

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

GUSTAVO ROTUNNO DA ROSA

**A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO NO MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO
DE VON NEUMANN**

Porto Alegre

2011

GUSTAVO ROTUNNO DA ROSA

**A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO NO MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO
DE VON NEUMANN**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

Porto Alegre

2011

GUSTAVO ROTUNNO DA ROSA

**A EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO NO MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO
DE VON NEUMANN**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovado em: Porto Alegre, _____ de _____ de 2011.

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo - orientador
UFRGS

Prof. Dr. Ronaldo Herrlein Júnior
UFRGS

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo
UFRGS

RESUMO

Assunto pouco lembrado, tanto pelos matemáticos, quanto pelos economistas, o modelo de von Neumann foi a primeira demonstração matemática formal de existência de equilíbrio em um modelo econômico. O estudo abarca a discussão sobre a concepção teórica sobre a qual o modelo fora criado, bem como sugere uma interpretação do modelo conforme o fluxo circular descrito na obra de Schumpeter. São apresentadas as ferramentas matemáticas necessárias para a demonstração de equilíbrio no sistema, bem como as demonstrações de Loomis, Nikaido e von Neumann. A monografia conclui que tais ferramentas foram de grande importância para o desenvolvimento da teoria econômica posterior, bem como conclui que o uso da matemática formal é válido para as diversas concepções teóricas expostas.

Palavras-chave: von Neumann, Equilíbrio Geral, Schumpeter.

JEL: B23

ABSTRACT

Subject seldom remembered, both, by mathematicians and economists, von Neumann's model was the first formal mathematical proof that equilibrium exists in an economic model. The study includes a discussion about the theoretical framework upon which the model was created and suggest an interpretation of it as a circular flow model, as described in Schumpeter's work. It's presented the mathematical tools necessary to demonstrate equilibrium in the system, as well as the demonstrations that Loomis, Nikaido and von Neumann provides. The monograph concludes that such tools were of great importance for the further development of economic theory and concludes that the application of formal mathematics applies to the various theoretical concepts exposed.

Key-words: von Neumann, General Equilibrium, Schumpeter.

JEL: B23

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
2	APRESENTAÇÃO DO MODELO DE VON NEUMANN.....	11
2.1	O Modelo de von Neumann.....	11
2.2	A Discussão sobre o Modelo.....	15
2.2.1	A Crítica de Champernowne.....	15
2.2.2	A Analogia com o Modelo Neoclássico.....	16
2.2.3	A Distinção com o Modelo Neoclássico.....	17
2.2.4	A Similitude com o Modelo Clássico.....	19
2.3	As Semelhanças com o Modelo de Schumpeter.....	21
3	A MATEMÁTICA NECESSÁRIA PARA AS DEMONSTRAÇÕES.....	26
3.1	Hiperplanos.....	27
3.2	Semi-Espaços.....	28
3.2.1	Semi-Espaço Fechado.....	28
3.2.2	Semi-Espaço Aberto.....	28
3.2.3	Suporte.....	29
3.3	Conjuntos Convexos.....	33
3.4	Simplexos.....	37
3.4.1	Conjuntos Afim-Independentes.....	37
3.4.2	Simplexos.....	39
3.4.3	Coordenadas Baricêntricas.....	40
3.4.4	Carrier.....	42
3.5	Teorema de Minkowski (Teorema da Separação)	42

3.6	Cones Positivos.....	44
3.7	Teorema de Farkas.....	48
3.8	Teorema de Caratheodory.....	50
3.9	Lema de Sperner.....	52
3.10	Teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewick (KKM).....	54
3.11	Teorema de Brouwer.....	54
3.12	Teorema Minimax.....	56
4	AS DEMONSTRAÇÕES DO MODELO.....	63
4.1	A Demonstração de Loomis.....	63
4.2	A Demonstração de Nikaido.....	73
4.3	A Demonstração de von Neumann.....	81
5	CONCLUSÃO.....	87
6	REFERÊNCIAS.....	89

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, será apresentado o modelo que von Neumann expôs no Colóquio de Vienna, em 1936 e publicou no artigo 'A Model of General Economic Equilibrium', de 1945. Será, também, apresentado o debate ocorrido na academia sobre o paradigma econômico com o qual o modelo de von Neumann mais se identifica. Expor-se-á, ainda, uma sugestão sobre a semelhança do referido modelo com o fluxo circular estabelecido na 'Teoria do Desenvolvimento Econômico'- de Joseph Alois Schumpeter-, a matemática necessária para provar o modelo e as demonstrações de Loomis (uma demonstração elementar da existência de equilíbrio), Nikaidô e von Neumann para tal modelo, com suas respectivas ressalvas.

A aplicação dos métodos matemáticos na economia, em especial aqueles utilizados para provar a existência de equilíbrio no modelo de von Neumann, na primeira metade do século XX, possibilitou a demonstração formal de diversas questões relevantes para esta ciência. Primeiramente, a aproximação entre a matemática formal e a ciência econômica ocorrera em função do desenvolvimento da teoria dos jogos: tal teoria é uma ferramenta matemática para as ciências sociais e, principalmente, para a economia. Em 1928, von Neumann demonstrou o teorema Minimax com o objetivo de estabelecer a existência de equilíbrios para jogos de soma-zero¹ e, conforme Maria Joao Cardoso de Pina Cabral (2003, p. 4, tradução nossa):

O teorema Minimax, o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos, foi demonstrado por von Neumann independente de quaisquer considerações de ordem econômica. [...] Durante a década de 1930, Von Neumann continuou a mostrar um interesse ocasional na matemática dos jogos e sabia que o teorema Minimax era relevante para a teoria econômica [...].

¹ A partir de 1930, von Neumann não publicou mais tantos artigos a respeito de jogos, restringindo suas

Sobre a demonstração de von Neumann, descreve Ulan (1958, p. 26, tradução nossa):

[...] no artigo de Von Neumann, 'Zur Theorie der Gesellschaftsspiele'. Lá está provado o fundamental teorema 'Minimax' e formulado o esquema geral de um jogo entre n jogadores ($n \geq 2$). [...] O teorema em que $\text{Min Max} = \text{Max Min}$ e os corolários sobre a existência de pontos de sela de funções de várias variáveis estão contidas no seu artigo de 1937, 'Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes'.

O grande interesse dos matemáticos pelos jogos de salão ocorre a partir do início do século XX. Nesta época, a existência de um matemático chamado Emanuel Lasker, campeão mundial de xadrez vinte e quatro vezes consecutivas, de 1897 a 1921, estimulou na comunidade acadêmica a pesquisa acerca da possibilidade matemática de oferecer ao 'royal game' uma forma de estabelecer uma estratégia vencedora. Segundo Leonard (2007, p. 15, tradução nossa):

Lasker era, também, um autor prolífico e os seus escritos sobre xadrez eram únicos em riqueza, explorando não somente estratégia *per se*, mas também as conexões entre o jogo e as outras facetas da vida.[...] Lasker usa sua experiência no jogo de xadrez como ponto de partida para a análise do lugar da luta em vários universos, as idéias econômicas são o fio condutor que articula tudo.

Em 1932, visando mostrar a existência de equilíbrio para seu modelo de crescimento econômico equilibrado, von Neumann estabeleceu o resultado conhecido como 'Lema da Intersecção', do qual se obtém, como corolário, o teorema Minimax. Para demonstrar o lema da intersecção, von Neumann utilizou o 'Teorema do Ponto Fixo de Brouwer'. A aplicação dos teoremas de ponto fixo e da topologia encontraram caminho fértil no âmbito econômico para a prova da existência do equilíbrio. Não há dúvidas de que o modelo de von Neumann, apresentado pela primeira vez em 1933, fora decisivo para trazer um método importante para o desenvolvimento da teoria econômica. Sobre isso, afirma Sandye Gloria-Palermo (2010, p. 153, tradução nossa) que:

No imediato pós-guerra, Mark Blaug (1999, 2003) identificou a emergência de um novo paradigma na ciência econômica, o chamado 'paradigma formalista', que marcou a chegada da prioridade da forma sobre o conteúdo, e que é caracterizado principalmente pela importância crucial que os

economistas dão para um específico (e não construtivo) tipo de demonstração da existência de equilíbrio.

Prossegue a autora, afirmando que:

Von Neumann mostrou que uma solução de equilíbrio sempre existe, que é única e que a taxa de lucro, na configuração do modelo, é igual ao crescimento econômico. A prova da existência de equilíbrio contradiz a forma tradicional de demonstrar existência de uma configuração de equilíbrio geral que consistia da contagem do número de equações e incógnitas. Tal abordagem não constituía uma prova suficiente de existência e, além disso, o modelo fora formalizado em termos de desigualdades (a regra dos bens livres e a regra dos rendimentos mínimos) e, ainda, requeria ferramentas matemáticas específicas. (GLORIA-PALERMO, 2010, p. 155, tradução nossa).

O trabalho é dividido em três capítulos. O primeiro capítulo expõe o modelo, traz a discussão de Champernowne e Kurz e Salvadori sobre as hipóteses do modelo, bem como expõe a colocação do modelo perante doutrinas econômicas. São apresentadas neste capítulo, também, as semelhanças entre o modelo de von Neumann e o fluxo circular de Schumpeter exposto na obra de 1911².

O segundo capítulo apresenta a matemática formal necessária para a demonstração de existência de equilíbrio no modelo no sentido que von Neumann estabelece.

O terceiro capítulo apresenta três demonstrações existentes para o referido modelo: uma demonstração elementar, outra que utiliza o teorema Minimax e a demonstração de von Neumann, através do uso do 'Teorema do Ponto Fixo de Brouwer'.

² Nesta monografia, utiliza-se a edição de 1997 da referida obra, da editora Nova Cultural Ltda.

2 APRESENTAÇÃO DO MODELO DE VON NEUMANN

O modelo³ que von Neumann utilizou para provar a existência de crescimento econômico equilibrado gerou uma discussão sobre qual concepção teórica o influenciou e sobre a forma de apresentação daquele modelo, pois este era diferente do modelo de walrasiano, mais popular à época.

Na primeira seção deste capítulo, será apresentado o modelo que von Neumann expôs no colóquio de Viena⁴, em 1933.

Na segunda seção, serão colocadas as considerações sobre a qual escola econômica tal modelo pertence.

Por fim, na terceira seção, será apresentada uma sugestão sobre a similaridade do modelo com o fluxo circular, descrito na ‘Teoria do Desenvolvimento’⁵, de Schumpeter.

2.1 O Modelo de von Neumann

John von Neumann escreve seu modelo com o intuito de resolver “um típico sistema econômico de equações” (NEUMANN, 1945-1946, tradução nossa). Para tanto, von Neumann (1945) elabora tal modelo utilizando a concepção de que bens são produzidos por outros bens. No modelo, n é o número de bens nomeados C_j tal que $j = 1, \dots, n$, e m é o número de processos nomeados T_i tal que $i = 1, \dots, m$.

O modelo é baseado em estoques. Assim, ao final de cada período, o i -ésimo processo produz bens b_{i1}, \dots, b_{in} , utilizando para produção os insumos a_{i1}, \dots, a_{in}

³ Ver Neumann (1945-1946), ‘A Model of General Equilibrium’.

⁴ Tal artigo, apesar de ser publicado na língua inglesa somente em 1945, fora apresentado pela primeira vez em 1932, em um seminário da Universidade de Princeton sobre matemática, segundo Neumann (1945-1946).

⁵ Ver Schumpeter (1997), ‘Teoria do Desenvolvimento Econômico’.

existentes no início de cada período. Assim, o referido i -ésimo processo pode ser representado como a seguinte função: $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \rightarrow (b_{i1}, \dots, b_{in})$. Há, então, os insumos, chamados A , que são definidos como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Há, também, os produtos, chamados B , que são definidos como:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Os produtos b_{i1}, \dots, b_{in} passam ao período seguinte como estoques iniciais. Todos os bens são resultados dos processos de produção de um período anterior. O trabalho é considerado um dos elementos da matriz A . Não há fluxos de bens vindos de fora do sistema.

Seja $p_i(t) \geq 0$, o nível de atividade do i -ésimo processo no período intitulado t . O estoque inicial de qualquer bem no período $t + 1$ não pode ser superior à sua produção no período anterior; então, afirma-se que:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i(t + 1) \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot p_i(t).$$

Seja $q_j(t)$ o preço do bem C_j no período t e $\vartheta(t) = 1 + r(t)$, a taxa de juros no período t . Supõe-se, então, que o custo de produção unitário de cada processo feito aos preços do período t , incluindo as despesas com juros, é maior ou igual aos preços do período $t + 1$. Tal suposição é colocada para não haver 'lucros extraordinários' no modelo. Assim, coloca-se que:

$$\vartheta(t) \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j(t) \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot q_j(t + 1).$$

Seja o estado de crescimento equilibrado aquele em que o crescimento dos preços e a taxa de juros são proporcionais ao nível de atividade econômica. Para isso coloca-se que:

$$p_i(t+1) = \delta \cdot p_i(t) = (1 + \gamma) \cdot p_i(t),$$

$$\delta = 1 + \gamma$$

-sendo γ a taxa de crescimento da economia-,

$$q_j(t+1) = q_j(t),$$

pois retiram-se da análise fenômenos inflacionários,

$$\vartheta(t+1) = \vartheta(t) = \vartheta.$$

Obtemos, assim, que tanto

$$\delta \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i(t) \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot p_i(t),$$

quanto

$$\vartheta \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j(t) \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot q_j(t)$$

ocorrem.

Se, no final do período ocorre que

$$\delta \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i(t) < \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot p_i(t),$$

então $q_j(t) = 0$.

Caso ocorra, no final do período, que

$$\vartheta \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j(t) > \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot q_j(t),$$

então $p_i(t) = 0$.

Fazendo $p_i(0) = p_i$ e $q_j(0) = q_j$, vemos que as equações acima referidas são equivalentes ao seguinte sistema de desigualdades independentes do tempo t :

1. $\delta \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot p_i$;
2. $\vartheta \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot q_j$;
3. $\delta \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i < \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot p_i$, então $q_j = 0$;
4. $\vartheta \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j > \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot q_j$, então $p_i = 0$.

Supõe-se, também, que os coeficientes de a_{ij} e b_{ij} satisfazem as seguintes hipóteses:

5. $a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0$;
6. Cada processo utiliza, ao menos, um bem como insumo. Então, $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$, para todo i ;
7. Similarmente, os insumos em cada processo produzem, ao menos, um produto. Então $\sum_{i=1}^m b_{ij} > 0$, para todo j ;
8. Em cada processo, qualquer bem aparece ou como insumo, ou como produto. Então, $a_{ij} + b_{ij} > 0$.

Para haver solução geral, o sistema de desigualdades devem ter solução, bem como devem δ e ϑ ter o mesmo valor.

2.2 A Discussão sobre o Modelo

2.2.1 A Crítica de Champernowne

O modelo utilizado por von Neumann, esclarece Champernowne (1945), tem seu grande mérito na elegância da solução matemática de um problema altamente generalizado sobre a teoria econômica. Apesar disso, tal modelo trouxe um debate na economia sobre a abordagem diferenciada utilizada para provar a existência de equilíbrio. Tal discussão origina-se pelo próprio conceito de equilíbrio utilizado pelo autor, dispare dos juízos da época. Acerca disso, escreve Champernowne (1945-1946, p. 10, tradução nossa):

O primeiro ponto é ter claro o que chama-se por equilíbrio. A definição de equilíbrio é muito similar àquela chamada pelos economistas de estado estacionário: mas, no artigo de v. Neumann, equilíbrio difere de um estado estacionário de equilíbrio no ponto fundamental que uma expansão uniforme de todo o sistema econômico é permitida sob condições de equilíbrio. Tal estado pode ser chamado de um estado quase-estacionário, embora v. Neumann não faça o uso desse termo.

As notas deste autor podem ser compreendidas sobre o viés da grande amplitude e, contudo, da grande simplicidade sobre os fatos econômicos do modelo estabelecido por von Neumann. Inclusive, sobre isso, em 1946, Champernowne comenta que:

Por adotar suposições extremamente artificiais, o autor tornou seu problema solucionável e concentrou atenção em algumas propriedades muito interessantes do verdadeiro sistema econômico. Mas, ao mesmo tempo, esse processo de abstração inevitavelmente fez muitas das conclusões daquele autor inaplicáveis ao mundo real: outras podiam ser aplicáveis somente depois de modificações consideráveis. É interessante de perguntar quão longe as propriedades do modelo simplificado do referido autor realmente correspondem ao fenômeno similar no mundo real. (CHAMPERNOWNE, 1945-1946, p. 10, tradução nossa).

Ainda acerca da verossimilhança do modelo com a realidade, escreve Koopmans (1964, p. 356, tradução nossa):

O artigo contém a primeira afirmação explícita, conhecida por esse autor, do que foi subsequentemente chamado de modelo de análise da atividade de produção. Esse é um modelo

em que há um número finito de processos de produção, com cada processo caracterizado por relações constantes de insumos e produtos, além de retornos constantes em escala.

Sobre isso, Koopmans (1964) afirma que as relações entre os preços das commodities e os coeficientes de produção e as restrições sobre juros e crescimento são estabelecidas para caracterizar o uso eficiente de recursos e equilíbrio competitivo. Tais colocações também corroboram com o fato de que, nesse equilíbrio, “não há progresso ou mudança na produção per capita da população: crescimento meramente consiste de cópia” (CHAMPERNOWNE, 1945, p. 11, tradução nossa) do que já é possível produzir.

2.2.2 A analogia com o modelo neoclássico

A forma como fora criado o modelo de von Neumann gerou o debate, também, sobre se o modelo de von Neumann poderia ser entendido como parte da teoria clássica, ou neoclássica. De forma usual, o modelo- cuja publicação fora feito por meio de convite de K. Menger, um economista austríaco, após a apresentação em um seminário em Princeton, em 1932- é visto como parte da teoria neoclássica. Isso ocorre pelo fato de que a demonstração do modelo é feita utilizando o ‘Teorema do Ponto Fixo’- uma forma de provar a existência de equilíbrio em modelos walrasianos usual.

Kurz e Salvadori, em 1993, referiam-se a isso:

Primeiramente, em 1936 von Neumann apresentou seu artigo no famoso Mathematical Colloquium, de Karl Menger, na Universidade de Vienna; o artigo foi, então, publicado pela primeira vez no procedimento deste Colloquium [...]. Como as prévias contribuições para o Colloquium foram dedicadas para economistas lidarem com o problema da existência de uma solução de equilíbrio para o modelo de Walrás-Cassel, concluiu-se que von Neumann estava preocupado com, essencialmente, o mesmo problema, adotando a mesma (neoclássica) perspectiva. (KURZ; SALVADORI, 1993, p. 131, tradução nossa).

Tal percepção torna-se mais intensa por ambos os modelos se preocuparem com equilíbrio de longo prazo em mercados competitivos sem a existência de ‘lucros extraordinários’, e, também pelo fato de que, como afirma Kurz e Salvadori (1993, p.

132, tradução nossa) “[...] é mencionado que o modelo de von Neumann, de um lado, e o modelo de Schlesinger e Wald, por outro lado, ‘comungam uma mesma perspectiva, a que enfatiza desigualdades invés de igualdades como a verdadeira caracterização de equilíbrio econômico’.

Não obstante, também é argumentado que a forma como se emprega a regra dos bens livres no modelo de von Neumann é utilizada, também, em modelos walrasianos: ambos admitem que bens cuja oferta é superior à demanda devem ter preço nulo. Tal coincidência não é fato novo, visto que, segundo Kurz e Salvadori, “há alguma evidência de que von Neumann era conhecedor dos escritos dos principais autores marginalistas” (KURZ; SALVADORI, 1993, p. 131, tradução nossa).

2.2.3 A distinção com o modelo neoclássico.

Apesar de o modelo de von Neumann ser, sob alguns aspectos importantes, parecido com os modelos neoclássicos de longo prazo, existem diferenças fundamentais entre eles. Kurz e Salvadori (1993), por exemplo, adotam de forma central a suposição de que tal modelo contempla hipóteses que são mais válidas para a teoria clássica. Segundo os autores, há diversos problemas com a forma usual- definir o modelo de von Neumann como um modelo neoclássico- de interpretar o modelo. Eles sugerem que, ao contrário deste ‘senso comum’, qualificar o modelo de Von Neumann como modelo clássico é mais adequado.

À luz de tal fato, Kurz e Salvadori(1993) afirmam que não são utilizadas como variáveis do modelo as dotações iniciais da economia, ou quem as detém, ou as preferências do consumidor e o conjunto das técnicas disponíveis. Gustav Cassel, em 1928 escreve que “teoria econômica é, em sua essência, uma teoria dos preços. Suas maiores funções são explicar os processos inteiros pelos quais preços são fixados no seu tamanho real.” (CASSEL, 1928, p. 511, tradução nossa).

Corroborando com a afirmação de Kurz e Salvadori o fato de que, muito diferentemente do modelo de Cassel, por exemplo, para quem a taxa de juros da

economia é determinada pela disposição de moeda pelo banco central, no modelo de von Neumann, a taxa de juros não é determinada pela oferta e demanda de moeda, nem pela preferência intertemporal de consumo, mas pela taxa de crescimento da economia. Para Cassel (1928), a referida taxa de juros é controlada para que os preços não subam e para que, também, a taxa, de alguma forma, seja balizada pelo mercado de poupança e tomada de empréstimos.

É, de forma importante, apontada, também, a falta de curvas de oferta e de demanda para o mercado de trabalho, cerne da teoria marginalista. Em 1959, na monografia de Gerard Debreu que trata da existência de equilíbrio em um modelo walrasiano é afirmado que:

Os dois problemas centrais da teoria que essa monografia apresenta é (1) a explicação dos preços das mercadorias resultantes da interação dos agentes de uma economia privada através dos mercados, (2) a explicação geral do sistema de preços em um estado ótimo da economia. (DEBREU, 1959, prefácio, p. IX, tradução nossa).

O salário, no modelo de von Neumann, é determinado exogenamente e, bem como a taxa de juros, não tem valor definido no mercado. Decorre disso que o trabalho, assim como a terra, que são os fatores de produção, podem, conforme o modelo, ser expandidos infinitamente. Tal hipótese não contempla o fato de que, no modelo neoclássico, bens abundantes que são oferecidos acima da demanda implicam que seu preço seja nulo. Aqueles preços, portanto, são determinados exogenamente. Segundo Kurz e Salvadori:

[...] na análise de von Neumann, o vetor de bens que constituem os meios de subsistência dos trabalhadores não depende de preços relativos. Entretanto, enquanto é um exagero afirmar que o modelo de von Neumann é caracterizado por 'uma completa omissão de demanda final', é, obviamente, verdadeiro que 'em contraste com as fórmulas de Walras [...], nenhuma conexão marginalista entre preços e quantidades é assumida'. (KURZ;SALVADORI, 1993, p. 136, tradução nossa).

Finalmente, o processo de produção sugerido pelo modelo destoa profundamente das referidas curvas de oferta e demanda da teoria marginalista (neoclássica). Ao invés disso, o modelo de von Neumann disciplina a produção através

de uma função em que ocorre a produção de bens por meio de outros bens, através de tempo econômico, significativamente dessemelhante do referido modelo marginalista.

2.2.4 A similitude com o modelo clássico

Há alguns atributos que tornam cabível o entendimento do modelo de von Neumann contíguo ao que se intitula, na economia, como teoria clássica. São destacadas três principais características coincidentes: o conceito de produção como um fluxo circular, a noção de uma economia em expansão uniforme e a regra dos bens livres.

Pode-se asseverar, por exemplo, através da ênfase na natureza circular do processo de produção que, conforme afirma Champernowne (1946, p. 12, tradução nossa):

O modelo do Prof. V. Neumann apresenta, no entanto, certas características de uma economia capitalista competitiva que tendem a ser obscurecidas na abordagem mais tradicional e pode lidar com as conseqüências da natureza circular do processo de produção (i.e. que mercadorias são majoritariamente produzidas por outras mercadorias) de uma forma que não é possível sob tal abordagem referida.

No referido modelo, também se observa que os preços dependem somente de condições de oferta: tais preços não precisam das preferências dos consumidores. O salário e a taxa de juros não se submetem, também, à regra dos bens livres. Sobre isso, afirma Champernowne (1946, p. 12, tradução nossa) que:

Com a redução do papel dos trabalhadores-consumidores àquele de um insumo da produção, ele pode trazer o foco para as partes do mecanismo que determinam os preços e a taxa de juros que dependem de condições de oferta somente, ao invés de depender também do gosto dos consumidores. Essa ênfase é importante, pois a análise ortodoxa prestou atenção uniformemente entre utilidade marginal e condições de oferta.

Tal conceito de natureza circular do processo de produção, afirma Kurz e Salvadori (1993, p. 138, tradução nossa), “[...] emerge nos escritos de Adam Smith; é

destacado⁶ no *Essay on Profits*, de David Ricardo, e na segunda edição do *Essay on the External Corn Trade* de Robert Torrens”, destacados autores da teoria clássica. Ainda sobre a afinidade com a teoria clássica, escrevem Kurz e Salvadori (1993, p. 138, tradução nossa) que:

Outras importantes contribuições baseadas no conceito do fluxo circular da produção são apresentadas, entre outras, por Karl Marx (1956, parte III; 1959, parte II); [...] e pelo economista matemático russo, Georg von Charasoff (1910). Von Charasoff trabalhou nas bases estabelecidas por seu compatriota em uma tentativa de reformular a teoria de Marx em uma perspectiva de que seja logicamente inatacável. Ele merece os créditos por discutir preços e taxa de lucros, de um lado, e, por outro, quantidades e a taxa de crescimento no âmbito de um sistema de entradas e saídas completamente especificado, e por apontar a simetria notável dos dois conjuntos de variáveis.

É, também, tratado, por Kurz e Salvadori (1993, p. 140, tradução nossa), o fato de que “o capital original expressa a idéia de uma mais-valia produzida, capital crescente na sua forma pura, e a taxa de seu crescimento aparece de fato como a taxa geral de lucro capitalista”. Tal abordagem permite estabelecer vínculo entre a taxa geral a que von Charasoff se refere e a taxa de juros do modelo de von Neumann, que é igual à taxa de crescimento da economia. Conforme tal observação, o modelo clássico expande-se no sentido tratado por von Neumann.

Pode ser revelado também o fato de que, de acordo com a teoria clássica, a regra dos bens livres, ou seja, bens que são abundantes têm preço nulo, não é válida para o mercado de trabalho, o que ocorre inclusive para von Neumann. O pensamento dos clássicos coaduna com von Neumann no seguinte sentido: conforme Adam Smith (2003, p. 85), “é necessário que um homem sempre viva do seu trabalho, e que o seu salário seja no mínimo suficiente para mantê-lo”, não restando a possibilidade de que o trabalho, mesmo que ‘abundante’ tenha preço nulo.

⁶ Aqui a expressão “it is put into sharp relief” foi traduzida como “é destacado”.

2.3 As semelhanças com o modelo de Schumpeter

De forma dispare do debate que fora exposto, o modelo de von Neumann porta semelhanças, também, com o fluxo circular mostrado por Schumpeter no livro 'Teoria do Desenvolvimento Econômico'⁷. É importante destacar que “o ponto de partida de Schumpeter é uma economia que se encontra em equilíbrio, semelhante ao equilíbrio walrasiano” (MORICOCCHI; GONÇALVES, 1994, p. 27), bem como ambos os modelos tratam de uma economia fechada. Para Schumpeter (1997, p. 25):

Os eventos econômicos têm sua lógica, que todo homem prático conhece que temos apenas de formular conscientemente com precisão. Ao fazê-lo, consideraremos, para maior simplicidade, uma comunidade isolada; podemos ver bem a essência das coisas, que é o único interesse desse livro, tanto nesse caso como em outro mais complicado.

Schumpeter prossegue a descrição da sociedade analisada como um “Estado organizado comercialmente, no qual vigorem a propriedade privada, a divisão do trabalho e a livre concorrência” (SCHUMPETER, 1997, p. 25). A obra de von Neumann, analogamente, pressupõe essas condições, visto que nela existe trabalhadores, capitalistas, mercados no referido modelo. Coaduna com isso a afirmação de que “foram eliminadas todas as complicações monetárias” (NEUMANN, 1945-1946, p. 1, tradução nossa) do modelo, bem como Schumpeter desconsidera o efeito do crédito: para este, a tomada de empréstimos é algo desnecessário no fluxo circular.

O fluxo circular de Schumpeter considera, também, de forma capital, o tempo econômico da produção; conforme afirma o referido autor “suporemos sempre que em cada período econômico todos vivem de bens produzidos no período precedente”(SHUMPETER, 1997, p. 26), assim como é feita a hipótese de que toda a produção de um período é comercializada -tanto os trabalhadores, quanto os capitalistas dispõem tudo que fora produzido no mercado e consomem desse tudo que fora disposto: não há, portanto, nenhum bem comercializado cuja oferta exceda a própria demanda. A respeito disso, Schumpeter (1997, p. 29) afirma que:

⁷ Ver 'Teoria do Desenvolvimento Econômico', de Joseph Alois Schumpeter. Editora Nova Cultural Ltda., 1997.

[...] como todos sabem por experiência com quanto devem contribuir para obter o que querem, tendo em vista a condição de que cada cota acarreta uma certa contribuição, o fluxo circular do sistema está fechado e todas as contribuições e cotas devem se cancelar reciprocamente qualquer que seja o princípio segundo o qual é feita a distribuição.

A produção das mercadorias, prossegue Schumpeter (1997, p. 30), é “condicionada pelas propriedades físicas dos objetos materiais e dos processos naturais”, bem como a determinação da produção segue a determinação econômica: não há de forma alguma a produção de um bem que não seja viável no sentido econômico. Isso implica a inexistência de bens com margem de lucro inferior ao mercado⁸. Sobre isso, Schumpeter (1997, p. 33) esclarece que “a lógica econômica prevalece sobre a tecnológica”.

Acerca disso, o modelo de crescimento equilibrado de von Neumann traz hipóteses similares, visto que produção de bens é dividida em tempos econômicos, sobre o qual, em cada período, “bens são produzidos não somente por ‘fatores naturais de produção’, mas em primeiro lugar por outros bens. Esses processos de produção podem ser circulares, isto é, o bem G1 é produzido com ajuda de outro bem G2, e G2 é produzido com a ajuda de G1.” (NEUMANN, 1945-1946, p. 1, tradução nossa). Tal modelo, também, tem em suas suposições o fato de que toda a produção de um dado período é esgotada: cita von Neumann (1945-1946, p. 2, tradução nossa), que “assumimos que toda oferta que excede as necessidades da vida serão reinvestidas”, bem como a hipótese quarta da primeira seção garante que “se um processo acarreta prejuízo, então ele não será usado e sua intensidade será nula” (NEUMANN, 1945-1946, p. 3, tradução nossa).

A mencionada produção é, no fluxo circular, realizada através de duas forças produtivas; afirma Schumpeter (1997, p. 35), que os “elementos são o trabalho e as dádivas da natureza”⁹. Tais substâncias são combinadas, conforme os métodos de

⁸ Schumpeter afirma na sua teoria que não há lucros no fluxo circular. Tal fato, entretanto, não acarreta prejuízo do argumento, visto que, como o lucro é nulo, o que se afirma é, na verdade, que não há produtos produzidos com ‘lucro negativo’.

⁹ Dádivas da natureza também é referida pelo autor como ‘terra’. São, então, as duas forças produtivas o trabalho e a terra.

fabricação existentes, de modo que todos os bens produzidos podem, em última instância, ser discriminados entre parcelas de trabalho e recursos da natureza.

Tal visão incorpora-se ao fenômeno de que o fluxo circular analisa o mecanismo econômico em um dado estágio de desenvolvimento. Dada a hipótese de a economia obrar no referido mecanismo, não há o chamado desenvolvimento no sentido schumpeteriano; isso implica a inexistência da criação de um novo bem, da introdução de um novo artifício de produção, do estabelecimento de um novo mercado, da aquisição de uma nova fonte de oferta de matérias-primas, da instauração de um arranjo original de qualquer indústria.

O que, para Kurz e Salvadori (1993, p. 140, tradução nossa), são os “fatores ‘originais’ de produção, em particular qualidades diferentes de terra (uma quantidade considerável destas qualidades), por um lado, e, por outro, o trabalho” podem ser compreendidos, no modelo de von Neumann, como os elementos que constituem a matriz dos insumos, visto que, para von Neumann (1945-1946, p. 2, tradução nossa), “o consumo de bens ocorre somente através dos processos de produção, os quais incluem as necessidades de vida consumidas pelos trabalhadores e pelos empregadores”. Sobre a produção, von Neumann (1945-1946, p. 2, tradução nossa) afirma que “estamos interessados naquelas circunstâncias em que toda economia expande sem mudanças na própria estrutura”, o que coaduna com o fato de não haver hipótese de desenvolvimento no fluxo circular de Schumpeter.

Há uma hipótese adicional ao que fora exposto no modelo de von Neumann sobre a suposição terceira da primeira seção. Sobre ela é afirmado que “se, entretanto, menos é consumido, isto é, se há excesso de produção de um bem G_j , tal bem torna-se um bem livre e seu preço é nulo.” (NEUMANN, 1945-1946, p. 3, tradução nossa). Para explicar o fenômeno do valor, Schumpeter utiliza a teoria da imputação, que determina características especiais àqueles bens abundantes. Sobre isso, esclarece tal autor que:

A teoria da imputação explica os valores de todos os bens individuais. Só resta acrescentar que os valores individuais não são independentes, mas se condicionam mutuamente. A única exceção à regra é o caso de uma mercadoria que não pode ser substituída por outra, que tem somente meios de produção que não sejam passíveis de substituição e além disso não sejam empregáveis em

mais nenhum lugar. Tais exemplos são imagináveis; podem ocorrer, por exemplo, no caso de bens de consumo ofertados imediatamente pela natureza; mas constituem uma exceção que pode ser desprezada. Todas as outras quantidades de bens e seus valores mantêm uma estrita relação mútua. (SCHUMPETER, 1997, p. 52).

Sobre o modelo de crescimento equilibrado de von Neumann e sobre o fluxo circular de Schumpeter, ainda, é possível afirmar-se que ambos atuam em equilíbrio estável em cujo estado não existem lucros¹⁰, apesar de portarem concepções de equilíbrio que diferem substancialmente. O modelo de von Neumann tem como cerne o fato de que, em equilíbrio, o juro e a taxa que a economia se expande são numericamente iguais. Para Schumpeter, o referido equilíbrio surge do seguinte fato: como fluxo circular é previsível, todas as forças produtivas adaptam-se às circunstâncias econômicas. Como, nesse caso, o valor dos bens de produção e o valor total do produto efetivamente criado (respectivamente o valor dos insumos e o valor dos produtos) são iguais na margem de produção, “nesse ponto surge aquela posição relativamente melhor, que é usualmente chamada de equilíbrio econômico e que, enquanto os dados se mantiverem, tende a se repetir em todo período.” (SCHUMPETER 1997, pp. 44-45).

Não somente sobre a concepção de equilíbrio ambos modelos divergem, mas também sobre a concepção de que, para o fluxo circular de Schumpeter, não há juros e crescimento econômico, suposição contrária ao modelo de von Neumann. Sobre isso, esclarece Haberler (1951, p. 122, tradução nossa) que “um completo entendimento do ponto de vista de Schumpeter sobre o problema da taxa de juros exige, eu acredito, que haja uma distinção entre uma versão extrema e uma versão menos radical de sua teoria”, bem como esclarece que “a versão extrema da teoria dele é dificilmente aceitável” (HABERLER, 1951, p. 122, tradução nossa). O autor prossegue, afirmando que:

A versão menos extrema admite que possa existir uma taxa de juros positiva no estado estacionário da economia apesar de manter o fato de que forças dinâmicas não apenas alteram a referida taxa acima do nível que ocorre no estado estacionário, mas também adicionam,

¹⁰ Lucros, para von Neumann é o lucro ‘extraordinário’. É a margem de lucro que uma entidade têm acima do mercado. Para a ‘Teoria do Desenvolvimento Econômico’ de Schumpeter tal significado também pode ser admitido.

qualitativamente, características inteiramente novas ao estado estacionário. (HABERLER, 1951, p. 122, tradução nossa).

Tais fatos não são disparidades que impossibilitam haver uma similitude muito forte entre os referidos modelos. Em uma nota de rodapé, Haberler admite que o fluxo circular de Schumpeter possa apresentar crescimento econômico, mesmo em seu estado estacionário. Ainda assim, não é excluída do modelo de von Neumann a possibilidade de que tanto o crescimento, quanto os juros sejam nulos, o que tornaria essa diferença inexistente.

3 A MATEMÁTICA NECESSÁRIA PARA AS DEMONSTRAÇÕES

Nesse capítulo é apresentada a matemática utilizada para as demonstrações deste modelo de von Neumann.

Na Seção 3.1 é apresentada a definição de hiperplano.

Na seção 3.2 é apresentada a definição de semi-espacos; são apresentados, nas subseções, os semi-espacos fechados e os semi-espacos abertos, bem como a definição de suporte.

Na Seção 3.3 é apresentada a definição de conjuntos convexos.

Na Seção 3.4 é apresentada os conceitos que envolvem a definição de simplexos. São apresentados, nas subseções, os conjuntos afim-independentes, a própria definição de simplexos, a definição de coordenadas baricêntricas e a definição de carrier.

Na Seção 3.5 é apresentado o Teorema de Mincowski.

Na Seção 3.6 é apresentada a definição de cones positivos.

Na Seção 3.7 é apresentado o Teorema de Farkas.

Na Seção 3.8 é apresentado o Teorema de Caratheodory.

Na Seção 3.9 é apresentado o Lema de Sperner.

Na Seção 3.10 é apresentado o Teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewick, ou 'Teorema KKM'.

Na Seção 3.11 é apresentado o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

E, por fim, na Seção 3.12 é apresentado o Teorema Minimax.

3.1 Hiperplanos.

Seja $H(p, \alpha)$ um hiperplano e α um número qualquer, então temos que

$$H(p, \alpha) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{p} \cdot \vec{x} = \alpha\}$$

e

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

O vetor \vec{p} é o vetor normal ao hiperplano.

$H(p, \alpha)$ pode ser entendida como a isoquanta de nível α do funcional linear $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(p_1, \dots, p_n) = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n = \alpha.$$

Diz-se que $H(p, \alpha)$ separa os subconjuntos A e B se, para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$, ou

$$\vec{p} \cdot \vec{x} \leq \alpha \text{ e } \vec{p} \cdot \vec{y} \geq \alpha,$$

ou

$$\vec{p} \cdot \vec{x} \geq \alpha \text{ e } \vec{p} \cdot \vec{y} \leq \alpha.$$

Diz-se que $H(p, \alpha)$ separa estritamente os subconjuntos A e B se ou

$$\vec{p} \cdot \vec{x} < \alpha \text{ e } \vec{p} \cdot \vec{y} > \alpha,$$

para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$, ou

$$\vec{p} \cdot \vec{x} > \alpha \text{ e } \vec{p} \cdot \vec{y} < \alpha,$$

para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$.

3.2 Semi-Espaços

3.2.1 Semi-Espaço Fechado.

Define-se um semi-espaço fechado¹¹ através de

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n = \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \alpha\}.$$

Estabelece-se, também, a propriedade de que f é uma função contínua.

Como $(-\infty, \alpha]$ é fechado,

$$f^{-1} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \alpha\}$$

e

$$f^{-1} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x} \geq \alpha\}$$

são semi-espaços fechados.

3.2.2 Semi-Espaço Aberto

Define-se, semelhantemente, um semi-espaço aberto¹² através de

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n = \vec{p} \cdot \vec{x} < \alpha\}.$$

Estabelece-se, de forma igual à anterior, a propriedade de que f é uma função contínua.

Como $(-\infty, \alpha)$ é aberto,

$$f^{-1} \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x} < \alpha\}$$

¹¹ Para uma compreensão de conjuntos fechados, sugere-se a leitura de Lima (2010), 'Curso de Análise vol.1'. A explicação do referido assunto encontra-se no capítulo quinto.

¹² Para uma compreensão de conjuntos abertos, sugere-se a leitura de Lima (2010), 'Curso de Análise vol.1'. A explicação do referido assunto encontra-se no capítulo quinto.

e

$$f^{-1} \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n | f(\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x} > \alpha \}$$

são semi-espacos abertos.

3.2.3 Suporte

Se diz que $H(p, \alpha)$ limita¹³ $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se

$$X \subseteq \{x | \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \alpha\},$$

ou se

$$X \subseteq \{x | \vec{p} \cdot \vec{x} \geq \alpha\}.$$

Ainda, se existe $x^* \in X$ tal que $\vec{p} \cdot \vec{x}^* = \alpha$, se diz que H é um suporte para X em x^* .

Proposição 1

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado e $z \notin X$. Existe, então, $x^* \in X^{\text{front}}$ ¹⁴ tal que, para todo $x \in X$,

$$d(z, x^*)^{15} \leq d(z, x).$$

Demonstração

Seja $d = \inf^{16} d(z, x), x \in X$.

Primeiramente, demonstrar-se-á que $d > 0$. Após, revelar-se-á que, para todo n , existe

¹³ Para uma compreensão de limites, sugere-se a leitura de Lima (2010), 'Curso de Análise vol.1'. A explicação do referido assunto encontra-se no capítulo quarto.

¹⁴ Dois esclarecimentos: o primeiro é o fato de que X^{front} é o conjunto dos x tal que x pertence à fronteira. O segundo é o de que para uma compreensão de conjuntos compactos, sugere-se a leitura de Lima (2010), 'Curso de Análise vol.1'. A explicação do referido assunto encontra-se no capítulo oitavo.

¹⁵ $d(z, x^*)$ é a distância do ponto z ao ponto x^* .

¹⁶ Inf é o ínfimo de um conjunto. Para uma compreensão de ínfimos e supremos, sugere-se a leitura de Lima (2010), 'Curso de Análise vol.1'. A explicação do referido assunto encontra-se no capítulo terceiro.

$$x_n \in X | d(x_n, z) < d + \frac{1}{n}$$

e

$$d \leq d(x_n, z).$$

Finalmente, apontar-se-á que $x^* \in X^{\text{front}}$.

Para demonstrar que $d > 0$, supõe-se que $d = 0$.

Para todo n , então, existe $x_n \in X$ tal que

$$d(z, x_n) < \frac{1}{n}.$$

Logo, $x_n \in \bar{B}(z, 1)^{17} \cap X$.

Como $\bar{B}(z, d + 1)$ é compacto¹⁸, então X é fechado.

Como se sabe que $x_n \rightarrow z$, para n grande, e que X é fechado, então $z \in X$.

Visto que esse evento contraria a hipótese de que $z \notin X$, então $d > 0$.

Falta revelar que, para todo n , existe

$$x_n \in X | d(x_n, z) < d + \frac{1}{n}$$

e

$$d \leq d(x_n, z).$$

Para isso afirma-se que

$$\bar{B}(z, d + 1) \cap X$$

é compacto, pois \bar{B} é compacto e X é fechado.

¹⁷ $\bar{B}(z, 1)$ é a bola centrada em z de raio 1. Para uma compreensão de bolas em espaços métricos, sugere-se a leitura de Lima (2009), 'Espaços Métricos'. A explicação do referido assunto encontra-se no capítulo primeiro.

¹⁸ Um conjunto é compacto se e somente se é fechado e limitado.

Existe, então, $x_{n_k} \in \bar{B}(z, d + 1) \cap X$ convergente; logo, $x_{n_k} \rightarrow x^*$ ¹⁹ $\in X$ e, portanto,

$$d \leq d(x_{n_k}, z) \leq d + \frac{1}{n_k}.$$

Então,

$$d(x_{n_k}, z) \rightarrow d(x^*, z) = d,$$

pois $d(x, z)$ é função contínua.

A partir disso, seja $g(x) = d(x, z) = \|x - z\|$ contínua, então

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Logo, trocando x por y ,

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Para todo $\varepsilon > 0$, escolhe-se

$$G = \varepsilon \rightarrow d(x, y) < \varphi.$$

Então,

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

e g é contínua.

Como toda $B(x_0, r)$ é convexa²⁰, pois seja $\lambda \in [0, 1]$, e

$$\|(1 - \lambda) \cdot x + \lambda \cdot y - x_0\| = \varphi = \|(1 - \lambda) \cdot (x - x_0) + \lambda(y - x_0)\|,$$

então,

¹⁹ $x_{n_k} \rightarrow x^*$ significa que x_{n_k} converge para um x^* . Para uma compreensão de séries convergentes, sugere-se a leitura de Lima (2010), 'Curso de Análise vol. 1'. A explicação do referido assunto encontra-se no capítulo quarto.

²⁰ Aqui apresenta-se, de forma antecipada, a propriedade da convexidade. Tal propriedade será esclarecida na seção 3.3 deste capítulo.

$$\varphi \leq (1 - \lambda) \cdot \|x - x_0\| + \lambda \cdot \|y - x_0\| \leq (1 - \lambda) \cdot r + \lambda \cdot r = r$$

e

$$((1 - \lambda) \cdot x + \lambda y) \in B(x_0, r).$$

Para demonstrar que $x^* \in X^{\text{front}}$, supõe-se que exista $B(x^*, \varepsilon)$ tal que $B(x^*, \varepsilon) \subset X$, ou seja, $x^* \in X^{\text{int}21}$.

Seja $\lambda \in (0, 1)$ e

$$\|(1 - \lambda) \cdot x^* + \lambda \cdot z - x^*\| = \lambda \cdot \|z - x^*\| = \lambda \cdot d < \varepsilon.$$

Então $((1 - \lambda) \cdot x^* + \lambda \cdot z) \in X$.

Logo,

$$d > \|(1 - \lambda) \cdot x^* + \lambda \cdot z - z\| = (1 - \lambda) \cdot \|x^* - z\| = (1 - \lambda) \cdot d$$

e

$$((1 - \lambda) \cdot x^* + \lambda \cdot z) \in X$$

e

$$d((1 - \lambda) \cdot x^* + \lambda \cdot z, z) < d,$$

o que é um absurdo.

Logo, para toda $B(x^*, \varepsilon) \subseteq X$,

$$B(x^*, \varepsilon) \cap X^c \neq \emptyset$$

e

$$x^* \in X^{\text{front}}. \blacksquare$$

²¹ X^{int} é o conjunto dos x que pertencem ao interior de X .

3.3 Conjuntos Convexos

Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se, para todo $x, y \in C$ e para $\lambda \in [0,1]$, então

$$((1 - \lambda).x + \lambda.y) \in C.$$

Proposição 2

C é convexo se e somente se pertencem a C todas as combinações convexas²² de elementos de C .

Demonstração

Se C é convexo, então a combinação de dois quaisquer elementos de C está em C . Seja

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2,$$

com $\lambda_i \geq 0$ e

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Logo,

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2$$

e

$$x = (1 - \lambda_2) \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2$$

para $0 \leq \lambda_2 \leq 1$.

Assim, $x \in C$. Da mesma forma, se

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3,$$

com $\lambda_i \geq 0$ e

²² Uma combinação convexa z é $z = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots$ tal que $\sum \lambda_i = 1$.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

supõe-se que $\lambda_1 \neq 0$.

Se $\lambda_1 = 1$, então $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda \in C$.

Se $\lambda_1 < 1$, então

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 1 - \lambda_1 < 1$$

e

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} + \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1} = 1, \text{ bem como}$$

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} \cdot x_2 + \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1} \cdot x_3 \in C.$$

Logo,

$$\lambda_1 \cdot x_1 + (1 - \lambda_1) \cdot \left(\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} \cdot x_2 + \frac{\lambda_3}{1 - \lambda_1} \cdot x_3 \right) \in C$$

e

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \lambda_3 \cdot x_3 \in C$$

Se a combinação de dois quaisquer elementos de C está em C , então C é convexo. Se qualquer combinação de qualquer número de vetores está em C , então, em particular, uma combinação de dois elementos de C quaisquer estarão em C , logo C é convexo. ■

Proposição 3

Seja C_i convexo, então $\cap C_i$ é convexo.

Demonstração

Sejam $x, y \in \cap C_i$, então $x, y \in C_i, \forall i$. Logo, cada C_i é convexo e

$$[(1 - \lambda) \cdot y + \lambda \cdot x] \in C_i$$

e

$$[(1 - \lambda).y + \lambda.x] \in \cap C_i, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Define-se, para um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, o fecho convexo de X como

$$\text{Co}X = \cap C_i,$$

para um C_i convexo e $X \subseteq C_i$.

Observa-se que se X é convexo, então $\text{Co}X = X$. ■

Proposição 4

Seja

$$\text{Co}X = \{\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_k \cdot x_k \mid \lambda_i \geq 0\}$$

e

$$\sum \lambda_i = 1, x_i \in X.$$

O fecho convexo é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de X .

Demonstração

Se C é convexo e $X \subseteq C$, então toda a combinação convexa de elementos

$$[\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_k \cdot x_k] \subseteq C$$

implica que

$$[\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_k \cdot x_k] \subseteq \cap C = \text{Co}X, x \in \text{Co}X.$$

Se

$$[\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_k \cdot x_k]$$

é convexo, então

$$\{(1 - \mu) \cdot [\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_k \cdot x_k] + \mu \cdot [\tau_1 \cdot x_1 + \dots + \tau_k \cdot x_k]\}.$$

Como,

$$(1 - \mu) \cdot \lambda_i \geq 0$$

e

$$\mu \cdot (\tau_j) \geq 0$$

e

$$\sum (1 - \mu) \cdot \lambda_i + \sum \mu \cdot (\tau_j) = 1,$$

então

$$\text{CoX} \subseteq [\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_k \cdot x_k]. \blacksquare$$

Proposição 5

Seja um conjunto dado por $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k\}$.

O conjunto

$$\{x_1 - x_i, \dots, x_j - x_i, \dots, x_k - x_i\}$$

é linearmente independente se e somente se

$$\{x_1 - x_j, \dots, x_i - x_j, \dots, x_k - x_j\}$$

é linearmente independente.

Demonstração

Digamos que

$$\{x_1 - x_i, \dots, x_j - x_i, \dots, x_k - x_i\}$$

é linearmente independente se e somente se

$$\lambda_1 \cdot (x_1 - x_j) + \dots + \lambda_i \cdot (x_i - x_j) + \dots + \lambda_k \cdot (x_k - x_j) = 0.$$

Então,

$$\lambda_1 \cdot (x_1 - x_j) + \dots + (-\lambda_i) \cdot (x_j - x_i) + \dots + \lambda_k \cdot (x_k - x_i) + [\lambda_1 + \dots + \widehat{\lambda}_i + \dots + \lambda_k] \cdot x_i - [\lambda_1 + \dots + \widehat{\lambda}_i + \dots + \lambda_k] \cdot x_j = 0$$

e

$$\lambda_1 \cdot (x_1 - x_i) + \dots + [(-\lambda_1) + \dots + (-\lambda_i) + \dots + (-\lambda_k)] \cdot (x_j - x_i) + \dots + \lambda_k \cdot (x_k - x_i) = 0.$$

Logo, se

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0; -\lambda_1 = 0, \dots, -\lambda_k = 0$$

e

$$\lambda_i = 0,$$

então

$$\{x_1 - x_i, \dots, x_j - x_i, \dots, x_k - x_i\}$$

é linearmente independente. ■

3.4 Simplexos

3.4.1 Conjuntos Afim-Independentes

Se diz que x_1, \dots, x_k são afim-independentes se e somente se

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_k \cdot x_k = 0,$$

com $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ implica

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0.$$

Proposição 6

O conjunto definido por $\{x_1, \dots, x_k\}$ é afim-independente se e somente se, para todo i , $\{x_1 - x_i, \dots, x_k - x_i\}$ é linearmente independente.

Demonstração

Seja

$$\lambda_1 \cdot (x_1 - x_i) + \dots + \lambda_k \cdot (x_k - x_i) = 0$$

e

$$\lambda_1 + \dots + [-\lambda_1 - \dots - \lambda_k] \cdot x_i + \dots + \lambda_k = 0,$$

então, como x_1, \dots, x_k são afim independentes,

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0$$

e $\{x_1 - x_i, \dots, x_k - x_i\}$ é linearmente independente. Assim, está mostrado que $\{x_1, \dots, x_k\}$ é afim-independente então, para todo i , $\{x_1 - x_i, \dots, x_k - x_i\}$ é linearmente independente.

Seja

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_i \cdot x_i + \dots + \lambda_k \cdot x_k,$$

então

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i + \dots + \lambda_k = 0$$

e

$$\lambda_i = -\lambda_1 - \dots - \lambda_k.$$

Logo,

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + [-\lambda_1 - \dots - \lambda_k] \cdot x_i + \dots + \lambda_k \cdot x_k = 0.$$

Então,

$$\lambda_1 \cdot (x_1 - x_i) + \dots + \lambda_k \cdot (x_k - x_i) = 0$$

e $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$. Dessa forma, está mostrado que se, para todo i , $\{x_1 - x_i, \dots, x_k - x_i\}$ é linearmente independente então $\{x_1, \dots, x_k\}$ é afim-independente. ■

3.4.2 Simplexos

Determina-se um simplexo, nomeado Δ , como $\text{Co}\{x_0, \dots, x_k\}$, tal que x_0, \dots, x_k são afim-independentes.

Define-se, ainda, o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ como um simplexo de dimensão K (Δ^K) se e somente se

$$S = \text{Co}\{x_0, x_1, \dots, x_k\},$$

conjunto de todas as combinações convexas de X , em que x_0, x_1, \dots, x_k são afim-independentes.

Observa-se, ainda, que $K \leq n$, pois se $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, então $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$ são K vetores linearmente independentes.

Proposição 7

Se $S \subseteq \mathbb{R}^m$ é compacto, então $\text{Co}S$ é compacto.

Demonstração

Seja

$$\tau: \Delta^m \times S^{m+1} \rightarrow \text{Co}S,$$

sendo que $\Delta^m \times S^{m+1}$ é compacto.

Então,

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_m; x_0, \dots, x_m) \rightarrow \alpha_0 \cdot x_0 + \dots + \alpha_m \cdot x_m,$$

tal que $\alpha_0 + \dots + \alpha_m = 1$, pertence a CoS.

Como $\Delta^m \times S^{m+1}$ é compacto, então CoS é compacto. ■

Proposição 8

A intersecção de fechado com compacto é compacta.

Demonstração

Dado $\Delta^{m-1} = \{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1\}$ compacto, tal que $0 \leq \alpha_i \leq 1$, dado

$$\zeta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_m) \rightarrow x_1 + \dots + x_m,$$

e dada ζ contínua, tem-se que $\zeta^{-1}(\{1\})$ é fechado do \mathbb{R}^m , isto é,

$$H(\vec{p}, 1) = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 + \dots + x_m = 1\}$$

é fechado, em que

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, $H(\vec{p}, 1) \cap ([0,1] \times \dots \times [0,1])$, sendo que $([0,1] \times \dots \times [0,1]) = [0,1]^m = I^m$ é compacto. ■

3.4.3 Coordenadas Baricêntricas

Os elementos $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ de um conjunto são ditas as coordenadas baricêntricas de X se, para $\text{Co}\{x_0, \dots, x_k\}$ e $X \in \text{Co}\{x_0, \dots, x_k\}$, então

$$X = \lambda_0 \cdot x_0 + \dots + \lambda_k \cdot x_k,$$

em que $\lambda_i \geq 0$ e $\sum \lambda_i = 1$

Proposição 9

Se x_0, \dots, x_k são afim-independentes, então as coordenadas baricêntricas são únicas.

Demonstração

Seja

$$X = \lambda_0 \cdot x_0 + \dots + \lambda_k \cdot x_k$$

e

$$X = \mu_0 \cdot x_0 + \dots + \mu_k \cdot x_k,$$

com $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$ e $\mu_i \geq 0$ e $\sum \mu_i = 1$.

Como

$$x_a = 1 \cdot x_a = \left(\sum \lambda_i \right) \cdot x_a = \lambda_0 \cdot x_0 + \dots + \lambda_k \cdot x_k$$

e, da mesma forma,

$$x_a = 1 \cdot x_a = \left(\sum \mu_i \right) \cdot x_a = \mu_0 \cdot x_0 + \dots + \mu_k \cdot x_k,$$

então

$$(\lambda_0 - \mu_0) \cdot x_0 + \dots + (\lambda_k - \mu_k) \cdot x_k = 0$$

e

$$(\lambda_0 - \mu_0) \cdot (x_0 - x_0) + (\lambda_1 - \mu_1) \cdot (x_1 - x_0) + \dots + (\lambda_k - \mu_k) \cdot (x_k - x_0) = 0.$$

Como para todo i diferente de zero, $x_i - x_0$ é linearmente independente, então

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_k - \mu_k = 0$$

e

$$\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k$$

assim como $\lambda_0 = \mu_0$. ■

3.4.4 Carrier

Seja $S = \text{Co}\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ um simplexo. Seja $X \in S$ tal que $X = \lambda_0 \cdot x_0 + \dots + \lambda_k \cdot x_k$, em que λ_i são as coordenadas baricêntricas de X . Diz-se que \vec{x}_i está no Carrier de X , ou seja, $\vec{x}_i \in \text{Carrier}(X)$ se a coordenada baricêntrica é tal que $\lambda_i \geq 0$. Em outras palavras, $\vec{x}_i \in \text{Carrier}(X)$ se o vértice x_i está presente, então $\text{Carrier}(X)$ é o conjunto dos vértices necessários para expressar X .

Dado um simplexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, afirma-se que uma família finita de simplexos $\{S_j\}$ é uma divisão simplicial de S se- para $i \neq j$ - então $S_i^{\text{int}} \cap S_j^{\text{int}} = \emptyset$, se- caso um vértice de S_j é elemento de S_i - então S_j é vértice de S_i , se $\cup S_i = S$ e se- dada uma subdivisão de “ S ” em simplexos S_j - atribuímos, para cada vértice de um simplexo da divisão, um número pertencente a $\{0, 1, \dots, x_k\}$.

Uma enumeração, portanto, é dita admissível, ou de Sperner, se a cada vértice V de um sub-simplexo é atribuído um índice de algum vértice S pertencente ao Carrier de V .

3.5 Teorema de Minkowski (Teorema da Separação)

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo e fechado. Se $z \notin X$, então existe $H(p, \alpha)$, um hiperplano, separando X e $\{z\}$.

Demonstração

Demonstrar-se-á, primeiramente que

$$\langle z - x^*, x - x^* \rangle^{23}$$

²³ $\langle a, b \rangle$ é o produto escalar de a por b .

é positivo.

Após, mostrar-se-á que $\langle z - \lambda^*, x \rangle$ é limitado e, por fim, que $\vec{p}.z > \alpha$.

Seja $x^* \in X$ tal que

$$\|x^* - z\| \leq \|x - z\|,$$

para todo $x \in X$.

Como X é convexo, então

$$\{(1 - \lambda).x^* + \lambda.x\} \in X, \forall x \in X.$$

Então, ocorre que

$$\|x^* - z\| \leq \|(1 - \lambda).x^* + \lambda.x - z\|,$$

assim como

$$\|x^* - z\|^2 \leq \|(1 - \lambda).x^* + \lambda.x - z\|^2 = \langle (1 - \lambda).x^* + \lambda.x - z, (1 - \lambda).x^* + \lambda.x - z \rangle.$$

Logo sucede que,

$$\|x^* - z\|^2 \leq \langle (x^* - z) + \lambda.(x - x^*), (x^* - z) + \lambda.(x - x^*) \rangle$$

e

$$\|x^* - z\|^2 \leq \|x^* - z\|^2 + 2\lambda \langle x^* - z, x - x^* \rangle + \lambda^2 \|x - x^*\|^2.$$

Como

$$0 \leq 2 \cdot \langle x^* - z, x - x^* \rangle + \lambda \cdot \|x - x^*\|^2,$$

se $\lambda \rightarrow 0$, então

$$0 \leq \langle x^* - z, x - x^* \rangle,$$

bem como

$$0 \leq \langle z - x^*, x - x^* \rangle.$$

Para demonstrar que $\langle z - \lambda^*, x \rangle$, estabelece-se $\vec{p} = z - \lambda^*$.

Então,

$$0 \leq \langle \vec{p}, x - x^* \rangle$$

e

$$\langle \vec{p}, x \rangle \leq \langle \vec{p}, x^* \rangle = \alpha.$$

Logo, para todo $x \in X$,

$$\langle \vec{p}, x \rangle \leq \alpha.$$

Para a última parte, basta verificar que

$$\vec{p} \cdot z = (z - x^*) \cdot z - (z - x^*) \cdot x^* + (z - x^*) \cdot x^* = (z - x^*) \cdot (z - x^*) + \alpha$$

e, portanto,

$$\vec{p} \cdot z = \|z - x^*\|^2 + \alpha > \alpha. \blacksquare$$

3.6 Cones Positivos

A definição de cone positivo pode ser, de forma simples, estabelecida da seguinte forma: $\{\vec{B} \mid \vec{B} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{A}_i, x_i \geq 0\}$ é o cone positivo gerado por $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$.

Proposição 10

Seja $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n \in \mathbb{R}^m$; consideremos

$$\vec{B} = x_1 \cdot \vec{A}_1, \dots, x_n \cdot \vec{A}_n,$$

com $x_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, n$.

Se

$$\vec{B} = z_{i_1} \cdot \vec{A}_{i_1}, \dots, z_{i_k} \cdot \vec{A}_{i_k},$$

com $z_{i_j} > 0$ e $j = 1, \dots, k$. Se k é o menor número possível de vetores A_i tais que \vec{B} é combinação linear deles, então $\vec{A}_{i_1}, \dots, \vec{A}_{i_k}$ são linearmente independentes.

Demonstração

Seja um J , tal que

$$J = \{j | \alpha_j > 0\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

e

$$\vec{B} = \sum \alpha_j \cdot \vec{A}_j,$$

fixando n como o menor número através do qual \vec{B} é combinação linear dos $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$ com $\alpha_j > 0$.

Seja

$$\sum y_j \cdot \vec{A}_j = \vec{0}.$$

Digamos que a referida fórmula seja linearmente dependente. Então, existe

$$y_j \neq 0.$$

Suponhamos que exista

$$y_j > 0^*.$$

Estabelece-se, então,

$$\sigma = \min_{y_j > 0} \frac{\alpha_j}{y_j} = \frac{\alpha_j^*}{y_j^*}$$

e

$$\vec{B} = \sum (\alpha_j - \sigma \cdot y_j) \cdot A_j.$$

Sabe-se que $\alpha_j - \sigma \cdot y_j$, para $y_j = 0$, implica $\alpha_j - \sigma \cdot y_j = \alpha_j > 0$.

Se $y_j < 0$, então

$$\alpha_j - \sigma \cdot y_j > \alpha_j > 0.$$

Se $y_j > 0$, então

$$\frac{\alpha_j}{y_j} > \frac{\alpha_j^*}{y_j^*} = \sigma$$

e

$$\frac{\alpha_j}{y_j} > \sigma,$$

assim como

$$\alpha_j - \sigma \cdot y_j > 0.$$

Como $\alpha_j^* - \sigma \cdot y_j^* = \alpha_j - \frac{\alpha_j^*}{y_j^*} \cdot y_j^* = 0$, ocorre um absurdo, visto que escrevemos \vec{B} como combinação linear de $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$ com coeficientes positivos e com pelo menos um vetor a menos que J.

Logo, os $\vec{A}_{i_1}, \dots, \vec{A}_{i_k}$ são linearmente independentes. ■

Observa-se que caso não exista $y_j > 0$, então para todo j , $y_j \leq 0$ e neste caso $\sum (-y_j) \cdot \vec{A}_j = \vec{0}$.

Proposição 11

Cones positivos são fechados.

Demonstração

Seja $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n \in \mathbb{R}^m$. Considera-se

$$C = \{ \vec{B} \mid \vec{B} = x_1 \cdot \vec{A}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{A}_n, \quad x_i \geq 0 \}$$

fechado.

Seja

$$\vec{V}_k = \sum x_i^k \cdot \vec{A}_i$$

uma combinação com o menor número possível de vetores $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$; então, $\vec{V}_k \in C$ e $\vec{V}_k \rightarrow V$. Como a seqüência V_k é infinita, então pelo menos um destes subconjuntos é infinito; então, um destes i_1, \dots, i_l repete indefinidamente. Seja a subseqüência V_k tal que

$$V_k = \sum_{j=1}^l y_{i_j}^k \cdot \vec{A}_{i_j}$$

Os $\vec{A}_{i_1}, \dots, \vec{A}_{i_l}$ são, portanto, linearmente independentes; se adicionamos $\vec{B}_{i_{l+1}}, \dots, \vec{B}_{i_m}$, obtemos uma base do \mathbb{R}^m da seguinte forma: $\vec{A}_{i_1}, \dots, \vec{A}_{i_l}, \vec{B}_{i_{l+1}}, \dots, \vec{B}_{i_m}$. Então,

$$V_k = y_{i_1}^k \cdot \vec{A}_{i_1} + \dots + y_{i_l}^k \cdot \vec{A}_{i_l} + 0 \cdot \vec{B}_{i_{l+1}} + \dots + 0 \cdot \vec{B}_{i_m}$$

e

$$V = z_1 \cdot \vec{A}_{i_1} + \dots + z_l \vec{A}_{i_l} + z_{l+1} \cdot \vec{B}_{i_{l+1}} + \dots + z_m \cdot \vec{B}_{i_m},$$

com

$$0 < y_{i_1}^k \rightarrow z_1, \dots, 0 < y_{i_l}^k \rightarrow z_l.$$

Então,

$$z_1 > 0, \dots, z_l > 0, z_{l+1} = 0, \dots, z_m = 0$$

e

$$V = z_1 \cdot \vec{A}_{i_1} + \dots + z_l \cdot \vec{A}_{i_l} \rightarrow V \subseteq C.$$

A consequência disso é que

$$A^T \cdot x | x \geq 0^{24}$$

é fechado. ■

3.7 Teorema de Farkas

Seja A uma matriz $m \times n$. $A^T \cdot \vec{x} = b$ não tem solução $\vec{x} \geq 0$, com $b \neq 0$ se e somente se $A \cdot \vec{y} \geq 0$, com $b^T \cdot \vec{y} < 0$ tem solução $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração

Primeiramente, demonstrar-se-á que $A^T \cdot \vec{x} = b$ não tem solução $\vec{x} \geq 0$, com $b \neq 0$ se $A \cdot \vec{y} \geq 0$ e a expressão $b^T \cdot \vec{y} < 0$ tem solução com $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Seja, então, $T = \{A \cdot \vec{x} | \vec{x} \geq 0\}$ e $\{b\}$ disjuntos. Como T é conexo, então há um hiperplano separador estrito $H(p, \alpha)$ de T e b tal que

$$p^T \cdot \vec{b} < \alpha < p^T \cdot (A^T \cdot \vec{x})$$

para todo $\vec{x} \geq 0$.

Se $\vec{x} = 0$, então

$$p^T \cdot (A^T \cdot \vec{x}) = 0,$$

bem como $\alpha < 0$ e $p^T \cdot \vec{b} < 0$ com $p^T \cdot (A^T \cdot \vec{x}) > \alpha$.

Tem-se, então, que ocorre

²⁴ A^T é a matriz A transposta

$$(p_1 \quad \dots \quad p_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > \alpha,$$

bem como ocorre

$$x = K \cdot l_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

Então,

$$\vec{p} \cdot \vec{A}_i = K \cdot (p_1 \cdot a_{i1} + \dots + p_n \cdot a_{in}) > \alpha,$$

assim como

$$p_1 \cdot a_{i1} + \dots + p_n \cdot a_{in} > \frac{\alpha}{K}.$$

Portanto, se $K \rightarrow \infty$, então $p_1 \cdot a_{i1} + \dots + p_n \cdot a_{in} \geq 0$ e $A \cdot \vec{p} \geq 0$.

Demonstrar-se-á, a seguir que $A^T \cdot \vec{x} = b$ não tem solução $\vec{x} \geq 0$, com $b \neq 0$ somente se $A \cdot \vec{y} \geq 0$, com $b^T \cdot \vec{y} < 0$ tem solução $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Suponha-se que $A \cdot \vec{y} \geq 0$ e $b^T \cdot \vec{y} < 0$ tem solução, então

$$\vec{x}^T \cdot A = b^T.$$

Se $A \cdot \vec{y} \geq 0$, então

$$\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{y} = b^T \cdot y$$

e $A \cdot \vec{y} \geq 0$ com $b^T \cdot \vec{y} < 0$, sendo que $b \neq 0$, o que é um absurdo. ■

3.8 Teorema de Caratheodory

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \in \text{Co}X$, então Y é uma combinação convexa de, no máximo, $(m + 1)$ elementos de X .

Demonstração

Seja $Y \in \text{Co}X$. Então,

$$Y = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i,$$

sendo que

$$\sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in X.$$

Digamos que $K > m + 1$, então $K - 1 > m$ e $\{x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1\}$ são linearmente dependentes, bem como existem $\alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que não são todos nulos. Tem-se, também que

$$\alpha_2 \cdot (x_2 - x_1), \dots, \alpha_k \cdot (x_k - x_1) = \vec{0},$$

bem como

$$-(\alpha_2 + \dots + \alpha_k) \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_k \cdot x_k = 0.$$

Estabelece-se, então

$$\alpha_1 = -(\alpha_2 + \dots + \alpha_k).$$

Tem-se, portanto, que

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_k \cdot x_k = 0,$$

assim como

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

Define-se, então, a seguinte expressão:

$$r = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \lambda_i, \alpha_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_r}{\alpha_i}.$$

Há três possibilidades que são consideradas sobre a expressão acima.

A primeira é o fato de ocorrer

$$\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \geq \frac{\lambda_r}{\alpha_i},$$

com $\lambda_i > 0, \alpha_i > 0$. Disso, implica o fato de

$$\lambda_i \geq r \cdot \alpha_i \Rightarrow \lambda_i - r \cdot \alpha_i = B_i \geq 0.$$

A segunda possibilidade é suceder-se que

$$\alpha_i < 0 \Rightarrow \lambda_i - r \cdot \alpha_i > \lambda_i \geq 0 \Rightarrow \lambda_i - r \cdot \alpha_i = B_i \geq 0.$$

A terceira possibilidade sucede de

$$\alpha_i = 0 \Rightarrow \lambda_i - r \cdot \alpha_i = B_i \geq 0.$$

Então, de qualquer forma,

$$\sum_{i=1}^k B_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - r \cdot \alpha_i) \cdot x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot x_i = y$$

e

$$\sum_{i=1}^k B_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - r \cdot \alpha_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i - r \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Sendo $B_i \geq 0$ e

$$B_r = \lambda_r - r \cdot \alpha_r = 0,$$

então a soma anterior tem, no máximo, $k - 1$ termos. Tal procedimento é repetido até obter-se $K \leq m + 1$. ■

Observa-se sobre isso que dado $y \in \text{Co}X$, então y é combinação convexa de, no máximo, $m + 1$ vetores de Y .

3.9 Lema de Sperner

Para cada enumeração de Sperner admissível de um conjunto de vértices de qualquer subdivisão de um simplexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, existe, ao menos, um simplexo S_j da subdivisão tal que a enumeração é completa.

Provar-se-á, conforme Tompkins (1964), uma hipótese mais forte: o número de simplexos da subdivisão com vértices carregando uma enumeração completa é ímpar.

Demonstração

Sobre o caso em que $n = 1$ afirma-se que um simplexo em \mathbb{R}^1 é um segmento de reta com vértices chamados 0 e 1. Tal segmento é dividido com uma quantidade finita de pontos chamados 0 e 1 e arbitrariamente colocados. Escolhe-se os segmentos interiores entre dois pontos consecutivos contendo, ao menos, um ponto 0; estes podem ser intervalos entre 0 e 1, ou intervalos entre dois pontos 0. Como a quantidade de pontos é finita, chama-se de γ a quantidade de simplexos da subdivisão com dois pontos 0; então há, neles, $2 \cdot \gamma$ elementos 0 neles. Chama-se de β o número de intervalos entre os pontos 0 e 1; há β partes nomeadas 0 neles. Logo, o número de segmentos com, ao menos, um ponto 0 é $2 \cdot \gamma + \beta$. Observando o simplexo maior, há apenas um vértice 0 nele, estando todos os demais 0 contidos no interior; tais elementos são pontos de dois simplexos da subdivisão. Então, o número de 0 finais deve ser duas vezes o número de 0 interiores mais um, correspondente ao vértice final.

Esse número é ímpar, então $2.\gamma + \beta$ é ímpar e β , o número de intervalos com pontos 0 e 1, é ímpar.

Sobre o caso $n + 1$, conforme Tompkins (1964), considera-se a subdivisão de um L – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ com enumeração de Sperner admissível. Seja γ , o número de simplexos da subdivisão contendo toda enumeração menos $n + 1$. Como qualquer M – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tem $n + 2$ vértices, cada um desses simplexos têm alguma enumeração ocorrendo duas vezes e as demais, apenas uma vez. Há, então, duas formas apenas em cada um desses simplexos da subdivisão no qual um P – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^n$ contendo toda a enumeração de 0 a n pode ser associado ao L – simplexo. Então, o número de n – faces carregando de 0 a n nesse conjunto de simplexos da subdivisão é $2.\gamma$. Seja, então, β o número de n – faces dos simplexos carregando enumeração completa, de 0 a $n + 1$; cada um desses simplexos tem apenas uma n – face do P – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^n$. Então, o número de n – faces da subdivisão é $2.\gamma + \beta$.

Algumas dessas faces estão no interior da subdivisão do simplexo maior e outras estão na fronteira deste. As faces internas são incidentes a exatamente dois simplexos, um em cada lado da face, bem como as faces contidas na fronteira compõem apenas um simplexo. Tais faces estão associadas ao P – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^n$, com pontos de 0 a n associado ao L – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Então, se o P – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^n$ tem número ímpar de simplexos contendo enumeração completa, então, o número de n – faces da subdivisão simplicial contados uma vez é ímpar e a contagem total é um número ímpar mais duas vezes o número de n – faces contadas duas vezes, o que é um número ímpar. Logo, β é um número ímpar. Como β é o número de simplexos da subdivisão carregando toda enumeração, de 0 a $n + 1$, isso prova que o número de simplexos com enumeração completa de uma divisão simplicial de um L – simplexo $\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é ímpar.

Logo, como a hipótese é válida para $n = 1$ e, se é válida para “ n ”, então é válida para “ $n + 1$ ”, tal hipótese vala para todo \mathbb{R}^l tal que $l \subseteq \mathbb{N}$. ■

3.10 Teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewick (KKM)

Seja S um k -simplexo no \mathbb{R}^n com vértices x_0, x_1, \dots, x_k ; sejam C_0, C_1, \dots, C_k fechados contidos em S tal que, para todo $x \in S$, existe j , com $x \in C_j$ e $x_j \in \text{Carrier}(X)$, então $\bigcap_{i=1}^k C_j \neq \emptyset$.

Demonstração

Para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ determinamos uma divisão do simplexo como $D^n = \{S_i^n\}$ de S tal que S_i^n é um simplexo com diâmetro menor ou igual a $\frac{1}{n}$.

Se V é um vértice de S_i^n , então existe

$$C_j | V \in C_j$$

e $x_j \in \text{Carrier}(V)$. Nomeamo-lo V_j . Esta é uma enumeração de vértices admissível.

Pelo Lema de Sperner, existe um simplexo em D^n , digamos, S^n , tal que seus vértices são $V_0^n, V_1^n, \dots, V_k^n$.

Então, seja S^1, S^2, \dots, S^n tal que

$$V_0^1, V_0^2, \dots, V_0^n \in C_0; V_1^1, V_1^2, \dots, V_1^n \in C_1; \dots; V_k^1, V_k^2, \dots, V_k^n \in C_k.$$

Observa-se que cada C_j é compacto, pois o fecho de $V_j^1, V_j^2, \dots, V_j^n \in C_j$ está contido em S^j compacto. Então, $V_j^1, V_j^2, \dots, V_j^n$ tem subsequência convergente para C_j , por Bolzano-Weierstrass. Logo,

$$V_0 = V_1 = \dots = V \in C_j$$

para todo j . ■

3.11 Teorema de Brouwer

Seja S um k -simplexo e $f: S \rightarrow S$ contínua. Então, existe $x^* \in S$ tal que $f(x^*) = x^*$.

Demonstração

Seja $x \in S$ e $\lambda_j(x)$ a coordenada baricêntrica j de x . Então,

$$x = \lambda_0 \cdot x_0 + \dots + \lambda_k \cdot x_k.$$

Seja

$$C_j = \{x \in S \mid \lambda_j(f(x)) \leq \lambda_j(x)\}.$$

Como λ_j é contínua, então

$$\lambda_j(f(x)) - \lambda_j(x) \leq 0.$$

Chamemos $\lambda_j(f(x)) - \lambda_j(x)$ de $g_j(x)$. $g_j(x)$ é contínua, então

$$C_j = \{g_j^{-1} \mid (-\infty, 0]\}$$

é fechado. Considere λ_j tal que

$$\lambda_j(x) \neq 0.$$

Se, qualquer que seja j , para todo j , então $\lambda_j(f(x)) > \lambda_j(x)$. Logo,

$$\lambda_0(f(x)) + \dots + \lambda_k(f(x)) > \lambda_0(x) + \dots + \lambda_k(x) = 1,$$

o que é absurdo.

Então, existe

$$i \mid \lambda_i(f(x)) \leq \lambda_i(x)$$

e $x \in C_i$ e $x_i \in \text{Carrier}(x)$. Então, pelo Teorema KKM, a intersecção de C_j não é vazia e $x^* \in \cap C_j \neq \emptyset$. Logo,

$$\lambda_j(f(x^*)) \leq \lambda_j(x^*)$$

para todo j . Mas, se, para algum j' , ocorre

$$\lambda_j(f(x^*)) < \lambda_j(x^*),$$

Então

$$\lambda_0(f(x^*)) + \dots + \lambda_k(f(x^*)) < \lambda_0(x^*) + \dots + \lambda_k(x) = 1,$$

o que é um absurdo.

Logo, $\lambda_j(f(x^*)) = \lambda_j(x^*)$ e, pela unicidade das coordenadas baricêntricas,

$$f(x^*) = x^*. \blacksquare$$

3.12 Teorema Minimax²⁵

Seja A tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

²⁵ A partir do desenvolvimento da teoria da probabilidade por Emile Borel, com a publicação de seu 'Traité Du Calcul des Probabilités et de ses Applications', afirma Leonard (1992) que aquele autor começa a produzir trabalhos sobre a matemática dos jogos em que a vitória de um jogador está diretamente vinculada à oportunidade e à habilidade dos jogadores. Apesar de, conforme Leonard (2007), este autor mostrar-se descrente da possibilidade de generalização dos postulados possíveis para jogos, ele estabeleceu o conceito formal de estratégia e investigou a existência de uma jogada ótima para jogos com finitas possibilidades de estratégias e duas pessoas e, após, para três e cinco pessoas.

Borel, quando sugeriu que um jogo de sete pessoas poderia ter uma demonstração da existência de uma jogada ótima, afirmou que talvez seria possível construir tal prova para jogos com n pessoas. Conforme Leonard (1992), o artigo de Borel, 'On Games that Involve Chance and the Skill of Players', publicado originalmente em francês, em 1924, desenvolve profundamente o campo da matemática dos jogos. Borel é, também, reconhecido pelos seus teoremas sugerirem a solução de jogos através do uso das probabilidades. Conseqüência de tal esforço por parte dos matemáticos é esta demonstração do teorema Minimax.

com

$$p \in \Delta^{m-1} = \text{Co}\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m, q \in \Delta^{n-1} = \text{Co}\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Seja, também, K tal que

$$K(\vec{p}, \vec{q}) = \vec{p}^T \cdot A \cdot \vec{q} = (p_1 \ \dots \ p_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

com

$$\vec{C}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

e

$$\vec{L}_i = (a_{i1} \ \dots \ a_{in}).$$

Seja, ainda,

$$F(\vec{p}) = \min_{i \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i = \min_{i \leq j \leq n} \vec{C}_j \cdot \vec{p}$$

e

$$C(\vec{q}) = \max_{i \leq j \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j = \max_{i \leq j \leq m} \vec{L}_i \cdot \vec{q},$$

então, ocorre que $F(\vec{p}) \leq C(\vec{q})$.

Demonstração

Como

$$F(p) = C_k \cdot p = \sum_{i=1}^m a_{ik} \cdot p_i,$$

então

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} \cdot p_i \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i$$

e

$$\sum_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i \right) \cdot q_j \leq \sum_{ij} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j.$$

Como $\sum q_j = 1$, então $F(p) \leq K(p, q)$.

Tem-se, também, que

$$C(q) = \vec{L}_e \cdot \vec{q} = \sum_{j=1}^n a_{ek} \cdot q_j \geq \sum_{ij} a_{ij} \cdot q_j,$$

e, com isso

$$\sum_i C(q) \cdot p_i \geq \sum_{ij} a_{ij} \cdot q_i \cdot p_j = K(p, q).$$

Como sabe-se que $\sum p_i = 1$, então $C(q) \geq K(p, q)$ e $F(p) \leq K(p, q) \leq C(q)$, bem como $F(p) \leq C(q)$.

Seja, então,

$$v_1 = \max_{p \in \Delta^{m-1}} F(p) \leq C(q)$$

para todo $q \in \Delta^{n-1}$. Sabe-se que

$$v_1 \leq \min_{q \in \Delta^{n-1}} C(q) = v_2,$$

pois sabemos que se $F(p) \leq v_1$ e, portanto, não existe $p \in \Delta^{m-1}$ tal que $v_1 \leq F(p)$. Pois, se

$$v_1 \leq \sum_{i=1}^m a_{ik} \cdot p_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot p_i,$$

então haveria

$$v_1 \leq \sum a_{i1} \cdot p_i, \dots, v_n \leq \sum a_{in} \cdot p_i$$

e

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_1 \end{pmatrix} < A^T \cdot p,$$

bem como

$$v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} < A^T \cdot p$$

e

$$v_1 \cdot \vec{1} < A^T \cdot p$$

o que é absurdo, pois não existe $p \in \Delta^{m-1}$ tal que $0 < A^T \cdot p - v_1 \cdot \vec{1}$. Conclui-se, então, que $v_1 \leq v_2$.

Seja

$$X = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = A^T \cdot p - v_1 \cdot \vec{1} \right\}$$

e

$$X \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset,$$

em que

$$\mathbb{R}_+^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} > 0\},$$

e, como X é convexo, então deve ser $v_1 = v_2$, pois, seja

$$x_1 = A^T \cdot p_1 - v_1 \cdot \vec{1} \text{ e } x_2 = A^T \cdot p_2 - v_1 \cdot \vec{1},$$

então

$$((1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) = A^T \cdot ((1 - \lambda) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_2) - v_1 \cdot \vec{1}.$$

Como

$$((1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) \in X$$

e

$$((1 - \lambda) \cdot p_1 + \lambda \cdot p_2) \in \Delta^{m-1},$$

então, pelo Teorema de Mincowski, existe $\hat{q} \geq 0$, tal que $q \in \Delta^{n-1}$, separando X de \mathbb{R}_+^n .

Como

$$\hat{q} \cdot X \leq 0 \leq q \cdot y,$$

para $y \in \mathbb{R}_+^n$, então

$$(A^T \cdot p - v_1 \cdot \vec{1}) \cdot \vec{q} \leq 0$$

e

$$p^T \cdot A \cdot q - v_1 \cdot (q_1 + \dots + q_n) \leq 0.$$

Segue disso que

$$p^T \cdot A \cdot \hat{q} \leq v_1,$$

Então

$$K(p, \hat{q}) \leq v_1$$

para todo $p \in \Delta^{m-1}$.

Como sabe-se que

$$K(e_1, \hat{q}) = L_1 \cdot \hat{q} \leq v_1, \dots, K(e_m, \hat{q}) = L_m \cdot \hat{q} \leq v_1,$$

então $v_2 \leq C(\hat{q}) \leq v_1$ e $v_2 \leq v_1$. Logo, $v_2 = v_1$, como comentado anteriormente.

Como

$$F(p) = F(p) = \min_{i \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_i = \sum a_{ik} \cdot p_i = p^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Então

$$F(p) = p^T \cdot A_{e_k} \leq p^T \cdot A_{e_j} = K(p, e_j)$$

e , para $q \in \Delta^{n-1}$,

$$F(p) \sum q_j \leq \sum p^T \cdot A_{q_j} \cdot e_j = p^T \cdot A \cdot q.$$

Então, ocorre que

$$F(p) \leq K(p, q)$$

e

$$F(p) = \min K(p, q), q \in \Delta^{n-1}.$$

Como

$$C(q) = \max_{i \leq j \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_i = \sum A_{ij} \cdot q_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_i, p \in \Delta^{m-1},$$

então, paralelamente,

$$C(q) = K(e_i, q) = \max K(p, q), p \in \Delta^{m-1}.$$

Logo,

$$\max_{p \in \Delta^{m-1}} (\min_{q \in \Delta^{n-1}} K(p, q)) = \min_{q \in \Delta^{n-1}} (\max_{p \in \Delta^{m-1}} K(p, q)). \blacksquare$$

4 AS DEMONSTRAÇÕES DO MODELO

Neste capítulo são apresentadas as demonstrações formais do modelo de von Neumann .

Na Seção 4.1, é apresentada a demonstração elementar de Loomis.

Na Seção 4.2, é apresentada a demonstração de Nikaido.

Na Seção 4.3, é apresentada a demonstração de von Neumann.

4.1 A Demonstração de Loomis

Loomis (1946) mostra que para solucionar o modelo apresentado por von Neumann, exposto na seção primeira do primeiro capítulo, não era necessário a utilização de matemática avançada. Conforme Loomis (1946, p. 213, tradução nossa), “J. von Neumann apontava a necessidade de uma prova elementar, que fora, originalmente, provado por ele com o uso do Ponto Fixo de Brouwer”. Tal demonstração contraria, principalmente a seguinte afirmação colocada em von Neuman (1945-1946, p. 1, tradução nossa): “a prova matemática somente é possível por meio da generalização do Teorema do Ponto-Fixo de Brouwer”.

Loomis mostra que existem $\delta \in \mathbb{R}$, $\vec{p} \in \Delta^{m-1}$, $\vec{q} \in \Delta^{n-1}$ tais que

$$\vartheta. \sum_j a_{ij} \cdot q_j(t) \geq \sum_j b_{ij} \cdot q_j(t), \forall i,$$

$$\delta. \sum_i a_{ij} \cdot p_i(t) \leq \sum_i b_{ij} \cdot p_i(t), \forall j,$$

se

$$\vartheta \cdot \sum_j a_{ij} \cdot p_i(t) > \sum_j b_{ij} \cdot p_i(t),$$

então $q_{i_0} = 0$,

Se

$$\delta \cdot \sum_i a_{ij} \cdot q_i(t) < \sum_i b_{ij} \cdot q_i(t),$$

então $p_{j_0} = 0$.

Observa-se, primeiramente, que

$$\vartheta \cdot \sum_j a_{ij} \cdot p_i(t) \geq \sum_j b_{ij} \cdot p_i(t), \forall i$$

e

$$\delta \cdot \sum_i a_{ij} \cdot q_i(t) \leq \sum_i b_{ij} \cdot q_i(t), \forall j$$

sempre tem solução.

Estabeleça-se a expressão

$$p = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos, então ϑ tal que

$$\vartheta \cdot a_{ij} \geq b_{ij}.$$

Então, para todo i ,

$$\vartheta \geq \frac{b_{ij}}{a_{ij}}.$$

Escolhemos, então,

$$\vartheta_L | \vartheta_L = \max_i \frac{b_{ij}}{a_{ij}}.$$

Logo, ϑ_L e \vec{e}_j são soluções de

$$\beta = \vartheta. \sum_j a_{ij} \cdot p_i(t) \geq \sum_j b_{ij} \cdot p_i(t), \forall i.$$

Similarmente, seja

$$q = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

uma expressão.

Dela tem-se que

$$\delta \cdot a_{ij} \leq b_{ij}.$$

Então, para todo j,

$$\delta \leq \frac{b_{ij}}{a_{ij}}.$$

Escolhemos, então,

$$\delta_M | \delta_M = \min_j \frac{b_{ij}}{a_{ij}}.$$

Logo, δ_M e \vec{e}_i são soluções de

$$\pi = \delta. \sum_i a_{ij} \cdot q_i(t) \leq \sum_i b_{ij} \cdot q_i(t), \forall j.$$

Sejam as expressões

$$M = \{m | \delta_m \text{ satisfaz } \pi\}$$

e

$$L = \{l | \vartheta_l \text{ satisfaz } \beta\},$$

com $M \neq \emptyset$ e $L \neq \emptyset$.

Estabelece-se, então, o lema a seguir, para provar que $\delta_m \leq \vartheta_l$.

Lema

Seja um $m \in M$ e um $l \in L$. Então $\delta_m \leq \vartheta_l$.

Demonstração

Como

$$\delta_m \cdot q^T \cdot A \leq q^T \cdot B,$$

através da expressão

$$\delta \cdot \sum_i a_{ij} \cdot q_i(t) \leq \sum_i b_{ij} \cdot q_i(t)$$

e

$$\vartheta_l \cdot A \cdot p \geq B \cdot p,$$

segundo a expressão

$$\vartheta \cdot \sum_j a_{ij} \cdot p_j(t) \geq \sum_j b_{ij} \cdot p_j(t),$$

então

$$\delta_m \cdot q^T \cdot A \cdot p \leq q^T \cdot B \cdot p \leq q^T \cdot \vartheta_l \cdot A \cdot p.$$

Logo,

$$\delta_m \cdot q^T \cdot A \cdot p \leq \vartheta_l \cdot q^T \cdot A \cdot p.$$

Como

$$q^T \cdot A \cdot p = \sum a_{ij} \cdot q_i \cdot p_j > 0,$$

pois $q \neq 0$ e $p \neq 0$, então existe $q_i > 0$ e $p_j > 0$ tal que $\delta_m \leq \vartheta_l$. ■

Nota-se disso que δ_m é limitado superiormente por ϑ_l , para todo l , bem como ϑ_l é limitado inferiormente por δ_m , para todo m . Sejam, pois, $\delta_{m_0} = \sup \delta_m$ e $\vartheta_{l_0} = \inf \vartheta_l$, então $\delta_{m_0} \leq \vartheta_{l_0}$. Visto que, para todo m e, para todo l , $\delta_m \leq \vartheta_l$ ocorre de $\delta_{m_0} \leq \vartheta_{l_0}$. Logo, $\delta_m \leq \vartheta_l$.

Lema

Existe $q_0 \in \Delta^{n-1}$ tal que $\delta_{m_0} \cdot \sum_i a_{ij} \cdot q_{0i} \leq \sum_i b_{ij} \cdot q_{0i}$, para todo j .

Demonstração

Seja $\delta_{m_r} \rightarrow \delta_{m_0}$. Como $m_r \in M$, então existe $q_n \in \Delta^{n-1}$ tal que

$$\delta_{m_r} \cdot q_r^T \cdot A \leq q_r^T \cdot B.$$

Como Δ^{n-1} é compacto, então existe $q_{r_k} \rightarrow q_0 \in \Delta^{n-1}$. Então $\delta_{m_{r_k}} \rightarrow \delta_{m_0}$, $q_{r_k}^T \rightarrow q_0^T$ e

$$\delta_{m_{r_k}} \cdot q_{r_k}^T \cdot A \leq q_{r_k}^T \cdot B \rightarrow \delta_{m_0} \cdot q_0^T \cdot A \leq q_0^T \cdot B. \blacksquare$$

Lema

Existe $p_0 \in \Delta^{m-1}$ tal que $\vartheta_{l_0} \cdot \sum_j a_{ij} \cdot p_{0j} \geq \sum_j b_{ij} \cdot p_{0j}$, para todo 'i'.

Demonstração

Seja $\vartheta_{l_c} \rightarrow \vartheta_{l_0}$. Como $l_c \in L$, então existe $p_m \in \Delta^{m-1}$ tal que

$$\vartheta_{l_c} \cdot p_c^T \cdot A \geq p_c^T \cdot B.$$

Como Δ^{m-1} é compacto, então existe $p_{cf} \rightarrow p_0 \in \Delta^{m-1}$. Então $\vartheta_{l_{cf}} \rightarrow \vartheta_{l_0}$, $p_{cf}^T \rightarrow p_0^T$ e

$$\vartheta_{l_{cf}} \cdot p_{cf}^T \cdot A \geq p_{cf}^T \cdot B \rightarrow \vartheta_{l_0} \cdot p_0^T \cdot A \geq q_0^T \cdot B. \blacksquare$$

Observa-se que, caso existam $q_0 \in \Delta^{n-1}$ e $p_0 \in \Delta^{m-1}$ tais que

$$\delta_{m_0} \cdot \sum_i a_{ij} \cdot q_{0i} = \sum_i b_{ij} \cdot q_{0i}$$

e

$$\vartheta_{l_0} \cdot \sum_j a_{ij} \cdot p_{0j} = \sum_j b_{ij} \cdot p_{0j},$$

então $\delta_{m_0} = \vartheta_{l_0}$.

Observa-se, também, para tal lema, que existe q_0, p_0 tal que

$$\delta_0 \cdot q_0^T \cdot A = q_0^T \cdot B$$

e

$$\vartheta_0 \cdot A \cdot p_0 = B \cdot p_0.$$

Então, caso exista $\vartheta_0 = \delta_0, q_0, p_0$, o modelo é satisfeito.

Teorema

$\delta_0 = \vartheta_0$ vale para q_0, p_0 nas hipóteses do modelo. Existem $\delta, \vartheta \in \mathbb{R}$, $\vec{p} \in \Delta^{m-1}$, $\vec{q} \in \Delta^{n-1}$, tais que as hipóteses do modelo apresentadas na seção 1 do capítulo 1 são cumpridas.

Demonstração

A demonstração é feita por indução sobre $K = n + m$.

Primeiramente, mostrar-se-á que o resultado é válido para

$$K = 2 = n + m, n = m = 1.$$

Se

$$\delta_0 = \vartheta_0 = \frac{b_{11}}{a_{11}},$$

então

$$\delta_0 \cdot 1 \cdot a_{11} = 1 \cdot b_{11} = 1$$

e, também,

$$\vartheta_0 \cdot 1 \cdot a_{11} = 1 \cdot b_{11} = 1,$$

bem como

$$\delta_0 = \vartheta_0 = 1.$$

Também, tem-se que $q_0 = p_0 = 1$ para este caso.

Seguindo, mostrar-se-á que o resultado é válido para $K = n + m \geq \dots, K - 1, \dots, 2$.
Seja, então, $K + 1 = n + m + 1$.

Para fazer o raciocínio sobre as restrições de preços e juros, estabelece-se que, dada a hipótese sobre ϑ_0 , $\vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} = \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j}$ é válido para $i = 1, \dots, n_1$ e estabelece-se que, dada a mesma hipótese, $\vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} > \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j}$ é válido para $i = n_1 + 1, \dots, n$.

Temos, então, as submatrizes

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1} & \cdots & a_{n_1 m} \end{pmatrix}$$

e

$$B^* = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_1 1} & \cdots & b_{n_1 m} \end{pmatrix}.$$

Como

$$n_1 + m < K + 1,$$

então o resultado é válido para $n_1 + m$ e $\delta^* = \vartheta^*$, sendo que

$$\delta^* \cdot \sum_i a_{ij} \cdot p_i^* \leq \sum_i b_{ij} \cdot p_i^*$$

e

$$\vartheta^* \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j^* \geq \sum_j b_{ij} \cdot q_j^*,$$

para $i = 1, \dots, n_1$.

Consideremos

$$p^s = \begin{pmatrix} p_1^s \\ \vdots \\ p_{n_1}^s \\ 0_{n_1+1} \\ \vdots \\ 0_m \end{pmatrix}$$

e

$$q^s = \begin{pmatrix} q_1^s \\ \vdots \\ q_n^s \end{pmatrix}.$$

analisando tais expressões como matrizes, temos que

$$\delta^* \cdot p^{sT} \cdot A = \delta^* \cdot p^{*T} \cdot A^*$$

e

$$p^{ST} \cdot B = p^{*T} \cdot B.$$

Então,

$$\delta^* \cdot p^{ST} \cdot A \leq p^S \cdot B$$

e $\delta^* = \delta_0$. Por outro lado, temos que

$$\vartheta^* \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j^* > \sum_j b_{ij} \cdot q_j^*,$$

para $i = 1, \dots, n$. Quando desconsideramos $i = n_1 + 1, \dots, n$, então, a hipótese continua válida e $\vartheta_0 \geq \vartheta^*$, pois ϑ^* é o ínfimo dos ϑ_0 que satisfazem a desigualdade até n_1 e tem menos restrições que ϑ_0 .

Faz-se a suposição de que $\vartheta_0 > \vartheta^*$.

Seja, então,

$$P = \varphi \cdot q_0 + (1 - \varphi) \cdot q^*, 0 < \varphi < 1.$$

Para $i = 1, \dots, n_1$, tem-se que

$$\vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot (\varphi \cdot q_0 + (1 - \varphi) \cdot q^*) = \varphi \cdot \vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j^*.$$

Então, temos que

$$\varphi \cdot \vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j^* > \varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \vartheta^* \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j^*$$

e

$$\varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \vartheta^* \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j^* \geq \varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_j^* = \sum_j b_{ij} \cdot q_j.$$

Para $i = n_1 + 1, \dots, n$, como tem-se que

$$\vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} > \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j}$$

e

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1^-} (1 - \varphi) \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_j^* = 0,$$

ocorre que

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1^-} \left[\vartheta_0 \cdot \varphi \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} - \varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} - (1 - \varphi) \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j^* \right] = \lim_{\varphi \rightarrow 1^-} \left[\vartheta_0 \cdot \varphi \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} - \varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} \right] > 0.$$

Então, é possível escolher $\varphi \simeq 1$ tal que

$$\vartheta_0 \cdot \varphi \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} > \varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_j^*.$$

Tem-se, então, que

$$\vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot (\varphi \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot q_j^*) \geq \vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} > \varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_j^*$$

e

$$\vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_{0j} > \varphi \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_{0j} + (1 - \varphi) \cdot \sum_j b_{ij} \cdot q_j^* = \sum_j b_{ij} \cdot q_j.$$

Então temos, para $i = 1, \dots, n$, que $\vartheta_0 \cdot \sum_j a_{ij} \cdot q_j > \sum_j b_{ij} \cdot q_j$, o que contraria o postulado de que ϑ_0 é ínfimo. Então $\vartheta_0 = \vartheta^* = \delta_0$.

O mesmo raciocínio feito para a restrição sobre preços e juros é feito para a restrição sobre crescimento e intensidade de produção, finalizando, assim a demonstração do modelo. ■

4.2 A Demonstração de Nikaido

Nikaido (1978), em seu livro 'Métodos Matemáticos Del Análisis Económico Moderno', fornece-nos uma demonstração para a existência de equilíbrio para o modelo de von Neumann utilizando para tal o fato de que o equilíbrio é um ponto de sela. Tal demonstração é importante dado o fato de que von Neumann concluiu sua demonstração através do uso de ponto fixo.

Há, aqui, também, a interação da teoria dos jogos com a economia, visto que o teorema Minimax é utilizado correntemente na teoria dos jogos e, aqui serve para demonstrar a existência de crescimento equilibrado na economia. Segundo Nikaido (1978, p. 253, tradução nossa), "se viu que a conclusão mais importante do modelo se obtinha igualmente com uma demonstração mais elementar (concretamente mediante a aplicação dos teoremas de separação)".

Teorema

Se existe solução para o modelo, então existe θ , tal que $\theta = \delta = \vartheta \geq 0$.

Demonstração

Se $p_0 > 0$, ocorre que

$$\vartheta \cdot \sum a_{ij} \cdot q_{0i} = \sum b_{ij} \cdot q_{0i}$$

e, se $p_{0j} = 0$, advém o fato de

$$\vartheta \cdot \sum a_{ij} \cdot q_{0i} > \sum b_{ij} \cdot q_{0i}$$

Ambas as situações implicam que

$$\vartheta \cdot \sum a_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j} = \sum b_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j},$$

e, da mesma forma,

$$\delta \cdot \sum a_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j} = \sum b_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j},$$

para todo i e para todo j .

Tais afirmações implicam que

$$(1 + \vartheta) \cdot \sum a_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j} = \sum (a_{ij} + b_{ij}) \cdot q_{0i} \cdot p_{0j}$$

e

$$(1 + \delta) \cdot \sum a_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j} = \sum (a_{ij} + b_{ij}) \cdot q_{0i} \cdot p_{0j}.$$

Como

$$(a_{ij} + b_{ij}) > 0,$$

ocorre que

$$\sum (a_{ij} + b_{ij}) \cdot q_{0i} \cdot p_{0j},$$

pois $q \in \Delta^{m-1}$ e $p \in \Delta^{n-1}$.

Portanto, tem-se que $\delta = \vartheta$ e, como

$$(a_{ij} + b_{ij}) > 0,$$

sucedede que ou

$$a_{ij} > 0,$$

ou

$$b_{ij} > 0,$$

para todo i e para todo j ; tal afirmação implica que ou

$$\sum a_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j} > 0,$$

ou

$$\sum b_{ij} \cdot q_{0i} \cdot p_{0j} > 0.$$

De ambas afirmações acima, advém que $\delta \geq 0$ e $\vartheta \geq 0$. ■

Considerando o fato de que, tanto $q > 0$, quanto $p > 0$ são relações homogêneas em p e q , podemos, como no caso de um jogo dado por uma matriz quadrada, estabelecer a seguinte matriz:

$$C_w = B - w \cdot A.$$

Sabe-se que esse jogo está estritamente determinado para qualquer valor de w e que ele tem um ponto de sela.

Então, pelo teorema Minimax, existe um $q_w \in \Delta^{m-1}$ e um $p_w \in \Delta^{n-1}$ tais que

$$q_w^T \cdot C_w \cdot p_w = \max_{q \in \Delta^{m-1}} (\min_{p \in \Delta^{n-1}} q^T \cdot C_w \cdot p) = \min_{p \in \Delta^{n-1}} (\max_{q \in \Delta^{m-1}} q^T \cdot C_w \cdot p)$$

e

$$q^T \cdot C_w \cdot p_w \leq q_w^T \cdot C_w \cdot p_w \leq q_w^T \cdot C_w \cdot p.$$

Teorema

Existe q_θ , p_θ e θ solução do modelo de von Neuman se e somente se V , o valor do jogo é tal que $V(\theta) = 0$ e (q_θ, p_θ) é um ponto de sela da função de ganhos, representada por C_w do jogo anteriormente mencionado.

Demonstração

Primeiro, mostrar-se-á que existe q_θ , p_θ e θ solução do modelo de von Neuman se V , o valor do jogo é tal que $V(\theta) = 0$ e (q_θ, p_θ) é um ponto de sela da função de ganhos, representada por C_w .

Caso se faça a leitura em termos matriciais, ter-se-ia, dadas as expressões anteriores que, ambos

$$\theta \cdot q_\theta^T \cdot A \cdot p_\theta \leq q_\theta^T \cdot B \cdot p_\theta,$$

e

$$\theta \cdot q_\theta^T \cdot A \cdot p_\theta \geq q_\theta^T \cdot B \cdot p_\theta,$$

ocorrem.

Tem-se, então a expressão

$$\theta \cdot q_\theta^T \cdot A \cdot p_\theta = q_\theta^T \cdot B \cdot p_\theta,$$

e, disso, afirma-se que

$$q_\theta^T \cdot (B - \theta \cdot A) \cdot p_\theta = 0 = V(\theta),$$

o que condiz com o teorema.

A partir de tal fato, tem-se

$$\theta \cdot q_\theta^T \cdot A \leq q_\theta^T \cdot B,$$

e, daí, sucede

$$\theta \cdot q_\theta^T \cdot A \cdot p \leq q_\theta^T \cdot B \cdot p.$$

Colhe-se, da expressão imediatamente anterior e da primeira expressão o seguinte fato:

$$0 \leq q_\theta^T \cdot (B - \theta \cdot A) \cdot p$$

e, disso, finalmente, obtém-se

$$q_\theta^T \cdot (B - \theta \cdot A) \cdot p_\theta \leq q_\theta^T \cdot (B - \theta \cdot A) \cdot p.$$

Do mesmo fato, extrai-se que

$$\theta \cdot A \cdot p_\theta \geq B \cdot p_\theta$$

e, com mais razão, sucede

$$\theta \cdot q^T \cdot A \cdot p_\theta \geq q^T \cdot B \cdot p_\theta.$$

Do fato anterior, afirma-se que

$$q_\theta^T \cdot (B - \theta \cdot A) \cdot p \geq 0$$

e, acrescenta-se o fato de que

$$q_\theta^T \cdot (B - \theta \cdot A) \cdot p_\theta \geq q_\theta^T \cdot (B - \theta \cdot A) \cdot p,$$

o que finaliza essa primeira parte.

Seguindo, mostrar-se-á que existe q_θ , p_θ e θ solução do modelo de von Neuman somente se V , o valor do jogo é tal que $V(\theta) = 0$ e (q_θ, p_θ) é um ponto de sela da função de ganhos, representada por C_w .

Sejam w_1, w_2 tais que $w_1 < w_2$. Acompanha o referido fato a expressão

$$C_{w_1} = B - w_1 \cdot A$$

e a expressão

$$C_{w_2} = B - w_2 \cdot A.$$

Esse fato implica, quando é observada a matriz nas colunas,

$$\sum_i c_{ij}(w_2) \cdot q_i - \sum_i c_{ij}(w_1) \cdot q_i = \sum_i (b_{ij} - w_2 \cdot a_{ij}) \cdot q_i - \sum_i (b_{ij} - w_1 \cdot a_{ij}) \cdot q_i =$$

e

$$\sum_i (b_{ij} - w_2 \cdot a_{ij}) \cdot q_i - \sum_i (b_{ij} - w_1 \cdot a_{ij}) \cdot q_i = (w_2 - w_1) \cdot \sum_i a_{ij} \cdot q_i.$$

Como $a_{ij} \geq 0$, seja $\max_{i,j} a_{ij} = \gamma > 0$. Assim, estabelece-se

$$\sum [c_{ij}(w_2) - c_{ij}(w_1)] \cdot q_i \leq (w_2 - w_1) \cdot \sum_i \gamma \cdot q_i = (w_2 - w_1) \cdot \gamma,$$

visto que $\sum_i q_i = 1$ e $q \in \Delta^{m-1}$. Afirma-se, da mesma forma que tal fato ocorre, também, com p , visto que $\sum_j p_j = 1$ e $p \in \Delta^{n-1}$.

Desse fato, advém

$$\sum_j \sum_i [c_{ij}(w_2) - c_{ij}(w_1)] \cdot q_i \cdot p_j \leq (w_2 - w_1) \cdot \gamma \cdot \sum_j \sum_i q_i \cdot p_j = (w_2 - w_1) \cdot \gamma$$

e, seguindo, estabelece-se, em notação matricial, a partir do fato que as considerações acima são válidas para toda matriz,

$$q^T \cdot C(w_2) \cdot p \leq q^T \cdot C(w_1) \cdot p + (w_2 - w_1) \cdot \gamma.$$

Quando q está fixado, ocorre

$$\min_{x \in \Delta^{n-1}} (q^T \cdot C(w_2) \cdot p) \leq \min_{x \in \Delta^{n-1}} (q^T \cdot C(w_1) \cdot p) + (w_2 - w_1) \cdot \gamma$$

e, se q varia, tem-se

$$\max_{q \in \Delta^{m-1}} [\min_{x \in \Delta^{n-1}} (q^T \cdot C(w_2) \cdot p)] \leq \max_{q \in \Delta^{m-1}} [\min_{x \in \Delta^{n-1}} (q^T \cdot C(w_1) \cdot p)] + (w_2 - w_1) \cdot \gamma.$$

Sabe-se que

$$V(w_2) \leq V(w_1) + (w_2 - w_1) \cdot \gamma$$

e

$$V(w_2) - V(w_1) \leq (w_2 - w_1) \cdot \gamma$$

e, como- por outro lado- tem-se que

$$\sum_i [c_{ij}(w_1) - c_{ij}(w_2)] \cdot q_i = (w_1 - w_2) \cdot \sum_i a_{ij} \cdot q_i,$$

ocorre, em notação matricial, o fato de que

$$0 \leq q^T \cdot C_{w_1} \cdot p - q^T \cdot C_{w_2} \cdot p.$$

Ainda, estabelece-se

$$q^T \cdot C_{w_2} \cdot p \leq q^T \cdot C_{w_1} \cdot p$$

e, conclui-se, finalmente, que $V(w_2) \leq V(w_1)$.

Como sabemos que

$$0 \leq V(w_1) - V(w_2) \leq (w_2 - w_1) \cdot \gamma,$$

tem-se, portanto, V é contínua e não-crescente. Infere-se que $C(0) = B$ e estabelece-se que

$$V(0) = \max_{q \in \Delta^{m-1}} (\min_{p \in \Delta^{n-1}} [q^T \cdot B \cdot p]) \geq 0.$$

Dada a expressão

$$\min_i \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} = L > 0$$

e a expressão

$$\max_i \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} = M > 0$$

coloca-se, então,

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \Delta^{n-1}$$

e, estabelece-se

$$A \cdot \hat{x} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} \cdot \hat{x}_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj} \cdot \hat{x}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \cdot \sum a_{1j} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \cdot \sum a_{nj} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} L \\ \vdots \\ L \end{pmatrix}.$$

Analogamente, tem-se que

$$B \cdot \hat{x} \leq \begin{pmatrix} M \\ \vdots \\ M \end{pmatrix},$$

bem como, incorre disso que

$$(B - w.A).\hat{x} \leq \begin{pmatrix} M - w.L \\ \vdots \\ M - w.L \end{pmatrix}$$

e, a partir de tal afirmação, afirma-se ser

$$\frac{M}{L} \leq w$$

se, e somente se

$$M - w.L \leq 0.$$

Mas, se

$$\frac{M}{L} \leq w,$$

então ocorre que

$$q^T.(B - w.A).\hat{x} \leq 0,$$

e

$$q_\theta^T.C(w).\hat{x} \leq 0.$$

Como sabe-se que

$$q_\theta^T.C(w).\hat{x}_\theta \leq 0,$$

então, pelo teorema Minimax, sucede

$$q_\theta^T.C(w).\hat{x}_\theta \leq q_\theta^T.C(w).\hat{x}$$

E, portanto, $V(w) \leq 0$ e existe θ , tal que

$$V(\theta) = 0$$

é solução. ■

4.3 A Demonstração de von Neumann.

A seguir, é feita a exposição da demonstração do artigo de 1945 de von Neumann com uma única modificação. É demonstrado em von Neumann (1945-1946) o lema da intersecção para convexos e compactos quaisquer e, na demonstração que segue, tal lema é demonstrado para simplexos. Isto porque, para o modelo de equilíbrio, o lema necessário é estabelecido para simplexos e fora demonstrado, na seção 11 do capítulo 'A Matemática Necessária para as Demonstrações', o Teorema de Brouwer para o mesmo caso.

A prova estabelecida por von Neumann mostra, primeiramente, que soluções para as desigualdades sempre existem e que podem haver várias possibilidades de vetores de preços e de intensidade de produção que as satisfaçam. Tal prova mostra, também, que δ e ϑ são unicamente determinados e que ambos têm o mesmo valor.

Lema

Sejam

$$S^0 = \Delta^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$$

e

$$T^0 = \Delta^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Sejam, também, $V \subseteq S^0 \times T^0$, $W \subseteq S^0 \times T^0$. Estabelece-se que V e W são fechados. Para todo $p \in S^0$ e para todo $q \in T^0$, define-se

$$Q(p) = \{q \in T^0 \mid (p, q) \in V\}$$

e

$$P(q) = \{p \in S^0 \mid (p, q) \in W\}.$$

Coloca-se, também, que $Q(p) \neq \emptyset$ e $P(q) \neq \emptyset$, assim como eles são compactos e convexos. Então, $V \cap W \neq \emptyset$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$ e para $p, p' \in \mathbb{R}^m$, define-se

$$W^\varepsilon = \max \left(0, 1 - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|p - p'\| \right).$$

Apresentado $p \in S^0$, escolhe-se um $q^0(p) \in Q(p)$ qualquer. Então, ocorre que

$$q^0(p) = (q_1^0(p), \dots, q_n^0(p)) \in Q(p) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

A partir disso, define-se

$$q^\varepsilon(p) = (q_1^\varepsilon(p), \dots, q_n^\varepsilon(p)) \in Q(p) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Seja a seguinte fórmula:

$$q_j^\varepsilon(p) = \frac{\int_{S^0} W^\varepsilon(p, p') \cdot q_j^0(p) dp'}{\int_{S^0} W^\varepsilon(p, p') dp'}.$$

Através da referida expressão, pode-se mostrar que:

1. $q^\varepsilon(p) \in T^0$, isto é, $q^\varepsilon: S^0 \rightarrow T^0$;
2. $q^\varepsilon(p)$ é contínua;
3. Para cada $\varphi > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\|(p, q^\varepsilon(p)) - V\| < \varphi$$

para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, em que a expressão acima é a distância do ponto $(p, q^\varepsilon(p))$ ao conjunto V .

Da mesma forma que definiu-se a expressão $q^\varepsilon(p)$, define-se $p^\varepsilon(q)$ e mostrar que, através da expressão

$$p_i^\varepsilon(q) = \frac{\int_{T^0} V^\varepsilon(q, q') \cdot p_i^0(q) dq'}{\int_{T^0} V^\varepsilon(q, q') dq'},$$

os seguintes registros são válidos:

4. $p^\varepsilon(q) \in S^0$, isto é, $p^\varepsilon: T^0 \rightarrow S^0$;
5. $p^\varepsilon(q)$ é contínua;
6. Para cada $\varphi > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\|(q, p^\varepsilon(q)) - W\| < \varphi$$

para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, em que a expressão acima é a distância do ponto $(q, p^\varepsilon(q))$ ao conjunto W .

Seja, também, $f_\varphi: S^0 \rightarrow S^0$ tal que

$$f_\varphi(p) = p_\varphi(q_\varphi(p)).$$

Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, existe um ponto fixo $p_*^\varphi \in S^0$, tal que

$$f_\varphi(p_*^\varphi) = p_*^\varphi.$$

Seja $q_\varphi(p_*^\varphi) = q_*^\varphi$, então

$$p_\varphi(q_*^\varphi) = f_\varphi(p_*^\varphi) = p_*^\varphi$$

e

$$\|(q_*^\varphi, p_*^\varphi) - W\| < \varphi,$$

bem como

$$\|(q_*^\varphi, p_*^\varphi) - V\| < \varphi.$$

Visto que $(q_*^\varphi, p_*^\varphi) \in S^0 \times T^0$ e, como S^0 e T^0 são compactos, então p_*^φ e q_*^φ possuem subsequências convergentes para, por exemplo, p_* e q_* . Como $\|(q_*, p_*) - W\| < \varphi$ e $\|(q_*, p_*) - V\| < \varphi$, V e W são fechados, além do fato de que a distância de (q_*, p_*) a $V \times W$ é zero, então $p_* \in V$ e $q_* \in W$.

Logo, pode-se afirmar que $V \cap W \neq \emptyset$. ■

Teorema

Para o modelo de von Neumann, $\delta \leq \vartheta$.

Demonstração

Dado o modelo, estabelece-se δ tal que

$$\delta = \min_{j=1, \dots, n} \frac{\sum_i b_{ij} \cdot p_i}{\sum_i a_{ij} \cdot p_i}, p_i \in \Delta^{m-1}.$$

Então obtém-se que

$$\delta \leq \frac{\sum_i b_{ij} \cdot p_i}{\sum_i a_{ij} \cdot p_i}, p_i \in \Delta^{m-1}$$

e

$$\delta \cdot \sum_i a_{ij} \cdot p_i \leq \sum_i b_{ij} \cdot p_i, \forall j,$$

ou seja, em notação matricial, $\delta \cdot p^T \cdot A \leq p^T \cdot B$. Então,

$$\delta \cdot p^T \cdot A \cdot q \leq p^T \cdot B \cdot q,$$

para todo $p \in \Delta^{m-1}$ e para todo $q \in \Delta^{n-1}$.

Seja, dado o modelo, ϑ , tal que

$$\vartheta = \max_{j=1, \dots, n} \frac{\sum_i b_{ij} \cdot p_i}{\sum_i a_{ij} \cdot p_i}, p_i \in \Delta^{m-1}.$$

Então, tem-se que

$$\vartheta \geq \frac{\sum_i b_{ij} \cdot p_i}{\sum_i a_{ij} \cdot p_i}, p_i \in \Delta^{m-1}$$

e

$$\vartheta \cdot \sum_i a_{ij} \cdot p_i \geq \sum_i b_{ij} \cdot p_i, \forall j,$$

ou seja, em notação matricial, $\vartheta \cdot A \cdot p \geq B \cdot p$, bem como

$$\vartheta \cdot p^T \cdot A \cdot q \leq p^T \cdot B \cdot q,$$

para todo $p \in \Delta^{m-1}$ e para todo $q \in \Delta^{n-1}$.

Portanto, assegura-se que

$$\delta \cdot p^T \cdot A \cdot q \leq p^T \cdot B \cdot q \leq \vartheta \cdot p^T \cdot A \cdot q,$$

bem como $\delta \leq \vartheta$. ■

Teorema

Mostrar-se-á, finalmente que $\delta = \vartheta$.

Demonstração

Dado lema da interseção, sejam

$$V = \{(p, q) \in \Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1} \mid \delta \cdot p^T \cdot A \cdot q \geq p^T \cdot B \cdot q\}$$

e

$$W = \{(p, q) \in \Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1} \mid \vartheta \cdot p^T \cdot A \cdot q \leq p^T \cdot B \cdot q\},$$

ambos fechados e não-vazios, pois as aplicações $(p, q) \rightarrow p^T \cdot A \cdot q$ e $(p, q) \rightarrow p^T \cdot B \cdot q$ são contínuas definidas no espaço compacto $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$.

Estabelece-se, para todo $p \in \Delta^{m-1}$,

$$Q(p) = \{q \in \Delta^{n-1} \mid \delta \cdot p^T \cdot A \cdot q \geq p^T \cdot B \cdot q\}$$

e, para todo $p \in \Delta^{m-1}$,

$$P(q) = \{p \in \Delta^{m-1} \mid \vartheta \cdot p^T \cdot A \cdot q \leq p^T \cdot B \cdot q\}.$$

Como $Q(p)$ e $P(q)$ são compactos e convexos, bem como não-vazios, então, pelo lema da interseção, $V \cap W \neq \emptyset$.

Seja $(q_*, p_*) \in V \times W$, então ocorre que

$$\vartheta \cdot p_*^T \cdot A \cdot q_* \leq p_*^T \cdot B \cdot q_* \leq \delta \cdot p_*^T \cdot A \cdot q_*,$$

bem como o fato de $\vartheta \leq \delta$.

Como já fora mostrado que $\vartheta \geq \delta$, conclui-se que

$$\vartheta = \delta,$$

resultado final do modelo. ■

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho centrou-se na apresentação do modelo de von Neumann, nas discussões que este trouxe, nas demonstrações do modelo e na matemática necessária para tanto. Foi utilizado, para isso, as discussões de Champernowne e de Kurz e Salvadori principalmente na primeira parte, a matemática formal na segunda e os artigos de Loomis, Nikaidô e a demonstração original de von Neumann na parte final.

A aplicação do teorema do ponto fixo de Brouwer e da teoria dos jogos, através do teorema Minimax, possibilitou a demonstração da existência de equilíbrio para a economia e a utilização de uma linguagem matemática formal para as ciências sociais. Tal feito possibilitou e a resolução de problemas teóricos de grande importância para a ciência econômica, principalmente para o estudo da microeconomia. Em 1941, Kakutani generaliza o referido Teorema de Brouwer para correspondências das quais se deduz tanto o teorema Minimax, quanto o lema da intersecção.

Decorre disso o livro 'Theory of Games and Economic Behavior'²⁶, de von Neumann e Morgenstern, onde estão estabelecidos os fundamentos da teoria dos jogos. Surgem disso algumas demonstrações, análogas ao artigo 'A Model of General Economic Equilibrium', de existência de equilíbrio geral em economia. Morgenstern e von Neumann, naquele livro, assumem a existência de uma função de utilidade cardinal, e, através da utilização da generalização do teorema do ponto fixo feita por Kakutani, é demonstrada a existência de equilíbrio geral para jogos de n-pessoas sem a necessidade deles terem soma-zero.

A contextualização histórica sobre a demonstração de equilíbrio é de fundamental importância para a ciência econômica. Com tal prova, podemos explicar preços, quantidades produzidas, salários entre outros fatores econômicos. Ressalta-se, convenientemente, que, como von Neumann estava buscando uma forma de

²⁶ Somente nesse trabalho, publicado em 1944, von Neumann apresenta para a economia uma teoria que contém uma função de utilidade.

demonstrar a existência de equilíbrio, é razoável conceber que ele tenha utilizado um modelo arquitetado para ser equilibrado, como o fluxo circular de Schumpeter.

Sobre isso, a discussão sobre qual escola econômica von Neumann estava de fato tratando traz o seguinte caso: a matemática formal pode, então, ser utilizada inclusive sob a ótica da economia clássica. Tal uso permite afirmar-se que a matemática não serve para legitimar uma teoria sobre outra que não a utilize, mas para fazer a leitura de fatos econômicos através de outra linguagem: a própria discussão sobre se o modelo é clássico, neoclássico, ou Schumpeteriano, manifesta o fato de que tal linguagem pode ser aplicada em diversos contextos, para diversas problemáticas, não sobrepondo nenhuma teoria sobre as demais pelo uso da linguagem, mas elucidando questões importantes para a ciência econômica.

No final da década de 40, surgem novas abordagens matemáticas para a resolução de problemas econômicos. O surgimento, por exemplo, da programação linear²⁷ municia a economia matemática com novos métodos, como o algoritmo simplex: a criação deste foi estimulada pela criação da teoria dos jogos e pelo uso da matemática formal. O matemático John Nash, segundo Milnor (1998), teve papel decisivo no final da década de 1940 e no início da década de 1950 ao tratar da divisão de jogos entre jogos não cooperativos e jogos cooperativos. Sobre isso, inclusive através da utilização do Teorema do Ponto Fixo generalizado por Kakutani, Nash²⁸ demonstra, através de diversas restrições, a existência de equilíbrio em jogos não cooperativos, iniciando, assim, o tratamento da teoria dos jogos como esta é estudada atualmente.

²⁷ Ver Cottle (2006), 'George B. Dantzig: a legendary life in mathematical programming'.

²⁸ Ver Nash (1950), 'Equilibrium Points in n-Person' Games e, Nash (1951), 'Non-Cooperative Games'.

6 REFERÊNCIAS

BOREL, E. On Games that Involve Chance and the Skill of the Players. **Econometrica**, vol. 21, n. 1, pgs. 101-115, 1953.

BOREL, E. On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play. **Econometrica**, vol. 21, n. 1, pgs. 116-117, 1953.

BOREL, E. The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels. **Econometrica**, vol. 21, n. 1, pgs. 97-100, 1953.

CABRAL, M. J. C. P. John von Neumann's contribution to economic science. International **Social Science Review**, vol 78, 2003. Disponível em <http://www.questia.com/search>>. Acesso em: 20 ago. 2011.

CASSEL, G. The Rate of Interest, the Bank Rate, and the Stabilization of Prices. **The Quaterly Journal of Economics**, vol. 42, n. 4, pgs. 511-529, 1928.

CHAMPERNOWNE, D. G. A Note on J. v. Neumann's Article on "A Model of Economic Equilibrium". **The Review of Economic Studies**, vol. 13, n. 1, pgs. 10-18, 1945-1946.

COTTLE, R. W. Georg B. Dantzig: a legendary life in mathematical programming. **Mathematical Programming: Series A and B**, vol. 105, n. 1, pgs. 1-8, 2006.

DANTZIG, G. B. Constructive Proof of the Min-Max Theorem. Santa Monica: **Pacific Journal of Mathematics**, vol. 6, n. 1, pgs. 25-33, 1956.

DEBREU, G. **Theory of Value – An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium**. New Haven e Londres: Yale University Press, 1971.

GLORIA-PALERMO, S. Introducing Formalism in Economics: The Growth Model of John von Neumann. **Panoeconomicus**, n. 57, pgs. 153-172, 2010.

HABERLER, G. Schumpeter's Theory of Interest. **The Review of Economics and Statistics**, vol 33, n. 2, pgs. 122-128, 1951.

HALMOS, P. R. The Legend of John Von Neumann. **The American Mathematical Monthly**, vol. 80, n. 4, pgs. 382-394, 1973.

HARDY, G. H. **A Course of Pure Mathematics**. Cambridge: Ed. Cambridge University Press, 1908.

KOOPMANS, T. C. Economic Growth at a Maximal Rate. **Quarterly Journal of Economics**, vol. 78, pgs. 355-394, 1964.

KURZ, H. D.; Salvadori, N. Von Neumann's growth model and the 'classical' tradition. **The European Journal of the History of Economic Thought**, vol. 1, pgs. 129-160, 1993.

LEONARD, R. J. Creating a Context for Game Theory. **History of Political Economy**, vol 24, pgs. 29-76, 1992.

LEONARD, R. J. From Parlor Games to social Sciences: Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory 1928-1944. **Journal of Economic Literature**, vol. 33, n. 2, pgs. 730-761, 1995.

LEONARD, R. J. New Light on von Neumann: politics, psychology and the creation of game theory. **Università di Torino Working Paper Series**, n. 7, 2007.

LEONARD, R. J. Origins of Game Theory in Economics. In: Durlauf, D.; Blume, L. **The New Palgrave Dictionary of Economics**, Londres: Ed. Palgrave Macmillan, 2008. Disponível em < <http://www.dictionaryofeconomics.com/dictionary>>. Acesso em: 10 out 2011.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 1. 12 ed. Rio de Janeiro: Ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 2. 11 ed. Rio de Janeiro: Ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**, 4 ed. Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 2010.

LOOMIS, L. H. On a Theorem of von Neumann. **Proceedings of the National Academy of Sciences**. vol. 32, n.8, pp. 213-215, 1946.

MORGENSTERN, O. The Collaboration Between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games. **Journal of Economic Literature**, vol 14, n. 3, pgs. 805-816, 1976.

MORICOCCHI, L.; GONÇALVES, J. S. Teoria do Desenvolvimento Econômico de Schumpeter: Uma Revisão Crítica. **Informações Econômicas**, vol. 24, n. 8, pgs. 27-36, 1994.

NASH, J. F. Equilibrium Points in n-Person Games. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, vol.1 n. 1, pgs. 48-49, 1950.

NASH, J. F. Non-Cooperative Games. **The Annals of Mathematics, Second Series**, vol. 54, n. 2, pgs. 286-295, 1951.

NEUMANN, J. V. A Model of General Economic Equilibrium. **The Review of Economic Studies**, vol. 13, n. 1, pgs. 1-9, 1945-1946.

NEUMANN, V. J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**, 3 ed. Princeton: Ed. Princeton University Press, 1953.

NIKAIDO, H. **Métodos Matemáticos Del Análisis Económico Moderno**. Barcelona: Ed. Vicens-Vives, 1978.

SCHUMPETER, J. A. **Teoria do Desenvolvimento Econômico – Uma Investigação Sobre Lucros, Capital, Crédito, Juro e o Ciclo Econômico**. São Paulo: Ed. Nova Cultural Ltda., 1997.

SMITH, A. **A Riqueza das Nações**. 1 ed. São Paulo: Ed. Martins Fontes, vol. 1, 2003.

TOMPKINS, C. B. Sperner's Lemma and Some Extensions. In: Beckenbach, E. F. **Applied Combinatorial Mathematics**. Nova York: Ed. Krieger Pub Co, pgs. 416-427, 1981.

ULAM, S. Tribute to John von Neumann. **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol. 64, n. 3, pgs. 1-49, 1958.