

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APROXIMAÇÃO DE PETROV-GALERKIN PARA O ESCOAMENTO DE
SANGUE EM ANASTOMOSES SISTÊMICO-PULMONARES DO TIPO
BLALOCK-TAUSSIG MODIFICADA

por

Dimitrius Caloghero Pereira

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2001

APROXIMAÇÃO DE PETROV-GALERKIN PARA O ESCOAMENTO DE SANGUE EM
ANASTOMOSES SISTÊMICO-PULMONARES DO TIPO BLALOCK-TAUSSIG
MODIFICADA

por

Dimitrius Caloghero Pereira
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração : Fenômenos de Transporte

Orientador : Prof. Dr. Sérgio Frey

Aprovada por :

Prof. Dr. Júlio C. R. Claeysen, PROMEC

Prof. Dr. Antônio Carlos Weston, FFFCMPA

Prof. Dr^a Angela B.D. Moura, DEMEC

Prof. Dr. Alberto Tamagna
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 28 de dezembro de 2001

Gostaria de agradecer as seguintes pessoas e Instituições:

A minha amada esposa Adriana, pelo teu carinho, amor, dedicação e pelo teu auxílio constante na elaboração deste trabalho.

Aos meus queridos pais, Moacir e Penelope, e minha irmã Lisandra, por todo incentivo durante minha formação, e por todo amor e carinho que sempre me fortaleceu para superar as dificuldades e buscar novos desafios.

Ao Professor Sérgio Frey, pela valiosa orientação, sem a qual esta dissertação não poderia ter sido realizada.

Ao Centro Nacional de Supercomputação (CESUP) pela assistência e suporte técnico prestados e os recursos computacionais utilizados.

As Diretoras do Centro Nacional de Supercomputação Denise Ewald e Magali Longhi, pela oportunidade de aprendizado e participação neste Centro.

Ao Instituto de Cardiologia pelo suporte e acolhimento.

Ao Dr. João Ricardo Sant'anna, o principal motivador do tema deste trabalho, por toda colaboração e apoio dispensados.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS, pelo conhecimento transmitido e, aos colegas do LAMAC, pela ajuda constante.

A Gerente de Engenharia da Victor Reinz Mercosur (DANA) Roseane Campos, pelo apoio e compreensão.

RESUMO

A anastomose sistêmico-pulmonar é um excelente procedimento paliativo para crianças e recém-nascidos portadores de cardiopatias congênitas cianóticas com diminuição da circulação pulmonar. Neste artigo, as aproximações “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin – SUPG” foram utilizadas na simulação de escoamento de sangue em uma anastomose sistêmico pulmonar. A Anastomose estudada neste artigo é conhecido como Blalock-Taussig modificada no qual um enxerto de tubo sintético (prótese) é interposto entre a artéria subclávia esquerda e a artéria pulmonar com o objetivo de desviar parte do fluxo sistêmico ao pulmonar. A metodologia de elementos finitos utilizada, conhecida como método SUPG, supera as dificuldades enfrentadas pelo método de Galerkin clássico em altos números de Reynolds, que são compatibilizar os subespaços de velocidade e pressão – satisfazendo deste modo a condição denominada de Babuška-Brezzi e evitar oscilações espúrias devido à natureza assimétrica da aceleração advectiva de equação de momentum – adicionando termos malha-dependentes para a formulação de Galerkin clássica. Estes termos adicionais são construídos para aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência. Um modelo tridimensional parametrizado, utilizando o elemento lagrangeano trilinear, foi criado a partir de medições obtidas durante procedimento cirúrgico para avaliar os efeitos dos parâmetros geométricos envolvidos na cirurgia (diâmetro e ângulo do enxerto e a pulsatilidade do escoamento). Os resultados apresentam que o ângulo da anastomose proximal tem sensível influência na quantidade de fluxo desviada pelo enxerto e enorme influência na porcentagem de fluxo direcionado para cada um dos pulmões. Quanto ao diâmetro do enxerto conclui-se que este é o regulador principal da porcentagem de fluxo desviada. A partir das simulações realizadas determinou-se correlações para o fator de atrito e porcentagem de fluxo sanguíneo desviado pelo enxerto.

ABSTRACT

“PETROV-GALERKIN APPROXIMATION FOR BLOOD FLOW THROUGH A SYSTEMIC PULMONARY SHUNT – MODIFIED BLALOCK TAUSSIG”

Systemic pulmonary shunts provide an excellent form of palliation in neonates and children presenting with cyanotic congenital heart disease with pulmonary flow decrease. In this article, Streamline Upwind/Petrov-Galerkin approximations for blood flow through systemic pulmonary shunts have been performed. The shunt studied in this article is known as modified Blalock-Taussig in which a synthetic tube graft is inserted between the left subclavian and the pulmonary arteries with the objective of addressing part of the systemic to the pulmonary flow. The finite element methodology we are concerned with, called SUPG method, overcomes the classical Galerkin shortcoming for high Reynolds flows - namely, the need of compatibilize the velocity and pressure subspaces satisfying in this way the so-called Babuška-Brezzi condition and the rising of spurious numerical oscillations due to the *asymmetric* nature of advective acceleration of momentum equation - adding mesh-dependent terms to the classical Galerkin formulation. These additional terms are designed to enhance stability of the original Galerkin formulation without upsetting its consistency. A parametric tridimensional model, employing trilinear lagrangean finite elements, was created based on direct intraoperative measurements in the attempt to quantify the effects of geometric parameters involved in surgical procedure (diameters, angles and pulsatility of the flow). Results showed that proximal anastomosis angle has sensible influence in the blood flow shunt percentage and enormous influence in the blood flow percentage in each one of the lungs. About shunt diameter it's possible one concludes that this is the main regulator of the blood flow shunt percentage. Correlations were determined to friction factor and the blood flow shunt percentage.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 PRELIMINARES.....	1
1.2 SISTEMA CARDIOVASCULAR HUMANO	2
1.3 CARDIOPATIAS CONGÊNITAS CIANÓTICAS	2
1.4 ANASTOMOSES SISTÊMICO-PULMONARES	4
1.5 A DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL NO SISTEMA VASCULAR HUMANO.....	6
1.6 ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS.....	7
1.7 O MÉTODO DE GALERKIN	8
1.8 MÉTODOS ESTABILIZADOS.....	9
1.9 NOTAÇÃO.....	11
2. REOLOGIA DO SANGUE	13
2.1 ASPECTOS GERAIS.....	13
2.2 VISCOSIDADE DO SANGUE	14
2.3 REOLOGIA DO PLASMA.....	15
2.4 REOLOGIA DOS GLÓBULOS VERMELHOS	17
3 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA DINÂMICA DOS FLUIDOS	19
3.1 A CINEMÁTICA DOS FLUIDOS	19
3.2 DINÂMICA DOS FLUIDOS: A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO.....	22
3.3 HIPÓTESES CONSTITUTIVAS	25
4. ELEMENTOS FINITOS	28
4.1 APROXIMAÇÃO DE GALERKIN.....	28
4.2 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO LAGRANGEANO HEXAÉDRICO DE OITO NÓS.....	33
4.3. TRANSFORMAÇÃO DO DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO.....	35
4.4. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – QUADRATURA GAUSSIANA	36
5 MÉTODOS E RESULTADOS	37
5.1. MODELO ESTUDADO.....	37
5.2. ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	38
5.3. PACIENTES - AMOSTRAGEM.....	40
5.4. CONSIDERAÇÕES ÉTICAS.....	40
5.5. VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO	41
5.6. INFLUÊNCIA DOS DETERMINANTES GEOMÉTRICOS	47
5.6.1. FATOR DE ATRITO DO ESCOAMENTO NA ARTÉRIA SUBCLÁVIA.....	47
5.6.2. FLUXO DESVIADO PELO ENXERTO	53
5.6.3. ANÁLISE LOCAL DOS CAMPOS DE VELOCIDADE E PRESSÃO	57
5.7 SIMULAÇÃO SOB ESCOAMENTO PULSANTE	69
6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	74
6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
ANEXO I	82
ANEXO II	83

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Aceleração do fluido [m/s ²]
A	Parâmetro do modelo de Carreau []
$a(\cdot, \cdot)$	Forma bilinear em \mathbf{V}_h []
$b(\cdot, \cdot)$	Forma bilinear em P_h []
b	Fator que representa o aumento da fração de volume de partículas suspensas []
B	Um fluido qualquer []
C_h	Partição do domínio Ω em elementos finitos []
$C^0(\Omega)$...	Espaço das funções contínuas em Ω []
C	Fator que representa o aumento da fração de volume de partículas suspensas []
Dr	Razão entre os diâmetros da artéria subclávia e do enxerto []
f	Força de corpo do escoamento []
<i>f</i>	Fator de atrito []
F(·)	Tensor gradiente de deformação []
h_K	Comprimento da malha empregada []
$H^1(\Omega)$...	Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$ []
$H_0^1(\Omega)$...	Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ []
I	Tensor identidade []
\mathbf{K}^0	Espaço funcional do campo de velocidade à divergência nula []
\mathbf{K}_h^0	Espaço de elementos finitos do campo velocidade à divergência nula []
$L^2(\Omega)$...	Espaço das funções de quadrado integrável em Ω []
$L_0^2(\Omega)$...	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω []
m	Normal exterior unitária []
<i>m</i>	Parâmetro modelo Power-Law []
M =	Massa de fluido que ocupa a região Ω []
n	Dimensão do espaço físico []
<i>n</i>	Parâmetro modelo Power-Law []
n	Normal exterior unitária []
N	Dimensão do espaço físico []
N_a	Funções base de elementos finitos associada ao nó A da partição C_h []
p	Pressão do fluido [Pa]

\mathbf{P}	Espaço funcional do campo de pressão.....[]
\mathbf{P}_h	Espaço de elementos finitos do campo de pressão[]
\mathbf{r}	Vetor posição[]
R_k	Espaço polinomial de grau k[]
R_l	Espaço polinomial de grau l[]
Re_k	Número de Reynolds de malha[]
S	Coleção de funções teste[]
S	Superfície fechada arbitrária[]
t	Parâmetro de tempo[]
\mathbf{t}	Vetor tensão[]
\mathbf{u}	Velocidade do fluido [m/s]
\mathbf{u}_A	Graus-de-liberdade incógnitos[]
\mathbf{u}_h	Solução aproximada em termos de função base[]
\mathbf{v}	Função teste de velocidade[]
V	Espaço funcional do campo de velocidade[]
\mathbf{V}_h	Espaço de elementos finitos do campo de velocidade[]
\mathbf{x}	Posição do fluido[]
\mathbf{X}	Posição do fluido no instante $t=0$[]

LETRAS GREGAS

Γ	Fronteira do domínio Ω[]
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet[]
Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Neumann[]
α	Coeficiente a ser determinado[]
β	Coeficiente a ser determinado[]
χ	Movimento do fluido[]
δ	Delta de Kronecker[]
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	Parte simétrica do tensor $\nabla\mathbf{u}$[]
φ	Coeficiente a ser determinado[]
γ	Taxa de deformação [s ⁻¹]
η	Viscosidade aparente [kg/ms]
η_0	Viscosidade a taxa de deformação zero [kg/ms]

η_∞	Viscosidade a taxa de deformação infinita	[kg/ms]
λ	Constante de tempo do modelo de Carreau	[s]
μ	Viscosidade absoluta do fluido	[kg/ms]
μ_p	Viscosidade do plasma	[kg/ms]
μ_s	Viscosidade relativa da suspensão	[kg/ms]
μ_w	Viscosidade da água	[kg/ms]
θ	Fração de volume de partículas	[]
ξ	Coordenada natural do elemento finito hexaédrico	[]
ζ	Coordenada natural do elemento finito hexaédrico	[]
ρ	Massa específica do fluido	[kg/m ³]
σ	Tensor tensão de Cauchy	[]
ς	Coordenada natural do elemento finito hexaédrico	[]
τ	Parâmetro de estabilidade	[]
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento	[Pa]
ψ	Qualquer grandeza genérica	[]
Ω	Domínio do problema	[]
Ω_r	Domínio na configuração de referência	[]

SOBRESCRITO

a	Número do nó do elemento	[]
g	Condição de contorno essencial (Dirichlet)	[]
h	Condição de contorno natural (Neumman)	[]
K	Grau dos polinômios dos termos de velocidade	[]
k	Elemento finito da partição C_h	[]
h	Comprimento de malha	[]

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$(\cdot, \cdot) \dots$	Produto interno de $L^2(\Omega)$	[]
------------------------	--	-----

$(\cdot, \cdot)_K \dots$	Produto interno de $L^2(\Omega_K)$	[]
$\ \cdot\ _0 \dots$	Norma de $L^2(\Omega)$	[]
$\ \cdot\ _{0,K} \dots$	Norma de $L^2(\Omega_K)$	[]
$\ \cdot\ _1 \dots$	Norma de $H^1(\Omega)$	[]

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura

1.1	Circulações pulmonar e sistêmica	2
1.2	Tetralogia de Fallot.....	3
1.3	Atresia tricúspide	4
1.4	Cirurgia de Blalock-Taussig clássica.....	5
1.5	Cirurgia de Blalock Taussig modificada.....	6
2.1	Efeito do hematócrito sobre a viscosidade.....	14
2.2	Formação de roletes (50x).....	15
2.3	Peso molecular e dimensões relativas de algumas moléculas proteicas	16
2.4	Glóbulos vermelhos	18
4.1	Elemento hexaédrico de 8 nós.....	33
5.1	Anastomose do tipo Blalock-Taussig modificada, (a) desenho (b) modelo simétrico	37
5.2	Condições de contorno impostas ao modelo	39
5.3	Condição de contorno pulsante na artéria subclávia – Velocidade (m/s)	39
5.4	Velocidade (m/s) na prótese	41
5.5	Procedimentos de (a) Norwood e (b) Blalock-Taussig modificado	42
5.6	Variação da pressão nas próteses (“Shunts”) de (a) 3 e (b) 4mm em função do fluxo de sangue desviado (l/min)	43
5.7	Iso-regiões de pressão (Pa) – ($133,32 Pa = 1mmHg$).....	44
5.8	(a) Perfil de velocidade na anastomose distal do “Shunt” – seção A1A2 conforme (b)	45
5.9	Contornos de velocidade (m/s)	46
5.10	Diagrama de Moody	48
5.11	Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia	50
5.12	Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia.....	50
5.13	Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia	51
5.14	Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia.....	52
5.15	Desvio de fluxo de sangue no enxerto em função de Dr	53
5.16	Perfil de velocidade axial nas saídas das artérias pulmonares (a) direita, (b) esquerda	55
5.17	Escoamento em um duto circular reto	57
5.18	Perfis de velocidade (m/s) ao longo do modelo geométrico	58
5.19	Coeficiente de pressão na artéria subclávia para anastomoses de 30°	59
5.20	Coeficiente de pressão na artéria subclávia em função do ângulo da anastomose.....	59

5.21 Vetores de velocidade (<i>m/s</i>)– anastomose de 90°	60
5.22 Coeficiente de pressão na artéria subclávia em função do diâmetro do enxerto.....	60
5.23 Perfil de velocidade longitudinal (<i>m/s</i>) em função do ângulo.....	61
5.24 Perfil de velocidade longitudinal (<i>m/s</i>) em função do diâmetro do enxerto	61
5.25 Linhas de corrente – (a) 30°, (b) 90°	62
5.26 Contornos de velocidade (<i>m/s</i>) – (a) Paciente P7, (b) Paciente P8.....	63
5.27 Iso-regiões de pressão (<i>Pa</i>) – Pacientes :(a) P1 , (b) P3, (c) P4, (d) P6.....	64
5.28 Iso-regiões de pressão (<i>Pa</i>)– Paciente P10	65
5.29 Pressão (<i>Pa</i>) na parede do enxerto em função do ângulo	65
5.30 Linhas de corrente – (a) 4mm , (b) 6mm	66
5.31 Contornos de velocidade (<i>m/s</i>)Pacientes: (a)P1, (b) P3, (c) P5, (d) P10	67
5.32 Iso-regiões de pressão (<i>Pa</i>) – Pacientes: (a) P2, (b) P3, (c) P9.....	68
5.33 Velocidade (<i>m/s</i>) na entrada da artéria subclávia durante um pulso cardíaco	69
5.34 Iso-regiões de pressão (<i>Pa</i>)	69
5.35 Linhas de corrente.....	70
5.36 Localização dos planos de corte transversais	71
5.37 Vetores de velocidade (<i>m/s</i>) na seção 1	71
5.38 Vetores de velocidade (<i>m/s</i>) na seção 2	72
5.39 Perfil de velocidade axial (<i>m/s</i>) na anastomose distal	73
5.40 Perfil de velocidade longitudinal (<i>m/s</i>) em função do tempo.....	73

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela

2.1. Volumes sanguíneos (<i>ml/kg</i> de peso).....	13
2.2. Contagem dos glóbulos (resultados normais por mm^3)	13
4.1. Coordenadas locais	35
5.1 Pacientes com cardiopatia congênita cianótica incluídos no estudo – D (diâmetro), L (extensão).....	40
5.2. Variação de pressão no “Shunt”	44
5.3 Parâmetros dos modelos Newtonianos generalizados utilizados neste trabalho.....	44
5.4 Porcentagem de sangue desviado pelo enxerto tubular (“Shunt”)	45
5.5 <i>f</i> Re calculado para anastomoses com ângulo de 60°	49

5.6	Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia.....	50
5.7	Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia.....	51
5.8	Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia.....	51
5.9	Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia.....	52
5.10	fRe calculado para anastomoses com diâmetro de $5mm$	52
5.11	Correlações para cálculo fluxo de sangue desviado pelo enxerto em função da razão entre os diâmetros da artéria subclávia e do enxerto.....	53
5.12	Porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e distribuído pelas artérias pulmonares – (a) 30° , 45° , 60° ; (b) 30° , 60° , 90° , 110°	54
5.13	Porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e distribuído para as artérias.....	56

1. INTRODUÇÃO

1.1 PRELIMINARES

O objetivo deste trabalho é estudar a influência dos fatores geométricos no escoamento de sangue em uma anastomose sistêmico-pulmonar utilizando um código de dinâmica de fluidos computacional baseado no método de elementos finitos.

A dinâmica de fluidos computacional vem sendo utilizado para simular escoamentos de sangue com o objetivo de auxiliar pesquisas e tratamentos de doenças vasculares. Os resultados destas simulações tem colaborado nos projetos de novas próteses, no aperfeiçoamento de técnicas cirúrgicas e na compreensão da hemodinâmica do sistema vascular humano.

As simulações do escoamento de sangue se concentram em artérias com bifurcações, ramificações e curvaturas, (Brasil et al, 1998) onde é elevada a incidência de patologias como: arteriosclerose, aneurisma e trombose. Verificou-se que as simulações mais estudadas até o momento são os escoamentos nas artérias carótidas e aorta abdominal e nas anastomoses de enxerto vascular na artéria femoral.

A anastomose a ser estudada é conhecida como Blalock Taussig Modificada (Leval, 1981) e consiste em uma técnica cirúrgica paliativa indicada nas cardiopatias congênitas cianóticas com diminuição do fluxo de sangue arterial nas artérias pulmonares. Com o objetivo de aumentar o fluxo pulmonar, parte do fluxo sistêmico é direcionado para as artérias pulmonares através da interposição de um enxerto tubular (prótese, “Shunt”) de politetrafluoretileno – “PTFE” entre a artéria subclávia e a artéria pulmonar. A sobrevida destes pacientes depende do aumento no fluxo pulmonar pelo enxerto e portanto, da dinâmica do escoamento no enxerto e nas artérias pulmonares, diretamente ligado aos fatores geométricos envolvidos na cirurgia, tais como diâmetros das artérias e enxerto, ângulos da anastomose.

Um modelo geométrico tridimensional parametrizado foi desenvolvido para permitir simulações com diferentes configurações geométricas.

1.2 SISTEMA CARDIOVASCULAR HUMANO

Conforme Rushmer, 1974, o sistema cardiovascular humano é constituído pelo coração, que atua como uma bomba, uma série de vasos de distribuição e coleta e por um extenso sistema de finos vasos que permite trocas rápidas entre os tecidos e os canais capilares. Dois circuitos dispostos em série compõem este sistema: a circulação sistêmica, na qual o sangue sai do coração para todas as partes do corpo e volta novamente ao coração e a circulação pulmonar, em que o sangue vai do coração aos pulmões e retorna ao coração. O coração possui quatro câmaras, ilustradas na figura 1.1: o átrio e o ventrículo esquerdo são parte da circulação sistêmica, e o átrio e ventrículo direito fazem parte da circulação pulmonar.

Na circulação sistêmica, o sangue arterial parte do ventrículo esquerdo no coração através da artéria aorta e é distribuído através de suas numerosas ramificações, para todas as partes do corpo. O sangue venoso retorna ao coração através das veias, que funcionam como condutos e como um reservatório de volume. As grandes veias se unem para formar as duas veias cavas que conduzem o sangue ao átrio direito. Na circulação pulmonar, o sangue venoso flui do átrio direito para o ventrículo direito por onde o sangue parte rumo aos pulmões, através do tronco pulmonar que bifurca-se, originando as artérias pulmonares direita e esquerda. O sangue oxigenado deixa os pulmões rumo ao átrio esquerdo através das veias pulmonares .

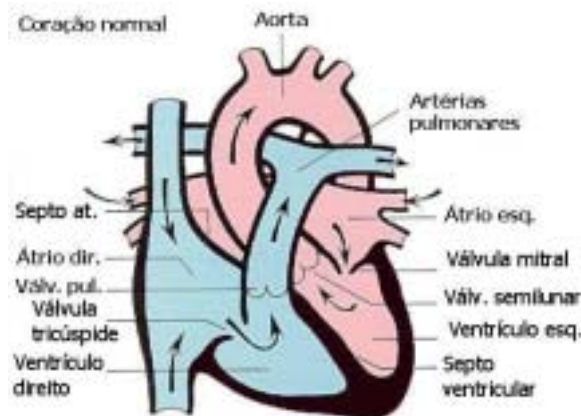


Figura 1.1. Circulações pulmonar (em azul) e sistêmica (em rosa)

1.3 CARDIOPATIAS CONGÊNITAS CIANÓTICAS

As cardiopatias congênitas cianóticas são classificadas, conforme Nesralla, 1994, de acordo com o aumento ou a diminuição da circulação pulmonar. Entre estas cardiopatias com diminuição da circulação pulmonar situamos a tetralogia de Fallot e a atresia tricúspide.

A tetralogia de Fallot é a cardiopatia congênita cianótica mais freqüente após o primeiro ano de vida. Esta cardiopatia foi descrita por Atiene Fallot em 1888 (ver Zielinsky, 1988) como uma associação de obstrução da via de saída do ventrículo direito relacionada a um defeito do septo interventricular, hipertrofia do ventrículo direito e à dextroposição da aorta, ilustrados na figura 1.2. A severidade dos sintomas é diretamente proporcional ao grau de obstrução da via de saída do ventrículo direito e ao grau de dextroposição da aorta. Sem tratamento cirúrgico, 25% das crianças morrem durante o primeiro ano de vida, 50% ao atingir os três anos e 75% falecem aos dez anos. Somente um pequeno número de pacientes ultrapassam os 30 anos com importante cianose e má qualidade de vida.

Para a tetralogia de Fallot existem diferentes condutas cirúrgicas. A opção primária é a correção definitiva do defeito, que visa a cura do paciente. Quando a opção de reparo definitivo não é indicada, é necessária a utilização de um procedimento paliativo.

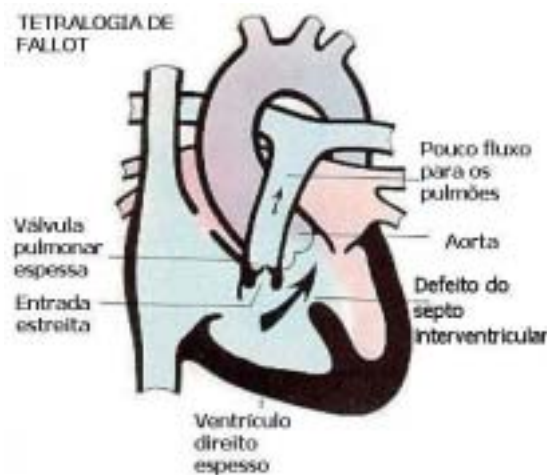


Figura 1.2. Tetralogia de Fallot

Segundo Nesralla, 1994, a atresia tricúspide, ilustrada na figura 1.3, constitui cerca de 2% de todas as cardiopatias. Caracteriza-se pelo fato do sangue venoso que chega ao átrio direito só atingir os ventrículos através de uma comunicação interatrial. Ocorre uma ausência da conexão atrioventricular direita, com tecido do sulco atrioventricular interpondo-se entre o átrio e o ventrículo direito. Uma outra forma de atresia tricúspide, porém mais rara, é aquela na qual há presença de uma válvula em forma de membrana imperfurada. Sem tratamento cirúrgico a sobrevivência destes pacientes é muito pobre, sendo que 50% dos pacientes falecem no primeiro ano de vida. A atresia tricúspide não conta com reparo cirúrgico corretivo e definitivo.

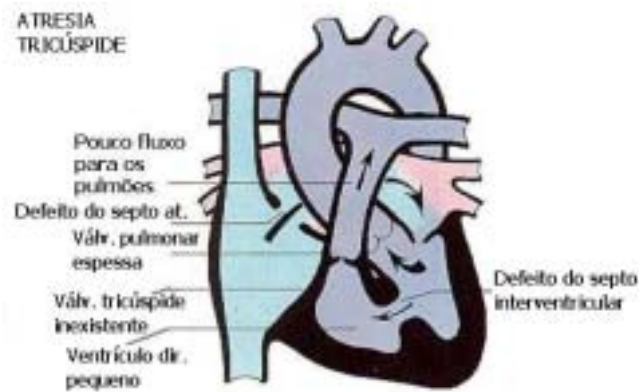


Figura 1.3. Atresia tricúspide

1.4 ANASTOMOSES SISTÊMICO-PULMONARES

A anastomose sistêmico-pulmonar desvia parte do fluxo da circulação sistêmica à circulação pulmonar com objetivo de aumentar o baixo fluxo pulmonar decorrente de cardiopatias congênitas.

A primeira cirurgia paliativa de anastomose sistêmico-pulmonar, para tratamento da cardiopatia cianótica com hipofluxo pulmonar, foi realizada em 1944, por Alfred Blalock e Helen Taussig em uma criança com 15 meses de idade, portadora de tetralogia de Fallot (Blalock e Taussig, 1945).

A primeira anastomose de Blalock-Taussig, ilustrada na figura 1.4, foi realizada com o segmento terminal da artéria subclávia esquerda implantado lateralmente na artéria pulmonar do mesmo lado. Posteriormente, esta técnica cirúrgica passou a ser realizada no lado do tórax que continha a artéria inominada, pois considerava-se que a artéria subclávia originária da inominada apresentava menor propensão ao acotovelamento. Atualmente, a anastomose subclávio-pulmonar é realizada com a artéria subclávia esquerda pela maior parte dos cirurgiões (Thomé, 1993).

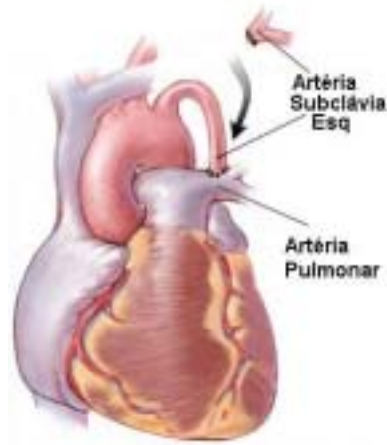


Figura 1.4. Cirurgia de Blalock-Taussig clássica

O diâmetro da artéria subclávia tem a grande vantagem de limitar o fluxo sistêmico para o leito pulmonar, evitando hiperfluxo com conseqüente hipertensão arterial pulmonar, tornando esta complicação menos freqüente que nos casos de anastomose aorto-pulmonares (Neches et al., 1975). Algumas das suas desvantagens são que a trombose da anastomose ou fluxo insuficiente ocorre principalmente em crianças pequenas e neonatos devido a artérias diminutas ou hipoplásicas. Em 1962, foi relatada a criação de uma anastomose sistêmico-pulmonar em pacientes com cardiopatia congênita com hipofluxo pulmonar, onde foi utilizada uma prótese de teflon interposta entre as artérias subclávia e pulmonar (ver figura 1.5). Foi o primeiro relato da cirurgia de Blalock-Taussig modificada (ver Thomé, 1993).

A vantagem deste tipo de cirurgia é a preservação da artéria subclávia prevenindo com isso as seqüelas descritas com a cirurgia de Blalock-Taussig (Thomé, 1993). A experiência posterior demonstrou que tanto o dacron como o teflon não se constituíram em materiais adequados para este procedimento. Soyer et al., 1972, relatou a primeira experiência com um novo produto protético para uso vascular, o politetrafluoretileno (PTFE). O PTFE foi desenhado para suportar pressões maiores que 180 mmHg , a sua estrutura molecular é constituída de átomos de carbono, circundados por átomos de flúor altamente eletronegativos. Esta composição química é uma das mais biocompatíveis e térmicamente estáveis conhecidas pelo homem.

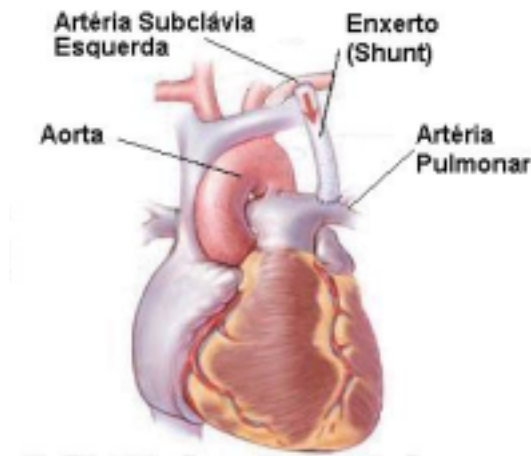


Figura 1.5. Cirurgia de Blalock-Taussig modificada

1.5 A DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL NO SISTEMA VASCULAR HUMANO

A complexidade geométrica, a natureza pulsátil do escoamento, a reologia não-newtoniana do sangue e as propriedades mecânicas anisotrópicas, viscoelásticas e não-lineares das artérias são as principais características do sistema vascular humano que tornam a sua simulação um estudo bastante complexo. Há um consenso geral, segundo Cole et al., 1998b, que um modelo geométrico realístico e a aplicação adequada do regime do escoamento, isto é, pulsátil, são as propriedades mais relevantes a serem utilizadas pelo pesquisador.

Cole et al., 1998b, simulou o escoamento na bifurcação de uma artéria carótida, considerando o sangue como um fluido newtoniano, em um modelo rígido e tridimensional, aplicando os regimes de escoamento estacionário e posteriormente pulsátil, utilizando os códigos comerciais RAMPANT e FLUENT. Os resultados das simulações realizadas confirmam a importância do emprego do regime pulsátil no escoamento de sangue nas artérias.

A motivação dos pesquisadores para este estudo se deve pelo fato dos fatores hemodinâmicos serem determinantes para a distribuição local da arteriosclerose e no desenvolvimento de placas no sistema vascular.

Zhao et al., 2000, utilizou imagens de ressonância magnética da bifurcação da artéria carótida para gerar um modelo computacional com uma real anatomia vascular. Para realizar as análises hemodinâmica e mecânica na parede da artéria de forma acoplada foram empregados o código de dinâmica de fluidos CFX4 e o código de mecânica estrutural ABAQUS.

As condições de contorno, pressão na carótida principal e fluxo de massa nas carótidas inferior e exterior, foram obtidas a partir do exame de Ecodoppler. O sangue foi assumido como

um fluido newtoniano. A espessura da parede da artéria é em torno de 8-10 % do diâmetro do vaso e foi assumida linear elástica. Os escoamentos foram realizados sob um modelo rígido e outro dilatável e pode-se verificar uma influência quantitativa do movimento da parede da artéria.

Perktold et al., 1998, utilizou o método de elementos finitos de Galerkin para estudar o escoamento de sangue em regime pulsante na bifurcação da artéria coronária descendente anterior esquerda. O sangue foi assumido como um fluido newtoniano, as paredes dos vasos foram consideradas rígidas e as condições de entrada foram obtidas a partir de medições de laser doppler. O modelo geométrico tridimensional é considerado bastante realístico pelos autores, sendo caracterizado por irregularidades e não-planaridades da artéria estudada.

Lesões de arteriosclerose em artérias coronárias esquerdas são encontradas nas paredes exteriores das bifurcações e ao longo de paredes internas de artérias curvas. Valores baixos para a tensão de cisalhamento foram encontrados nas regiões onde as lesões de arteriosclerose são comumente encontradas.

Cole et al., 1998a, estudou os efeitos dos fatores geométricos em anastomoses realizadas na artéria femoral. Os regimes estacionário e pulsante foram aplicados a um modelo tridimensional, a artéria e o enxerto foram assumidos rígidos e o modelo Power Law foi utilizado para especificar a viscosidade para o escoamento não-newtoniano. O estudo foi motivado pelas complicações pós-cirúrgicas que ocorrem neste tipo de procedimento; como o surgimento de hiperplasia na região da anastomose.

1.6 ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS

Antes de apresentar as vantagens e desvantagens do método de elementos finitos, deve ser chamada a atenção para o notável desenvolvimento alcançado pelo método nas áreas de mecânica dos sólidos e de estruturas nas últimas décadas, desde o aparecimento do termo elementos finitos com os trabalhos pioneiros de Turner et al., 1956 e Clough, 1960. Este bom desempenho aliado aos avanços que o método vem obtendo recentemente na área de fluidos - principalmente a partir dos resultados teóricos de Babuška, 1973 e Brezzi, 1974 para problemas mistos - autorizam o otimismo que no futuro o sucesso de elementos finitos em fluidos seja tão grande quanto ao já alcançado na área de sólidos.

As vantagens que o método dos elementos finitos apresenta devem-se basicamente à sua alta flexibilidade, a qual nos permite tratar com relativa facilidade:

I-geometrias complicadas,

II-condições de contorno genéricas,

III-materiais de resposta não-lineares e/ou com propriedades variáveis,

IV-propiciar uma sistematização no desenvolvimento de códigos computacionais.

As situações I-III quando tratadas pela metodologia das diferenças finitas requerem cuidados especiais, particularizando assim os códigos computacionais obtidos.

Finalmente, pode-se ainda destacar uma última, porém a nosso ver a mais importante vantagem do método:

O método de elementos finitos tem um sólido respaldo matemático, o qual dá confiabilidade aos seus códigos e, em muitos problemas, torna possível estabelecer a priori uma estimativa para o erro envolvido na aproximação de elementos finitos.

Por outro lado, se comparado ao método de diferenças finitas, essa flexibilidade vem acompanhada de um aumento da complexidade de programação e numa quantidade maior de memória computacional.

1.7 O MÉTODO DE GALERKIN

O método de elementos finitos mais comum é o conhecido método de Galerkin, o qual tem sido aplicado nas últimas décadas a uma vasta classe de problemas. Ao contrário das técnicas de diferenças finitas, o método de Galerkin não opera diretamente sobre as equações diferenciais que modelam o problema: partindo de uma formulação variacional do problema (em Mecânica, podemos introduzi-la através do Princípio das Potências Virtuais) e uma discretização de seu domínio em elementos finitos - os quais suportam os pontos nodais \mathbf{x}_A - constrói uma solução aproximada \mathbf{u}_h em termos da combinação de funções base $N_a(x)$ conhecidas e graus-de-liberdade incógnitos \mathbf{u}_A , gerando dessa maneira um sistema de equações algébricas - possivelmente linear, dependendo do modelo adotado - o qual naturalmente será resolvido numericamente.

$$\mathbf{u}_h = \sum N_a(x) \mathbf{u}_a$$

Assim descrito, o método de elementos finitos não inova em nada em relação aos métodos variacionais clássicos. (Rektorys, 1975). O que há de novo e poderoso em elementos finitos é sua escolha das funções base $N_a(x)$: utilizando funções polinomiais (normalmente lineares-por-partes) de suporte compacto, construídas de modo a valerem a unidade nos pontos

nodais a elas associados e zero no restante do domínio ($N_a(x_b) = \delta_{ab}$). É esta importante característica que faz com que a matriz associada à formulação de Galerkin seja uma matriz banda, reduzindo assim drasticamente os custos da solução numérica do sistema de equações algébricas.

1.8 MÉTODOS ESTABILIZADOS

A aplicação do método de Galerkin a problemas de fluidos tem apresentado um lento e problemático desenvolvimento, até mesmo por razões históricas, visto ter sido o método introduzido por engenheiros envolvidos com problemas de análise de tensão, cálculo de estruturas, teoria de cascas e placas, etc. Em todos estes problemas (impondo restrições usuais na prática de engenharia), obtemos operadores elípticos e em geral simétricos, possibilitando resultados de convergência quase ótimos. Já no caso de fluidos, os modelos utilizados apresentam dificuldades adicionais: para os escoamentos incompressíveis (de grande interesse em engenharia) surge a necessidade de computar-se também o campo de pressão como multiplicador de Lagrange associado à restrição de incompressibilidade do campo de velocidade, gerando assim um problema dito misto em velocidade e pressão. Como será visto a seguir, isto introduz a necessidade de compatibilizar os espaços de elementos finitos empregados para aproximar estes campos. Além disso, quando se retém o termo inercial da equação de movimento do fluido, esbarra-se na assimetria do operador advectivo quando em regimes de escoamento advectivos-dominados (ou, mais tecnicamente, para altos números de Reynolds), fazendo com que sua discretização usando o método de Galerkin - a qual, para elementos lineares, coincide com a discretização por diferenças centradas - tenha comportamento oscilatório, invalidando a solução de elementos finitos. Surgem, então, “patologias numéricas”, tais como travamento (“locking”) de campo de velocidade - isto é, obtenção do campo de velocidade nulo em todo o domínio e oscilações não físicas no campo de pressão.

Os resultados de Babuška, 1973 e Brezzi, 1974, para problemas mistos vieram esclarecer a instabilidade associada à compatibilização dos espaços de elementos finitos para velocidade e pressão. Ficou provado que estes espaços não poderiam ser escolhidos arbitrariamente (sob pena de gerar soluções numéricas irrealistas) e sim que devemos aproximar o par velocidade/pressão por elementos que satisfaçam a chamada condição de Babuška-Brezzi (ou, simplesmente, condição inf-sup). Esta condição restringe a escolha de elementos finitos a um número limitado de combinações e cria dificuldades computacionais, em particular, impedindo a aproximação dos dois campos com o mesmo elemento (igual-ordem) por não satisfaz a condição de Babuška-

Brezzi. Entretanto, é importante frisar que mesmo utilizando uma combinação de elementos estáveis, ainda assim o método de Galerkin oscilará em situações advectivas-dominadas, devido ao operador advectivo.

A fim de contornar estas dificuldades surgiram ao longo dos últimos anos várias estratégias: métodos de penalização (Hughes, 1979), integração reduzida (Malkus e Hughes, 1978), elementos finitos não-conformes (Crouzeix e Raviart, 1973), método de características (Pironneau, 1989), etc. A grosso modo, todas elas podem ser enquadradas dentro da seguinte dualidade: manutenção da formulação de Galerkin utilizando porém elementos não “standards”, ou utilização de elementos finitos simples com a alteração da formulação de Galerkin clássica de modo a adicionar ao problema a requerida estabilidade - criando assim o que ultimamente vem sendo chamado de métodos estabilizados.

Neste trabalho foi adotado o método estabilizado de elementos finitos para o problema da advecção-difusão batizado de “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin” (SUPG) introduzido por Hughes e Brooks, 1979, 1980, 1982a, 1982b. Johnson e Nävert, 1981, estabeleceram sua análise de erro, um importante passo para a extensão do método a outros modelos. Johnson, 1982, Johnson, Nävert e Pitkäranta, 1984, e Nävert, 1982, propuseram e analisaram formulações SUPG para o problema de advecção-difusão transiente empregando elementos espaço-tempo. Extensões às equações de Euler e Navier-Stokes incompressível foram introduzidas por Brooks e Hughes, 1982a, e Johnson e Saranen, 1986. Hughes e Mallet, 1986 estenderam o método a sistemas advectivos-difusivos. Problemas de advecção-difusão empregando detetores de choques (“shock-capturing”) e modelos não-lineares são encontrados em Galeão e Dutra do Carmo, 1988. Extensões do método a escoamentos compressíveis podem ser encontrados nos trabalhos de Hughes, Mallet e Franca, 1986, e Mallet, 1985. Hansbo e Szepessy, 1990 e Tezduyar et al., 1990 utilizaram formulações SUPG para aproximar as equações de Navier-Stokes incompressível.

Este método não necessita satisfazer a condição acima mencionada de Babuška-Brezzi – permitindo, dessa maneira, a utilização de elementos finitos de igual-ordem para aproximar os subespaços de velocidade e pressão, além de permanecer estável até mesmo para escoamentos advectivos dominantes (Brooks e Hughes, 1982a; Franca e Frey, 1992, Taylor et al., 1998).

Finalmente, para melhor entendimento e apreciação deste trabalho, é conveniente apresentar um plano geral da dissertação:

Capítulo 1: Introdução do trabalho, bem como apresentação de notação comum a todos os capítulos.

Capítulo 2: Reologia do sangue

Capítulo 3: Apresentação da mecânica dos escoamentos de fluidos, através da introdução das leis de conservação de massa, momento linear e angular.

Capítulo 4: Formulação de elementos finitos para as equações de Navier-Stokes.

Capítulo 5: Modelagem geométrica e resultados

Capítulo 6: Conclusões e perspectivas futuras

Capítulo 7: Referências bibliográficas

1.9 NOTAÇÃO

Os problemas estudados neste trabalho são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ com fronteira Γ poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma = \bar{\Gamma}_g \cup \bar{\Gamma}_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset, \end{cases}$$

onde Γ_g é a parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet (essenciais) e Γ_h a região na qual são prescritas as condições naturais (Neumann). Sobre o domínio $\bar{\Omega}$ realizamos uma partição C_h de elementos hexaedros da maneira usual,

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in C_h} \bar{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in C_h, \end{cases}$$

Para os espaços funcionais de velocidade e pressão e suas respectivas normas, será empregado a notação usual:

$C^0(\Omega)$... espaço das funções contínuas em Ω ,

$L^2(\Omega)$... espaço das funções de quadrado integrável em Ω ,

$L_0^2(\Omega)$... espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω , $\int_{\Omega} q = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega)$,

(\cdot, \cdot) ... produto interno de $L^2(\Omega)$,

$\|\cdot\|_0$... norma de $L^2(\Omega)$,

$(\cdot, \cdot)_K$... produto interno de $L^2(\Omega_K)$,

$H^1(\Omega)$... espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$ com as derivadas primeiras em $L^2(\Omega)$,

$H_0^1(\Omega)$... espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ ,

$\|\cdot\|_1$... norma de $H^1(\Omega)$.

Para definição dos diferentes espaços de elementos finitos utilizados neste trabalho, é conveniente introduzirmos a seguinte notação :

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ é um triângulo ou tetraedro} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ é um quadrângulo ou hexaedro} \end{cases}$$

onde P_m e Q_m são espaços polinomiais de grau m .

2. REOLOGIA DO SANGUE

2.1 ASPECTOS GERAIS

O sangue é um fluido viscoso composto por células e plasma (Jandl, 1996). A tabela 2.1 apresenta os volumes de plasma e células (em *ml*) por peso corporal (em *kg*) para homens e mulheres. O plasma é formado por água, sais minerais e moléculas orgânicas (glicídios, lipídios e proteínas). As células pertencem a três categorias, conforme apresentado na tabela 2.2: glóbulos vermelhos (eritrócitos ou hemácias), glóbulos brancos (leucócitos) e plaquetas (trombócitos). Os glóbulos vermelhos representam mais de 99% do total de células, significando que são as únicas células que apresentam influências significativas nas características físicas do sangue (Bernard e Levy, 1976).

Tabela 2.1. Volumes sangüíneos (ml/kg de peso)

	Volume Plasmático	Volume Globular
Homem	43,5 ± 3	30,5 ± 2
Mulher	43,5 ± 3	23,5 ± 2

Tabela 2.2. Contagem dos glóbulos (resultados normais por mm^3)

Células	Homem	Mulher	Criança 1 ano	Recém-Nascido
Eritrócitos	4,5 a 5,9 milhões	4 a 5,4 milhões	3,6 a 5 milhões	4 a 6 milhões
Leucócitos	4.000 a 10.000	4.000 a 10.000	4.000 a 12.000	10.000 a 25.000
Trombócitos	200.000 a 400.000	200.000 a 400.000	200.000 a 400.000	150.000 a 400.000

A porcentagem de células presentes no sangue é chamada de hematócrito. Segundo Jandl, 1996, o hematócrito normal de um homem oscila entre 40 e 52, enquanto que em uma mulher está entre 35 e 47. O volume total de células vermelhas não pode ser determinado apenas pela multiplicação entre o volume total de sangue e o hematócrito, tendo em vista que a concentração de células vermelhas nos pequenos vasos é menor do que nos grandes vasos. O hematócrito pode não se enquadrar nesta faixa devido a ocorrência de anemia ou de policitemia. A anemia é a deficiência de hemácias, que pode ser causada por perda muito rápida ou produção demasiado lenta de hemácias. Na anemia a viscosidade do sangue diminui (1,5 vezes a da água), diminuindo a resistência ao fluxo sangüíneo nos vasos periféricos de modo que quantidades de sangue muito

superiores às normais fluem pelos tecidos e retornam ao coração. Um dos principais efeitos da anemia é uma grande sobrecarga de trabalho para o coração. A policitemia ocorre quando se tem uma grande produção de hemáceas devido ao pouco oxigênio na atmosfera, como nas altitudes elevadas, ou porque há insuficiente fornecimento de oxigênio para os tecidos. Devido ao aumento da viscosidade do sangue na policitemia, o fluxo sanguíneo é freqüentemente lento. O aumento da viscosidade tende a diminuir a velocidade do retorno venoso ao coração, por outro lado, o volume sanguíneo está muito aumentado na policitemia, o que tende a aumentar o retorno venoso; havendo assim uma compensação entre estes dois fatores. A pressão arterial é normal na maioria das pessoas com policitemia, embora em aproximadamente um terço delas a pressão seja elevada.



Figura 2.1. Efeito do hematócrito sobre a viscosidade

2.2 VISCOSIDADE DO SANGUE

A viscosidade do sangue não tem o mesmo valor nas diferentes partes do sistema vascular. Sua viscosidade varia de 3 a 4 vezes a viscosidade da água em função do hematócrito, da temperatura e do fluxo. O hematócrito é um importante determinante da viscosidade do sangue. A medida que o hematócrito aumenta, há um aumento na viscosidade, porém essa relação não é linear, conforme pode ser visto na figura 2.1. Por exemplo: Num hematócrito de 40% a viscosidade relativa é 4, enquanto que, em um hematócrito de 60% a viscosidade relativa é aproximadamente 8. A temperatura também tem um efeito significativo na viscosidade. A medida que a temperatura diminui, a viscosidade aumenta. A viscosidade aumenta aproximadamente 2 % para cada °C diminuído na temperatura. O fluxo do sangue também afeta a viscosidade. A viscosidade do sangue aumenta de forma muito acentuada a medida que a

velocidade do escoamento diminui. Como as velocidades do escoamento de sangue em pequenos vasos são extremamente pequenas, em torno de 1 mm/s , a viscosidade do sangue pode aumentar até 10 vezes pela ação isolada deste efeito. Esse efeito é parte causado pela aderência dos glóbulos vermelhos, que se deslocam lentamente tanto entre si (formação de roletes – figura 2.2 e de agregados maiores) como com a parede vascular. Mas um outro efeito pode ocorrer na microcirculação chamado efeito de Fahraeus-Lindqvist (Bayliss, 1973), tornando a viscosidade do sangue a metade comparado aos grandes vasos. As células vermelhas movem-se de forma aleatória nos grandes vasos. O efeito de Fahraeus-Lindqvist é causado devido ao alinhamento das células vermelhas nos escoamentos em pequenos vasos, eliminando a resistência viscosa que ocorre internamente no sangue. A concentração e tipos de proteínas do plasma são outros fatores que afetam a viscosidade do sangue, mas esses efeitos são muito menos importantes e não são considerados na maioria dos estudos hemodinâmicos.

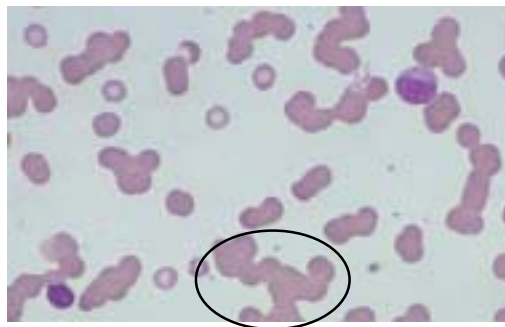


Figura 2.2. Formação de roletes (50x)

2.3 REOLOGIA DO PLASMA

A viscosidade do plasma é 1,5 vezes a da água. O plasma muitas vezes é caracterizado como um fluido newtoniano (Bayliss, 1973). Conforme Wintrobe, 1998, seu volume normal em um homem de 70 kg é aproximadamente de 3.500 ml , sua viscosidade é principalmente função da concentração e da viscosidade intrínseca das proteínas individuais em solução. A viscosidade intrínseca das proteínas por sua vez é influenciada pelo tamanho e forma moleculares. As proteínas plasmáticas constituem em frações de albumina, globulina e fibrinogênio. Como pode ser observado na figura 2.3, o fibrinogênio é a maior das proteínas, e apresenta grande influência na viscosidade do plasma, apesar de formar apenas 5,5% das proteínas plasmáticas. As globulinas normalmente representam 45% das proteínas plasmáticas e um aumento de 1 a 4 g por 100 ml pode causar uma aumento na viscosidade do plasma em até 50%.

O plasma, quando estagnado, permanece líquido somente com a adição de um anticoagulante. Se o sangue total coagula e o coágulo é removido, o líquido restante é chamado de soro. O soro tem essencialmente a mesma composição do plasma, com a exceção de que o fibrinogênio e alguns fatores de coagulação foram removidos, reduzindo a sua viscosidade comparada a do plasma. O soro se comporta como um fluido Newtoniano.

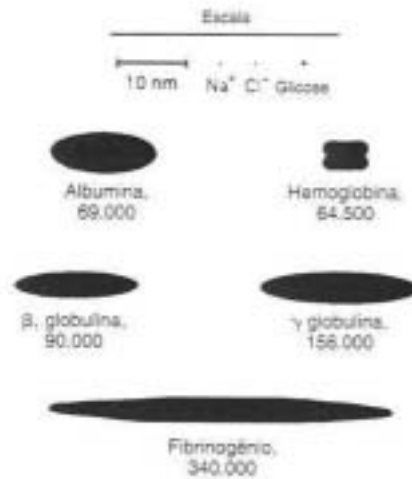


Figura 2.3 . Peso molecular e dimensões relativas de algumas moléculas proteicas

Bingham e White, 1911 e Hess, 1920, descreveram a equação (2.1) estimando a viscosidade do plasma a partir da concentração de proteínas

$$\frac{\mu_p}{\mu_w} = \frac{1}{1 - b\theta}, \quad (2.1)$$

onde μ_p a viscosidade do plasma, μ_w a viscosidade da água, θ fração de volume de partículas, e b é um fator arbitrário que representa o aumento da fração de volume das partículas suspensas. Se a concentração de proteína é expressa em gramas por 100 ml, o valor de b é 0.06.

Hatschek, 1911, definiu b como função de θ .

$$b = \frac{1}{\theta^{2/3}}. \quad (2.2)$$

Substituindo a equação (2.2) em (2.1), tem-se :

$$\frac{\mu_p}{\mu_w} = \frac{1}{(1 - \theta^{1/3})}. \quad (2.3)$$

2.4 REOLOGIA DOS GLÓBULOS VERMELHOS

A dependência ao cisalhamento da viscosidade do sangue se deve ao efeito gerado pela deformação, orientação e agregação dos glóbulos vermelhos. Enquanto que uma deformação do glóbulo vermelho pode diminuir a viscosidade aparente em altas taxas de cisalhamento, uma agregação desses glóbulos pode aumentar acentuadamente essa viscosidade (Jandl, 1996).

O formato bicôncavo discoidal dos glóbulos vermelhos é perfeito para resistir as deformações requeridas na sua passagem pelos vasos capilares. Quando as células encontram bifurcações ou ramificações vasculares complexas rapidamente acomodam sua forma e espaço para moverem-se com o mínimo de atraso. Deformações exageradas podem causar divisões das células em dois ou mais fragmentos. As células vermelhas tem um diâmetro de $7,82 \pm 0,62 \mu m$. Quando as células deixam as arteríolas e entram nos capilares, o principal aspecto reológico se torna a viscosidade intrínseca da célula, que depende das propriedades viscoelásticas da membrana celular e principalmente da concentração intracelular de hemoglobina. Uma concentração normal de hemoglobina de 33 g/dl contribui em torno de 6 cp na viscosidade intrínseca. Concentrações acima de 36 g/dl fazem a viscosidade intrínseca aumentar e em torno de 40 g/dl , causam uma certa rigidez às células.

O efeito na viscosidade de um líquido submetido a inserção de partículas esféricas, formando uma suspensão, foi estudado por Einstein (1906). Ele considerou que as partículas estão suficientemente distantes uma das outras e que o movimento de uma partícula não influencia o movimento das outras partículas, e concluiu que a viscosidade da suspensão é diretamente proporcional ao volume total de partículas (células) sob o volume da suspensão.

$$\mu_s = \frac{\mu_p}{\mu_w} = 1 + 2,5 \theta, \quad (2.4)$$

onde μ_s é a viscosidade relativa da suspensão, θ fração de volume das células (hematócrito). O valor 2,5 na equação (2.4) refere-se ao fator de forma para esferas. Para as partículas não esféricas este valor deve ser alterado, conforme Jeffery, 1922, o valor de 2,061 é o mais aproximado para a forma dos glóbulos vermelhos (figura. 2.4).

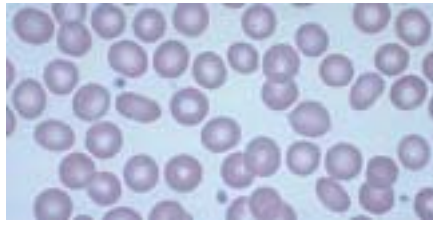


Figura 2.4. Glóbulos vermelhos

A equação de Einstein é válida não só para suspensões como para soluções e colóides, porém deve ser empregada com certo cuidado para valores de θ maiores de 0,1 (10%), onde se observa uma viscosidade relativa maior que a calculada devido a interações entre as partículas.

Várias equações empíricas ou semi-empíricas a respeito da viscosidade relativa foram desenvolvidas. Em sua maioria, descrevem a relação entre a viscosidade do plasma e a concentração de proteínas e a relação entre a viscosidade relativa do sangue e a concentração de glóbulos vermelhos (hematócrito).

3 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA DINÂMICA DOS FLUIDOS

3.1 A CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

O escoamento dos fluidos é um fenômeno físico que pode ser representado por uma transformação contínua do espaço euclidiano nele próprio, parametrizada pelo tempo $t \in [0, \infty)$,

$$\chi: B \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{E}, \quad (3.1)$$

onde B denota um fluido qualquer, χ uma transformação de classe C^3 referida como seu movimento e $t=0$ um instante inicial arbitrário.

A fim de descrever esta transformação analiticamente introduzimos um sistema de coordenadas fixo (x_1, x_2, x_3) , tripla esta referida como *posição* e denotada por \mathbf{x} . Considere agora um ponto P do fluido (uma partícula) movendo-se com o escoamento. Em $t=0$ esta partícula ocupa a posição $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ e no instante genérico t terá se movido para a posição $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Podemos então representar a posição do fluido pela transformação

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad (3.2)$$

e variando o tempo t , i.e, $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, \cdot)$, a eq.(3.2) representa a trajetória da partícula P , ao passo que para um tempo fixo t a transformação χ representa uma deformação do fluido B , $\mathbf{x} = \chi(\cdot, t)$.

Da hipótese que pontos distintos do fluido assim permanecem no decorrer de seu escoamento, tira-se que a transformação (3.2) admite inversa, ou seja,

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.3)$$

Apesar do escoamento ser completamente determinado por seu movimento χ , é também importante analisar o estado do movimento numa dada posição ao longo do tempo. Isto pode ser feito utilizando-se campos espaciais, como por exemplo, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, os quais fornecem, respectivamente, a densidade e a velocidade da partícula que ocupa a posição \mathbf{x} no instante de tempo t . As variáveis (\mathbf{x}, t) empregadas nas descrições destes campos são conhecidas como variáveis *espaciais*, enquanto as variáveis (\mathbf{X}, t) , as quais identificam as partículas do fluido, são denominadas variáveis *materiais*. Graças à transformação (3.2), qualquer grandeza

genérica ψ de um fluido função de suas variáveis espaciais, também o será de suas variáveis materiais (\mathbf{X}, t) ; e vice-versa. Por exemplo, se ψ denotar uma grandeza espacial do fluido $\psi(\mathbf{x}, t)$, então sua *descrição material* o relacionará com suas variáveis materiais:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\chi(\mathbf{X}, t), t), \quad (3.4)$$

ao passo que, se ψ representar um campo material $\psi(\mathbf{X}, t)$, sua descrição espacial fornecerá

$$\psi(\mathbf{X}, t) = \psi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \quad (3.5)$$

Do ponto-de-vista geométrico, $\psi(\mathbf{X}, t)$ representa o valor do campo ψ , para um dado instante de tempo t , experimentado pela partícula que originalmente ocupava a posição \mathbf{X} . Já que $\psi(\mathbf{x}, t)$ fornece o valor de ψ sentido pela partícula que instantaneamente ocupa a posição \mathbf{x} . Para as derivadas temporais de ψ empregaremos a notação usual:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \quad e \quad \overset{\square}{\psi} \left(= \frac{d\psi}{dt} \right) \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}, \quad (3.6)$$

onde $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ e $\overset{\square}{\psi}$ são conhecidas como derivada espacial e derivada material de ψ respectivamente. A derivada material mede a variação de ψ seguindo uma partícula, enquanto a derivada espacial, a taxa de variação ψ , segundo um observador fixo na posição \mathbf{x} . Podemos pensar ainda na derivada material de um campo espacial, ou seja, $\overset{\square}{\psi}(\mathbf{x}, t)$. Seu desenvolvimento, para o caso de um campo vetorial, segue abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \Big|_{\chi(\mathbf{X}, t)} + \left[\frac{\partial \psi(\chi(\mathbf{X}, t), t)}{\partial \chi(\mathbf{X}, t)} \Big|_t \right] \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + [\nabla \psi(\mathbf{x}, t)] \overset{\square}{\chi}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\nabla(\cdot)$ representa o operador gradiente espacial.

A velocidade \mathbf{u} de uma partícula de fluido é definida por

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{x} = \frac{\overset{\square}{\partial \chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (3.8)$$

Assim definida, \mathbf{u} é uma função das variáveis materiais do fluido. Na prática, entretanto, é mais vantajoso trabalhar com sua descrição espacial,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\chi(\mathbf{X}, t), t). \quad (3.9)$$

É interessante observar ainda que na maioria dos escoamentos dos fluidos é suficiente conhecer o campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ao invés do movimento do fluido descrito pela eq. (3.1).

Aceleração de uma partícula é definida como a taxa de variação da velocidade; ou seja,

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\chi(\mathbf{X}, t), t), \quad (3.10)$$

Novamente, é conveniente expressarmos o campo de aceleração como função da descrição espacial do campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Empregando a relação cinemática (3.7), obteremos:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}. \quad (3.11)$$

Teorema de Transporte

Seja $\Omega = \Omega(t)$ um volume arbitrário de fluido e $\psi(\mathbf{x}, t)$ uma função - a valor escalar ou vetorial - da posição \mathbf{x} . Sua integral $\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega$ é portanto uma função bem definida no tempo. Sua derivada material é determinada pelo Teorema de Reynolds, o qual será enunciado a seguir para funções vetoriais.

Teorema de Reynolds

Seja ψ um campo vetorial espacial suficientemente regular. Então, para qualquer volume Ω e tempo t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (3.12)$$

onde Γ denota a fronteira de Ω .

Prova: Ver Slattery, 1999, por exemplo.

Equação da Continuidade

Suponha agora que o fluido possua uma função densidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ a qual através da relação

$$M = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad (3.13)$$

é utilizada para determinar a massa M de fluido que ocupa a região Ω . A função densidade é naturalmente estritamente positiva e sua dimensão física é *massa por unidade de volume*.

Do significado físico do conceito de massa, postula-se o chamado **princípio da conservação de massa**: A massa de um volume arbitrário de fluido Ω não varia ao longo de seu escoamento. Este princípio pode ser expresso matematicamente por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0. \quad (3.14)$$

Aplicando o Teorema de Transporte – equação (3.12), obtemos que:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) d\Omega = 0. \quad (3.15)$$

Por ser Ω um volume arbitrário de fluido, o teorema de localização fornece

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.16)$$

Esta é a forma espacial - ou euclidiana - da equação da conservação de massa, ou, como é mais conhecida, da *equação da continuidade*. Esta equação é condição necessária e suficiente para um escoamento preservar sua massa. Utilizando a relação cinemática (3.7), obtemos uma forma alternativa para a equação (3.16):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.17)$$

3.2 DINÂMICA DOS FLUIDOS: A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Será analisado agora a dinâmica do movimento dos fluidos objetivando derivar as equações que governam a ação das forças internas e externas atuantes no fluido.

Durante o movimento de um fluido - ou, com mais generalidade, de um corpo - as interações de suas partes internas com o meio exterior são descritas pelas forças nelas atuantes. Na mecânica dos meios contínuos, são classicamente consideradas três tipos de forças:

- I. forças de contato entre partes disjuntas do corpo;
- II. forças de contato entre seu contorno e o meio exterior;
- III. forças de volume exercidas pelo exterior nos pontos interiores do corpo, as chamadas forças volumétricas ou de corpo.

Para avaliar as forças de contato empregaremos um dos mais importantes axiomas da mecânica do contínuo, a **hipótese de Cauchy** (Billington e Tate, 1981): *Em uma superfície fechada arbitrária S existe uma distribuição de vetores tensão \mathbf{t} cuja resultante de força e momento é equivalente à resultante das forças materiais exercidas pelo lado exterior de S no*

seu lado interior. Supõem-se ainda que a distribuição \mathbf{t} depende - para um dado instante de tempo - apenas da posição e da orientação do elemento de superfície $d\mathbf{s}$. Matematicamente, se \mathbf{n} denota a normal exterior à superfície S , $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$.

As forças aplicadas ao fluido são relacionadas ao seu movimento através dos axiomas postulados por Euler (Slattery, 1972):

I. Princípio da Conservação do Momentum Linear: *A taxa de variação do momentum linear num volume de fluido Ω é igual à força total nele aplicada.*

Este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma. \quad (3.18)$$

II. Princípio da Conservação do Momentum Angular: *A taxa de variação do momentum angular num volume de fluido Ω é igual ao torque total nele aplicado.*

Este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad (3.19)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição.

Por fim, enunciaremos o teorema central da mecânica do contínuo, o Teorema de Cauchy, cuja principal asserção é a linearidade de $\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Teorema de Cauchy

Seja $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ um sistema de forças de um corpo em movimento. Então, a condição necessária e suficiente para que as leis de conservação de momentum sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial espacial $\boldsymbol{\sigma}$ - chamado *tensor de Cauchy* - tal que:

I. para todo vetor unitário \mathbf{n} , $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$;

II. o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico;

III. o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ satisfaz à equação

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}; \quad (3.20)$$

Prova: Ver Gurtin, 1981, Billington e Tate, 1981.

A equação (3.20) é a equação de movimento proposta por Cauchy. Esta equação descreve o movimento dos fluidos bem como o movimento de qualquer meio contínuo.

Uma maneira alternativa de enunciarmos os axiomas de momentum é através do Teorema do Trabalho Virtual, ou, num contexto de energia, do **Princípio das Potências Virtuais** – PPV

(Gurtin, 1981), o qual assera: *A potência despendida sobre um volume de fluido Ω pelas forças de corpo e superfície é igual a taxa de variação da energia cinética mais a potência dos esforços internos (“stress power”).*

Este importante princípio regulador da conservação da energia mecânica de um fluido pode ser descrito matematicamente pelo teorema a seguir:

Teorema do Princípio das potências virtuais

Para todo volume fluido Ω e qualquer instante de tempo t , temos que a conservação de energia mecânica no fluido é dada por

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Gamma + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \, d\Omega, \quad (3.21)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Prova: Tomando o produto interno da equação de movimento com uma velocidade virtual \mathbf{u} do fluido, integrando por partes e explorando que o tensor de Cauchy é simétrico, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\Omega \\ 0 &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{2} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \, d\Omega \\ 0 &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{2} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \, d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aplicando a asserção do teorema de Cauchy $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, finalizamos a prova do teorema.

A maneira alternativa do Princípio das Potências Virtuais enunciar os axiomas da Dinâmica traz a virtude de não dissociar os conceitos de Cinemática e Dinâmica do movimento. No PPV, o conceito de força surge naturalmente associado ao conceito da potência despendida pelas velocidades virtuais. Matematicamente, podemos pensar no espaço das forças atuantes no fluido como o espaço dos todos os funcionais lineares atuantes no espaço das velocidades virtuais do fluido (Sampaio, 1985).

Do ponto-de-vista numérico, tem ainda o PPV a grande vantagem de formular problemas mecânicos de maneira variacional, deixando assim bastante natural a introdução de métodos

variacionais na Mecânica, em particular o Método dos Elementos Finitos, conforme será explorado no capítulo 4.

3.3 HIPÓTESES CONSTITUTIVAS

Os axiomas de Euler , equações (3.18) e (3.19) , são comuns à maioria dos corpos na natureza. Entretanto, estas leis são insuficientes para caracterizar totalmente o comportamento dos corpos, por não serem capazes de distinguir os diferentes tipos de comportamentos dos materiais. Experimentos físicos, bem como nossa própria intuição, mostram que dois corpos de mesmo tamanho e forma sujeitos ao mesmo movimento, porém de materiais diferentes, geralmente apresentam distribuição de forças distintas. É necessário, portanto, introduzir hipóteses adicionais - as chamadas equações constitutivas, que possam caracterizar os diferentes comportamentos materiais.

Fluidos Newtonianos

O fenômeno de atrito é normalmente manifesto nos fluidos através de suas forças cisalhantes, as quais retardam o movimento relativo das partículas fluidas. Uma boa medida deste movimento relativo é fornecida pelo tensor $\nabla \mathbf{u}$, sugerindo assim equações constitutivas da forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) , \quad (3.23)$$

onde \mathbf{C} é conhecida como função resposta do fluido e \mathbf{I} denota o tensor identidade.

Os materiais caracterizados por relações do tipo (3.23) são denominados *fluidos newtonianos*. Estes fluidos fornecem o modelo mais utilizado de comportamento fluido viscoso. Para a classe dos fluidos compressíveis, a função resposta (Landau e Lifchitz, 1971) é dada pela expressão

$$\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \left(\nu - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} , \quad (3.24)$$

onde μ e ν são, respectivamente, o primeiro e segundo coeficientes de viscosidade.

Muitos escoamentos entretanto apresentam uma variação muito pequena em sua massa específica - como, por exemplo, os escoamentos d'água e os escoamentos de gases, tais como o ar, em regimes de baixas velocidades. A classe de escoamentos que apresentam este tipo de comportamento é chamada de fluidos newtonianos incompressíveis . Segundo Gurtin, 1981, a resposta desses fluidos pode ser caracterizada por apenas uma única constante, sua viscosidade:

A condição necessária e suficiente para que a resposta de um fluido newtoniano incompressível seja independente observador é que sua função resposta \mathbf{C} seja da forma

$$\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (3.25)$$

com a constante escalar μ chamada de viscosidade absoluta do fluido.

Fluidos Newtonianos Generalizados

Observações experimentais dos fluidos incompressíveis têm mostrado que modelos baseados na equação constitutiva (3.26) obtida por Reiner (1945) e Prager (1945), apresentam alguma utilidade na predição do comportamento dos fluidos reais – porém, o modelo newtoniano não é sempre realista na caracterização da resposta mecânica de alguns fluidos

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa_0 \mathbf{I} + \kappa_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \kappa_2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^2, \quad (3.26)$$

onde $\kappa_k = \kappa_k(I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})})$, sendo que, $I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}$ denotam o primeiro, segundo e terceiro invariantes, respectivamente, do tensor taxa de deformação, onde:

$$I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \text{div } \mathbf{v}, \quad (3.27)$$

$$II_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = \frac{1}{2} [I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}^2 - \mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}^2], \quad (3.28)$$

$$III_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = \det \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}). \quad (3.29)$$

Modelos empíricos baseados na equação (3.26) predizem o real comportamento de uma classe de escoamentos conhecidos por escoamentos viscométricos (Slattery, 1999). Nestes escoamentos a partícula material é sujeita a uma deformação com história constante, sendo que os efeitos de memória são apagados. Dentre os exemplos de escoamentos viscométricos podemos citar escoamentos em tubos e escoamento de Couette.

A classe mais comum dos modelos empíricos para fluidos incompressíveis baseados na equação (3.26) são os fluidos Newtonianos generalizados. Esta classe de modelos introduz uma viscosidade η , chamada de viscosidade aparente, dependente da taxa de deformação γ do fluido (Bird, 1987), definida de forma analoga à viscosidade dos fluidos Newtonianos.

$$\tau_{xy} = -\eta(\gamma) \gamma. \quad (3.30)$$

Modelo Ostwald de Waele

Segundo Slattery, 1999, o modelo de Ostwald de Waele, ou Power Law, é o modelo newtoniano generalizado mais utilizado, onde a viscosidade cisalhante dependente é dada por:

$$\eta(\gamma) = m\gamma^{n-1} \quad (3.31)$$

onde os parâmetros m e n são determinados empiricamente. Quando $n=1$ e $m=\mu$, o modelo se reduz ao modelo Newtoniano para um fluido incompressível. Segundo Slattery, 1999, o modelo Power Law apresenta uma grande desvantagem do ponto de vista teórico que é, não se reduzir ao modelo newtoniano no limite $\gamma \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$) ou no limite $\gamma \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow \infty$), afastando-se assim do comportamento dos fluidos reais. ($\lim_{\gamma \rightarrow 0} \tau = \eta(\gamma)\gamma = m\gamma^{n-1} \rightarrow 0$, $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau = m\gamma^{n-1} \rightarrow \infty$)

Modelo Carreau-Yasuda

Este modelo com 5 parâmetros, conforme Bird, 1987, tem flexibilidade suficiente para reproduzir uma variedade de curvas $\eta(\gamma)$ experimentais.

$$\eta(\gamma) = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})[1 + (\lambda\gamma)^A]^{\frac{n-1}{A}}, \quad (3.32)$$

onde η_0 é a viscosidade a taxa de cisalhamento zero, η_{∞} é a viscosidade a taxa de cisalhamento infinita, n é o “expoente power-law”, λ é uma constante de tempo e A um parâmetro adimensional que descreve a transição entre a região de taxa de cisalhamento zero e a região Power Law. Quando o valor de A é igual a 2, a equação (3.32) é conhecida por modelo de Carreau.

Conforme Bird, 1987, em baixas taxas de cisalhamento, a tensão de cisalhamento é proporcional a taxa de deformação γ , e a viscosidade se aproxima a um valor constante η_0 - viscosidade a taxa de cisalhamento zero. A medida que a taxa de cisalhamento aumenta, a viscosidade decresce. Para taxas de cisalhamento muito altas a viscosidade torna-se novamente independente da taxa de cisalhamento e é definida por η_{∞} - viscosidade a taxa de cisalhamento infinita.

4. ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos é um método de aproximação numérica de equações diferenciais, cujas principais características são a formulação do problema na forma variacional e a construção de uma solução aproximada das equações diferenciais através do uso de "funções de forma", que são funções de elementos finitos.

Os métodos variacionais buscam obter uma solução aproximada através de uma combinação linear de funções aproximadas apropriadas. Os parâmetros na combinação linear são determinados de forma que a solução aproximada satisfaça a forma fraca ou minimize o funcional quadrático da equação em estudo. Vários métodos diferem-se um do outro pela escolha das funções de aproximação. Dentre os métodos variacionais existentes podemos destacar o método variacional clássico (Rayleigh-Ritz) e o método dos resíduos ponderados (Galerkin, "least-squares", Petrov-Galerkin, "collocation", Courant ...).

Para definir a formulação fraca ou variacional das equações diferenciais que regem o problema, é necessário caracterizar duas classes de funções. A primeira é composta de funções teste candidatas a solução do problema. Inicialmente, será exigido que estas possíveis soluções satisfaçam a condição de contorno essencial (Dirichlet). Além disso, as derivadas das funções teste devem ser quadrado-integráveis, ou seja, se u é função teste:

$$\int (u_{,x})^2 dx < \infty. \quad (4.1)$$

Funções que satisfazem (4.1) são chamadas funções do Espaço de Sobolev H^1 e escrevemos $u \in H^1$ (Ciarlet, 1978).

4.1 APROXIMAÇÃO DE GALERKIN

A partir das equações de conservação de momentum e massa, empregando as adimensionalizações usuais em Mecânica dos Fluidos (Landau e Lifchitz, 1971), podemos modelar o escoamento de sangue em uma anastomose sistêmico-pulmonar através do seguinte problema de contorno,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} - 2\eta \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_g \quad \text{sobre } \Gamma_g \times (0, T), \\
\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}_h \quad \text{sobre } \Gamma_h \times (0, T), \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{em } \Omega \text{ com } t = 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde \mathbf{u} é a velocidade do fluido, p sua pressão, η sua viscosidade, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ a parte simétrica do tensor $\nabla \mathbf{u}$, \mathbf{n} a normal exterior unitária, \mathbf{f} a força de corpo do escoamento e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de Cauchy definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta(\gamma)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}). \tag{4.3}$$

Para um fluido Newtoniano, tem-se $\eta(\gamma) = \mu$, para os modelos Newtonianos generalizados Power-Law e Carreau Yasuda, $\eta(\gamma)$ foi definido pelas equações (3.31) e (3.32) respectivamente.

O método de Galerkin, também conhecido como Bubnov-Galerkin, caracteriza-se pelas funções teste e peso pertencerem ao mesmo espaço de funções. Descreve-se, a seguir, um método para obtenção de soluções aproximadas para problemas de valor de contorno baseado na formulação fraca (ou variacional). O método de aproximações de elementos finitos a ser utilizado neste problema, denominado método de Galerkin, consiste em aproximar os espaços de dimensão infinita utilizados na formulação fraca por subespaços de dimensão finita convenientes. Seja, \mathbf{S} e \mathbf{V} espaços funcionais aproximados por pelos subespaços \mathbf{S}_h e \mathbf{V}_h (O sobrescrito h refere-se à associação de \mathbf{S}_h e \mathbf{V}_h com uma malha, ou discretização, do domínio Ω , o qual é parametrizado por um escala de comprimento característico h). Como os espaços de dimensão finita \mathbf{S}_h e \mathbf{V}_h são subconjuntos de \mathbf{S} e \mathbf{V} , tem-se:

$$\begin{aligned}
S_h \subset S & \quad (\text{isto é, se } u_h \in S_h, \text{ então } u_h \in S). \\
V_h \subset V & \quad (\text{isto é, se } \mathbf{v}_h \in V_h, \text{ então } \mathbf{v}_h \in V).
\end{aligned}$$

As conseqüências dessas definições são que se $u_h \in S_h$ e $\mathbf{v}_h \in V_h$, então

$$\begin{aligned} u_h(\cdot, t) &= u_g, \\ \mathbf{v}_h(\cdot, t) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde u_g é a condição de contorno essencial (Dirichlet).

Na aproximação de elementos finitos das equações (4.2), foi empregado os subespaços usuais da Dinâmica dos Fluidos,

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in C_h \}, \quad (4.4)$$

$$P_h = \{ p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in C_h \}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{V}_h^g = \{ \mathbf{v}(\square, t) \in H^1(\Omega)^N, t \in [0, T] \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in C_h, \mathbf{v}(\square, t) = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g \}, \quad (4.6)$$

onde R_k, R_l denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k e l .

A formulação de Galerkin para o problema em questão pode ser descrita da seguinte forma :

Achar u e p tal que

$$\begin{aligned} B_G(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= F_G(\mathbf{v}, q), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times P_h. \\ B_G(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= (\mathbf{v}, \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_\Omega - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p)_\Omega + (\nabla \mathbf{v}, \mu \nabla \mathbf{u})_\Omega - (\nabla q, p \mathbf{u})_\Omega \\ &\quad - (\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_h)_\Gamma - (\mathbf{v}, \mathbf{f})_\Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Simulações numéricas das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis via método de Galerkin enfrentam duas dificuldades numéricas principais (Johnson, 1987). Primeiro, o método de elementos finitos precisa compatibilizar os subespaços da velocidade e pressão para satisfazer a condição matemática de Babuška-Brezzi (Ciarlet, 1978). Segundo, a instabilidade inerente a esquemas de discretização centrais, seja através de formulação de Galerkin ou através de diferenças centrais, na aproximação de escoamentos advectivos dominantes (Brooks e Hughes, 1982; Patankar, 1980).

Algumas metodologias foram propostas a fim de superar a maioria das limitações do método de Galerkin aplicado a problemas de escoamentos de fluidos (Brooks e Hughes, 1982; Franca e Frey, 1992; Hughes et al. , 1986). Estas metodologias, denominadas atualmente por métodos estabilizados, consistem na adição à formulação de Galerkin de termos malha-dependentes, resíduos das equações de Euler-Lagrange do problema. Os termos de perturbação

são construídos com a finalidade de aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange (Hughes et al. , 1986; Franca et al., 1992, Taylor et al., 1998).

Neste trabalho, foi utilizado método de elemento finito “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin”. Este método não necessita satisfazer a condição acima mencionada de Babuška-Brezzi – permitindo, dessa maneira, a utilização de elementos finitos de igual-ordem para aproximar os subespaços de velocidade e pressão - além de permanecer estável até mesmo para escoamentos advectivos dominantes (Brooks e Hughes, 1982; Franca e Frey, 1992).

A partir das definições (4.4)-(4.6), podemos escrever a seguinte formulação SUPG para o sistema (4.2): Achar o par $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h^s \times P_h$ tal que

$$B(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q), \quad (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times P_h, \quad (4.8)$$

com

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}, q) = & \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + (2\eta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\ & + \sum_{K \in C_h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} + \nabla p - 2\eta \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \tau(\text{Re}_K) ([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q) \right)_K \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$F(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} + \sum_{K \in C_h} (\mathbf{f}, \tau(\text{Re}_K) ([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q))_K, \quad (4.10)$$

onde o parâmetro de estabilidade τ é definido por:

$$\tau(\text{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\text{Re}_K), \quad (4.11)$$

$$\xi(\text{Re}_K) = \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K \geq 1 \end{cases}, \quad (4.12)$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\eta}, \quad (4.13)$$

com $|\mathbf{u}|_p$ denotando a norma- p do \mathbf{P}^N e a constante m_k , para a formulação SUPG, definida como em Franca e Frey (1992).

Comentários

1. Fazendo o parâmetro de estabilidade τ igual a zero na equação (4.9), obtemos a formulação de Galerkin clássica para o problema definido nas equações (4.2). Sua estabilidade, no contexto linear do problema de Stokes, é governada pela forma discreta do Teorema de Brezzi (Ciarlet, 1978), a qual impõe, além da satisfação da condição de Babuška-Brezzi envolvendo os subespaços de pressão e velocidade, que o problema discreto seja elíptico para toda velocidade pertencente ao subespaço \mathbf{K}_h , com

$$\mathbf{K}_h^0 = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \mid \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, q \in P_h \}.$$

Visto que em geral $\mathbf{K}_h^0 \subset \mathbf{K}^0$, apenas um número limitado de combinações de elementos finitos irá satisfazê-las, criando assim uma séria limitação ao método de Galerkin em fluidos. Combinações de elementos computacionalmente desejáveis como as de igual-ordem, ficam por esta razão descartadas.

2. A instabilidade da aproximação de Galerkin em regimes de escoamento advectivos-dominados decorre da falta de coercividade da forma bilinear definida na equação (4.9). Tomando $(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{u}, -p)$ e $\tau=0$ em (4.9) e selecionando $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$, teremos

$$B(\mathbf{v}, q; \mathbf{v}, -q) \geq 2\eta \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_0^2 \quad (\mathbf{v}, q) \in V_h \times P_h.$$

Portanto, nas situações onde $\eta \rightarrow 0$, teremos a aproximação de Galerkin contaminada por oscilações espúrias, gerando soluções numéricas fisicamente irreais.

3. A expressão usual do número de Reynolds de malha (Johnson, 1987) foi modificada com a inclusão do parâmetro m_k na equação (4.9), de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivas-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $\text{Re}_K > 1$ e as difusivas-dominadas por $\text{Re}_K < 1$, independente do elemento considerado (Franca e Frey, 1992).

4.2 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO LAGRANGEANO HEXAÉDRICO DE OITO NÓS

No presente trabalho, utiliza-se, para representar o domínio de integração, o elemento hexaédrico tri-linear de oito nós, empregando-se as funções de interpolação clássicas para expandir as componentes de quantidade de Movimento e Pressão. Os elementos são denominados Lagrangeanos porque suas funções de forma são formadas a partir de produtos de polinômios de Lagrange (as funções base trilineares são produto das funções base lineares-unidimensional).

As coordenadas do elemento são definidas em termos de coordenadas naturais (ξ, ζ, ζ) onde $1 \leq (\xi, \zeta, \zeta) \leq 1$. Esta escolha ocorre devido aos limites impostos pela integração numérica utilizada – Quadratura gaussiana.

Para determinar a transformação que leva o elemento do Lagrangeano Ω^k ao domínio tri-unitário (ξ, ζ, ζ) faz-se uma mudança de coordenadas.

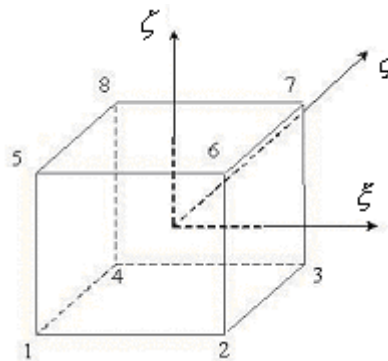


Figura 4.1 Elemento hexaédrico de 8 nós

Para obter as funções base N_a , onde o sub-índice a é o número do nó que varia entre 1 e 8, assume-se as expansões tri-lineares da forma:

$$\begin{aligned} x(\xi, \zeta, \zeta) &= \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\zeta + \alpha_3\xi + \alpha_4\xi\zeta + \alpha_5\zeta\zeta + \alpha_6\xi\zeta + \alpha_7\xi\zeta\zeta, \\ y(\xi, \zeta, \zeta) &= \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\zeta + \beta_3\xi + \beta_4\xi\zeta + \beta_5\zeta\zeta + \beta_6\xi\zeta + \beta_7\xi\zeta\zeta, \\ z(\xi, \zeta, \zeta) &= \varphi_0 + \varphi_1\xi + \varphi_2\zeta + \varphi_3\xi + \varphi_4\xi\zeta + \varphi_5\zeta\zeta + \varphi_6\xi\zeta + \varphi_7\xi\zeta\zeta, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde os coeficientes α, β, φ são parâmetros a serem determinados satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} x(\xi_a, \zeta_a, \zeta_a) &= x_a^k, \\ y(\xi_a, \zeta_a, \zeta_a) &= y_a^k, \\ z(\xi_a, \zeta_a, \zeta_a) &= z_a^k, \end{aligned} \quad (4.15)$$

As coordenadas nodais definidas conforme tabela 4.1, aplicadas na equação (4.14) gera um sistema de equações algébricas lineares. Por exemplo para $x(\xi_a, \zeta_a, \zeta_a)$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \\ x_5^k \\ x_6^k \\ x_7^k \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Resolvendo os α 's e posteriormente substituindo em (4.14), tem-se

$$x = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \zeta, \zeta) x_a^k, \quad (4.17)$$

o mesmo pode ser feito para y e z.

$$y = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \zeta, \zeta) y_a^k, \quad (4.18)$$

$$z = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \zeta, \zeta) z_a^k, \quad (4.19)$$

onde N_a são as funções base de um elemento linear tridimensional descritas em termos das coordenadas locais (ξ, ζ, ζ) definidas por

$$N_a(\xi, \zeta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \zeta_a \zeta)(1 + \zeta_a \zeta). \quad (4.20)$$

As coordenadas do ponto no hexaedro são relacionados as coordenadas do ponto no domínio Ω^k por mapeamentos definidos nas equações (4.17), (4.18) e (4.19).

Uma vez que o elemento é isoparamétrico, isto é, o grau de aproximação da transformação de coordenadas e da interpolação das variáveis dependentes é o mesmo; podemos definir para uma variável u

$$u = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \zeta, \zeta) u_a^k. \quad (4.21)$$

Tabela 4.1 Coordenadas locais

a	ξ_a	ζ_a	ζ_a
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

4.3. TRANSFORMAÇÃO DO DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO

O domínio de integração é definido em termos de coordenadas globais x, y, z enquanto que as funções base são conhecidas em termos das coordenadas naturais ξ, ζ, ζ . Faz-se então necessário reescrever as integrais em termos de ξ, ζ, ζ .

Considerando-se que :

$$x = x(\xi, \zeta, \zeta) \quad y = y(\xi, \zeta, \zeta) \quad z = z(\xi, \zeta, \zeta). \quad (4.22)$$

Aplicando a regra da cadeia em (4.21):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (4.23)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\zeta \\ d\zeta \end{Bmatrix} \equiv [J]^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\zeta \\ d\zeta \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

A equação acima representa a transformação linear entre as coordenadas locais e globais. Para ocorrer esta transformação $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \varsigma, \zeta)$, a inversa da matriz Jacobiana $[J]^{-1}$ tem que existir. A condição necessária e suficiente para a equação (4.23) ser invertida é que o determinante da matriz Jacobiana seja não-zero em cada ponto (ξ, ς, ζ) no domínio. Se esta condição é satisfeita, tem-se

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\varsigma \\ d\zeta \end{Bmatrix} = ([J]^{-1})^T \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

e

$$\xi = \xi(x, y, z) \quad \varsigma = \varsigma(x, y, z) \quad \zeta = \zeta(x, y, z). \quad (4.26)$$

As funções (4.25) devem ser contínuas, diferenciáveis e invertidas.

4.4. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – QUADRATURA GAUSSIANA

O objetivo principal da integração numérica é resolver integrais que são difíceis ou impossíveis de serem calculadas de forma analítica. Entre os métodos mais conhecidos podem-se citar a integração de Romberg, regra do trapézio e regra de Simpson e Quadratura Gaussiana.

A Quadratura Gaussiana faz uso de polinômios ortogonais que interpolam o integrando, produzindo aproximações apropriadas. A grande vantagem deste método, segundo Hughes, 2000, é a obtenção de uma boa precisão usando poucos pontos de integração, resultando em um menor custo computacional. Diferentes polinômios ortogonais podem ser utilizados a fim de obter a quadratura de Gauss (Polinômio de Jacobi, Legendre, Hermite ...).

A integração numérica utilizada neste trabalho é a quadratura de Gauss-Legendre e sua fórmula é definida por

$$\int_{\Omega^k} F(x, y, z) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x(\xi, \varsigma, \zeta), y(\xi, \varsigma, \zeta), z(\xi, \varsigma, \zeta)) j(\xi, \varsigma, \zeta) d\xi d\varsigma d\zeta, \quad (4.27)$$

onde j é o determinante do Jacobiano.

5 MÉTODOS E RESULTADOS

5.1. MODELO ESTUDADO

Neste estudo, a formulação Streamline Upwind/Petrov-Galerkin – SUPG, definida nas equações (4.8) e (4.9), foi utilizada para aproximar o sistema (4.2) que modela o escoamento de sangue na anastomose sistêmico-pulmonar do tipo Blalock-Taussig modificada. Um modelo geométrico parametrizado tridimensional foi desenvolvido baseado nas medidas obtidas durante procedimentos cirúrgicos realizados no Instituto de Cardiologia do Rio Grande do Sul (Anexo I). O modelo é composto pela artéria subclávia, pela artéria pulmonar e pela prótese de PTFE (“Shunt”), conforme pode ser visto nas figuras. 5.1 (a) e (b) . Os parâmetros obtidos dos pacientes foram os diâmetros do enxerto tubular, artérias subclávia e pulmonares e os ângulos das anastomoses (proximal e distal).

As extensões das artérias foram determinadas a partir dos resultados obtidos pelas simulações pulsantes e medidas do exame de Ecodoppler. Com o objetivo de estudar a influência do determinantes geométricos (diâmetro, curvatura e ângulo) simulações em regime permanente foram realizadas modificando estes determinantes geométricos.

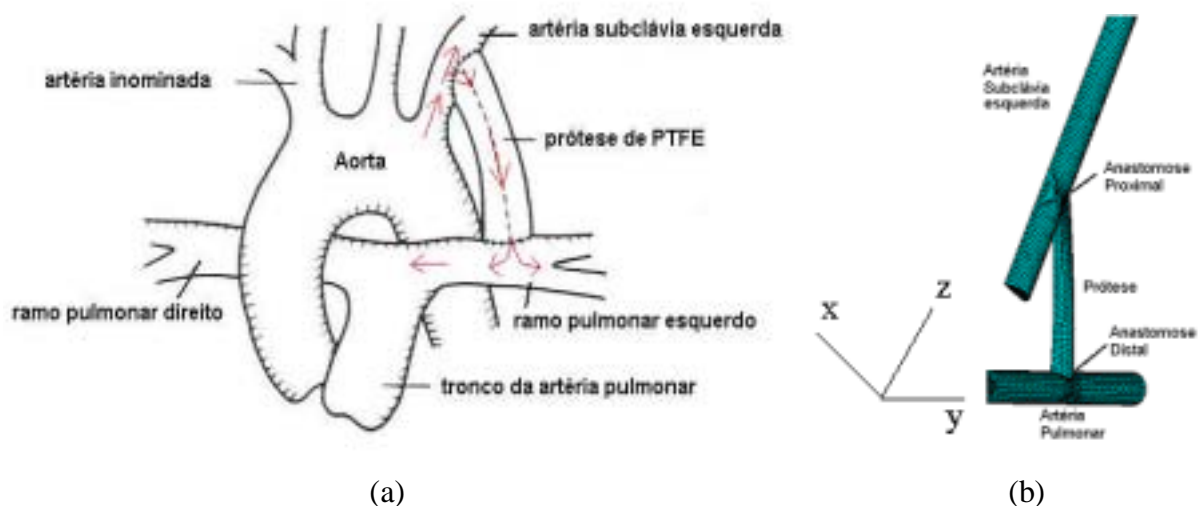


Figura 5.1 Anastomose do tipo Blalock-Taussig modificada, (a) desenho (b) modelo simétrico

5.2. ASPECTOS COMPUTACIONAIS

As simulações foram realizadas no Laboratório de Mecânica dos fluidos aplicada e computacional (LAMAC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e Centro Nacional de Supercomputação. Os recursos computacionais utilizados nas simulações numéricas foram: Uma “Silicon Graphics ORIGIN 200 Workgroup Server” – com 2 processadores e 256 Mb de memória RAM e quatro “Silicon Graphics Octane Workstation” – com 2 processadores e 128 Mb de memória RAM em cada máquina.

O código de dinâmica de fluidos computacional Flotran (Ansys Inc.) foi utilizado empregando a formulação “Streamline Upwind Petrov-Galerkin” – SUPG, equações (4.8) e (4.9) para aproximar o sistema (4.2) e o programa de visualização científica Enight utilizado para fazer o pós-processamento das análises.

O domínio foi discretizado por uma malha de elementos hexaedros de oito nós (trilinear). O tamanho do elemento (compatível com os recursos computacionais disponíveis) foi determinado - $0,0005\text{ mm}$. Diminuindo o tamanho do elemento a partir deste valor, não houve variações significativas nos valores de velocidade axial e pressão ao longo da artéria subclávia. Variando até $0,00025\text{ mm}$, as diferenças máximas de velocidade e pressão foram sempre menores de 3 e 2% respectivamente. O número de elementos variou de paciente para paciente devido às diferenças dos diâmetros das artérias e enxerto. O menor modelo foi discretizado em 17.976 elementos, enquanto que o maior foi em 72.666 elementos. O tempo de solução, em regime permanente, para o menor modelo foi de 17.209 segundos e para o maior, 39.762 segundos. A análise em regime pulsante consumiu 184.166 segundos de processamento.

Um plano de simetria normal ao eixo Y foi assumido com o objetivo de reduzir a memória necessária com ganho de 50% na malha, e o tempo de solução (ver figura 5.1).

Interpolações trilineares lagrangeanas foram utilizadas para aproximar os campos de velocidade e pressão. As simulações foram realizadas de acordo com as seguintes hipóteses: as paredes das artérias são rígidas, o sangue é homogêneo e se comporta como um fluido Newtoniano generalizado, o escoamento é laminar – com Reynolds entre 700 e 2400.

As condições de contorno impostas foram: condição de não deslizamento nas paredes das artérias e enxerto, condição de tração livre nas seções de saída das artérias subclávia e pulmonares (ver figura 5.2), de modo de retirar a indeterminação do campo de pressão incompressível, fixou-se em alguns nós das seções de saída $p=0$. Algumas simulações, na seção 5.5, foram realizadas com as condições de contorno definidas por Migliavacca et al., 2000, com a imposição de fluxo prescrito, na saída da artéria subclávia. O perfil da velocidade de entrada na artéria subclávia foi considerado plano em todas as simulações. A condição de escoamento

pulsante na artéria subclávia foi obtida a partir do exame de Ecodoppler (Figura. 5.3) realizado em um paciente submetido previamente ao procedimento de Blalock-Taussig modificado.

O código empregado resolve os sistema de equações de forma segregada, surgindo a necessidade de acoplamento entre as variáveis, principalmente entre velocidade e pressão, em escoamentos incompressíveis. O método batizado de SIMPLE (“Semi implicit linked equations”), de Patankar e Spalding, 1972, foi utilizado para realizar este acoplamento.

A solução do sistema de equações algébricas foi obtida com a utilização do método linha a linha TDMA (“TriDiagonal Matriz Algorithm”) desenvolvido por Thomas, 1949.

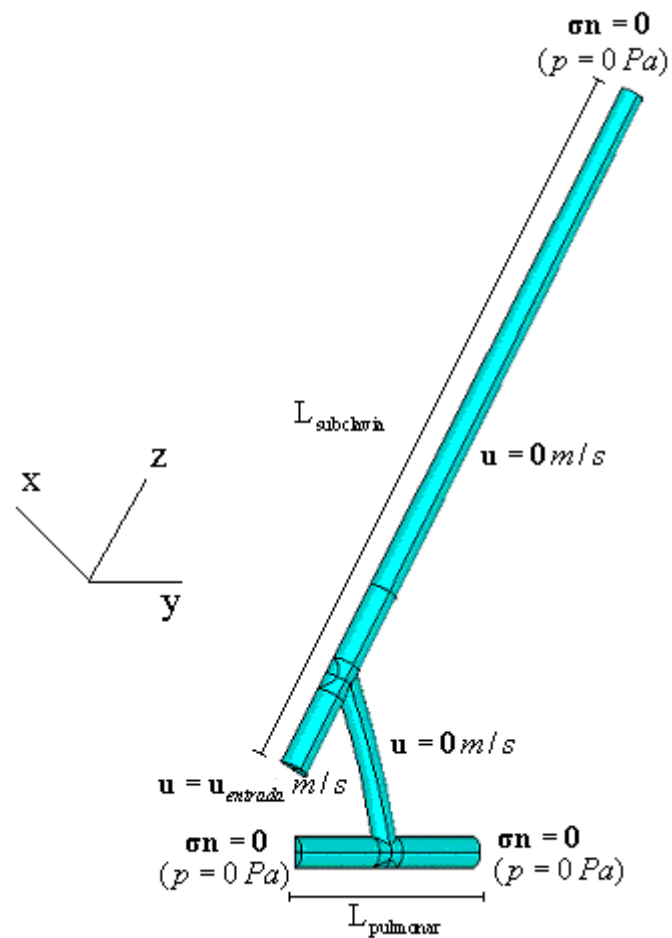


Figura 5.2 Condições de contorno impostas ao modelo

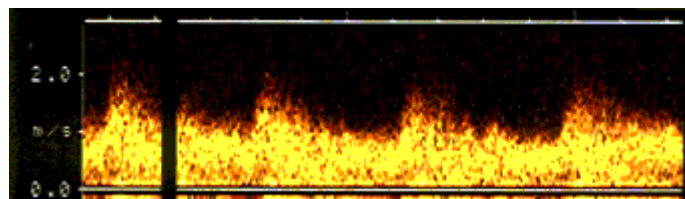


Figura 5.3 Condição de contorno pulsante na artéria subclávia – Velocidade (m/s)

5.3. PACIENTES - AMOSTRAGEM

Dez pacientes (Tabela 5.1) com cardiopatia congênita e hipofluxo pulmonar, submetidos à cirurgia de anastomose sistêmico-pulmonar do tipo Blalock-Taussig modificada no Instituto de Cardiologia do RS, foram incluídos no presente estudo, cedência pela qual muito agradecemos.

A inclusão do paciente esteve em consonância com o diagnóstico pré-operatório: a indicação do grupo de cardiopatias congênitas, a condição clínica do paciente, a anuência do responsável pelo paciente e a preferência individual do cirurgião, o qual considerou adequada a cirurgia de anastomose sistêmico-pulmonar do tipo de Blalock-Taussig modificada.

Tabela 5.1 Pacientes com cardiopatia congênita cianótica incluídos no estudo – D (diâmetro), L (extensão)

Paciente	D _{subclávia}	D _{pulmonar}	D _{shunt}	L _{shunt}	Ângulo PTFE/sub	Ângulo PTFE/pul	Idade
P1	2.5 mm	4 mm	5 mm	34 mm	30°	90°	39 dias
P2	3 mm	2 mm	4 mm	40 mm	60°	90°	7 dias
P3*	6 mm	5 mm	5 mm	30 mm	30°	90°	4 anos
P4	2.5 mm	3 mm	5 mm	30 mm	30°	40°	2 meses
P5	5 mm	9 mm	6 mm	30 mm	50°	40°	9 meses
P6	6 mm	7 mm	4 mm	37 mm	30°	90°	4 meses
P7	8 mm	6 mm	5 mm	37 mm	60°	90°	4 meses
P8	3 mm	6.6 mm	5 mm	33 mm	70°	80°	2 dias
P9	4 mm	3.5 mm	5 mm	37 mm	60°	90°	4 dias
P10	4.5 mm	10 mm	6 mm	35 mm	110°	60°	4 meses

* P3 foi submetido à 2 anos ao procedimento de Blalock-Taussig modificado – parâmetros geométricos foram obtidos através do exame de angiocardiograma.

5.4. CONSIDERAÇÕES ÉTICAS

Não houve impedimentos de ordem médica à realização da presente pesquisa, pois esta não implicou em qualquer risco adicional ao do procedimento cirúrgico rotineiro, para os pacientes. Isto porque:

1. A coleta de informações para simulação computacional na qual baseou-se a confecção de modelos geométricos não implicou em modificações na rotina de tratamento dos pacientes

(incluindo-se o procedimento cirúrgico) ou requeriu exames e procedimentos específicos ou não previstos na conduta médica.

2. A simulação computacional foi aplicada a procedimentos cirúrgicos bem conhecidos e nos quais os médicos participantes possuem ampla experiência: estes procedimentos já estavam realizados quando da análise computadorizada, de modo que os resultados observados na simulação não provocam interferência no manuseio dos pacientes ou na sua evolução clínica.

Os responsáveis pelos pacientes considerados (estes neonatos ou crianças de pequena idade) foram contatados previamente ao procedimento cirúrgico para esclarecimento quanto à cirurgia a ser realizada e ao estudo proposto. Um consentimento para que o paciente venha a participar do estudo foi solicitado ao responsável, mediante assinatura do Termo de Consentimento para Participação no Estudo (anexo II) .

5.5. VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO DO MÉTODO

Esta seção descreve o desenvolvimento do modelo geométrico e aplicação do método para simular o escoamento de sangue em anastomoses sistêmico-pulmonares do tipo Blalock-Taussig modificado. O sangue flui através das artérias subclávias até os braços. A primeira tarefa foi determinar os comprimentos ótimos das artérias subclávia ($L_{\text{subclávia}} = 152 \text{ mm}$) e pulmonar ($L_{\text{pulmonar}} = 40 \text{ mm}$) a serem modeladas. Para isso, os resultados numéricos foram comparados com as medições obtidas no exame de Ecodoppler de um paciente submetido ao referido procedimento cirúrgico. A figura 5.4 mostra os resultados numéricos obtidos pelo modelo geométrico deste trabalho (em verde) sobrepostos ao exame de Ecodoppler, durante um pulso, junto a região da anastomose proximal. Pode-se observar uma boa concordância qualitativa e quantitativa entre o resultado numérico obtido no presente trabalho e o do exame de Ecodoppler.

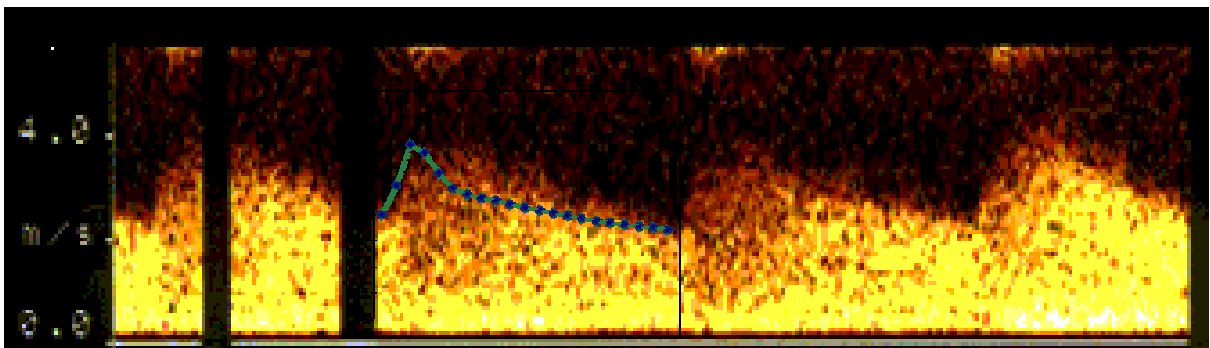


Figura 5.4 Velocidade (m/s) na prótese junto a região da anastomose proximal

Com a intenção de assegurar a precisão do método empregado, foram realizadas análises numéricas com as condições de contorno impostas por Migliavacca et al., 2000.

Migliavacca et al., 2000, utilizou o código de dinâmica dos fluidos computacional FIDAP (FLUENT Inc.) com o objetivo de examinar a variação de pressão no “Shunt” em função do fluxo desviado pelo mesmo no procedimento cirúrgico de Norwood. (figura.5.5). O modelo geométrico é composto pela artéria inominada com a bifurcação até o nível das artérias subclávia direita e carótida direita, o enxerto implantado e as artérias pulmonares. Nestas simulações o fluxo (vazão volumétrica) na entrada da artéria inominada foi definida como $0,6 \text{ l/min}$, e foram impostos fluxos de saídas definidos de modo que o fluxo volumétrico no Shunt foi definido entre $0,2$ e $0,6 \text{ l/min}$.

A Figura 5.6 mostra as relações entre a vazão volumétrica nos enxerto e a variação de pressão no mesmo, em shunts com 3 e 4 mm de diâmetros.

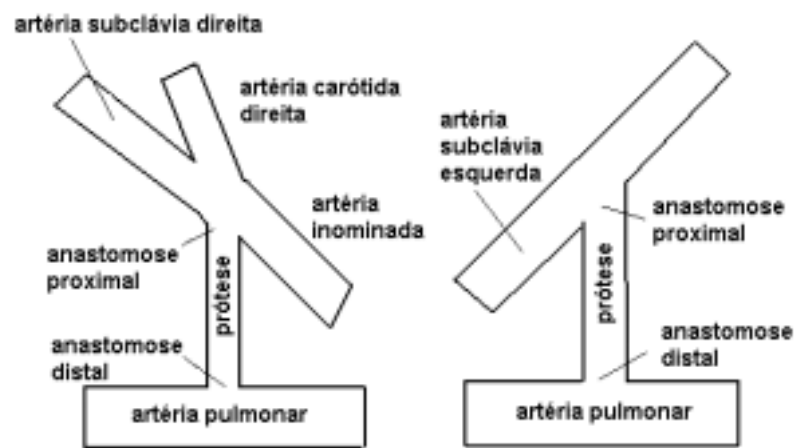
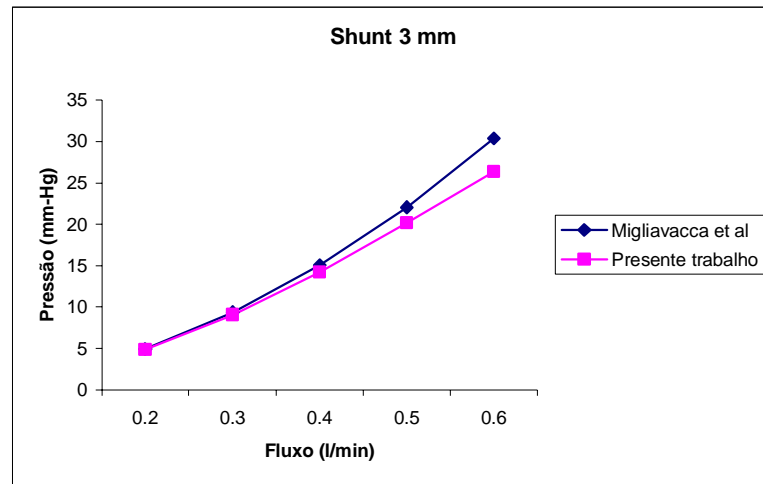
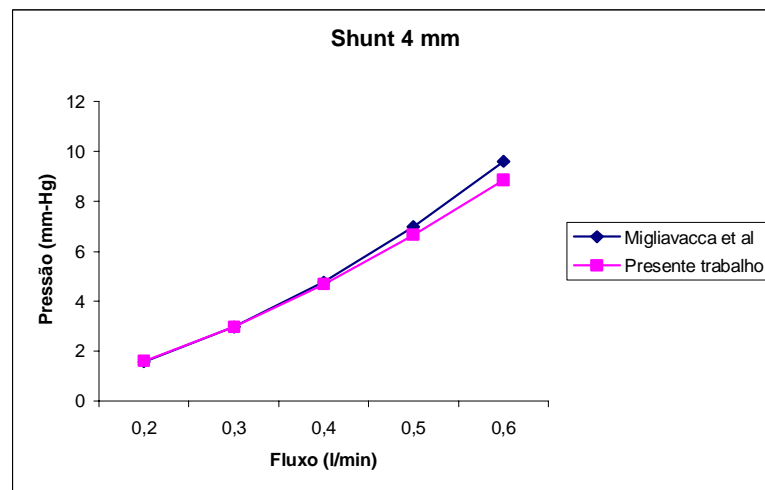


Figura 5.5 Procedimentos de (a) Norwood e (b) Blalock-Taussig modificado

Podemos verificar uma boa concordância nos resultados numéricos obtidos por Migliavacca et al. (2000) e o modelo apresentado neste estudo. Esta concordância foi satisfatória na faixa de $0,2-0,5 \text{ l/min}$ de fluxo desviado pelo enxerto. Conforme Pennati et al., 2001, o escoamento desviado inteiramente pelo enxerto não é uma situação realística - segundo Migliavacca et al. (1999), o fluxo em um enxerto é estimado em aproximadamente entre 70-80% do fluxo da artéria inominada em recém nascidos. Uma pequena discrepância existe na figuras 5.6 para um desvio de $0,6 \text{ l/min}$, que equivale a uma situação não real pois representa 100% de fluxo desviado. Esta discordância é difícil de ser avaliada, devido ao pouco detalhamento numérico de Migliavacca et al. (2000), o qual não informa os perfis impostos nas seções de entrada e saída das artérias inominada e subclávia respectivamente.



(a)



(b)

Figura 5.6 Variação da pressão nas próteses (“Shunts”) de (a) 3 e (b) 4mm em função do fluxo de sangue desviado (l/min)

Migliavacca et al., 2000, desenvolveram uma correlação a fim de estimar o fluxo através do enxerto tubular. A variação de pressão para um enxerto reto foi definida por:

$$\Delta P = \frac{0.097}{D_{Shunt}^4} Q + \frac{0.521}{D_{Shunt}^4} Q^2, \quad (5.1)$$

onde a pressão é expressa em milímetros de mercúrio, o diâmetro do enxerto em centímetros e o fluxo no enxerto em litros por minuto.

A figura 5.7 mostra as iso-regiões de pressão no modelo geométrico com a extensão da artéria subclávia e as condições de contorno propostas no presente estudo. A tabela 5.2 apresenta as variações de pressão obtidas numericamente neste trabalho e através da Eq.5.1.

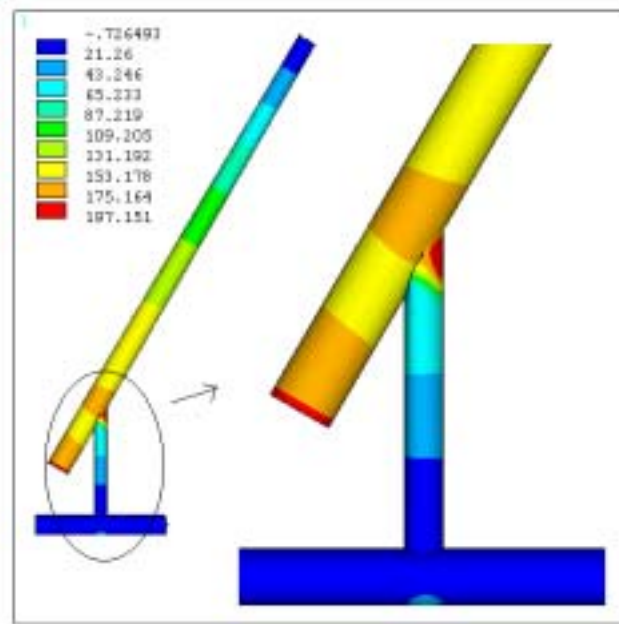


Figura 5.7 Iso-regiões de pressão (Pa) – ($133,32 Pa = 1mmHg$)

Tabela 5.2 variação de pressão no “Shunt”

	Varição de pressão ($mmHg$)
Presente trabalho	1,073
Equação 5.1	1,056

Com a finalidade de justificar a hipótese utilizada neste estudo, de que o sangue se comporta como um fluido Newtoniano nas condições de escoamento impostas pela anastomose de Blalock-Taussig modificada, foram realizadas simulações numéricas tanto com modelos não Newtonianos (Newtonianos generalizados) – equações (3.31) e (3.32) como com o modelo empregando a hipótese Newtoniana – equação (3.23). Os parâmetros destes modelos para o sangue foram obtidos em Slattery, 1999 e encontram-se na tabela 5.3.

Tabela 5.3 Parâmetros dos modelos Newtonianos generalizados utilizados neste trabalho

Modelos	Parâmetros			
	$m (Pa s^n)$	n	$\gamma (s^{-1})$	
Power Law	0,035	0,61	226,5	
	$\lambda (s)$	n	$\eta_0 (Pa s)$	$\eta_\infty (Pa s)$
Carreau	3,313	0,3568	0,056	0,00345

com as variáveis m , n , γ , λ , η_0 , η_∞ tendo o mesmo significado da seção 3.3.

A figura 5.8 ilustra o perfil de velocidade na anastomose distal do “Shunt”, enquanto que a figura 5.9 apresenta os contornos de velocidade junto ao procedimento cirúrgico. Na tabela 5.4 a porcentagem de fluxo de sangue desviada pelo enxerto tubular é apresentada. Ao analisar as figuras 5.8 e 5.9 e tabela 5.4 é possível verificar a semelhança dos resultados obtidos pelo modelo Newtoniano e pelos modelos não Newtonianos (Newtonianos generalizados) - mais precisamente pelo modelo de Carreau. Com base nestes resultados o emprego do modelo Newtoniano é plenamente justificado, dado o baixo custo computacional do modelo linear de Newton. A discrepância entre o modelo Newtoniano e o modelo Power Law, pode ser justificada pela incapacidade do modelo Power-Law reproduzir a assíntota Newtoniana para $\gamma \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow \infty$, (Slattery, 1999) conforme já mencionado na seção 3.3, afastando-se assim do comportamento dos fluidos reais. Este comportamento pode ser verificado na figura 5.8.

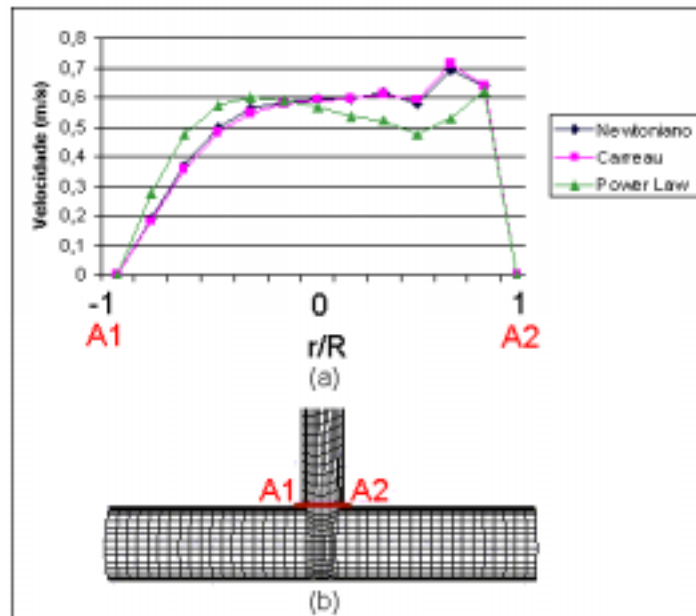


Figura 5.8 (a) Perfil de velocidade na anastomose distal do “Shunt” – seção A1A2 conforme (b)

Tabela 5.4 Porcentagem de sangue desviado pelo enxerto tubular (“Shunt”)

	% Desvio		
	Newtoniano	Carreau	Power Law
Prótese/total	33,19	33,62	31,08
Para a artéria pulmonar Esquerda	17,56	17,75	16,68
Para a artéria pulmonar Direita	15,63	15,87	14,40

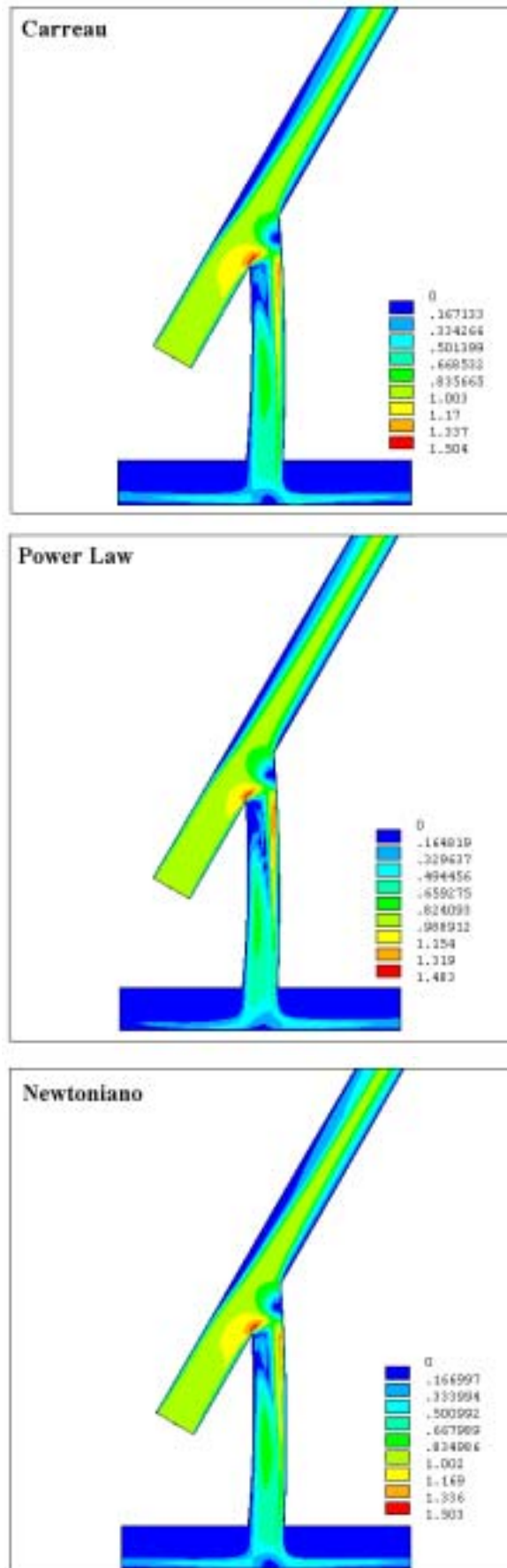


Figura 5.9 Contornos de velocidade (m/s)

5.6. INFLUÊNCIA DOS DETERMINANTES GEOMÉTRICOS

5.6.1. Fator de atrito do escoamento na artéria subclávia

Inicialmente estudaremos a influência dos determinantes geométricos no fator de atrito do escoamento na artéria subclávia. Num escoamento sem atrito, a equação de Bernoulli poderia ser utilizada para calcular os efeitos das variações de elevação e velocidade. Dessa forma, no caso de escoamentos viscosos, a preocupação principal são os efeitos do atrito. Estes provocam perda de carga no escoamento, ou seja, uma conversão indesejável de energia mecânica em energia térmica, fenômeno ausente no escoamento inviscido. A perda de carga total, é a soma das perdas distribuídas devidas aos efeitos do atrito no escoamento desenvolvido em tubos de seção constante, com as perdas localizadas, devidas a entradas, acessórios, mudanças de áreas etc ...

Num escoamento completamente desenvolvido (Fox e McDonald, 1998) através de um tubo horizontal de área constante, a perda de carga distribuída pode ser expressa como a perda de pressão e representa a energia mecânica convertida em térmica, por efeitos do atrito viscoso. A queda de pressão é equilibrada apenas pelas forças de cisalhamento nas paredes do tubo. Verificamos assim que a tensão de cisalhamento no fluido varia linearmente na direção transversal ao tubo.

Para o escoamento laminar o fator de atrito é caracterizado por uma única curva dada pela equação

$$f = \frac{64}{Re}, \quad (5.2)$$

onde $f = 2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{D}{Lu^2}$ e Re é o número de Reynolds, definido por $Re = \frac{\rho u D}{\mu}$.

Sendo ρ a densidade do fluido, u sua velocidade, L o comprimento do tubo, D o diâmetro do tubo e μ a viscosidade do fluido. Os resultados publicados por Moody (Fox e McDonald, 1998), são mostrados na figura 5.10. A curva em vermelho é a curva gerada pela equação (5.2)

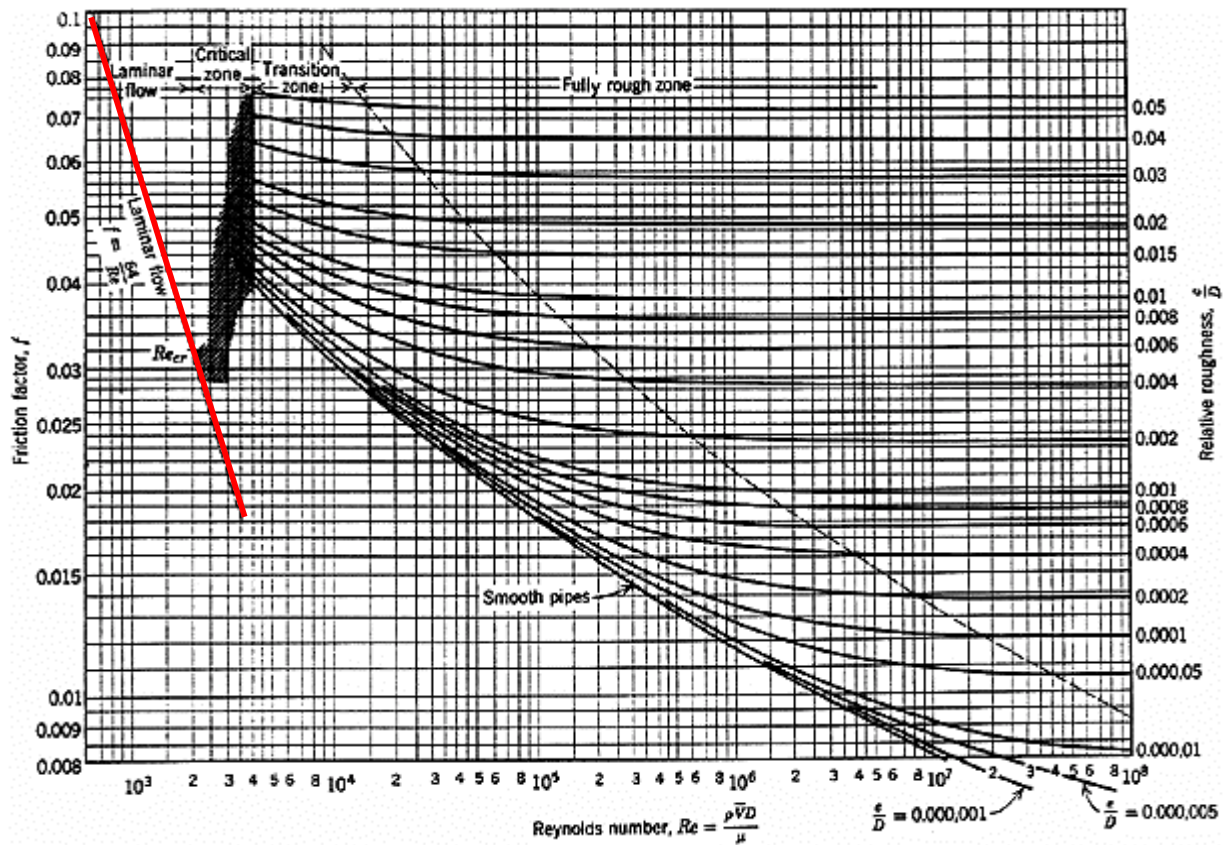


Figura 5.10 Diagrama de Moody

Na anastomose sistêmico-pulmonar do tipo Blalock-Taussig modificado o diâmetro do enxerto interposto pode ser maior ou menor que o diâmetro da artéria subclávia. A figura 5.11 apresenta o fator de atrito na artéria subclávia, para o caso onde o diâmetro do enxerto é maior que o diâmetro da artéria subclávia. Enquanto que a figura 5.12 se refere ao caso onde o diâmetro maior é o da subclávia comparado ao do enxerto. Em ambos os casos o número de Reynolds foi fixado em 360, 810, 1260 e 1710, para os ângulos da anastomose de 30°, 60°, 90° e 110°.

Devido à interposição de um enxerto tubular na artéria subclávia, os valores de fator de atrito da artéria subclávia obtidos se afastaram aos preditos pela equação (5.2). Ao compararmos as figuras 5.11 e 5.12, pode-se notar que para o mesmo número de Reynolds, os valores de fator de atrito não são os mesmos. Isto pode ser explicado pelo fato da inclusão de um enxerto com diâmetro maior que o da artéria subclávia causar maior perturbação no escoamento se comparado ao caso de um enxerto de diâmetro menor que o da artéria subclávia. Para exemplificar esta conclusão, alguns valores do produto $f Re$ são apresentados na tabela 5.5, em uma anastomose de 60°.

Tabela 5.5 $f Re$ calculado para anastomoses com ângulo de 60°

Tipos de anastomoses	Re			
	360	810	1260	1710
$D_{protese} > D_{subclavia} (f Re)$	16,78	21,96	25,71	28,18
$D_{protese} < D_{subclavia} (f Re)$	52,78	67,36	78,88	89,13

A equação 5.2, prescreve que $f Re=64$. Isto é aplicado em escoamentos laminares completamente desenvolvidos em tubos retos, horizontais e de seção constante. No nosso estudo não há comprimento de entrada suficiente para o escoamento se desenvolver, além da seção da artéria subclávia não ser sempre constante a jusante da anastomose. Mesmo assim pode-se notar que para o caso de anastomose com diâmetro do enxerto menor que ao da artéria subclávia, obteve-se valores para $f Re$ próximos a 64, o que já não ocorre na anastomose onde o diâmetro do enxerto é maior. Neste último caso, a inclusão do enxerto causa uma grande perturbação do padrão desenvolvido do escoamento, impedindo assim sua concordância com o valor constante de 64 previsto no escoamento de Hagen- Poiseuille. O grande diâmetro do enxerto faz com que as perdas localizadas sejam bastantes significativas em presença das perdas distribuídas de Hagen-Poiseuille.

Ao analisarmos a figura 5.11 é possível concluir que existe uma influência sensível do ângulo da anastomose no escoamento do sangue na artéria subclávia, tendo em vista que para diferentes ângulos, tem-se diferentes valores para fator de atrito na artéria subclávia.

O fator atrito na artéria subclávia onde é incluído um enxerto de diâmetro maior que o seu, tem o valor maior para a anastomose proximal com ângulo de 60° (figura 5.11), enquanto que o fator de atrito na artéria subclávia onde é interposto um enxerto de menor diâmetro, tem o maior valor para o ângulo de 30° (figura 5.12) .

A partir das simulações realizadas, correlações para o cálculo do f em função do número de Reynolds foram obtidas para os ângulos e diâmetros simulados. (Tabelas 5.6 – 5.9)

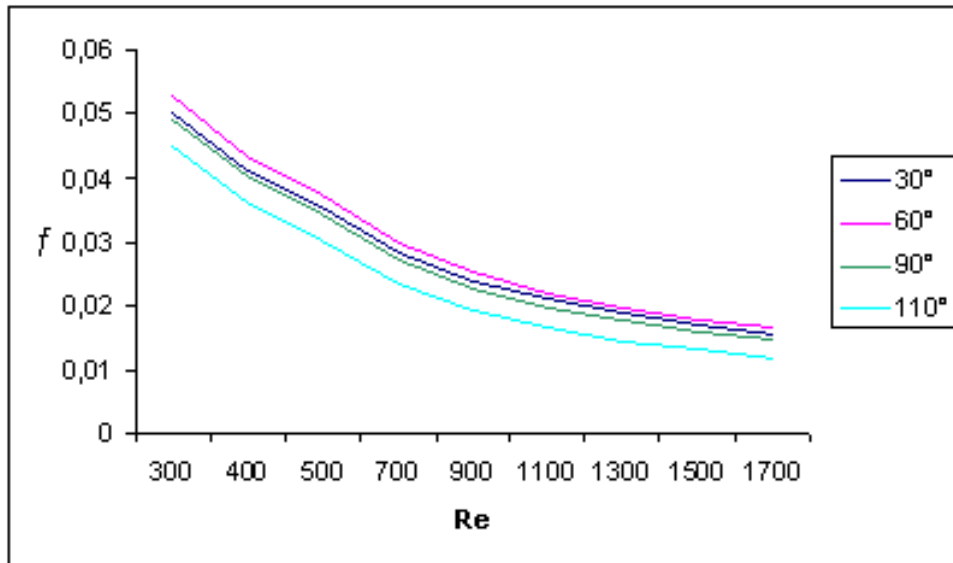


Figura 5.11 Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia

Tabela 5.6 Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia

Ângulo anastomose	Modelo Power Law ($y=a x^b$)	
	a	b
30°	2,2636	-0,6686
60°	2,3495	-0,6660
90°	2,7136	-0,7029
110°	3,7250	-0,7740

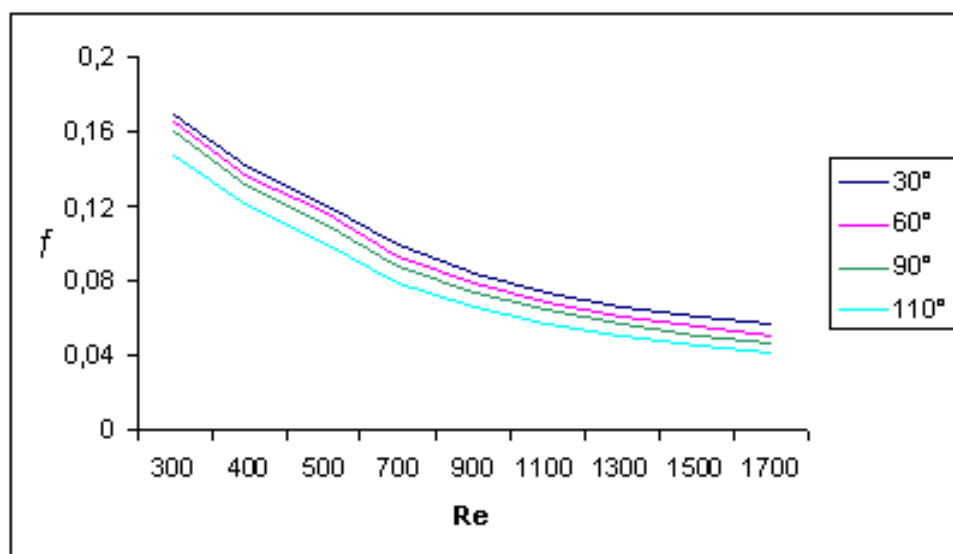


Figura 5.12 Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia

Tabela 5.7 Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia

Ângulo anastomose	Modelo Power Law ($y=a x^b$)	
	a	b
30°	6,2304	-0,6330
60°	7,8511	-0,6767
90°	9,0598	-0,7079
110°	9,4044	-0,7291

As figuras 5.13 e 5.14 apresentam o fator de atrito na artéria subclávia utilizando diâmetros de enxerto de 4mm, 5mm e 6mm.

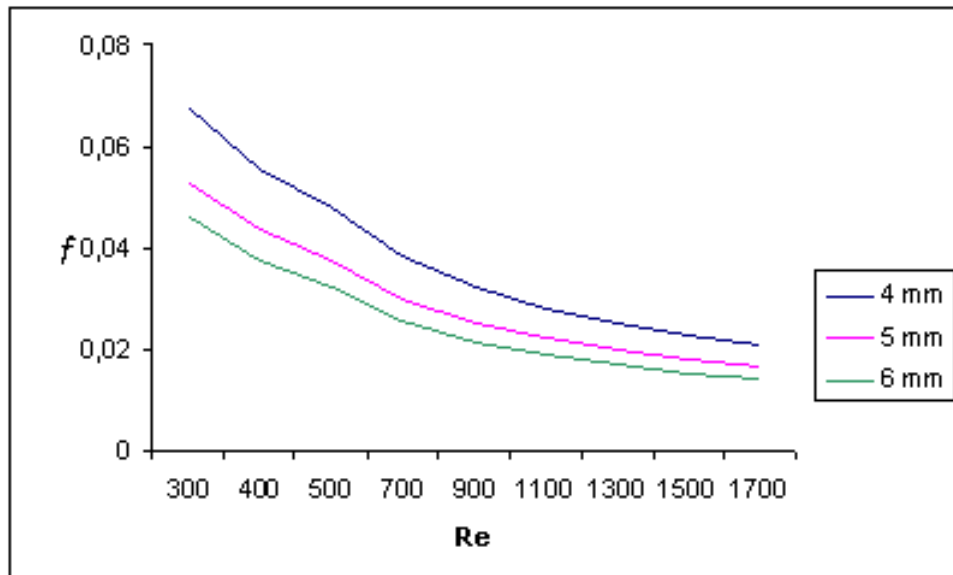


Figura 5.13 Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia

Tabela 5.8 Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto maior que o diâmetro da subclávia

Diâmetro do enxerto	Modelo Power Law ($y=a x^b$)	
	a	b
4 mm	3,1588	-0,6744
5 mm	2,3480	-0,6659
6 mm	2,2776	-0,6855

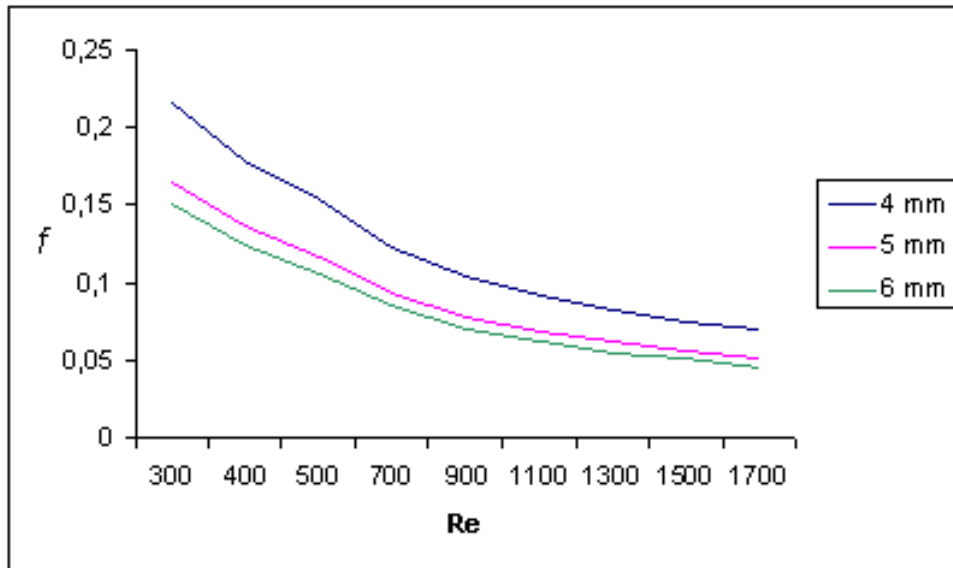


Figura 5.14 Gráfico $f \times Re$ – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia

Tabela 5.9 Correlações para cálculo de f em função de Re na artéria subclávia – diâmetro do enxerto menor que o diâmetro da subclávia

Diâmetro do enxerto	Modelo Power Law ($y=a x^b$)	
	a	b
4 mm	9,2320	-0,6588
5 mm	7,8600	-0,6769
6 mm	7,2298	-0,6789

A tabela 5.10 apresenta os valores do produto $f Re$ para o enxerto de 5mm de diâmetro. Pode-se notar novamente que, para o caso de anastomose com diâmetro do enxerto (prótese) menor que ao da artéria subclávia, tem-se valores para $f Re$ próximos a 64, o que não ocorre na anastomose onde o diâmetro do enxerto é maior. Isto pode ser justificado, novamente, pelo aumento das perdas localizadas neste último caso.

Tabela 5.10 $f Re$ calculado para anastomoses com diâmetro de 5mm

Tipos de anastomoses	Re			
	360	810	1260	1710
$D_{protese} > D_{subclavia} (f Re)$	16,78	21,96	25,71	28,17
$D_{protese} < D_{subclavia} (f Re)$	52,78	67,36	78,88	89,18

5.6.2. Fluxo desviado pelo enxerto

A partir de simulações envolvendo a razão entre os diâmetros da artéria subclávia e do enxerto, que será chamado de **Dr**, foi possível obter algumas correlações para os diâmetros de enxerto de 4 mm, 5 mm e 6 mm, apresentadas na tabela 5.11. A figura 5.15 apresenta as curvas de desvio de fluxo no enxerto em função da razão entre o diâmetro da artéria subclávia e diâmetro do enxerto.

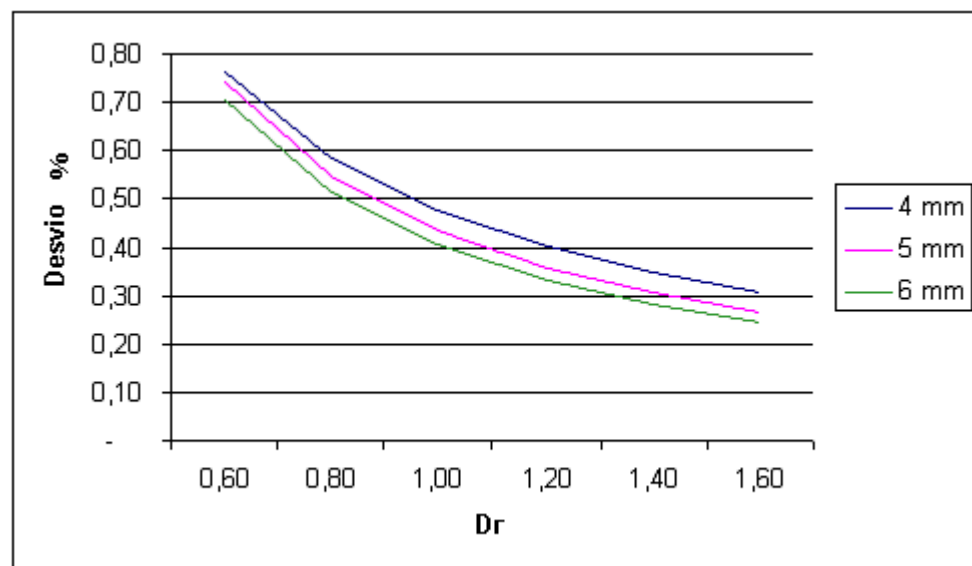


Figura 5.15 Desvio de fluxo de sangue no enxerto em função de **Dr**.

Tabela 5.11 Correlações para cálculo fluxo de sangue desviado pelo enxerto em função da razão entre os diâmetros da artéria subclávia e do enxerto

Diâmetro do enxerto	Modelo Power Law ($y = a x^b$)	
	a	b
4 mm	0,4753	-0,9230
5 mm	0,4475	-1,0511
6 mm	0,4056	-1,0760

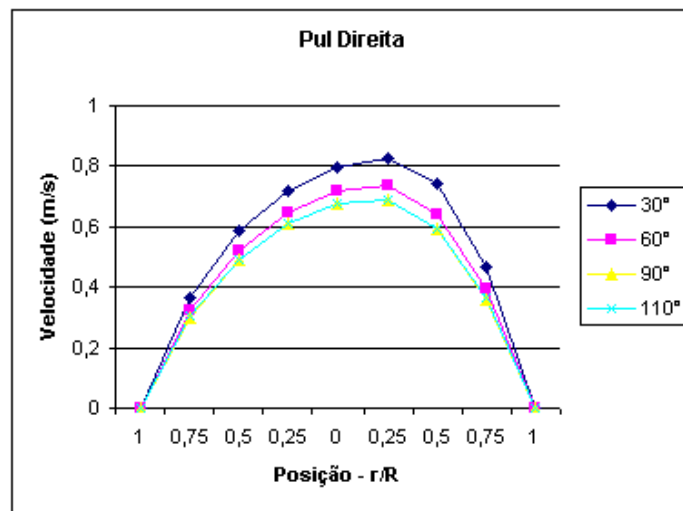
A tabela 5.12 apresenta a porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e direcionado para cada uma das artérias pulmonares dos pacientes pertencentes a amostragem, dividida em dois grupos, em função dos ângulos simulados. O ângulo da anastomose tem uma significativa influência na porcentagem de fluxo desviada pelo enxerto. Vale ressaltar, que entre os ângulos de 30° e 60°, a diferença na porcentagem de fluxo é pouco expressiva. Para os procedimentos em que o diâmetro do enxerto é menor que o diâmetro da artéria subclávia, a porcentagem desviada

é maior nos casos com anastomose de 60° comparado com o ângulo de 30°. Quando o diâmetro do enxerto é maior que a artéria subclávia, pode-se verificar o contrário. A influência do ângulo se torna mais expressiva nos casos de 90° e principalmente 110° graus. Em todos os casos onde foi simulado o ângulo da anastomose com 110°, foi notado a maior porcentagem de desvio. Isto não significa que este procedimento deva ser o mais indicado para o procedimento cirúrgico. Outro fato que deve ser levado em consideração é a porcentagem de fluxo direcionada para cada um dos pulmões. Procura-se sempre que possível manter um fluxo semelhante entre as duas artérias pulmonares. Os pacientes P3, P6 e P7 caracterizam-se pelo diâmetro do enxerto ser menor que o diâmetro da artéria subclávia. Isto justifica a menor porcentagem de fluxo desviado para estes casos.

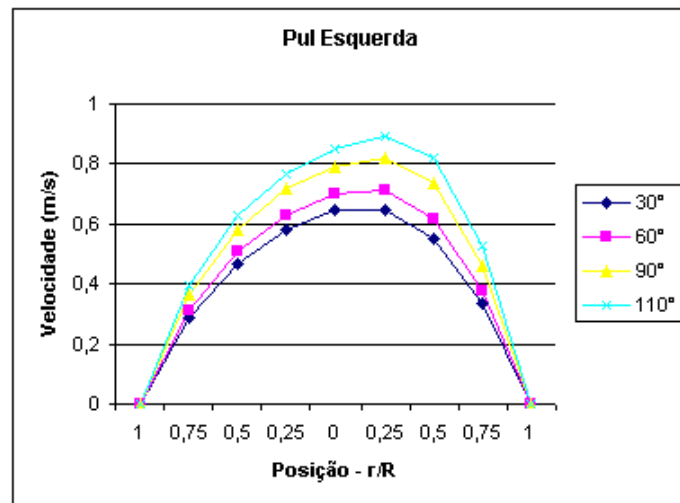
Tabela 5.12 Porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e distribuído pelas artérias pulmonares – (a)30°, 45°, 60° ; (b) 30°, 60°, 90°, 110°

(a)					
Pacientes	Local Desviado	30°	45°	60°	
P1	Enxerto	79,33%	77,96%	78,43%	
	Pul Dir.	40,64%	34,88%	29,92%	
	Pul Eq.	38,68%	43,09%	48,51%	
P3	Enxerto	38,67%	38,45%	39,65%	
	Pul Dir.	21,30%	15,92%	11,77%	
	Pul Eq.	17,37%	22,52%	27,88%	
P4	Enxerto	76,32%	75,41%	76,15%	
	Pul Dir.	36,65%	33,27%	31,02%	
	Pul Eq.	39,66%	42,14%	45,13%	
P5	Enxerto	48,85%	47,17%	47,65%	
	Pul Dir.	19,42%	13,08%	7,12%	
	Pul Eq.	29,43%	34,09%	40,53%	
P6	Enxerto	27,71%	27,82%	28,68%	
	Pul Dir.	20,24%	15,04%	9,93%	
	Pul Eq.	7,47%	12,79%	18,75%	
(b)					
Pacientes	Local Desviado	30°	60°	90°	110°
P2	Enxerto	44,53%	43,40%	45,53%	48,43%
	Pul Dir.	25,21%	22,07%	20,50%	20,57%
	Pul Eq.	19,31%	21,32%	25,03%	27,85%
P7	Enxerto	22,80%	24,15%	27,45%	30,70%
	Pul Dir.	17,91%	13,06%	8,34%	4,49%
	Pul Eq.	4,90%	11,09%	19,11%	26,21%
P8	Enxerto	71,23%	69,37%	72,89%	77,16%
	Pul Dir.	57,81%	38,59%	19,75%	6,16%
	Pul Eq.	13,42%	30,79%	53,14%	71,00%
P9	Enxerto	46,24%	45,61%	49,54%	54,43%
	Pul Dir.	29,61%	23,80%	19,92%	18,45%
	Pul Eq.	16,64%	21,81%	29,62%	35,98%
P10	Enxerto	66,22%	59,41%	60,30%	66,34%
	Pul Dir.	63,36%	49,44%	29,40%	18,16%
	Pul Eq.	2,86%	9,97%	30,90%	48,19%

Para verificar a influência do ângulo sob a quantidade de fluxo direcionada para cada um dos pulmões, analisaremos os perfis de velocidade nas saídas das artérias pulmonares do paciente P2 na figura 5.16. Nas simulações com ângulo da anastomose proximal de 60° pode-se verificar que os perfis de ambas as artérias são praticamente iguais, resultando num fluxo de sangue praticamente igual para cada um dos pulmões. A anastomose com ângulo de 30° , apresenta o perfil com velocidade mais alta na artéria pulmonar direita (figura 5.16-a) e mais baixa na artéria pulmonar esquerda (figura 5.16-b), enquanto que nos procedimentos com ângulo de 110° ocorre o contrário.



(a)



(b)

Figura 5.16 Perfil de velocidade axial (m/s) nas saídas das artérias pulmonares (a) direita, (b) esquerda

A tabela 5.13 apresenta os resultados numéricos de porcentagem de fluxo de sangue desviado pelo enxerto implantado durante o procedimento cirúrgico comparado a outras duas opções de diâmetro. Como de esperado, verifica-se que quanto maior o diâmetro do enxerto, maior é o fluxo de sangue desviado para os pulmões.

Tabela 5.13 Porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto e distribuído para as artérias

Pacientes	Local Desviado	3 mm	4 mm	5 mm
P1	Enxerto	65,06%	73,81%	79,33%
	Pul Dir.	33,17%	37,66%	40,64%
	Pul Eq.	31,89%	36,15%	38,68%
P2	Enxerto	36,97%	43,40%	47,96%
	Pul Dir.	18,80%	22,07%	24,39%
	Pul Eq.	18,17%	21,32%	23,57%
P4	Enxerto	62,35%	70,69%	76,32%
	Pul Dir.	28,24%	33,21%	36,65%
	Pul Eq.	34,11%	37,48%	39,66%
P8	Enxerto	50,74%	62,11%	69,37%
	Pul Dir.	28,14%	34,63%	38,59%
	Pul Eq.	22,60%	27,48%	30,79%
Pacientes	Local Desviado	4 mm	5 mm	6 mm
P3	Enxerto	28,61%	38,67%	42,70%
	Pul Dir.	15,04%	21,30%	23,05%
	Pul Eq.	13,56%	17,37%	19,65%
P5	Enxerto	35,18%	42,26%	47,41%
	Pul Dir.	5,80%	9,86%	15,18%
	Pul Eq.	29,37%	32,40%	32,23%
P6	Enxerto	27,71%	38,34%	44,66%
	Pul Dir.	20,24%	26,09%	30,42%
	Pul Eq.	7,47%	12,25%	14,24%
P7	Enxerto	19,37%	24,15%	29,45%
	Pul Dir.	11,07%	13,06%	16,29%
	Pul Eq.	8,30%	11,09%	13,16%
P9	Enxerto	26,60%	45,61%	49,93%
	Pul Dir.	20,97%	23,80%	26,10%
	Pul Eq.	5,62%	21,81%	23,83%
P10	Enxerto	50,84%	60,89%	66,34%
	Pul Dir.	10,95%	14,71%	18,16%
	Pul Eq.	39,90%	46,19%	48,19%

5.6.3. Análise local dos campos de velocidade e pressão

Com a finalidade de auxiliar na interpretação dos resultados, alguns comentários sobre escoamentos em dutos circulares serão feitos. A figura 5.17 ilustra o escoamento laminar na região de entrada de um duto circular. O escoamento tem velocidade uniforme na entrada do tubo (a exemplo do proposto nas simulações). Uma camada limite desenvolve-se ao longo das paredes do tubo. A superfície sólida (exemplo: artéria) exerce uma força de cisalhamento retardante sobre o escoamento; assim, a velocidade do fluido nas vizinhanças da superfície é reduzida. Nas seções sucessivas ao longo do tubo (ou artéria subclávia), nesta região de entrada, o efeito da superfície sólida é sentido cada vez mais forte, dentro do escoamento.

No escoamento incompressível, a conservação de massa exige que a velocidade na linha de centro do tubo aumente com a distância em relação à entrada. A pressão, responsável pela aceleração na linha de centro do tubo, deve continuar diminuindo na direção do escoamento. Para satisfazer a conservação da massa, no escoamento incompressível, a velocidade média em qualquer seção reta deve ser constante.

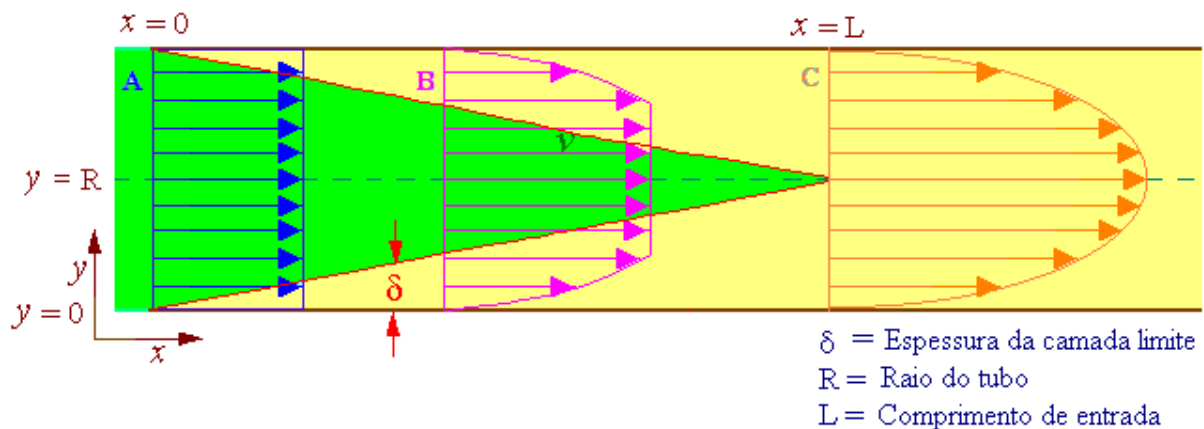


Figura 5.17 Escoamento na região de entrada de um duto circular reto

Suficientemente longe da entrada do tubo, a camada limite em desenvolvimento na parede do tubo atinge a sua linha de centro e o escoamento torna-se inteiramente viscoso. O alargamento da camada limite laminar produzirá um decréscimo do gradiente de velocidade e portanto um decréscimo na tensão de cisalhamento na parede a jusante da entrada do tubo. A forma do perfil de velocidade muda ligeiramente, depois que o núcleo não viscoso desaparece. Quando a forma do perfil de velocidade não muda mais com o aumento de distância, x , o balanço entre pressão e tensão de cisalhamento é obtido, e o escoamento está completamente

desenvolvido. Isto significa que a variação de pressão ao longo do tubo é constante (a pressão decresce linearmente com a distância).

A distância a jusante, em relação à entrada, até o ponto em que o escoamento completamente desenvolvido começa é chamada comprimento de entrada. Segundo Pantou, 1984, o comprimento de entrada é usualmente 50 a 100 diâmetros do tubo. Conforme Fox e McDonald, 1998, pode ser tão grande quanto 138 vezes o diâmetro do tubo.

A figura 5.18 apresenta os perfis de velocidade ao longo das artérias subclávia e pulmonar e do enxerto tubular. Nota-se que o perfil na artéria subclávia tende a ficar parabólico, porém não está totalmente desenvolvido. Alguns fatores contribuem para o não desenvolvimento completo do escoamento na artéria subclávia :

1. A inclusão de um enxerto tubular causa uma “perturbação” no escoamento da artéria subclávia. Se este enxerto tiver diâmetro maior que o da artéria subclávia, o que na maioria dos procedimentos acontece, esta “perturbação” será maior ainda.
2. O diâmetro de uma artéria subclávia não é constante. A medida que chega ao braço, seu diâmetro tende a diminuir. A fim de mostrar esta característica, o modelo apresentado tem o diâmetro na saída 20% menor que na entrada. A variação da seção ocorre a jusante da interposição do enxerto.



Figura 5.18 Perfis de velocidade ao longo do modelo geométrico

A influência da variação do diâmetro da artéria subclávia pode ser percebida através do coeficiente de pressão em procedimentos com ângulo de anastomose de 30° , ilustrado na figura 5.19. Nota-se que para o caso onde a seção da artéria subclávia é constante a variação de pressão na mesma (após a anastomose) está próxima de ser linear, ao contrário do caso com seção variável. O comportamento “quase” linear justifica o realismo da condição de contorno de tração

livre na seção de saída da artéria subclávia. A não linearidade completa pode ser justificada pela “perturbação” ao escoamento da artéria subclávia causada pela interposição de um enxerto tubular desviando parte de seu fluxo. Em ambos casos pode ser verificada uma queda de pressão bem rápida na região da anastomose. Após esta região há uma recuperação da pressão, criando-se assim um gradiente de pressão adverso, que é uma condição necessária para que ocorra descolamento.

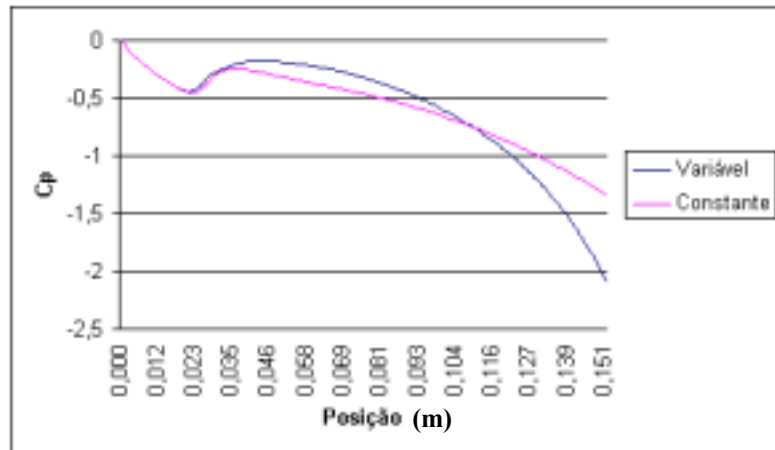


Figura 5.19 Coeficiente de pressão na artéria subclávia para anastomoses de 30°

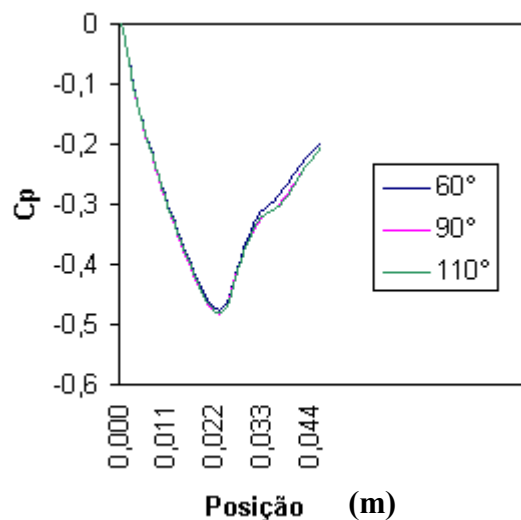


Figura 5.20 Coeficiente de pressão na artéria subclávia em função do ângulo da anastomose

Pode-se verificar na figura 5.20 que a queda de pressão é praticamente a mesma, para diferentes ângulos da anastomose proximal, e está localizado no mesmo ponto da artéria subclávia.. Na figura 5.21 é possível notar a região de recirculação próxima a parede da artéria subclávia junto a anastomose. Isto ocorre devido ao gradiente adverso de pressão verificado na

Figura 5.20. Este gradiente adverso também pode ser notado na figura 5.22, que mostra o coeficiente de pressão ao longo da artéria subclávia para diferentes diâmetros de enxerto.

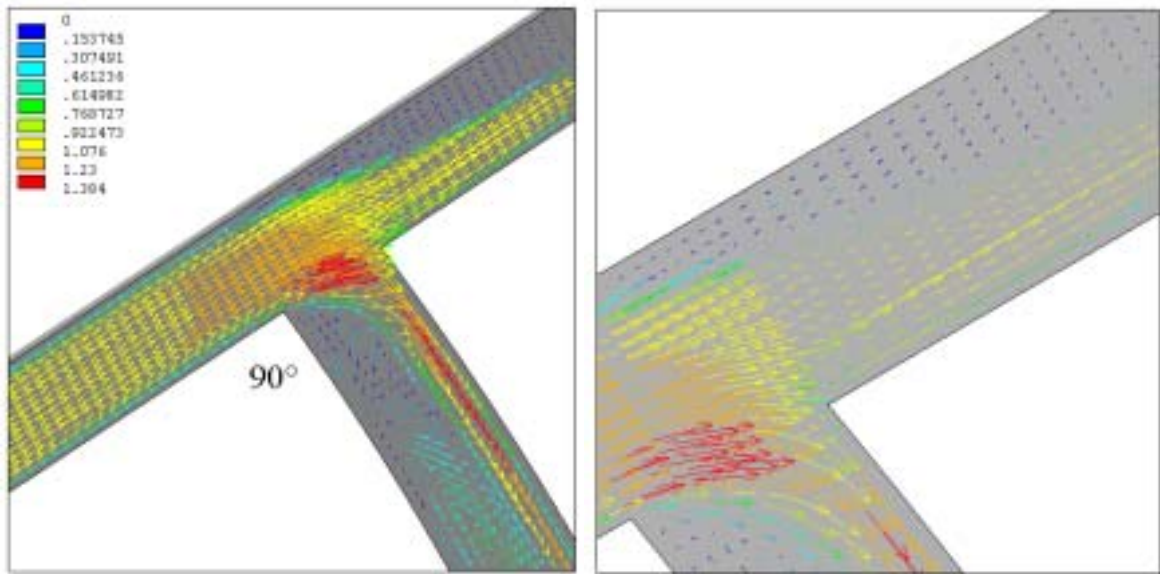


Figura 5.21 Vetores de velocidade (m/s)– anastomose de 90°

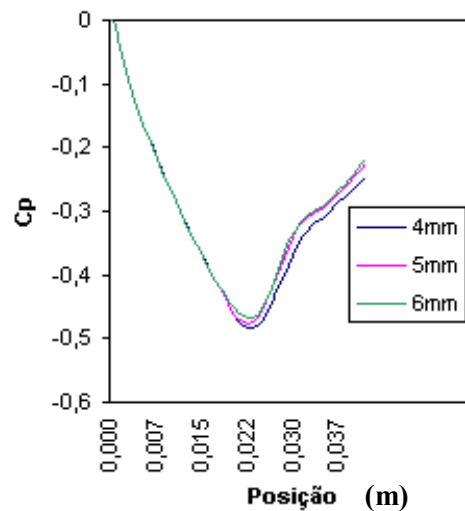


Figura 5.22 Coeficiente de pressão na artéria subclávia em função do diâmetro do enxerto

Ao compararmos as figuras 5.20 e 5.22, pode-se notar que o diâmetro do enxerto tem maior influência no escoamento da artéria subclávia comparado ao ângulo da anastomose. Esta constatação pode ser confirmada através dos gráficos de perfis de velocidade longitudinal na artéria subclávia das figuras 5.23 e 5.24. Estes gráficos permitem a identificação precisa de ocorrência de recirculação nos escoamentos simulados. Há recirculação quando uma curva intercepta a linha horizontal que passa pelo ponto zero dos eixos das ordenadas. O tamanho da zona de recirculação pode ser calculado pela distância entre dois pontos que interceptam o nível

zero. Na figura 5.23 nota-se pouca influência do ângulo da anastomose proximal no tamanho da zona de recirculação, enquanto que na figura 5.24 a influência do diâmetro é bem mais importante. Quanto maior o diâmetro do enxerto, maior é o tamanho da zona de recirculação.

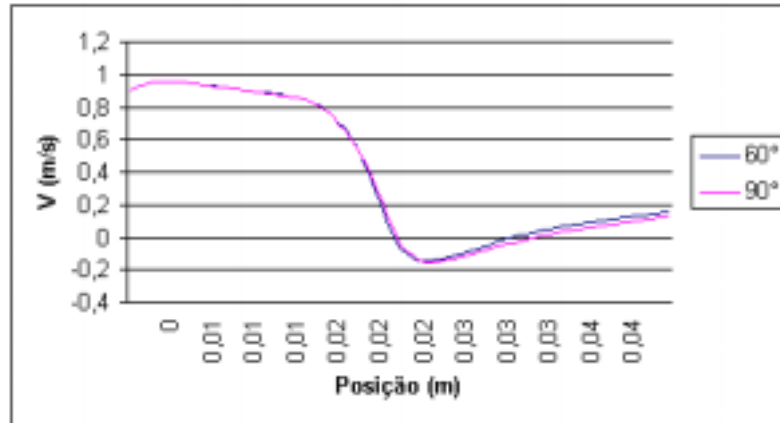


Figura 5.23 Perfil de velocidade longitudinal em função do ângulo

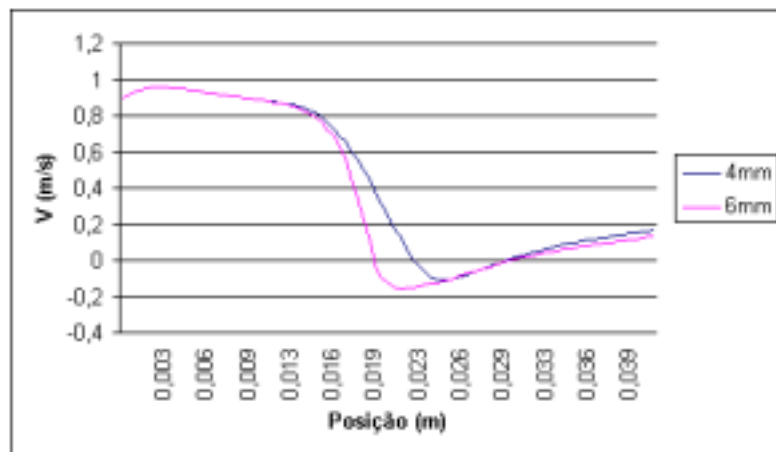
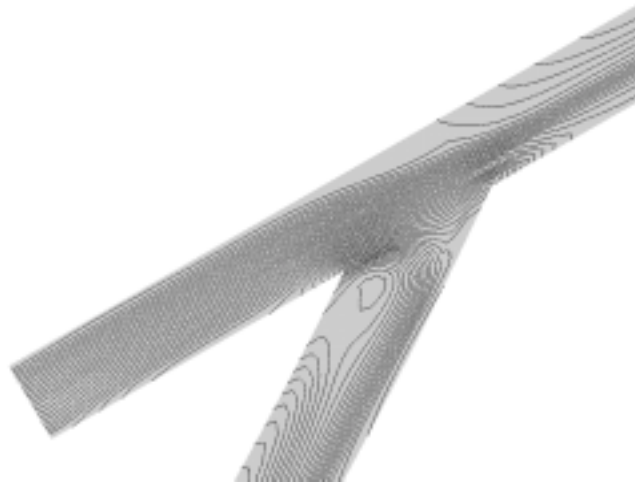


Figura 5.24 Perfil de velocidade longitudinal em função do diâmetro do enxerto

A figura 5.25 apresenta as linhas de corrente para as anastomose com ângulos de 30° e 90°. Pode-se notar, junto a anastomose proximal, a existência de uma região com baixa velocidade e recirculação. O ângulo da anastomose tem influência significativa no comportamento do escoamento nesta região.

As figuras 5.26 apresentam os contornos de velocidade na seção de simetria na região da anastomose proximal. A figura 5.26(a) apresenta o caso de um paciente onde a artéria subclávia tem diâmetro maior que o do enxerto, enquanto que a figura 5.26(b) ilustra o contrário. Pode-se verificar um aumento considerável na velocidade junto a anastomose. Este ganho de velocidade é mais visível para o caso onde o diâmetro do enxerto é maior que o da subclávia. O fluxo que é desviado para o enxerto (“Shunt”) tende a sofrer uma redução no início do enxerto seguido de

uma recuperação de velocidade. Esta redução é mais expressiva nos ângulos de 30° e quase insignificantes para os ângulos de 110° . A aceleração do fluido na região da anastomose proximal é provocada pela formação de uma *vena contracta* (Fox e McDonald, 1998)



(a)



(b)

Figura 5.25 Linhas de corrente – (a) 30° , (b) 90°

As figuras 5.27 mostram as iso-regiões de pressão para alguns casos simulados com ângulo de 30° , 45° e 60° , enquanto que a figura 5.28 apresenta as iso-regiões de pressão para um caso simulado com ângulos de 30° , 60° , 90° e 110° . Pode-se observar nestas figuras que os valores mais altos de pressão concentram-se próximos a anastomose proximal. O valor e a posição desses valores mais altos variam de acordo com ângulo de anastomose adotado. Em anastomoses com ângulos de 30° , o valor mais alto da pressão se concentra no enxerto implantado. A medida que o ângulo da anastomose aumenta, a região de maior pressão tende a se deslocar do “shunt” até a artéria subclávia. Em ângulos de 90° essa região se localiza junto a

anastomose e em ângulos de 110° a artéria subclávia concentra as maiores pressões. Nos casos onde o diâmetro da artéria subclávia é maior que o diâmetro do enxerto, os maiores valores de pressão são encontrados nas anastomoses com 30° . A figura 5.29 apresenta os valores de pressão na parede do enxerto para os ângulos de 30° e 110° .

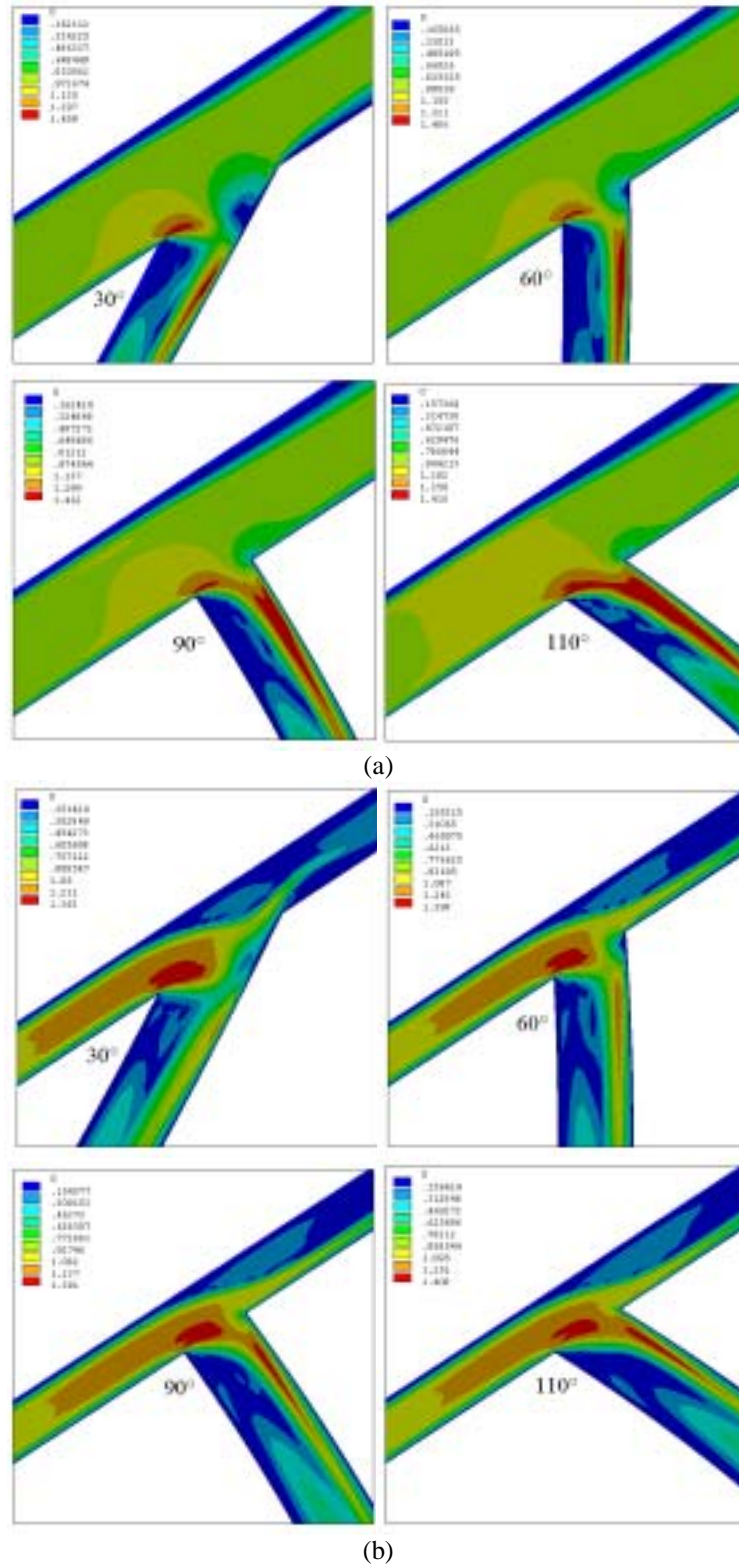
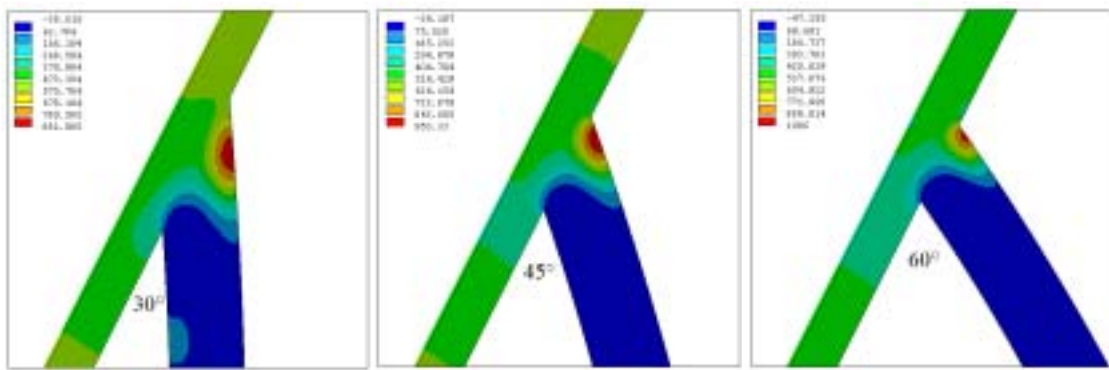
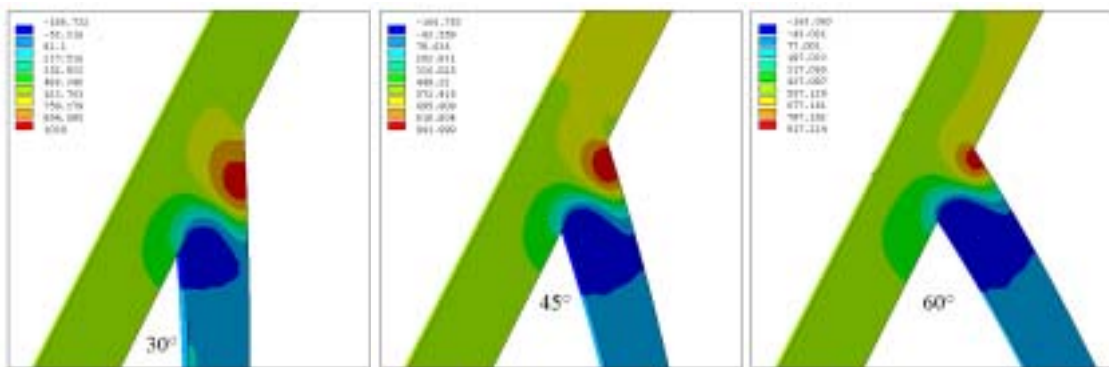


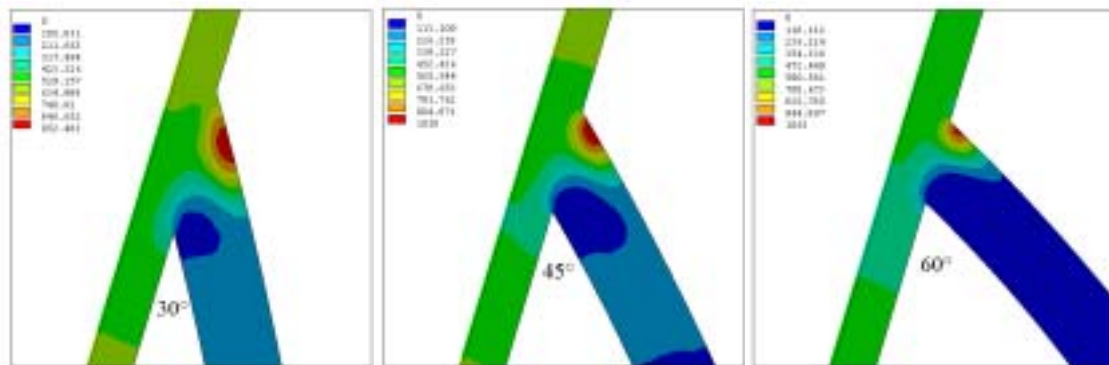
Figura 5.26 Contornos de velocidade (m/s) – (a) Paciente P7, (b) Paciente P8



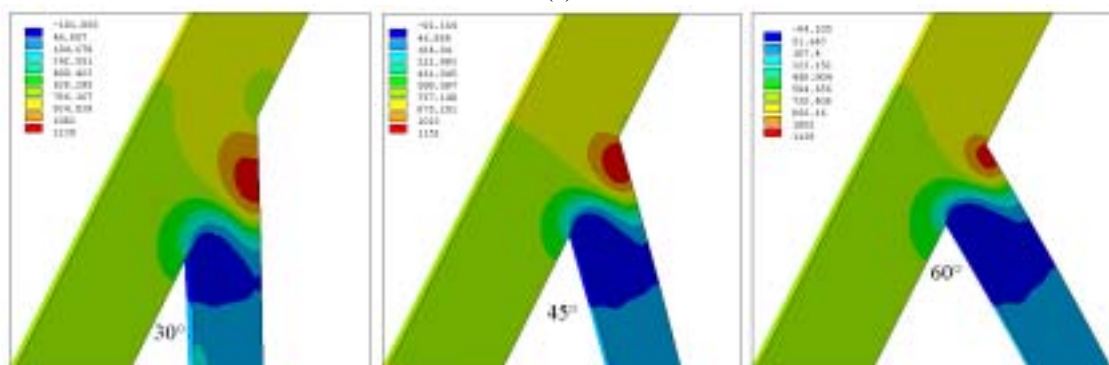
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.27 Iso-regiões de pressão (Pa) – Pacientes : (a) P1 , (b) P3, (c) P4, (d) P6

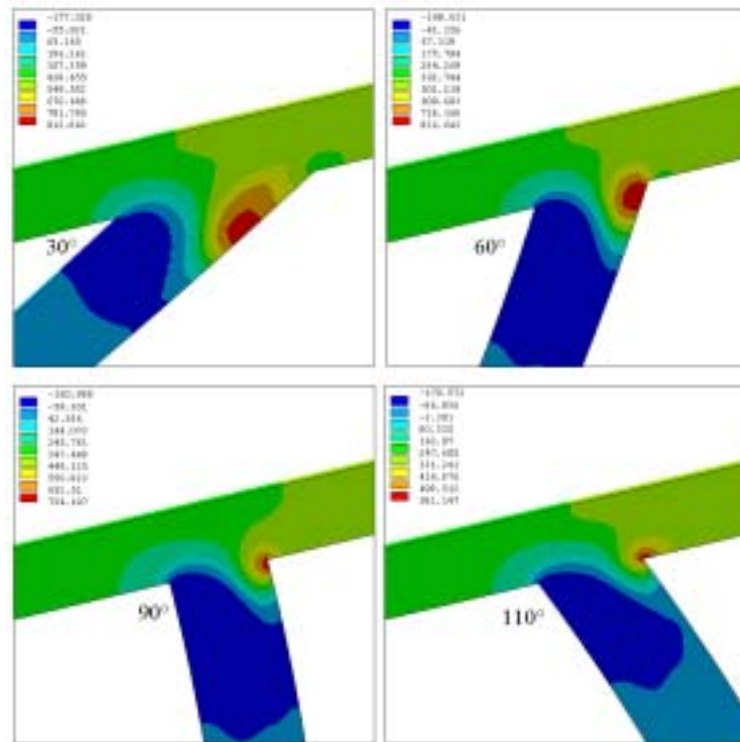


Figura 5.28 Iso-regiões de pressão (Pa)– Paciente P10

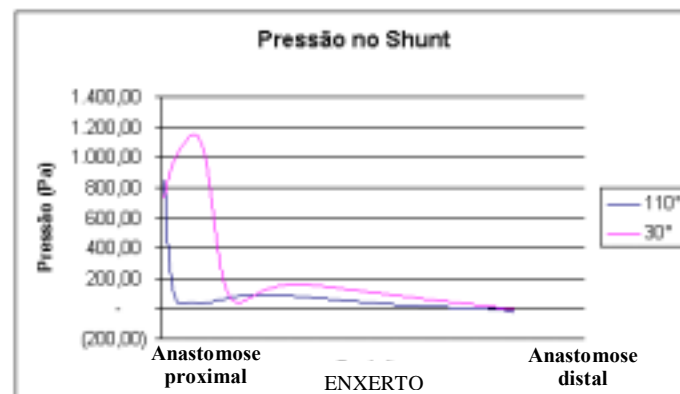


Figura 5.29 Pressão (Pa) na parede do enxerto em função do ângulo

O diâmetro do enxerto, como pode ser visto nas figuras 5.30 e 5.31, tem importância significativa no comportamento do escoamento no enxerto e artéria subclávia. Nota-se que a região de recirculação no enxerto aumenta a medida que o diâmetro do enxerto é maior.

A figura 5.32 apresenta contornos de pressão na região da anastomose proximal. Nota-se que a pressão é maior a medida que o diâmetro do enxerto diminui. A posição onde existe o máximo da pressão no enxerto, não muda em função do seu diâmetro.

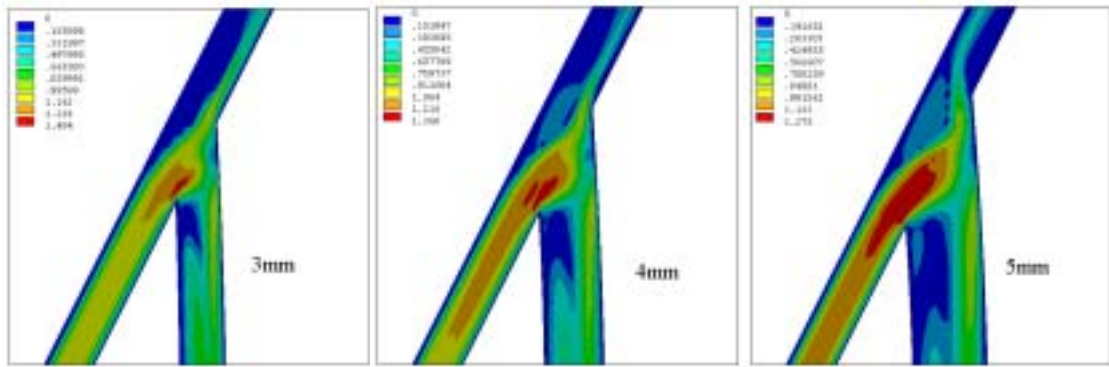


(a)

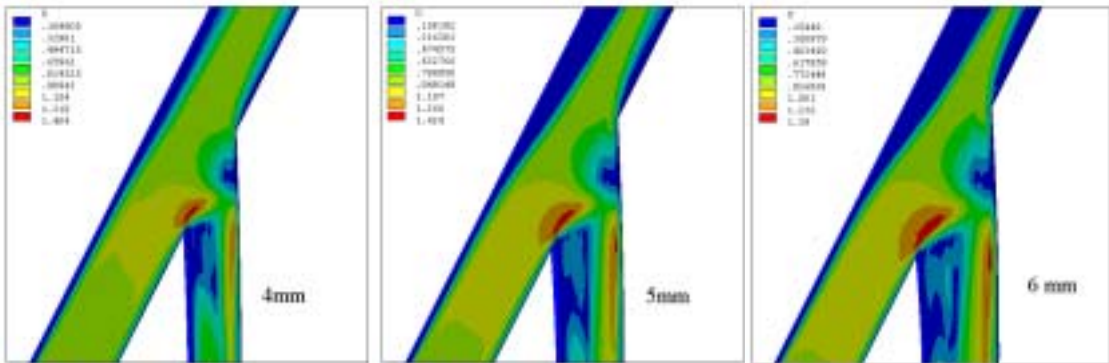


(b)

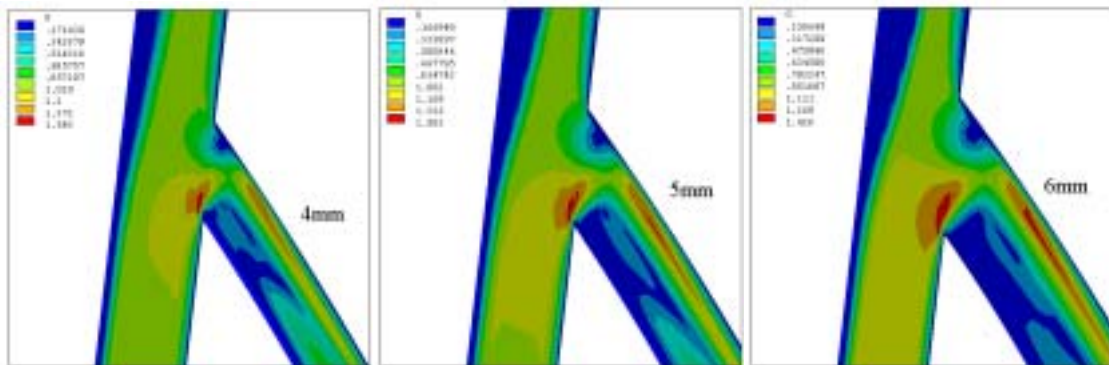
Figura 5.30 Linhas de corrente – (a) 4mm , (b) 6mm



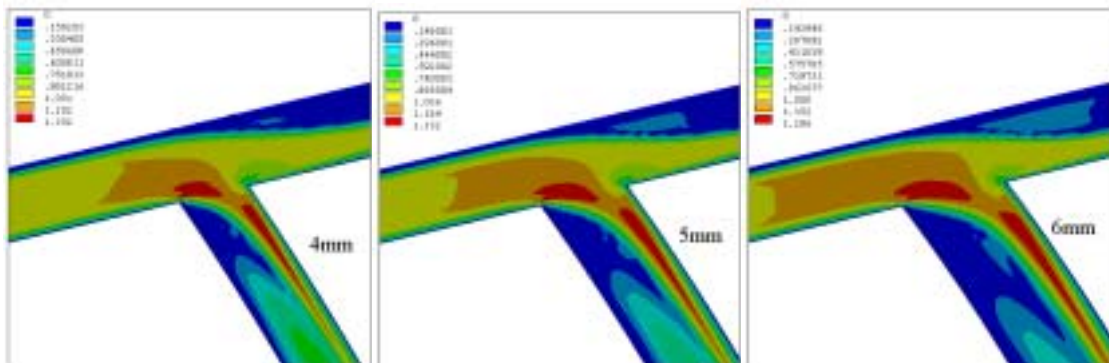
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.31 Contornos de velocidade Pacientes: (a)P1, (b) P3, (c) P5, (d) P10

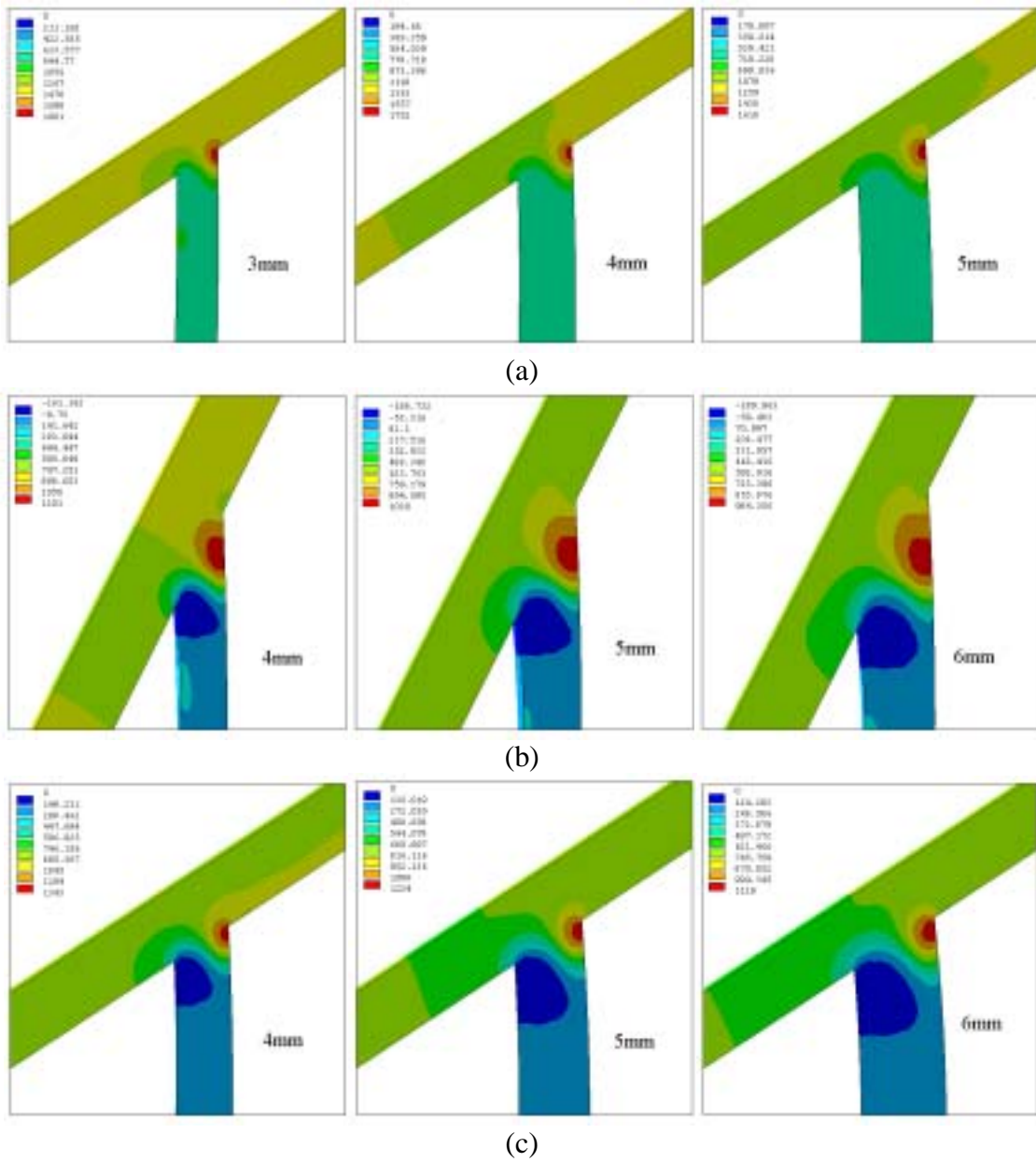


Figura 5.32 Iso-regiões de pressão (Pa) – Pacientes: (a) P2, (b) P3, (c) P9

5.7 SIMULAÇÃO SOB ESCOAMENTO PULSANTE

O escoamento sob regime pulsante foi utilizado no desenvolvimento do modelo geométrico deste trabalho (Seção 5.5). Este tipo de análise é importante no sentido de avaliar o comportamento do escoamento durante um pulso cardíaco (figura 5.33).

Na figura 5.34 é possível notar que o comportamento qualitativo na região onde a pressão é maior, é praticamente o mesmo, porém é possível verificar que os valores de pressão mudam significativamente ao longo do tempo. Na figura 5.35 verifica-se uma variação na região de recirculação junto a anastomose proximal durante o pulso cardíaco.

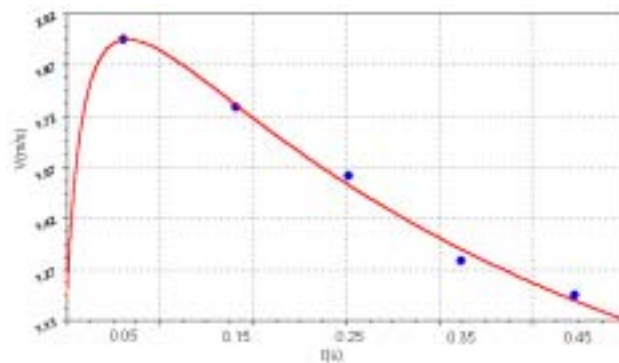


Figura 5.33 Velocidade (m/s) na entrada da artéria subclávia durante um pulso cardíaco

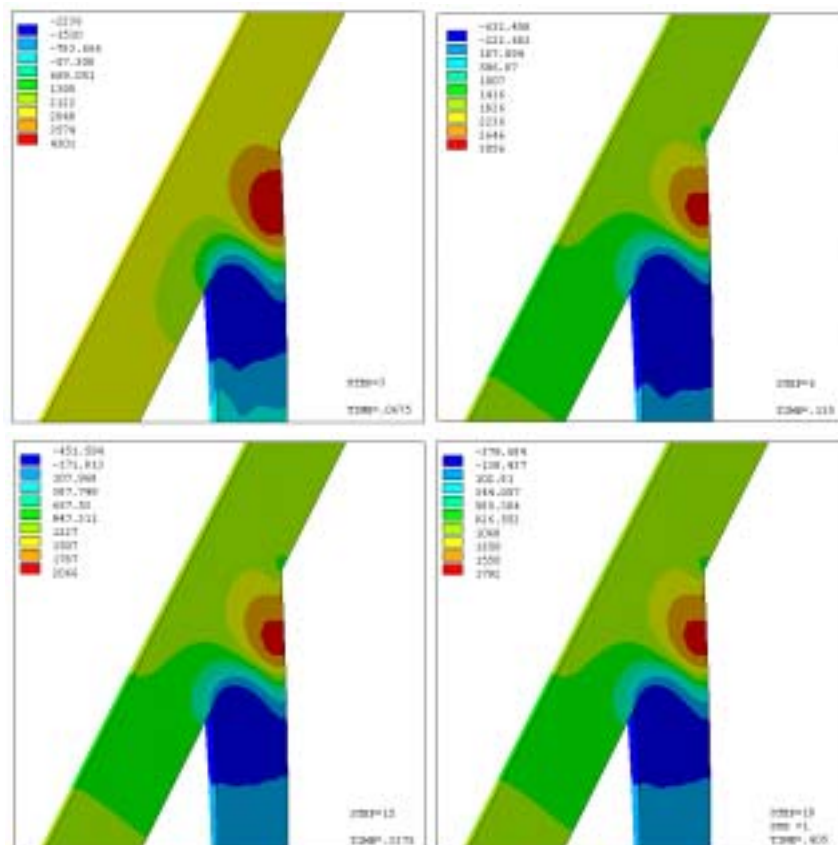


Figura 5.34 Iso-regiões de pressão (Pa)

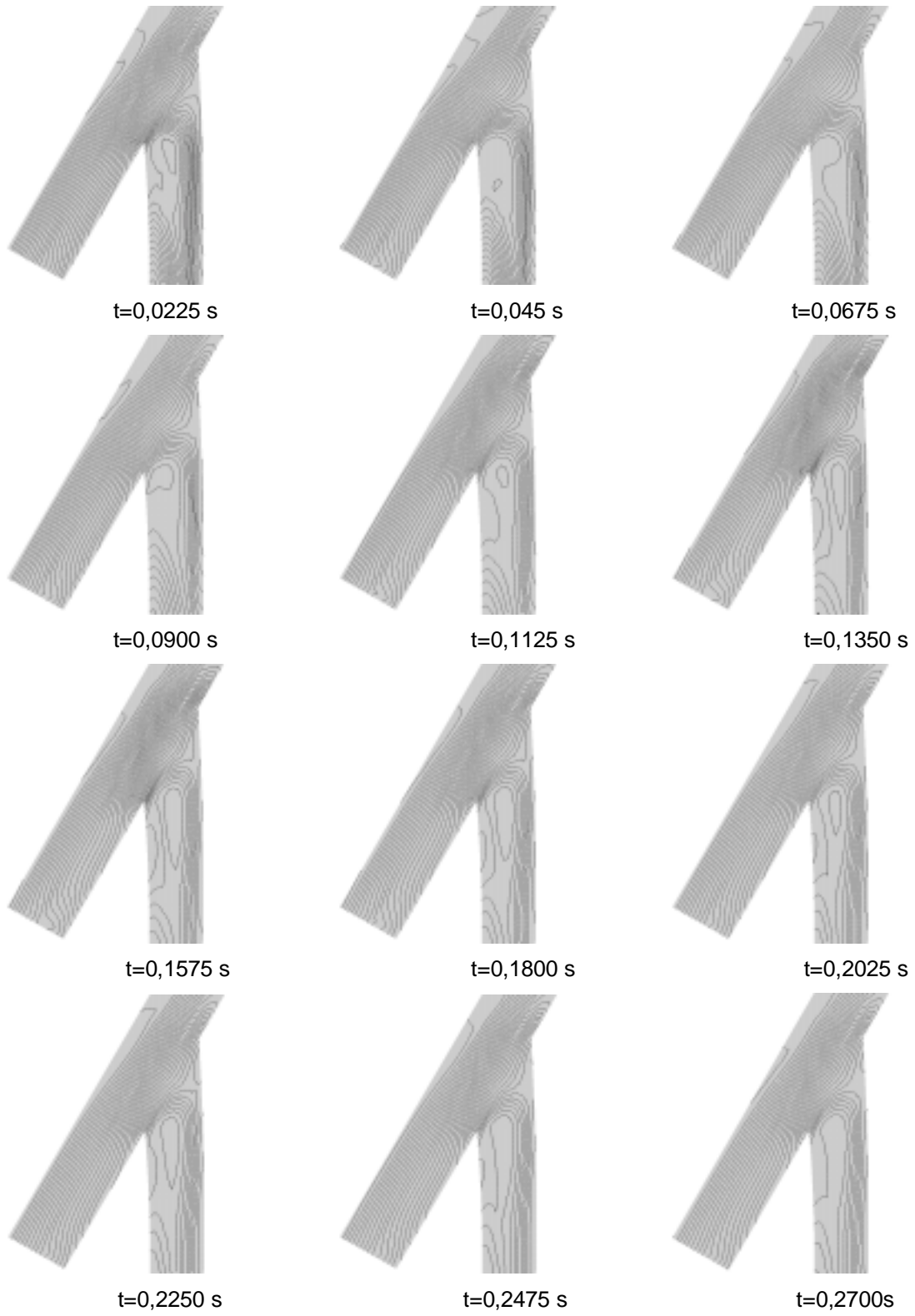


Figura 5.35 Linhas de corrente

Com a finalidade de verificarmos o comportamento do escoamento na artéria subclávia a jusante da anastomose e no enxerto próximo a anastomose proximal, duas seções transversais, conforme figura 5.36, foram feitas a fim de visualizarmos os vetores de velocidade nestas regiões. Nota-se na figura 5.37 que no início do pulso, não há recirculação na artéria subclávia. Esta surge a partir do momento que a velocidade na artéria subclávia diminui. Na figura 5.38, também verifica-se a existência de recirculações no enxerto junto a anastomose proximal.

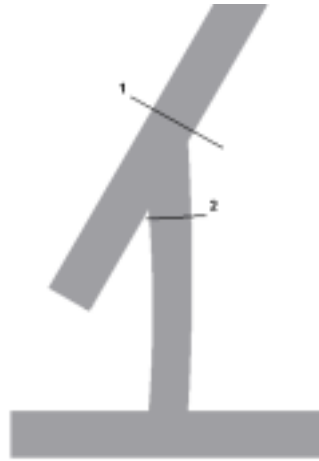


Figura 5.36 Localização dos planos de corte transversais

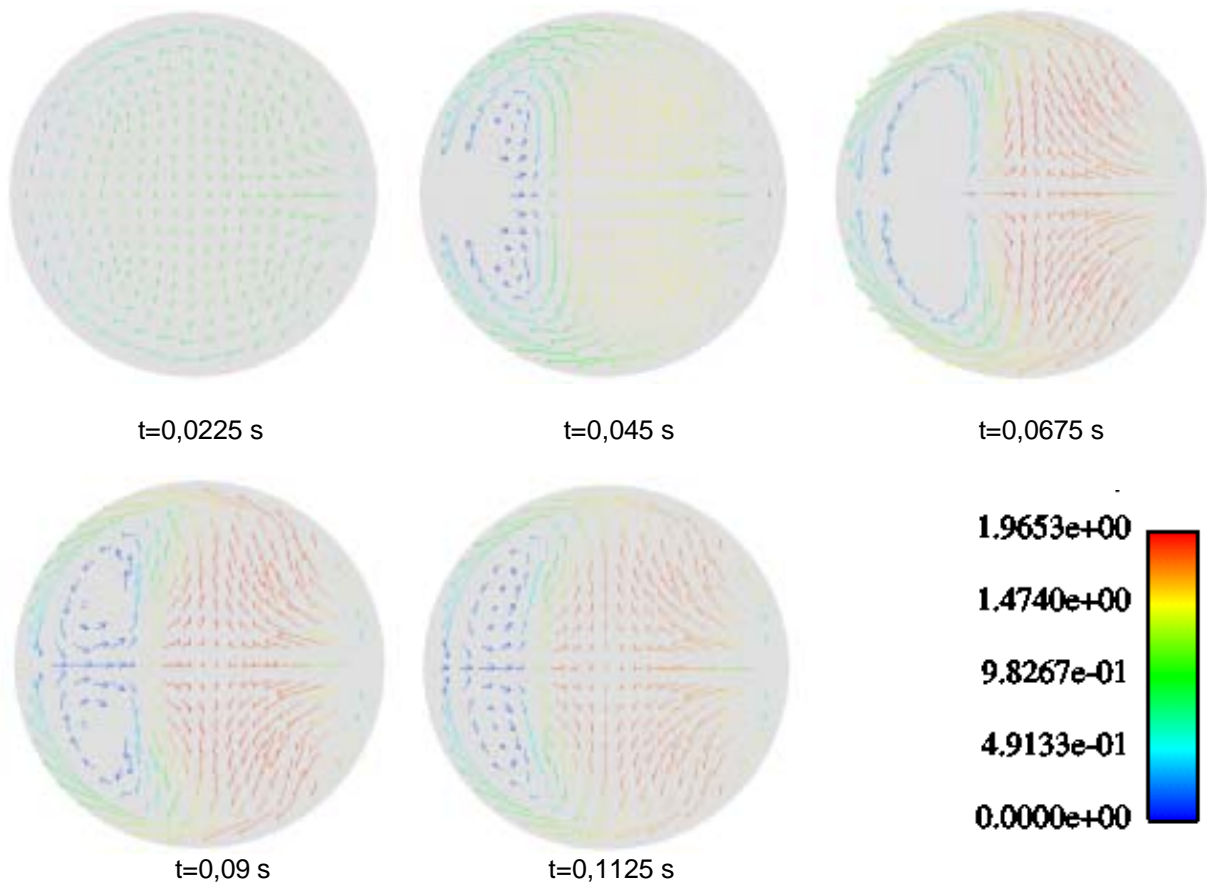


Figura 5.37 Vetores de velocidade (m/s) na seção 1

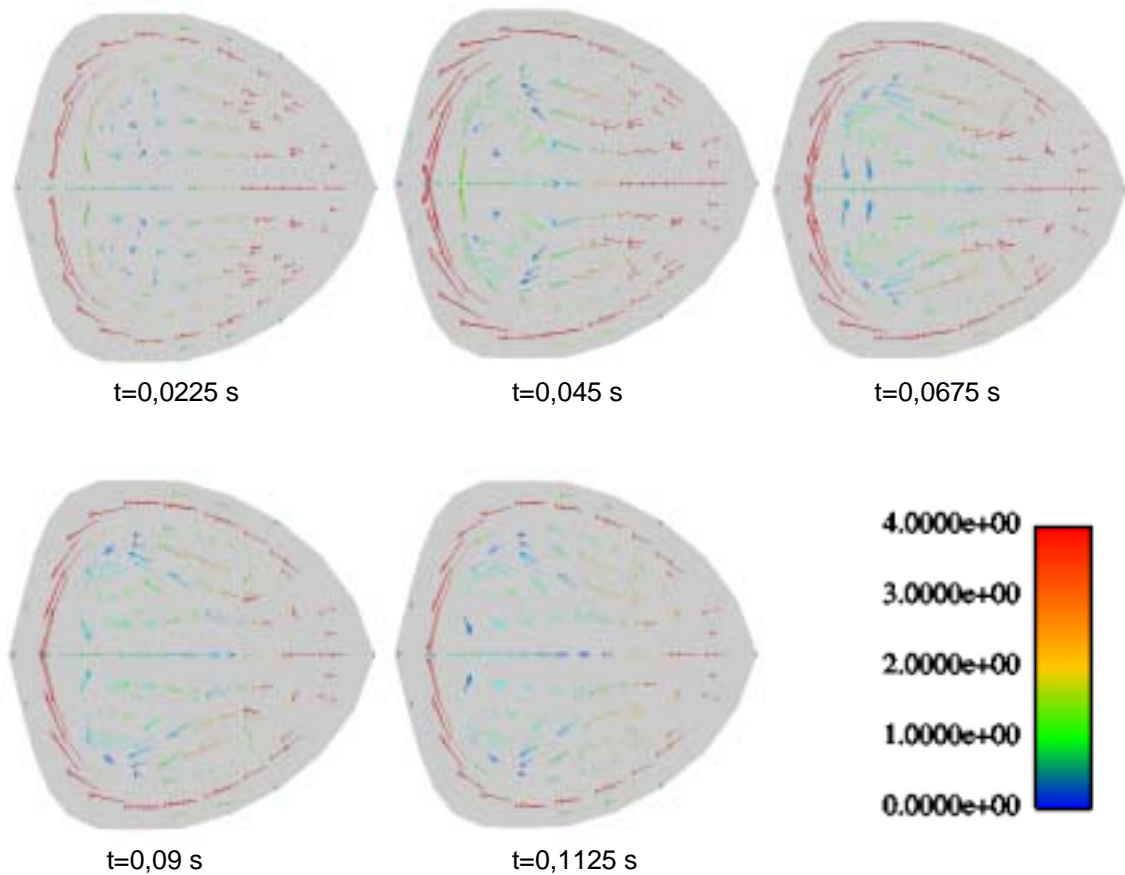


Figura 5.38 Vetores de velocidade (m/s) na seção 2

A figura 5.39 apresenta o perfil de velocidade axial na anastomose distal. Nota-se claramente que a velocidade nesta região está associada à velocidade imposta na artéria subclávia durante um pulso cardíaco. No pico cardíaco – $t=0,045\text{ s}$ (sístole), a velocidade axial na anastomose distal é mais alta. A figura 5.40 apresenta o perfil de velocidade longitudinal na artéria subclávia em instantes de tempo diferentes. Observa-se que o maior comprimento de descolamento ocorre justamente logo após o pico cardíaco.

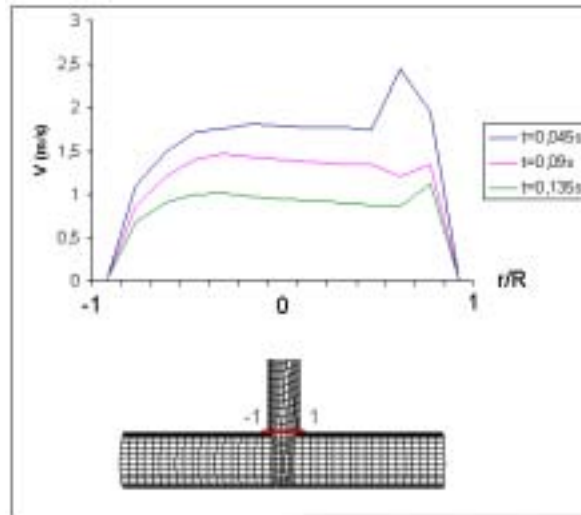


Figura 5.39 (a) Perfil de velocidade axial (m/s) na anastomose distal

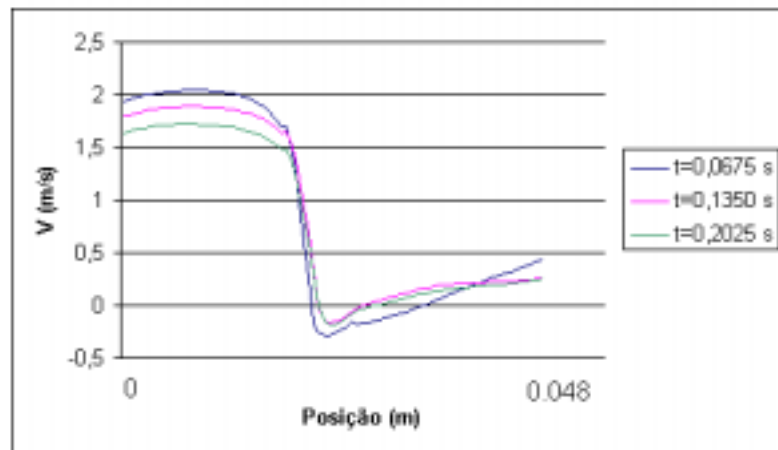


Figura 5.40 Perfil de velocidade longitudinal (m/s) em função do tempo

6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O Capítulo 1 deste trabalho, introduziu os conceitos aplicados na simulação computacional da hemodinâmica através de uma anastomose sistêmico-pulmonar. Iniciamos com uma breve explanação sobre o sistema cardiovascular humano, cardiopatias congênitas e anastomoses sistêmico-pulmonares, objetivando familiarizar, profissionais não ligados a área médica, ao foco central do estudo. Uma revisão bibliográfica sobre simulações do sistema cardiovascular foi realizada de modo a identificar o estado da arte da área. Ainda no capítulo introdutório, foi apresentado o método numérico utilizado – a saber, o Método de Elementos Finitos, bem como a estratégia utilizada para estabilizar a formulação clássica de Galerkin – o método Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG). O Capítulo 2 apresentou algumas características reológicas do sangue. As equações de conservação da dinâmicas dos fluidos e bem como as hipóteses constitutivas empregadas foram introduzidas no Capítulo 3, enquanto o Capítulo 4 foi dedicado à modelagem numérica de elementos finitos do problema abordado.

O Capítulo 5, dedicado à análise dos resultados obtidos, descreve aspectos computacionais do método SUPG, a amostragem dos pacientes, o desenvolvimento da modelagem geométrica a partir de exame de Ecocardiografia e a validação do comprimento de malha empregado. É do nosso conhecimento que apenas pesquisadores da Universidade Politécnica de Milão–Itália (ver Migliavacca et al. 2000) realizaram simulações numéricas de escoamento de sangue em anastomoses sistêmicos pulmonares.

Posteriormente, partiu-se para o objetivo principal deste estudo, a avaliação da influência dos determinantes geométricos envolvidos no procedimento cirúrgico da anastomose de Blalock-Taussig, visando a determinação de correlações para o fator de atrito e a porcentagem de fluxo sanguíneo desviado pelo enxerto. Quando da inclusão de um enxerto tubular na artéria subclávia cujo diâmetro é menor que o da artéria, obteve-se valores para $f Re$ próximos a 64, o que já não ocorre na anastomose onde o diâmetro do enxerto é maior que o da subclávia. Neste último, os valores do fator de atrito afastam-se significativamente aos preditos pela equação (5.2). A inclusão do enxerto de grande diâmetro, causa uma severa perturbação no padrão desenvolvido do escoamento na artéria subclávia, impedindo assim sua concordância com o valor predito pela teoria de Hagen- Poiseuille.

A partir de simulações numéricas, foi possível obter correlações entre o fluxo desviado para o enxerto versus o diâmetro do enxerto na faixa de 4 mm a 6 mm . Podemos observar que a

porcentagem de fluxo desviada é maior a medida que o diâmetro do enxerto for maior que o da subclávia. O presente trabalho verificou a porcentagem de fluxo desviado pelo enxerto prevista por Migliavacca et al. (1999), a qual situa-se entre 70 a 80% para os recém-nascidos.

Observou-se ainda que o ângulo da anastomose proximal tem sensível influência na quantidade de fluxo desviado pelo enxerto. Esta influência começa diminuta para os ângulos entre 30° e 60°, situações as quais correspondem a aproximadamente 80% da amostragem levantada. Anastomoses proximais com ângulo de 110° apresentaram uma maior porcentagem de fluxo desviado. Este ângulo, entretanto, tem o inconveniente de tornar excessivo o fluxo sanguíneo que alcança o pulmão esquerdo, em detrimento do fluxo fornecido ao pulmão direito. O ângulo ótimo para a anastomose proximal seria aquele para o qual o fluxo fornecido aos dois pulmões fosse parelho. As simulações realizadas indicam que este valor ótimo situa-se, na maior parte da amostragem, entre 30° e 60° .

Já para a distribuição de pressão no enxerto, os resultados sinalizam que a localização de seus picos de pressão variam de acordo o ângulo de anastomose adotado, com o ângulo de 30° apresentando o mais alto pico de pressão no enxerto implantado. A medida que o ângulo da anastomose aumenta, a região de maior pressão tende a deslocar-se do enxerto para a artéria subclávia.

Como se previa, o diâmetro do enxerto é o regulador principal da porcentagem de fluxo desviado. Quanto maior o for, maior será a porcentagem de desvio. Já a distribuição de pressão no enxerto, não é alterada qualitativamente com as alterações do seu diâmetro, ficando suas variações de ordem apenas quantitativas.

Finalizando esta conclusão, destacamos que tanto a modelagem mecânica empregada bem com a metodologia numérica utilizada, mostraram-se adequadas e precisas na análise da influência dos determinantes geométricos no escoamento de sangue através de uma anastomose sistêmico-pulmonar.

6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

- Uma análise experimental pode ser empregada para a determinação da cinemática e dinâmica do escoamento na referida anastomose, baseada na técnica de velocimetria via Laser Doppler (LDV) e velocimetria por processamento de imagens (PIV).
- A nível de sua simulação numérica , considerar as artérias como corpos elásticos, avaliando suas deformações ao longo do escoamento, gerando assim um problema típico de fluido-estrutura .

- Quanto à modelagem mecânica, explorar modelos constitutivos de líquidos não-newtonianos mais complexos que os modelos Newtonianos generalizados, cuja resposta mecânica apresente um maior realismo reológico.
- Podemos pensar ainda em investigar numericamente, com o mesmo ferramental desenvolvido no presente trabalho, outras regiões suscetíveis a patologias cardiovasculares e/ou procedimentos cirúrgicos no sistema cardiovascular humano. Estes futuros trabalhos objetivariam o desenvolvimento e otimização de novas próteses (válvulas, “stents”, entre outros) e uma melhor compreensão da hemodinâmica do nosso sistema cardiovascular.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Asakura, T., Karino, T., 1990, “Flow patterns and spatial distribution of atherosclerotic lesions in human coronary arteries”, *Circulation Research*, Vol.66, pp. 1045-1066.
- Babuška I., 1973, “The finite element method with lagrangian multipliers”, *Numer. Math.*, 20, 179-192
- Bayliss, L.E., 1973, “The rheology of Blood”, *Handbook of physiology – Circulation I*
- Bernard, J. e Levy, J. P., 1976, *Manual de hematologia*, Editora Santos
- Bingham, E. C., e White, G.F.,1911, “Viscosity and fluidity of emulsions,crystalline liquids and colloidal solutions”. *J. Am. Chem. Soc.* 33: 1257-1275.
- Billington, E. W., e Tate, A., 1981 “The Physics of deformation and flow”, McGraw-Hill.
- Bird, R. B., 1987, “Dynamics of polymeric liquids”, : John Wiley.
- Blalock, A. e Taussig, H., 1945, “Surgical treatment of malformations of the heart in which there is pulmonary stenosis or pulmonary atresia”. *JAMA* , Vol. 128, 189-202.
- Brasil Junior, C. P., Rosa, O.L.S., Severo, C.A., 1998, “Simulação por elementos finitos de escoamento de sangue”, V Congresso de Engenharia Mecânica Norte e Nordeste.
- Brezzi F., 1974, “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers”, *RAIRO Ser. Rouge* 8, 129-151.
- Brooks, A.N., Hughes, T.J.R. , 1980, “Streamline upwind/Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows”, em: *Third International conference on Finite Element methods in fluid flows*, Banff, Canada.
- Brooks, A.N., Hughes, T.J.R. , 1982 “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 32, pp. 199-259.
- Ciarlet, P.G., 1978, “The finite element method for elliptic problems”, North-Holland, Amsterdam.
- Clough, R. W., 1960, “The finite element in plane stress analysis”, *Anais da 2ª ASCE – Conf. on Eletronic Computation*”.
- Cole, J.S., Gillan, M.A., Raghunathan, S.R., 1998, “Numerical Simulations of time-dependent, non-newtonian blood flow through typical human arterial bypass grafts”, 6º Irish Chemical engineering Research Symposium Cork, Republic of Ireland.

- Cole, J.S., Gillan, M.A., Raghunathan, S.R., 1998, "A CFD study of steady and pulsatile flows within an arterial bifurcation", 36^o Aerospace Sciences Meeting & Exhibit , American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Crouzeix, M. e Raviart, P.A., 1973, "Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, RAIRO 33-76
- Einstein, A., 1911, Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen , Ann. Phys, 19:289-306.
- Fox, R.W. e McDonald, A.T., 1998, "Introdução à Mecânica dos fluidos" , LTC.
- Franca, L.P. e Frey, S., 1992, "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 99, pp. 209-233.
- Franca, L.P., Frey, S. e Hughes, T.J.R., 1992, "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 95, pp. 253-276.
- Franca, L.P., Frey, S. e Madureira, A., 1994, "Two- and three-dimensional simulations of the incompressible Navier-Stokes equations based on stabilized methods", Anais da First European Computational Fluid Dynamics Conference, pp.121-128, Bruxelas, Bélgica .
- Galeão, A.C. e Dutra do Carmo, E.G., 1988, "A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 68, pp. 83-95.
- Gresho, P.M. e Chan, S.T., 1990, "On theory of semi-implicit projection for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 2: implementation", Int. J. Numer. Methods. Fluids, Vol. 11, pp. 621-659.
- Gurtin, M. E., 1981, "An Introduction to continuum mechanics", Academic Press.
- Hansbo, P., Szepessy, A., 1990, "A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 84, pp. 175-192.
- Hatschek, E., 1911, Die Viskosität der Dispersoide, Z. Chem Ind. Kolloide, 8 : 943-950.
- Hess, W. R. , 1920, Beitrag zur Theorie der Viskosität heterogener Systeme.
- Hughes, T.J.R., Liu, W., Brooks, A.N., 1979, "Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation", Journal Computational Physics, Vol. 30, 1-60.
- Hughes, T.J.R., Brooks, A.N., 1979, "A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion", em: Hughes, T.J.R, Finite Element methods for convection dominated flows, ASME, NY, 19-35.
- Hughes, T.J.R., Brooks, A.N., 1982, "A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline upwind procedure", em :

- Gallagher, R.H., Carey, G.F., Oden, J.T., Zienkiewicz, O.C., Finite element in fluids IV, Wiley, Chichester, 46-65.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 59, pp. 85-99.
- Hughes, T.J.R., Liu, W., Brooks, A.N., 1979, "Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation", Journal Computational Physics, Vol. 30, 1-60.
- Hughes, T.J.R., Mallet, M., 1986, "A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems, Computational Methods Applied Mechanical Engineering, 58, 329-336
- Hughes, T.J.R., Mallet, M., Franca, L. P., 1986, "Entropy-stable finite element methods for compressible fluids: application to high order Mach number flow with shocks", Finite element methods fof nonlinear problems, 761-773
- Hughes, T.J.R. e Tezduyar , T.E., 1983, "Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations", Preprint CLaSSIC 83-04, Projeto Classic, NASA .
- Hughes, T.J.R, 2000, "The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall
- Jandl, J. H., 1996, "Blood: Textbook of hematology", Little, Brown and Company
- Jeffery, G.B., 1922, " The motion of ellipsoidal particles *immersed* in a viscous fluid".
- Johnson, C., 1982, "Finite element methods for convection-diffusion problems", Computing methods in Engineering and applied sciences V, 311-323.
- Johnson, C., Nävert, U., Pitkäranta, J., 1981, "An analysis of some finite element methods for advection-diffusion problems", em : Analytical and numerical approaches to asymptotic problems in analysis, North Holland, Amsterdam.
- Johnson, C., Nävert, U., Pitkäranta, J., 1984, "Finite element methods for linear hyperbolic problem", Computational methods appl. Mech. Eng. ,45, 285-312.
- Johnson, C., Saranen, J., 1986, " Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes Equations, Math. Comp., 47, 1-18
- Johnson, C., 1987, "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method", Cambridge University Press, Cambridge.
- Kays, W.M. e Crawford, M.E., 1980, "Convective heat and mass transfer", McGraw-Hill, New York.
- Landau, L. e Lifchitz, E., 1971, "Mécanique des fluides", Edições Mir, Moscou (1971).

- Leval, M. R., McKay, R., Jones, M., Stark, J., Macartney, F. J., 1981, "Modified Blalock-Taussig Shunt. Use of subclavian artery orifice as flow regulator in prosthetic systemic-pulmonary artery shunts". *Journal Thorac. Cardiovascular Surg.*, Vol. 81, 112-119.
- Malkus, D. S., e Hughes, T. J. R., 1978, "Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts, *Comput. Methods Applied Mech. Eng.*, 15, 63-81
- Mallet, M., 1985, "Finite element method for computational fluid dynamics", tese de Ph. D., Division of applied mechanics, Stanford University.
- Migliavacca F, Yates, R., Dubini G., Pennati G., Dubini, G., Fumero R., de Leval M.R., 1999, "Calculating blood flow from doppler measurements in the systemic-to-pulmonary artery shunt after the Norwood operation: A method based on computational fluid dynamics", *Ultrasound in Med & Biol*, Vol 26, 209-219.
- Migliavacca F, Dubini G., Pennati G., Pietrabissa R., Fumero R., Hsia T.Y., de Leval M.R., 2000, "Computational model of the fluid dynamics in systemic-to-pulmonary shunts", *Journal of Biomechanics*, Vol 33, 549-557.
- Nävert, U., 1982, "A finite element method for convection-diffusion problem", tese de Ph. D., Department of Computer Science, Chalmers University of Technology Göteborg - Sweden .
- Neches, W.H., Naifeh, J.G., Park, S.C., Lenox, C.C., Zuberbuhler, J.R., Siewers, R.D., Pontius, R.G., Bahnson, H.T., 1975, "Systemic-pulmonary artery anastomoses in infancy", *Journal Thorac. Cardiovascular Surgery*, Vol. 70, 921-927.
- Nesralla, I. A., 1994, *Cardiologia cirurgica : perspectivas para o ano 2000*, São Paulo: Fundo Editorial.
- Odim, J., Portzky, M., Zurakowski, D., 1995, "Sternotomy approach for the modified Blalock-Taussig Shunt" *Circulation – American Heart Association*, Vol.92, pp. 256-261.
- Panton, R. L., 1984, *Incompressible flow.*, : John Wiley,
- Patankar, S., V., e Spalding, D., B., 1972, "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", *International Journal of heat transfer and mass transfer*, Vol.15, pp.1787-1806.
- Patankar, S., V, 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", McGraw-Hill, New York.
- Pennati G., Fiore, G. B., Migliavacca F, Laganà, K., Fumero R., Dubini G., 2001, "In vitro steady flow analysis to systemic-to-pulmonary shunt haemodynamics", *Journal of Biomechanics*, Vol 34, 23-30.
- Perktold, K., Hofer, M., Rappitsch, G., Loew, M., Kuban, B.D., Friedman, M.H., 1998, "Validated computation of physiologic flow in a realistic coronary artery branch", *Journal of Biomechanics*, Vol.31, pp. 217-228.
- Pironneau, O., 1989, "Finite element methods for fluids", John Wiley.
- Prager, W., 1945, "Strain hardening under combined stresses", *Journal Appl. Phys.*, 16, 837-843.

- Reiner, M., 1945, "A mathematical theory of dilatancy", *American Journal Math.*, 67, 350-362.
- Rektorys, K., 1975, "Variational methods in mathematics, science and engineering", D Reidel Publishing Co.
- Sampaio, R., 1985, *Introdução à termomecânica dos meios contínuos : VI Escola de Matemática aplicada*, LNCC, RJ.
- Slattery, J. C., 1972, "Momentum, energy, and mass transfer in continua", McGraw-Hill.
- Slattery, J. C., 1999, "Advanced transport phenomena", Cambridge University
- Soyer, T., Lempinen, M., Cooper, P., Norton, L., Eiseman, A., 1972, "A new venous prosthesis". *Surg. Vol. 72*, 864-872.
- Taylor, C. A. , Hughes T.J.R. , Zarins, C.K., 1998, "Finite element modeling of blood flow in arteries", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Vol 158, 155-196.
- Tezduyar, T.E., Shih, R., Mittal, S. e Ray, S.E., 1990, "Incompressible flow using stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements", Preprint UMSI 90/165, University of Minnesota/Supercomputer Institute, Minneapolis.
- Thomas, L. H. ,1949, *Elliptic problems in linear difference equations over a Network*, Watson Sci. Comput. Lab. Report, Columbia University, New York.
- Thomé, G. L. ,1993, *Cirurgia de Blalock-Taussig modificada com prótese de politetrafluoretileno – Resultados imediatos e tardios*, Dissertação de mestrado – Fundação Universitária de Cardiologia – Porto Alegre.
- Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J., 1956, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *Aero Science*, 23 , 805-823.
- Wintrobe, Maxwell M.; 1998, *Hematologia Clínica Vol.2* , Editora Manole Ltda.
- Zhao S.Z., Xu, X.Y., Hughes, A.D., Thom, S.A., Stanton, A.V., Ariff, B., Long, Q., 2000, "Blood flow and vessel mechanics in a physiologically realistic model of a human carotid arterial bifurcation", *Journal of Biomechanics*, Vol. 33, pp. 975-984.
- Zielinsky, Paulo, 1988, *Tese de doutorado -Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Medicina. Curso de Pós-Graduação em Cardiologia*, Porto Alegre

ANEXO I

MODELO COMPUTADORIZADO DE SHUNT Ao-P

no.

nome	RN DE MARIA JOSÉ	registro	01010203	grupo	
data nascimento	01/03/01	idade	07 dias	peso	3,5 kg
				altura	50 cm
				sup corpo	sexo F
endereço	para contato Rua Aparício da Silva nº 34				

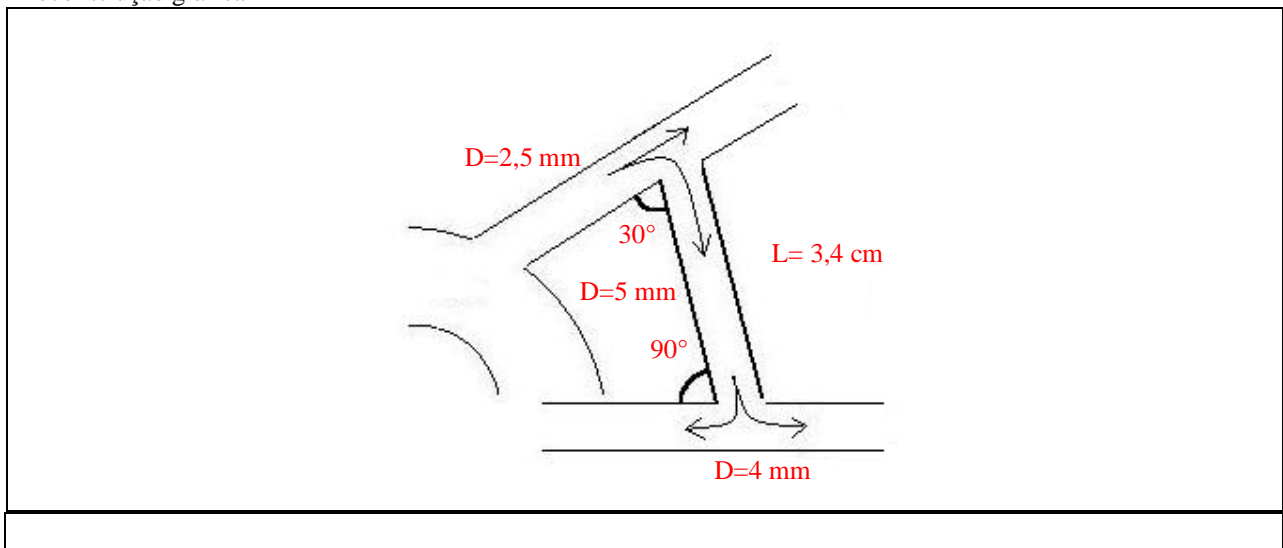
INFORMAÇÕES PRÉ-OPERATÓRIAS

Diagnóstico:	Tetralogia de Fallot
Indicação	
eco pré : data:	03/03/01
	no.: 345
outro exame -	

TRANS-OPERATÓRIO

data cirurgia	08/03/01	cirurgião	Dr. Vicentino Moura	registro gráfico	Dr. Adalberto
procedimento	Anastomose sistêmico-pulmonar				
intercorrências					
ângulo interno PTFE/artéria sistêmica	30°	; PTFE/artéria pulmonar		90°	
após anast : PAo sist	75	PAo diast	50	PPulsist	PPuldiast
					FC 124

Dimensões	PTFE	a. subclávia E (X) a. inominada ()	a. pulmonar E (X) a. pulmonar D ()
diâmetro	5 mm	2,5 mm	4 mm
extensão total	3,4 cm		

Reconstrução gráfica**EVOLUÇÃO PÓS-OPERATÓRIA**

curso clínico	
complicações	
eco pós: data:	no.:
alta: data	tempo p.o
	condições de alta

Obs. Os nomes do paciente, responsável e médicos deste anexo são fictícios.

ANEXO II

RECONSTITUIÇÃO DE ANASTOMOSES SISTÊMICO-PULMONARES CIRÚRGICAS MEDIANTE MODELO COMPUTADORIZADO

Paciente: **RN DE MARIA JOSÉ** . Idade: **7 dias**. Sexo: **F**

Responsável: **MARIA JOSÉ**

O abaixo assinado e identificado, sob a responsabilidade do médico que assina este documento, declara ter recebido uma explicação clara e completa sobre a pesquisa acima mencionada, permitindo que seu dependente seja incluído no Estudo, reconhecendo que:

1. Foi explicado que o Estudo representa reconstituição gráfica computadorizada da cirurgia a ser realizada no paciente. **Esta reconstrução é realizada após a alta hospitalar do paciente e é baseado em informações obtidas na cirurgia e em exames pré e pós-operatório e sua execução é independente do tratamento medico.**
2. Foram explicados a justificativa, os objetivos e os procedimentos da pesquisa, que não irá interferir com o tratamento médico proposto para o paciente. **Durante a internação hospitalar e no período subsequente, não serão realizados quaisquer exames ou intervenções diferentes da rotina de atendimento prevista.** A participação no estudo não prolongará permanência do paciente no hospital ou determinará qualquer gasto adicional.
3. **Não se espera qualquer grau de desconforto ou risco ao paciente pela participação no estudo.**
4. Foi dada garantia de resposta a qualquer pergunta e de esclarecimento a qualquer dúvida acerca do Estudo. Caso ocorrerem novas perguntas sobre o Estudo, sobre os direitos do paciente como participante ou mesmo entender que este foi prejudicado pela participação no Estudo, posso realizar um contato de esclarecimento com o Dr. **Vicentino** pelo telefone x43-3333.33.33, no Setor de Cirurgia do Instituto de Cardiologia do Rio Grande do Sul.
5. **Foi dada liberdade de retirar o consentimento para que meu dependente participe do Estudo a qualquer momento sem prejuízo ao seu atendimento medico,** e neste caso as informações colhidas na cirurgia não serão utilizadas para a pesquisa gráfica.
6. Foi dada garantia de o paciente não ser identificado e de ser mantido o caráter confidencial de informação em relação à privacidade do paciente e a minha.
7. Foi assumido o compromisso de proporcionar-me informação atualizada obtida durante o estudo, sempre que solicitado.
8. Assino o presente documento, em duas vias de igual teor, ficando uma em minha posse.

A minha assinatura neste Consentimento Livre e Esclarecido dará autorização aos autores do Estudo e ao Comitê de Ética do Hospital de utilizarem os dados obtidos quando necessário, incluindo divulgação, sempre preservando a privacidade do paciente e família.

Porto Alegre, de de 2001.

Assinatura responsável:

Médico Responsável pela pesquisa:CREMERS:.....

Assinatura Responsável Pesquisador

DECLARO que este formulário foi lido para(acima assinado) em de de 2001, pelo Dr. **Vicentino**, enquanto eu, abaixo assinado(a) estava presente.

Assinatura da Testemunha:

Obs. Os nomes do paciente, responsável e médicos deste anexo são fictícios.