UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

TANISE BRANDÃO BUSSMANN

A ESCOLA FORMALISTA NA MATEMÁTICA E SEU IMPACTO SOBRE A CIÊNCIA ECONÔMICA

PORTO ALEGRE
2011

Tanise Brandão Bussmann

A ESCOLA FORMALISTA NA MATEMÁTICA E SEU IMPACTO SOBRE A CIÊNCIA ECONÔMICA

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

Porto Alegre
2011

Tanise Brandão Bussmann

A ESCOLA FORMALISTA NA MATEMÁTICA E SEU IMPACTO SOBRE A CIÊNCIA ECONÔMICA

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Economia, da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovada em____de_____________de 2011.

____

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo (orientador) - UFRGS

____

Prof. Dr. Eduardo Maldonado – UFRGS

____

Prof. Dr. Carlos Schimidt – UFRGS

Porto Alegre

2011

Para meu avô Ruy.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que me auxiliaram durante a minha graduação na universidade. Inicialmente, gostaria de expressar a minha gratidão pela minha mãe, Maria Rosa Brandão, que forneceu as melhores condições para meu desenvolvimento intelectual, além de mostrar a importância do estudo e me apoiar de forma material.

Agradeço ao professor Jorge Araújo, meu orientador, pela sua paciência e pelo apoio técnico, sem os quais esta monografia não teria condições de ser elaborada. Seu exemplo enquanto professor, comprometido com o ensino de qualidade na Universidade, foi muito importante e me causa bastante admiração.

Sou grata pela paciência do meu namorado, Guilherme Risco, durante a elaboração desta monografia, além de seu auxílio na correção ortográfica do trabalho. Agradeço a minha família e aos meus amigos pela compreensão durante este período, e pelo auxílio da minha amiga Adriana Schneider, na formatação deste trabalho.

Por fim, agradeço às demais pessoas que me auxiliaram de alguma forma durante a minha formação acadêmica: aos professores e funcionários da faculdade de Ciências Econômicas. Em especial ao professor Hélio Henkin, com quem trabalhei durante minha graduação. Também agradeço a biblioteca Gladis Wiebbelling do Amaral e seus funcionários, onde realizei parte significante desta monografia.

RESUMO

Este trabalho tratará de analisar a teoria formalista na matemática e suas implicações na teoria econômica. Buscando contextualizar a escola, será feita uma exposição da Crise dos Fundamentos, assim como as demais escolas que, junto com a escola formalista, buscaram resolver esta crise. A tentativa formalista de resolver a Crise dos Fundamentos é frustrada pelo Teorema da Incompletude de Gödel, mas a utilização do *modus operandi* formalista seguiu de forma importante na teoria econômica. Será realizada uma descrição dos principais teóricos formalistas – David Hilbert, John von Neumann e Nicolas Bourbaki –, caracterizando os avanços realizados por eles. Mostraremos os desenvolvimentos de von Neumann e de Debreu aplicando o método formalista à teoria econômica. Será exposta a forma como a teoria formalista influenciou a teoria econômica, afastando-a da empiria e utilizando mais abstrações, como as modelagens. As críticas que surgiram pela aplicação destes métodos também serão objeto de análise.

Palavras-chave: Economia Matemática. Método Axiomático. Analogia Mecânica. Analogia Matemática. Formalismo.

Classificação JEL: C00, C02, C70

ABSTRACT

This work seeks to analyze the mathematic formalist theory and its implications in economic theory. Seeking to contextualize this school, it will be done an exposition of the Mathematics Foundations Crisis, as the other schools that, with formalist school, tried to solve this crisis. The formalist attempt of solving the Foundations Crisis is frustrated by Gödel Incompleteness Theorem, but the formalistic *modus operandi* continued useful in mathematics. It will be realized a description of the main formalistic theorists – David Hilbert, John von Neumann and Nicolas Bourbaki –, characterizing the advances made by them. We will show von Neumann and Debreu development applying the formalistic method in economic theory. Will be shown the way that formalist theory influenced economic theory, moving it away from empirism and using more abstractions, as modeling. The critics that arise by the application of this methods will be analyzed too.

Keywords: Mathematical Economics. Axiomatic Method. Mechanical Analogy. Mathematical Analogy. Formalism.

JEL Classification: C00, C02, C70

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho busca responder quais foram as influências da escola formalista na economia. Sabemos que as transformações científicas normalmente não se restringem a uma disciplina ou área de conhecimento. Durante a Segunda Guerra Mundial deu-se uma maior interação entre as ciências por causa da guerra, o que acabou aumentando a interação entre os diversos domínios científicos (ISRAEL; GASCA, 2009).

A escola formalista surge durante a chamada Crise dos Fundamentos. A Crise dos Fundamentos tem inicio quando os matemáticos observam as contradições explícitas na Teoria dos Conjuntos. Buscando por fim nessas contradições, diversos matemáticos sugerem soluções. A tentativa de basear a matemática apenas através dos conceitos que são aceitáveis intuitivamente é a sugestão da escola intuicionista, que tem como um de seus expoentes Luitzen Brouwer. Bertrand Russell propõe a fundamentação da matemática na lógica, o que se torna conhecido como a escola logicista. A última escola é a formalista, que tem como objetivo a criação de um corpo axiomático representativo da Teoria dos Conjuntos, iniciando pela definição dos elementos principais dessa teoria e o estabelecimento das relações em termos de fórmulas, que podem ser axiomas ou demonstrações (SNAPPER, 1979; HILBERT; 1993b). Os axiomas são os elementos iniciais, as fórmulas que compõem a base da teoria, enquanto as demonstrações são obtidas pelo desenvolvimento destes axiomas. Ou seja, uma demonstração deve ser reduzida a alguns axiomas após um número de passos (SNAPPER, 1979; HILBERT; 1993b).

David Hilbert, expoente da escola formalista, consegue fundamentar a Teoria dos Conjuntos na consistência da aritmética. Então ele passa a desenvolver o chamado Programa de Hilbert[1], cujo objetivo é provar a consistência da aritmética. No entanto, Gödel acaba por mostrar que não é possível provar a consistência da aritmética com seu Teorema da Incompletude, colocando um fim no Programa de Hilbert. (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009). Com isso, o objetivo inicial da teoria formalista é mostrado como impossível de se alcançar.

---

[1] Tradução do inglês de *Hilbert's Program.*

A possibilidade de utilizar o método formalista como *modus operandi* não perde importância com o Teorema da Incompletude da Aritmética de Gödel. John von Neumann, matemático húngaro que trabalhou no projeto de Hilbert, salienta que a validade do método axiomático segue, dado que seus resultados são válidos e uma série de qualidades, como maior clareza e concisão, são obtidas por este método (ISRAEL; GASCA, 2009). Os desenvolvimentos axiomáticos de von Neumann e Hilbert não são totalmente descolados da realidade, sendo necessária uma verificação na realidade dos resultados obtidos na teoria. O caráter empiricista de David Hilbert pode ser observado no seu livro intitulado os Fundamentos da Geometria[2], publicado inicialmente em 1899 (CORRY, 2000; 2002; SIEG, 2002).

O método axiomático também é desenvolvido por Nicolas Bourbaki, entidade francesa. Este grupo, conforme Dieudonné (1970) e Bourbaki (1990), têm como objetivo criar uma estrutura para toda a matemática, observando um grupo de axiomas que funcionaria como base para esta ciência. No desenvolvimento de Bourbaki, não é possível observar o caráter empiricista que existia nos matemáticos anteriores.

Bourbaki influencia também Gérard Debreu, que busca aplicar o método axiomático para a economia (DEBREU, 1959). Além de Debreu, serão apresentados outros trabalhos aplicados à economia que mostram as alterações ocorridas a partir da difusão dos métodos axiomáticos. Estes desenvolvimentos não foram aceitos por todos os teóricos da ciência econômica e, por este motivo, suas críticas serão brevemente apresentadas.

É importante ressaltar que, neste trabalho, a ciência econômica se restringe a área dos modelos de equilíbrio geral, ao desenvolvimento da teoria dos jogos e da teoria do valor. Ou seja, a totalidade da economia não será levada em conta, sendo realizada uma análise parcial dos setores da teoria econômica que foram pioneiros na utilização dos métodos matemáticos.

[2] Tradução do alemão de *Grundenlagen Der Geometrie.*

2 O FORMALISMO COMO MÉTODO MATEMÁTICO

Este capítulo tratará das origens da escola formalista. Ela emerge em um contexto onde a Teoria dos Conjuntos está em xeque. Esse período foi convencionado de Crise dos Fundamentos, devido às contradições presentes nesta teoria. Diversos matemáticos também buscaram retirar essas contradições de outras formas, como os intuicionistas e logicistas, que serão brevemente analisados. Na última parte do capítulo, é analisado o Teorema da Incompletude de Kurt Gödel. Durante o desenvolvimento da escola formalista, ele prova esse teorema, que acaba mostrando que o desenvolvimento formalista não poderá cumprir seus objetivos de trazer novamente a certeza matemática.

A teoria formalista surge durante a chamada Crise dos Fundamentos da Matemática, que inicia com o surgimento de contradições dentro da Teoria dos Conjuntos. Em relação a essas contradições, diversos matemáticos buscam encontrar soluções para que a matemática consiga produzir resultados aceitos pelas diversas correntes, ou seja, buscam-se soluções para esta crise.

Os primeiros matemáticos que buscam resolver esta crise ficaram conhecidos como Intuicionistas, grupo onde os líderes são Luitzen Brouwer e Henry Poincaré. Para estes matemáticos, deveriam ser realizadas restrições nas áreas desta ciência onde houvesse a possibilidade de contradição. Esta escola acaba sendo alvo de críticas em relação à limitação excessiva, capazes de tornar a matemática restrita demais, deixando muitos problemas sem solução.

A segunda escola que surge é a escola logicista, sendo os principais matemáticos Bertrand Russell e Gottlob Fredge. Os objetivos dessa escola seria desenvolver o raciocínio matemático de acordo com a lógica. Como a lógica falha em prover um sistema completo, ela passa a ser menos utilizada e dá lugar a escola formalista.

A escola formalista busca desenvolver o método axiomático para tornar evidentes as contradições e poder resolvê-las. O principal expoente desta escola é David Hilbert. Seriam definidos os primeiros elementos da teoria: os axiomas. Com base nestes, seriam desenvolvidos os teoremas e suas demonstrações. Cada axioma deveria ser independente dos demais e o corpo de axiomas deveria ser capaz de gerar toda a matemática existente, sem contradições. A consistência do método axiomático teria como base a consistência da aritmética, e conseguir demonstrá-la é o objetivo do chamado Programa de Hilbert. A tentativa acaba frustrada quando Gödel demonstra que a prova de consistência da aritmética não é possível, o que é conhecido como Teorema da Incompletude da Aritmética.

Apesar do teorema de Gödel, o método formalista acaba influenciando bastante o desenvolvimento da ciência no século XX, sendo utilizado até os dias atuais. É importante resaltar que método formal e axiomático não são sinônimos perfeitos, mas serão tratados desta forma, pois a distinção não é necessária para a compreensão deste trabalho.

2.1 A TEORIA DOS CONJUNTOS

A Teoria dos Conjuntos surge com o objetivo de ampliar os limites de aplicação da Teoria da Integração. Seu desenvolvimento é realizado por causa das propriedades dos conjuntos infinitos. As contribuições obtidas com o estudo destes conjuntos auxiliaram no desenvolvimento da Teoria da Integração de diversas formas:

> A descoberta que conjuntos magros podem ter conteúdo externo positivo relevou a importância da mensuração e das propriedades teóricas dos conjuntos e rapidamente levou à introdução da primeira teoria da medida. As considerações teóricas dos conjuntos também tiveram um papel importante nas tentativas de estender as integrais de Riemann para funções não limitadas (HAWKINGS, 2000, p.55, tradução nossa).

Um dos pesquisadores que mais progrediu no estudo da Teoria dos Conjuntos foi Georg Cantor, matemático alemão. Cantor alterou significamente a Teoria da Integração, ao:

> Classificar e estudar conjuntos infinitos utilizando a noção de que os elementos do conjunto eram contáveis ou não, e das propriedades de conjuntos derivados de certo conjunto. Seus resultados são significantes no desenvolvimento histórico da Teoria da Integração (HAWKINGS, 2000, p.71, tradução nossa).

O estudo para Cantor da Teoria dos Conjuntos era relevante “por causa da sua relevância para a teoria de funções de variáveis reais, particularmente para a Teoria da Integração” (HAWKINGS, 2000, p.71, tradução nossa).

2.2 A CRISE DOS FUNDAMENTOS

A Crise dos Fundamentos surge por causa de algumas contradições encontradas na Teoria dos Conjuntos. Existiriam conjuntos que não respeitavam a lei do terceiro excluído. A lei do terceiro excluído diz que, ao analisar um objeto, este deve assumir obrigatoriamente que é ou verdadeiro ou falso. No entanto, dentro da teoria dos conjuntos existem elementos que eram verdadeiros e falsos ao mesmo tempo. Estes elementos não teriam valor lógico, tornando a teoria incompleta por deixar espaço para alguns enunciados indecidíveis.

Apesar deste problema, a Teoria dos Conjuntos seguia avançando. Observando isso, Cantor, em 1899, sugere a divisão dos conjuntos em dois tipos: os consistentes e os inconsistentes. A diferença entre os dois seria que, na classe dos inconsistentes, a existência simultânea de todos seus elementos levaria necessariamente a uma contradição (ALVAREZ; SEGURA, 1993).

2.2.1 O Paradoxo de Russell

Bertrand Russell, ao ter contato com a Teoria dos Conjuntos, observa que é necessário fazer a seleção de forma cuidadosa na definição dos conjuntos, evitando permitir a existência de contradições, como, por exemplo, o Paradoxo de Russell (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009). Este paradoxo ocorre quando um elemento pertence e não pertence ao conjunto. A versão famosa é conhecida como paradoxo do barbeiro[3] (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009).

Israel e Gasca (2009) mostram que a partir da controvérsia encontrada por Russell e Whitehead, surge a proposta de axiomatização da Teoria dos Conjuntos, buscando a eliminação das contradições e utilizando uma linguagem mais apropriada do que a cantoriana.

A solução para este paradoxo ocorreu dentro da escola formalista, onde von Neumann sugere a criação de um novo grupo de entidades – as classes –, que não poderiam pertencer a um conjunto ou a outras classes, mas poderiam ser compostas por conjuntos (ISRAEL; GASCA, 2009). A base deste sistema de von

[3] O barbeiro é aquele que faz a barba de todos os homens da região que não fazem a barba. Logo, o barbeiro faz a própria barba. Mas se ele faz a própria barba, a mesma não é feita pelo barbeiro. (Martínez e Piñero, 2009).

Neumann seria axiomatizada, utilizando conceitos da Teoria Cantoriana dos Conjuntos e os axiomas de Zermelo (LEONARD, 1995).

2.3 A ESCOLA INTUICIONISTA

Para os intuicionistas, o conhecimento relacionado aos números naturais seria nato aos seres humanos, ou seja, no momento em que os seres humanos tivessem contato com estes números, eles “lembrariam” dos mesmos, sem maiores dificuldades. Portando, a matemática deveria aproveitar esta propriedade e ser construída mentalmente, de forma intuitiva (SNAPPER, 1979).

O desenvolvimento de alguns conceitos que não eram intuitivos não deveria ser feito. Por este motivo, o conceito infinito, para os intuitivistas, era um conceito potencial, obtido pela extensão dos números naturais *ad infinitum* (SNAPPER, 1979). A matemática, para Brouwer, não deveria utilizar de argumentos de prova de adoção irrestrita, como dos cantorianos cardinais infinitos (SNAPPER, 1979). Logo, a escola intuicionista acabava limitando o escopo da matemática.

Todos os intuicionistas, com exceção de Poincaré, identificam existência matemática como uma construção e rejeitam o critério da ausência de contradição do Hilbert. Dentro dessa escola incluem-se os neointuicionistas, que aceitam todos os princípios aristotélicos com exceção do princípio do terceiro excluído (FRAENBEL, 2008).

2.3.1 Críticas à escola intuicionista

Para Snapper (1979), a construção intuicionista deixa a desejar no sentido de não conseguir construir os fundamentos adequados para a matemática. Hilbert opunha-se a Brouwer, sendo um defensor da Teoria Cantoriana. Hilbert não defendia a Teoria dos Conjuntos sem restrições, sendo capaz de entender as críticas de Brouwer. Mas ele percebia a evolução que a matemática tinha conseguido com base nesta teoria, e via nela um caminho para evolução desta ciência. Hilbert propunha uma solução intermediária, que viria da criação de uma teoria axiomatizada da matemática e da lógica. (CORRY, 2002).

A solução de Weyl e Brouwer que restringe a matemática e suas proposições é similar à proposta de Kronecker de eliminação dos números irracionais, por limitar demasiadamente a teoria matemática e suas proposições. A construção dos números reais, para Weyl, é circular, pois “há um círculo vicioso no fato de que a definição de números reais se faz uso de segmentos que dependem da existência de números reais com certa propriedade” (HILBERT, 1993c, p.38, tradução nossa). Hilbert (1993c) acredita que o círculo vicioso de Weyl não é natural da análise matemática, “a insegurança que permeia os resultados da análise não corresponde a nenhum feito real” (HILBERT, 1993c, p.41, tradução nossa). Para Hilbert, “na analise temos feito uma segurança completa no que se refere a deduções, além de uma unanimidade [...] quanto aos resultados obtidos” (HILBERT, 1993c, p.40, tradução nossa).

Tanto von Neumann quanto Bourbaki não achavam adequada a solução dos intuicionistas, pois restringia muito o instrumental matemático disponível. Para von Neumann, o instrumental axiomático era válido, apesar do mesmo não ser livre de contradições. Bourbaki e von Neumann acreditam que a utilização de uma teoria axiomatizada já reduziria essas contradições e permitiria a manutenção de mais ferramentas, sendo mais adequada do que a solução intuicionista, conforme Israel e Gasca (2009).

2.4 A ESCOLA LOGICISTA

Russel e Whitehead buscaram, a partir de proposições lógicas, chegar à matemática clássica, no livro Princípios da Matemática[4]. Para os autores, uma proposição lógica deve ser verdadeira em função da sua forma e não conteúdo, e deve ter generalidade completa (SNAPPER, 1979). Logo, as proposições que não podem ser provadas verdadeiras pela lógica não devem ser utilizadas.

A escola logicista fracassa na tentativa de fornecer uma base sólida a matemática, pois não consegue escrever em proposições lógicas dois dos nove axiomas de Zermelo e Fraenkel: o axioma da infinidade e o da escolha. Essa escola tem uma relação forte com a escola platônica da filosofia, o “realismo”, que diz que as entidades abstratas são independentes da mente humana. Ou seja, a mente humana pode conhecer essas entidades, mas não é ela que as cria (SNAPPER, 1979).

---

[4] Tradução do Latim de *Principia Mathematica*.

2.5 A TEORIA FORMALISTA

A última escola a ser analisada é a formalista. Buscando solucionar o problema da Crise dos Fundamentos, esta escola propõe a criação de uma linguagem de primeira ordem para tratar da teoria que está sendo analisada, dada uma lista finita de axiomas. Essa linguagem inclui variáveis (que devem ser enumeráveis), símbolos conectivos, o sinal de igualdade e quantificadores.

Peano desenvolve uma linguagem capaz de formalizar as provas matemáticas (CORRY, 1997a). Esta linguagem é artificial e conceitual. O objetivo dele era observar a relação entre os termos de origem lógica e geométrica que estavam relacionados estruturalmente na geometria, buscando uma possibilidade de conseguir escrever esta na sua linguagem codificada. Para Peano, assim como para Hilbert, os conceitos matemáticos advinham do empirismo. Este conceito é básico para a teoria formalista. Hilbert desenvolve este método para poder utilizar uma parcela da teoria matemática sem as contradições de Cantor. A escola formalista obteve êxito na ideia de uma teoria não contraditória até 1931.

Hilbert desenvolve o chamado Programa de Hilbert, buscando realizar a axiomatização da aritmética. Este programa buscava, a partir de métodos finitistas, provar a consistência deste ramo da ciência (CORRY, 2001). O principal feito do Programa de Hilbert foi a prova de coerência de todos os sistemas formais, obtido por meio da metamatemática (ISRAEL; GASCA, 2009).

Para Sieg (1999), o Programa de Hilbert funcionou como uma ferramenta para construir as bases da matemática clássica. O método de Hilbert conseguiu alterar o domínio onde o problema dos fundamentos da matemática, que era epistemológico-filosófico e passou a ser realmente matemático.

O conceito de sistema formal criado por Hilbert trata de analisar todas as proposições, buscando decidir se são verdadeiras ou falsas (ISRAEL; GASCA, 2009). Para Hilbert, seria possível fazer essa decisão após um número finito de transformações dos axiomas iniciais, sendo, portanto um processo finitista. Por este motivo, conforme Corry (2002), a definição de finitista para Hilbert é mais correta do que a definição de formalista, apesar desta última ser a forma como o Programa de Hilbert ficou conhecido. Além do número finito de passos, o processo deve ser intuitivamente aceito, ou seja, os axiomas não podem entrar em contradição com a lógica (ISRAEL; GASCA, 2009).

Hilbert propunha a elaboração de uma base segura, onde os resultados obtidos seriam resultados da inferência matemática. Para isso, seria necessário agregar os enunciados verdadeiros e com base nestes provar ou negar as demais proposições. Cada proposição deveria ser provada verdadeira ou falsa com um número finito de passos, em cada um utilizando-se os enunciados já considerados verdadeiros (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009). Hilbert, com o *modus operandi* citado acima, buscaria provar a Teoria dos Conjuntos Infinitos de Cantor, obtendo também uma prova da consistência da aritmética (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009).

Para Corry (2002), Hilbert e Bernays observam o problema em dois níveis: “primeiro, um nível de discurso matemático cujos teoremas são demonstráveis por métodos construtivos que não requerem a utilização de argumentos com infinitos cantorianos” (CORRY, 2002, p. 29) e já o segundo nível, com elementos ideais, que auxiliam nas operações do primeiro nível (CORRY, 2002). Buscando lidar com os elementos do segundo nível, Hilbert estabelece uma série de regras formais e sem significado *per se*.

Israel e Gasca (2009) mostram que o método axiomático acaba sendo bastante desenvolvido na Universidade de Göttingen. A utilização deste método na teoria matemática consegue realizar um desenvolvimento mais rigoroso em algumas áreas, como a álgebra.

A influência desta universidade acaba se reduzindo durante a II Guerra Mundial, por causa da dispersão de seus membros durante este período, já que muitos eram de origem judaica e foram afastados (ISRAEL; GASCA, 2009). Em parte isso ocorre por que o Teorema da Incompletude de Gödel na década de 30 acaba por reduzir o interesse dos matemáticos nesta questão, e Göttingen era referência neste assunto.

2.6 O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DA ARITMÉTICA DE GÖDEL

De acordo com Martínez e Piñero (2009), os conceitos de verdade e demonstração no século XIX na matemática estavam expostos de forma confusa. Os chamados formalistas[5] tinham a crença de que o mundo verdadeiro coincidia com o mundo demonstrável. Kurt Gödel (1906-1976) expõe as restrições das

[5] Como formalistas definem-se os que acreditam que o método axiomático é o mais apropriado para a representação matemática, como David Hilbert.

demonstrações com uma teoria axiomática, com seu Teorema da Incompletude da Aritmética, provando que a própria matemática não tem condições de provar a sua consistência. A prova de Gödel do Teorema da Incompletude da Aritmética é realizada em 1931 em um congresso matemático.

Definindo demonstração com uma série de sentenças lógicas, cada uma destas um axioma. Os formalistas definiam uma base de axiomas e então buscavam provar as demais afirmativas de acordo com esta base. Gödel observa que as bases axiomáticas desenvolvidas não permitiam a resolução de alguns problemas simples dos números naturais.

Existem duas definições de completude: a primeira mostra que “um sistema de axiomas é completo se podem reobter, via demonstração, como teoremas, todos os enunciados verdadeiros da área ou do objeto que propomos axiomatizar” (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009, p. 37, tradução nossa). Já a segunda, que é a utilizada por Gödel, mostra que um sistema axiomático é completo se toda a proposição pode ser demonstrada como verdadeira ou falsa, sem enunciados que não podem ser definidos como verdadeiros ou falsos (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009).

O Teorema da Incompletude de Gödel (ampliado por Rosser) fala que:

> [...] todo sistema axiomático consistente e recursivo para a aritmética tem enunciados não decidíveis. Em particular, se os axiomas do sistema são enunciados verdadeiros, pode-se mostrar um enunciado verdadeiro e não demonstrável dentro do sistema (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009, p. 38, tradução nossa).

Apesar de Gödel ter provado o Teorema da Incompletude para o sistema aritmético, ele afirma que para qualquer sistema formalizado onde os números naturais poderiam ser definidos apresentariam o mesmo problema (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009).

A demonstração do Teorema da Incompletude de Gödel limita a aplicação das teorias axiomáticas. A visão da matemática do século XIX era determinada por Karl Weierstrass, na chamada Teoria dos Conjuntos. A matemática é reduzida a uma série de operações elementares com base nas quais é possível determinar as demais relações (MARTÍNEZ; PIÑERO, 2009).

Após a prova da incompletude da aritmética por Gödel, muitos pesquisadores se voltaram para a física ao invés do desenvolvimento de sistemas formais. Com isso, a física sofreu uma revolução: Max Born criou uma nova mecânica quântica, entre outros. Essa revolução mudou a forma como a matemática era vista. A matemática não deve ser utilizada apenas para descrever mecanicamente os processos físicos - a metáfora mecânica - e sim, ser utilizada como uma linguagem capaz de unificar as diversas teorias - metáfora matemática (LEONARD, 1992).

O Teorema da Incompletude de Gödel, apesar de limitar o escopo da teoria formalista, acaba não eliminando a utilização deste método na matemática. A influência causada pela adoção do método axiomático por David Hilbert e seus sucessores transformou a maneira como a matemática era vista e utilizada nas demais ciências, modificando a forma como os modelos e teorias eram propostos.

Este capítulo teve como objetivo a introdução à Teoria dos Conjuntos e a Crise dos Fundamentos, assim como apresentar as principais escolas que buscaram solucionar este problema: a formalista, a intuicionista e a logicista. Foi também mostrado o Teorema da Incompletude de Gödel, que expõe a impossibilidade da escola formalista em cumprir o objetivo de retirar as contradições da matemática.

3 DAVID HILBERT

O presente capítulo buscará expor a trajetória de David Hilbert, matemático alemão que sugeriu o desenvolvimento da teoria formalista para solucionar a crise dos conjuntos. O capítulo analisará tanto fatores pessoais quanto fatores profissionais, na medida em que estes aspectos forem úteis para entender a trajetória de Hilbert, especialmente no desenvolvimento da teoria formalista.

Hilbert estudou e trabalhou na Universidade de Königsberg, a mesma cidade e universidade de Immanuel Kant (1723-1803) na Alemanha, no período de 1880 a 1895. No ano de 1895, ele aceita o convite de Felix Klein e passa a ser professor na Universidade de Göttingen, que no período é mais importante que a Universidade de Königsberg no âmbito da pesquisa matemática. Hilbert interessou-se por diversas áreas da matemática, inicialmente voltando seu interesse para a Teoria dos Invariantes e Números Algébricos.

Para Corry (1997a) a trajetória acadêmica de Hilbert pode ser dividida nas seguintes fases: de 1885 a 1893, o estudo da Teoria dos Invariantes; no período seguinte, de 1893 a 1898 foi dedicado aos corpos de números algébricos; de 1898 a 1902 Hilbert se dedicou aos fundamentos da geometria; no período de 1902 a 1912 Hilbert estudou equações integrais; entre 1910 e 1922 ele estudou física; e de 1922 a 1930, os fundamentos da matemática.

Rowe (2000) mostra que a primeira área de interesse de Hilbert é na Teoria dos Invariantes. Ele pesquisa nesta área até o início da década de 1890, quando consegue provar a existência de uma base de invariantes com o uso da Teoria Lógica, através de uma demonstração por absurdo. Para Rowe (2000) já é possível ver traços que permanecem nas publicações posteriores de Hilbert, tais como, a formulação extremamente abstrata. Hilbert define os princípios fundamentais desta teoria, a partir dos quais ela se desenvolveria. Um destes princípios seria a existência de uma base finita capaz de gerar todo o sistema dos números invariantes (ROWE, 2000). Este princípio também é observado nos trabalhos de axiomatização da matemática.

Sieg (1999) divide a trajetória de Hilbert na matemática em três períodos: até 1917, de 1917 a 1920 e de 1920 a 1922. No primeiro período, ele utiliza o método axiomático como forma de organizar de forma sistemática as áreas de conhecimento que evoluíram de forma a suportar a axiomatização. A utilização do método axiomático também poderia ser válida em questões de completude e independência, assim como em termos de consistência. A consistência referia-se basicamente à Teoria Cantoriana de Conjuntos. Em 1899, Hilbert publica um artigo buscando analisar os fundamentos da análise. O objetivo de Hilbert seria “resgatar a arimetização da análise realizada pela Teoria dos Conjuntos das dificuldades cantorianas” (SIEG, 1999, p. 6, tradução nossa). Segundo Hilbert, o desenvolvimento deste trabalho, que é baseado em um trabalho anterior de Dedekind, poderia provar a consistência e a completude dos números reais (SIEG, 1999). A prova, no entanto, não foi obtida.

A segunda fase de Hilbert é definida pelo estudo da lógica e da metamatemática. Apesar de não ter perdido o interesse no problema da consistência, a axiomatização da lógica levaria axiomatização da Teoria dos Conjuntos (SIEG, 1999). Em 1918, é publicado um livro sobre o assunto, utilizando linguagem lógica de primeira ordem, com a introdução de um método chamado de cálculo lógico, ainda não totalmente desenvolvido, pois em alguns momentos leva a círculos lógicos, que é fonte de paradoxos. Para evitar este problema, se fazem algumas limitações do método, que acaba reduzindo a sua aplicação em alguns problemas matemáticos.

A última fase, que vai de 1920 a 1922, lida com o problema da consistência e demonstração, no chamado “Programa de Hilbert”. Para Sieg (1999), o tratamento do problema da consistência é tratado de forma distinta da Escola Logicista, que havia fracassado em resolver este problema por não conseguir provar alguns dos axiomas de Zermelo e Fraenkel.

O interesse de Hilbert em relação ao problema da consistência inicia ao observar o fracasso de Dedekind e Frege em provar a consistência da Teoria dos Números Reais. Observando isto, Hilbert inicia a busca pelos fundamentos da Teoria dos Números Reais. No desenvolvimento da Teoria da Demonstração, Hilbert aponta que os métodos usuais não deveriam ser tomados como logicamente óbvios, e necessitariam de uma análise a parte, buscando observar se sua aplicação conseguiria levar aos resultados desejados (SIEG,1999). Hilbert também utiliza o princípio da indução completa para conseguir gerar os elementos. Com o Programa de Hilbert altera-se o método de prova, que anteriormente era redutivo e geral, e passa a ser construtivo (SIEG,1999).

Para Corry (2000), o trabalho de Hilbert na lógica e na Teoria da Demonstração tem raízes bastante diferentes. Ele acredita que o trabalho de Hilbert neste último campo foi influenciado principalmente por três trabalhos que foram publicados anteriormente aos fundamentos da geometria, que é a publicação mais importante de Hilbert na Teoria da Demonstração.

No tratamento do método axiomático, alguns autores, como Sieg (2000), observam uma ruptura no pensamento de Hilbert entre a axiomatização da geometria e a posterior tentativa de axiomatização da lógica. A diferença seria que primeiro se necessitaria de uma base realista, enquanto que na segunda fase, apenas a não ocorrência de contradições. Para Corry (1997a), é necessária uma verificação dos conceitos, após a axiomatização, na realidade. Obviamente, ao tornar uma teoria objeto de axiomatização, seus conceitos passam a pertencer a um universo abstrato. No entanto, a necessidade desta teoria retornar à realidade para provar sua consistência não é um ponto de consenso entre os críticos do trabalho de Hilbert. Hilbert também não aborda este problema de forma explícita. Ainda, a alteração de objeto de análise também é importante, pois os conceitos da geometria possuem uma conexão maior com a realidade do que os demais conceitos matemáticos. Por este motivo, tratar-se-á de expor a opinião dos diversos autores, com ênfase nas razões para acreditarem nas diversas formas de verificação da consistência da teoria.

3.1 A AXIOMATIZAÇÃO COMO MÉTODO ADEQUADO

Para Hilbert, segundo Corry (1997a), o método axiomático permitiria um desenvolvimento mais adequado, de forma a observar melhor as contradições, caso elas existam, de sistemas gerados por outros métodos. Mas ele não deveria ser utilizado buscando conhecimento *per se*, e sim com base no conteúdo que foi axiomatizado.

Essa concepção do método axiomático não é compartilhada por Gérard Debreu, economista e matemático francês, que será abordado no capítulo cinco. Para Debreu, a axiomatização é capaz de produzir conhecimento *per se.*

Hilbert acreditava que a verdade em um sistema axiomático era relacionada com a consistência deste sistema e a observação das consequências. Seria necessário observar uma compatibilidade dos resultados obtidos na axiomatização e os observados na teoria. No entanto, Corry (1997b) aponta que a preocupação em relação à consistência diz respeito ao sistema geral e não apenas aos axiomas: Hilbert não se preocupou com a consistência dos axiomas por acreditar que as contradições seriam expostas e resolvidas na própria tentativa de axiomatização.

Hilbert via o método axiomático como adequado para a investigação da metamatemática e de questões como completude e consistência, e também questões filosóficas. Corry (2000) relata que ao desenvolver um método axiomático, Hilbert observava se os axiomas conseguiam eram logicamente independentes, e, se possuíam a completude das relações da teoria. Na visão de Sieg (2000), no início do século XX Hilbert está mais interessado na questão da consistência, por causa da Crise dos Fundamentos.

Os projetos de axiomatização da geometria e das teorias físicas seriam interessantes para permitir um entendimento maior destas disciplinas e também criar novas ideias na matemática, durante o desenvolvimento deste método. Em uma axiomatização completa, segundo Corry (1997a), deve ser possível criar um sistema de axiomas que faça uma descrição exata e completa da teoria por trás da axiomatização, mostrando suas relações e as relações fundamentais desta teoria.

Segundo Corry (2000), para Hilbert, a geometria difere substancialmente dos outros ramos da matemática por que os resultados devem ser inicialmente observados de forma sensível, ao invés de determinados pelas leis do pensamento. A retirada de conteúdo da geometria é obtida com a axiomatização da mesma. Com isso, esta disciplina se torna integrante do campo da matemática pura. Este procedimento, para Hilbert, poderia ser utilizado nas demais ciências, como a mecânica. (CORRY, 2000).

O método axiomático, conforme Hilbert (1993c) consiste em criar uma base com o menor número de princípios, que devem ser “tão simples, intuitivos e compreensíveis quanto possível” (HILBERT, 1993c, p. 42, tradução nossa). Hilbert acredita que o método axiomático é o mais adequado do ponto de vista lógico, além de propiciar uma maior liberdade na análise científica (HILBERT, 1993). Para Hilbert (1993c) “proceder de maneira axiomática não significa outra coisa senão pensar consistentemente” (HILBERT, 1993c, p. 42). No entanto, a prova da consistência dos axiomas não é tão simples. Para Hilbert (1993c), a prova da consistência se dá por meio da demonstração completa da teoria em voga. Em alguns ramos da ciência, isto pode ser possível, mas mesmo nestes ramos, por exemplo, em relação aos axiomas da análise, isto não foi realizado até hoje.

A demonstração de consistência da aritmética também interessou Hilbert. Poincaré não acreditava que tal demonstração fosse possível. A visão de Poincaré, segundo Hilbert (1993c), considerava como uma propriedade do espírito o princípio da indução completa, ou seja, o princípio da indução seria uma petição de princípio, pois a demonstração do princípio seria feita a partir dele mesmo. Por este motivo, a demonstração da consistência da aritmética pelo princípio de indução não seria aceitável para Poincaré e para os demais intuicionistas.

A axiomatização dos números reais objetivada por Hilbert não foi a primeira. Weierstrass, Meray, Cantor e Dedekind também já haviam realizado tentativas (MAC LANE, 1996). Frege tentou provar a consistência da Teoria dos Números de acordo com a lógica pura e Dedekind com a Teoria dos Conjuntos, mas não houve sucesso em nenhuma das tentativas (HILBERT, 1993c). A influência dos autores, no entanto, é fundamental para o surgimento de teorias controversas a essa, com a chamada "crítica moderna da análise" (HILBERT, 1993c, p.44), nascidas de teóricos como Bertrand Russell, Ernest Zermelo e Georg Cantor. É por causa das tentativas de Dedekind e Frege que Russel e Zermelo optam pela utilização de bases axiomáticas e também ocorre o desenvolvimento do cálculo lógico. Para Hilbert (1993c) a demonstração da consistência dos axiomas da análise tornaria os teoremas da matemática definitivos, além do caráter de certeza, que eles passariam a possuir.

Corry (1997b) mostra que existem dois possíveis objetivos da axiomatização da matemática por Hilbert. Segundo Max Born, matemático e físico alemão, seria a obtenção de uma teoria coerente, descrevendo as relações da forma mais próxima da realidade. Para Paul Bernays, matemático suíço, a ideia, no Programa de Hilbert, é provar a consistência das teorias envolvidas. Para Corry (1997b), isso representaria uma ruptura entre os fundamentos da geometria e os trabalhos posteriores de Hilbert.

Em relação à rotulação de Hilbert como formalista, Hintikka (1997) acredita que Hilbert não é bem entendido quando chamado desta forma. O simples fato da utilização de axiomas e teoremas não é suficiente para conseguir esse título, pois neste caso Euclides também deveria ser considerado formalista. Ainda, pelo fato de um axioma não entrar em contradição não significava que ele seja verdadeiro, pois, para isso, seria necessário a verificação empírica. É possível observar uma semelhança do pensamento hilbertiano e euclidiano: para ambos, a geometria deveria explicitar os princípios físicos.

3.1.1 Sobre a axiomatização dos números e a fundamentação da matemática

Hilbert (1993a), em seu artigo sobre o conceito de número, mostra que existem duas formas distintas de desenvolvimento do método matemático. A primeira é a genética, onde se introduz primeiramente o conceito geral do número e depois também são adicionadas extensões, a cada nova etapa do processo são introduzidos novos princípios. Logo, nunca podemos ter a certeza da presença de inconsistência. A necessidade de uma nova metodologia para substituir o método genético advém da física, que já havia incorrido em contradições neste processo.

A outra forma de desenvolvimento é a axiomática. Neste método, os princípios permitidos são introduzidos todos de uma só vez e depois as proposições resultantes devem ser derivadas destes princípios. Assim, caso tenhamos demonstrado a consistência dos princípios, estaremos preservados de possíveis contradições. É necessária a hipótese de que existe uma totalidade definida de elementos, e posteriormente é indispensável provar sua completude. Então é feita a definição dos elementos e também começam a estabelecer relações de conexão, ordem, congruência e continuidade por meio de axiomas. Para Hilbert (1993a, p. 18, tradução nossa): “apesar do grande valor pedagógico e heurístico que o método genético pode ter, o método axiomático resulta claramente preferível para uma exposição definitiva e logicamente segura dos conteúdos do nosso conhecimento”.

Então Hilbert busca desenvolver um sistema para os números reais que estivesse livre das contradições presentes na Teoria dos Conjuntos de Cantor. É possível observar características do pensamento finitista de Hilbert, ao definir que o conjunto de axiomas não pode se prolongar indefinitamente. Ao montar um sistema de axiomas e deduzir as afirmações deste sistema, Hilbert (1993a, p.21, tradução nossa) acredita conseguir retirar as contradições presentes no sistema dos números reais:

> [...] pelo conjunto de números reais não entendemos a totalidade das leis possíveis, segundo as quais podemos avançar [e obter] os elementos de uma sucessão fundamental, e sim pelo sistema de objetos cujas relações fundamentais se encontram definidas por um sistema finito e fechado de axiomas.

Em O Pensamento Axiomático, Hilbert (1993b) descreve as principais características do método axiomático. A primeira característica é a ordenação. Para que a ordenação ocorra, os conceitos devem estar relacionados entre si, de forma a produzir uma relação entre as áreas de conhecimento e os objetos que seja lógica. Para Hilbert (1993b), uma teoria axiomatizada começa pela definição das proposições mais elementares, que servirão para provar as proposições menos elementares, com base nas primeiras proposições e nos princípios lógicos. Essas proposições iniciais serão chamadas de axiomas. Esses axiomas devem ser completos, pois segundo Hilbert (1993b, p.25, tradução nossa) "o desenvolvimento e progresso de cada uma destas [esferas particulares de conhecimento] consistiria então simplesmente da extensão lógica do aparato conceitual de que já dispomos".

Após a definição dos axiomas, é necessário observar alguns aspectos desta teoria que estamos tentando axiomatizar. Por exemplo, precisamos observar se existem relações de dependência entre os enunciados e se, com base nos axiomas, é possível observar a consistência da teoria (HILBERT, 1993b). Para Hilbert (1993b) o desenvolvimento de uma teoria axiomática para certa área de conhecimento deixaria impossível a existência de contradições no sistema.

Hilbert (1993b) considera a Teoria dos Conjuntos uma das áreas mais frutíferas e vigorosas da matemática, apesar de Kronecker e Poincaré, ao observarem as contradições desta teoria, deixarem de utilizá-la.

A solução para as contradições da Teoria dos Conjuntos veio por Zermelo, ao propor restrições na definição de conjunto e na validade das afirmações sobre seus elementos. Apesar dessas restrições, para Hilbert (1993b), a Teoria dos Conjuntos modificada por Zermelo segue com o mesmo poder e potencial de aplicação da Teoria Cantoriana dos Conjuntos.

Para Hilbert (1993b), a demonstração da consistência dos números inteiros e da Teoria dos Conjuntos deveria iniciar pela prova de consistência da lógica, buscando mostrar que tanto a Teoria dos Conjuntos quanto os números inteiros estão contidos nela. Para Hilbert (1993b) o ápice da teoria axiomática é obtido por Bertrand Russell com a axiomatização da lógica. Hilbert (1993) acredita que, para que as demais provas de consistência tivessem alguma validade, inicialmente deveria ser feita a axiomatização e comprovada a consistência desta teoria:

> Em vista do caráter inevitável de uma demonstração de consistência, seria necessário axiomatizar em primeiro lugar a lógica mesmo e logo provar que tanto a teoria dos números, como a teoria dos conjuntos, não são outra coisa que parte dela (HILBERT, 1993b, p. 31, tradução nossa).

Logo, se a teoria axiomatizada da lógica fosse provada consistente, o estudo da consistência na matemática seria encerrado, pois toda esta ciência seria considerada consistente.

Hilbert (1993b) acredita que todos os objetos do pensamento científico podem fazer uso do método axiomático, desde que a área destes objetos esteja com maturidade para tal. O aprofundamento do método em diversos campos dependerá do desenvolvimento externo em relação a teoria axiomática desta área também externa a axiomatizada, mostrando uma relação de complementaridade entre os dois desenvolvimentos do conhecimento:

> Penetrar, no sentido que temos indicado [pela axiomatização] em níveis axiomáticos mais profundos significa também alcançar uma visão muito mais profunda da natureza e da essência do pensamento científico, e dar um passo significativo no processo de tomada de consciência da unidade essencial do conhecimento (HILBERT, 1993b, p. 35, tradução nossa).

A matemática na visão de Hilbert deveria ter uma posição de destaque com o desenvolvimento do método axiomático: “Em virtude da sua estreita relação com o método axiomático, as matemáticas pareceriam chamadas a ocupar um lugar proeminente na ciência em geral” (HILBERT, 1993b, p.35, tradução nossa).

Hilbert (1993c) observa a necessidade de avanço nos estudos sobre a fundamentação da matemática, que acaba entravando o desenvolvimento desta ciência, pois:

> Nenhuma das investigações realizadas até agora sobre os fundamentos das matemáticas tem permitido reconhecer realmente um método que faça possível a formulação das questões pertencentes a estes de maneira a oferecer uma resposta inequívoca aos problemas que surgem dos mesmos... Nas matemáticas não deve haver questões que deem lugares a dúvidas de início, nas matemáticas não devem ter trocadas as verdades à médias, nem tampouco podem ser admitidas verdades de tipo essencialmente distinto (HILBERT, 1993c, p.3 6, tradução nossa).

Para Hilbert, a matemática não tem espaço para dúvidas, por este motivo, Hilbert (1993c) tem o objetivo de dar um fundamento seguro a matemática sem precisar restringir esta ciência a algumas de suas partes constitutivas. Para ele, o único método adequado para alcançar este objetivo seria o método axiomático.

A fundamentação dos números deveria partir da definição de alguns signos (especificamente o símbolo da adição e um número que representa a unidade, um), que deveriam ser tratados como objetos, que são passíveis de operações e que suportam afirmações concretas sobre si e suas relações com os outros signos. Para Hilbert (1993c), a demonstração da consistência dos números desta forma difere substancialmente do princípio de indução, pois é realizado apenas pela composição e decomposição dos signos. Ainda,

> [...] em uma teoria dos números deste tipo [desenvolvida a partir dos signos e algumas operações] não há, por suposição nenhum axioma nem são possíveis as contradições. O que temos são signos concretos como objetos, signos que operamos e sobre os quais fazemos afirmações concretas (HILBERT, 1993c, p. 47, tradução nossa).

No entanto, o método só é válido para a aritmética finita, não podendo ser estendido para infinitas. O método utilizado baseia-se "na composição e decomposição dos numerais e que difere essencialmente do princípio de indução matemática completa ou inferência" (HILBERT, 1993c, p. 47, tradução nossa).

Podemos observar que a fundamentação dos números finitos, criada por Hilbert, não é suficiente para que possamos desenvolver a totalidade da teoria matemática (HILBERT, 1993c). Para Hilbert (1993c) a matemática deveria criar um edifício formal sendo constituído com os seguintes elementos: "os axiomas, as fórmulas e as demonstrações" (HILBERT, 1993c, p. 48). A base inicial seria a aritmética finita já demonstrada como consistente[6]. Fórmula é uma relação entre dois signos ou entre um signo e uma funcional (que transforma um signo em outro signo por meio de operações elementares).

"Uma fórmula é demonstrável se é um axioma, se obtém de um axioma por substituição, é a formula final de uma demonstração ou resulta de uma formula final de uma demonstração por substituição" (HILBERT, 1993c, p. 53, tradução nossa). Axiomas são as fórmulas que funcionam como "cimento do edifício formal" (HILBERT, 1993c, p.48). Demonstração é um axioma, que após algumas transformações elementares, conseguimos utilizar os outros axiomas do sistema para explicá-lo.

[6]Conforme o parágrafo anterior. Para mais detalhes, ver Hilbert (1993) p.47.

Hilbert (1993c) propõe a divisão entre a matemática real, que é a matemática que trata das proposições demonstráveis, das outras matemáticas. A matemática real dá origem a metamatemática, com a função de zelar pela matemática real. Ela deverá utilizar a inferência concreta para verificar se os axiomas são intuitivamente aceitáveis. Na visão de Hilbert (1993c) existem duas alternativas para o desenvolvimento da matemática: por novos teoremas, usando como base os axiomas vigentes, com base na inferência formal, ou pela criação de novos axiomas, desde que estes sejam concretamente consistentes.

3.1.2 Sobre o infinito

Na visão de Hilbert (1993d) os axiomas e teoremas têm uma relação contemporânea, pois demonstram o instrumental desenvolvido até o momento para o desenvolvimento do grupo de axiomas e teoremas, não podendo ser considerados verdades absolutas.

A evolução do cálculo infinitesimal causada pela fundamentação de Karl Weierstrass foi inegável, sendo capaz de encerrar as dúvidas sobre os fundamentos da análise (HILBERT, 1993d). No entanto, as questões sobre o infinito, especificamente o infinitamente pequeno e também o infinitamente grande, ainda seguem entravando o desenvolvimento da análise e da matemática como um todo, como ponto fraco do cálculo de Weierstrass. Também o cálculo infinitesimal faz uso de sistemas matemáticos que possuem infinitos elementos (HILBERT, 1993d).

O conceito de infinito já esteve presente em outras ciências, como na física. No entanto, a ideia do contínuo ou a possibilidade divisão infinita é sempre um exercício imaginário: na física atomística, os elétrons são as menores partículas possíveis, apresentando-se como um limite inferior para as divisões de átomos (HILBERT, 1993d).

Buscando utilizar uma entidade semelhante ao elétron da física na matemática, Hilbert (1993d) propõe a criação de uma entidade muito pequena, porém finita, para substituir um conceito de infinitamente pequeno. Ou seja, no cálculo, o conceito do infinitamente pequeno é substituído por uma totalidade finita, a fim de permitir a utilização dos processos de inferência usuais. Este é o objetivo da nova definição de infinito de Hilbert: “minha teoria se propõe como objetivo central conferir uma segurança definitiva ao método axiomático, uma segurança na qual o período crítico do cálculo infinitesimal não conseguiu alcançar” (HILBERT, 1993d, p 84, tradução nossa).

Georg Cantor, na sua Teoria dos Conjuntos, consegue alterar o enfoque aplicado ao infinito, que passa a ser considerado também um elemento, integrante da “Teoria dos Números Transfinitos” (HILBERT, 1993d, p. 90). Ao utilizar o conceito de totalidade nos números inteiros positivos, que é a de um infinito verdadeiro. Ou seja, um infinito atual, que ocorre:

> Quando consideramos a totalidade dos números inteiros positivos 1,2,3,4... como uma unidade acabada, ou quando pensamos nos pontos de um segmento de reta como uma totalidade de objetos que temos frente a nós como algo terminado. A esta forma de infinito se conhece como infinito atual (HILBERT, 1993d, p.90, tradução nossa).

Ao contrário do utilizado no cálculo infinitesimal, pois quando pensamos no infinitamente grande ou pequeno estamos pensando apenas em um conceito de limite, ou seja, de um infinito potencial (HILBERT, 1993d), que é algo “infinitamente pequeno ou infinitamente grande somente como um conceito de limite” (HILBERT, 1993d, p.90, tradução nossa).

Para Hilbert (1993d) a utilização de Frege e Dedekind é do conceito de infinito atual, “com o objetivo de dar a aritmética uma base puramente lógica independente de toda intuição e toda experiência e deduzi-la exclusivamente a partir desta” (HILBERT, 1993d, p.90, tradução nossa). A utilização dos números transfinitos de Cantor leva à questão da utilização de tais números, visto que eles não são enumeráveis. Ao observar que existiam algumas contradições, os avanços alcançados pela Teoria dos Conjuntos precisaram ser revistos. A utilização das expressões “todo” e “algum” de forma conjunta leva a negação do princípio do terceiro excluído[7] e por isso torna toda a teoria logicamente inconsistente. Por causa disto, Hilbert (1993d) decide examinar a questão do infinito.

Hilbert (1993d) afirma que o infinito apenas existe enquanto exercício mental, não sendo observável na realidade: “em nenhuma parte da realidade existe um contínuo homogêneo que possa ser ilimitadamente divisível e que constitua de algum modo uma realização do infinito na esfera do pequeno” (HILBERT, 1993d, p.86, tradução nossa).

---

[7] Em uma teoria, uma sentença pode ser considerada verdadeira ou falsa. Caso ela seja provada tanto verdadeira e falsa, a teoria é dita inconsistente e o princípio do terceiro excluído não é válido.

A eliminação do conceito de infinito, no entanto, levaria a grande prejuízo da teoria matemática, por causa da importância do seu conteúdo para as aplicações desta ciência. Hilbert então busca uma nova definição deste conceito, a fim de conseguir utilizá-lo sem entrar nas contrições de Frege e Dedekind.

Hilbert (1993d) cria uma relação entre os números transfinitos e as variáveis, de forma a obter uma sucessão onde os números de transfinitos crescem. Ele define um ente “p” como um valor superior ao dessa sucessão. Hilbert cria uma entidade que significa um ente de forma similar aos números, que é o infinito. É a introdução de um conceito ideal, que não é possível experienciar.

Hilbert (1993d) critica a posição de Dedekind e Frege de assumirem apenas a construção dos números de forma intuitiva, sem adicionar o infinito. Para Hilbert, este modelo é incompleto, não bastando apenas utilizar as sucessões lógicas. É preciso permitir que sejam realizadas operações com o infinito, mas em uma base que é finita.

3.1.3 Teoria das Demonstrações

Para Hilbert (1993e) uma demonstração deve ser vista como concreta e resultado de inferências, sendo cada inferência ou um axioma ou resultado de uma demonstração anterior. Uma fórmula é demonstrável quando podemos decompô-la em axiomas e em resultados de demonstrações anteriores, que advêm de alguma forma de axiomas.

As formas do conhecimento para Hilbert (1993e) são três: a experiência, as ideias puras e os conhecimentos *a priori*. Para Hilbert (1993e), este conhecimento *a priori* era uma intuição, ou seja, uma certeza onde a empiria não ocorreu, e anterior ao pensamento consciente.

A Teoria da Demonstração é “um exemplo de harmonia estabelecida” (HILBERT, 1993e, p.122), tendo sido criada com base no cálculo lógico, que buscava uma expressão mais econômica e melhor comunicação entre os enunciados[8]. A inferência lógica pode ser utilizada se tivermos conhecimento da totalidade de partes e objetos que esta concerne:

---

[8] Esta ideia também está presente em Gérard Debreu (ver capítulo cinco).

> [...] se a inferência lógica há de ser algo seguro, é necessário que tenhamos uma visão geral e completa, em todas as suas partes, de seus objetos. Sua experiência, sua diferenciação, sua sequencia e coordenação ocorre com eles da mesma maneira intuitiva e imediata como algo que já não é suscetível nem requer uma redução adicional (HILBERT, 1993e, p. 124, tradução nossa).

Hilbert (1993e) tem como objetivo fazer uma nova fundamentação da matemática, substituindo enunciados matemáticos por fórmulas que são dedutíveis e concretas, tornando os conceitos e também a inferência irrefutáveis e capazes de expressar a disciplina em sua totalidade.

As demonstrações, para Hilbert (1993e) devem ser feitas de forma rigorosa. Cada demonstração deverá ser um conjunto de fórmulas, de forma similar as fórmulas matemáticas, mas com a definição de dois signos com sentido lógico: o de implicação e de negação. Inicialmente, os axiomas, que serão fórmulas iniciais da teoria serão definidos. Uma demonstração será um objeto concreto e composto de inferências, que poderão ser o enunciado de um axioma ou o resultado da combinação de diversos axiomas. Para Hilbert, este processo de demonstração difere do praticado na inferência concreta, pois “teremos um procedimento puramente externo de acordo com regras, a saber: a utilização de um sistema de inferência e a substituição” (HILBERT, 1993e, p. 128, tradução nossa). Este método de demonstração pertence à metamatemática, por ser composto de elementos puramente formais.

3.1.4 Trabalho relacionado à Teoria Lógica

A publicação dos princípios da matemática é um marco na teoria lógica. O livro se divide em duas partes, com a primeira tratando do método axiomático, particularizando-se a aplicação à geometria, enquanto a segunda parte é uma compilação dos conceitos principais da lógica moderna (SIEG, 2000). O livro deixa as questões lógicas relacionadas com as questões filosóficas dos fundamentos da matemática (SIEG, 2000).

3.2 TEÓRICOS QUE INFLUENCIARAM HILBERT

De acordo com Corry (1997a), foram três os principais cientistas que influenciaram Hilbert: Heinrich Hertz, Carl Neumann e Paul Volkman. As contribuições destes teóricos no trabalho de Hilbert serão analisadas a seguir.

3.2.1 Heinrich Hertz

Para Hertz, a mecânica representava a parcela mais elementar da teoria física. Buscando tornar tanto a estrutura quanto o conteúdo da física mais inteligível, Hertz cria um mecanismo de atuação que irá deixar em evidência as contradições, para então tentar resolvê-las. Para ele, na visão de Corry (1997a) uma boa teoria deve ter as seguintes características: não cair em contradição com as regras do pensamento ou ser logicamente consistente (logo, é uma teoria admissível), se não apresenta contradições entre a teoria e outros elementos externos (ela só é avaliada neste quesito se for admissível, e então ela será considerada correta) e ela ainda deve ser conveniente, ou seja, deve apresentar as características de simplicidade e discrição (mostra apenas as relações essenciais). Para Hertz, a admissibilidade e certeza se relacionam respectivamente com a mente e a experiência. Logo, ao estabelecer que uma teoria seja admissível já sabemos que este fato não será alterado, enquanto a certeza pode se alterar de acordo com as novas experiências. Quanto ao fato de uma teoria ser conveniente, para Hertz, este seria um fato subjetivo (CORRY, 1997a).

Uma teoria seria considerada mais conveniente, apropriada, se apresentasse mais relações essenciais do objeto, possuindo uma maior distinção. E entre teorias com o mesmo nível de distinção, a que é mais simples é a mais conveniente.

Como pode ser visto acima, o método de Hertz iria acabar com apenas uma teoria: inicialmente, ela deveria ser formulada e avaliada quanto a sua lógica, se consistente, então sua admissibilidade deveria ser avaliada. Caso fosse admissível, então ela seria julgada quanto a certeza, e caso possuísse a certeza seria avaliada se conveniente ou não (CORRY, 1997a). O método de Hilbert é bastante semelhante.

Corry (2000) observa que, em 1894, Hilbert é professor de uma disciplina de geometria e nas suas notas ele observa que os conhecimentos geométricos são obtidos de forma empírica, e transformados em axiomas na mente dos pesquisadores, para poder criar uma teoria da geometria. A verificação da validade da teoria, no entanto, reside no retorno do corpo de axiomas à realidade, para comprovar se é condizente com os fatos reais (CORRY, 2000).

A influência de Hertz em Hilbert pode ter sido direta, pela leitura do livro, ou indireta, pois Hermann Minkowski, amigo íntimo de Hilbert, utilizou amplamente as ideias de Hertz. Ainda, *Os princípios da mecânica apresentados de uma nova forma* influenciou a mecânica como um todo, tornando a axiomatização da física um objeto de pesquisa válido (CORRY, 1997a).

3.2.2 Carl Neumann

Outro teórico que influenciou Hilbert foi Carl Neumann, que se preocupou com os aspectos matemáticos da física. Para Neumann, a inércia poderia ser decomposta em princípios mais elementares. Para Neumann, os princípios da teoria física não são necessariamente corretos ou prováveis. Eles podem ser avaliados apenas temporariamente. Logo, o retorno constante a estes princípios para verificar sua validade é bastante importante (CORRY, 1997a).

Em 1869 Carl Neumann diz que a física deveria reduzir o número de princípios básicos ao mínimo. Ao chegar aos axiomas básicos, não seria mais possível a redução para princípios mais simples. Carl Neumann mostra que na física estes princípios não podem ter sua validade comprovada para sempre, sendo apenas temporariamente comprovados, além de serem incompreensíveis e arbitrários[9]. Neumann via que, apesar dos princípios terem origens empíricas, pelos limites da mente humana na evolução da física, não seria possível determinar o caráter destes princípios como definitivos, como os da aritmética e lógica.

Carl Neumann via como necessária a revisão dos axiomas básicos da teoria, acreditando que não a revisão atrasaria o desenvolvimento da mesma. Para Neumann, como os axiomas eram arbitrários e temporários, era necessária a avaliação para perceber se eles ainda estavam valendo (CORRY, 2000). No entanto, a sua alteração deveria ser cuidadosa, pois como os axiomas funcionam como a base do sistema, sua alteração pode acabar mudando toda a teoria, inclusive os resultados finais. (CORRY, 2000). Apesar de Hilbert nunca ter citado

---

[9] Eles são arbitrários e incompreensíveis de acordo com nosso raciocínio (CORRY, 2000, p. 40).

claramente Carl Neumann, é evidente a aproximação dos dois, principalmente posteriormente na criação da teoria axiomática de Hilbert.

3.2.3 Paul Volkman

Paul Volkman também influenciou Hilbert, pois para o primeiro a física deveria ser feita de forma recursiva, adicionando-se referências distintas no início e, mais tarde, conforme o andamento da teoria. Após construir a teoria, poder-se-ia inferir quais seriam os princípios elementares. Ou seja, os princípios elementares não poderiam ser definidos antes de algum desenvolvimento da teoria. Volkman e Hilbert estavam de acordo em pensar que é na relação entre o pensamento e o mundo real que nasce a ciência. Esta relação não é necessariamente linear e em apenas uma direção. (CORRY, 1997a).

Paul Volkman conviveu com Hilbert em Königsberg, universidade onde estudou e tornou-se professor em 1894 (CORRY, 1997a). Volkman acreditava que para o aprendizado das bases de uma teoria, o mais correto não seria seguir um caminho linear, e sim andar em círculos para, com o passar do tempo, entender mais sobre as bases de uma teoria. Ou seja, os fundamentos não deveriam ser ensinados no início do estudo (CORRY, 2000). A visão de Hilbert de que “a ciência é uma interação dialética entre o mundo empírico e o mundo do conhecimento” (CORRY, 2000, p. 43, tradução nossa) é influenciada por Volkman. Para Volkman, nas teorias, os princípios envolvidos seriam de três tipos: axiomas ou postulados, hipóteses e leis naturais, que diferem em termos de generalidade e alcance da validade, aceitação.

Ainda, para Volkman, os axiomas deveriam ser aceitos de forma simples, pois seria uma confirmação de algo já conhecido na intuição. As leis naturais, por outro lado, seriam conceitos, sem necessariamente este conhecimento prévio, segundo Corry (1997a). Existiria uma classe intermediária, que Volkman chama de hipóteses físicas. Um axioma irá se tornar um princípio da ciência se conseguir ser aplicado em um grande número de demonstrações sem resultar em contradições.

É possível observar a influência de Volkman no conceito de matemática de Hilbert, como um sistema conceitual, que apresenta suas regras de acordo com a necessidade interna. (CORRY, 1997a). O método axiomático permite o tratamento do conteúdo como um organismo vivo. O desenvolvimento aumenta a clareza da estrutura como um todo.

3.3 O INTERESSE DE HILBERT NAS GEOMETRIAS E OS FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA

Hilbert tem contato com a geometria projetiva na universidade onde começou seus estudos, Königsberg, no ano de1891 (ROWE, 2000). Neste mesmo ano, Hilbert tomou conhecimento dos estudos de Hermann Wierner, matemático alemão, em um congresso. Wierner, no seu estudo da geometria, apresenta “a possibilidade de empregar os axiomas que expressam as relações entre objetos indefinidos cujas únicas propriedades são aquelas expressadas pelos próprios axiomas” (ROWE. 2000, p. 65, tradução nossa). Segundo Rowe (2000), então Hilbert passa a se interessar pelo estudo da geometria projetiva. Desde 1894 ele ministra cursos de geometria. Ele desenvolve tanto a teoria axiomática quanto as raízes empíricas nos cursos de geometria (ROWE, 2000).

Nos primeiros anos de ensino de geometria, não era possível dizer que Hilbert emprega o método axiomático. Ele utilizava métodos que podem ser caracterizados para Corry (1997a) como construtivos e sintéticos. Para Hilbert, existiam três diferentes ramos da geometria, que seriam complementares: o analítico, o axiomático e o intuitivo.

Em um dos cursos que ministrou Hilbert realiza uma abordagem diferente da utilizada, ao usar uma visão mais empiricista, não buscando estudar o axioma do encontro das retas paralelas, uma vez que a observação deste axioma não é possível na realidade (ROWE, 2000). A partir do início do século XIX a geometria projetiva começa a se tornar um campo de pesquisa importante na Alemanha. Felix Klein contribui de forma substancial a esta geometria ao provar que tanto a geometria euclidiana como algumas não euclidianas podem ser derivadas da geometria projetiva (CORRY, 1997a). Klein ainda observa a presença de elementos invariantes na geometria projetiva. Como os resultados de Klein não estavam terminados, muitos matemáticos se ocuparam observando as imperfeições nas suas teorias e tentar solucionar as mesmas. Durante estes estudos,Corry (1997a) observa que Hermann Ludwing Wiener prova os teoremas de Desargues e Pappus e o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva- que enuncia que existe apenas uma projeção que conecta três pontos arbitrários a um outro grupo de três pontos de outra ordem(CORRY, 1997a).

Em 1898, com a prova do Teorema de Pappus por Schur sem a necessidade da hipótese da continuidade, Hilbert passa a se interessar pela geometria. Hilbert, de acordo com Corry (1997a), consegue utilizar o método axiomático para provar os principais teoremas da geometria projetiva (conexão entre a geometria sintética e analítica) sem utilizar a hipótese da continuidade.

A construção axiomática da geometria inicia por meados da década de 1890. No curso deste ano de acordo com Corry (1997a), Hilbert fala que os axiomas são apenas imagens que temos na nossa cabeça, onde as novas imagens são consequências dessas primeiras, ou seja, conseguimos fazer uma dedução lógica possuindo as imagens iniciais. Durante este período, Hilbert salienta que no estudo da geometria é importante que cada axioma seja independente. A ideia de que durante o processo de axiomatização da geometria o conteúdo desta deixa de pertencer aos fenômenos da realidade e passa ao mundo das abstrações já existe no pensamento hilbertiano.

No ano de 1899, Hilbert ministra um curso de geometria utilizando o método axiomático, analisado os fundamentos da geometria. Ele consegue criar uma base de axiomas, independentes, a partir da onde a teoria geométrica pode ser construída.

A divisão dos axiomas nos fundamentos da geometria, para Corry (1997a) não apresenta um significado lógico, e sim uma intuição em comum em cada grupo. Hilbert deixa de forma explícita a necessidade da independência como fornece instrumentos suficientes para que seja realizada a prova da independência dentre os grupos. Nos fundamentos da geometria a consistência fica subordinada a consistência da aritmética.

Em 1899, Hilbert publica um livro onde apresenta uma teoria axiomatizada para a geometria. Antes mesmo da publicação, já é possível observar, por alguns cursos ministrados em Göttingen, que Hilbert acreditava que o método de axiomatização era adequado para lidar com objetos matemáticos (CORRY, 2002). Para Hilbert, em uma teoria axiomatizada, os axiomas devem ser independentes entre si. Cada axioma deve ser simples, ou seja, deve conter o mínimo de conteúdo. O sistema deve ser coerente, ou seja, não devem existir fontes de inconsistências dentro da teoria axiomatizada[10]. Ainda, os axiomas devem formar uma base para que possam ser provados todos os teoremas, ou seja, a teoria deve ser completa (CORRY, 2002).

A axiomatização da geometria realizada por Hilbert inicia definindo três objetos (linhas, pontos e planos) e cinco classes de axiomas (de incidência, ordem, congruência, paralelismos e continuidade). Os axiomas nos fundamentos da geometria foram postulados de forma a serem independentes entre si e o mais simples possível, além de serem completos (deveriam permitir a demonstração de todos os teoremas a serem definidos posteriormente). A consistência não é essencial nos fundamentos da geometria, pois tanto geometrias euclidianas como algumas não euclidianas são consistentes com o sistema. Para Hilbert, a axiomatização de qualquer teoria não apresentava uma justificação *per se*, e deveria ser realizada buscando um maior entendimento da teoria que ficava por trás da axiomatização.

Muitas pessoas acham que os fundamentos da geometria tinham como objetivo reduzir o problema da consistência da geometria para a consistência dos números reais. Para Rowe (2000), o objetivo era desenvolver diversas geometrias sem a necessidade de utilizar o axioma de Arquimedes. O que ele buscava era uma arimetização rigorosa, sendo a consistência apenas um resultado, e não um objetivo.

Para Corry (1997a) a axiomatização da geometria idealizada por Hilbert deveria permitir expressar de forma matemática as relações geométricas, não sendo necessária a definição dos conceitos dos elementos ideais, como ponto, reta e plano, tornando necessária apenas a obediência destes aos postulados.

3.4 A AXIOMATIZAÇÃO DA FÍSICA

O desenvolvimento matemático de Hilbert não pode ser interpretado isoladamente, sem a observação das relações apontadas pelo autor com a física. Desde o início da sua produção como matemático, Hilbert apresenta interessa nas relações entre a matemática e física e também nas questões estudadas nesta ciência.

[10] Inconsistência para Martínez e Piñero(2009) é um conjunto onde pode-se provar que uma afirmação é verdadeira e também é falsa.

O contato de Hilbert com a física começa durante seu período como estudante, em Königsberg, com Hermann Minkowski, um matemático contemporâneo a ele, que também tinha interesse na matemática aplicada à física. Depois, enquanto professor de Göttingen, ele já ministrava alguns seminários sobre diversos assuntos, conforme Corry (1997a). Nestes seminários, ao invés de comentar sobre as teorias já estabelecidas, ele comentava sobre as questões que mais chamavam atenção dele no momento. É nestes seminários que inicia o desenvolvimento da matemática aplicada a física para Hilbert. Hilbert solicitava a um aluno que tomasse anotações, que seriam complementadas com suas notas de aula utilizadas posteriormente como material de apoio para seus livros.

Depois da Geometria, Hilbert passa a axiomatizar a física: iniciando pela mecânica, indo para a termodinâmica e o cálculo de probabilidade e a eletrodinâmica. O cálculo de probabilidade deveria ser axiomatizado, pois seria aplicado para várias áreas, como a teoria da compensação dos erros, a teoria cinética dos gases, teoria atuarial. A física se beneficiou bastante do desenvolvimento axiomático de Hilbert, mais por desenvolvimentos posteriores do que pela teoria em si. Apesar de alguns físicos como Einstein não aceitarem seu método, outros o aceitaram e buscaram desenvolver o mesmo. George Hamel publica um artigo em 1927 onde explicita a necessidade de uso de uma teoria axiomática na física. Hamel via no método desenvolvido por Hilbert a vantagem de "permitir uma compreensão mais clara da estrutura lógica de todas as premissas e suas relações de interdependência" (CORRY, 1997a, p.179). No entanto, o desenvolvimento do trabalho de Hilbert na física é considerado bastante inferior aos realizados na teoria matemática, onde sua relevância era maior (CORRY, 1997a).

Este capítulo buscou analisar aspectos biográficos e profissionais de Hilbert, fundador da escola formalista. Uma análise de como esta escola influenciou as demais ciências também já foi realizada. Este desenvolvimento será observado especificamente para a economia no capítulo seis.

4 JOHN VON NEUMANN

"Most mathematicians prove what they can. Von Neumann proves what he wants"[11]

O presente capítulo trata sobre a influência do matemático von Neumann na teoria econômica. O principal trabalho de von Neumann na economia foi o Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico[12], de 1944, escrito conjuntamente com o economista Oskar Morgenstern. Anterior a isto, von Neumann desenvolve um modelo de equilíbrio geral. É possível observar que von Neumann sempre foi interessado pelas aplicações da matemática. Mesmo antes das publicações aplicadas à economia ele já fazia críticas aos métodos utilizados na economia. Von Neumann é também expoente da escola formalista. Ele não vê no teorema de Gödel um entrave a utilização do método axiomático. Nesse capítulo, serão observados também aspectos biográficos e profissionais de Oskar Morgenstern, coautor do livro Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, buscando analisar suas contribuições na Teoria dos Jogos.

John von Neumann nasceu na Hungria. Judeu, viveu na Alemanha, na universidade de Göttingen até o falecimento do seu pai, e então em 1933 foi convidado para ser professor em Princeton. No momento de sua transferência para os Estados Unidos, ainda não ocorre uma perseguição aos judeus por parte dos nazistas. No entanto, nos anos seguintes a dificuldade em retornar para a Europa é crescente, até a véspera da Segunda Guerra Mundial, quando isto se torna impossível para ele. Durante a estadia em Göttingen, von Neumann tem contato com David Hilbert, matemático formalista, que influenciou fortemente seus trabalhos posteriores (ISRAEL; GASCA, 2009).

Oskar Morgenstern e von Neumann se aproximaram quando ambos ocuparam a posição de professor em Princeton (MORGENSTERN,1953). Anteriormente a esta ocasião, já era possível ver desenvolvimentos da Teoria dos Jogos por von Neumann com o Teorema *minimax*, no artigo "Sobre Jogos de Salão", publicado em 1928[13]. Os dois autores já apresentavam interesse nas aplicações da matemática na teoria econômica anteriormente a publicação de Teoria dos Jogos e

---

[11] "A maior parte dos matemáticos prova o que consegue, von Neumann prova o que quer" (LAX, p. 6, 1988,tradução nossa).
[12] Tradução do inglês de *Game Theory and Economic Behavior.*
[13] On the theory of parlor games.

Comportamento Econômico, no entanto, certamente este livro foi a maior contribuição dos autores no tema.

Esse capítulo será dividido da seguinte forma: inicialmente, será feito um relato da estadia de von Neumann na Universidade de Göttingen, pois este período exerceu uma influência importante no autor. A segunda parte trata da relação entre von Neumann e a teoria econômica, principalmente das aplicações da matemática na economia. A terceira parte trata de Oskar Morgenstern, mostrando seus trabalhos e opiniões sobre o uso da matemática na economia. A parte final tratará da obra Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, destacando sua influência e impacto na teoria econômica. Também serão feitas algumas considerações metodológicas sobre Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico.

4.1 ESTUDOS NA UNIVERSIDADE DE GÖTTINGEN

John[14] von Neumann e sua família pertenciam à elite da Hungria, e por este motivo ele foi inicialmente educado em casa. Posteriormente, ele ingressa no Ginásio Luterano e depois na Universidade de Budapeste. A geração anterior a von Neumann na Hungria apresentava diversos teóricos importantes na matemática, como Lipót Fejér. Alguns destes matemáticos foram professores particulares de von Neumann.

Von Neumann ingressou na Universidade de Göttingen para seu pós-doutorado. Nesta ocasião, ele teve contato com David Hilbert. É durante este período que a Crise dos Fundamentos da matemática emerge como pauta de pesquisa relevante. Hilbert está buscando desenvolver um sistema de axiomas onde algumas áreas da matemática poderiam se desenvolver sem contradição. (LEONARD, 1995).

Para von Neumann, uma das vantagens da aplicação do sistema axiomático hilbertiano é a ausência de conteúdo. O mesmo funciona a partir de regras, que são criadas com a combinação dos símbolos primitivos, os quais são advindos ou de axiomas ou de teoremas, sendo ou corretos, no primeiro caso, ou provados, no segundo caso. (RASHID, 2007). Após Gödel ter provado a incompletude da aritmética, que explicita as falhas do formalismo, von Neumann aceita a

[14] Durante este período, o mais adequado, ao invés de John, é János ou Jansci, versão húngara de John.

possibilidade de utilização desta técnica, pois para ele “a axiomatização da Teoria dos Conjuntos era apenas um modo de se proceder” (RASHID, 2007, p. 510, tradução nossa), ou seja, o *modus operandi* presente no formalismo poderia seguir sendo utilizado para von Neumann. Ainda, von Neumann observa que “a matemática estava produzindo resultados que eram elegantes e úteis” (Von Neumann, 1947, tradução nossa), não sendo o Teorema da Incompletude de Aritmética capaz de tornar inválido o método formalista de Hilbert.

Com o Teorema da Incompletude da Aritmética de Gödel, a teoria formalista e o Programa de Hilbert acabam deixando de interessar von Neumann. Apesar disso von Neumann segue acreditando que a matemática deve ter bases lógicas (ISRAEL; GASCA, 2009). Posteriormente, em relação à inconsistência da matemática, von Neumann afirmou que este não era mais um problema relevante. Para von Neumann, caso alguma outra ciência conseguisse obter resultados com base na matemática, esta ainda poderia ser utilizada no instrumental teórico. O exemplo de von Neumann é a física, que tem seus pilares na matemática, e certamente funciona (RASHID, 2007).

Von Neumann, durante sua estadia em Göttingen, auxiliou o desenvolvimento axiomático da mecânica quântica. Durante este período, alguns jogadores de xadrez desenvolveram livros descrevendo o jogo, as estratégias, como Nabokov, Lasker e Zermelo. Os dois últimos tinham estudado em Göttingen e sido alunos de Hilbert (LEONARD, 2007). Nesta época, von Neumann faz um artigo, “Sobre Jogos de Salão”, solucionando o Teorema *minimax.* Este artigo de 1928 aplica cálculo funcional e topologia. Desde 1928, já é possível observar que von Neumann lida com os jogos na sua forma axiomatizada (LEONARD, 1992). Apesar de alguns desenvolvimentos da Teoria dos Jogos (como a aplicação ao xadrez) e o artigo de Émile Borel, possuírem data anterior às publicações de von Neumann, para Leonard (2007) von Neumann vai além destes desenvolvimentos, criando uma teoria para qualquer jogo genérico estratégico.

Sob a acusação de ter utilizado os conceitos de Borel na criação da Teoria dos Jogos, von Neumann expõe que o conceito de estratégia foi tratado primeiramente por Borél, mas com limitações: “Emile Borel foi o primeiro autor a formular o conceito de estratégia pura assim como mista, embora ele não tenha ido além do caso do jogo simétrico com duas pessoas” (VON NEUMANN; FRÉCHET, 1953, p. 124, tradução nossa).

Para von Neumann e Fréchet (1953), o desenvolvimento da Teoria dos Jogos necessitava do Teorema *minimax*, que foi provado pelo autor em 1928:

> A relevância deste conceito [de estratégia] em suas mãos [de Borel] foi essencialmente reduzida pela sua falha em provar o decisivo Teorema *minimax*, ou ainda em provar que este teorema era correto. Até onde eu posso ver, não poderia existir teoria dos jogos sem se basear no Teorema *minimax*. Ao assumir, como ele fez, a falsidade daquele teorema, Borel acabou assumindo a impossibilidade da teoria como nós conhecemos (VON NEUMANN; FRÉCHET, 1953, p. 124, tradução nossa).

Ainda, von Neumann alega ter pensado sobre o assunto anteriormente a publicação de Borel, mas não acreditava que sua publicação teria valor sem a prova do Teorema *minimax* (VON NEUMANN; FRÉCHET, 1953).

Durante a primeira década do século XX von Neumann se dedica ao estudo da física. Segundo Israel e Gasca (2009), ele desenvolve uma teoria axiomática para evitar erros de interpretação, incluindo as interações entre o objeto mensurado e o que está realizando a mensuração. Na mecânica clássica, a mensuração poderia conter erros por causa de perturbações exógenas causada pelo instrumento utilizado para tal fim. Esta preocupação também existe para Oskar Morgenstern, conforme Morgenstern (1976). A hipótese de que o erro não possuía relação com a forma de mensuração acaba sendo questionada por Bohr e Heisenberg, que mostram que a interação entre átomos não permite a independência entre estes fatores. Para Israel e Gasca (2009) a utilização do método axiomático na física e na Teoria dos Conjuntos indica um amadurecimento de von Neumann enquanto teórico, pois é bastante adequado ao problema e suas aplicações conseguem restaurar a confiança nas duas disciplinas.

4.2 OS MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA VON NEUMANN

Para Israel e Gasca (2009), durante a obra de von Neumann, ele acreditava que a matemática funcionava como uma ferramenta para análise da realidade, bastante efetiva. Desde então, o escopo da matemática ia além da análise dos fenômenos físicos, podendo ser aplicado em outras áreas. Para Israel e Gasca, não ocorre uma ruptura na utilização do método axiomático. Von Neumann segue acreditando no instrumental axiomático, bem como nos resultados do método de raciocínio abstrato. Ainda, apesar de von Neumann, no início de sua carreira, ter se envolvido com objetos de pesquisa abstratos e ao final objetos aplicados, ele segue com a aplicação do método abstrato-axiomático, sem caracterizar uma ruptura do seu raciocínio.

Na visão de Israel e Gasca (2009), apesar de von Neumann aceitar a abstração como ferramenta, a matemática deve retornar a realidade com sua validação empírica. O exercício abstrato é uma parcela do que a matemática proporciona, sendo necessário o retorno à realidade para considerar o exercício teórico completo. Com isso, observamos que a relação de von Neumann com as aplicações da matemática é muito mais próxima da visão de Hilbert do que a visão dos Bourbakianos[15]. Para estes últimos haveria uma divisão clara entre matemática pura e aplicada, sendo a primeira superior à segunda.

Von Neumann (1947) observa que a matemática não deve ser uma ciência isolada, e sim próxima das demais ciências, e pode ser utilizada como instrumental e conseguir mudar de plano as discussões:

> A característica mais vital da matemática é, na minha opinião, sua relação peculiar com as ciências naturais, ou, de forma mais geral, com qualquer ciência que interpreta a experiência em um patamar superior do que o puramente descritivo (VON NEUMANN, 1947, tradução nossa).

Apesar da matemática não ser considerada uma ciência que utiliza métodos empíricos ou tem sua base na empiria, para von Neumann não é por isso que a matemática não tem relação com essas ciências. Para ele, “algumas das melhores inspirações da matemática moderna (eu acredito, as melhores) claramente tem origem nas ciências naturais” (VON NEUMANN, 1947, tradução nossa).

4.3 O INTERESSE DE VON NEUMANN NA TEORIA ECONÔMICA:

Para von Neumann, a matemática não poderia se fechar em si mesma, dando espaço para abstrações muito grandes. Sua importância estaria na aplicação no mundo real, sendo, portanto necessária a interação entre a teoria e a prática. As ciências rejuvenesceriam ao utilizar os problemas empíricos para o desenvolvimento das suas teorias. Por este motivo, as aplicações da matemática são importantes e

[15] O grupo Bourbaki será objeto de análise do capítulo seguinte.

foram exploradas por von Neumann, na física e na economia, predominantemente (RASHID, 2007).

O envolvimento de von Neumann com a teoria econômica pode ser visto pela sua participação no Colóquio de Menger. Este colóquio ocorria em Viena e reunia diversos matemáticos e cientistas de outras áreas, buscando discutir diversos temas, como a aplicação dos métodos matemáticos às demais ciências. Karl Menger leva ao seu colóquio a discussão sobre os modelos de equilíbrio geral aplicados à economia buscando observar suas limitações matemáticas. Abraham Wald, matemático, desenvolve um modelo deste tipo, que vem a formar a base do modelo de von Neumann de 1932 (ISRAEL; GASCA, 2009).

Von Neumann cria, em 1932 um modelo de equilíbrio geral, e o apresenta no colóquio de Menger (VON NEUMANN, 1945-1946). Ele desenvolve um modelo de equilíbrio geral, utilizando desigualdades ao invés de igualdades na produção e no consumo de bens, ou seja inequações ao invés de equações, pois estas poderiam deixar alguns termos negativos, sem interpretação na teoria econômica (LEONARD, 1995). Neste modelo é provada a existência de equilíbrio por um teorema de ponto fixo, ou seja, pela aplicação de alguns fatos topológicos. Neste modelo de equilíbrio geral, não é feita a distinção entre insumos intermediários e insumos finais. O ponto de equilíbrio é o ponto de sela de uma função com alguma relação entre as matrizes que representam as equações de produção e consumo. A existência do equilíbrio é mostrada pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (LEONARD, 1992).

Gloria-Palermo (2010) observa no seu modelo de equilíbrio geral que a solução existe e é única. Von Neumann acredita que nos modelos tradicionais de equilíbrio geral, a prova de “existência de uma configuração de equilíbrio geral, que consiste em algumas equações e variáveis” (GLORIA-PALERMO, 2010, p. 155, tradução nossa) não é suficiente, pois “tal abordagem não constitui demonstração suficiente de existência” (GLORIA-PALERMO, 2010, p. 155, tradução nossa). Von Neumann, no seu modelo de equilíbrio geral introduz uma função da razão entre os ganhos e custos totais, e consegue demonstrar a existência de equilíbrio por que a função possui um ponto de sela (GLORIA-PALERMO, 2010).

Von Neumann observou a aplicação de métodos matemáticos na economia pelo trabalho de Georges e Edouard Guillaume, teóricos franceses, em 1932, intitulado O Econômico Racional[16]. Na exposição de Guillaume, a aplicação de métodos matemáticos na economia dependeria da criação de bases axiomáticas para ela. Guillaume cria um modelo baseado na Teoria do Valor Trabalho, onde no ponto de equilibro os preços pagos e os de mercado são iguais, sendo a diferença oriunda de ajustamentos no processo produtivo.

Von Neumann, ao acessar o trabalho de Guillaume, observa que a simplificação da realidade em um modelo é de fato uma tentativa de matematização da economia. Para von Neumann, a teoria econômica precisa inicialmente desenvolver alguns axiomas básicos para então permitir a apropriada aplicação de métodos matemáticos. von Neumann ainda vê uma analogia da física com o conceito de energia e o conceito econômico de valor. Para Leonard (1995), essa analogia física não existiu: a ideia é a criação de um modelo econômico que seja racional no mesmo sentido daquele dos modelos físicos. No entanto, von Neumann acredita que a analogia com a física não é adequada, e acredita que o projeto é bastante ousado, sendo necessária uma base matemática mais consistente dos autores para conseguir desenvolver este projeto (ISRAEL; GASCA, 2009).

Von Neumann (VON NEUMANN; MORGENSTERN, 1953) observa que a matemática já estava sendo usada na teoria econômica, mas sem obter sucesso. Apesar das criticas sobre os limites da aplicação matemática na economia, para von Neumann, a utilização dos métodos e a comparação destes resultados com os dados empíricos levaria a uma adequação.

A aplicação da matemática às ciências sociais, para Israel e Gasca (2009) começa com o modelo de equilíbrio geral walrasiano. A tentativa de Léon Walras em provar a existência e unicidade do equilíbrio obtido através das interações entre oferta e demanda foi a primeira tentativa de prover a ciência econômica de uma base científica. Apesar de o projeto walrasiano seguir durante os anos seguintes com Wilfredo Pareto, ele começa a entrar em declínio. No modelo de equilíbrio geral de Walras é possível ver uma analogia com a teoria mecânica da física. A partir do desenvolvimento de von Neumann na teoria econômica, não é possível saber o desenvolvimento dos modelos de equilíbrio geral será baseado na teoria mecânica ou em outras teorias.(ISRAEL; GASCA, 2009).

[16] Tradução do Francês de L’ Economique Rationnelle

Von Neumann critica o método walrasiano, por não levar em consideração as interações entre os indivíduos, bem como o método de Samuelson, que pode ser considerado uma extensão da metodologia utilizada por Walras. Para von Neumann, segundo Israel e Gasca (2009), os Fundamentos da análise econômica de Samuelson não parece ser contemporâneo ao Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, e sim contemporâneo às obras de Newton.

Rashid (2007) mostra que von Neumann acreditava que o desenvolvimento do uso de instrumentos matemáticos na economia deveria se desenvolver com a evolução dessa ciência. Como a física começou a evoluir no uso de instrumentos matemáticos após vários séculos, a economia também precisaria esperar para evoluir, de forma a dar espaço para que as bases de dados tivessem séries maiores, de forma a permitir um melhor conhecimento das séries em voga. No entanto, Rashid (2007) observa que talvez von Neumann não tenha percebido algumas sutilizas entre a economia e a física. A segunda apresenta uma série estável de dados e não apresenta alterações profundas na sua estrutura, ao contrário do que ocorre na economia.

Von Neumann não consegue entender o motivo pelo qual a teoria econômica ainda não foi alterada para um número de conceitos fundamentais, como a física (GLORIA-PALERMO, 2010). Uma das possíveis explicações para este fenômeno poderia ser a não adequação dos métodos reducionistas mecânicos e físicos aplicados à economia. Para ele, de acordo com Israel e Gasca (2009), deveriam ser desenvolvidos métodos matemáticos mais apropriados para a utilização na economia.

O envolvimento de von Neumann com a Teoria dos Jogos é anterior a publicação de Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, como pode ser visto pelo Teorema *minimax*, de 1928 (LEONARD, 1995). Neste período, a análise de jogos como xadrez e pedra, papel e tesoura já era realizada. von Neumann teve acesso a estes estudos na universidade de Göttingen na década de 20. O Teorema *minimax* explicita uma visão probabilística do mundo, que é influência dos desenvolvimentos físicos do período (LEONARD, 1995). Neste momento, de acordo com Leonard (1995) os aspectos da Teoria dos Jogos não tinham o viés econômico que viriam a adquirir na publicação de Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico.

Para Leonard (1995), a análise de jogos:

> [...] era parte de um esforço generalizado para levar a matemática a um limite, para mostrar que a matemática pura e abstrata e formal poderia constituir um instrumento explicativo, não apenas para análise da natureza, mas também para análise social,[...] onde a interação de seres humanos estaria envolvida (LEONARD, 1995, p. 735, tradução nossa).

O interesse de von Neumann pela Teoria dos Jogos e a possibilidade de desenvolvimento da mesma foram frutos de dois fatores, segundo Mirowski (1992). O primeiro é influência formalista de Hilbert, que mostra que a objetividade da matemática permite que a criação de certos patamares, onde é possível reconhecer o que é verdadeiro ou não, independente de questões morais ou religiosas. O outro fator é o surgimento da mecânica quântica, com a introdução de um fator estocástico. Isso influenciou von Neumann na utilização de probabilidades, como se os indivíduos tivessem um comportamento estocástico, o que permitiu provar o Teorema *minimax* (MIROWSKI, 1992).

Na visão de Israel e Gasca (2009), a ideia de que von Neumann acredita na racionalidade humana não é facilmente aceitável dada sua experiência pessoal. Para Israel e Gasca (2009), a hipótese da racionalidade significava apenas a redução das perdas. Ainda, para von Neumann, seria possível interpretar o mundo como se fosse um jogo matemático. Desta forma, seria possível utilizar o instrumental axiomático desenvolvido por ele para entender as relações entre os indivíduos e as soluções encontradas. No entanto, von Neumann não acredita realmente que o mundo é um jogo, para ele, a analogia só é válida para que seja feita uma interpretação diferente.

4.4 OSKAR MORGENSTERN: ASPECTOS BIOGRÁFICOS E APROXIMAÇÃO COM VON NEUMANN

Morgenstern passou parte da década de 20 em Viena, capital da Áustria, convivendo com Ludwig Von Mises, Karl Menger e outros teóricos importantes do século XX. Em 1931, num artigo sobre economia matemática, escreveu que não haveria motivo para que a matemática não fosse aplicada as ciências sociais, em particular a economia (LEONARD, 2011). Para Morgenstern, a maior parte das objeções advinha da aplicação do cálculo infinitesimal. Ele ressalta que existem outros ramos da matemática que poderiam também ser empregados na economia.

Para Morgenstern, ainda, a teoria econômica poderia ser enriquecida caso se utilizasse conjuntamente de conhecimentos da matemática e psicologia (LEONARD, 2011, VON NEUMANN; MORGENSTERN, 1953).

Morgenstern familiarizou-se com os métodos matemáticos a partir de Abraham Wald, no início da década de 30, enquanto os dois eram membro do colóquio de Menger. Morgenstern, neste período, continua pensando que a evolução das décadas anteriores da matemática, em especial a lógica, poderia permitir a realização de testes mais rigorosos em novas áreas da teoria economia (LEONARD, 2011).

Ao observar o desenvolvimento dos modelos de equilíbrio geral, Morgenstern (1978) critica a premissa da previsão perfeita pelos agentes. Para ele, a utilização de outros tipos de expectativas seria mais razoável.

Morgenstern torna-se professor convidado em Princeton por volta de 1938. Neste período von Neumann já era professor desta instituição. (LEONARD, 1995, MORGENSTERN, 1976). Apesar de Morgenstern também ter participado do Colóquio de Menger, ele e von Neumann nunca se encontraram no mesmo (MORGENSTERN, 1976). Anteriormente ao encontro de von Neumann, Morgenstern já apresenta familiaridade com métodos matemáticos aplicados à economia (ISRAEL; GASCA, 2009).

Morgenstern (1976), já havia analisado a utilização de métodos matemáticos para previsão. Ele faz uma crítica, pois acredita que previsões econômicas são difíceis de serem feitas. Para Morgenstern (1976), uma variável econômica apresenta uma complexidade de fatores na sua determinação, de forma que a própria previsão alteraria as expectativas dos agentes, alterando também o valor da variável no futuro. No entanto, Morgenstern deixaria de ter uma posição tão extrema, passando a admirar o uso da matemática em alguns casos, como nos modelos de equilíbrio geral. Para ele, o uso da matemática na economia deve ser feito com a aplicação da lógica, desde que seja possível a adoção de uma linha de raciocínio racional nesta ciência. Esta aplicação permite que as ciências sociais utilizem métodos lógicos. Mas não é possível, neste caso, a introdução de elementos externos (LEONARD, 1995).

Morgenstern, segundo Israel e Gasca (2009), já em Viena, observava que a utilização de um método axiomático na economia levaria a um resultado mais rigoroso, e permitiria o afastamento da analogia física e também da utilização da lógica, o que conduziria a um desenvolvimento mais coerente do uso da matemática nesta ciência. Para ele, seria mais interessante a utilização do cálculo infinitesimal do que os métodos de lógica usuais.

4.5 A REALIZAÇÃO DE TEORIA DOS JOGOS E COMPORTAMENTO ECONÔMICO

Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico foi uma obra bastante importante na economia. Buscando analisar de forma extensiva este livro, serão analisadas as características do ambiente em que o livro foi escrito, o conteúdo, as alterações em termos do instrumental matemático utilizado e os demais avanços da teoria economia provocados pelo mesmo.

4.5.1 Características do período de escrita do Teoria dos Jogos e do Comportamento Econômico

Durante o século XX, o desenvolvimento dos estudos nas áreas sociais utilizando métodos de análise com semelhanças à metodologia das ciências exatas começou a ser aceita pelos pesquisadores, pois já não havia uma divisão clara entre o escopo de cada área (ISRAEL; GASCA, 2009). Os desenvolvimentos militares durante a segunda guerra mundial permitiram uma interação maior entre os cientistas dos dois campos mencionados, mostrando que a divisão não era tão bruta, e que a interação entre as ciências poderia ser mutuamente benéfica. No entanto, a tentativa de aplicação dos métodos das ciências exatas nas demais ciências, buscando uma uniformização do método, foi anterior a este período, mas encontrou bastante oposição. Após a utilização de métodos matemáticos na física mecânica, a matemática buscou expandir suas áreas de aplicação. A crença de que as ciências exatas tinham uma natureza diferente das ciências humanas, onde existiam liberdade e questões subjetivas também era um entrave a aplicação dos métodos matemáticos nas ciências humanas (ISRAEL; GASCA, 2009).

Anteriormente ao desenvolvimento da Teoria dos Jogos por von Neumann e Morgenstern, alguns trabalhos usando instrumentais matemáticos já estavam sendo aplicados à economia. É um exemplo o modelo de equilíbrio geral Walrasiano. A matemática neste período também se aproximava das ciências sociais, com a aplicação da mesma na elaboração de ferramentas explicativas das ciências aplicadas (LEONARD, 1995).

4.5.2 O conteúdo de Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico

A ideia presente na formulação da Teoria dos Jogos de von Neumann é de que a interação social é passível de abstração, e as ações individuais podem ser observadas como estratégias, muitas vezes com interesses conflitantes. Von Neumann não considera ser possível realizar uma matematização onde é possível prever exatamente a ação dos indivíduos, ou de modelar o pensamento humano, pois ele considera que existem elementos subjetivos no comportamento humano que acabam não sendo levados em conta. Ao idealizar as estratégias na Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, o que ele faz é buscar a solução de acordo com a interação dos jogadores, onde cada um dos agentes consegue o ganho máximo, ao invés de simular a situação geral. As estratégias são diferentes da de Borel, onde o ganho de cada agente dependerá da sua habilidade no jogo, que depende de características intrínsecas e observáveis de cada jogador. (ISRAEL; GASCA, 2009)

Apesar de alguns desenvolvimentos da Teoria dos Jogos, como a aplicação ao xadrez, possuírem data anterior às publicações de von Neumann, para Leonard (2007) von Neumann e Morgenstern (1953) o trabalho de von Neumann vai além destes desenvolvimentos, criando uma teoria para qualquer jogo genérico estratégico.

Segundo Leonard (1992) von Neumann estava compilando em dois volumes a sua contribuição sobre a Teoria dos Jogos, enquanto Morgenstern estava escrevendo um artigo sobre o comportamento maximizador. Então surgiu a ideia de publicar um pequeno volume contendo o trabalho de jogos de von Neumann e o trabalho de Morgenstern.

Outra inovação na Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico seria a utilização de probabilidades de cada ação que o indivíduo poderá escolher. A utilização das probabilidades (LEONARD, 1995, WALD, 1947) necessita que os agentes maximizem o valor esperado do ganho, e não o valor certo. É possível ver que existe um fator de risco, incerteza embutido nesta transformação. Por este motivo, o conceito de utilidade também precisa ser repensado para que o indivíduo maximize sua utilidade esperada, também dependente das probabilidades. Para Kuhn e Tucker (1958) este fato permitiu avanços na teoria da utilidade, que passou a apresentar um caráter mais realista.

A importância de uma utilização de conceitos psicológicos na economia já havia sido observada por Morgenstern, conforme Leonard (2011). O caráter psicológico dos jogadores também é levado em conta. Em jogos onde é possível blefar, von Neumann e Morgenstern conseguem embutir o blefe nas estratégias, tornando mais realista a teoria. Para Kuhn e Tucker (1958, p. 106, tradução nossa):

> Pôquer provê um laboratório soberbo para a teoria dos jogos por causa das características das suas estratégias, centradas no 'blefe', que pode ser conservado com uma adequada simplificação de variáveis que tem formas extensivas de complexidade razoável.

Para Kuhn e Tucker (1958) o fato dos autores terem reconhecido a importância da caracterização dos jogos de estratégia foi importante, pois caso isso não ocorresse o livro se resumiria a uma coletânea de exemplos. A abstração dos principais elementos de um jogo, permitindo a representação deste em um sistema matemático também é um ponto importante do livro para Kuhn e Tucker (1958).

Para Marschak (1946) o grande mérito de Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico foi o emprego de métodos lógicos e o uso deles com um grande poder de generalização. Marschak (1946) também salienta a analogia entre mercados e jogos, que é criada no livro, assim como a utilização de termos próprios de jogos,como dominância e solução para explicar as relações entre mercados.

4.5.3 Diferenças entre a contribuição de von Neumann e Morgenstern e os métodos matemáticos utilizados na economia no período:

Para Leonard (1995), a obra de von Neumann e Morgenstern representa uma ruptura no desenvolvimento da teoria econômica convencional de Hicks e Samuelson. A tradicional utilização de modelos da mecânica clássica para explicação da economia, já criticada por von Neumann, é rejeitada pelos autores, como também o cálculo diferencial, utilizado usualmente nestes problemas. O emprego de probabilidades, permitida através da refutação do determinismo, substituído pelo indeterminismo, e mudanças descontínuas mostra o caráter diferenciado do livro de von Neumann e Morgenstern. Ainda, o livro utiliza elementos básicos da Teoria dos Conjuntos e a exploração da própria estrutura como elemento de análise.

Para Wald (1947) o livro difere substancialmente da teoria econômica convencional por que, em Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, existem diversas variáveis que o indivíduo não tem controle no momento de maximizar seu ganho. Wald (1947) ainda diz que o livro apresenta um conteúdo matemático bastante importante, mas não essencial, permitindo que o leitor que não possui conhecimentos avançados em matemática também acompanhe o livro.

O encontro de von Neumann e Morgenstern permite que seja realizado um trabalho consistente utilizando a matemática na explicação de fenômenos sociais. O desenvolvimento de um padrão matemático capaz de definir o comportamento humano como maximizador está presente em Morgenstern, e é explicito em Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico (LEONARD, 1995).

O rigor matemático de von Neumann, juntamente com a percepção cuidadosa que Morgenstern tinha dos processos econômicos permitiu que Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico fosse um livro importante em termos da abordagem matemática da economia segundo Leonard (1995).

Morgenstern (1976) mostra que os objetivos do livro era causar uma ruptura com a economia convencional. Os problemas de maximização e minimização não são os únicos relevantes, a interação entre os agentes deve ser levada em conta em outras situações relevantes na teoria econômica, como em mercados oligopolizados. Outros fatores, como a ordem das ações pelos indivíduos, também devem ser levados em conta, pois são relevantes na teoria econômica.

Von Neumann e Morgenstern (1953) não negam a parcialidade da análise quando realizada com a Teoria dos Jogos. Para os autores, uma universalização do modelo não seria possível, pois o conhecimento sobre os eventos é limitado e imperfeito. Para von Neumann e Morgenstern (1953) a teoria econômica apresenta a sutileza de nem sempre ser suscetível a utilização de modelos abstratos: em alguns casos, a simples descrição da realidade é mais importante do que a aplicação de uma modelagem matemática.

Para von Neumann e Morgenstern (1953) as aplicações da matemática à economia têm sido exageradas e nem sempre bem sucedidas. Para os autores, não é verdade que exista um motivo fundamental para que a matemática não seja usada na economia, com o argumento de que alguns fatores, como o psicológico, não seriam captados com a matematização. Von Neumann e Morgenstern (1953) lembram que essa resistência ocorreu também nas outras ciências, como a física, química e biologia, e essas ciências conseguiram evoluir com a aplicação da matemática, o que provavelmente ocorreria com a economia.

A ideia de poder mensurar os fatores de forma objetiva só ocorre com o uso de métodos matemáticos, segundo von Neumann e Morgenstern (1953). Outro fator que pode ter restringido o sucesso do uso da matemática na economia é a falta de clareza e precisão na descrição dos problemas econômicos. Ainda, é necessário que os métodos matemáticos sejam adequados, para que a aplicação da matemática corrobore e não condene a teoria econômica.

Para von Neumann e Morgenstern (1953), o uso da matemática de forma adequada requer uma base de dados empíricos vasta, que a ciência começa a desenvolver com a gradual utilização da matemática. O fato de a economia ser bastante complexa em conjunto com a falta de destreza dos teóricos em produzir provas dos teoremas matemáticos pode reduzir o valor da teoria econômica empregada. Uma vez que a diferença entre as hipóteses matemáticas e não matemáticas possuem o mesmo valor, não é possível definir uma teoria matematizada como melhor. É necessário que os teóricos consigam avaliar melhor as variáveis na teoria econômica para uma maior adequação dos modelos em conjunto com um aumento dos conhecimentos empíricos em questão.

Para von Neumann e Morgenstern (1953) as aplicações da matemática na economia serão desenvolvidas com o tempo, de forma gradual. Inicialmente deverão ser provados muitos fatos onde os resultados são conhecidos, e depois para problemas mais complexos, onde o resultado não é obvio. O desenvolvimento da matemática aplicada à economia deverá permitir uma interação entre teoria e aplicações.

4.5.4 Avanços obtidos após a publicação de Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico

Com Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, foi possível tratar novamente de problemas como o equilíbrio, conseguindo desenvolver melhor os teoremas de ponto fixo que permitiam provar a existência de equilíbrio geral, desenvolvidos posteriormente por Kenneth Arrow, Gérard Debreu e John Nash (ISRAEL; GASCA, 2009).

Com a disseminação do conteúdo de Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, foi possível introduzir os métodos matemáticos propostos em diversas áreas, como organização industrial, política, táticas militares. O tratamento axiomático, bastante abstrato, não era característico de apenas um setor do conhecimento. Ainda, a utilização de métodos que os teóricos estavam familiarizados, como a otimização de funções, juntamente com algumas alterações, como o uso de desigualdades que von Neumann já tinha proposto no seu modelo de equilíbrio geral, a utilização de teoremas de ponto fixo e probabilidades. Morgenstern e von Neumann caracterizam como principais métodos matemáticos utilizados no livro a teoria lógica, a análise funcional e a Teoria dos Conjuntos (ISRAEL; GASCA, 2009).

A pesquisa de von Neumann na Teoria dos Jogos é bastante importante pois mostra que a matemática tem aplicações não tradicionais capazes de obter resultados interessantes, como a análise social. Para Israel e Gasca (2009), isso demonstra que von Neumann acreditava no caráter universal da matemática, representando esta ciência um instrumental analítico interessante e adequado para as diversas situações presentes no mundo.

A aplicação da matemática feita na Teoria dos Jogos também mostra a capacidade de von Neumann em lidar com novos instrumentais, que seriam mais adequados do que a matemática tradicional.

O presente capítulo tratou de John von Neumann, expoente da escola formalista que expandiu estes métodos para as demais ciências, devido a criação de métodos aplicados. Foi realizada uma análise do seu principal trabalho, a Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, assim como a influência deste trabalho na economia.

5 EXTREMOS DA TEORIA FORMALISTA: BOURBAKI E DEBREU

O presente capítulo tratará de dois teóricos que utilizaram o método axiomático na sua forma mais extrema, Nicolas Bourbaki e Gérard Debreu. Bourbaki propunha uma axiomatização de todos os campos da matemática, para poder criar uma estrutura básica e outras estruturas que pudessem servir de base para a matemática. A abordagem é mais abstrata que a hilbertiana, mostrando um aprofundamento do método de axiomatização. Debreu realiza a axiomatização aplicada à economia, mas de forma semelhante à Bourbaki, com um nível de abstração maior do que Hilbert. Como Debreu é influenciado por Bourbaki, inicialmente será feita uma exposição da teoria de Bourbaki e então será exposto o pensamento de Debreu.

5.1 BOURBAKI: CONTEXTO

Será feita uma análise do contexto em que o grupo Bourbaki surgiu.

5.1.1 França no pós-primeira guerra mundial

Durante o auge da teoria formalista (anos 20 e 30), os teóricos franceses não se interessaram por este método, estando mais preocupados com a teoria das funções e as interações entre a análise matemática e a matemática aplicada à física. Por causa disso, a matemática francesa perde importância no cenário internacional. Neste contexto, um grupo de matemáticos, sob o pseudônimo de Nicolas Bourbaki surge, com o objetivo de encorajar o estudo da teoria axiomática e a nova teoria algébrica. A identidade de todos os membros do grupo não era conhecida, sendo Jean Dieudonné um dos únicos membros conhecidos. Dieudonné atuava revisando a versão final dos artigos de Bourbaki, buscando uma homogeneidade no padrão de escrita. O livro Elementos da Matemática[17] busca construir toda a teoria matemática sobre bases axiomáticas. Para Bourbaki, a matemática poderia ser explicada pela sua estrutura, que tinha três origens diferentes: algébrica, de ordem e topológica. (ISRAEL; GASCA, 2009).

---

[17] Tradução do francês de *Élements de mathématique.*

O grupo que se intitula Bourbaki surgiu no século XX, após a primeira guerra mundial. Os franceses, segundo Dieudonné (1970), ao se preocuparem mais com a guerra do que com o desenvolvimento científico do país, levaram todos os homens ao *front* de batalha. Logo, houve um hiato de uma geração, o que acabou resultando em uma dificuldade da França se adaptar aos métodos mais modernos, dado que seus acadêmicos não tinham familiaridade com estes métodos.

Observando estas dificuldades, Hadamard, professor em uma universidade francesa, propõe que fosse realizado um seminário procurando estudar a matemática que estava sendo feita nos outros países na área de funções. Após alguns anos, segundo Dieudonné (1970), os integrantes perceberam que caso seguissem estudando apenas esta área, acabariam sem conseguir acompanhar as demais áreas da matemática. Buscando retomar a tradição de excelência da matemática francesa, e lembrando que este país era conhecido pela universalidade do pensamento matemático, é alterada a estrutura do seminário. Neste novo formato, os membros buscam realizar um tratado, que deve conter as ideias centrais da matemática moderna.

Aubin (1997) observa que o grupo Bourbaki passa a ser famoso pelos círculos intelectuais franceses tanto pelo mito quando pelo tratado. Conforme Aubin (1997) o projeto inicial era de realizar um tratado apenas de análise, mas posteriormente Bourbaki decidiu ampliar o projeto para toda a matemática moderna.

5.1.2 Pensamento Científico do século XX

Para Israel e Gasca (2009), com o desenvolvimento e maior interação entre as diversas áreas de conhecimento, a relação usual da matemática e realidade, concebida pelo modelo newtoniano usual, foi alterada. A ideia de que seria possível transformar um fenômeno em uma descrição, por causa de seu processo de desenvolvimento, ou seja, o reducionismo mecânico, fica abalado com do desenvolvimento da ciência.

A percepção de que os fenômenos reais poderiam ser representados por uma analogia mecânica, com uma representação baseada na teoria mecânica e cujo instrumental analítico seriam equações diferenciais e o cálculo diferencial e integral, foi substituída durante o século XX. Ou seja, a matemática clássica foi trocada, substituída por métodos menos rígidos, onde a representação poderia pertencer a outras ciências. Isso permitiu que os modelos matemáticos fossem utilizados de forma a unificar os diferentes processos em uma mesma linguagem. Para Bourbaki, isso permitiria a criação de um sistema matemático que poderia ser uma interpretação do mundo real. A utilização do instrumental axiomático afastaria a análise do fenômeno real e a modelagem matemática, ou seja, a verificação empírica não seria tão importante quanto no passado, com a aplicação restrita a física newtoniana (ISRAEL; GASCA, 2009).

5.2 O PROJETO BOURBAKI

O grupo intitulado Bourbaki era formado por um grupo de matemáticos que deveria apresentar interesse no estudo da matemática em geral, sem limitar-se a algumas áreas (DIEUDONNÉ, 1970). As publicações seriam anônimas, constando apenas o pseudônimo Nicolas Bourbaki. A única regra do grupo seria o afastamento aos cinquenta anos de idade, pois nesta idade o pesquisador já não conseguiria se adaptar muito bem aos métodos novos. (DIEUDONNÉ, 1970, BOREL, 1998).

Dieudonné (1970) lembra que antes do projeto Bourbaki não havia muitos livros sistematizando as áreas de conhecimento, sendo exceção o livro de álgebra de Van der Waerden de 1930. As publicações do grupo Bourbaki teriam como objetivo publicar demonstrações matemáticas completas, logo, a seleção do objeto de estudo deveria ser muito criteriosa, contendo apenas o essencial da teoria em voga. A escolha se dava de acordo com a estrutura matemática. A estrutura seriam os pilares sobre os quais a área de estudo está edificada, sendo constituída pelos seus axiomas. O método é idêntico ao utilizado por Hilbert.

5.2.1 Objeto de estudo de Bourbaki

As teorias que Bourbaki utilizava para estudar eram aquelas que já haviam sido bastante desenvolvidas, de forma que seus fundamentos fossem conhecidos e pudessem ser desenvolvidos racionalmente (DIEUDONNÉ, 1970). Com o desenvolvimento axiomático dos principais teoremas, seria possível decompor a teoria de forma a transformar seus fragmentos em instrumentos para aplicação em diversas áreas da matemática (DIEUDONNÉ, 1970).

Dieudonné (1970) não concorda com a crítica de que Bourbaki desestimula algumas áreas de pesquisa pois, para que certa área se torne objeto de pesquisa de Bourbaki, é necessário que ela esteja consolidada, ou seja, que não tenha nenhuma descoberta recente.

É importante ressaltar que o estudo dos Bourbaki não inova a área de pesquisa, fornecendo o suporte para aqueles interessados no núcleo, na essência desta teoria. Dieudonné (1970) também lembra que Bourbaki provê os instrumentos para lidar com as áreas da matemática.

5.2.2 Características das obras de Bourbaki

Bourbaki não se restringia as divisões anteriores da matemática. O importante eram as semelhanças da estrutura. Buscando alcançar o objetivo, deveriam ser eliminados muitos itens, centrando-se apenas nos mais essenciais. Neste sentido, as primeiras demonstrações, para Dieudonné (1970), deveriam ser aquelas que contemplariam um número maior de estrutura, sendo essenciais em diversas áreas do conhecimento matemático. Ainda, as teorias onde a prova usualmente se dava de forma pouco rigorosa, sem necessariamente uma organização racional por trás, dificilmente seriam objeto de estudo do Bourbaki.

O *modus operandi* do seminário Bourbaki seria o seguinte: com a divisão dos artigos que deveriam ser escritos, os matemáticos interessados escolhiam quais iriam escrever. Durante o seminário, era realizada a leitura e os colegas faziam as críticas, que seriam consideradas para o aperfeiçoamento do artigo. No seminário seguinte, o processo se repetiria. Apenas quando houvesse consenso da adequação do artigo, o conteúdo seria encaminhado para a publicação, o que poderia levar mais de dez anos em alguns casos (CORRY, 2009, DIEUDONNÉ, 1970). Por causa deste método de escrita, Corry (2009) observa que é difícil reconhecer quem escreveu o artigo, devido às diversas modificações que passa até sua publicação. Para Borel (1998), existiria uma uniformidade nas publicações, obtida pelo trabalho de revisão de Dieudonné.

Bourbaki (1966, 1990) busca desenvolver o conteúdo matemático sem que seja necessária uma familiaridade do leitor com este conteúdo, apenas algum conhecimento dos raciocínios matemáticos e capacidade de abstração. O objetivo dos livros é prover as ferramentas para o pesquisador e para os estudantes de matemática. Buscando fornecer fundamentos sólidos, é escolhido um método axiomático e abstrato.

O objetivo de Bourbaki não era proibir a participação da intuição na matemática, mas sim de também conseguir utilizar as sintetizações já usadas em diferentes áreas caso houvessem semelhanças nas relações entre os elementos (BOURBAKI, 1950).

Bourbaki (1950) não dissocia a empiria da axiomatização. Para ele, alguns fatos seriam adaptáveis ao certos corpos axiomáticos. No entanto, este fato seria *a posteriori*, definido após ter o corpo axiomático formado. O corpo axiomático não seria formado buscando conter uma série definida de eventos. Caso isso ocorresse, o poder da axiomatização dependeria da intuição inicial e, portanto, seu escopo também seria reduzido apenas a aquela teoria. A única relação entre a axiomatização e o formalismo seria a “forma”, pois o método tenta criar uma estrutura sem vida, que consegue servir de instrumental para teorias que estão vivas, ainda em desenvolvimento (BOURBAKI, 1950).

Para Mac Lane (1996), o método desenvolvido por Bourbaki tem a vantagem de dividir melhor o conteúdo, através da separação em classes de objetos de acordo com os axiomas respeitados pelos mesmos, propiciando uma simplificação nas divisões e no entendimento da matemática.

Para Rodin (2011), a utilização das categorias permitiria a criação de uma linguagem, que poderia ser utilizada na matemática contemporânea, onde posteriormente poderiam ser observados os fundamentos, e divido de acordo com suas características, criando uma teoria das categorias. A Teoria dos Conjuntos poderia perder suas inconsistências desta maneira: inicialmente seria realizada uma abstração, definindo os conjuntos como objetos de certa categoria, então seriam listadas as propriedades dos objetos desta categoria. Estas propriedades resultariam em um conjunto dentro do conjunto descrito. Este desenvolvimento foi realizado por Bourbaki. Para ele, a forma de resolver os problemas da Teoria dos Conjuntos seria com a transformação desta teoria, retirando o conceito de conjunto de dentro dela.

5.2.3 Defesa do método axiomático

Para Bourbaki (1950), o método axiomático é mais abrangente que o formalismo lógico. Obviamente, como o método matemático consiste em estabelecer premissas e desenvolver estas para obter as conclusões, existe uma metodologia lógica envolvida. No entanto, o desenvolvimento do método axiomático permite observar quais são os princípios presentes em mais de uma teoria, tornando visível o núcleo geral da disciplina que tentamos desenvolver. Pelo formalismo lógico, observaríamos cada teoria de forma separada, mas pela axiomatização conseguimos observar as relações em comum destas teorias, ou seja, conseguimos realizar uma análise mais profunda.

O método axiomático desenvolvido por Bourbaki (1950) começa pela analogia da disciplina em estudo com uma estrutura. Ao pegar uma formulação, seria possível transformá-la em um elemento abstrato, observando suas componentes prévias (as premissas) e suas conclusões. Ao observar diferentes situações iniciais, conseguimos deduzir como cada premissa influencia o resultado. Conseguimos montar uma estrutura mesmo que não seja possível determinar a natureza dos elementos, desde que saibamos quais são as relações entre os elementos (suas condições prévias e seus resultados).

Em síntese, Bourbaki (1950) acredita que a teoria axiomática depende apenas da observação das implicações lógicas decorrentes dos axiomas da estrutura que estamos tentando axiomatizar, sem relação alguma com outros fatores, como a natureza dos elementos presentes nesta estrutura.

Bourbaki (1950) acreditava que o desenvolvimento axiomático possibilitaria a utilização das estruturas como ferramentas de trabalho do matemático. Uma vez reconhecendo as relações entre os elementos, ele saberia todos os teoremas decorrentes daquelas relações, que poderiam ser comuns a outros elementos com relações semelhantes. Ao utilizar o método axiomático, o matemático definiria seu *modus operandi*, conseguindo resultados independentes do seu talento individual ou dependentes das características dos elementos observados.

O método axiomático para Bourbaki (1950) seria esquemático, idealizado e congelado. Esquemático por que faria uma simplificação e sistematização dos fatos ao invés de uma descrição, idealizado por que em muitas áreas da matemática na realidade não possuiriam uma intersecção com as demais, estando mais distante do núcleo que Bourbaki desejava formar. Congelado por que durante o processo de identificação das estruturas não seria possível alterar suas relações. Isso não significa que a axiomatização bourbakiana levaria a verdade definitiva, mas que alterações na teoria que era foco de axiomatização acabariam inutilizando o corpo axiomático, que deveria ser reexaminado a cada modificação. Provavelmente o núcleo central seria mais consistente e, por isso, as mudanças nas diversas teorias não levariam a grandes alterações do mesmo, mas caso as estruturas particulares seriam mais suscetíveis a alterações por causa dessas transformações (BOURBAKI, 1950).

O início da aplicação do método axiomático se deu com teorias particulares, ou seja, a aplicação do corpo axiomático criado para essa teoria particular não poderia ser aplicado para outra teoria. No entanto, seu desenvolvimento posterior permitiu este intercâmbio de axiomas entre diversas teorias. Neste sentido, existe a dificuldade de entender como os resultados das interações dependem das relações e não das intuições relativas aos objetos desta teoria (BOURBAKI, 1950).

De acordo com Corry (1997b), existiria um caráter de verdades absolutas nas verdades matemáticas atingidas pelo método axiomático para Bourbaki. Para Hilbert, poderiam ser encontradas verdades desta forma, mas haveria outras formas, e não necessariamente este seria o método mais adequado. A construção das estruturas de Bourbaki surgiria dos teoremas da Teoria dos Conjuntos de Zermelo e Fraenkel. A composição do método axiomático de Bourbaki é semelhante ao de Hilbert, para Corry (1997b): as diferenças ocorrem por causa da forma dos objetos e não por causa do seu conteúdo.

Apesar da crença em verdades absolutas, de acordo com Corry (1992), a obtenção de uma verdade matemática não necessariamente significa que esta seja definitiva. Sua comprovação depende do tempo, pois no transcorrer do mesmo poderão ser adicionados novas evidências, que poderão confirmar ou descartar as verdades encontradas previamente.

5.2.4 As estruturas de Bourbaki

É possível dividir o estudo de matemática de acordo com as características de cada área de estudo, ou estruturas. Estas poderiam ser divididas em alguns grupos, de acordo com Bourbaki (1950). Existem as estruturas de composição, onde, a partir de um número de elementos, os seguintes poderão ser expressos como combinação dos anteriores. Outros seguem uma relação de ordem, onde é possível determinar uma posição relativa entre os elementos, de acordo com suas características. O terceiro grupo de estruturas são as topológicas. Nestas estruturas, é necessária a ideia de espaço, pois elementos como limite, continuidade e vizinhança dos elementos é necessária. Essas estruturas requerem um tratamento matemático mais profundo e uma maior abstração (BOURBAKI, 1950).

Para Corry (1997b) o objetivo de Bourbaki seria fundamentar toda a matemática com diversas estruturas, de acordo com a complexidade de cada uma. O estudo da matemática poderia ser aprofundado pelo estudo de cada estrutura.

Buscando organizar toda a teoria matemática em estruturas, Bourbaki mostra que observando as diversas áreas da matemática, existem algumas relações presentes em todas elas. Estas relações comuns seriam mais gerais, sendo presentes em apenas algumas estruturas consideradas particulares. Ao pegar o número mínimo de axiomas capaz de formar uma área da matemática, estamos obtendo uma estrutura-mãe. Como exemplo, supomos que utilizamos a estrutura base da geometria. A adição de alguns axiomas nos dará a geometria euclidiana, ou a projetiva. No entanto, os axiomas que todas as geometrias tem em comum é a estrutura base da geometria (BOURBAKI, 1950). Obviamente, tem estruturas que utilizam mais de uma estrutura mãe, como a álgebra topológica (que utiliza a estrutura-mãe da álgebra e da topologia). As estruturas particulares são aquelas que, adicionadas a estrutura-mãe, dão um caráter de individualidade da teoria (BOURBAKI, 1950).

Na visão de Bourbaki (1950), cada teoria não teria uma estrutura totalmente separada das demais, existiriam áreas de intersecção, cruzamentos, onde as estruturas das diversas teorias se encontrariam.

A divisão do conteúdo de Bourbaki buscava aumentar a complexidade com as publicações. Neste sentido, a estrutura segue a seguinte lógica: inicialmente, seria tratada a Teoria dos Conjuntos, então álgebra, topologia, funções de uma variável, espaços de vetores topológicos e por fim, integração (BOREL, 1998). Uma particularidade deste livro é o título, que apresenta a palavra matemática no singular, transparecendo uma crença na unidade das diversas teorias que compõem a matemática (BOREL, 1998).

Mac Lane (1996) mostra que a matemática do século XX utiliza bastante o conceito de estrutura, que seria a listagem das operações matemáticas e também das relações, além das propriedades necessárias e os axiomas, que podem ser vistos como as propriedades necessárias para que alguns objetos pertençam à teoria. Logo, seria possível observar se um objeto pertence ou não a uma estrutura quando este respeita os axiomas que esta estrutura possui.

O método das estruturas, para Mac Lane (1996) inicia com uma descrição rigorosa do conteúdo que está sendo axiomatizado, de seus objetos. Ao desenvolver este método para toda a extensão da matemática, seria possível agrupar em classes as diversas estruturas, de acordo com suas similaridades, conseguindo diferenciar os objetos pertencentes a cada classe de acordo com um grupo maior de axiomas, que descreveriam toda a classe.

Anteriormente a Bourbaki, a estrutura não era importante *per se*, ou seja, os problemas relativos a esta estrutura não eram importantes. Os principais problemas eram relativos a inconsistências da teoria que projetava a estrutura (MAC LANE, 1996).

5.2.5 Matemática X Matemáticas

Para Bourbaki (1950) a velocidade com ocorre o desenvolvimento das áreas da matemática não permite que um cientista consiga acompanhar essas inovações. Aubin (1997) mostra que Hilbert, no final da sua carreira, observava que os desenvolvimentos da matemática eram isolados, em diferentes áreas.

> Mentes universais como Poincaré e Hilbert pareciam pertencer ao passado. Agora os matemáticos apenas esperavam dominar suas próprias especialidades, cada uma com sua própria terminologia e método, não necessariamente aplicável aos outros campos da matemática (AUBIN, 1997, p. 305, tradução nossa).

Por este motivo, ocorre o desenvolvimento de diversas matemáticas, cada qual isolada, onde existe um referencial próprio, com métodos próprios, em que, neste espaço bastante especializado, é possível acompanhar o desenvolvimento (BOURBAKI, 1950).

Apesar do desenvolvimento isolado de cada ramo da matemática, as disciplinas conseguiram convergir para uma área na qual ocorre um núcleo central, que é bastante coerente. Para Bourbaki (1950) este núcleo é resultado de uma sistematização, que realizada buscando observar os pontos em comum entre as diferentes teorias, que é o método axiomático. Neste sentido, a axiomatização e a criação de uma única estrutura poderiam auxiliar no objetivo de novamente unificar a matemática (AUBIN, 1997).

5.3 INFLUÊNCIA DE BOURBAKI NO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO DO SÉCULO XX

A importância de Bourbaki foi bastante grande na evolução da matemática. Segundo Corry (2009), durante o surgimento do grupo a matemática ainda estava passando a Crise dos Fundamentos. Bourbaki começa a construir suas estruturas a partir do nada, sem precisar fundamentar em outros princípios. De acordo com Corry (1992) em momentos em que era necessário provar a consistência de uma teoria, Bourbaki buscava essa fundamentação na empiria ao invés de provar a consistência do método formalista.

É importante observar que como Bourbaki utilizava apenas teorias já consolidadas (DIEUDONNÈ, 1970), logo, a questão da verdade não era tão importante: a princípio, ela deveria ter sido tratada durante o desenvolvimento anterior destas áreas de conhecimento. O interesse de Bourbaki seria mais voltado na descoberta dos axiomas que compõe a estrutura e nas relações entre os mesmos.

Ao desviar-se da Crise dos Fundamentos, para Corry (2009), é possível dizer que Bourbaki forneceu um novo rumo para a matemática. O desenvolvimento durante 1950 e 1960 de Bourbaki culminou em seis livros compondo os Elementos de Matemática, que seria o núcleo do projeto Bourbaki.

Em relação à aplicação da matemática a outros ramos do pensamento, Bourbaki não tinha oposição, mas segundo Aubin (1997) acreditava que a matemática deveria permanecer livre de influências externas. Ainda, Bourbaki acreditava que o desenvolvimento da matemática não deveria ser norteado pelas necessidades das demais ciências, pois isso acabava não desenvolvendo novas matemáticas (AUBIN, 1997).

A partir do final da década de 1960, a influência de Bourbaki passa a ser reduzida. Em parte por que Dieudonné, que era o principal líder, saiu do grupo, pois ao completar cinquenta anos os membros do grupo Bourbaki não poderiam mais contribuir no mesmo, e também por que alguns matemáticos franceses, cujos trabalhos não interessavam Bourbaki, passaram a obter um maior sucesso nas suas publicações (CORRY, 2009). Bourbaki também exerce influência em Gérard Debreu, economista.

5.4 GÉRARD DEBREU

Gérard Debreu, economista e matemático, foi junto com von Neumann pioneiro na utilização do método axiomático na ciência econômica. Hildebrand (1983) busca analisar o trabalho de Gérard Debreu. Ele observa uma alteração na utilização da matemática na economia, onde Debreu utilizou instrumentos não convencionalmente utilizados, como a teoria do ponto fixo e também análise convexa, deixando de lado o cálculo diferencial, instrumento usual da economia.

As alterações que podem ser observadas nos trabalhos de Debreu não são apenas nos instrumentais matemáticos. A existência de preocupações estéticas também é nova no pensamento econômico, assim como a necessidade de criação de uma estrutura que forneça a base da sua teoria. As conclusões na teoria econômica não devem ser obtidas apenas de acordo com os exemplos, dando espaço a conclusões baseadas na análise dos conceitos formulados e da estrutura. A seguir, podemos observar que Debreu busca um maior afastamento da realidade para as observações de relações a um nível maior de abstração. É importante ressaltar quer as áreas de conhecimento que eram objeto de análise de Debreu não estavam tão consolidadas como as bourbakianas. Porém, ao utilizar elementos de Bourbaki, Debreu também não dá muita atenção para a questão da verdade, que passa a ser importante apenas na garantia da consistência dos axiomas do sistema.

Para Hildebrand (1983), a axiomatização da ciência econômica já havia sido buscada por outros autores, como Wald, von Neumann, Morgenstern, Koopmans e Arrow. No entanto, a tentativa de Debreu consegue uma maior profundidade no método axiomático. Em Teoria do Valor, para Hildebrand (1983), Debreu define inicialmente os conceitos básicos da teoria econômica, a saber: mercadorias, unidades de consumo e preços. As definições são bastante precisas de acordo com o método axiomático, e de acordo com essas definições é possível observar a existência de equilíbrio no mercado:

> O espaço das mercadorias é representado matematicamente por um espaço linear, o sistema de preços é definido por uma função linear no espaço das mercadorias, e as preferências são representadas por relações

> binárias [...]. Dadas as representações destes conceitos primitivos, conceitos derivados podem ser definidos, por exemplo, demanda, oferta, possível estado de equilíbrio (HILDEBRAND, 1983, p. 4, tradução nossa).

Ao definir os conceitos fundamentais da teoria e a partir deles observar suas consequências dos mesmos, que são definidas por teoremas, observamos claramente a tradição axiomática deste trabalho (HILDEBRAND, 1983).

A influência de trabalhos axiomáticos mais distantes da realidade, como o de Bourbaki é observável para Hildebrand (1983, p.5, tradução nossa) ao afirmar que para Debreu “qualquer teoria axiomática deveria passar ao árduo teste de remover todas as interpretações econômicas intrínsecas ao modelo e observar se a estrutura matemática se mantinha sem essas interpretações”.

Na cerimônia de titulação de doutor *Honoris Causa*, de acordo com Hildebrand (1983), Debreu mostra que uma maior utilização matemática permitira uma maior clareza nos conceitos passíveis de ambiguidade na teoria econômica. Outra vantagem é a possibilidade de realizar uma interpretação com maior liberdade, sem a necessidade de comprometer a análise econômica com o viés do pesquisador. Debreu ainda expõe a necessidade de exposição de todas as premissas que estão por trás da teoria. Caso as premissas não sejam bem especificadas, ou caso elas sejam violadas, os resultados não estarão definidos ou poderão diferir daqueles encontrados no modelo criado. O método axiomático pode auxiliar neste sentido, organizando o desenvolvimento da teoria econômica e tornando mais fácil a contribuição entre os pesquisadores, o que contribui para uma maior rapidez na produção de conteúdo.

Em relação ao rigor lógico, Debreu acredita que o método matemático consegue aumentar o rigor da teoria econômica:

> [...] na sua forma matemática, a teoria econômica está aberta a uma eficiente exame minucioso dos erros lógicos. O rigor que foi alcançado como consequência está em contraste com os padrões de raciocínio que eram aceitos no final da década de 1930 (DEBREU, 1991, p. 3, tradução nossa).

Apesar de estarem sendo reduzidas as distancias entre a abordagem de cada pesquisador, aumentando assim a produtividade na ciência econômica, ainda não surgiu uma teoria unificada da economia. No entanto, axiomatização consegue fornecer algumas sugestões sobre como os problemas mais gerais da economia podem ser resolvidos:

> Mas uma grande e unificada teoria vai continuar fora do alcance da economia, que continuará suplicando para uma grande coleção de teorias individuais. Cada uma dessas lida com uma série de fenômenos que busca entender e explicar. Quando isso toma a forma axiomática, suas hipóteses ficam explícitas e delimitam o domínio de aplicação e tornam ilegítimo ultrapassar estes limites. Algumas dessas teorias tomam uma visão compreensiva do sistema econômico e trazem percepções para a solução de alguns problemas globais (DEBREU, 1991, p.3, tradução nossa).

O uso da matemática permite que as teorias sejam mais rigorosas, permitindo resultados mais gerais e corretos, para Debreu (1991, p.4, tradução nossa):

> Matemática provê a ele [o economista] uma linguagem e um método que permite um estudo efetivo dos sistemas econômicos de alta complexidade [...]. Ele [o sistema] incessantemente pede por hipóteses mais fracas, conclusões mais fortes e mais generalidade. Ao usar a forma matemática, a teoria econômica pode suprir essas demandas.

Debreu (1959) acredita que a formalização da Teoria do Valor tem o benefício de tornar a teoria mais correta:

> [...] a teoria do valor é tratada aqui com o padrão de rigor da escola formalista matemática contemporânea. O esforço relacionado a um alto padrão de rigor substitui os raciocínios corretos e substitui os incorretos[18], mas oferece outras recompensas. Ele usualmente leva a um entendimento mais profundo dos problemas aos quais este método é aplicado, e isso não deixou de acontecer neste caso [da axiomatização da teoria do valor]. Ele também permite uma mudança radical nas ferramentas matemáticas. Na área em discussão, houve essencialmente a alteração do cálculo para as propriedades da convexidade e topológicas, uma transformação que resultou em ganhos notáveis em generalidade e simplicidade da teoria (DEBREU, 1959, p. viii, tradução nossa).

É possível observar a influência de Bourbaki no pensamento de Debreu (1986) pela percepção do último de acordo com a percepção de que “como um modelo formal de uma economia adquire vida matemática por si, ele se torna objeto de um processo inexorável onde o rigor, a generalidade e a simplicidade são perseguidas” (DEBREU, 1986, p. 1265, tradução nossa) mostrando a importância do estudo do modelo *per se*, em concordância com Bourbaki.

---

[18] A formalização irá substituir os raciocínios e deixar aparente quais são incorretos, pois deixará as contradições explícitas.

O capítulo analisou Nicolas Bourbaki, o contexto onde este surgiu e suas contribuições para a matemática. É importante ressaltar que ocorre uma alteração da abordagem de Hilbert para a de Bourbaki, que é mais abstrata, mostrando um aprofundamento do método axiomático. A influência desse autor na teoria econômica foi analisada de acordo com a contribuição de Debreu.

6 A ESCOLA FORMALISTA E A TEORIA ECONÔMICA

O desenvolvimento da escola formalista foi bastante útil para permitir que a teoria econômica utilizasse métodos matemáticos mais profundos. O objetivo deste capítulo é mostrar quais métodos eram utilizados anteriormente e quais foram introduzidos. Serão também expostas as críticas feitas às aplicações dos métodos novos.

Durante o século XIX e XX, a ciência econômica avançou em diversas direções. A utilização de métodos matemáticos foi uma das áreas que avançou, com o desenvolvimento por diversos matemáticos, como Walras, Weyl, John von Neumann, e também por economistas, como Paul Samuelson e Oskar Morgenstern.

Neste capítulo, o desenvolvimento da teoria econômica será analisado a luz das modificações em relação às aplicações da matemática nesta ciência. Logo, as referências de desenvolvimento da teoria econômica serão parciais, sendo analisadas apenas pela evolução dos métodos matemáticos, sem uma visão de totalidade da teoria econômica.

Os desenvolvimentos matemáticos da teoria econômica podem ser divididos em duas áreas. Uma relacionada ao cálculo diferencial, com influência direta da física newtoniana. Entre os modelos que utilizam este tipo de método estão os modelos de equilíbrio geral walrasiano. A outra área refere-se aos trabalhos influenciados pelo método axiomático. Este método permitiu que a ciência econômica fizesse uso de outras áreas da matemática, como a topologia. John von Neumann utiliza este método em Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico. Debreu (1984) acredita que a utilização da matemática (com o método axiomático) serviria para “tornar a teoria rigorosa, generalizá-la, simplificá-la e desenvolvê-la em novas direções” (DEBREU, 1984, p.267, tradução nossa).

Durante o século XX observamos a transição entre o método baseado na física, conhecido como a “metáfora mecânica” para o método baseado em axiomatizações, a “metáfora matemática”. Com isso, ocorre uma maior abstração e um progressivo afastamento da realidade (INGRAO; ISRAEL, 1990). Esta alteração não ocorreu sem críticas. O procedimento de abstração dá margem para que os resultados obtidos com o instrumental matemático, após a abstração, sejam diferente dos obtidos na realidade. A falta de cuidado e de tato de alguns pesquisadores, ao não realizar a distinção entre as áreas que devem ou não ser alvo da matemática ou na transformação dos elementos econômicos em matemáticos, representa um dos principais motivos das críticas da utilização dos métodos matemáticos na ciência econômica.

O método formalista, apesar de permitir avanços em algumas áreas da teoria econômica, acabou tornando aceitável a criação de áreas de estudo abstratas, sem uma conexão com a realidade. O fenômeno econômico tinha uma conexão com o modelo, mas a axiomatização excessiva, buscando encontrar os fundamentos básicos, acabava afastando a relação o modelo e a realidade. Como o estudo da forma *per se* acaba sendo aceitável em meados do século XX por Nicolas Bourbaki, o desenvolvimento destas áreas da economia, que acabavam sem conexão com o mundo real, foi permitido.

Buscando realizar uma análise dos métodos matemáticos à economia, mostraremos os estudos que utilizaram o cálculo diferencial como base, que são aqueles que se enquadram na metáfora mecânica. Posteriormente, mostraremos como ocorreu a transição. Serão descritos os estudos que utilizaram a metodologia axiomática. Por fim, buscaremos mostrar as principais críticas das aplicações da matemática na ciência econômica.

6.1 A ECONOMIA E O CÁLCULO DIFERENCIAL: A METÁFORA MECÂNICA

A Teoria do Equilíbrio Geral emerge em um período onde estava posta a questão da aplicabilidade dos fundamentos teóricos das ciências exatas na economia (INGRAO; ISRAEL, 1990). O modelo de equilíbrio geral walrasiano é bastante distinto do desenvolvimento da economia do período. Para Ingrao e Israel (1990) é possível observar que Walras não é influenciado pela teoria utilitarista, desenvolvida durante o mesmo período que a Teoria de Equilíbrio Geral. Na visão de Ingrao e Israel (1990), a inspiração da Teoria do Equilíbrio Geral Walrasiano foi “a analogia entre o funcionamento de um sistema de mercados interdependentes e o equilíbrio de um sistema de corpos da mecânica” (INGRAO; ISRAEL, 1990, p. 32, tradução nossa).

A escola fisiocrata pode ser considerada a pioneira na aplicação dos métodos matemáticos (de forma similar à física) na ciência econômica. Para Ingrao e Israel (1990) é possível observar nos fisiocratas a existência de leis universais, criadas por uma força externa ao homem, e que não são conhecidas por ele. Essas leis deveriam ser buscadas pelo governante, pois a utilização das mesmas levaria a um equilíbrio natural (novamente, a ideia de equilíbrio de forças de Newton). De acordo com Ingrao e Israel (1990) para os fisiocratas, essa lei deveria incluir a produção e distribuição de bens e serviços na sociedade, e devido a este fato os autores tiveram isto como objeto de estudo. Houve a sugestão da utilização de métodos matemáticos para modelar, e a Tabela Econômica[19] de Quesnay faz uso destes métodos. A ideia de equilíbrio natural também é sugerida por Turgot, ao sugerir a analogia da produção com os vasos comunicantes da física.

O desenvolvimento de uma ciência com bases matemáticas e físicas para observar as relações sociais e econômicas foi realizada por Condorcet, influenciado pela escola fisiocrata. Condorcet, na visão de Ingrao e Israel (1990) tenta desenvolver uma matemática social, que é utilizar um método quantitativo, através da objetivização dos fenômenos qualitativos. O fundamento dessa teoria deveria incluir ainda os aspectos da escolha, que é feita de forma livre e autônoma pelos agentes. Para isso, Condorcet começa com a análise empírica do fenômeno para conseguir formular os princípios fundamentais da matemática social. Para Condorcet, com os dados empíricos seria possível observar o fluxo de produção, e então criar um modelo abstrato. Isso seria viável, pois os seres humanos fazem suas escolhas por certas razões, buscando certo resultado final (INGRAO; ISRAEL, 1990).

Apesar da sugestão do uso de métodos matemáticos e físicos na análise social e econômica por Condorcet, a adoção desta metodologia foi efêmera. No mesmo período, de acordo com Ingrao e Israel (1990) os métodos descritivos da biologia estavam sendo desenvolvidos, e muitos teóricos julgaram este mais apropriado do que o método matemático. A ideia central era de que as ciências sociais deveriam utilizar métodos que não necessitassem da abstração para a formulação de modelos. Say julga que a observação social deveria utilizar métodos semelhantes aos da psicologia, já que esta estuda o indivíduo, e poderia ser adaptada para a sociedade, que é o coletivo de indivíduos (INGRAO; ISRAEL, 1990).

Desde a formulação de Condorcet, os métodos físicos e matemáticos não conseguiram um papel central na teoria econômica. No entanto, Ingrao e Israel

---

[19] Tradução do Francês de *Tableau Economique*

mostram que a partir de 1930 um grupo de economistas começou a discutir a ideia de equilíbrio walrasiano, e conseguiu chegar a uma formulação mais rigorosa que a de Pareto. A partir desta década, o estudo da ciência econômica passou também a atrair cientistas que buscavam um maior rigor matemático (INGRAO; ISRAEL, 1990).

A Teoria do Equilíbrio Geral Walrasiano foi desenvolvida buscando a aplicação do método que Isaac Newton utilizou na física nas ciências sociais: “o preenchimento do programa de Galileu para um estudo quantitativo [matemático] dos processos físicos - no campo das ciências sociais” (INGRAO; ISRAEL, 1990, p. 33-34, tradução nossa). Durante o iluminismo, a aplicação da matemática nas ciências sociais era algo bem aceito, havendo um grupo de economistas na França, influenciado por Turgot que buscavam aplicar métodos matemáticos na ciência econômica. Observando este trabalho, Condorcet, matemático francês, cria uma matemática social, com o objetivo de “fundar uma ciência racional da conduta humana que iria utilizar as mesmas metodologias analíticas da física e matemática” (INGRAO; ISRAEL, 1990, p. 36, tradução nossa). Desde este período, portanto, é possível observar uma tentativa de criar uma mecânica racional, aplicada à racionalidade humana.

Isaac Newton é uma influência bastante forte no período, principalmente por que no trabalho de Newton “o universo poderia ser concebido e representado através de conceitos do conhecimento matemático” (INGRAO; ISRAEL, 1990, p.37, tradução nossa), ainda, utilizando o método matemático seria possível observar as normas que regulariam os fenômenos naturais. A ideia de Montesquieu de leis naturais da sociedade – onde diversas forças estariam agindo, sendo buscado um equilíbrio – é influenciada pelo pensamento newtoniano (INGRAO; ISRAEL, 1990).

No modelo de equilíbrio geral desenvolvido por Walras, o método matemático utilizado se aproxima do método aplicado na mecânica celestial: “Como a satisfação máxima é determinada pela razão entre escassez e valor, o equilíbrio é determinado através da proporcionalidade inversa destas forças” (INGRAO; ISRAEL, 1990, p.168, tradução nossa). É importante ressaltar que essa ideia já estava presente no início da correspondência com Poincaré:

> [...] da mesma forma como os corpos celestiais atraem uns aos outros na proporção direta da sua massa e inversa do quadrado de suas distâncias, então os bens tendem a ser trocados uns pelos outros no inverso da

> proporção das suas *raretés*[20] (INGRAO; ISRAEL, 1990, p. 168, tradução nossa).

Walras observa a analogia entre a ciência econômica, nas teorias de maximização da satisfação e do equilíbrio geral de mercado e da física (mecânica) com a "lei da balança romana[21] e o equilíbrio universal de corpos celestes" (INGRAO; ISRAEL, 1990, p.168, tradução nossa). Para Walras, é possível fazer uma analogia entre o conceito de "massa e força na mecânica e utilidade e escassez" (INGRAO; ISRAEL, 1990, p.168, tradução nossa) na economia.

A Teoria Walrasiana entre em declínio por diversos motivos, como a dificuldade de mensuração dos fenômenos econômicos e certa arbitrariedade na escolha das funções representativas na economia (INGRAO; ISRAEL, 1990). Ainda, há a sugestão de que a Teoria Walrasiana de equilíbrio possui um caráter normativo, que não seria compatível com a abordagem matemática descritiva.

6.2 A TRANSIÇÃO DE MÉTODOS

Com a Crise dos Fundamentos, Ingrao e Israel (1990) salientam que o estudo do equilíbrio geral walrasiano também entrou em equilíbrio. Com a Crise dos Fundamentos, o projeto reducionista entra em decadência e, para Ingrao e Israel (1990) "a tentativa de unificação de métodos e conceitos das duas disciplinas – física matemática e economia matemática - finalmente foi provado impossível" (INGRAO; ISRAEL, 1990, p.170, tradução nossa). Isso ocorre em partes, pois os teóricos da escola reducionista da física declaram a impossibilidade de estender os métodos reducionistas para as demais ciências.

Para Gloria-Palermo (2010) a transição entre a utilização dos métodos da mecânica para os métodos matemáticos formalistas foi por causa da não resolução do problema de equilíbrio geral. O método necessitou de alteração para que a solução fosse possível, resultando em alterações, como restrições de preços negativos dos bens, e de bens que são livres, onde qualquer quantidade pode ser demanda, alterando também as relações de igualdade para desigualdade.

[20] Na tradução do francês, rareté significa raridade, escassez. Israel e Gasca definem como "a intensidade da última necessidade satisfeita, i.e., o incremento de satisfação obtido pelo consumidor *i* por uma incremento infinitesimal do bem *j*." (INGRAO; ISRAEL, 1990, p. 92-93, tradução nossa). Ou seja, é o conceito de utilidade marginal.

[21] Tradução do inglês de *steelyard.*

É importante ressaltar que o processo de enfraquecimento da escola reducionista leva a uma diminuição na utilização dos métodos desta escola, como o cálculo infinitesimal e as equações diferenciais. “Ocorre uma transição de paradigmas: “a posição central que a *analogia mecânica* tinha no reducionismo clássico era agora atribuído à *analogia matemática”* (INGRAO; ISRAEL, 1990, p. 171, tradução nossa, grifo do autor). O objetivo, para Ingrao e Israel (1990) deixa de ser a transformação em leis mecânicas dos fenômenos para ser a unificação, de forma formal, de regras das diversas áreas internas da matemática na sua analogia básica. Com isso, Ingrao e Israel (1990) mostram que a relação com a verificação empírica deixa de ser relevante, não sendo mais necessária uma correspondência exata entre os fatos e as leis matemáticas. Como não haveria mais a certeza matemática, a matemática serviria para fornecer uma das diversas possibilidades de estrutura da realidade.

A Analogia Matemática acaba tornando o escopo de aplicação da matemática maior (na Analogia Mecânica, ela se restringia a parcelas da teoria econômica) e com isso a verificação passa a ser menos factível e importante. A abordagem dentro da analogia mecânica passa a ser mais voltada a modelagem matemática. Com isso, a transformação dos fatos econômicos em matemáticos passa a ser mais livre, sem uma necessidade de exatidão, segundo Ingrao e Israel (1990). Com a ascensão da modelagem, o reducionismo é deixado de lado, transformando os estudos realizados por Walras em matéria obsoleta, que voltaria a teoria econômica apenas após a radical mudança na forma e no método de tratamento da Teoria do Equilíbrio Geral (INGRAO; ISRAEL, 1990).

6.3 A AXIOMATIZAÇÃO DA CIENCIA ECONÔMICA:

O método matemático, que substituiu o mecânico, expressava os problemas em termos formais, sem se ater ao conteúdo apresentado. Para que isso fosse possível, a abstração é realizada, transformando o objeto real, de outra ciência, em um objeto matemático (INGRAO; ISRAEL, 1990). Nesse nível de abstração, as relações matemáticas seriam utilizadas e os resultados transformados novamente para a ciência que vieram, ou seja, haveria uma codificação e decodificação, utilizando a matemática como instrumento (INGRAO; ISRAEL, 1990).

O método matemático, para Ingrao e Israel (1990) se tornou importante por causa dos progressos realizados nessa ciência por Hilbert. Este autor criou um sistema de axiomas, com certas propriedades e teoremas, que juntos podem ser utilizados para que sejam retiradas conclusões lógicas. A definição dos objetos, na teoria axiomática, não é importante, pois o importante são as conclusões lógicas: ela é vazia de conteúdo (INGRAO; ISRAEL, 1990).

A utilização da analogia matemática na ciência econômica é impulsionada por Karl Menger, que faz conferências na universidade de Viena, incentivando o estudo do tema (INGRAO; ISRAEL, 1990). Morgenstern observa as dificuldades de aplicação, e tenta criar uma linguagem matemática adequada para as relações e instituições econômicas, como o mercado. O resultado, segundo Ingrao e Israel (1990), dessa tentativa é o livro de Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, escrito por ele e pelo matemático von Neumann. Sobre o equilíbrio geral, Ingrao e Israel acreditam que o modelo da mecânica pode não ser apropriado pela especificidade das forças de mercado, que permite a criação de monopólios, por exemplo. Von Neumann utiliza o método axiomatizado criado por Hilbert para provar a existência de um equilíbrio geral na economia.

Ingrao e Israel (1990) mostram que essa tentativa não foi isolada: Cassel desenvolve um modelo de equilíbrio geral de oferta e demanda sem a utilização de funções de utilidade. Ele cria um sistema de equações que permite o alcance de um ponto de equilíbrio. Este sistema acaba ocupando um papel relevante na ciência econômica, e Wald propõe uma solução. O estudo por Wald é interessante por utilizar o método axiomático hilbertiano, e pelas hipóteses utilizadas, que são razoáveis economicamente e utilizadas até os dias atuais na ciência econômica.

O conceito de equilíbrio mecânico é substituído por dinâmico, no qual os agentes observam se as expectativas são confirmadas, introduzido por Hayek conforme Blaug (2003).

Blaug (2003) acredita que nas décadas de 1940 e 1950 houve uma revolução formalista, pois o período foi caracterizado "pela preferência absoluta pela forma do argumento econômico sobre o conteúdo" (BLAUG, 2003, p. 145, tradução nossa). Isso pode ser visto pela abordagem no artigo Existência de Equilíbrio para uma economia competitiva, de 1954:

> Não era difícil de enxergar que o artigo de Arrow-Debreu é uma fuga para o formalismo no sentido de aquilo que uma vez era um problema econômico – é realmente possível que haja o equilíbrio simultâneo em mercados múltiplos em uma economia real? – foi transformado em um problema matemático sobre uma economia virtual, que é resolvido não pelos padrões utilizados pelo economista, mas pelos padrões do matemático (BLAUG, 2003, p. 147-148, tradução nossa).

Para Blaug (2003) claramente a influência do pensamento de Bourbaki e da escola formalista estão representados neste trecho.

Com a ascensão da escola formalista, as demonstrações na teoria econômica alteram-se. Após a definição do corpo axiomático da teoria, é provado que a negação de algum teorema gera uma contradição na teoria, conforme Blaug (2003). Logo, a argumentação passa a ser puramente lógica, e as provas não indicam a necessidade de ocorrência, e sim apenas a possibilidade.

6.4 FORMALISMO E ECONOMIA: CRÍTICAS

A aplicação da modelagem matemática à economia ou a Analogia Matemática não é aceita sem controvérsias. A utilização de métodos mais abstratos e com uma conexão menor com o mundo real acaba tornando a economia mais distante das relações do mundo real. As críticas a utilização deste método serão analisadas abaixo.

6.4.1 Crítica a “certeza matemática”

Algumas críticas surgiram como a ideia de que a matemática possui um sistema lógico superior ao da ciência econômica é facilmente refutada por Beed e Kane (2001). Os autores buscam expor a diversidade existente dentro da matemática, com concepções diferentes de verdade e demonstração, como as escolas formalista, logicista e intuicionista. Ou seja, a própria matemática não possui uma única versão destes conceitos importantes, não sendo logicamente superior à economia ou a quaisquer outros sistemas de pensamento com diversas correntes.

Crowe (1988) também concorda que a certeza matemática não é obtida de forma certa e definitiva. Os Elementos, de Euclides, apesar de ser considerado um dos maiores trabalhos escritos sobre a geometria, apresenta alguns postulados inadequados. Em relação à utilização do método axiomatizado, Crowe (1988) acredita que se um enunciado duvidoso é axiomatizado, ele seguirá passível de questionamento no sistema axiomatizado, sem ser retiradas seus pontos críticos no processo de axiomatização.

Em relação à demonstração, Crowe (1988) coloca que elas são bem posicionadas no tempo, não sendo atemporais. A observação de contraexemplos consegue por à tona toda a teoria anterior, que antes era aceita por ter sido demonstrada.

6.4.2 Ausência de Realismo dos axiomas

Segundo Beed e Kane (2001), os modelos matemáticos aplicados à economia muitas vezes apresentam axiomas que não são validados empiricamente. Quando isto ocorre, os resultados obtidos através do desenvolvimento destes axiomas não são válidos também. O possível descolamento dos modelos e da realidade já havia sido previsto por Ingrao e Israel (1990), ao mostrar a transição da Analogia Mecânica para a Matemática. Os resultados decorrentes da falta de realismo dos axiomas não são unânimes pelos economistas.

Beed e Kane (2001) mostram que alguns economistas não acreditam que a falta de realismo dos axiomas limite o desenvolvimento da ciência econômica com essas bases, uma vez que o comportamento humano não poderia ser totalmente expresso em termos de regras lógicas ou matemáticas. Na microeconomia clássica, a teoria do consumidor se baseia no axioma fraco da preferência revelada (VARIAN, 2006), mas a validação deste princípio pela observação do comportamento dos consumidores nem sempre ocorre (BEED; KANE, 2001).

É importante lembrar que Hilbert e von Neumann não concordariam com este tipo de método: a utilização do método axiomático deveria ter uma relação com a realidade, não podendo ser desenvolvido a partir do pensamento do pesquisador. (ISRAEL; GASCA, 2009; ROWE, 2000). Se contrapondo a estes autores, Bourbaki aceitava a existência de estruturas axiomáticas sem correspondência com a realidade, que eventualmente poderiam ser aplicadas a certas áreas do conhecimento (BOURBAKI, 1950).

Para Beed e Kane (2001), a axiomatização da teoria econômica pode acabar tornando mais atrativo o desenvolvimento de questões mais relevantes matematicamente do que economicamente, o que acaba limitando a profundidade destas teorias em determinadas áreas. Para Milton Friedman, o método utilizado na ciência se legitima pela capacidade de realizar previsões próximas da realidade, o que também é conhecido como instrumentalismo. Se contrapondo ao instrumentalismo, existe o realismo científico, que acredita que coerência entre a realidade e o modelo teórico deve ocorrer, para que a construção teórica seja passível de validação.

A capacidade dos modelos com hipóteses irrealistas em fazer boas predições não é assegurada por todos os economistas. Por exemplo, Hausman não acredita que isso possa ocorrer. No entanto, Beed e Kane (2001) lembram que em alguns casos as propriedades matemáticas desenvolvidas são de interesse maior do que as possíveis predições que permitiriam uma comprovação empírica. A utilização destes métodos foi apenas capaz de aumentar o rigor na teoria econômica. Beed e Kane (2001) acreditam que o atual desenvolvimento matemático aplicado à economia “parece ter sido baseada mais no desejo de obter a completude lógica do que no desejo de novos entendimentos” (BEED; KANE, 2001, p. 588).

Na visão de alguns críticos da utilização dos modelos matemáticos, como Leontief, o problema não é a utilização da modelagem matemática, e sim a falta de retorno à realidade, buscando comparar os resultados do modelo com os da realidade (BEED; KANE, 2001). Beed e Kane (2001) entendem o processo de abstração por trás da modelagem, porém não acreditam na relevância do processo enquanto não é realizada a comparação destes resultados com aqueles obtidos na realidade. A defesa da utilização da modelagem ocorre pela dificuldade de comparação dos diversos métodos econométricos, que poderia acabar reduzindo estes apenas à estimação, e também pela dificuldade de predição do comportamento humano, que acabaria reduzindo a confiança e permitindo certa discrepância dos resultados da modelagem e os reais (BEED; KANE, 2001).

Em relação à irrealidade dos modelos, Gloria-Palermo observa que na transição entre a utilização dos métodos da física para os métodos de axiomatização, ou seja, a “analogia matemática”, a modelagem se afasta ainda mais da realidade:

> A economia walrasiana, como as outras ciências baseadas na analogia mecânica, adota como critério científico de rigor o confronto com a realidade. Por consequência, um modelo é uma economia em miniatura que é suficientemente simplificada para permitir o tratamento matemático. A adoção da analogia matemática muda radicalmente esta percepção. Rigor

> científico é definido de acordo com critério interno, predominantemente estético (von Neumann 1947). O rigor se torna sinônimo de pureza, abstração e consistência do sistema formal (GLORIA-PALERMO, 2010,p. 168, tradução nossa).

6.4.3 Quantificação Natural da Teoria Econômica

Outro ponto de controvérsia para Beed e Kane (2001) é em relação à quantificação da economia. Alguns autores consideram que ela é naturalmente quantificável, como Paul Samuelson, enquanto outros veem que alguns aspectos qualitativos podem ser perdidos nesta quantificação, havendo uma distorção da realidade ao realizar este processo. Beed e Kane (2001) atentam que talvez a economia reduza seu escopo apenas aos aspectos que podem ser analisados quantitativamente, e com isso, seu poder de análise se reduza. A observação dos aspectos quantitativos apenas pode dar a impressão de “ordem sobre o processo econômico que não existe na realidade” (BEED; KANE, 2001, p.590). Beed e Kane (2001) acreditam que os métodos matemáticos deveriam ter como objetivo a criação de modelos capazes de capturar a complexidade existente no mundo real. Para isso, as premissas deveriam ser realistas, assim como os resultados obtidos no modelo comparáveis com os reais. Caso houvesse a violação de um destes aspectos, seria mais interessante a utilização de uma metodologia descritiva.

Boulding (1948) mostra que a economia é dual: por um lado, possui uma estrutura básica, que é lógica, e por outro, possui dados, que servem para calibrar o modelo criado na lógica. Não é possível isolar os assuntos, utilizando apenas a empiria, quantificável, na teoria econômica. Logo, a economia é naturalmente quantificável, mas é também lógica, e essa dualidade é intrínseca desta ciência e não deve ser ignorada.

6.4.4 Linguagem Matemática

A utilização de uma linguagem de forma unificadora já foi tratada por alguns teóricos. Debreu, por exemplo, acredita que seja possível a tradução de termos matemáticos na teoria econômica, e que isso possibilite o trabalho coletivo de pesquisadores, ao utilizar termos semelhantes.

Para Paul Samuelson, também existe uma equivalência entre a linguagem matemática e a verbal. Porém, essa afirmação não é considerada consenso entre os diversos autores: primeiramente, a consideração que existe uma equivalência entre os termos não é aceita, pois a matemática não é considerada uma linguagem natural (BEED; KANE, 2001). Ainda, a crença de que a transição dos fatos econômicos para a linguagem matemática ocorre sem perda da complexidade decorrente dos fatores comportamentais é bastante criticada. Samuelson vê outras vantagens na linguagem matemática, como a maior clareza, precisão e concisão. Stigler não observa as mesmas vantagens de Samuelson, observando que a linguagem matemática pode ser mais confusa e ambígua. Para Dennis, a transição pode ser feita, mas isso acaba restringindo os vocábulos utilizados, pois os termos matemáticos são mais escassos e representam às vezes mais de um termo verbal (BEED; KANE, 2001).

Para Browder (1988), o pesquisador pode escolher entre formular suas questões em palavras ou na linguagem matemática. O primeiro método consegue descrever as relações na forma sujeito-predicativo com certa qualidade. Este método passa a ser substituído pela linguagem matemática no século XVII, que passa a necessitar de um desenvolvimento mais rápido, buscando solucionar as questões que são propostas para ele. Para Browder (1988, p. 291, tradução nossa):

> Tão mais rico é o repertório da pesquisa matemática moderna, tão maior o arsenal de conceitos e ferramentas disponíveis para o uso nas ciências matematizadas. A dificuldade encontra-se no problema da comunicação, nos cientistas estarem aptos a penetrar nas dificuldades da tradução entre as linguagens das diferentes disciplinas, sabendo o que é relevante nos conceitos e nas técnicas que estão disponíveis.

Logo, a tradução pode ser realizada, mas deve ser feita com cautela, sob pena de que haja perda de conteúdo.

Boulding (1948) discorda que a matemática possa ser utilizada como uma linguagem. Para ele, “toda a linguagem é uma abstração simbólica da realidade designada com o propósito de comunicar experiência de uma pessoa a outra” (BOULDING, 1948, p. 188, tradução nossa), e neste sentido, a matemática não consegue atuar como uma linguagem. Boulding (1948) mostra que ela até pode agir como uma linguagem em alguns momentos, mas ela não é completa. Isso ocorre por que “a matemática opera em um nível de abstração onde qualquer heterogeneidade ou complexidade na estrutura das variáveis básicas irá ser negligenciada” (BOULDING, 1948, p. 188, tradução nossa)

Leoni e Frola (1977, p.109, tradução nossa) não acreditam que a tradução seja sempre adequada. Aceitando que a economia lida com a interação entre os seres humanos, para eles “a tradução das palavras da linguagem normal em matemática não é necessariamente a forma mais adequada de lidar com os problemas empíricos dos seres humanos no mundo real”. Com a tradução, poderia acontecer dos agentes econômicos (seres humanos) se transformarem em robôs.

Mirowski, segundo Beed e Kane (2001), salienta que a capacidade do pesquisador em transformar a linguagem verbal em matemática às vezes é mais importante do que a habilidade dos mesmos com a última. Caso a transição da linguagem verbal para a matemática não seja realizada de forma adequada, os resultados obtidos pela matematização poderão não ser válidos. É importante ressaltar que existem áreas da economia onde os termos precisam ser utilizados de forma exata, sob pena de perder a interpretação correta. Nestas áreas, a utilização dos métodos matemáticos acabará resultando em afirmações que não possuem sentido econômico. Logo, existem áreas da economia que não são passíveis de matematização (BEED; KANE, 2001).

No presente capítulo foram expostas as alterações nas utilizações dos métodos matemáticos na economia devido à teoria formalista. Foi realizada uma análise dos instrumentos matemáticos utilizado anteriormente ao método axiomático e os adotados posteriormente.

7 CONCLUSÃO

O desenvolvimento científico não funciona isoladamente sem relações entre as diversas ciências. Este trabalho procurou mostrar como que o desenvolvimento da economia, no período recente, foi influenciado pela matemática. As alterações de paradigma na matemática, alterando o método de cálculo clássico para métodos mais sofisticados, como o topológico, influenciou de forma decisiva a teoria econômica, tornando possível a criação de áreas mais sofisticadas, como a Teoria dos Jogos.

As alterações em termos do conceito de ciência e dos objetivos da matemática influenciaram de forma significativa a economia. A aplicação do método axiomático, crescentemente abstrato e generalizado, propiciou a redução do interesse e da realização dos procedimentos de verificação empírica, afastando a teoria econômica da realidade. A questão de quão válido é esta teoria sem a proximidade de aplicações ou a possibilidade de utilização para previsões, por exemplo, precisa ser avaliada.

Na minha opinião, a perda do caráter de ciência social pelo uso de um instrumental matemático, demonstra que a utilização da matemática não está sendo realizada de forma correta, uma vez que está retirando características essenciais da teoria econômica. O método matemático precisa ser revisto para conseguir aproximar novamente a ciência econômica da realidade.

A capacidade de criar uma linguagem matemática, da mesma forma como uma linguagem verbal, sem perda de conteúdo, também precisa ser analisada se é razoável para os economistas. Além disso, é preciso pensar no afastamento dos axiomas à realidade econômica, que pode estar também distanciando a teoria econômica de suas aplicações.

Por fim, é importante ressaltar que o desenvolvimento científico causou mudanças significantes na teoria econômica. Caso esta ciência consiga ser sábia o suficiente para adotar as novas metodologias com cautela, certamente ela se beneficiará deste desenvolvimento. No entanto, a adoção sem restrições causará problemas de adequação, uma vez que estes métodos são adaptados de outras áreas do conhecimento, não sendo realmente desenvolvidos para a economia.

REFERÊNCIAS

ALVAREZ, Carlos; SEGURA, Luis Felipe. Introducción. In: HILBERT, David. **Fundamentos de las Matemáticas.** Cidade do México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, 1993. p. 9-14.

AUBIN, David. The Withering Immortality of Nicolas Bourbaki: A Cultural Connector at the Confluence of Mathematics, Structuralism, and the Oulipo in France. **Science in Context,** Cambridge, v. 10, p. 297-342, 1997.

BEED, C.; KANE, O. What is the critique of the mathematization of Economics?. **Kyklos,** Basel, v.44, n.4, p. 581-612, 2001.

BLAUG, Mark. The formalist revolution of the 1950s. **Journal of the History of Economic Thought,** New York, v. 25, n. 2, p. 145-156. 2003.

BOREL, A. Twenty-five years with Nicolas Bourbaki. **Notices American Mathematical Society,** St. Louis, n. 45, p. 373-380. 1998.

BOULDING, Kenneth E. Samuelson's Foundations: The Role of Mathematics in Economics. **The Journal of Political Economy**, Chicago, v. 56, n. 3, p. 187-199, 1948.

BOURBAKI, Nicolas. The Architeture of Mathematics. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v. 57, n. 4, p. 221-232, 1950.

______. **Elements of Mathematics:** General Topology. Berlin: Springer, 1966. p.11-15.

______. **Elements of Mathematics:** Algebra. Berlin: Springer, 1990. p. xxi-xxiii.

BROWDER, Felix E. Mathematics and the Sciences. In: ASPRAY, William; KITCHER, Philip (Org.). **History and Philosophy of Modern Mathematics.** Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988. p. 278-292.

CORRY, Leo. Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure. **Synthese,** New Jersey, v. 92, n. 3, p. 315-348, 1992.

______. David Hilbert and the axiomatization of Physics (1894-1905). **Archive for History of Exact Sciences,** New Jersey, v.51, n. 2, p. 83-198., 1997a.

______. The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond. **Science in Context**, Cambridge, v. 10, p. 253-296, 1997b.

______. The Empiricist Roots of Hilbert's Axiomatic Method. In: HENDRICKS, Vincent F.; PEDERSEN, Stig Andur; JORGENSEN, Klaus Frovin. (Org.). **Proof Theory:** History and Philosophical Significance. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 35-54.

______. David Hilbert y su filosofía empiricista de la geometria. **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, Caracas, v. 9, n. 1, pp. 27– 44, jan. 2002.

______. Writing the Ultimate Mathematical Textbook: Nicolas Bourbaki's Éléments de mathématique. In: ROBSON, Eleanor; STEDALL, Jacqueline. **Handbook of the History of Mathematics.** Oxford: Oxford University Press, 2009. p. 565-587.

CROWE, Michael J. Ten Misconceptions about Mathematics and Its History. In: ASPRAY, William; KITCHER, Philip (Org.). **History and Philosophy of Modern Mathematics.** Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988. p. 260-277.

DEBREU, Gérard. **Theory of Value.** New Haven: Yale University Press, 1959. p. vii-ix.

______. Economic Theory in the Mathematical Mode. **The American Economic Review**, Pittsburgh, 1984. v.74, n.3, p.267-278.

______. Theoretic Models: Mathematical Forms and Economic Content. **Econometrica,** Cambridge, v. 54, n.6, p. 1259-1270, 1986.

______. Mathematization of economic theory. **The American Economic Review**, Pittsburgh, v. 81, n. 1, p. 1-7, 1991.

DIEUDONNÉ, Jean A. The Work of Nicolas Bourbaki. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v. 77, p. 134-145, fev. 1970.

FRAENBEL, Abrahan. In: HEINEMANN, H. (Org.). **A Filosofia do Século XX**. 6. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkan, 2008.

GLORIA-PALERMO, Sandye. Introducing Formalism in Economics: The Growth Model of John von Neumann. **Panoeconomicus,** Novi Sad, v. 2, p. 153-172. 17 mar. 2010.

HAWKINGS, Thomas. **Lebergue's Theory of Integration.** Providence: Ams Chelsea Publishing, 2000. p.55-85.

HILBERT, David. Acerca del concepto de número. In: Hilbert, David. **Fundamentos de las Matemáticas**. Selección e introducción de Carlos Alvarez y Luis Felipe Segura. México, DF: UNAM, 1993a. p. 17-22.

______. El pensamiento axiomático. In: ______. **Fundamentos de las Matemáticas**. Selección e introducción de Carlos Alvarez y Luis Felipe Segura. México, DF: UNAM, 1993b. p. 23-35.

______. La nueva fundamentación de las matemáticas. In: ______. **Fundamentos de las Matemáticas**. Selección e introducción de Carlos Alvarez y Luis Felipe Segura. México, DF: UNAM, 1993c. p. 37-62.

______. Acerca del infinito. In: ______. **Fundamentos de las Matemáticas**. Selección e introducción de Carlos Alvarez y Luis Felipe Segura. México, DF: UNAM, 1993d. p. 83-121.

______. La fundamentación de la teoría elemental de números. In: ______. **Fundamentos de las Matemáticas**. Selección e introducción de Carlos Alvarez y Luis Felipe Segura. México, DF: UNAM, 1993e. p. 123-135.

HILDEBRAND, Introduction. In: DEBREU, Gérard. **Mathematical Economics.** New York: Cambridge University Press, 1983. p. 1-29.

HINTIKKA, Jaakko. Hilbert Vindicated? **Synthese**, New Jersey, v. 110, n. 1, p. 15-36, jan. 1997.

INGRAO, Bruna; ISRAEL, Giorgio. **The Invisible Hand:** Economic Equilibrium in the History of Science. Cambridge: The MIT Press, 1990.

ISRAEL, Giorgio; GASCA, Ana Millán. **The World as a Mathematical Game:** John von Neumann and Twientieth Century Science. Berlin: Birkhäuser Verlag Ag, 2009.

KUHN, H W; TUCKER, A W. John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Providence, v. 64, p. 100-122, 1958.

LAX, Peter D. Remembering John Von Neumann. In: GLIMM, James; IMPAGLIAZZO, John; SINGER, Isadore. **The Legacy of John von Neumann.** New York: American Mathematical Society, 1988. cap. 2, p. 5-8.

LEONARD, Robert J. Creating a Context for Game Theory. **History of Political Economy**, Durham, v. 24, p. 29-76, 1992.

______. From parlor games to social science: von Neumann, Morgenstern, and the creation of game theory 1928-1944. **Journal Of Economic Literature**, Pittsburgh, v. 33, p. 730-761, 1995.

______. New Light on von Neumann: politics, psychology and the creation of game theory. **CESMEP Working Paper Series**, Torino, n. 7, 2007.

______. The collapse of interwar Vienna: Oskar Morgenstern's Community, 1925-50. **History of Political Economy**, Durham, v. 43, n. 1, p. 83-130, 2011.

LEONI, Bruno; FROLA, Eugenio. On mathematical thinking of economics. **Journal of Libertarian Studies**, Auburn, v. 1, n. 2, p. 101-109, 1977.

MAC LANE, Saunders. Structure in Mathematics. **Philosophia Mathematica,** Oxford, v. 4, p. 174-183, 1996.

MARSCHAK, Jacob. Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics. **Journal Of Political Economy**, Durham, v.54, p. 97-115, abr. 1946.

MARTÍNEZ, Guillermo; PIÑEIRO, Gustavo E. **Gödel Para Todos.** Buenos Aires: Seix Barral, 2009.

MIROWSKI, Philip. What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish? **History Of Political Economy,** Durham, v. 24, p. 113-147, 1992.

MORGENSTERN, Oskar. Perfect Foresight and Economic Equilibrium. **Selected economic writings of Oskar Morgenstern**. New York: New York University Press, 1978.

______. The Collaboration Between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games. **Journal of Economic Literature,** Pittsburgh, v.14, n. 3, p. 805-816, set. 1976.

RASHID, Salim. John von Neumann and Scientific Method. **Journal of the History of Ideas**, Philadelphia, v. 68, n. 3, p. 501-527, jul. 2007.

RODIN, Andrei. Categories without Structures. **Philosophia Mathematica,** Oxford,v.19,n.1, p. 20-46. 2011.

ROWE, David. The Calm Before the Storm: Hilbert's Early Views on Foundations. In: HENDRICKS, Vincent F.; PEDERSEN, Stig Andur; JORGENSEN, Klaus Frovin. (Org.). **Proof Theory:** History and Philosophical Significance. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 55-93.

SNAPPER, E. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism. **Mathematics Magazine**, Washington, v.52, p. 207-216, 1980.

SIEG, W. Toward finitist proof theory. In: HENDRICKS, Vincent F.; PEDERSEN, Stig Andur; JORGENSEN, Klaus Frovin. (Org.). **Proof Theory:** History and Philosophical Significance. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 95-114.

VARIAN, Hal R. Preferência Revelada. In: ______, **Microeconomia:** conceitos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006. p. 131-134.

VON NEUMANN, John. A Model of General Economic Equilibrium. **The Review of Economic Studies**, v. 13, n. 1, p. 1-9.1945-1946.

______. The Mathematician Part 1 and 2. **Works of the Mind**, v. 1, n.1, p. 180-196, 1947. Disponível em: <http://www.gap-system.org/~history/Extras/Von_Neumann_Part_1.html> e <http://www.gap-system.org/~history/Extras/Von_Neumann_Part_2.html>. Acesso em: 10 nov. 2011.

VON NEUMANN, John; FRÉCHET, Maurice. Communication on the Borel Notes. **Econometrica**, v. 21, n. 1, p. 124-127, jan. 1953.

VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. **Theory of Games and Economic Behavior**. 7. ed. Princeton: Princeton University Press, 1953.

WALD, A. Book Review: Theory of games and Economic Behavior. **The Review of Economics and Statistics**, Cambridge, v. 29, n. 1, p. 47-52, fev. 1947.