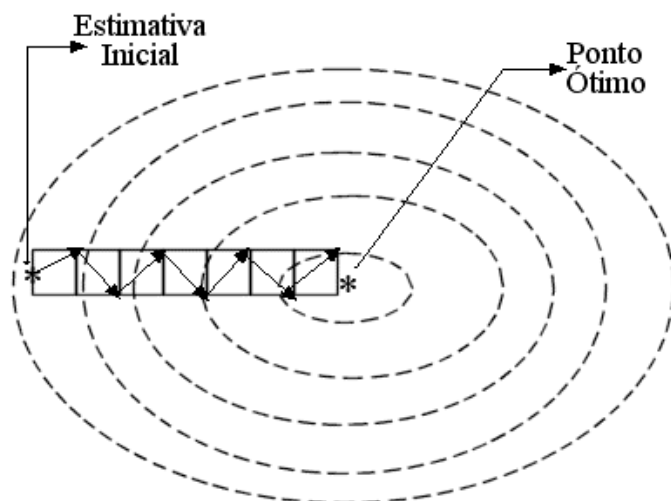


Figura 7.14: Representação da busca do ponto ótimo utilizando o algoritmo SLP.

O algoritmo SLP só procura o ponto ótimo nos vértices dos hipercubos gerados pelos limites móveis. Dessa forma, perto do ótimo, a verdadeira solução pode nunca ser efetivamente encontrada, principalmente se a função for quase plana perto desse ponto (figura 5.10 (B)).

O próximo problema também é um exemplo clássico na literatura: trata-se do problema da ponte, uma estrutura submetida a dois casos de carregamento. Já foi resolvido utilizando-se treliças [Guilherme, 2001]. A figura 7.15 ilustra a geometria e as condições de contorno:

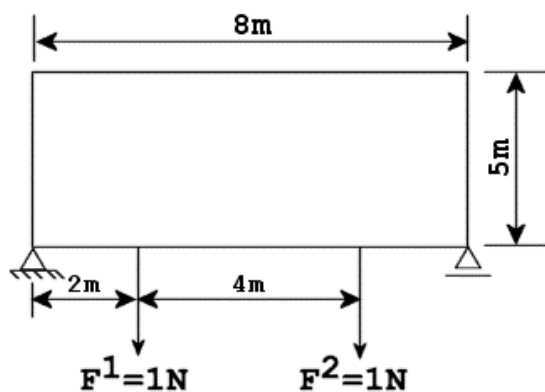


Figura 7.15: Geometria e condições de contorno.

Utilizou-se um material com propriedades do aço ($E=210000$ MPa e $\nu=0,3$). Ao contrário dos demais exemplos envolvendo flexibilidade, esse problema é não-convexo, podendo apresentar mais de uma solução. Nesses casos, o procedimento mais geral na busca da solução ótima consiste em resolver o mesmo problema partindo de estimativas iniciais diferentes. Devido

ao alto custo computacional da análise, esse procedimento não foi efetuado. Dessa forma, a estrutura obtida sem penalizar a função objetivo é mostrada na figura a seguir:

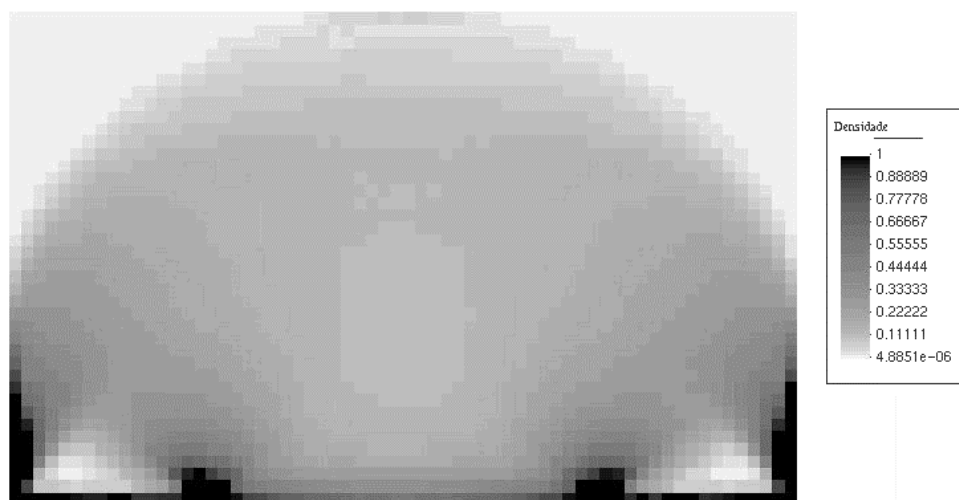


Figura 7.16: Topologia obtida na primeira etapa do método da continuação.

A estrutura foi discretizada usando uma malha com **2560 elementos**, possuindo **2560 variáveis de projeto** e **2 restrições**. Como a estrutura inicial é simétrica, o limite de flexibilidade selecionado é idêntico para os dois casos de carregamento, valendo $W_{lim} = 3,11 \times 10^{-11} \text{ Nm}$. As figuras a seguir mostram típicos gráficos de convergência de problemas envolvendo restrições de flexibilidade:

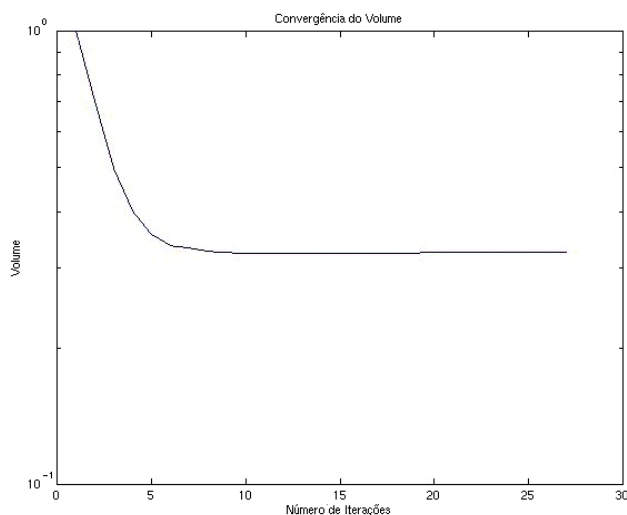


Figura 7.17: Convergência do volume (função objetivo não-penalizada).

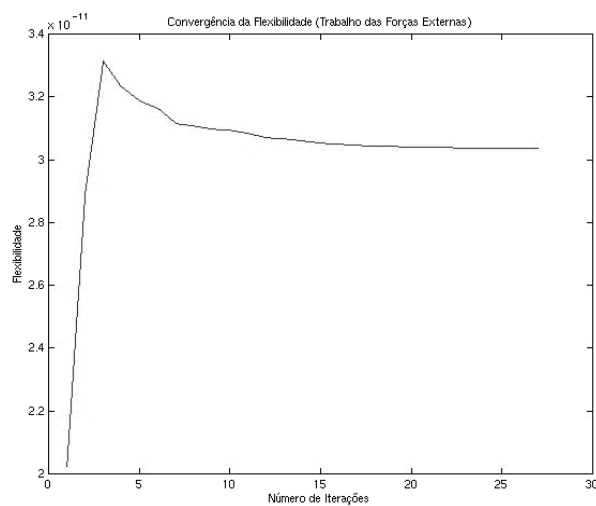


Figura 7.18: Convergência da flexibilidade (1° caso de carga).

Penalizando a função objetivo, obtém-se as novas topologias mostradas na figura 7.19:



(A)



(B)

Figura 7.19: Função objetivo penaliza com: (A) $p=1/8$ e filtro gaussiano ativado. (B) $p=1/8$ e $\alpha=0,3$ com filtro gaussiano desativado.

Nota-se mais uma vez a assimetria obtida na estrutura final, devido à não convexidade do problema e aos conhecidos problema do LP mencionados anteriormente.

O último exemplo que se deseja mostrar nessa seção é também um problema já bastante discutido na literatura, tratando-se de uma variação da viga em balanço mostrada na figura 7.10. A geometria e as condições de contorno encontram-se na figura 7.20:

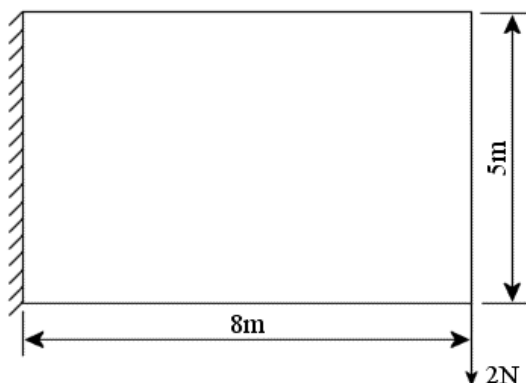


Figura 7.20: Geometria e condições de contorno da viga em balanço.

Foi selecionado um material normalizado como módulo de elasticidade unitário e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. Após algumas iterações, o limite de flexibilidade foi atingido, obtendo-se a seguinte topologia:

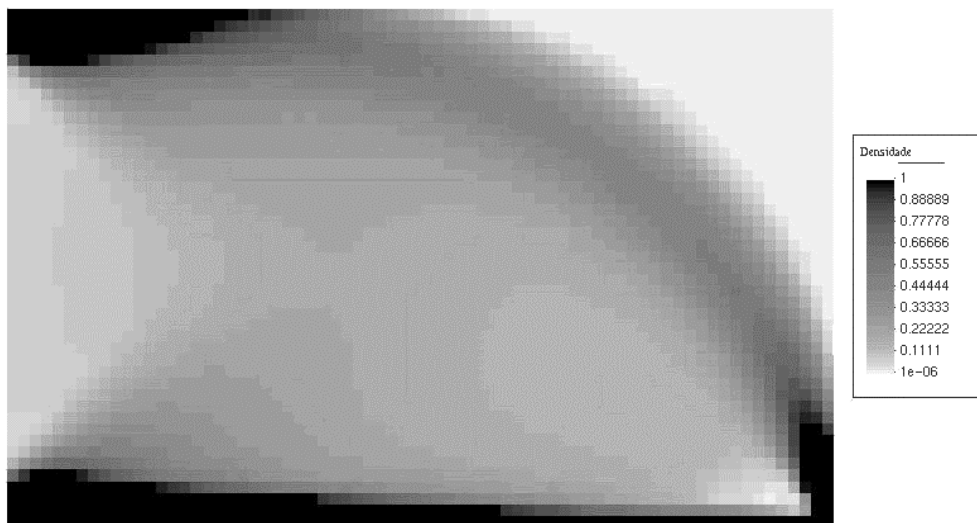


Figura 7.21: Estrutura gerada sem penalização das densidades intermediárias, com filtro gaussiano ativado.

A malha é composta por 3240 elementos finitos.

Aplicando o método da continuação, obtém-se as estruturas mostradas nas figuras seguintes, com um mínimo de regiões com densidades intermediárias. O valor limite de flexibilidade foi atingido ($W_{lim} = 237,4057 \text{ Nm}$):



Figura 7.22: Topologia obtida com função objetivo penalizada ($p=1/8$) e filtro gaussiano ativado.



Figura 7.23: Topologia obtida com função objetivo penalizada ($p=1/8$, $\alpha=0,3$) e filtro gaussiano desativado.

Percebe-se da figura 7.23 que a topologia obtida é relativamente complexa, sendo difícil sua construção. Esse problema poderia ser evitado alterando o valor do filtro, tornando os elementos “mais dependentes” de seus vizinhos. Apesar de esse não ser o objetivo desse trabalho (controle da complexidade das estruturas), acredita-se que um filtragem com pesos **0,04-0,92-0,04** resolveria o problema. Maiores detalhes sobre complexidade das estruturas e possíveis

soluções fogem dos objetivos desse trabalho, mas podem ser encontrados no trabalho de Cardoso [Cardoso, 2000], por exemplo.

Assim como nos demais exemplos, a estrutura gerada deve ser interpretada. Exportando todos os elementos com pelo menos 75% de material, uma nova análise estrutural fornece o resultado mostrado na figura a seguir:

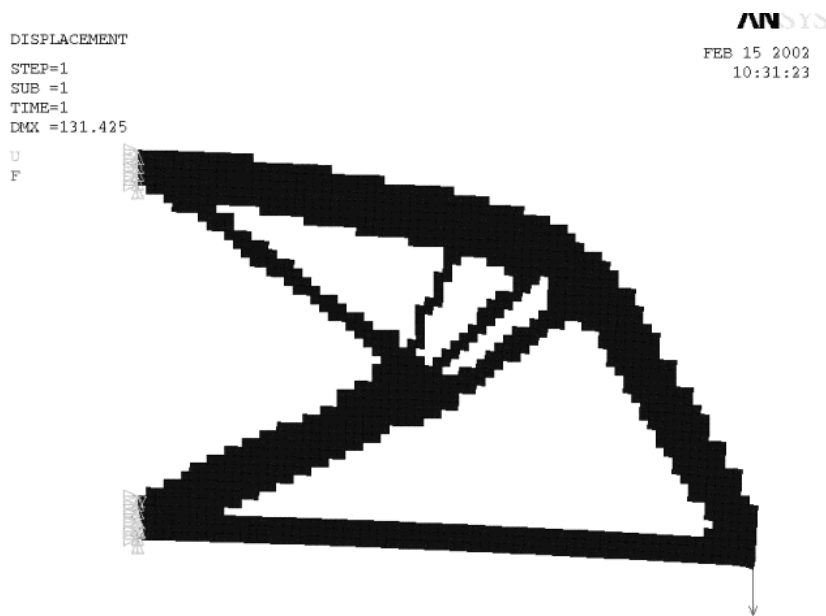


Figura 7.24: Interpretação da topologia mostrada na figura 7.23.

O resultado mostrado na figura 7.23 apresenta um valor de flexibilidade valendo $W=237,4057 \text{ Nm}$, ou seja, exatamente o limite de flexibilidade selecionado. Quando os elementos com densidade mínima ou intermediária são retirados, esse valor passa à $W=249,78 \text{ Nm}$, ou seja, cerca de 5% superior ao limite selecionado.

7.3. MINIMIZAÇÃO DO VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO

Nessa seção serão mostrados alguns exemplos resolvidos utilizando a formulação mostrada na seção 6.2. Conforme explicado nas seções anteriores, esse é um problema de larga escala, no qual o número de restrições é igual ao número de variáveis de projeto, considerando apenas um caso de carregamento. Em outras palavras, o custo computacional desse problema é extremamente elevado. Por esse motivo, conhecendo as limitações do ambiente MATLAB (memória e velocidade), optou-se por não utilizar modelos com um número muito grande de elementos finitos, gerando-se então malhas não muito refinadas (com até 1000 elementos), mas que descrevem bem o comportamento mecânico da estrutura, ao mesmo tempo ilustrando a

funcionalidade do algoritmo de otimização desenvolvido, pois um dos objetivos deste trabalho é construir um algoritmo eficiente que resolva o problema de otimização proposto.

Utilizou-se o algoritmo de programação linear primal-dual LINPROG, pertencente à biblioteca de otimização do MATLAB. O algoritmo DSPLP não se mostrou satisfatório para a solução desse problema, chegando inclusive a paralisar o sistema quando a solução se aproximava do ótimo. Acredita-se que a implementação atual não consegue manipular corretamente as restrições de tensão, que são muitas e suas derivadas variam muito, pois correspondem a um problema com características bastante não-lineares.

O primeiro exemplo analisado tem sua geometria e condições de contorno mostradas na figura 7.25:

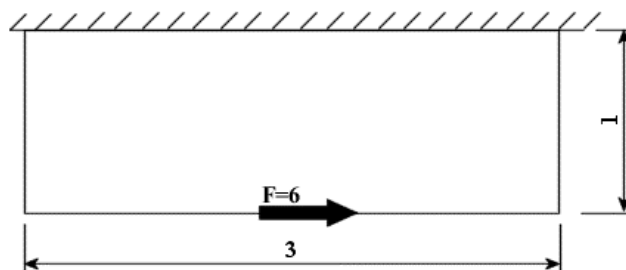


Figura 7.25: Geometria e condições de contorno (unidades no SI).

Esse exemplo foi modelado usando uma malha com **675 elementos finitos**. O problema de otimização possui, portanto, **675 variáveis de projeto** e **675 restrições** sobre as tensões, uma para cada elemento da malha. Nesse exemplo não foi aplicada a técnica da relaxação epsilon. Os resultados obtidos para as diferentes etapas do método da continuação estão na figura 7.26. O material utilizado é normalizado, apresentando um módulo de elasticidade $E=1 \text{ N/m}^2$, e coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. A tensão de escoamento selecionada (limite de tensão) vale $\bar{\sigma} = 35 \text{ N/m}^2$.

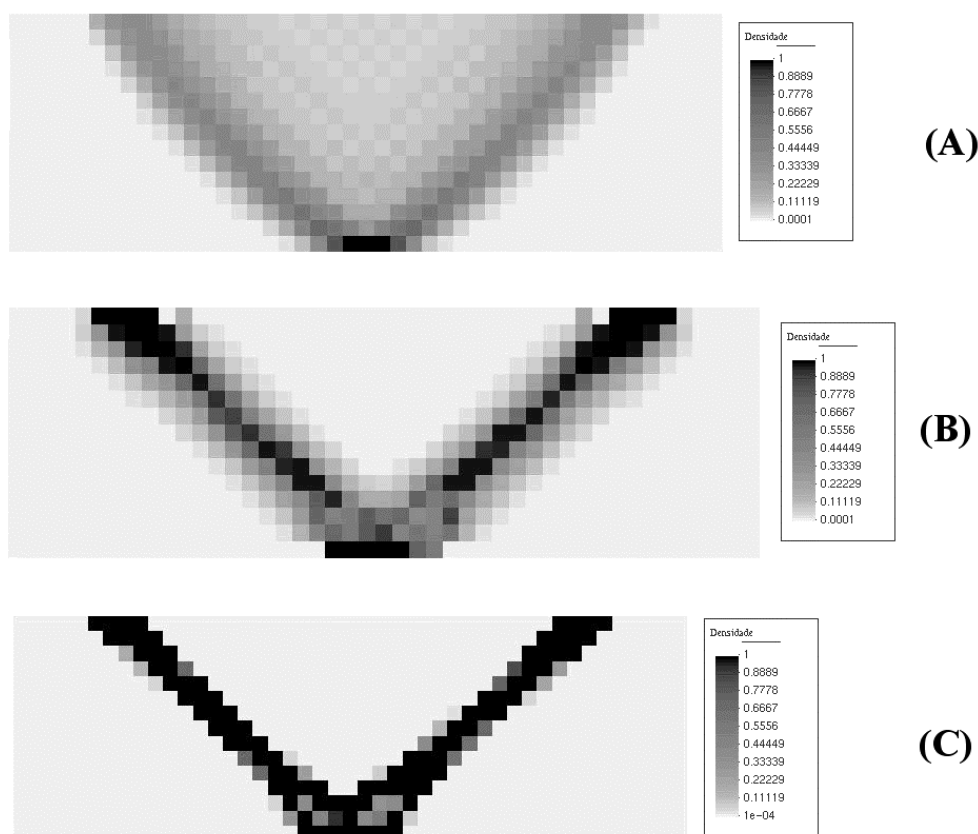


Figura 7.26: Distribuição das densidades. (A) Filtro de vizinhança ativado e função objetivo não penalizada. (B) Filtro de vizinhança ativado e função objetivo com expoente $p=1/8$. (C) Filtro de vizinhança desativado e função objetivo penalizada com $p=1/8$ e $\alpha=0,3$.

Na figura 7.26 (A) percebe-se a formação da instabilidade de tabuleiro na região central. Entretanto, como nesse exemplo os esforços predominantes são tração e compressão, esse problema tende a desaparecer.

A topologia mostrada na figura 7.26 (C) apresenta um volume final de **0,4512 m³**, correspondendo a uma flexibilidade **W=332,3229 Nm**. O resultado obtido para esta estrutura com estas condições de contorno está dentro do esperado: o algoritmo procurou distribuir material de forma a formar “barras” à 45°, resultado analítico exato no caso de otimização de treliças com condições de contorno semelhantes [Rozvany et al., 1995].

A figura 7.27 mostra a distribuição de tensão de Von Mises para essa peça:

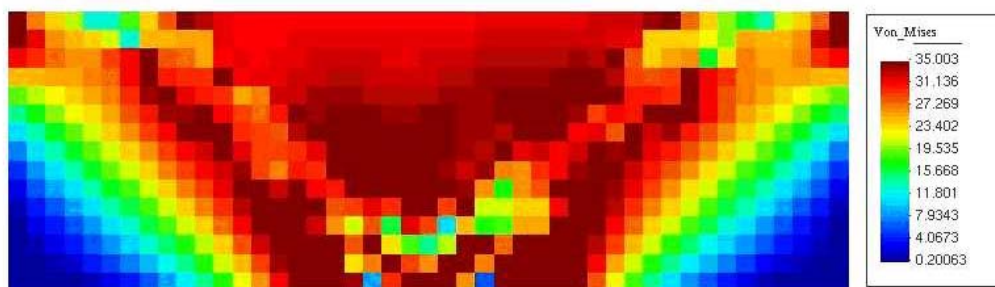


Figura 7.27: Tensões de Von Mises; $\sigma_{\max}=35,003 \text{ N/m}^2$.

Nota-se que a tensão máxima está respeitando o limite, e os maiores valores de tensão aparecem nos elementos com baixas densidades.

Esse resultado deve ser interpretado, ou seja, deve-se verificar se a estrutura respeitará os limites de tensão após a completa retirada dos elementos com densidades intermediárias e elementos que atingiram a densidade mínima. Exportando todos os elementos com pelo menos 70% de material, analisa-se no ANSYS e obtém-se o seguinte resultado:

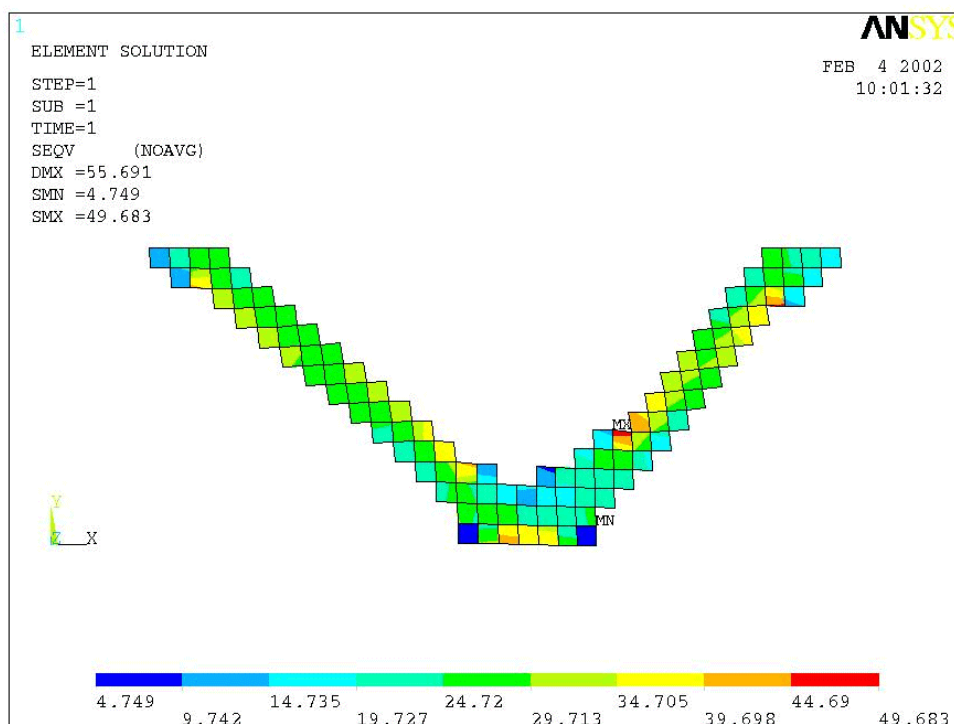


Figura 7.28: Problema do mínimo volume com restrições de tensão (figura 7.26 (C)) interpretado.

A tensão máxima calculada vale $49,683 \text{ N/m}^2$, ou seja, violando em cerca de **41%** o limite pré-estabelecido. Um resultado desse tipo já era esperado por dois motivos: tanto o material composto formado no processo de otimização quanto os elementos com densidades

mínimas possuem rigidez, contribuindo para a resposta estrutural do sistema. Retirando esses elementos, a rigidez diminui, aumentando a flexibilidade e conseqüentemente as tensões. Outro motivo é o contorno serrilhado. Domínios desse tipo (conhecidos também por não-Lipchitzianos) promovem concentrações de tensão. Conforme explicado anteriormente, a malha de elementos finitos é apenas uma representação da densidade de material, que tem seu valor calculado no centro do elemento. Uma interpretação alternativa, suavizando o contorno tenderia a minimizar esse problema.

A mesma estrutura foi analisada considerando restrições no trabalho das forças externas. O limite selecionado foi de $W_{lim}=332,3229$ Nm, valor final obtido no problema com restrições de tensão. O resultado já interpretado pode ser visto na figura a seguir:

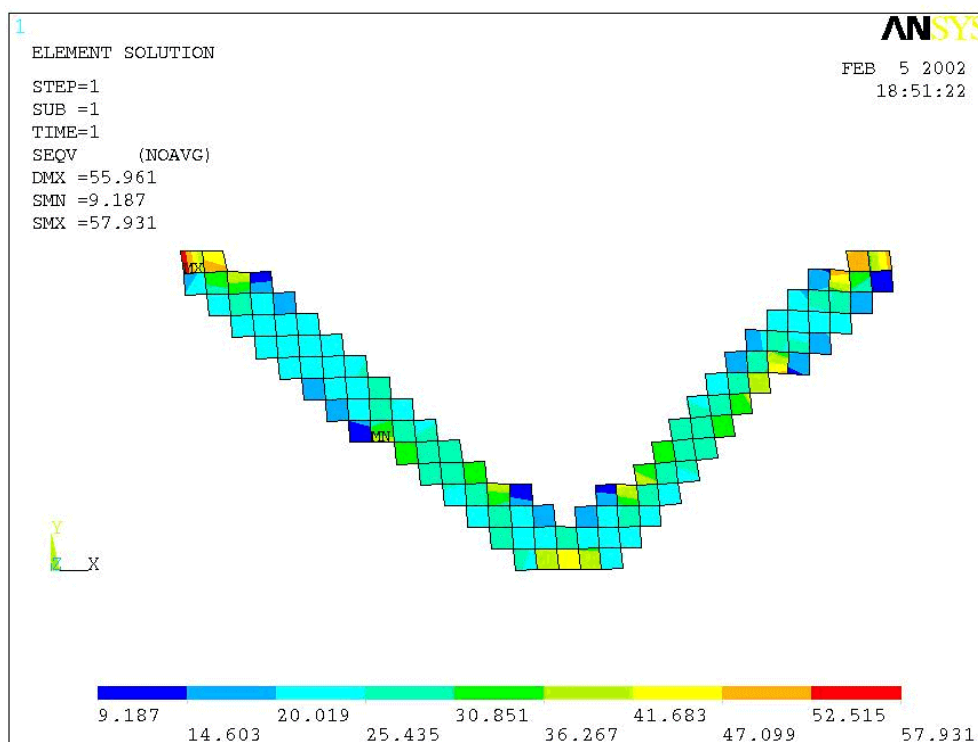


Figura 7.29: Estrutura interpretada aplicando restrições de flexibilidade.

Apesar de a tensão máxima encontrar-se num patamar superior $\sigma_{m\acute{a}x} = 57,931$ N/m², a topologia obtida é bastante semelhante à mostrada na figura 7.28. O volume final obtido vale **0,4670 m³**. Alguns autores usam o resultado obtido no problema da flexibilidade como ponto de partida para o problema com restrições de tensão pois, em muitos casos, os ótimos dos dois problemas estão próximos um do outro.

O próximo exemplo analisado é também um problema clássico da literatura da otimização topológica, tratando-se do componente estrutural em formato de L. A geometria do problema é mostrada na figura 7.30:

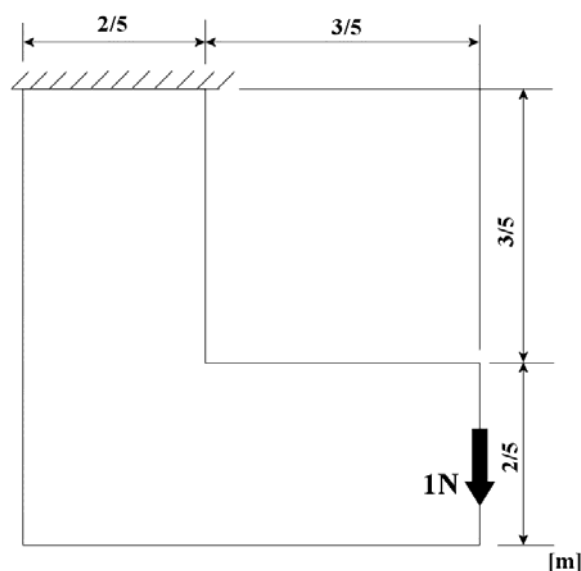


Figura 7.30: Definição do problema (geometria e condições de contorno).

O modelo está engastado na parte superior e carregado com uma força de 1N na região central da extremidade esquerda. O material utilizado tem módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson valendo, respectivamente, $E = 1\text{N/m}^2$ e $\nu=0,3$. Conforme sugerido por Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998] nesse problema aplicou-se a relaxação- ϵ , permitindo que o algoritmo de programação linear possa penetrar nas regiões degeneradas do espaço das soluções.

Essa geometria, em especial, introduz uma dificuldade muito maior do ponto de vista da análise do que da otimização propriamente dita, pois o canto vivo é um concentrador de tensões, que torna difícil a correta captação numérica do valor da tensão. Além disso, a otimização em si é dependente da qualidade da análise. Normalmente, análises desse tipo requerem um número muito elevado de elementos finitos bem como processos de readaptatividade de malha para captar corretamente o comportamento próximo aos cantos vivos. Por outro lado, da maneira como foi implementada a sensibilidade (como uma restrição local), uma malha muito refinada torna o problema de otimização muito lento. Por isso, optou-se por utilizar uma malha mais grosseira (**256 elementos finitos**), mas tendo em mente que um resultado mais preciso em relação à tensão só seria obtido com uma malha mais fina. Mesmo assim, o resultado desse exemplo pode ser encarado de forma qualitativa, mostrando que a formulação utilizada funciona, obtendo resultados semelhantes aos da literatura pesquisada.

Assim, as soluções para alguns valores de ϵ estão mostradas na figura 7.31:

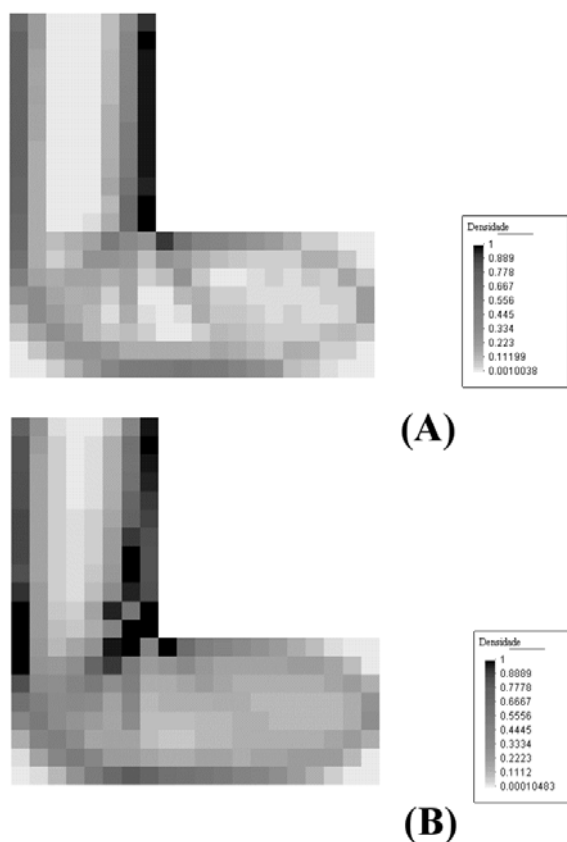


Figura 7.31: Distribuição das densidades com restrições de tensão relaxadas. (A) $\epsilon=0,1$. (A) $\epsilon=0,0001$.

O filtro de vizinhança permanece ativado nessa etapa do processo, que continua até atingir um valor de $\epsilon=10^{-8}$, quando o valor da função objetivo não mais se alterava. A topologia obtida após as etapas de filtragem pode ser vista na figura seguinte:

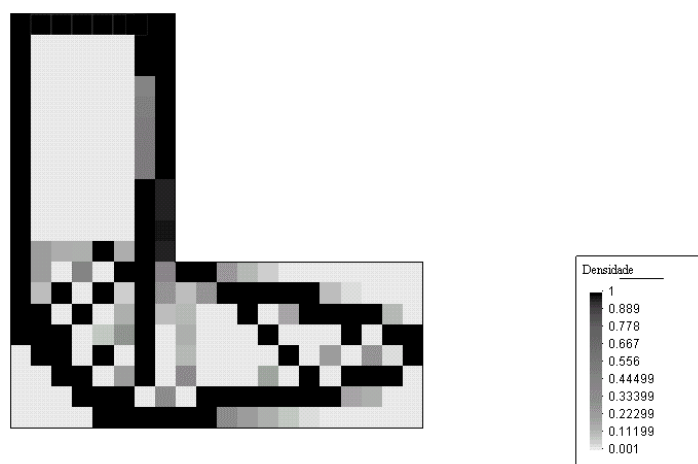


Figura 7.32: Distribuição de material obtida após a penalização da função objetivo ($p=1/8$ e $\alpha=0,3$).

A figura 7.33 representa o mapa de tensões, mostrando que nenhum elemento viola a restrição ($\sigma_{lim} \leq 40 \text{ Pa}$).

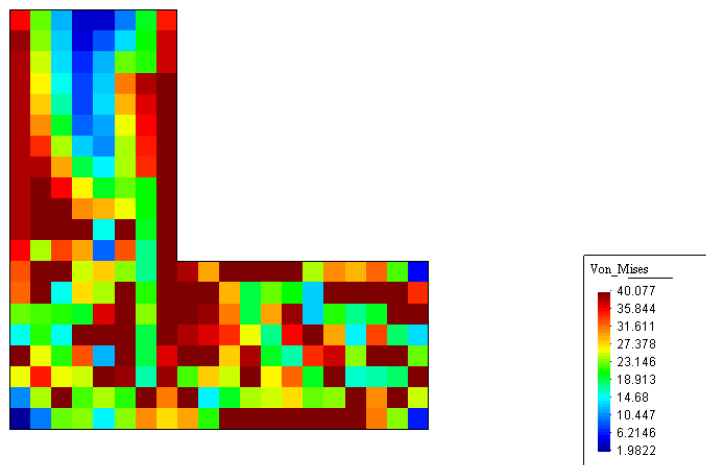


Figura 7.33: Distribuição das tensões de Von Mises no domínio; $\sigma_{max}=40,077 \text{ N/m}^2$.

O resultado da figura 7.32 deve ser interpretado, visto que ainda possui uma quantidade considerável de regiões cinza. Exportando elementos com pelo menos 60% de material, e eliminando elementos conectados por apenas 1 nó, obtém-se:

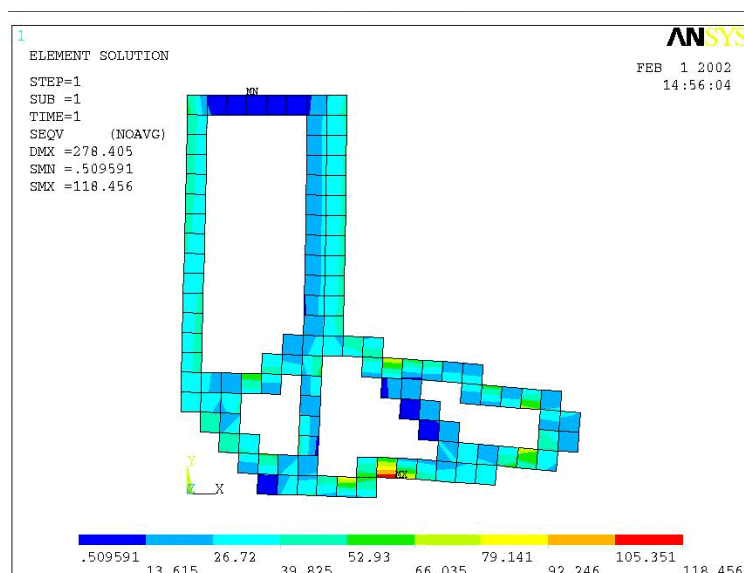


Figura 7.34: Interpretação dos resultados.

Mais uma vez a tensão interpretada ultrapassou o limite de tensão estipulado ($\sigma_{\text{interpretada}}=118,5 \text{ N/m}^2$), ou seja, matematicamente o problema está correto, porém, sua construção, na prática, seria inviável.

Foi feita então uma nova discretização, agora com **576 elementos** a fim de verificar se o campo de tensões seria mais bem representado. A tensão limite também sofreu um incremento ($\sigma_{\text{lim}}=50 \text{ N/m}^2$). Todas as demais dimensões foram mantidas. Os resultados dessa nova malha podem ser vistos na figura 7.35:

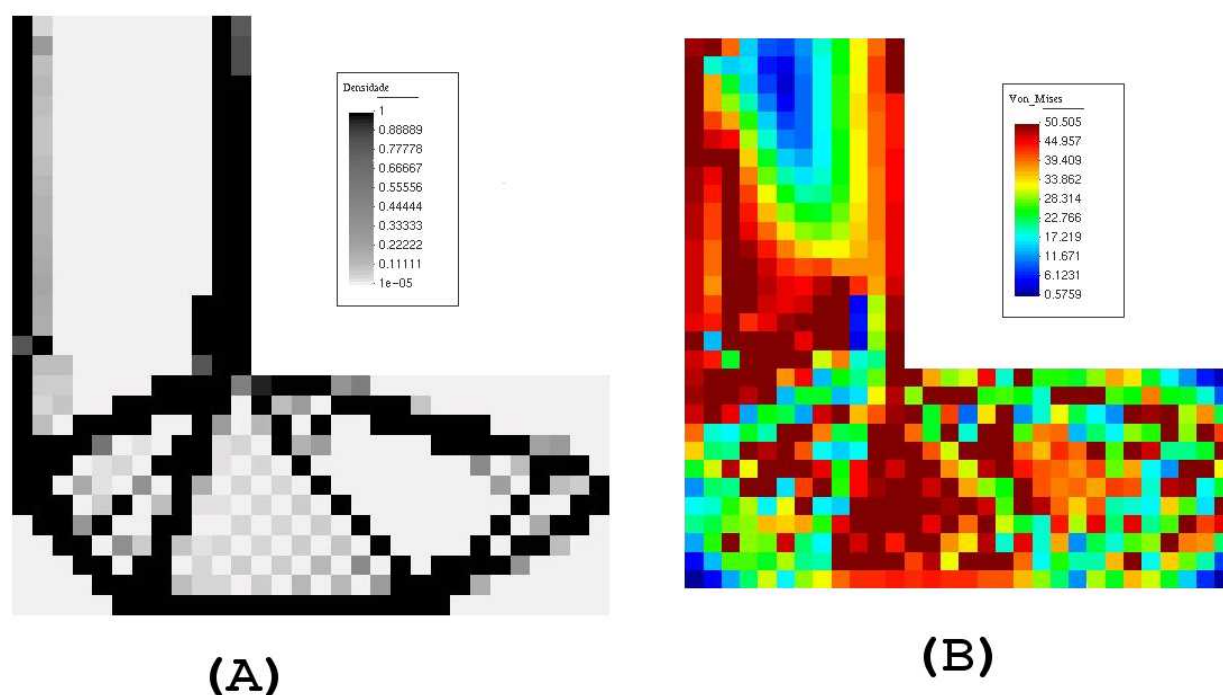


Figura 7.35: (A) Campo de densidades; (B) Campo de tensões; $\sigma_{\text{máx}}=50,505 \text{ N/m}^2$.

Pode-se perceber na figura 7.35 (A) a presença indesejável da instabilidade xadrez. Apesar disso, a topologia obtida está bem mais definida, principalmente se comparada com a geometria obtida com a discretização mais grosseira (figura 7.32). O resultado deve ser interpretado. Exportando os elementos com pelo menos 70% de material, obtém-se o seguinte resultado:

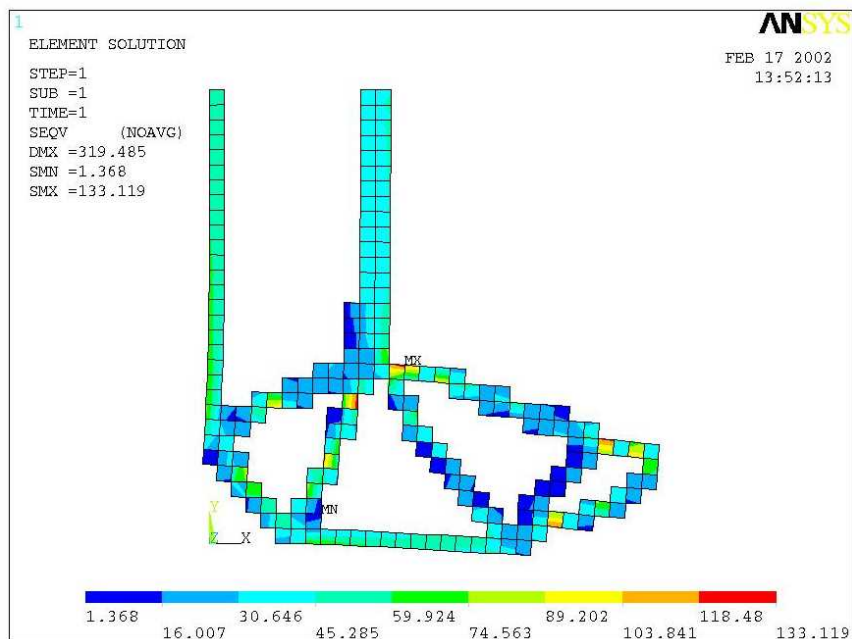


Figura 7.36: Resultados interpretados.

Como era esperado, a tensão passou o limite estabelecido. A máxima tensão encontra-se agora justamente na região do “canto-vivo”, valendo **133,119 N/m²**.

A topologia mostrada na figura 7.35 (A) obteve **W=237,1885 Nm** como valor da flexibilidade. Esse resultado foi utilizado como limite de flexibilidade para a geometria mostrada na figura 7.37, que corresponde a uma solução do domínio mostrado na figura 7.30, aplicando restrição na flexibilidade da estrutura:

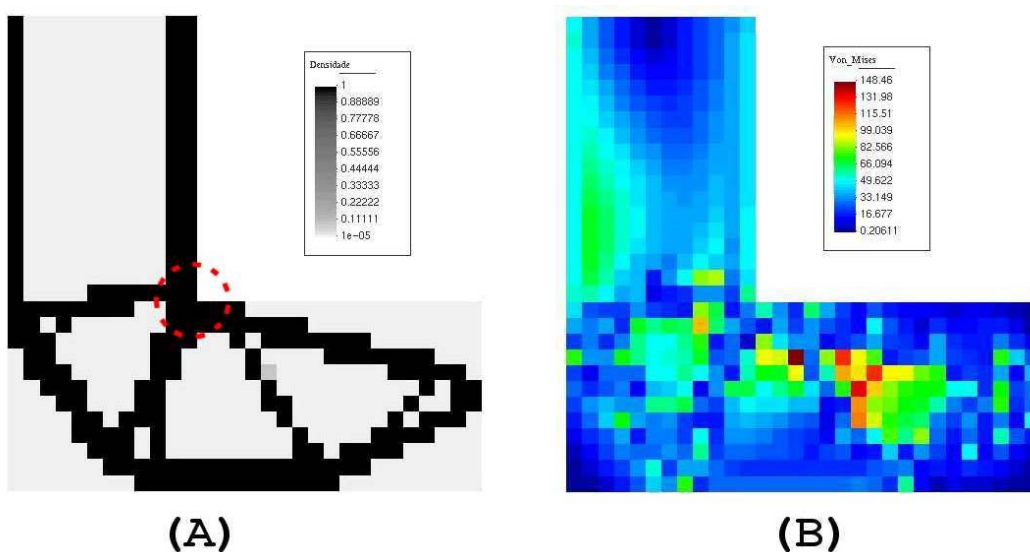


Figura 7.37: (A) Campo das densidades. (B) Campo das tensões; $\sigma_{\text{máx}}=148,46 \text{ N/m}^2$.

A região destacada na figura 7.37 (A) ilustra a principal diferença entre a topologia obtida na figura 7.35 (A), na qual foram aplicadas restrições de tensão. A figura 7.35 (A) apresenta um elemento com densidade intermediária (menos rígido), no elemento próximo ao canto-vivo, respeitando, dessa forma, a restrição de tensão. Esses elementos cinzas não se verificam na estrutura submetida a restrições de flexibilidade atingindo, dessa forma, tensões mais elevadas naquela região (num sentido global). Os volumes finais obtidos também foram ligeiramente diferentes ($V_f = 0,2126 \text{ m}^3$ para a estrutura gerada com restrições de tensão e $V_f = 0,2212 \text{ m}^3$ quando a restrição considerada era a flexibilidade).

A figura seguinte mostra os resultados da distribuição de material obtida por outros autores, utilizando diferentes discretizações:



Figura 7.38: Distribuições de densidade obtidas por: (A) Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998] usando uma malha com 1225 elementos quadriláteros com 9 nós e (B) Pereira [Pereira, 2001], utilizando uma malha com 5218 elementos triangulares CST. A região destacada mostra a solução correta para eliminar as concentrações de tensão geradas pelo canto-vivo.

O resultado mostrado na figura 7.32 utiliza a mesma metodologia (no que se refere ao cálculo da sensibilidade) empregada por Duysinx e Bendsøe (figura 7.38 (A)). Apesar de qualitativamente o resultado obtido nesse trabalho estar coerente com o resultado mostrado na figura 7.38 (A), percebe-se aqui a importância de uma melhor discretização na malha de elementos finitos, possibilitando assim representar mais coerentemente o campo de tensões.

A importância da discretização se mostra ainda mais presente quando se comparam os resultados mostrados nas figuras 7.38 (A) e 7.38 (B): a geometria obtida por Pereira, com elementos finitos de baixa ordem respeita as restrições, enquanto que a topologia mostrada na figura 7.38 (A) viola as restrições quando eliminados os elementos com densidades intermediárias.

8. CONCLUSÕES

Este trabalho basicamente possui dois objetivos principais: o primeiro consiste em desenvolver um programa que resolve o problema da minimização do volume de estruturas contínuas submetidas a restrições de flexibilidade ou tensão, criando para tal um algoritmo computacional. Para isso, foi também desenvolvido o cálculo das sensibilidades dessas restrições. O outro objetivo consiste na apresentação de resultados (ainda simples, nessa etapa do estudo) que comprovassem a validade do método desenvolvido. Ambos os objetivos foram cumpridos.

Qualquer método de solução escolhido, seja o trabalho numérico ou experimental, naturalmente possuirá prós e contras. No caso específico deste trabalho, foi desenvolvido um programa em ambiente MATLAB que calcula as variáveis de projeto (densidades) que representam um projeto ótimo. Para tal, as estruturas usadas como exemplo são discretizadas utilizando uma malha onde todos os elementos finitos são iguais. A partir do valor dos deslocamentos nodais, a resposta estrutural desse sistema em termos de tensão e flexibilidade é calculada, servindo como base para o cálculo das derivadas analíticas da função objetivo e das restrições, que são utilizadas como direção de busca num algoritmo de programação linear seqüencial.

Em todos os problemas analisados obteve-se resultados satisfatórios quando comparados com problemas similares encontrados na literatura.

O principal objetivo do trabalho foi cumprido, ou seja, a partir de uma estimativa inicial para as variáveis de projeto, obteve-se estruturas com um menor gasto na quantidade de material. O algoritmo desenvolvido distribuiu esse material da maneira mais eficiente possível com o intuito de respeitar as restrições de projeto impostas, seja sobre a flexibilidade ou sobre as tensões.

O algoritmo de programação linear utilizado resolve satisfatoriamente os dois tipos de problemas, convergindo rapidamente para o mínimo, principalmente nos problemas envolvendo flexibilidade.

O uso de malhas regulares mostrou-se bastante útil, pois apenas uma matriz de rigidez local precisa ser calculada a cada iteração, aumentando a velocidade do processamento. Além disso, facilita a implementação de filtros de vizinhança que evitam o aparecimento do fenômeno da instabilidade de tabuleiro.

O elemento finito utilizado para discretizar as estruturas (elemento de Taylor) mostrou-se satisfatório para os domínios analisados. Sem possuir um custo computacional muito elevado, esse elemento consegue representar adequadamente os campos de deslocamento e tensão nas

malhas geradas. Além disso, o fato de não precisar que todas as suas funções de interpolação sejam sub-integradas evita o aparecimento dos chamados modos espúrios de deformação.

Entretanto, algumas considerações negativas também foram observadas. Em relação ao SLP, o algoritmo mostrou-se muito sensível ao valor inicial selecionado para os limites móveis, principalmente nos problemas envolvendo restrições de tensão. É bastante provável que, devido a grande dimensionalidade e não-linearidade desse problema, um algoritmo mais específico para problemas dessa natureza, tal como o GCMMA fosse mais eficiente.

O uso de malhas regulares também restringe uma aplicação do método a problemas mais realistas. A geometria mostrada na figura 7.30, por exemplo, poderia ter a malha refinada localmente apenas na região do canto-vivo, enquanto que nas outras regiões a malha poderia ser mais grosseira. Dessa forma, a tensão seria mais bem representada apenas nos pontos em que realmente fossem necessários. Além disso, o uso do elemento quadrilátero em malhas regulares gera um problema prático do ponto de vista da otimização, que é o aparecimento de contornos serrilhados, podendo ser visto na figura 7.35 (A), por exemplo. Esse problema, bem como possíveis soluções já foram discutidos anteriormente (seção 7.2).

Em relação ao cálculo da sensibilidade da tensão, foi utilizado o método proposto por Duysinx e Bendsøe [Duysinx e Bendsøe, 1998], que considera a natureza local das restrições de tensão, calculando uma derivada para cada elemento finito. Pereira [Pereira, 2001] calculou essa sensibilidade de uma maneira diferente, utilizando uma análise adjunta de sensibilidade. O cálculo mais complexo é feito apenas uma vez em cada iteração. Utilizando um simples produto interno, a derivada é calculada em cada elemento. Dessa forma, o custo computacional da análise de sensibilidade torna-se semelhante ao tempo gasto pela análise estrutural.

Em relação à escolha do MATLAB como ambiente de programação, a tarefa de programação é sem dúvida simplificada, pois rotinas simples e essenciais como manipulação de matrizes, podem tornar-se um problema adicional em outras linguagens de programação.

Além disso, os problemas relativos ao uso do MATLAB, como pouca memória disponível e pouca velocidade de processamento logo serão esquecidos, pois os computadores estão cada vez com maior capacidade de processamento. É preciso levar em consideração que o principal objetivo relacionado ao estudo da otimização estrutural consiste em resolver problemas de engenharia que tenham alguma utilidade prática. Conforme comentando anteriormente, esses problemas geralmente aparecem em alguma indústria. Dificilmente uma indústria terá condições de adquirir um supercomputador que possa resolver os problemas de engenharia, entre eles, um possível problema de otimização. Em vista disso, justifica-se a validade de se desenvolver esta

ferramenta em MATLAB, ainda em estágio inicial, mas muito mais dentro da realidade de uma indústria.

9. SUGESTÕES PARA APRIMORAMENTO DO TRABALHO

- Implementar as rotinas de otimização para o uso de malhas genéricas utilizando a técnica de filtragem espacial;
- Implementar o cálculo adjunto na sensibilidade das restrições de tensão;
- Implementar elementos tridimensionais;
- Implementar uma interface amigável para facilitar a utilização;
- Analisar o problema da falta de simetria;
- Analisar o efeito da utilização de diferentes filtros.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Allaire, G. e Francfort, G. A., “**A Numerical Algorithm for Topology and Shape Optimization**”, In: Bendsøe, M. P., Mota Soares, C. A. (eds.) *Topology Design of Structures*, pp. 239-248. Dordrecht: Kluwer, 1993.
- [2] Allaire, G. e Kohn, R. V., “Topology Optimization and Optimal Shape Design Using Homogenization”, **Topology Design of Structures**, pp. 207-218, 1993.
- [3] Almann, D. J., “A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotation for Plane Elasticity Analysis”, **Comput. Struct.**, vol. 19, n° 1-2, pp. 1-8, 1984.
- [4] Anagnostou, G., Rønquist, E. M. e Patera, A. T., “A Computacional Procedure for Part Design”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, vol. 97, pp. 33-48, 1992.
- [5] Argyris, J. H. e Kelsey, S., “**Energy Theorems and Structural Analysis**”, London Butterworths, 1960 (Publicado originalmente como uma série de artigos em *Aircraft Engineering*, 1954-55).
- [6] Arora, J. S., “**Introduction to Optimum Design**”, McGraw-Hill, 1989.
- [7] Atkin, R. J. e Fox, N., “**Introduction to the Theory of Elasticity**”, Longman, 1ª ed., 1980.
- [8] Barlow, J., “Optimal Stress Locations in Finite Element Models”, **Int. Journal for Num. Meth. in Eng.**, vol. 10, pp. 243-251, 1976.
- [9] Bathe, K. J., “**Finite element procedures**” Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996 (DI).
- [10] Becker, E. B., Carey, G. F. e Oden, J. T., “**The Texas Finite Element Series**”, vol. I-VI, 1981.
- [11] Beckers, M. e Fleury, C., “A Primal-Dual Approach in Truss Topology Optimization”; **Computers & Structures**, vol. 64, n° 1-4, pp. 77-88, 1997.
- [12] Beckers, M., “**Optimisation de Structures en Variables Discrètes**”, Tese de Doutorado, Universite de Liege, Bélgica, 1997.
- [13] Bendsøe, M. P. e Kikuchi, N., “Generating Optimal Topologies in Structural Design Using Homogenization Method”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71, n° 2, pp. 197-224, 1988.
- [14] Bendsøe, M. P. e Rodriguez, H. C., “Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids”, **Comp. Meth. Appl. Mech Engng.**, vol. 87, pp. 15-34, 1991.
- [15] Bendsøe, M. P. e Sigmund, O., “Material Interpolation Schemes in Topology Optimization”, **Archive of Applied Mechanics**, vol. 69, pp. 635-654, 1999.

- [16] Bendsøe, M. P., “Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem”, **Structural Optimization**, vol. 1, pp. 193-202, 1989.
- [17] Bergan, P. G., Felippa, C. A., “A Triangular Membrane Element With Rotational Degrees of Freedom”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, vol. 50, pp. 25-69, 1985.
- [18] Berke, L. e Khot, N. S., “Use of Optimality Criteria for Large Scale Systems”, AGARD-LS-70, 1974.
- [19] Berke, L., “An Efficient Approach to the Minimum Weight Design of Deflection Limited Structures”, report n° AFFDL-TM-70-4, Air Force Flight Dynamics Laboratory, OH, 1970.
- [20] Boresi, A. P. e Chong, K. P., “Elasticity in Engineering Mechanics”, Elsevier, New York, 1987.
- [21] Boresi, A. P., Sidebottom, O. M., Seely, F. B. e Smith, J. O., “Advanced Mechanics of Materials”, John Wiley & Sons, 3ª edição, 1978.
- [22] Canfield, R. A., Grandhi, R. V. e Venkayya, V. B., “Optimum Design of Structures with Multiple Constraints”, **AIAA Journal**, vol. 26/1, pp. 78-85, 1988.
- [23] Cardoso, E. L. e Fonseca, J. S. O., “Intermediate Density Reduction and Complexity Control in the Topology Optimization”, 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, São Paulo, São Paulo, Brazil 1999.
- [24] Cardoso, E. L., “Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas”, Dissertação de Mestrado, PROMEC-UFRGS, 2000.
- [25] Cheng, G. “Some Aspects of Truss Topology Optimization”, **Structural Optimization**, vol. 10, pp. 173-179, 1995.
- [26] Cheng, G. e Guo, X., “ ϵ -Relaxed Approach in Structural Topology Optimization”, **Structural Optimization**, vol. 13, pp. 258-266, 1997.
- [27] Cheng, G. e Jiang, G., “Study on Topology Optimization With Stress Constraints”, **Engineering Optimization**, vol. 20, pp. 129-148, 1992.
- [28] Cheng, G., “Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution”, Lecture Notes, Dalian University of Technology, 1992.
- [29] Cherkaev, A. e Kohn, R., “Topics in the mathematical modeling of composite materials”, Birkhausen, NY, 1997.
- [30] Clough, R. W., “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis”, Proc. 2° A. S. C. E. Conf. In Electronic Computation, 1960.
- [31] Cook, R. D., “A Plane Hybrid Element With Rotational D. O. F. And Adjustable Stiffness” **Int. J. Numer. Methods Eng.**, vol. 24, pp. 1499-1508, 1987.

- [32] Courant, R., “Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibration”, **Bull. Am. Math. Soc.**, vol. 49, pp. 1-23, 1943.
- [33] Cursi, J. E. S. e Pagnaco, E., “**Minimum Mass Parts in 2D Elasticity**”, em Rozvany e Olhoff (WCSMO I – 1995), pp. 231-236, 1995.
- [34] Cursi, J. E. S., “**Allegement d’une Pièce Elastique Homogène Soumise à des Contraintes Planes**”, Relatório Interno 1/94, Laboratoire de Mécanique – Institut de Mécanique de Rouen, França, 1994.
- [35] Dantzig, G., “**Linear Programming and Extensions**”, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- [36] de Navarra, E. O. I., “**Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos – Análisis Estático Lineal**”, Artes Gráficas Torres, 2ª ed., 1995.
- [37] Díaz, A. R. e Sigmund, O., “Checkerboard Patterns in Layout Optimization”, **Structural Optimization**, vol. 10, pp. 40-45, 1995.
- [38] Dobbs, M e Felton, L., “Optimization of Truss Geometry”, **J. Struct. Div. ASCE** **95**, pp. 2105-2118, 1968.
- [39] Duncan, W. J. e Collar, A. R., “**A Method for the Solution of Oscillations Problems by Matrices**”, *Phil Magn*, 17(7):865, 1934.
- [40] Duncan, W. J. e Collar, A. R., “**Matrices Applied to the Motions of Damped Systems**”, *Phil Magn*, 19(7):197, 1935.
- [41] Duysinx, P. e Bendsøe, M. P., “Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints”, **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, vol. 43, pp. 1453-1478, 1998.
- [42] Duysinx, P., “**Topology Optimization with Different Stress Limits in Tension and Compression**”, Proceedings of 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-3), Buffalo/Niagara Falls, 1999.
- [43] Duysinx, P., Bruyneel, M. e Fleury, C., “**Solution of Topology Optimization Problems with Sequential Convex Programming**”, Lecture Notes, 2000.
- [44] Felippa, C. A. e Alexander, S., “Membrane Triangles With Corner Drilling Freedoms – III. Implementation and Performance Evolution”, **Finite Elements Anal. Des.**, vol. 12, pp. 203-239, 1992.
- [45] Felippa, C. A., “A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: a Play in Three Acts”, **Computers and Structures**, vol. 79, pp. 1313-1324, 2001.
- [46] Felippa, C. A., “Parametrized Unification of Matrix Structural Analysis: Classical Formulation and D-Connected Elements”, **Finite Elem. Anal. Des.**, vol. 21, pp. 45-74, 1995.

- [47] Fleury, C. e Braibant, V., “Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 23, pp. 409-428, 1986.
- [48] Fonseca, J. S. O., “**Design of Microstructures of Periodic Composite Materials**”, Tese de Doutorado, The University of Michigan, 1997.
- [49] Guedes, J. M. e Taylor, J. E., “On the Prediction of Material Properties and Topology for Optimal Continuum Structures”, **Struc. Optim.**, vol. 14, pp. 183-192, 1997.
- [50] Guilherme, C. E. M., “**Otimização Topológica de Treliças com Restrições de Flambagem e Flexibilidade**”, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2001.
- [51] Guo, X. e Cheng, G. D., “An Extrapolation Approach for the Solution of Singular Optima”, **Struct. Multidisc. Optim.**, vol. 19, pp. 255-262, 2000.
- [52] Haber, R. B., Bendsoe, M. P. e Jog, C., “A New Approach to Variable- Topology Shape Design Using A Constraint on the Perimeter”, **Structural Optimization**, vol. 11, pp. 1-12, 1996.
- [53] Haftka, R. e Gürdal, Z., “**Elements of Structural Optimization**”, Kluwer Academic Publishers, 3ª edição, 1992.
- [54] Hassani, B. Hinton, E., “A Review of Homogenization and Topology Optimization III – Topology Optimization Using Optimality Criteria”, **Computers & Structures**, vol. 69, pp. 739-756, 1998.
- [55] Hoback, A., “Optimization of Singular Problems”, **Structural Optimization**, vol. 12, pp.93-97, 1996.
- [56] Hrenikoff, A., “Solution of Problems in Elasticity by Framework Method”, **J. Appl. Mech.**, vol. 8, pp. 169-175, 1941.
- [57] Hsu, Y., Sheppard, S. D. e Wilde, D. J., “The Curvature Function Method for Two-Dimensional Shape Optimization Under Stress Constraints”, **Computer & Structures**, vol. 55, nº 4, pp. 647-657, 1995.
- [58] Hsu, Y-L., Hsu, M-S. e Chen, C-T., “Interpreting Results from Topology Optimization Using Density Contours”, **Computers and Structures**, vol. 79, pp. 1049-1058, 2001.
- [59] Hughes, T. J. R., “**The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**”, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1987.
- [60] Jog, C. S. e Haber, R. B., “Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, vol. 130, pp. 203-226, 1996.

- [61] Jog, C., Haber, R. B. e Bendsøe, M. P., “**Variable-Topology Shape Optimization with a Constraint on the Perimeter**”, Proc. 20th ASME Design Automation Conference, Minneapolis, ASME Publication DE-Vol. 69-2, 261-272, 1994.
- [62] Karmarkar, N., “A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming”, **Combinatorica**, 4 (4), pp. 373-395, 1984.
- [63] Karwan, M., Spronk, J., and Wallenius, J. (Eds.): Essays in Decision Making, “**Reference Direction Approach To Multiple Objective Linear Programming: Historical Overview**”, (A Volume in Honour of Stanley Zionts), Springer, pp. 74-92, 1997.
- [64] Kikuchi, N., Oden, J. T. e Song, Y. J., “**Convergence of Modified Penalty Methods and Smoothing Schemes of Pressure for Stoke’s Flow Problems**”, In Gallagher, R. et al. (eds), “**Finite Elements in Fluids**”, vol. 5, John Wiley & Sons, pp. 107-126, 1984.
- [65] Kim, H., Querin, O. M. e Steven, G. P., “On the Development of Structural Optimisation and its Relevance in Engineering Design”, **Design Studies**, vol 23/1, pp. 85-102, 2002.
- [66] Kirsch, U., “On Singular Topologies in Optimum Structural Design”, **Structural Optimization**, vol. 2, pp.133-142, 1990.
- [67] Kirsch, U., “Optimal Topologies of Structures”, **Appl. Mech. Rev.**, vol. 42, n° 8, pp. 223-238, 1989.
- [68] Kohn, R. V. e Strang, G., “Optimal Design and Relaxation of Variational Problems, I”, **Comm. On Pure an Appl. Math.**, vol. XXXIX, pp. 113-137, 1986.
- [69] Kohn, R. V. e Strang, G., “Optimal Design and Relaxation of Variational Problems, II”, **Comm. On Pure an Appl. Math.**, vol. XXXIX, pp. 139-182, 1986.
- [70] Kohn, R. V. e Strang, G., “Optimal Design and Relaxation of Variational Problems, III”, **Comm. On Pure an Appl. Math.**, vol. XXXIX, pp. 353-377, 1986.
- [71] Kohn, R. V. e Strang, G., “**Optimal Design for Torsional Rigidity**”, In: Atluri, S. N., Gallagher, R. H. e Zienkiewics, O. C. (eds.) “**Hybrid and Mixed Finite Element Methods**”, pp. 281-288. Wiley & Sons, Chichester, 1983.
- [72] Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V., “**Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis – Metric and Normed Spaces (vol. I), Measure, The Lebesgue Integral, Hilbert Spaces (vol. II)**”, Graylock Press, 1957 (vol. I) e 1960 (vol. II).
- [73] Kosaka, I. e Swan, C. C., “A Symmetry Reduction Method for Continuum Structural Topology Optimization”, **Computers and Structures**, vol. 70, pp. 47-61, 1999.
- [74] Laarhoven, P. J. M. van. e Aarts, E., “**Simulated Annealing: Theory and Applications**”, D. Reidel Publishing, Dordrecht, The Netherlands, 1987.

- [75] Lamberti, L. e Pappalettere, C., “Comparison of the Numerical Efficiency of Different Sequential Linear Programming Based Algorithms for Structural Optimisation Problems”, **Computers and Structures**, vol. 76, pp. 713-728, 2000.
- [76] Laschet, G., “**Prédiction par Eléments Finis du Comportement non Linéaire et de la Résistance D'assemblage Multimatériaux Collés**”, Tese PHd, University of Liège, 1994.
- [77] Love, A. E., “**A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**”, 4th Edition, Dover, New York, 1944.
- [78] Luenberger, D. G., “**Optimization by Vector Space Methods**”, John Wiley & Sons, 1969.
- [79] Marsan, A. e Dutta, D., “Construction of a Surface Model and Layered Manufacturing Data from #D Homogenization Output”, **ASME Journal of Mechanic Design**, vol. 118, n. 3, pp. 412-418, 1996.
- [80] Maxwell, J. C., “On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Force”, **Trans. Royal Soc. Edinb.**, vol. 26/1, 1872.
- [81] Michell, A. G. M., “The limits of economy of material in frame structures”, **Philosophical Magazine**, 8, pp. 589-597, 1904.
- [82] Murat, F. e Tartar, L., “**Calcul des Variations et Homogénéisation, Les Méthodes de l'Homogénéisation: Théorie et Applications en Physique**”, Coll. De la Di. De Etudes et Recherches de Elec. De France, Eyrolles, Paris, pp. 319-370, 1985.
- [83] Navarrina, F. e Casteleiro, M., “A General Methodological Analysis for Optimum Design”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 31, pp. 85-111, 1991.
- [84] Noor, A., “Bibliography of Books and Monographs on Finite Element Technology”, **Appl. Mech. Rev.**, vol. 44/6, pp. 307-317, 1991.
- [85] Ohsaki, M. e Katoh, N., “Topology Optimization of Trusses with Stress and Local Constraints by Variable Fixing Technique”, **AIS Research Report n° 01-02**, 2001.
- [86] Olhoff, N., Bendsøe, M. P. e Rasmussen, J., “On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization”, **Comp. Meth. Appl. Mech Engng.**, vol. 89, pp. 259-279, 1992.
- [87] Pagnaco, E., “**Optimisation Topologique des Structures de Type Coque**”, Tese de Doutorado, Laboratoire de Mécanique de Rouen, França, 1998.
- [88] Papadrakakis, M., Lagaros, N. D. e Tsompanakis, Y., “Computationally Efficient Techniques for Structural Optimization”, **Computational Mechanics New Trends and Applications**, CIMNE, Spain, 1998.

- [89] Papalambros, P. Y. e Chirehdast, M., “An Integrated Environment for Structural Configuration Design”, **J. Engng. Design**, vol. 1, pp. 73-96, 1990.
- [90] Pereira, J. T., “**Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha do Material**”, Tese de Doutorado, UFSC, 2001.
- [91] Petersson, J. e Sigmund, O., “Slope Constrained Topology Optimization”, **Int. Journal for Numer. Meth. In Engng.**, vol. 41, pp. 1417-1434, 1998.
- [92] Pilkey, W. D., “**Computer Analysis of Elastic Thin-Walled Beams**”, Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering-University of Virginia, 1998.
- [93] Prager, W. e Taylor, J. E., “Problems of Optimal Structural Design”, **Trans. ASME J. Appl. Mech.**, vol. 35, pp. 102-106, 1968.
- [94] Ramm, E., Maute, K. e Schwarz, S., “**Adaptative Topology and Shape Optimization**”, em Idelsohn et al. (WCCM IV – 1998), 1998.
- [95] Rossow, M. P. e Taylor, J. E., “A Finite Element Method for the Optimal Design of Variable Thickness Sheets”, **AIAA J.**, vol. 11, pp. 1566-1568, 1973.
- [96] Rozvany, G. I. N. e Birker, T., “On Singular Topologies in Exact Layout Optimization”, **Structural Optimization**, vol. 8, pp. 228-235, 1994.
- [97] Rozvany, G. I. N. e Zhou, M., “The COC Algorithm, Part I: Cross-Section Optimization or Sizing”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 89, pp. 281-308, 1991.
- [98] Rozvany, G. I. N. e Zhou, M., “The COC Algorithm, Part II: Topological, Geometrical and Generalized Shape Optimization”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 89, pp. 309-336, 1991.
- [99] Rozvany, G. I. N., “**Topology Optimization in Structural Mechanics**”, Courses and Lectures 374, ed. Springer Wien New York, 1997.
- [100] Rozvany, G. I. N., Sigmund, O. e Birker, T., “Optimal Design of Composite and Fibre-Reinforced Plates”, **Optimal Design with Advanced Materials**, pp. 293-309, 1993.
- [101] Rozvany, G. I. N., Zhou, M., Birker, T., “Generalized Shape Optimization without Homogenization”, **Structural Optimization**, vol. 4, pp. 250-252, 1992.
- [102] Rozvany, G. I. N., Bendsøe, M. P. e Kirsch, U., “Layout Optimization of Structures”, **Appl. Mech. Rev.**, vol. 48, nº 2, pp. 41-119, 1995.
- [103] Salagame, R. R. e Belegundu, A. D., “Shape Optimization with p-Adaptivity”, **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, vol. 33 (12), pp. 2399-2405, 1995.
- [104] Schimit, L. A., “**Structural Design by Systematic Synthesis**”, Proceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, pp. 105-132, 1960.

- [105] Schmit, L. e Farshi, B., “Some Approximation Concepts for Structural Synthesis”, **AIAA Journal**, vol. 12, pp. 692-699, 1974.
- [106] Sheu, C. e Schmit, L.A., “Minimum Weight Design of Elastic Truss Under Multiple Static Loading Condition”, **AIAA Journal**, vol. 10, pp.155-162, 1972.
- [107] Shim, P. Y. e Manoocheri, S., “Generating Optimal Configurations in Structural Design Using Simulated Annealing”, **Int. K. Numer. Meth. Engng.**, vol. 40, pp. 1053-1069, 1997.
- [108] Sigmund, O. e Torquato, S., “Design of Materials with Extreme Thermal Expansion Using a Three-Phase Topology Optimization Method”, **J. Mech. Phys. Solids**, vol. 45, pp. 1037-1067, 1997.
- [109] Sigmund, O., “**Design of Material Structures Using Topology Optimization**”, Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.
- [110] Sigmund, O., “On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization”, **Mech. Struct. Mach.**, vol. 25, pp. 495, 526, 1997.
- [111] Sigmund, O., Petersson, J., “Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-Dependencies and Local Minima”, **Structural Optimization**, vol. 16, pp. 68-75, 1998.
- [112] Sokolnikoff, I. S., “**Mathematical Theory of Elasticity**”, McGraw-Hill, 1956.
- [113] Spencer, A. J. M., “**Continuum Mechanics**”, Longman, 1^a ed., 1980.
- [114] Stolpe, M. e Svanberg, K., “**Modeling Topology Optimization Problems as Mixed Linear 0-1 Programs**”, ISRN KTH, Opt. Syst., FR 01/10 SE, Royal Institute of Technology, 2001.
- [115] Stolpe, M. e Svanberg, K., “On the Trajectories of the ε -Relaxation Approach for Stress-Constrained Truss Topology Optimization”, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 21, pp. 140-151, 2001.
- [116] Svanberg, K., “**A Globally Convergent Version of MMA Without Line-Search**”, In Rozvany, G. e Olhoff, N., editors, First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, pp. 9-16, 1995.
- [117] Svanberg, K., “The Method of Moving Asymptotes – A New Method for Structural Optimization”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, pp. 359-373, 1987.
- [118] Sved, G. e Ginos, Z., “Structural Optimization under Multiple Loading”, **Int. J. Sci.**, vol. 10, pp. 803-805, 1968.

- [119] Swan, C. C. e Kosaka, I., “Homogeneization-Based Analysis and Design of Composites”, **Computers and Structures**, vol. 64, n° 1-4, pp. 603-621, 1997.
- [120] Taig, I. C., “Structural Analysis by the Matrix Displacement Method”, **English Electric Aviation Report N° S017**, 1961.
- [121] Taylor, R. L., Beresford, P. J. e Wilson, E. L., 1976, “A Nonconforming Element for Stress Analysis”, **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, vol. 10, n° 6, pp. 1221-1219.
- [122] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. e Topp, L. J., “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, **J. Aeron. Sci.**, vol. 23, pp. 805-823, 1956.
- [123] Vanderplaats, G. N. e Salajegheh, E., “New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis”, **AIAA Journal**, vol. 27, n° 3, pp. 352-358, 1987.
- [124] Venkayya, V. B., Khot, N. S. e Berke, L., “**Application of Optimality Criteria Approaches on Automated Design of Large Practical Structures**”, AGARD, CP-123, 1973.
- [125] Vicente, L. N., “**Space Mapping: Models, Sensitivities, and Trust-Regions Methods**”, Preprint 01-19, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2001.
- [126] Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. P. e Ghaboussi, J., “Incompatible Displacement Models”, **Numerical and Computer Models in Structural Mechanics**, Academic Press, 1973
- [127] Wujek, B. A. e Renaud, J. E., “New Adaptive Move-Limit Management Strategy for Approximate Optimization, Part I”, **AIAA Journal**, vol. 36, n° 10, pp. 1911-1921, 1998.
- [128] Yang, R. J. e Chen, C. J., “Stress-Based Topology Optimization”, **Struct. Optim.**, vol. 12, pp. 98-105, 1996.
- [129] Yang, R. J. e Chuang, C. H., “Optimal Topology Using Linear Programming”, **Computers and Structures**, vol. 52, n° 2, pp. 265-275, 1994.
- [130] Young, I. T., Gerbrands, J. J. e van Vliet, L. J., “**Image Processing Fundamentals**: <http://www.ph.tn.tudelft.nl/Courses/FIP/noframes/fip.html>”, Department of Applied Physics, Delft University of Technology, The Netherlands, 1998.
- [131] Yuqiu, L. e Yin X., “Generalized Conforming Triangular Membrane Element With Vertex Rigid Rotation Freedoms”, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 17, pp. 259-271, 1994.
- [132] Zhou, M. e Rozvany, G. I. N., “An Improved Approximation Technique for the DCOC Method of Sizing Optimizaton”, **Computer & Structures**, vol. 60, n°5, pp. 763-769, 1996.

- [133] Zhou, M. e Rozvany, G. I. N., “DCOC: An Optimality Criteria Method for Large Systems. Part I: Theory”, **Structural Optimization**, vol. 5, pp. 12-25, 1992.
- [134] Zhou, M. e Rozvany, G. I. N., “DCOC: An Optimality Criteria Method for Large Systems. Part II: Algorithm”, **Structural Optimization**, vol. 6, pp. 250-262, 1993.
- [135] Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., “**The Finite Element Method**”, 4^a ed., Mc Graw Hill, vol. I, 1989, vol. II, 1991.
- [136] Zienkiewicz, O. C., “**El Método de los Elementos Finitos**”, 3^a edição, ed. Reverté, 1979.

AI. APÊNDICE I: FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS

Equation Chapter 1 Section 1

AI.1. ELEMENTO QUADRILÁTERO BILINEAR ISOPARAMÉTRICO

A formulação bilinear isoparamétrica atual foi proposta por Taig [Taig, 1961]. A forma retangular desse elemento foi anteriormente proposta por Argyris [Argyris et al, 1954].

O domínio do elemento quadrilátero de lados retos é definido pela localização dos seus 4 nós no espaço \mathcal{R}^2 , conforme a figura I.1:

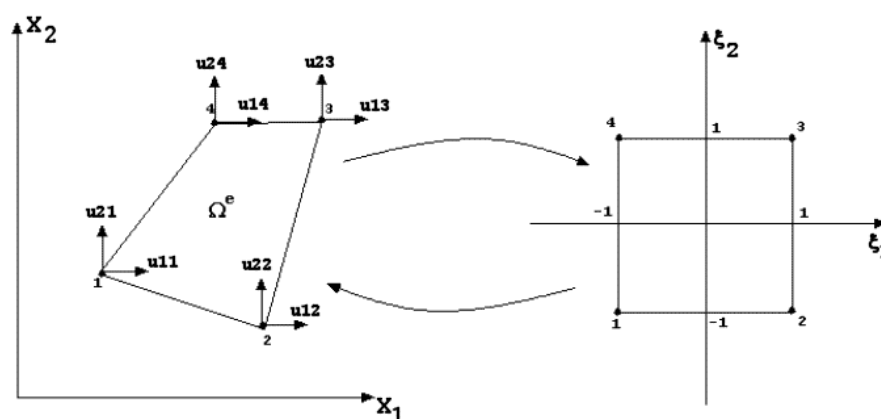


Figura I.1: Mapeamento isoparamétrico

Cada ponto do elemento no espaço X_1 - X_2 pode representado no *elemento mestre* (que possui geometria fixa no sistema de coordenadas ξ_1 - ξ_2) da seguinte forma:

$$x_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{I=1}^4 x_{iI} N_I(\xi_1, \xi_2) \quad (\text{I.1})$$

onde x_{iI} representa a coordenada nodal na direção i pertencente ao nó I enquanto que N_I é a função que aproxima a geometria no nó I , também chamada de *função de interpolação* ou *função de forma*. O sistema de coordenadas ξ_1 - ξ_2 é chamado de *sistema de coordenadas naturais*. Da mesma forma, os deslocamentos também são aproximados utilizando-se as mesmas funções de interpolação N_I . Por esse motivo esse elemento é denominado isoparamétrico, pois as mesmas funções que aproximam a geometria também aproximam os deslocamentos. Assim:

$$u_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{I=1}^4 u_{iI} N_I(\xi_1, \xi_2) \quad (\text{I.2})$$

onde u_{il} representa o deslocamento do nó I na direção i .

Assumindo uma expansão bilinear, ou seja, linear em ξ_1 e em ξ_2 , obtém-se as funções de interpolação na seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1(\xi_1, \xi_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_1 \xi_2 \\ x_2(\xi_1, \xi_2) &= \beta_0 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_1 \xi_2 \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

onde α_i e β_i são parâmetros que devem ser determinados.

Os deslocamentos u_1 e u_2 são aproximados de maneira semelhante:

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1, \xi_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_1 \xi_2 \\ u_2(\xi_1, \xi_2) &= \beta_0 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_1 \xi_2 \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Da equação (I.4) se conclui que a distribuição dos deslocamentos u_1 e u_2 ao longo de cada lado é linear e depende apenas dos valores dos deslocamentos nos nós de elementos adjacentes. Na prática, as funções N_i são construídas aplicando o produto tensorial nas Funções de Lagrange²³ lineares nas direções ξ_1 e ξ_2 . Essas funções devem ter valor unitário sobre o nó no qual está sendo construída e zero em todos outros nós. Dessa forma, as funções são construídas utilizando-se a numeração mostrada na figura I.1:

$$N_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2) \quad (\text{I.5})$$

$$N_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \quad (\text{I.6})$$

$$N_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \quad (\text{I.7})$$

²³ Os polinômios de Lagrange são definidos pela seguinte equação [Hughes, 1987]:

$$l_{\substack{\text{ordem} \\ a \\ \text{nó}}}^{n-1}(\xi) = \frac{\prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^n (\xi - \xi_b)}{\prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^n (\xi_a - \xi_b)}$$

$$N_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (\text{I.8})$$

As funções de forma devem satisfazer a três propriedades morfológicas, a fim de garantir a convergência dos resultados:

- **Suavidade das funções de interpolação no interior do elemento:** essa característica implica diretamente na geometria do elemento no espaço \mathcal{R}^2 , que não deve ser muito distorcido em relação ao elemento mestre (pode ser mostrado [Hughes, 1987] que se os ângulos internos formados entre dois lados adjacentes forem menores do que 180° esta propriedade é satisfeita);
- **Continuidade entre elementos adjacentes:** valores nodais dos deslocamentos devem ser iguais entre elementos vizinhos;
- **Completeza:** o campo de deslocamentos entre elementos adjacentes deve coincidir exatamente com a dada aproximação linear polinomial.

Nesse ponto será introduzida a matriz das derivadas (matriz B), utilizada no cálculo das deformações pelo MEF. Utilizando as equações (3.5), obtém-se o campo de deformações. A deformação infinitesimal na direção x_1 , ε_{11} , é escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (\text{I.9})$$

Numa análise estático-linear, os deslocamentos nodais são valores constantes, independentes do sistema de coordenadas. Dessa forma, utilizando-se a equação (I.2), obtém-se um campo de deformações discretizado. Assim, a componente ε_{11} é rescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \approx \frac{\partial (u_{1I} N_I(\xi_1, \xi_2))}{\partial x_1} = u_{1I} \frac{\partial N_I(\xi_1, \xi_2)}{\partial x_1} \quad (\text{I.10})$$

De maneira semelhante, são construídas as demais aproximações para as deformações. Assim, monta-se a matriz das derivadas. O resultado é mostrado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{13} \\ u_{23} \\ u_{14} \\ u_{24} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

ou, em uma forma mais compacta:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{I.12})$$

A matriz \mathbf{B} requer que todas as derivadas seja calculadas em relação à x_1 e à x_2 . Entretanto, as funções de forma N_i são funções de ξ_1 e ξ_2 . Aplicando a regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial N_I}{\partial \xi_1} = \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{\partial N_I}{\partial \xi_2} = \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \quad (\text{I.14})$$

Escrevendo as equações (I.13) e (I.14) na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

onde a matriz designada por \mathbf{J} é chamada de *Matriz Jacobiana*, que efetua o mapeamento entre o espaço \mathfrak{R}^2 e o espaço parametrizado. As derivadas presentes na matriz jacobiana são calculadas utilizando-se a equação (I.1). Assim, o cálculo das derivadas $\frac{\partial N_I}{\partial x_i}$ é efetuado utilizando a equação (I.15), invertendo a matriz jacobiana:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_I}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.16})$$

Com esses resultados é possível calcular a matriz de rigidez desse elemento. Partindo da expressão do PTV (equação (3.23)), e supondo a utilização de um material elástico linear cuja relação tensão e deformação possa ser descrita pela equação (3.6), rescreve-se a equação (3.23) da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (\text{I.17})$$

Lembrando que os termos $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ contém as derivadas de \mathbf{u} e $\delta \mathbf{u}$, utiliza-se agora a aproximação mostrada na equação (I.2) para o vetor deslocamento \mathbf{u} e o vetor deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} u_i &= \mathbf{N} \mathbf{u}^{nodal} \\ \delta u_i &= \delta \mathbf{u}_i^{(nodal)T} \mathbf{N}^T \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

onde \mathbf{u} e $\delta \mathbf{u}$ são respectivamente os vetores deslocamento e deslocamento virtual globais, de dimensão 2×1 , enquanto que \mathbf{u}^{nodal} e $\delta \mathbf{u}^{nodal}$ são respectivamente os vetores deslocamento e deslocamento virtual nodais, de dimensão 8×1 . Substituindo as equações (I.12) e (I.18) na expressão (I.17), obtém-se:

$$\delta \mathbf{u}^T \int_{\Omega} \left(\underbrace{\mathbf{B}^T}_{8 \times 3} \underbrace{\mathbf{C}}_{3 \times 3} \underbrace{\mathbf{B}}_{3 \times 8} d\Omega \right) \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \delta \mathbf{u} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (\text{I.19})$$

A equação (I.19) deve ser válida para qualquer deslocamento virtual que obedeça às condições de contorno do problema. Dessa forma, os termos $\delta \mathbf{u}^T$ se anulam, restando a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega) \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma \quad (\text{I.20})$$

onde:

$$\mathbf{K}e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{I.21})$$

é a matriz de rigidez local e

$$\mathbf{f}e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma \quad (\text{I.22})$$

é o vetor de forças local.

Em sua forma mais geral, o domínio $\Omega \in \mathfrak{R}^3$. Para o elemento bilinear, $\Omega \in \mathfrak{R}^2$, ou seja, $d\Omega = dx_1 dx_2$. Alterando-se o domínio do problema para o espaço parametrizado, cria-se uma forma mais conveniente de se calcular a matriz de rigidez, uma vez que todos elementos da malha são calculados com base no elemento mestre. Dessa forma, considerando a espessura h do elemento constante, a equação (I.21) é rescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}e = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{I.23})$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz jacobiana e h é a espessura do elemento. Na prática, a matriz de rigidez (I.23) é calculada numericamente, utilizando-se a regra de integração de Gauss-Lobato²⁴, onde a função é avaliada apenas em alguns pontos específicos multiplicados por um peso, que está relacionado com o intervalo onde a função está sendo integrada. A regra de Gauss-Lobato é utilizada para resolver as integrais das matrizes de rigidez, pois com um pequeno número de pontos é possível encontrar o valor exato da integral de um determinado polinômio. Outra característica importante da integração numérica pela regra de Gauss é o fato de a integração do polinômio ser exata para polinômios de grau até $(2n-1)$, onde n é o número de pontos usado. Por exemplo, usando 3 pontos ($n=3$) é possível integrar com exatidão polinômios

²⁴ Como optou-se pela utilização de malhas regulares, a integração numérica não seria necessária, ou seja, a equação (I.23) possui uma solução analítica fechada. Entretanto, utilizou-se a integração numérica por ser um procedimento padrão no cálculo de estruturas pelo MEF.

de até grau 5 ($2 \times 3 - 1 = 5$). Maiores detalhes sobre integração numérica podem ser obtidos nas referências [Bathe, 1996; Hughes, 1987; de Navarra, 1995].

Conforme mencionado anteriormente, a integral que define a matriz de rigidez do elemento quadrado bilinear isoparamétrico (equação (I.23)) pode ser aproximada por um somatório duplo, utilizando a quadratura de Gauss com dois pontos ($n=2$), uma vez que as funções envolvidas são polinômios de 2ª ordem. Dessa forma, a equação (I.23) é rescrita como:

$$\mathbf{K}e = h \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} | \mathbf{J} | \right]_{\xi_1, \xi_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}} w_i w_j \quad (\text{I.24})$$

As matrizes de rigidez de cada elemento, todas de dimensão 8×8 vão sendo armazenadas em uma matriz maior, chamada de *matriz de rigidez global*. A partir dessa matriz são calculados os deslocamentos em cada nó da malha. Dessa forma, utilizando a equação (I.12) são calculados os deslocamentos e posteriormente as tensões, utilizando a equação (3.6). Para melhorar a precisão dos resultados, as deformações e tensões são calculadas no centro do elemento, onde $\xi_1 = \xi_2 = 0$ [Barlow, 1976].

AI.1.1. PROBLEMAS DO ELEMENTO QUADRILÁTERO BILINEAR ISOPARAMÉTRICO

Este elemento foi implementado no programa desenvolvido não apenas devido à simplicidade de sua formulação, mas também devido ao interesse histórico desse elemento em problemas de elasticidade plana.

O elemento quadrado bilinear isoparamétrico apresenta excelentes resultados e taxas de convergência elevadas para problemas que envolvam tração ou compressão puras. Entretanto, em situações em que a sollicitação predominante é a flexão, ocorre um excesso de deformações tangenciais, conhecidas com *cisalhamento parasita*. Esse fenômeno é mostrado na figura I.2:

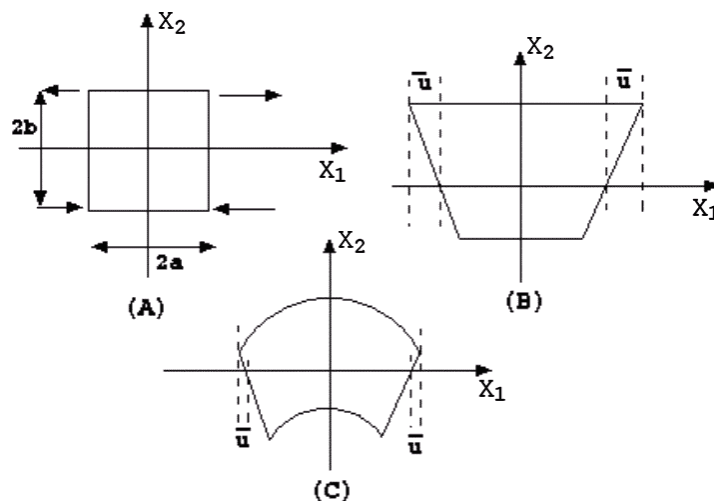


Figura I.2: (A) Elemento finito submetido a momento puro; (B) Elemento finito deformado pela aplicação do momento; (C) Deformação "real" segundo a teoria de vigas

Pela teoria de vigas de Euler-Bernouli, os deslocamentos nas direções x_1 e x_2 , calculados em função das coordenadas naturais ξ_1 e ξ_2 são dados pelas seguintes equações [de Navarra, 1995]:

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{M}{EI} \xi_1 \xi_2 \\ u_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{Ma^2}{2EI} \left(1 - \frac{\xi_1^2}{a^2}\right) + \frac{Mb^2}{2EI} \left(1 - \frac{\xi_2^2}{b^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

onde M é o momento aplicado, E é o módulo de Elasticidade e I é o momento de inércia da seção. A deformação cisalhante ε_{12} é calculada pela equação a seguir:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (\text{I.26})$$

Substituindo a equação (I.25) na equação (I.26), obtém-se o seguinte resultado:

$$\varepsilon_{12} = 0 \quad (\text{I.27})$$

Quando o elemento quadrado bilinear isoparamétrico sofre flexão (figura I.2 (B)), ele não consegue representar corretamente a deformação, pois suas funções de interpolação são lineares nas duas direções. Dessa forma, obtém-se os seguintes valores de deslocamento:

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u} \xi_1 \xi_2 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Assim, calculando-se a deformação ε_{12} obtém-se:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) = \frac{\bar{u} \xi_1}{2} \quad (\text{I.29})$$

ou seja, aparece uma deformação espúria, fazendo com que o elemento responda em cisalhamento a uma solitação de flexão pura. Diz-se, portanto, que esse elemento tem um excesso de rigidez. Sem alterar o tipo de elemento, uma maneira de resolver esse problema é refinar a malha, aumentando a quantidade de elementos e ao mesmo tempo avaliar as deformações no centro do elemento, onde $\xi_1 = \xi_2 = 0$, o que faz com que o cisalhamento artificial desapareça.

AI.2. ELEMENTO QUADRILÁTERO NÃO-CONFORME (ELEMENTO DE TAYLOR)

Esse tipo de elemento é mais uma tentativa de melhorar o comportamento do elemento bilinear isoparamétrico, adicionando funções de interpolação extras às existentes. Esse elemento tem um comportamento semelhante aos elementos de alta ordem, mas sem a desvantagem de aumentar o número de nós.

Em geral, qualquer tipo de elemento finito deve ter a função deslocamento contínua entre elementos adjacentes. Uma implicação disso é que cada nó que não pertença à fronteira deve estar ligado a outro nó. A derivada do deslocamento pode até ser descontínua, mas tanto a função quanto à derivada devem possuir seu quadrado integrável, ou seja, as funções envolvidas devem pertencer ao espaço $C^0(\Omega)^{25}$, com norma L^2 limitada.

Quando essa afirmação não é válida, diz-se que o elemento é *incompatível*, pois não possui continuidade na função deslocamento. É justamente isso que ocorre no elemento de

²⁵ Espaço das funções contínuas definidas em Ω .

Taylor, e mesmo assim é um dos elementos que apresentam os melhores resultados. Esses conceitos serão explicados a seguir.

Em 1973, o grupo de pesquisa encabeçado por Wilson [Wilson et al., 1973] já conhecia o problema do cisalhamento parasita no elemento quadrado bilinear isoparamétrico. Sabia-se também que aumentando a ordem dos polinômios resolveria esse problema. Porém, não era desejado alterar o número de nós. Eles também conheciam o resultado que gostariam de obter pela teoria de vigas. Dessa forma, adicionaram modos de deformação extras quadráticos para tentar representar a deformação real da viga sob flexão.

O elemento mestre é o mesmo mostrado na figura I.1, adicionando duas funções, que corresponderiam a 1 nó central, que na verdade não existe (funções bolha). As funções de forma desse elemento são então as mesmas do elemento bilinear isoparamétrico acrescidas das duas funções bolha quadráticas:

$$N_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (\text{I.30})$$

$$N_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (\text{I.31})$$

$$N_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (\text{I.32})$$

$$N_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (\text{I.33})$$

$$N_5(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1^2 \quad (\text{I.34})$$

$$N_6(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_2^2 \quad (\text{I.35})$$

A figura I.3, mostra o aspecto das funções N_5 e N_6 aplicadas no elemento:

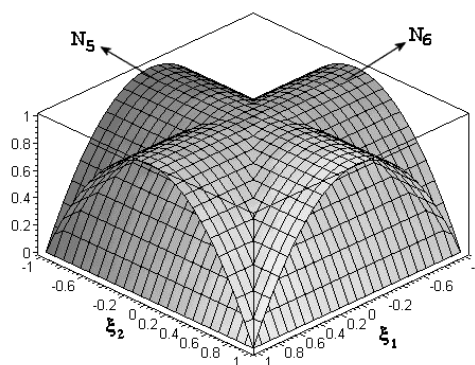


Figura I.3: Funções bolha

As funções de interpolação extra são aplicáveis apenas ao deslocamento, e não à geometria, ou seja:

$$x_i = \sum_{I=1}^4 x_{iI} N_I \quad (\text{I.36})$$

$$u_i = \sum_{I=1}^6 u_{iI} N_I \quad (\text{I.37})$$

Dessa forma, esse elemento não é mais chamado de isoparamétrico, e sim *subparamétrico*, pois a geometria é aproximada por um número inferior de funções de interpolação em relação ao deslocamento.

Existem agora 4 componentes extras de deslocamentos, que não correspondem a nenhum nó do elemento. Mesmo assim, a matriz das derivadas das funções de interpolação (B) também terá sua dimensão aumentada que passa a ser 3x12:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_5}{\partial x_2} & \frac{\partial N_5}{\partial x_1} & \frac{\partial N_6}{\partial x_2} & \frac{\partial N_6}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.38})$$

Conseqüentemente, a matriz de rigidez local terá dimensão 12x12. É importante ressaltar que, fisicamente, os deslocamentos u_{15} , u_{25} , u_{16} e u_6 não existem e são independentes do elemento sendo analisado. Devem, portanto, ser resolvidos dentro desse elemento, caso contrário, a função u não será contínua entre elementos adjacentes. Esse processo é chamado de *condensação nodal*, e será mostrado a seguir.

AI.2.1. CONDENSAÇÃO NODAL

A condensação nodal tem o objetivo de reduzir a dimensão da matriz de rigidez local para 8x8, correspondendo ao campo de deslocamentos real.

Inicialmente, a matriz de rigidez 12x12 é dividida em submatrizes da seguinte forma (as dimensões das respectivas submatrizes também estão indicadas):

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{A}_1}_{8 \times 8} & \underbrace{\mathbf{A}_2}_{8 \times 4} \\ \underbrace{\mathbf{A}_2^T}_{4 \times 8} & \underbrace{\mathbf{A}_3}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

onde \mathbf{A}_1 corresponde às funções de interpolação bilineares, enquanto que os termos restantes vêm das funções não lineares N_5 e N_6 . Sabendo que $\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e$ e que \mathbf{u}_e e \mathbf{f}_e são respectivamente os vetores deslocamento e forças nodais locais de dimensão 12×1 . Dessa forma, utilizando-se a notação indicada em (I.39), escreve-se a equação de equilíbrio discretizada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2^T & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underbrace{\mathbf{u}_1}_{8 \times 1} \\ \underbrace{\mathbf{u}_2}_{4 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underbrace{\mathbf{f}_1}_{8 \times 1} \\ \underbrace{\mathbf{f}_2}_{4 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

ou

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_3 \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2 \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

Isolando o vetor \mathbf{u}_2 e supondo que a submatriz \mathbf{A}_3 seja inversível, obtém-se:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_3^{-1} (\mathbf{f}_2 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{u}_1) \quad (\text{I.42})$$

Substituindo a equação (I.42) na equação (I.41), obtém-se:

$$\underbrace{\left[\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{A}_2^T \right]}_{\mathbf{K}_e^*} \underbrace{\mathbf{u}_1}_{\mathbf{u}^*} = \underbrace{\left[\mathbf{f}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3^{-1} \mathbf{f}_2 \right]}_{\mathbf{f}^*} \quad (\text{I.43})$$

Dessa forma, a matriz de rigidez local passa a ter novamente a dimensão de 8×8 . A equação (I.42) é utilizada para calcular os deslocamentos extras, que são usados no cálculo das deformações. Se não existirem forças de corpo, a força \mathbf{f}_2 é igual a zero.

Entretanto, Taylor [Taylor et al., 1976] percebeu que os problemas relativos à não continuidade do campo de deslocamentos entre os elementos apareciam quando se utilizavam elementos com geometrias diferentes de retângulos ou paralelogramos. Ele corrigiu esse defeito

simplesmente calculando a matriz jacobiana no ponto central ($\xi_1 = \xi_2 = 0$). Dessa forma, os resultados se tornavam válidos para qualquer geometria.

Após a condensação nodal, o campo de deslocamento enriquecido é calculado. Assim, usando as equações (I.12) e (3.6) são calculadas respectivamente as deformações e as tensões. Ao contrário do quadrado bilinear, tensões e deformações não são calculadas no centro do elemento, e sim nos quatro pontos de integração de Gauss [Barlow, 1976], mostrados na figura I.4:

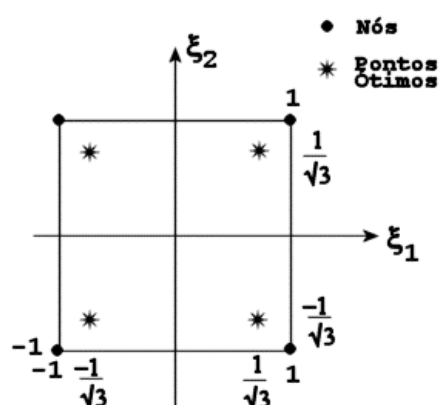


Figura I.4: Pontos ótimos para o cálculo das tensões

AI.3. ELEMENTO TRIANGULAR COM GRAUS DE ROTAÇÃO DE MEMBRANA

O elemento triangular de deformação constante (CST), sugerido inicialmente por Turner [Turner et al., 1956] é amplamente utilizado na solução de problemas de elasticidade plana, principalmente devido à simplicidade de sua formulação. Porém, da mesma forma que o elemento quadrado bilinear isoparamétrico, o CST apresenta o problema do excesso de rigidez.

Vários pesquisadores tentaram melhorar o comportamento desse elemento adicionando graus de liberdade de rotação de membrana (no plano do elemento). Almann [Almann, 1984] é tido como pioneiro nessa tentativa. Desde então, pesquisadores como Bergan [Bergan et al., 1985], Cook [Cook, 1987] e mais recentemente Felippa [Felippa et al., 1992] têm desenvolvido esse elemento com diferentes tipos de aproximação.

Neste trabalho, o elemento triangular com rotações de membrana, chamado de GT-9 foi implementado de acordo com o artigo de Yuqiu e Yin [Yuqiu e Yin, 1994], no qual apresentam uma formulação bastante simples para o elemento. O artigo apresenta também uma formulação para o elemento com bolha (GT-9M), que apresenta o campo de deslocamentos ainda mais enriquecido.

AI.3.1. FORMULAÇÃO

É assumido um campo de deslocamentos separável composto de duas partes:

$$u = u^0 + u_\theta \quad (\text{I.44})$$

onde u^0 corresponde ao campo de deslocamentos do elemento CST e u_θ é o campo adicional de deslocamentos devido às rotações de corpo rígido. As funções de forma desse elemento são definidas em função das *coordenadas de área*²⁶.

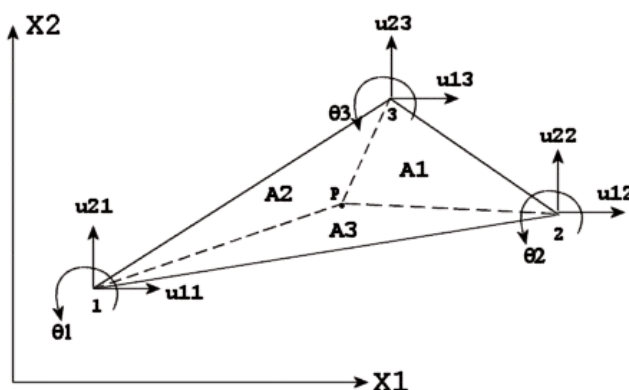


Figura I.5: Graus de liberdade do elemento GT-9 e coordenadas de área

Com base na equação (I.44), o campo de deslocamentos nas direções x_1 e x_2 é aproximado da seguinte forma:

$$u_1 \approx \underbrace{\sum_{I=1}^3 u_{1I} N_I}_{u^0} + \underbrace{\sum_{I=1}^3 \theta_I N_{10I}}_{u_\theta} \quad (\text{I.45})$$

$$u_2 \approx \underbrace{\sum_{I=1}^3 u_{2I} N_I}_{u^0} + \underbrace{\sum_{I=1}^3 \theta_I N_{20I}}_{u_\theta} \quad (\text{I.46})$$

²⁶ As coordenadas de área são definidas de acordo com a figura I.5: seja um ponto P interior em um triângulo de área A. A partir dos 3 vértices, obtém-se 3 sub-áreas, com o vértice P em comum, de tal forma que $A_1 + A_2 + A_3 = A$ e

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad \text{e} \quad L_3 = \frac{A_3}{A}.$$

A seguir são mostradas funções de forma N_I e N_{i0I} , calculadas em função das coordenadas de área:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1 \\ N_2 &= L_2 \\ N_3 &= L_3 \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

$$N_{10I} = \frac{1}{2} L_I (b_M L_J - b_J L_M) \quad (\text{I.48})$$

$$N_{20I} = \frac{1}{2} L_I (c_M L_J - c_J L_M) \quad (\text{I.49})$$

onde

$$b_I = x_{2J} - x_{2M} \quad (\text{I.50})$$

$$c_I = x_{1M} - x_{1J} \quad (\text{I.51})$$

Nas equações (I.48) à (I.51), I , J e M são os índices da permutação circular cíclica (figura I.6) enquanto que o termo x_{iI} corresponde à coordenada do nó I na direção i . Se $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, u_0 nas equações (I.45) e (I.46) terá valor nulo. Fisicamente, isso significa que existe um modo extra de energia zero em adição aos modos provenientes do movimento de corpo rígido. Entretanto, esse modo de deformação indesejável pode ser facilmente anulado reduzindo o grau de liberdade rotacional de um elemento da malha.

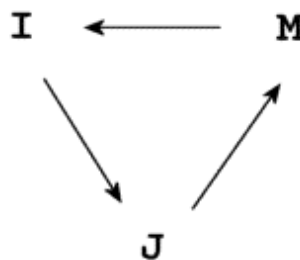


Figura I.6: Permutação cíclica

A matriz de rigidez e o vetor de forças local são calculados da mesma forma que o elemento bilinear isoparamétrico, através das equações (I.21) e (I.22), respectivamente. A diferença está na matriz \mathbf{B} , que no elemento GT-9 tem dimensão 3×9 .

As tensões e deformações também são calculadas nos pontos de integração, que estão localizados nos pontos médios de cada lado:

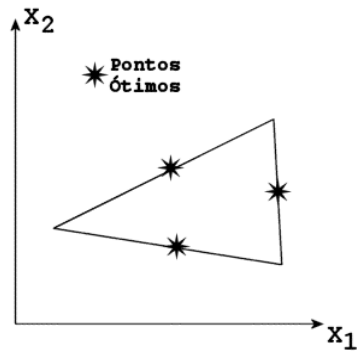


Figura I.7: Pontos ótimos para o cálculo das tensões

AII. APÊNDICE II: DETALHAMENTO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO

Equation Chapter 2 Section 1

As rotinas de otimização estão implementadas para o uso de malhas regulares, que utilizam todos os elementos iguais, não importando a geometria. Entretanto, as rotinas de análise estão preparadas para aceitar qualquer tipo de malha.

- Rotina principal (*inicio.m*):

Esse módulo chama todas as demais sub-rotinas na ordem apropriada. Armazena também as configurações básicas, como tipo de restrição utilizada, valores iniciais para as variáveis de projeto e limites móveis, expoentes e coeficientes utilizados na função objetivo, valores da perturbação utilizada na otimização com restrição de tensão com relaxação- ϵ ativada e dados referentes à utilização do filtro gaussiano.

- Leitura de dados (*leitura.m*):

Nessa rotina é efetuada a leitura de um arquivo de texto formatado, no formato ASCII, contendo os dados necessários para gerar o modelo de elementos finitos. É aberta uma janela requisitando ao usuário que escolha um arquivo de modelo, com extensão “.DAT”. O conteúdo do arquivo é então lido na ordem mostrada a seguir, sendo armazenado em matrizes, vetores ou escalares, conforme for a natureza do que vai sendo lido:

- Número de elementos (*nelem*);
- Número de nós (*nnos*);
- Tipo de elemento finito (*elemento*): quadrado bilinear isoparamétrico, triângulo GT-9 ou elemento de Taylor;
- Modelo de elasticidade plana (*modelo*): estado plano de tensões ou deformações;
- Número de materiais da malha (*nmat*);
- Módulo de elasticidade (*E*);
- Coeficiente de Poisson (ν);
- Tensão limite (*sigma_t*);
- Peso específico do material (*densi*);
- Número de dimensões do problema (*ndim*): nessa versão só são resolvidos problemas bidimensionais;
- Número de deslocamentos prescritos (*ndest*);
- Número de forças nodais aplicadas (*nforcas*);
- Coordenadas nodais (*coorde*): nas direções X_1 e X_2 ;

- Matriz de dados dos elementos (*matriz*): cada linha dessa matriz tem armazenadas as seguintes informações: número do elemento → material do elemento → espessura do elemento²⁷ → conectividades (nós pertencentes a cada elemento);
 - Matriz com os deslocamentos prescritos (*desl*): nó e direção;
 - Matriz com as forças nodais (*forcas*): organizada da seguinte forma: magnitude, nó, direção, caso de carga;
- Rotina de mapeamento entre coordenadas locais e coordenadas globais (*local_global.m*):

Nessa sub-rotina é gerada uma tabela contendo a posição (linha e coluna) na matriz de rigidez global dos nós que formam cada elemento da malha. Essa tabela agiliza a montagem da matriz de rigidez global pois, dessa forma, essa “conversão” é feita apenas na primeira vez que o programa é executado.

A rotina é mostrada a seguir:

```

for i=1:nelem
  for noellinha=1:4
    nogloballinha=matriz(i,(noellinha+3));
    for direcaolinha=1:2
      linhael=2*(noellinha-1)+direcaolinha;
      locglob(i,linhael)=2*(nogloballinha-1)+direcaolinha;
    end
  end
end

```

Esse algoritmo é válido apenas para elementos quadriláteros e seu funcionamento é relativamente simples: o 1º laço seleciona o elemento i da malha. O próximo laço varre os 4 nós desse elemento, armazenando o número do nó (em coordenadas globais), retirado da matriz de conectividades. O 3º laço seleciona uma direção (X_1 e X_2). Assim, as fórmulas mostradas nas linhas 5 e 6 selecionam, respectivamente, a linha da matriz de rigidez local (de 1 à 8) correspondente que corresponde à matriz de rigidez global.

²⁷ Em todos os modelos gerados, essa espessura (que aparece na matriz de rigidez quando integrada a 3ª dimensão do problema de elasticidade plana) é mantida unitária. Optou-se construir os modelos dessa forma pois, conforme explicado anteriormente, quando utiliza-se o modelo SIMP com expoente unitário, a densidade de material possui o mesmo significado físico que a espessura.

- Rotina de mapeamento da vizinhança dos elementos (*vizinhanca.m*):

Essa rotina gera uma tabela contendo informações sobre a vizinhança de cada elemento finito da malha. Esses dados são usados posteriormente na etapa de filtragem, utilizada para evitar o fenômeno da instabilidade de tabuleiro e obter uma topologia final única, independente da malha de elementos finitos.

A subrotina procura na pasta de trabalho um arquivo com “nome_do_modelo.FIL”, utilizada caso a malha não seja retangular. Caso contrário, a rotina calcula o 1º vizinho de cima e de baixo, bem como 1º vizinho da esquerda e da direita.

Como são utilizadas malhas regulares, a numeração dos elementos é conhecida. O programa descobre o número de elementos e as dimensões de cada elemento nas direções X_1 e X_2 . Com essas informações é possível descobrir a vizinhança de cada elemento finito.

- Montagem da matriz de rigidez global (*maglobal_r.m*):

Essa é uma das rotinas mais importantes do programa. Ela monta a matriz de rigidez da estrutura que, juntamente com o vetor de forças, é usada para calcular a resposta em deslocamentos.

Inicialmente o programa seleciona o tipo de elemento finito utilizado. Com essa informação, é calculada a matriz de rigidez local utilizando a equação (I.24) tanto para o elemento quadrado bilinear isoparamétrico quanto para o elemento de Taylor, diferindo apenas no modo que a matriz B é montada (o elemento de Taylor deve ser sub-integrado). É calculado também o volume do elementos, utilizando a seguinte equação:

$$v_{elemento} = \sum_{p=1}^4 |J_p| \quad (\text{II.1})$$

onde $|J_p|$ é o determinante da matriz jacobiana calculado no ponto de integração p .

A matriz de rigidez local é a mesma para cada elemento da malha, diferindo apenas por um fator multiplicativo, que é a densidade de material ρ . A matriz de rigidez global é montada aplicando o princípio da superposição dos efeitos de cada matriz de rigidez local. Detalhes de montagem da matriz de rigidez e aplicação do princípio da superposição são encontrados em qualquer livro de elementos finitos, citando Hughes [Hughes, 1987], Bathe, [Bathe, 1996] e de Navarra [de Navarra, 1995] Grande parte dos elementos da matriz de rigidez local são zeros. Dessa forma, utilizou-se recursos do MATLAB para manipular matrizes esparsas, que ocupam

bem menos espaço na memória do computador, tornando as operações computacionais muito mais velozes.

Uma matriz esparsa possui a maior parte de seus elementos nulos. O modo mais comum de representar os elementos não nulos de uma matriz esparsa é criar uma lista contendo a linha, coluna e o valor do elementos nessa posição, organizados segundo o esquema a seguir [<http://www.icmc.sc.usp.br/~sce182/lmatesp.html>, site do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-Departamento de Computação e Estatística - SCE182 -Algoritmos e Estruturas de Dados 1 - Profs. Resp.: Graça Pimentel e Maria Cristina]:

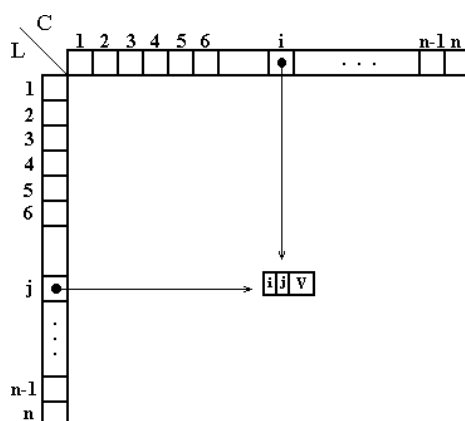


Figura II.1: Representação esquemática do posicionamento de elementos não-nulos em uma matriz esparsa de dimensão $n \times n$.

Os dados referentes ao posicionamento de cada elemento das matrizes de rigidez locais nas linhas e colunas da matriz de rigidez global são retirados da tabela gerada pela sub-rotina *local_global.m*.

Mesmo utilizando matrizes esparsas, esse processo pode levar um grande tempo de processamento. Após a montagem, são aplicadas as condições de contorno, zerando as linhas e colunas referentes aos nós cujo deslocamento encontra-se restrito, colocando valor unitário na diagonal. Dessa forma, a matriz torna-se positiva definida. Com essa característica garantida, aplica-se o algoritmo de Cholesky, também existente no MATLAB, que decompõe a matriz da seguinte forma:

$$K_{global} = LL^T \quad (II.2)$$

onde L é uma matriz triangular inferior, em que todos os elementos acima da diagonal principal são zeros. Maiores detalhes sobre decomposição de matrizes podem ser encontrados no livro de Bathe [Bathe, 1996].

- Cálculo da derivada da função objetivo (*der_vol.m*):

Essa rotina simplesmente resolve a equação (6.6) para um dado expoente p e coeficiente α .

- Montagem do vetor de forças global (*ccontorno.m*):

Essa sub-rotina aplica a superposição das forças nodais e forças de corpo (gravidade, se considerada), posicionando-as corretamente na linha correspondente ao sistema global.

Cada caso de carregamento corresponde a uma coluna dessa matriz.

- Cálculo dos deslocamentos nodais (*resolver_r.m*):

Nessa sub-rotina são calculados os deslocamentos nodais, que correspondem à resposta estrutural do sistema. O vetor deslocamento é montado na forma de uma matriz, com cada coluna correspondendo a um vetor deslocamento de um determinado caso de carga

O modo mais natural de se calcular os deslocamentos corresponde a isolar o termo u na equação (3.24), invertendo a matriz de rigidez global e multiplicando pelo vetor de forças. Entretanto, essa operação apresenta um custo computacional demasiadamente elevado, pois inverter uma matriz, mesmo sendo esparsa, é uma tarefa bastante complicada.

Por esse motivo, os deslocamentos são calculados por uma maneira mais eficiente, aplicando a decomposição de Cholesky. O procedimento utilizado é relativamente simples. Partindo da equação (3.24), decompõe-se a matriz de rigidez global K segundo a equação (II.2), resolvendo o problema em duas etapas:

$$\begin{aligned} Ku &= f \\ L\underbrace{L^T u}_y &= f \end{aligned} \tag{II.3}$$

Na primeira etapa, encontra-se o vetor y aplicando a retro-substituição, calculando:

$$Ly = f \tag{II.4}$$

Com esse resultado, encontra-se o vetor deslocamento, também por retro-substituição:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{u} = \mathbf{y} \quad (\text{II.5})$$

A primeira vista, esse procedimento parece complicar a resolução do problema. Porém, é preciso lembrar que as matrizes \mathbf{L} e \mathbf{L}^T são triangulares e cheias de zeros, tornando o processo de retro-substituição extremamente rápido.

- Cálculo das deformações e tensões (*deformacoes.m* e *tensoes.m*):

No elemento bilinear isoparamétrico as deformações são calculadas no centro do elemento, enquanto que o elemento de Taylor tem suas deformações calculadas em cada um dos quatro pontos de integração. Em ambos os casos a equação básica utilizada é equação (I.12), derivada do Método dos Elementos Finitos. Como a deformação é calculada em cada elemento isoladamente, a equação (I.12) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (\text{II.6})$$

onde a matriz \mathbf{B} é calculada conforme o tipo de elemento utilizado na malha e o vetor \mathbf{u}_e é o vetor de deslocamentos do elemento. Suas componentes são retiradas do vetor deslocamento global, utilizando o seguinte algoritmo:

```
for ai=1:8
    linhaglobal=locglob(i, ai);
    ue(ai)=u(linhaglobal, caso);
end
```

onde *locglob* armazena o mapeamento local-global, *u* é o vetor deslocamento global e *caso* é um determinado caso de carregamento. Se for utilizado o elemento de Taylor, são acrescentadas 4 linhas extras referentes às funções bolha.

As tensões são calculadas usando a equação (3.6), obtendo cada componente individualmente.

Nessa sub-rotina também se calcula a tensão de Von Mises, que é usada no problema de otimização com restrição de tensão. A equação utilizada é uma adaptação da equação (6.32), modificada para otimizar as operações vetoriais do MATLAB:

$$\sigma_{vm}^e = \sqrt{\sigma_e^T V \sigma_e} \quad (\text{II.7})$$

onde σ_e é o vetor das componentes de tensão para cada elemento, ou seja, $\sigma_e = [\sigma_{11}^e \ \sigma_{22}^e \ 2\sigma_{12}^e]^T$.

- Sobre-relaxação sucessiva (*sor.m*):

A sobre-relaxação sucessiva é uma técnica matemática utilizada para escolher um valor inicial para o vetor das densidades, teoricamente “mais próximo” do ponto ótimo. Essa técnica visa simular o critério de saturação de tensões, alterando as densidades dos elementos de modo a levá-los para a tensão limite.

Alguns autores, citando Pereira [Pereira, 2001], implementaram essa técnica, reduzindo o número de iterações necessárias para o problema convergir. O principal problema associado à sobre-relaxação sucessiva está no fato de que o método não considera que a variação da tensão em um elemento i acarreta uma mudança na tensão de um elemento j . Mesmo assim, na maior parte dos exemplos, essa técnica oferece um bom ponto de partida para as densidades.

Sabendo que a tensão tem relação inversamente proporcional à densidade (equação (6.23)), calcula-se um fator (geralmente menor do que zero) que faz a tensão de Von Mises atingir o valor limite. Esse cálculo é feito utilizando a equação (II.8):

$$fator = \frac{\sigma_{vm}}{\bar{\sigma}} \quad (\text{II.8})$$

A equação (II.8) resulta em um vetor que, multiplicado ao vetor inicial de densidades, fornece o novo valor de ρ_0 que faria as tensões de cada elemento alcançarem o valor máximo:

$$\rho_{0/novo} = fator \cdot \rho_{inicial}^T \quad (\text{II.9})$$

Esse novo vetor ρ deve ser testado, a fim de verificar se não está ocorrendo uma violação muito brusca das restrições. Isso é feito reavaliando a resposta estrutural da peça com o novo vetor de densidades. Após 3 reanálises, é selecionado o valor de densidade inicial que será utilizado nas rotinas de otimização propriamente ditas.

- Cálculo do trabalho das forças externas (*trabalho.m*):

Essa sub-rotina resolve a equação (6.1) para cada caso de carregamento, armazenando a história dos valores de flexibilidade em cada iteração, para posterior visualização e verificação de convergência.

- Cálculo da derivada da flexibilidade (*der flex r.m*):

Essa sub-rotina resolve a equação (6.20) considerando malhas regulares, o que facilita e agiliza o cálculo da derivada da matriz de rigidez global.

Conforme mostrado anteriormente, a matriz de rigidez global depende diretamente da densidade de cada elemento finito. Dessa forma, um determinado termo K_{ij} da matriz de rigidez global pode ser escrito da seguinte forma:

$$K_{ij} = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \dots + \alpha_k \rho_k \quad (\text{II.10})$$

Assim, derivando a matriz de rigidez global em relação à densidade do elemento k , obtém-se:

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial \rho_k} = \alpha_k \quad (\text{II.11})$$

Em outras palavras, após a derivação mostrada em (II.11), resta uma matriz na qual os únicos elementos diferentes de zero correspondem aos termos provenientes da matriz de rigidez local do elemento k .

Por esse motivo, não é necessário efetuar operações sobre os elementos zerados da matriz. A equação efetivamente resolvida para cada caso de carregamento é mostrada a seguir:

$$\frac{\partial W^k}{\partial \rho_i} = -(\mathbf{u}_e^k)^T \mathbf{K}_{elem}^i \mathbf{u}_e^k \quad (\text{II.12})$$

- Cálculo da derivada da tensão (*der sigma r.m*):

Essa sub-rotina resolve a equação (6.46), também utilizando para malhas regulares. O cálculo dessa derivada despense bastante tempo computacional, uma vez que, conforme mostrado anteriormente, um problema de otimização com restrições de tensão apresenta um número muito elevado de restrições. A equação (6.46) pode ser vista novamente a seguir:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{\sigma_{vm}^0} \mathbf{u}^T \mathbf{M}_i^0 \underbrace{\mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u} \right)}_{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j}} \quad (\text{II.13})$$

Como pode ser visto, é necessário calcular a derivada do deslocamento para cada novo elemento i (que corresponde a uma linha, ou restrição, da matriz das derivadas), que por sua vez necessita da inversa da matriz de rigidez global. Apenas parte dessa afirmação é verdadeira. Será visto que, da mesma forma que no cálculo dos deslocamentos, a derivada dos deslocamentos também não necessita do cálculo da matriz de rigidez inversa, bastando aplicar a decomposição Cholesky da matriz de rigidez global, a qual já está calculada. Além disso, como está sendo usada uma malha com todos os elementos idênticos, a derivada do deslocamento só precisa ser calculada uma vez por iteração, para cada caso de carga, sendo então guardada em um vetor.

Inicialmente calcula-se a matriz \mathbf{M}_i^0 , utilizando-se a equação a seguir:

$$\mathbf{M}_i^0 = \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}^0 \mathbf{V} \mathbf{E}^0 \mathbf{B}_i \quad (\text{II.14})$$

onde \mathbf{B}_i é calculado no centro do elemento ($\xi_1 = \xi_2 = 0$); as condições de contorno sobre os deslocamentos devem ser aplicadas. A seguir deve ser calculado o vetor das derivadas do deslocamento. Desconsiderando as forças de corpo, a equação que calcula a derivada do deslocamento pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u}^T \quad (\text{II.15})$$

Aplicando a decomposição de Cholesky, os dois sistemas de equações lineares que devem ser resolvidos para encontrar a derivada desejada são mostrados a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \mathbf{y} &= - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{u}^T \rightarrow \boxed{\mathbf{y}} \\ \mathbf{L}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j} &= \mathbf{y} \rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_j}} \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Dessa forma, a equação efetivamente resolvida é mostrada a seguir:

- Cálculo do volume e da função objetivo (*volume.m*):

Essa sub-rotina simplesmente resolve as equações (6.4) com expoente unitário e (6.5), quando a função objetivo está penalizado, imprimindo os resultados na tela.

- Rotina de cálculo dos limites móveis (*lim_movel.m*):

Essa sub-rotina, apesar de sua simplicidade, exerce um papel extremamente importante no processo de otimização utilizado, empregando a Programação Linear Seqüencial.

O algoritmo é bastante simples, baseado na história das 3 últimas iterações, já utilizado com êxito por autores como Fonseca [Fonseca, 1997], Cardoso [Cardoso, 2000] e Guilherme [Guilherme, 2001].

A rotina testa se a variação da densidade nas 3 últimas iterações alterou seu sinal, ou seja, se estava diminuindo, passou a aumentar, ou vice-versa. Se isso ocorreu, pode significar que esse valor de densidade correspondente a um determinado elemento já está perto do ótimo. Dessa forma, o valor do limite móvel para este elemento é reduzido em 20%, respeitando um limite inferior. Se as densidades não variarem, o valor do limite móvel é então aumentado em 20% a fim de acelerar o processo de convergência, também respeitando um limite superior.

- Rotinas de otimização (*otim_flex.m* e *otim_sigma.m*):

Essas rotinas resolvem o problema da minimização do volume de uma estrutura bidimensional contínua com restrições de flexibilidade ou tensão.

Os limites móveis calculados são aplicados às densidades (equação (4.21)), gerando valores máximos e mínimos de variação das densidades na iteração atual. Se for especificado, a técnica de filtragem gaussiana para controlar o aparecimento da instabilidade de tabuleiro pode ser acionada, utilizando a equação (5.7), controlando diretamente a variação máxima e mínima das densidades.

Após a linearização, as restrições são normalizadas, de modo que o lado direito da desigualdade valha sempre 1 ou -1, ou seja, considerando que as restrições estão definidas no padrão $Ax \leq b$, a normalização é feita da seguinte forma:

$$\frac{A}{|b|}x \leq \pm 1 \quad (\text{II.17})$$

Aplicando os dados de entrada na rotina de programação linear (LINPROG, do MATLAB ou DSPLP, do Fortran), o programa retorna o novo valor das densidades bem como os multiplicadores de Lagrange das restrições.

- Critério de parada (*crit_parada.m*):

Essa rotina verifica se o problema está convergindo, uma vez que o problema original não-linear não-convexo é substituído por seqüências de problemas lineares convexos. Dessa forma, a cada nova iteração o problema tende a se aproximar do ponto ótimo²⁸.

Inicialmente é verificado se o valor da flexibilidade ou da tensão efetiva atingiram os valores limites (respeitando uma tolerância de $\pm 1\%$ do respectivo valor limite). Se os valores estiverem aceitáveis, é feita uma média da variação da função objetivo nas 3 últimas iterações. Se esse valor estiver inferior à tolerância especificada (10^{-5}), então é feita uma última verificação, dessa vez sobre a variação das densidades. É calculada a norma euclidiana da diferença entre o vetor densidade da penúltima e da última iteração, ou seja:

$$teste = \sqrt{|\rho_{iter-1} - \rho_{iter}|} \quad (II.18)$$

onde *iter* corresponde à iteração atual. Se o valor de teste for menor que a tolerância, o processo de otimização pára, gerando um arquivo de saída que pode ser lido num pós-processador. Caso contrário, o processo iterativo continua até que a convergência seja garantida.

²⁸ É importante manter em mente que, matematicamente, a solução de um problema de otimização nada mais é que um ponto num espaço n-dimensional \mathfrak{R}^n .