

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Partículas de Spin $3/2$: uma Possibilidade à Matéria Escura

Patrice Audibert Camati

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob
orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef.

Porto Alegre
29/11/2011

Agradecimentos

Minha interpretação desta parte do trabalho é a de uma possibilidade de mencionar pessoas que foram relevantes de alguma maneira, não somente para a graduação em si mas também para um crescimento intelectual durante o período que a decorreu.

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Dimiter Hadjimichef, pela sua dedicação e seus ensinamentos, além de ter sido um exemplo de pessoa competente, seja como orientador seja como professor. Agradeço à UFRGS pelo acesso gratuito a um ensino de qualidade. Agradeço também a todos os professores que tive durante a graduação, pois certamente todos eles contribuíram de alguma maneira para o meu crescimento intelectual. Em especial gostaria de agradecer ao professor Yan Levin pela mudança de visão da Física que me proporcionou durante suas aulas, e ao professor Horacio Alberto Dottori pelas construtivas conversas e pelo companheirismo. Gostaria de agradecer também a todos meus amigos pelos momentos de esparecimento, entretanto em especial ao Matheus Giroto pelas incontáveis discussões construtivas durante esses quatro anos. Agradeço imensamente à minha mãe Cladir Clemar Audibert pelo sustento desse aluno de universidade pública que para tentar ter um desempenho considerável, possui 21 anos e jamais trabalhou. Devo agradecimentos também aos meus familiares Alcydes Sabino Audibert e Décio Antônio Audibert pelo apoio financeiro recebido em atividades complementares que foram de extrema importância no ganho de uma melhor capacidade para enfrentar essa jornada.

”O cientista não estuda a natureza por sua utilidade; ele o faz porque se deleita com ela, e esse deleite vem de sua beleza. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la, e se não valesse a pena conhecê-la, não haveria porque viver essa vida.”

Henri Poincaré

Resumo

O problema da matéria escura aflige cientistas há 70 anos. Entre as inúmeras propostas para tentar entender a sua origem, existe os chamados WIMP's (weak interacting massive particle).

Neste trabalho vamos estudar um formalismo para descrever partículas de spin $3/2$, com a motivação de que a matéria escura possa ser composta por partículas com tal característica. Com tal formalismo em mãos teremos uma teoria de campo livre para esses férmions vetoriais-espinoriais. Mostraremos que essa teoria evita o problema de não causalidade, o qual surgiu quando propuseram a primeira tentativa em descrever essas partículas relativisticamente. Assim, com uma teoria consistente à relatividade restrita, podemos utilizar uma das extensões do modelo padrão para inserir esse formalismo. A extensão que propusemos para inserir é chamada de extensão de Stueckelberg. Apresentaremos como funciona tal extensão e posteriormente discutiremos algumas propostas que podem ser executadas em um estudo posterior.

Índice

Introdução	1
1. Formalismo de Kirchbach-Napsuciale	4
1.1 Contextualização Histórica	4
1.2 O Formalismo	5
1.3 Aplicado a um Campo com Spin 3/2	7
1.4 O Lagrangiano para Spin 3/2	10
1.5 Campo de Spin 3/2 Interagente	11
1.6 Soluções para Partícula Livre	12
1.7 Causalidade da Equação de Movimento Acoplada	15
1.8 Conclusão	21
2. Mecanismo de Stueckelberg	22
2.1 Contextualização Histórica	22
2.2 O Mecanismo	22
2.3 Stueckelberg no Modelo Padrão	24
2.4 Massa dos Bósons Vetoriais	24
2.5 Acoplamento com Férmions	26
2.6 Conclusão	28
3. Extensão do Modelo Padrão	29
3.1 Apresentação	29
3.2 Conclusão	30
A. Considerações sobre Teoria de Grupos	31
A.1 Notação e Unidades	31
A.2 O Grupo de Lorentz e Poincaré	32
A.3 Equivalência entre a Álgebra de Lorentz e $su(2) \times su(2)$	32
B. Considerações sobre Teoria Quântica de Campos	34
B.1 Equação de Movimento	34
B.2 Princípio de Gauge	36
B.3 Quebra Espontânea de Simetria e Mecanismo de Higgs	38

Índice	1
---------------	---

C. Relações Importantes	42
C.1 Matrizes de Dirac	42
C.2 Relações Importantes e Algumas Demonstrações	43
Referências	53

Introdução

As primeiras tentativas de derivar a densidade total de matéria na vizinhança do Sol foram feitas em torno da década de 20. Haviam resultados contraditórios, alguns (Öptik [1], Kapteyn [2] e Oort [3]) concluíram que a densidade de matéria poderia ser explicada com a população estelar conhecida enquanto que outros (Jeans [4]) concluíram que a população estelar não era suficiente para explicar. Essa suposta matéria que estaria faltando se denomina de matéria escura.

Uma discrepância muito maior entre a massa dos objetos visíveis e a massa total dos sistemas estelares foi apresentada 1933 com o trabalho de Zwicky [5]. Ele mediu a velocidade radial das galáxias do aglomerado de Coma e mostrou que a velocidade orbital era quase dez vezes maior do que o esperado pela soma da massa de todas as galáxias pertencentes ao aglomerado. Inicialmente não havia distinção entre matéria escura local (aquela nas vizinhanças do Sol) e matéria escura global (aquela mostrada por Zwicky). Essa distinção surgiu com o trabalho de Einasto [6] em 1974. Fazendo um estudo detalhado de modelos galácticos Einasto mostrou que esses dois tipos de matéria escura possuíam propriedades e natureza muito diferentes. De fato a matéria escura local é bariônica enquanto que a matéria escura global tem sido assunto de discussão por muito tempo.

Atualmente, as evidências experimentais sugerem fortemente que a matéria escura global seja não-bariônica. Um candidato para compor essa matéria escura são os chamados WIMP's (weak interaction massive particles). A única partícula já presente no modelo padrão que poderia compor a matéria escura são os neutrinos, que apesar de não possuírem massa no modelo padrão há extensões que implementam massa a eles [8]. Mas esses neutrinos não são abundantes suficientes para compor a parte dominante da matéria escura [9]. Ou seja, qualquer tentativa de partícula candidata à matéria escura vai surgir de alguma extensão do modelo padrão .

Neste trabalho vamos propor que a matéria escura é composta por partículas (férmions) de spin $3/2$. Para verificarmos experimentalmente essa suposição precisamos detectar essas partículas direta ou indiretamente. Isso quer dizer que devemos obter, através de um modelo consistente, seções de choque de aniquilação em partículas do modelo padrão. O problema que surge à vista é que não há uma teoria bem definida que descreva a dinâmica de partículas com spin $3/2$ interagentes. Vamos apresentar um formalismo para descrição de partículas com essa característica. Com esse formalismo podemos adicionar a uma extensão do

modelo padrão que postula um setor escuro de partículas, para posteriormente poder-se calcular as seções de choque e verificar se o modelo é consistente.

Capítulo 1

Formalismo de Kirchbach-Napsuciale

1.1 Contextualização Histórica

Em 1941, William Rarita e Julian Schwinger propuseram um formalismo para descrever partículas livres com spin $3/2$ [10]. A motivação para tal proposta foi a observação das chamadas partículas ressonantes, como as partículas $\Delta^{++}(1232)$ (uuu) ou Ω^- (sss). A proposta de Rarita e Schwinger foi escrever uma equação de movimento do tipo equação de Dirac para um campo vetorial-espinorial:

$$\begin{aligned}(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi_\mu &= 0, \\ \gamma^\mu\psi_\mu &= 0, \\ \partial^\mu\psi_\mu &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Onde as duas últimas relações são vínculos impostos ao campo ψ_μ para que cancele as suas componentes que se propagariam no setor de spin $1/2$ (1.14). Entretanto, em 1969 Giorgio Velo e Daniel Zwanziger mostraram que quando esse campo livre (de Rarita-Schwinger) interagia com um campo eletromagnético externo a equação de movimento possui soluções não causais [11]. Especificamente por causa dos vínculos adicionados à equação de movimento. Desde então, houveram propostas para uma descrição bem sucedida dessas partículas [12] [13] [14]. Mesmo com essas propostas não possuímos um formalismo bem definido para descrever partículas de spin $3/2$. Na última década surgiu uma proposta promissora na literatura para a descrição de campos com spin maior que 1. Seus autores são Mariana Kirchbach e Mauro Napsuciale. O formalismo proposto se baseia em notar que as equações de movimento satisfeitas por um campo são apenas consequência das propriedades das representações do grupo de Lorentz homogêneo escolhido para acomodar o campo e as simetrias discretas que nós queremos que sejam realizadas nesse espaço [15] [16].

1.2 O Formalismo

Esse formalismo, em princípio, serve para descrever qualquer campo com spin não nulo. A proposta desse formalismo é definir um operador projeção conveniente tal que quando aplicado ao campo, fixe automaticamente a massa e spin da partícula que queremos descrever e ainda cancele os graus de liberdade que se propagariam nos outros subespaços invariantes do grupo de Poincaré. Após a obtenção desse operador projeção podemos obter a equação de movimento, densidade lagrangiana e o propagador do campo. Utilizando a noção convencional de que as partículas são subespaços invariantes dos operadores Casimir do grupo de Poincaré, os estados devem satisfazer as seguintes relações:

$$p^2 \Psi^{(m,s)} = m^2 \Psi^{(m,s)} \text{ (operador momentum),} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{W}^2 \Psi^{(m,s)} = -p^2 s(s+1) \Psi^{(m,s)} \text{ (vetor de Pauli-Lubanski),} \quad (1.3)$$

onde $\Psi^{(m,s)}$ denota uma representação genérica do grupo de Poincaré com massa m e spin s . A primeira equação é a equação de Klein-Gordon frequentemente referida como *mass shell condition* (camada de massa), pois essa é a equação que fixa a massa da partícula. Vamos analisar o procedimento em um caso simples, onde há somente dois subespaços invariantes de Poincaré, aquele de spin s e aquele de spin $(s-1)$, e a dimensão da representação irredutível de Lorentz é arbitrária.

Propõe-se os operadores projeção covariantes sobre os subespaços de massa m spin s e massa m spin $(s-1)$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}^{(m;s)}(p) = -\frac{1}{2s} \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} + s(s-1) \frac{p^2}{m^2} \mathbf{1}_{n \times n} \right), \quad (1.4)$$

$$\mathcal{P}^{(m;s-1)}(p) = \frac{1}{2s} \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} + s(s+1) \frac{p^2}{m^2} \mathbf{1}_{n \times n} \right), \quad (1.5)$$

onde n é a dimensionalidade da representação de interesse. Esses operadores projetam sobre spins bem definidos onde quer que estejam na camada de massa. Verificamos isso mostrando que esses operadores realmente satisfazem as propriedades que operadores de projeção devem satisfazer aplicados a partículas satisfazendo a equação de Klein-Gordon, ou seja:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{P}^{(m;s)}(p)]^2 \Psi^{(m,s)} &= \mathcal{P}^{(m;s)} \left(-\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} \Psi^{(m,s)} + s(s-1) \frac{p^2}{m^2} \Psi^{(m,s)} \right) \\
 &= \mathcal{P}^{(m;s)} \left(-\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{-m^2 s(s+1)}{m^2} \Psi^{(m,s)} + \right. \\
 &\quad \left. + s(s-1) \frac{m^2}{m^2} \Psi^{(m,s)} \right) \\
 [\mathcal{P}^{(m;s)}(p)]^2 \Psi^{(m,s)} &= \mathcal{P}^{(m;s)}(p) \Psi^{(m,s)} \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{P}^{(m;s-1)}(p)]^2 \Psi^{(m,s-1)} &= \mathcal{P}^{(m;s-1)} \left(\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} \Psi^{(m,s-1)} + s(s+1) \frac{p^2}{m^2} \Psi^{(m,s-1)} \right) \\
 &= \mathcal{P}^{(m;s-1)} \left(\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{-m^2 (s-1)s}{m^2} \Psi^{(m,s-1)} + \right. \\
 &\quad \left. + s(s+1) \frac{m^2}{m^2} \Psi^{(m,s-1)} \right) \\
 [\mathcal{P}^{(m;s-1)}(p)]^2 \Psi^{(m,s-1)} &= \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p) \Psi^{(m,s-1)} \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^{(m;s)}(p) \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p) \Psi^{(m,s-1)} &= \mathcal{P}^{(m;s)}(p) \Psi^{(m,s-1)} \\
 &= \left(-\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} \Psi^{(m,s-1)} + s(s-1) \frac{p^2}{m^2} \Psi^{(m,s-1)} \right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{-m^2 (s-1)s}{m^2} \Psi^{(m,s)} + \right. \\
 &\quad \left. + s(s-1) \frac{m^2}{m^2} \Psi^{(m,s)} \right) \\
 \mathcal{P}^{(m;s)}(p) \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p) \Psi^{(m,s-1)} &= 0 \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p) \mathcal{P}^{(m;s)}(p) \Psi^{(m,s)} &= \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p) \Psi^{(m,s)} \\
 &= \left(\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} \Psi^{(m,s)} + s(s+1) \frac{p^2}{m^2} \Psi^{(m,s)} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2s} \right) \left(\frac{-m^2 s(s+1)}{m^2} \Psi^{(m,s)} + \right. \\
 &\quad \left. + s(s+1) \frac{m^2}{m^2} \Psi^{(m,s)} \right) \\
 \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p) \mathcal{P}^{(m;s)}(p) \Psi^{(m,s)} &= 0 \tag{1.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{P}^{(m;s)}(p) + \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p)] &= \left(\frac{1}{2s}\right) \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} + s(s+1)\frac{p^2}{m^2}\mathbf{1}_{n \times n}\right) + \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2s}\right) \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} + s(s-1)\frac{p^2}{m^2}\mathbf{1}_{n \times n}\right) \\
 [\mathcal{P}^{(m;s)}(p) + \mathcal{P}^{(m;s-1)}(p)] &= \mathbf{1}_{n \times n}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Mostramos assim que a relação:

$$\mathcal{P}^{(m;s)}(p)\Psi^{(m,s)} = \Psi^{(m,s)} \tag{1.11}$$

seleciona somente os graus de liberdade com spin desejado s , cancela a propagação dos que possuem spin $(s-1)$ e ainda incorpora a fixação de massa dada pela equação de Klein-Gordon. A expressão (1.11) pode ser reescrita, utilizando-se as expressões (A.15) e (1.4), na seguinte forma mais geral:

$$[-\Gamma_{AB\mu\nu}p^\mu p^\nu + m^2\delta_{AB}] \Psi_B^{(m,s)} = 0, \tag{1.12}$$

onde:

$$\Gamma_{AB\mu\nu} = -\frac{1}{2s} (T_{AB\mu\nu} + s(s-1)\delta_{AB}g_{\mu\nu}) = 0. \tag{1.13}$$

A equação (1.12) é a equação de movimento para um campo de spin s em um espaço de representação arbitrário do grupo de Lorentz quando o grupo de Poincaré possui somente dois subespaços invariantes.

1.3 Aplicado a um Campo com Spin 3/2

Vamos aplicar o formalismo descrito na seção anterior para um campo de spin 3/2. O espaço de representação desse campo é dado pelo produto entre as representações do spinor de Dirac ψ , que possui spin 1/2, e o 4-vetor potencial A_μ , que possui spin 1. Geramos assim o vetor-spinor ψ_μ que é representado pelo seguinte espaço:

$$\begin{aligned}
 \psi_\mu &= A_\mu \otimes \psi \simeq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right], \\
 \psi_\mu &\simeq \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right) \oplus \left(1, \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Escrevendo as equações (1.4), (1.11) e (1.12) na representação vetorial-espinorial:

$$\mathcal{P}^{(m; \frac{3}{2})}(p) = -\frac{1}{3} \left(\frac{\mathcal{W}^2}{m^2} + \frac{3}{4} \frac{p^2}{m^2} \mathbf{1}_{16 \times 16} \right), \quad (1.15)$$

$$\left[-\frac{1}{3} \left(\mathcal{W}^2 + \frac{3}{4} p^2 \mathbf{1}_{16 \times 16} \right) - m^2 \mathbf{1}_{16 \times 16} \right] \psi_\mu = 0, \quad (1.16)$$

$$\left[-\frac{1}{3} T_{AB\mu\nu} p^\mu p^\nu - \left(\frac{1}{4} p^2 + m^2 \right) \delta_{AB} \right] \psi^B = 0, \quad (1.17)$$

onde $A = (\alpha a)$ e $B = (\beta b)$ com α e β sendo índices do espaço-tempo e a e b índices espinoriais.

Afim de escrever (1.17) devemos calcular $T_{AB\mu\nu}$ explicitamente. Na representação vetorial-espinorial os geradores do grupo de Lorentz são escritos como:

$$\begin{aligned} (M^{\rho\sigma})_{\alpha a \beta b} &= (M_V^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1}_{ab} \oplus (M_S^{\sigma\rho})_{ab} \otimes \mathbf{1}_{\alpha\beta}, \\ (M^{\rho\sigma})_{\alpha\beta ab} &= (M_V^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} \delta_{ab} + g_{\alpha\beta} (M_S^{\sigma\rho})_{ab}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde os geradores na representação vetorial $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e espinorial $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ são, respectivamente (apêndice C):

$$\begin{aligned} (M_V^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} &= i (g_\alpha^\rho g_\beta^\sigma - g_\beta^\rho g_\alpha^\sigma) \quad \text{e} \\ (M_S^{\sigma\rho})_{ab} &= \frac{1}{2} (\sigma^{\rho\sigma})_{ab}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

O vetor de Pauli-Lubanski em ambas representações é escrito como (C.18):

$$\begin{aligned} [W_\lambda]_{\alpha\beta} &= i \epsilon_{\lambda\alpha\beta\mu} p^\mu \quad \text{e} \\ (w_\lambda)_{ab} &= \frac{i}{2} (\gamma_5 \sigma_{\lambda\nu})_{ab} p^\nu. \end{aligned} \quad (1.20)$$

E o seu quadrado como:

$$\begin{aligned} [W^2]_{\alpha\beta} &= -2 (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) p^\mu p^\nu, \\ [w^2]_{ab} &= -\frac{1}{4} (\sigma_{\lambda\mu})_{ac} (\sigma^\lambda{}_\nu)_{cb} p^\mu p^\nu, \\ (W \cdot w + w \cdot W)_{\alpha a \beta b} &= -\frac{1}{2} \left[\epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\mu} (\gamma_5 \sigma_{\lambda\nu})_{ab} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\nu} (\gamma_5 \sigma_{\lambda\mu})_{ab} \right] p^\mu p^\nu. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Agora o vetor de Pauli-Lubanski na representação vetorial-espinorial:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{W}^\lambda)_{\alpha a \beta b} &= (W^\lambda)_{\alpha \beta} \otimes \mathbf{1}_{ab} \oplus (w^\lambda)_{ab} \otimes \mathbf{1}_{\alpha \beta}, \\
 (\mathcal{W}^\lambda)_{\alpha \beta ab} &= (W^\lambda)_{\alpha \beta} \delta_{ab} + g_{\alpha \beta} (w^\lambda)_{ab},
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde seu quadrado é dado por:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{W}^2)_{\alpha \beta ab} &= (W^2)_{\alpha \beta} \delta_{ab} + (W)_{\alpha \beta} \cdot (w)_{ab} + (w)_{ab} \cdot (W)_{\alpha \beta} \\
 &\quad + g_{\alpha \beta} (w^2)_{ab}.
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Munido das relações (1.21) obtemos:

$$(\mathcal{W}^\lambda \mathcal{W}_\lambda)_{\alpha \beta ab} = T_{\alpha a \beta b \mu \nu} p^\mu p^\nu, \tag{1.24}$$

com:

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha a \beta b \mu \nu} &= -2(g_{\alpha \beta} g_{\mu \nu} - g_{\alpha \nu} g_{\beta \mu}) - \frac{1}{4} (\sigma_{\lambda \mu})_{ac} (\sigma^\lambda_\nu)_{cb} \\
 &\quad - \frac{1}{2} [\epsilon^\lambda_{\alpha \beta \mu} (\gamma_5 \sigma_{\lambda \nu})_{ab} + \epsilon^\lambda_{\alpha \beta \nu} (\gamma_5 \sigma_{\lambda \mu})_{ab}].
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Substituindo essas relações encontradas nesse espaço de representação na equação de movimento geral (1.12), obtemos a equação de movimento (onde os índices spinoriais foram suprimidos):

$$[-\Gamma_{\alpha \beta \mu \nu} p^\mu p^\nu + m^2 g_{\alpha \beta}] \psi^\beta = 0, \tag{1.26}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha \beta \mu \nu} &= \frac{2}{3} (g_{\alpha \beta} g_{\mu \nu} - g_{\alpha \nu} g_{\beta \mu}) \\
 &\quad + \frac{1}{6} (\epsilon^\lambda_{\alpha \beta \mu} \gamma^5 \sigma_{\lambda \nu} + \epsilon^\lambda_{\alpha \beta \nu} \gamma^5 \sigma_{\lambda \mu}) \\
 &\quad + \frac{1}{12} \sigma_{\lambda \mu} \sigma^\lambda_\nu g_{\alpha \beta} - \frac{1}{4} g_{\mu \nu} g_{\alpha \beta}.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Podemos verificar que o operador $K_{\alpha \beta} \equiv \Gamma_{\alpha \beta \mu \nu} p^\mu p^\nu$ satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 p^\alpha K_{\alpha \beta} &= 0, & K_{\alpha \beta} p^\beta &= 0, \\
 \gamma^\alpha K_{\alpha \beta} &= 0, & K_{\alpha \beta} \gamma^\beta &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Substituindo (1.27) em (1.26):

$$\left[(-p^2 + m^2) g_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} p_\beta p_\alpha + \frac{1}{3} (p_\alpha \gamma_\beta + p_\beta \gamma_\alpha) \not{p} - \frac{1}{3} \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \not{p} \right] \psi^\beta = 0. \quad (1.29)$$

Entretanto, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{(m, \frac{3}{2})}(p) \psi^\beta = \frac{p^2}{m^2} \mathbf{P}_{\alpha\beta}^{\frac{3}{2}} \psi^\beta = \psi_\alpha, \quad (1.30)$$

onde:

$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\mathcal{W}_{\alpha\beta}^2}{p^2} + \frac{3}{4} g_{\alpha\beta} \right), \quad (1.31)$$

mostrando que o projetor covariante $\mathcal{P}^{(m, \frac{3}{2})}(p)$ é o produto do projetor que fixa a massa m com o projetor que seleciona o spin $3/2$ $\mathbf{P}_{\alpha\beta}^{\frac{3}{2}}$. A partir de (1.28) verificamos que o vetor-espinor satisfaz:

$$\begin{aligned} (p^2 - m^2) \psi_\alpha &= 0, \\ \gamma_\alpha \psi^\alpha &= 0, \\ p_\alpha \psi^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Podemos observar que o vetor-espinor satisfaz as mesmas relações de vínculos que as propostas por Rarita-Schwinger (1.1). O que faz sentido, pois precisamos cancelar a propagação nos setores de spin $1/2$. Entretanto como a equação de movimento não é a mesma, esses vínculos não farão com que a propagação se torne não-causal.

1.4 O Lagrangiano para Spin $3/2$

A densidade lagrangiana que promove a equação de movimento (1.26) frente ao processo variacional é:

$$\mathcal{L}_{free} = -\frac{1}{2} [(\partial^\mu \bar{\psi}^\alpha) \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\nu \psi^\beta + (\partial^\nu \bar{\psi}^\beta) \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\mu \psi^\alpha] + m^2 \bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha, \quad (1.33)$$

onde:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu} &= \gamma^0 (\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu})^\dagger \gamma^0 \quad \text{e} \\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0\end{aligned}\tag{1.34}$$

Utilizando (1.25) podemos mostrar a propriedade:

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu} = \Gamma_{\beta\alpha\nu\mu}.\tag{1.35}$$

Escrevendo, assim, a densidade lagrangiana em uma forma mais simplificada:

$$\mathcal{L}_{free} = - (\partial^\mu \bar{\psi}^\alpha) \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} (\partial^\nu \psi^\beta) + m^2 \bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha.\tag{1.36}$$

E reescrevendo da seguinte maneira para mostrar que gera a equação de movimento:

$$\mathcal{L}_{free} = - (g^{\mu\sigma} \partial_\sigma \bar{\psi}^\alpha) \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} (g^{\nu\rho} \partial_\rho \psi^\beta) + m^2 g_{\alpha\beta} \bar{\psi}^\alpha \psi^\beta.\tag{1.37}$$

Calculando as derivadas para mostrar a equação de movimento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}^\alpha} &= m^2 g_{\alpha\beta} \psi^\beta, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \bar{\psi}^\alpha)} &= -g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} (\partial_\rho \psi^\beta), \\ \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \bar{\psi}^\alpha)} \right) &= -\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \psi^\beta = \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} p^\mu p^\nu \psi^\beta.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}^\alpha} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \bar{\psi}^\alpha)} \right) &= 0, \\ [-\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 g_{\alpha\beta}] \psi^\beta &= 0.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Mostrando que a equação de movimento provém do princípio variacional.

1.5 Campo de Spin 3/2 Interagente

Para encontrar a densidade lagrangiana de interação basta aplicarmos o princípio local de gauge (apêndice B.2), expandir a derivada covariante e separar o termo livre do termo de interação:

$$\mathcal{L} = - (D^\mu \bar{\psi}^\alpha) \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} (D^\nu \psi^\beta) + m^2 \bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha,\tag{1.40}$$

onde a derivada covariante é: $D^\mu = \partial^\mu - ieA_\mu$. Separando em:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int}, \quad (1.41)$$

com:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= ie \left[(\partial^\nu \bar{\psi}^\alpha) \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^\beta - \bar{\psi}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} (\partial^\nu \psi^\beta) \right] A^\mu - e^2 \bar{\psi}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^\beta A^\mu A^\nu, \\ &= e j_\mu A^\mu - e^2 \bar{\psi}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^\beta A^\mu A^\nu. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Escrevendo explicitamente a corrente devido ao campo de spin 3/2:

$$j_\mu = (\partial^\nu \bar{\psi}^\alpha) \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^\beta - \bar{\psi}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} (\partial^\nu \psi^\beta). \quad (1.43)$$

1.6 Soluções para Partícula Livre

Vamos determinar as soluções da equação (1.26). Para tal vamos calcular na base do produto das representações: do 4-vetor de polarização $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, s)$ e espinores genéricos de $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ denotados por $w(\mathbf{p}, \sigma)$, onde $s = \pm 1, 0$ e $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ que são as projeções do momentum angular sobre uma direção qualquer determinada previamente (digamos, z). Assim as soluções são escritas da seguinte maneira:

$$\psi^\beta(x) = w^\beta(\mathbf{p}, \lambda) e^{\pm ip \cdot x}, \quad (1.44)$$

onde o vetor-espinor satisfaz a equação:

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu} p^\mu p^\nu w^\beta(\mathbf{p}, \lambda) = m^2 w_\alpha(\mathbf{p}, \lambda), \quad (1.45)$$

onde λ denota a projeção do spin 3/2 sobre a componente z . As soluções são construídas a partir do acoplamento entre a representação vetorial e espinorial no espaço de momentum utilizando os coeficientes de Clebsch-Gordon do grupo reduzido ¹ do grupo de Lorentz, que no caso massivo é $SU(2)$.

$$w^\beta(\mathbf{p}, \lambda) = \sum_{s, \sigma} \left\langle 1, s; \frac{1}{2}, \sigma \left| 1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \lambda \right\rangle \epsilon^\beta(\mathbf{p}, s) w(\mathbf{p}, \sigma). \quad (1.46)$$

Assim, os vetores-espinores ficam:

$$\begin{aligned} w^\beta \left(\mathbf{p}, \frac{3}{2} \right) &= \epsilon^\beta(\mathbf{p}, 1) w \left(\mathbf{p}, \frac{1}{2} \right), \\ w^\beta \left(\mathbf{p}, \frac{1}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \epsilon^\beta(\mathbf{p}, 1) w \left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon^\beta(\mathbf{p}, 0) w \left(\mathbf{p}, \frac{1}{2} \right), \\ w^\beta \left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \epsilon^\beta(\mathbf{p}, -1) w \left(\mathbf{p}, \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon^\beta(\mathbf{p}, 0) w \left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2} \right), \\ w^\beta \left(\mathbf{p}, -\frac{3}{2} \right) &= \epsilon^\beta(\mathbf{p}, -1) w \left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

¹ Grupo reduzido como tradução do termo em inglês little group

Segundo [17] os vetores de polarização são :

$$\epsilon^\beta(\mathbf{p}, +1) = -\frac{1}{\sqrt{2}m(p^0 + m)} \begin{pmatrix} (p^0 + m)p^+ \\ m(p^0 + m) + p^1p^+ \\ i[m(p^0 + m) - ip^2p^+] \\ p^3p^+ \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

$$\epsilon^\beta(\mathbf{p}, 0) = \frac{1}{m(p^0 + m)} \begin{pmatrix} (p^0 + m)p^3 \\ p^3p^1 \\ p^3p^2 \\ m(p^0 + m) + (p^3)^2 \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

$$\epsilon^\beta(\mathbf{p}, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}m(p^0 + m)} \begin{pmatrix} (p^0 + m)p^- \\ m(p^0 + m) + p^1p^- \\ -i[m(p^0 + m) - ip^2p^-] \\ p^3p^- \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

onde $p^\pm = p^1 \pm ip^2$. Estes estados satisfazem a normalização:

$$[\epsilon_\beta(\mathbf{p}, s)]^\dagger \epsilon^\beta(\mathbf{p}, s') = -\delta_{ss'}. \quad (1.51)$$

No referencial próprio, reduzem-se aos conhecidos autoestados de \mathbf{S}^2 e S_z :

$$\begin{aligned} \epsilon^\beta(0, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -i, 0), \\ \epsilon^\beta(0, 0) &= (0, 0, 0, 1), \\ \epsilon^\beta(0, -1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Mas os vínculos (1.28) requerem que:

$$p_\beta w^\beta(\mathbf{p}, \lambda) = 0, \quad \gamma_\beta w^\beta(\mathbf{p}, \lambda) = 0. \quad (1.53)$$

O primeiro vínculo é satisfeito pois $p_\beta \epsilon^\beta(\mathbf{p}, s) = 0$. Enquanto que o segundo impõe restrições nas componentes espinoriais. Resolveremos esse vínculo no referencial próprio e depois aplicaremos o operador de boost na representação espinorial $((\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}))$:

$$B_S(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}m(p^0 + m)} \begin{pmatrix} p^0 + m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & p^0 + m \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

A condição $\gamma_\beta w^\beta(\mathbf{0}, \lambda) = 0$ implica que os espinores devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \gamma^+ w \left(0, \frac{1}{2} \right) &= 0, \\ \gamma^+ w \left(0, -\frac{1}{2} \right) - \gamma^3 w \left(0, \frac{1}{2} \right) &= 0, \\ \gamma^- w \left(0, \frac{1}{2} \right) + \gamma^3 w \left(0, -\frac{1}{2} \right) &= 0, \\ \gamma^- w \left(0, -\frac{1}{2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde $\gamma^\pm = \gamma^1 \pm i\gamma^2$. A forma mais geral de espinor que satisfaz as relações acima é:

$$w \left(0, \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w \left(0, -\frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

onde a e b são parâmetros complexos arbitrários. A condição de normalização requer $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Este vínculo permite somente dois espinores $w \left(\mathbf{0}, \frac{1}{2} \right)$ independentes na construção do vetor-espinor, conduzindo assim para dois multipletos de spin-3/2. A saber, esses dois espinores independentes são dados por dois pares de escolha aos parâmetros a e b . A base $a = 1, b = 0$ que é a base de Dirac e a base $a = 0, b = 1$. Vamos escolher a base de Dirac para trabalhar, mas esta é apenas uma escolha arbitrária. Nesta base os multipletos são:

$$\begin{aligned} w^{(1)} \left(\mathbf{0}, \frac{1}{2} \right) &\equiv u \left(\mathbf{0}, \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w^{(1)} \left(\mathbf{0}, -\frac{1}{2} \right) &\equiv u \left(\mathbf{0}, -\frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} w^{(2)} \left(\mathbf{0}, \frac{1}{2} \right) &\equiv v \left(\mathbf{0}, \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w^{(2)} \left(\mathbf{0}, -\frac{1}{2} \right) &\equiv v \left(\mathbf{0}, -\frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Aplicando o operador que implementa o boost (1.54)

$$\begin{aligned}
 w^{(1)}\left(\mathbf{p}, \frac{1}{2}\right) &\equiv u\left(\mathbf{p}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} p^0 + m \\ 0 \\ p^3 \\ p^+ \end{pmatrix}, \\
 w^{(1)}\left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2}\right) &\equiv u\left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ p^0 + m \\ p^0 \\ -p^3 \end{pmatrix}, \tag{1.59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w^{(2)}\left(\mathbf{p}, \frac{1}{2}\right) &\equiv v\left(\mathbf{p}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} p^3 \\ p^+ \\ p^0 + m \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 w^{(2)}\left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2}\right) &\equiv v\left(\mathbf{p}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} \begin{pmatrix} p^- \\ -p^3 \\ 0 \\ p^0 + m \end{pmatrix}. \tag{1.60}
 \end{aligned}$$

Os espinores $w^{(1)}(\mathbf{p}, \sigma)$ estão normalizados para 1 e os $w^{(2)}(\mathbf{p}, \sigma)$ para -1 e sendo mutuamente ortogonais. Os vetores-espinores (1.47) escritos em termos dos espinores (1.59) e (1.60) serão reescritos como $U^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ e $V^\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ respectivamente. Eles são normalizados para (-1) e 1 e formam uma base no espaço de representação $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right]$. Então obtemos as soluções da equação (1.45):

$$\psi_U^\beta(\mathbf{p}, \lambda) = e^{\pm ip \cdot x} U^\mu(\mathbf{p}, \lambda) \tag{1.61}$$

$$\psi_V^\beta(\mathbf{p}, \lambda) = e^{\pm ip \cdot x} V^\mu(\mathbf{p}, \lambda) \tag{1.62}$$

1.7 Causalidade da Equação de Movimento Acoplada

O problema do formalismo de Rarita-Schwinger era a propagação não causal que a equação de movimento possui. Nesta secção vamos mostrar que o formalismo de Kirchbach-Napsuciale garante uma propagação causal para as partículas.

Podemos visualizar o problema de valor inicial de uma equação diferencial no espaço estendido (ou seja, no espaço das variáveis independentes e da função em si) como uma superfície. O operador diferencial atuando nesta superfície faz com que cada ponto se movimente neste espaço de uma forma característica. Para

cada ponto da superfície associa-se um cone no qual o ponto está vinculado para se mover. Equações diferenciais hiperbólicas possuem a propriedade de que suas soluções se propagam com velocidade finita, ou seja, os pontos dessa superfície possuem uma dinâmica interna ao cone de movimento. Em cada ponto também podemos definir um vetor normal a esta superfície. No nosso caso podemos chamar de quadri-vetor normal n_μ já que a equação de movimento possui quatro variáveis independentes. Para mostrar que uma equação diferencial é hiperbólica precisamos mostrar que a componente temporal n_0 do 4-vetor normal na solução do determinante característico nulo é real para todo 3-vetor:

$$n^\mu = (n^0, \mathbf{n}); n^0 \in \mathcal{R}, \forall \mathbf{n} \in \mathcal{R}^3 \text{ na equação } Det(n) = 0. \quad (1.63)$$

De fato, a equação de movimento (1.26) quando acoplada minimamente ao campo eletromagnético não possui propagação causal. Entretanto, há uma saída para este problema. Todo tensor tem uma forma simétrica e outra antissimétrica dadas por:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^S &= \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}), \\ T_{\alpha\beta}^A &= \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Percebendo que na contração de um tensor arbitrário com um tensor simétrico a sua forma antissimétrica fica livre, podemos alterar a forma antissimétrica de $\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}$ já que este tensor aparece contraído com $p^\mu p^\nu$, que é um tensor simétrico.

Seja $T_{\alpha\beta}$ arbitrário e $K_{\alpha\beta}$ simétrico:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}), \\ &= \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} K^{\beta\alpha}), \\ &= \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} K^{\alpha\beta}), \\ &= \frac{T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}}{2} K^{\alpha\beta}, \\ &= T_{\alpha\beta}^S K^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

A forma antissimétrica e simétrica de $\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}$ com respeito aos índices μ e ν são ((C.19) e (C.20) respectivamente):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^A &= -\frac{i}{3}(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta}, \\ \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S &= g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{2}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta \\ &\quad + \frac{1}{6}\{\gamma_\alpha(g_{\nu\beta}\gamma_\mu + g_{\mu\beta}\gamma_\nu) + (g_{\nu\alpha}\gamma_\mu + g_{\mu\alpha}\gamma_\nu)\gamma_\beta\}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Pelo resultado que apresentamos acima podemos escolher outra forma de $\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^A$. A forma mais geral que esse tensor pode possuir mantendo a covariância de Lorentz é:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}^A = & -i \left\{ g \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2} g_{\alpha\beta} + ig'(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \right\} \\ & + ic(g_{\alpha\mu}\sigma_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\mu}) + id(\sigma_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - \sigma_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \\ & + ife_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^5,\end{aligned}\tag{1.67}$$

onde g , g' , c , d e f são parâmetros arbitrários. Parece que há infinitas possibilidades de teorias de partícula livre equivalentes. Entretanto após o acoplamento de gauge todas essas diferentes teorias equivalentes se tornarão distinguíveis por causa dos diferentes valores dos acoplamentos multipolares das partículas de spin $3/2$ com o campo de fótons. Somente uma dessas teorias interagentes corresponderá à realidade. Podemos observar que o $\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^A$ que vínhamos utilizando é simplesmente o caso em que os parâmetros admitem os seguintes valores: $g = g' = 1/3$ e $c = d = f = 0$.

Vamos então procurar um $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}^A$ que satisfaça os requerimentos que estamos procurando. Vamos assumir por simplicidade que $f = 0$. Após, podemos notar que por hermiticidade $c = -d$. Nossa forma antissimétrica é escrita, agora, como:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}^A = & -i \left\{ g \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2} g_{\alpha\beta} + ig'(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \right\} \\ & + ic \{ (g_{\alpha\mu}\sigma_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\mu}) - (\sigma_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - \sigma_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \}.\end{aligned}\tag{1.68}$$

Observemos que na equação de movimento há uma contração do índice β e o índice α é livre. Portanto, vamos escrever os tensores que aparecem nela com o índice α mais à esquerda possível e o índice β mais à direita possível, já que o índice β aparece contraído com ψ^β na equação de movimento. Após algumas manipulações ((C.22) e (C.26)), obtemos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S \pi^\mu \pi^\nu = & \pi^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}(\gamma_\alpha \not{\pi} - 4\pi_\alpha)\pi_\beta + \frac{1}{3}(\pi_\alpha \not{\pi} - \gamma_\alpha \pi^2)\gamma_\beta + \frac{2}{3}ieF_{\alpha\beta}, \\ & + \frac{ie}{6}\gamma_\alpha \gamma^\nu F_{\beta\nu} + \frac{ie}{6}\gamma^\mu F_{\mu\alpha}\gamma_\beta \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}^A \pi^\mu \pi^\nu = & -i \left\{ g \frac{\sigma_{\mu\nu}\pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} - eg'F_{\alpha\beta} \right\} - 2iecF_{\alpha\beta} \\ & + iec(\pi_\alpha \not{\pi} - \not{\pi}\pi_\alpha)\gamma_\beta + iec\gamma_\alpha(\not{\pi}\pi_\beta - \pi_\beta \not{\pi}).\end{aligned}\tag{1.69}$$

Combinando ambos para escrever a nova equação de movimento que agora é escrita como:

$$\begin{aligned}[\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}\pi^\mu \pi^\nu - m^2 g_{\alpha\beta}]\psi^\beta = & 0, \quad \text{onde} \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu} = & \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}^A\end{aligned}\tag{1.70}$$

Explicitamente:

$$\begin{aligned}
 & \{ (\pi^2 - m^2)g_{\alpha\beta} \\
 & -i \left\{ g \frac{\sigma_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} - e \left(g' - 2c + \frac{2}{3} \right) F_{\alpha\beta} \right\} \\
 & + \frac{1}{3}(\gamma_\alpha \not{\pi} - 4\pi_\alpha)\pi_\beta + \frac{1}{3}(\pi_\alpha \not{\pi} - \gamma_\alpha \pi^2)\gamma_\beta \\
 & + ie \left(\frac{1}{6} - c \right) \gamma^\mu F_{\mu\alpha}\gamma_\beta + ie \left(\frac{1}{6} - c \right) \gamma_\alpha \gamma^\mu F_{\beta\mu} \} \psi^\beta = 0. \quad (1.71)
 \end{aligned}$$

A próxima consideração nos permite fixar o parâmetro c . Para evitar transições $\frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}$, ou $\psi^\mu \leftrightarrow \gamma \cdot \psi$ temos que cancelar os termos $ie\gamma^\mu F_{\mu\alpha}\gamma_\beta$ e $ie\gamma_\alpha \gamma^\mu F_{\beta\mu}$. Para tanto temos que escolher $c = 1/6$. Vamos reescrever a nossa equação de movimento:

$$\begin{aligned}
 & \{ (\pi^2 - m^2)g_{\alpha\beta} \\
 & -i \left\{ g \frac{\sigma_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} - e \left(g' + \frac{1}{3} \right) F_{\alpha\beta} \right\} \\
 & + \frac{1}{3}(\gamma_\alpha \not{\pi} - 4\pi_\alpha)\pi_\beta + \frac{1}{3}(\pi_\alpha \not{\pi} - \gamma_\alpha \pi^2)\gamma_\beta \} \psi^\beta = 0. \quad (1.72)
 \end{aligned}$$

Nos resta apenas dois parâmetros, g e g' . O argumento para vincular estes dois parâmetros leva em conta o fator giromagnético. Como não mencionamos este conceito em nenhum momento no trabalho, vamos fazer um pequeno adendo.

O fator giromagnético é uma constante de proporcionalidade adimensional entre o momento dipolar magnético e o spin da partícula:

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{S}. \quad (1.73)$$

Um dos sucessos da teoria de Dirac foi a previsão de que o fator giromagnético do elétron é igual à 2. Na teoria de Proca para spin 1 mostra-se que um 'fóton massivo' possuiria fator giromagnético $g = 1$. Esses resultados levaram Belinfante a conjecturar que o fator giromagnético para uma partícula de spin s fosse $g_s = 1/s$ [18]. Weinberg previu $g = 2$ para os bósons mediadores da interação fraca. Posteriormente a descoberta das partículas W^\pm com spin 1 e $g = 2$, foram contraditórias para a conjectura de Belinfante, coborando a previsão de Weinberg e fazendo com que ele conjecturasse que o fator giromagnético para partículas de spin arbitrário fosse sempre $g = 2$.

Seguindo Weinberg, as partículas de spin 3/2 devem possuir fator giromagnético $g_{3/2} = 2$. Como queremos um fator giromagnético $g_{3/2} = 2$ e dado pela

densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{mag} &\equiv -\frac{eg_{3/2}}{2}\bar{\psi}^\alpha(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\psi^\beta F^{\mu\nu}, \\
 &= -\frac{eg_{3/2}}{2}\bar{\psi}^\alpha\left(i(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}-g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})+\frac{\sigma_{\mu\nu}}{2}g_{\alpha\beta}\right)F^{\mu\nu}\psi^\beta, \\
 &= ig_{3/2}\bar{\psi}^\alpha\left(\frac{\sigma_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu}{2}g_{\alpha\beta}-eF_{\alpha\beta}\right)\psi^\beta.
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

Vemos a partir deste termo que precisamos de uma contribuição igualitária dos termos espinorial e vetorial. Comparando o termo semelhante da equação (1.72) com (1.74), consegue-se isso assumindo que $g = g' + 1/3 \equiv g_{3/2}$. Desta forma a equação de movimento fica dependente somente de um parâmetro, o fator giro-magnético:

$$\begin{aligned}
 &\left\{(\pi^2 - m^2)g_{\alpha\beta} - ig_{3/2}\left\{\frac{\sigma_{\mu\nu}\pi^\mu\pi^\nu}{2}g_{\alpha\beta} - eF_{\alpha\beta}\right\}\right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3}(\gamma_\alpha \not{\pi} - 4\pi_\alpha)\pi_\beta + \frac{1}{3}(\pi_\alpha \not{\pi} - \gamma_\alpha \pi^2)\gamma_\beta\right\}\psi^\beta = 0.
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

A fixação deste parâmetro vai requerir a causalidade. Entretanto, antes de prosseguirmos, notemos que equações como (1.75) não são genuínas, pois nem a componente ψ^0 do campo e nem a componente temporal do momentum π^0 aparecem. Este comportamento reflete a presença de vínculos em (1.75). Para obtermos uma equação de movimento genuína precisamos obter esses vínculos e substituí-los de volta em (1.75). Contraindo a equação (1.75) por γ^α e após, por π^α podemos obter os vínculos:

$$\gamma \cdot \psi = \frac{ie}{6m^2}(3g_{3/2} + 2)\left(F_{\mu\beta}\gamma^\mu + i\gamma^5\gamma^\alpha\tilde{F}_{\beta\alpha}\right)\psi^\beta, \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned}
 m^2\pi \cdot \psi &= \left\{ie\left(1 - \frac{g_{3/2}}{2}\right)(F_{\beta\mu}\pi^\mu + \pi^\mu F_{\beta\mu}) + ieg_{3/2}\pi^\alpha F_{\alpha\beta}\right. \\
 &\quad \left. - e\left(\frac{g_{3/2}}{4} + \frac{1}{6}\right)\gamma^5[\gamma^\alpha\tilde{F}_{\beta\alpha}, \not{\pi}] + ie\left(\frac{g_{3/2}}{4} - \frac{1}{6}\right)\{\gamma^\alpha F_{\beta\alpha}, \not{\pi}\}\right\}\psi^\beta \\
 &\quad + ie\left(\left(\frac{g_{3/2}}{4} - \frac{1}{6}\right)\gamma^\nu(F_{\nu\mu}\pi^\mu + \pi^\mu F_{\nu\mu})\right)\gamma \cdot \psi.
 \end{aligned} \tag{1.77}$$

Agora, substituímos ambos vínculos $\gamma \cdot \psi$ e $\pi \cdot \psi$ na equação (1.75) e possuímos uma equação genuína. Precisamos agora calcular o determinante característico dessa equação. A obtenção do determinante característico, no nosso caso, se deve ao seguinte método: devemos substituir os termos de derivadas mais alta (p^μ) pelo quadri-vetor n^μ e depois calcular o determinante na matriz dada pelos respectivos coeficientes que os acompanham. Encontramos assim:

$$\begin{aligned}
 D(n, g_{3/2}) &= |\mathcal{M}_{\alpha\beta}| \\
 \mathcal{M}_{\alpha\beta} &= n^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}(\gamma_\alpha \not{k} - 4n_\alpha) N_\beta + \frac{1}{3}(n_\alpha \not{k} - \gamma_\alpha n^2) \Gamma_\beta, \\
 \Gamma_\beta &= \frac{ie}{6m^2} (3g_{3/2} + 2) \left(F_{\mu\beta} \gamma^\mu + i\gamma^5 \gamma^\mu \tilde{F}_{\mu\alpha} \right), \\
 N_\beta &= \frac{1}{m^2} \left(ie \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2} g_{3/2} \right) n^\mu F_\mu^\nu - e \left(\frac{g_{3/2}}{4} + \frac{1}{6} \right) \gamma^5 [\gamma^\alpha \tilde{F}_{\beta\alpha}, \not{k}] \right) \\
 &\quad + \frac{ie}{m^2} \left(\frac{g_{3/2}}{2} - \frac{1}{3} \right) \gamma^\nu F_{\nu\mu} n^\mu \Gamma_\beta. \tag{1.78}
 \end{aligned}$$

Calculando o determinante:

$$\begin{aligned}
 D(n, g_{3/2}) &= (n^2)^{12} \left(\left[n^2 - k^2 \left(\frac{5g_{3/2} - 2}{4} \right)^2 (n \cdot F)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k^2 \left(\frac{3g_{3/2} + 2}{4} \right)^2 (n \cdot \tilde{F})^2 \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k^2}{4} \left(\frac{3g_{3/2} + 2}{4} \right)^2 \left(\frac{5g_{3/2} - 2}{4} \right)^2 (F \cdot \tilde{F})^2 (n^2)^2 \right) \\
 &\quad \times \left(\left[n^2 + k^2 \left(\frac{3g_{3/2} + 2}{4} \right)^2 \left[(n \cdot \tilde{F})^2 - (n \cdot F)^2 \right] \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k^2}{4} \left(\frac{3g_{3/2} + 2}{4} \right)^2 (F \cdot \tilde{F})^2 (n^2)^2 \right), \tag{1.79}
 \end{aligned}$$

onde, $(n \cdot F)^\nu = n_\mu F^{\mu\nu}$, $(n \cdot \tilde{F})^\nu = n_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$, $F \cdot \tilde{F} = F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ e $k = \frac{2e}{3m^2}$. Utilizando:

$$(n \cdot \tilde{F})^2 - (n \cdot F)^2 = -\frac{1}{2} n^2 F \cdot F. \tag{1.80}$$

E para $g_{3/2} = 0, 2$ podemos fatorar n^2 . O determinante característico toma, a partir disso, a seguinte forma:

$$D(n, g_{3/2} = 0, 2) = (n^2)^{16} ((1 - 2k^2 F \cdot F)^2 + (2k^2 F \cdot \tilde{F})^2)^2. \tag{1.81}$$

Pela condição $Det(n) = 0$ (1.63) vemos que $n^2 = 0$. Ou seja:

$$n^0 = \pm \sqrt{\mathbf{n}}, \tag{1.82}$$

satisfazendo o requerimento para ser uma equação hiperbólica, e ainda, n^μ é um vetor do tipo luz. O fator giromagnético nulo pode ser associado a partículas

neutras enquanto que $g_{3/2} = 2$ está associado a partículas carregadas. Mostramos assim que nesse formalismo as partículas possuem propagação causal (dentro do cone de luz, já que n^μ é tipo luz). A forma final do tensor $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}$ pode ser escrita como ((1.67) com as respectivas constantes, $g = 2$, $g' = 5/3$, $c = -d = 1/6$ e $f = 0$):

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu} = & g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{2}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta \\ & + \frac{1}{6}\{\gamma_\alpha(g_{\nu\beta}\gamma_\mu + g_{\mu\beta}\gamma_\nu) + (g_{\nu\alpha}\gamma_\mu + g_{\mu\alpha}\gamma_\nu)\gamma_\beta\} \\ & - i\left\{\sigma_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + i\frac{5}{3}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu})\right\} \\ & + \frac{i}{6}(g_{\alpha\mu}\sigma_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}\sigma_{\beta\mu} - \sigma_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + \sigma_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \end{aligned} \quad (1.83)$$

1.8 Conclusão

Nesse capítulo apresentamos o formalismo de Kirchbach-Napsuciale que descreve partículas de spin $3/2$ acopladas minimamente com o campo eletromagnético e que evita o problema de Velo-Zwanziger (propagação não causal das soluções). A corrente das partículas de spin $3/2$ que deduzimos a partir da densidade lagrangiana, será a grandeza de interesse posteriormente quando apresentarmos a proposta de modelo para a matéria escura.

Capítulo 2

Mecanismo de Stueckelberg

2.1 Contextualização Histórica

Ernest Carl Gerlach Stueckelberg foi um físico e matemático sueco do século XX. Entre outras contribuições, em 1953 ele e Andre Petermann desenvolveram o grupo de renormalização. A contribuição que utilizaremos é a de um processo alternativo ao mecanismo de Higgs para descrever bósons abelianos massivos. Atualmente, propostas de extensão do modelo padrão utilizam o mecanismo de Stueckelberg.

2.2 O Mecanismo

O mecanismo de Stueckelberg é um método alternativo para descrever um campo vetorial massivo abeliano sem o processo de quebra espontânea de simetria e mantendo a invariância de gauge.

Seja a seguinte densidade lagrangiana que acopla um campo vetorial abeliano A_μ com um campo pseudoescalar σ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(mA_\mu + \partial_\mu\sigma)(mA^\mu + \partial^\mu\sigma). \quad (2.1)$$

Como em (B.22), se somente houvesse o termo $A_\mu A^\mu$ a densidade lagrangiana não seria invariante de gauge. Por isso introduz-se o campo sigma, para que com a transformação de gauge abaixo a densidade lagrangiana fique invariante mesmo com o termo de massa do campo vetorial abeliano:

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu\epsilon(x) \quad \text{e} \\ \sigma &\rightarrow \sigma - m\epsilon(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aplicando a transformação de gauge acima na densidade lagrangiana (2.1) obtemos (onde o primeiro termo foi mostrado em (B.21) que é invariante de gauge):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}[m(A_\mu + \partial_\mu\epsilon(x)) + \partial_\mu(\sigma - m\epsilon(x))] \times \\
 &\quad \times [m(A^\mu + \partial^\mu\epsilon(x)) + \partial^\mu(\sigma - m\epsilon(x))] \\
 \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}[mA_\mu + m\partial_\mu\epsilon(x) + \partial_\mu\sigma - m\partial_\mu\epsilon(x)] \times \\
 &\quad \times [mA_\mu + m\partial_\mu\epsilon(x) + \partial_\mu\sigma - m\partial_\mu\epsilon(x)] \\
 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(mA_\mu + \partial_\mu\sigma)(mA^\mu + \partial^\mu\sigma) = \mathcal{L}. \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Abrindo explicitamente a densidade lagrangiana temos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - mA_\mu(\partial^\mu\sigma). \tag{2.4}$$

O último termo não possui interpretação no espectro de partículas, portanto o retiramos escolhendo um gauge apropriado. Essa escolha do gauge é realizada adicionando-se um termo na densidade lagrangiana (gauge fixing):

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + \xi m\sigma)^2. \tag{2.5}$$

A densidade lagrangiana após a escolha do gauge fica:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} + \mathcal{L}_{gf} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - mA_\mu(\partial^\mu\sigma) \\
 &\quad - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \xi\frac{m^2}{2}\sigma^2 - m(\partial_\mu A^\mu)\sigma, \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

onde os dois últimos termos se cancelam, pois como eles aparecem dentro de uma integral (dentro da ação) podemos fazer uma integração por partes cancelando ambos e o termo de superfície resulta em zero por causa da condição de contorno (como de (B.7) para (B.8)).

Assim nesse gauge temos uma densidade lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \xi\frac{m^2}{2}\sigma^2. \tag{2.7}$$

Ou seja, acoplamos um campo vetorial sem massa A_μ com um campo pseudo-escalar σ que com a transformação de gauge (2.2) e a escolha do gauge (2.5) se desacoplam descrevendo um campo vetorial massivo.

2.3 Stueckelberg no Modelo Padrão

O modelo padrão é descrito pelo grupo de simetria interna $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, onde o primeiro setor leva em conta a interação forte e o produto dos setores restantes leva em conta a interação eletrofraca. O termo da densidade lagrangiana do modelo padrão relevante para nós está escrito abaixo (setor eletrofraco):

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + g_2 A_\mu^a J_2^{a\mu} + g_Y B_\mu J_Y^\mu - D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (2.8)$$

onde os dois primeiros termos representam a energia cinética dos campos A_μ^a e B_μ , respectivamente. O terceiro termo acopla uma corrente de férmions com os bósons de $SU(2)$ com constante de acoplamento g_2 , o quarto termo acopla uma corrente de férmions com o bóson de $U(1)$ com constante de acoplamento g_Y enquanto que os últimos dois termos são a energia cinética do campo de Higgs acoplado (pela derivada covariante) com os campos de gauge e o potencial, respectivamente.

Na extensão de Stueckelberg do modelo padrão é adicionado um setor escuro X , resultando em uma estrutura interna dada por $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_X$. Todos os campos abelianos, ou seja, $U(1)_Y$ da hipercarga e $U(1)_X$ são acoplados com um campo real pseudo-escalar σ . Assim a densidade lagrangiana nessa extensão é escrita como:

$$\mathcal{L}_{StSM} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_{St}, \quad (2.9)$$

onde:

$$\mathcal{L}_{St} = -\frac{1}{4}C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} + g_X C_\mu J_X^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma + M_1 C_\mu + M_2 B_\mu)^2, \quad (2.10)$$

onde o primeiro termo é o termo cinético do bóson vetorial introduzido, o segundo termo acopla uma corrente entre férmions e bósons do setor escuro e o último termo acopla o campo pseudo-escalar com os abelianos do modelo padrão (B_μ).

2.4 Massa dos Bósons Vetoriais

Analisando para o setor eletrofraco do modelo padrão e o termo adicional de Stueckelberg, a transformação de fase em cada grupo de simetria interna é:

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow \chi' = e^{i\alpha(x)\cdot\tau/2 + i\lambda_Y(x)Y} \chi & SU(2)_L, \\ \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\lambda_Y(x)Y} \psi & U(1)_Y, \\ \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\lambda_X(x)X} \phi & U(1)_X, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}(x)$, $\lambda_Y(x)$ e $\lambda_X(x)$ são funções arbitrárias e τ_a são as matrizes de Pauli, geradoras do grupo $SU(2)$. Para manter a densidade lagrangiana invariante sob tal transformação local, temos que alterar os campos de gauge e o pseudo-escalar σ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &\rightarrow \mathbf{A}_\mu - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x) - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{A}_\mu & SU(2)_L, \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu + \frac{1}{g_Y} \partial_\mu \lambda_Y(x) & U(1)_Y, \\ C_\mu &\rightarrow C_\mu + \frac{1}{g_X} \partial_\mu \lambda_X(x) & U(1)_X, \\ \sigma &\rightarrow \sigma - M_2 \lambda_Y(x) - M_1 \lambda_X(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

E a derivada covariante que aparece no setor de Higgs tem que ser escrita como:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_a}{2} A_\mu^a + ig_Y \frac{Y}{2} B_\mu. \quad (2.13)$$

O conjunto de transformações (2.11) e (2.12) são as transformações de gauge. Após a quebra espontânea de simetria no setor eletrofraco $SU(2)_L \times U(1)_Y$, ou seja, escolhendo o valor esperado do vácuo como :

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

expande-se a densidade lagrangiana (2.9) e mantemos os termos até $O(v^2)$. Escrevendo os termos relevantes:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8} v^2 g_2^2 \left[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 \right] + \frac{1}{8} v^2 (g_Y B_\mu - g_2 A_\mu^3) (g_Y B^\mu - g_2 A^{3\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (M_2 C_\mu + M_1 B_\mu) (M_2 C^\mu + M_1 B^\mu), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde os termos entre colchetes são os termos de massa dos bóson W^+ e W^- ($M_W = \frac{1}{4} v g_2$). Os termos restantes podem ser reescritos como:

$$-\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^3 V_{\mu a} M_{ab} V_b^\mu, \quad (2.16)$$

onde $V_{\mu a} = (C_\mu, B_\mu, A_\mu^3)_a$ e a matriz de massa dos bósons neutros:

$$M_{ab} = \begin{bmatrix} M_1^2 & M_1 M_2 & 0 \\ M_1 M_2 & M_2^2 + \frac{1}{4} g_Y^2 v^2 & -\frac{1}{4} g_Y g_2 v^2 \\ 0 & -\frac{1}{4} g_Y g_2 v^2 & \frac{1}{4} g_2^2 v^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Diagonalizando a matriz de massa encontramos os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned}
 M_\gamma^2 &= 0, \\
 M_\pm^2 &= \frac{1}{2} \left\{ M_1^2 M_2^2 + \frac{1}{4} g_Y^2 v^2 + \frac{1}{4} g_2^2 v^2 \right. \\
 &\quad \left. \pm \left[\left(M_1^2 + M_2^2 + \frac{1}{4} g_Y^2 v^2 + \frac{1}{4} g_2^2 v^2 \right)^2 - (M_1^2 (g_Y^2 + g_2^2) v^2 + M_2^2 g_2^2 v^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\},
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde o autovalor M_γ^2 identificamos como a massa do fóton, o autovalor M_-^2 com o bóson Z e o autovalor M_+^2 com o bóson Z', cujos autovetores normalizados são:

$$|M_\gamma^2\rangle = \frac{M_1 g_2}{\sqrt{M_2^2 g_2^2 + M_1^2 g_2^2 M_1^2 g_Y^2}} \begin{pmatrix} -\frac{M_2}{M_1} \\ 1 \\ \frac{g_Y}{g_2} \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

$$|M_\pm^2\rangle = \alpha(M_\pm^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{M_\pm^2 - M_1^2}{M_1 M_2} \\ \frac{g_2^2 v^2 - 4M_\pm^2}{g_2 g_Y v^2} \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(M_\pm) &= \frac{(g_2^2 v^2 - 4M_\pm^2) M_1 M_2}{\sqrt{(g_2^2 v^2 - 4M_\pm^2) M_1^2 M_2^2 + (g_2^2 v^2 - 4M_\pm^2) g(M_\pm) + g_2^2 g_Y^2 v^4 g(M_\pm)}} \\
 g(M_\pm) &= (M_\pm^2 - M_1^2)^2.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.5 Acoplamento com Férmions

Para escrevermos a matriz transformação de base que diagonaliza a matriz de massa, parametriza-se a mesma através de:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \cos \psi & -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \psi & -\cos \theta \cos \psi & \sin \theta \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Como a matriz de massa M é uma matriz simétrica a matriz de transformação \mathcal{O} possui a propriedade de ortogonalidade. Os parâmetros possuem as seguintes

relações:

$$\tan \phi = \frac{M_1}{M_2}, \quad (2.23)$$

$$\tan \theta = \frac{g_Y}{g_2} \cos \phi, \quad (2.24)$$

$$\tan \psi = \frac{\tan \theta \tan \phi M_W^2}{\cos \theta (M_{Z'}^2 - M_W^2 (1 + \tan^2 \theta))}. \quad (2.25)$$

O termo da densidade lagrangiana que possui as correntes neutras é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC} &= g_2 A_\mu^3 J_2^{3\mu} + g_Y B_\mu J_Y^\mu + g_X C_\mu J_X^\mu = \sum_{a=1}^3 V_{\mu a} J_a^\mu, \\ &= \sum_{a,b=1}^3 E_{\mu a} \mathcal{O}_{ba} J_b^\mu, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $E_{\mu a} = (Z'_\mu, Z_\mu, A_\mu)^\top$ é o vetor que explicita os campos dos bósons enquanto que a corrente de interação é:

$$\sum_{b=1}^3 \mathcal{O}_{ba} J_b^\mu = \begin{bmatrix} \frac{\sin \psi}{\sqrt{g_2^2 + g_Y^2 \cos^2 \phi}} \left(\cos^2 \phi g_Y^2 J_Y^\mu - g_2^2 J_2^\mu - \frac{1}{2} \sin 2\phi g_X g_Y J_X^\mu \right) \\ \quad + \cos \psi (\sin \phi g_Y J_Y^\mu + \cos \phi g_X J_X^\mu) \\ \frac{\cos \psi}{\sqrt{g_2^2 + g_Y^2 \cos^2 \phi}} \left(\cos^2 \phi g_Y^2 J_Y^\mu - g_2^2 J_2^\mu - \frac{1}{2} \sin 2\phi g_X g_Y J_X^\mu \right) \\ \quad - \sin \psi (\sin \phi g_Y J_Y^\mu + \cos \phi g_X J_X^\mu) \\ \frac{g_2 g_Y \cos \phi}{\sqrt{g_2^2 + g_Y^2 \cos^2 \phi}} \left(J_Y^\mu + J_2^\mu - \frac{g_X}{g_Y} \tan \phi J_X^\mu \right) \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

A densidade lagrangiana completa escrita na base diagonalizada é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} - D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma + M_1 C_\mu + M_2 B_\mu)^2 \\ &\quad + Z'_\mu \left[\frac{\sin \psi}{\sqrt{g_2^2 + g_Y^2 \cos^2 \phi}} \left(\cos^2 \phi g_Y^2 J_Y^\mu - g_2^2 J_2^\mu - \frac{1}{2} \sin 2\phi g_X g_Y J_X^\mu \right) \right] \\ &\quad + Z'_\mu [\cos \psi (\sin \phi g_Y J_Y^\mu + \cos \phi g_X J_X^\mu)] \\ &\quad + Z_\mu \left[\frac{\cos \psi}{\sqrt{g_2^2 + g_Y^2 \cos^2 \phi}} \left(\cos^2 \phi g_Y^2 J_Y^\mu - g_2^2 J_2^\mu - \frac{1}{2} \sin 2\phi g_X g_Y J_X^\mu \right) \right] \\ &\quad + Z_\mu [-\sin \psi (\sin \phi g_Y J_Y^\mu + \cos \phi g_X J_X^\mu)] \\ &\quad + A_\mu^\gamma \left[\frac{g_2 g_Y \cos \phi}{\sqrt{g_2^2 + g_Y^2 \cos^2 \phi}} \left(J_Y^\mu + J_2^\mu - \frac{g_X}{g_Y} \tan \phi J_X^\mu \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Com a densidade lagrangiana escrita dessa forma podemos visualizar diretamente as interações entre os setores.

2.6 Conclusão

Nesse capítulo apresentamos o mecanismo de Stueckelberg para descrição de campos abelianos vetoriais massivos e a extensão de Stueckelberg do modelo padrão . Essa extensão será relevante pois a nossa proposta é adicionar a corrente de spin $3/2$ no setor fermiônico escuro da extensão de Stueckelberg.

Capítulo 3

Extensão do Modelo Padrão

3.1 Apresentação

Agora que apresentamos o formalismo de Kirchbach-Napsuciale e a extensão do modelo padrão através do mecanismo de Stueckelberg vamos descrever propostas que podem ser executadas posteriormente. Vamos introduzir a corrente de spin 3/2 (1.43) na corrente escura de Stueckelberg:

$$J_X^\mu = J_X^{(\frac{1}{2})\mu} + J_X^{(\frac{3}{2})\mu}, \quad (3.1)$$

onde:

$$J_X^{(\frac{1}{2})\mu} = \bar{\chi}\gamma^\mu\chi \quad (3.2)$$

é uma corrente devido à férmions de spin 1/2 pertencentes ao setor escuro, e:

$$J_{X\mu}^{(\frac{3}{2})} = (\partial^\nu\bar{\psi}^\alpha)\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}\psi^\beta - \bar{\psi}^\alpha\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}(\partial^\nu\psi^\beta) \quad (3.3)$$

é a corrente devido à férmions de spin 3/2.

Expandindo em ondas planas o campo vetorial-espinorial:

$$\psi^\beta(x) = \sum_{\mathbf{p},\lambda} N \left[c_\lambda U_\lambda^\beta(\mathbf{p})e^{-ipx} + d_\lambda^\dagger V_\lambda^\beta(\mathbf{p})e^{ipx} \right], \quad (3.4)$$

$$\bar{\psi}^\beta(x) = \sum_{\mathbf{p},\lambda} N \left[d_\lambda \bar{V}_\lambda^\beta(\mathbf{p})e^{-ipx} + c_\lambda^\dagger \bar{U}_\lambda^\beta(\mathbf{p})e^{ipx} \right], \quad (3.5)$$

onde $U_\lambda^\beta(\mathbf{p})$ são ξ^- (partículas de spin-3/2 com momentum \mathbf{p} e projeção de spin λ) chegando, $\bar{U}_\lambda^\beta(\mathbf{p})$ são ξ^- saindo, $V_\lambda^\beta(\mathbf{p})$ são ξ^+ saindo e $\bar{V}_\lambda^\beta(\mathbf{p})$ são ξ^+ chegando (olhando para um diagrama de Feynman), ou a interpretação equivalente: onde c_λ é o operador de destruição de férmions de spin λ , c_λ^\dagger é o operador de criação

de de férmions de spin λ , d_λ^\dagger é o operador de criação de antiférmions de spin λ e d_λ é o operador de destruição de antiférmions de spin λ .

Agora o nosso lagrangiano (2.10) possui um termo adicional:

$$\mathcal{L}_{St} = -\frac{1}{4}C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} + g_X C_\mu J_X^{(\frac{1}{2})\mu} + g_X C_\mu J_X^{(\frac{3}{2})\mu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma + M_1 C_\mu + M_2 B_\mu)^2 \quad (3.6)$$

Para obter as expressões com essa corrente acrescentada, basta fazermos a redefinição $J_X^\mu \rightarrow J_X^{(\frac{1}{2})\mu} + J_X^{(\frac{3}{2})\mu}$ nas fórmulas do capítulo 2. Na expressão (2.27) que explicita a interação entre os campos podemos observar com que setores e de que forma a corrente de spin 3/2 interage.

Essas partículas interagiriam com os três bósons vetoriais neutros da extensão de Stueckelberg. Poderíamos calcular as seções de choque do tipo:

$$\begin{aligned} e^+ + e^- &\rightarrow \mu^+ + \mu^-, \\ e^+ + e^- &\rightarrow q + \bar{q} \quad (\text{quark e antiquark}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

para podermos verificar a consistência da teoria, já que as seções de choque para estes decaimentos são medidas. Poderíamos calcular seções de choque de decaimentos das partículas de matéria escura:

$$\begin{aligned} f_{(\frac{3}{2})}^+ + f_{(\frac{3}{2})}^- &\rightarrow e^+ + e^-, \\ f_{(\frac{3}{2})}^+ + f_{(\frac{3}{2})}^- &\rightarrow q + \bar{q}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esses são os aniquilamentos interessantes, pois é a interação direta da matéria escura com as partículas do modelo padrão. Os bósons mediadores desses processos podem ser Z' , Z^0 e o fóton.

3.2 Conclusão

Nesse capítulo final apresentamos a nossa motivação para estudar o formalismo de Kirchbach-Napsuciale. Adicionar à corrente fermiônica do setor escuro da extensão de Stueckelberg uma componente devido à partículas de spin 3/2. Em um estudo futuro a intenção é calcular as seções de choque apresentadas em (3.7) e (3.8). Como o valor das seções de choque dos processos (3.7) são bem conhecidos, podemos verificar a consistência da proposta, pois como há um novo bóson mediador (Z'), para uma mesma ordem em teoria de perturbação haverá mais diagramas de Feynman que contribuirão para o resultado da seção de choque. Com o valor das seções de choque dos processos (3.8) poderemos comparar com valores experimentais estimados da seção de choque que qualquer partícula candidata à matéria escura deve possuir.

Apêndice A

Considerações sobre Teoria de Grupos

A.1 Notação e Unidades

Aqui revisaremos algumas convenções adotadas em todo este trabalho. As componentes da métrica do espaço-tempo de Minkowski são :

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde os índices são $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. A convenção de soma de Einstein:

$$x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu, \\ g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \quad (\text{A.2})$$

O sistema de unidades adotado é o sistema natural de unidades. Neste sistema adota-se $c = 1$ e $\hbar = 1$. As dimensões fundamentais nesse sistema são : a massa (M), ação (A) e velocidade (V). Diferentemente do SI que são: massa (M), comprimento (L) e tempo (T).

No SI temos as seguintes relações entre as dimensões :

$$L = \frac{A}{MV} \quad \text{e} \quad T = \frac{A}{MV^2}. \quad (\text{A.3})$$

A partir dessas relações podemos escrever uma relação mais geral:

$$M^p L^q T^r = M^{p-q-r} A^{q+r} V^{-q-2r}. \quad (\text{A.4})$$

Mas por definição, no sistema natural a ação e a velocidade são adimensionais. Então todas as quantidades possuem dimensão de alguma potência de M .

Para converter uma expressão escrita no sistema natural para o sistema SI basta multiplicarmos por \hbar ou c convenientemente para gerar a dimensão daquela quantidade física no SI.

A.2 O Grupo de Lorentz e Poincaré

Irei expor algumas características do grupo de Lorentz e do grupo de Poincaré que foram citadas no trabalho rapidamente. Para uma leitura mais completa sobre o assunto indico a referência [24]. O grupo de Poincaré é o grupo de isometrias sobre o espaço-tempo de Minkowski da relatividade restrita. Isso quer dizer que é o conjunto dos operadores, que atuam neste espaço-tempo, que preservam distâncias. Isto inclui translações, rotações, inversões (temporal e espacial) e boosts (transformações de Lorentz). O grupo de Lorentz é um subgrupo do grupo de Poincaré, visto que não leva em conta as translações.

A álgebra de Poincaré é:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i(g_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} + g_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} - g_{\nu\alpha}M_{\mu\beta}), \quad (\text{A.5})$$

$$[M_{\alpha\beta}, p_\mu] = -i(g_{\mu\alpha}p_\beta - g_{\mu\beta}p_\alpha), \quad (\text{A.6})$$

$$[p_\mu, p_\nu] = 0. \quad (\text{A.7})$$

A primeira dessas relações é a álgebra de Lorentz. O grupo de Lorentz é determinado pela estrutura $SO(1, 3)$.

A.3 Equivalência entre a Álgebra de Lorentz e $su(2) \times su(2)$

Podemos reescrever (A.1) através das relações:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \epsilon_{ij}^k J_k, \\ M_{0i} &= K_i, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde J_i são as componentes de momentum angular e K_i são os boosts ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= -i\epsilon_{ij}^k J_k, \\ [K_i, J_k] &= -i\epsilon_{ik}^j K_j, \\ [K_i, K_j] &= i\epsilon_{ij}^k J_k. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Definindo os elementos (mudando a base na álgebra):

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{(J_m + iK_m)}{2}, \\ B_m &= \frac{(J_m - iK_m)}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

verificamos que as relações de comutação se tornam:

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= -i\epsilon_{ij}^k A_k, \\ [B_i, B_j] &= -i\epsilon_{ij}^k B_k, \\ [A_i, B_j] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

mostrando que a álgebra de Lorentz desacopla em duas álgebras $su(2)$ independentes ($su(2)$ é a álgebra do momentum angular da mecânica quântica). Assim vamos indexar as representações irredutíveis do grupo de Lorentz através de s_L e s_R . As representações irredutíveis do grupo de Lorentz são escritas como:

$$(s_L, s_R). \quad (\text{A.12})$$

A dimensão dessa representação é $(2s_L + 1)(2s_R + 1)$. Por exemplo, a representação vetorial dada por $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ possui dimensão 4. Enquanto que a representação espinorial que pode ser dada por $(\frac{1}{2}, 0)$ ou $(0, \frac{1}{2})$ possui dimensão dois. Assim a representação de Dirac que é a soma das representações espinoriais acima possui dimensão 4. A representação vetorial-espinorial é um produto da representação vetorial com a de Dirac, portanto possui dimensão 16.

O vetor de Pauli-Lubanski é definido por:

$$W_\lambda = \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} M^{\rho\sigma} p^\mu. \quad (\text{A.13})$$

Entretanto, este é um objeto abstrato, quando representamos ele num espaço vetorial devemos inserir os índices apropriados. Nos índices de uma representação arbitrária utilizaremos letras latinas maiúsculas. Assim o vetor de Pauli-Lubanski pode ser escrito como:

$$(W_\lambda)_{AC} = \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} (M^{\rho\sigma})_{AC} p^\mu. \quad (\text{A.14})$$

Sua forma quadrática será:

$$(W_\lambda W^\lambda)_{AB} = \frac{1}{4}\epsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} (M^{\rho\sigma})_{AC} p^\mu \epsilon^\lambda_{\tau\xi\nu} (M^{\tau\xi})_{CB} p^\nu = T_{AB\mu\nu} p^\mu p^\nu. \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Considerações sobre Teoria Quântica de Campos

B.1 Equação de Movimento

Utilizando o mesmo sucesso da mecânica analítica, uma das formulações de teoria quântica de campos é por meio do princípio variacional. Postula-se uma ação:

$$\mathcal{S}[\phi_r] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_{\mu}\phi_r(x)), \quad (\text{B.1})$$

onde Ω é um volume arbitrário do espaço-tempo de Minkowski. A densidade lagrangiana \mathcal{L} é função apenas dos campos (ϕ_r , r indexa os diferentes campos) e suas derivadas ($\partial_{\mu}\phi_r$). A derivada é escrita como:

$$\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (\text{B.2})$$

Da mesma maneira que na mecânica analítica, vamos utilizar o seguinte processo variacional. Uma variação infinitesimal no campo ϕ_r em cada ponto do espaço-tempo em que o volume Ω está definido, com a condição de contorno de que na superfície $\Gamma(\Omega)$ que delimita Ω não há variação:

$$\begin{aligned} \phi_r(x) &\rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \\ \delta\phi_r(x) &= 0 \text{ em } \Gamma(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Impomos nessa região arbitrária que o processo variacional descrito tem que deixar a ação \mathcal{S} estacionária.

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi_r(x)} = 0 \text{ através de (B.3)}. \quad (\text{B.4})$$

Vamos calcular explicitamente a relação que o campo deve satisfazer para esse processo ocorrer:

$$\mathcal{S}[\phi_r(x) + \delta\phi_r(x)] = \int_{\Omega} dx^4 \mathcal{L}[\phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \partial_{\mu}(\phi_r(x) + \delta\phi_r(x))]. \quad (\text{B.5})$$

Expandimos a densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\phi_r(x) + \delta\phi_r(x)] = \int_{\Omega} dx^4 \left\{ \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_{\mu}\phi_r(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r(x) \right. \\ \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)} \delta(\partial_{\mu}\phi_r(x)) \right\}. \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Como estamos expandindo em primeira ordem, podemos escrever $\partial_{\mu}(\delta\phi_r(x)) = \delta(\partial_{\mu}\phi_r(x))$. Então:

$$d\mathcal{S} = \mathcal{S}[\phi_r + \delta\phi_r] - \mathcal{S}[\phi_r] = \int_{\Omega} dx^4 \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)} \partial_{\mu}(\delta\phi_r(x)) \right\}. \quad (\text{B.7})$$

Aplicando uma integração por partes no último termo:

$$d\mathcal{S} = \int_{\Omega} dx^4 \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)} \right) \right\} \delta\phi_r(x) + \oint_{\Gamma(\Omega)} d\mathbf{S} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)} \delta\phi_r(x), \quad (\text{B.8})$$

onde a integral de superfície é zero pela condição de contorno do processo variacional. O termo entre chaves é a derivada funcional da ação:

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi_r(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)} \right) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Encontramos, assim, a equação de movimento dos campos para uma densidade lagrangiana \mathcal{L} .

B.2 Princípio de Gauge

Para um melhor significado do que é o princípio de gauge e a sua importância nas teorias modernas, explicarei a sua aplicação na QED (Quantum Electrodynamics). A densidade lagrangiana que descreve partículas com spin 1/2 livres, ou seja, sem interação com qualquer outra partícula é:

$$\mathcal{L}_{1/2} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (\text{B.10})$$

onde ψ é o espinor de Dirac e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o espinor conjugado. A partir do princípio variacional, a equação de movimento para esse campo é a equação de Dirac:

$$(\not{p} - m) \psi = 0, \quad (\text{B.11})$$

onde $p = i\partial_\mu$ e para qualquer 4-vetor A_μ , \not{A} é a contração do mesmo com as matrizes de Dirac $\gamma^\mu A_\mu$. Mas elétrons e pósitrons interagem entre si e com os fótons, portanto temos que adicionar um termo na densidade lagrangiana (B.10) que incorpore esse fato. Mas que termo deveríamos adicionar para implementar tal interação? A resposta está em forçar a invariância de (B.10) frente à seguinte transformação de fase *local* sobre o campo de Dirac:

$$\begin{aligned} \psi' &\rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi, \\ \bar{\psi}' &\rightarrow e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Substituindo a equação acima em (B.10) temos:

$$\mathcal{L}'_{1/2} = \mathcal{L}_{1/2} - \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x)) \psi. \quad (\text{B.13})$$

Para mantermos a densidade lagrangiana invariante frente essa transformação redefinimos a derivada como:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (\text{B.14})$$

onde o campo introduzido A_μ se transforma como:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha, \quad (\text{B.15})$$

ou seja, a nossa nova densidade lagrangiana é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi, \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e\bar{\psi} \not{A} \psi. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Aplicando, agora, conjuntamente as transformações (B.12) e (B.15) temos:

$$\mathcal{L}' = (e^{-i\alpha}\bar{\psi}) (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) (e^{i\alpha}\psi) + e (e^{-i\alpha}\bar{\psi}) \left(A + \frac{1}{e}\not{\partial}\alpha \right) (e^{i\alpha}\psi), \quad (\text{B.17})$$

onde o primeiro termo pela equação (B.13) é facilmente escrito e o segundo termo utilizamos (B.15):

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi - \bar{\psi} (\not{\partial}\alpha) \psi + e\bar{\psi}A\psi + \bar{\psi} (\not{\partial}\alpha) \psi = \mathcal{L}. \quad (\text{B.18})$$

Agora a nossa densidade lagrangiana é dita invariante local de gauge, onde a aplicação conjunta das transformações (B.13) e (B.15) são chamadas de transformações de gauge e o campo inserido A_μ é o campo de gauge.

Verifica-se que este termo adicional que surge impondo a invariância de gauge é exatamente o termo que implementa a interação dos elétrons e pósitrons com os fótons. E o mesmo resultado é aplicado a teoria eletrofraca e a teoria da interação forte, ou seja, imponto a invariância de gauge local sobre os campos de matéria surge o termo de interação correto para descrever as forças fundamentais.

Entretanto nos resta escrever o termo livre do campo de gauge que é somente cinético pois os fótons não possuem massa. Esse termo é dado pela contração do tensor eletromagnético $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Obtemos então a densidade lagrangiana da QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{termo cinético dos fótons}} + \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi}_{\text{termo cinético e de massa dos férmions}} + \underbrace{j^\mu A_\mu}_{\text{termo de interação}}, \quad (\text{B.19})$$

onde $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é a corrente de férmions. Com a finalidade de fazer um cálculo completo vamos verificar que o termo cinético do campo de gauge é invariante frente a transformação (B.15):

$$F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} = \left[\partial_\mu \left(A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha \right) - \partial_\nu \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \right) \right] \times \left[\partial^\mu \left(A^\nu + \frac{1}{e}\partial^\nu\alpha \right) - \partial^\nu \left(A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha \right) \right]. \quad (\text{B.20})$$

O primeiro termo de cada parênteses gera a contração anterior à transformação. Então:

$$\begin{aligned}
 F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{e}(\partial_\mu\partial_\nu\alpha)\partial^\mu A^\nu + \frac{1}{e^2}(\partial_\mu\partial_\nu\alpha)(\partial^\mu\partial^\nu\alpha) \\
 &\quad - \frac{1}{e}(\partial_\nu\partial_\mu\alpha)\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{e^2}(\partial_\nu\partial_\mu\alpha)(\partial^\mu\partial^\nu\alpha) \\
 &\quad - \frac{1}{e}(\partial_\mu\partial_\nu\alpha)\partial^\nu A^\mu - \frac{1}{e^2}(\partial_\mu\partial_\nu\alpha)(\partial^\nu\partial^\mu\alpha) \\
 &\quad + \frac{1}{e}(\partial_\nu\partial_\mu\alpha)\partial^\nu A^\mu + \frac{1}{e^2}(\partial_\nu\partial_\mu\alpha)(\partial^\nu\partial^\mu\alpha) \\
 &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

B.3 Quebra Espontânea de Simetria e Mecanismo de Higgs

Irei ilustrar um exemplo razoavelmente simples para tentar explicar a noção e a importância da quebra espontânea de simetria. Primeiro vamos verificar que se inseríssemos um termo de massa $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ para o fóton na densidade lagrangiana da QED, este termo não seria invariante de gauge:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}m^2 A'_\mu A'^\mu &= \frac{1}{2}m^2 \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \right) \left(A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha \right) \\
 &= \frac{1}{2}m^2 \left[A_\mu A^\mu + \frac{1}{e}A_\mu\partial^\mu\alpha + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha A^\mu + \frac{1}{e^2}\partial_\mu\alpha\partial^\mu\alpha \right] \\
 &\neq \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Mas por quê seria relevante adicionar um termo de massa ao campo que descreve os fótons? O campo de gauge A_μ que descreve os fótons é um campo vetorial, ou seja, carrega spin 1. Apesar do fóton não possuir massa, nós conhecemos partículas vetoriais que possuem massa. Os bósons W^+ , W^- e Z^0 . O mesmo acontece com essas partículas, quando no respectivo lagrangiano tenta-se adicionar um termo de massa à mão. Como fazer para gerarmos massa para estes bósons? Vamos analisar o grupo de simetria $U(1)$. Vamos supor que estejamos trabalhando com uma densidade lagrangiana do tipo:

$$\mathcal{L} = T - V = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - (\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2), \tag{B.23}$$

onde $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ é um campo escalar complexo e λ é um número real positivo. Se considerarmos μ^2 positivo o potencial terá a forma de um parabolóide, e portanto possuirá somente um mínimo, ou seja, somente um estado fundamental. Entretanto se considerarmos que μ^2 é negativo, a forma do potencial será da forma que está representado na figura abaixo:

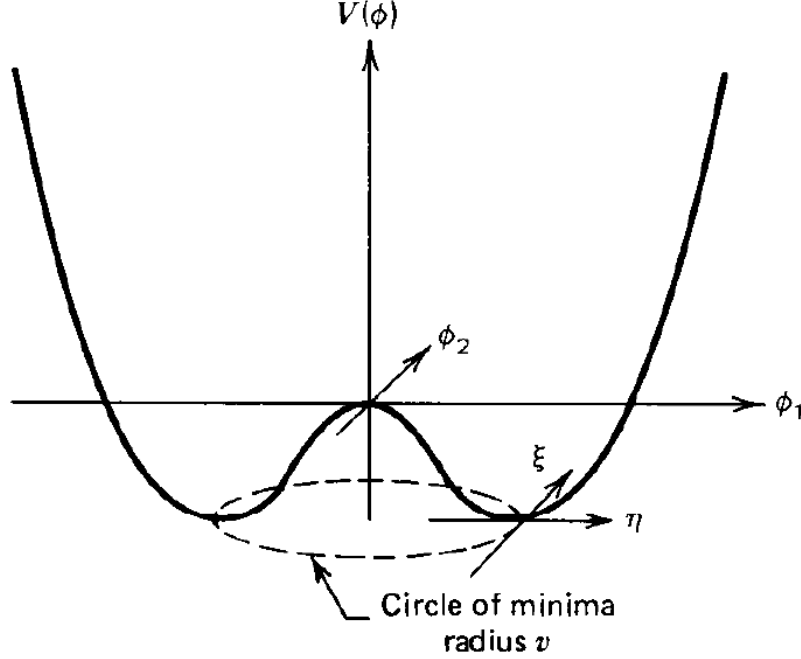


Fig. B.1: Forma do potencial quando $\mu^2 < 0$

Observamos agora que nesta configuração, ou reinterpretação do termo μ^2 , o potencial passa a ter infinitos pontos de mínimo, ou seja, infinitos estados fundamentais. Podemos reescrever a densidade lagrangiana em termos dos campos reais ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (\text{B.24})$$

Aquele círculo de mínimos pode ser parametrizado por $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2$. O valor desses mínimos é:

$$\frac{\partial V}{\partial(v^2)} = \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda v^2 = 0 \rightarrow v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (\text{B.25})$$

Os métodos perturbativos realizados envolvem expansões em torno de um ponto de mínimo clássico. Escolhemos arbitrariamente o estado fundamental como $\phi_1 = v$ e $\phi_2 = 0$. Adicionando um termo perturbativo em $\phi(x)$ temos:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)]. \quad (\text{B.26})$$

Substituindo a expansão perturbativa acima na densidade lagrangiana e man-

tendo termos até segunda ordem nos campos:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \mu^2 \eta^2 + \text{const} + O(\eta^3) + O(\xi^3). \quad (\text{B.27})$$

Observamos que o terceiro termo possui estrutura de um termo de massa para um campo η , $(-\frac{1}{2}m_\eta^2 \eta^2)$ onde $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$. Recaptulando, partimos de uma densidade lagrangiana (B.23) que possuía apenas um estado fundamental. E após a reinterpretação do sinal de μ^2 nos deparamos com uma infinidade de estados fundamentais. De todos esses estados fundamentais possíveis escolhemos somente um para fazer teoria de perturbação e por isso dizemos que houve uma quebra espontânea de simetria, pois a simetria angular representada pelo círculo da figura não está manifesta na densidade lagrangiana (B.27). Observando a direção dos campos ξ e η na figura, percebemos que o campo que percebeu uma diferença no potencial durante a perturbação, ou seja, a direção de ϕ_1 , é aquele que se tornou massivo. Enquanto que o outro campo, na direção perpendicular (ϕ_2) ficou sem massa. O campo ξ é chamado de bóson de Goldstone. É resultado do teorema de Goldstone. O teorema diz que: "Um campo escalar sem massa sempre aparecerá quando uma simetria contínua de um sistema físico é "espontaneamente quebrada" (ou seja, não aparente no estado fundamental)".

Vamos, agora, aplicar a quebra espontânea de simetria em uma simetria local de gauge. Consideraremos o caso mais simples do grupo $U(1)$. A densidade lagrangiana que proporemos é muito similar àquela da QED:

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.28})$$

onde consideramos agora, um campo escalar complexo e a transformação de gauge é:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi, \\ \phi^* &\rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^*, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

A derivada covariante é a mesma considerada anteriormente $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Como no caso anterior, vamos interpretar $\mu^2 < 0$ para gerar massa pela quebra espontânea de simetria. Escolhendo o mesmo estado fundamental, entre os infinitos disponíveis, que o de anteriormente e fazendo uma perturbação (B.26), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - v^2 \lambda \eta^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ &\quad - ev A_\mu \partial^\mu \xi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{termos de ordem superior.} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

A partir de \mathcal{L}' , o espectro de partículas é um bóson de Goldstone ξ , um campo escalar massivo η e o mais crucial, um campo vetorial massivo A_μ . Obtemos, respectivamente:

$$m_\xi = 0, \quad m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad m_A = ev. \quad (\text{B.31})$$

Apesar de termos conseguido gerar massa para o campo vetorial o bóson de Goldstone continua presente. Mas olhando com cuidado, percebemos um termo cruzado dos campos na densidade lagrangiana \mathcal{L}' . Há um termo $A_\mu \partial^\mu \xi$. A aparição desse termo nos sugere para tomar cuidado na interpretação do espectro de partículas dessa densidade lagrangiana. Na verdade, quando tornamos o campo vetorial massivo, nós acrescentamos um grau de liberdade. Um grau de liberdade longitudinal, que antes não estava presente. Acontece que o bóson de Goldstone não aparece como uma partícula física independente, mas sim como esse grau de liberdade criado por tornar o campo vetorial massivo. E o termo $A_\mu \partial^\mu \xi$ pode ser retirado da densidade lagrangiana escolhendo uma forma particular de gauge. Percebendo que até segunda ordem nos campos a relação abaixo é verdadeira:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v} \quad (\text{B.32})$$

escolhemos o gauge $\alpha(x) = \theta(x)/v$ e assim temos a transformação:

$$\begin{aligned} \phi_0 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Substituindo as relações acima na densidade lagrangiana (B.28) e expandindo com o estado fundamental ϕ_0 acima:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)(\partial^\mu h) - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \lambda v h^3 \\ &\quad - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu h^2 + ve^2 A_\mu A^\mu h + \text{ordem mais alta}, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

onde percebemos que o bóson de Goldstone não está mais presente. Essa densidade lagrangiana descreve, portanto, um campo vetorial massivo A_μ e um campo escalar massivo h chamado de campo de Higgs. E esse é o mecanismo de Higgs. Quando a quebra espontânea de simetria é aplicada em um grupo de simetria de gauge o bóson de Goldstone se transforma no grau de liberdade acrescentado pela polarização logitudinal do campo vetorial e este campo escalar massivo é o campo de Higgs.

Apêndice C

Relações Importantes

C.1 Matrizes de Dirac

As matrizes gama (ou matrizes de Dirac) são uma representação 4-dimensional da álgebra de Clifford. Ou seja, são matrizes 4×4 que satisfazem a relação de anticomutação :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (\text{C.1})$$

onde anticomutador é definido como $\{A, B\} = AB + BA$. Uma das representações 4-dimensional é a chamada de Dirac-Pauli, onde as matrizes são escritas explicitamente como:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Matrizes satisfazendo a relação (C.1) surgem naturalmente quando se constrói uma teoria quântica relativística para o elétron, por isso elas aparecem na descrição de campos com spin 1/2. Algumas relações utilizadas que elas satisfazem são:

$$\gamma_\lambda \gamma^\lambda = 4 \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (\text{C.3})$$

$$\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -2\gamma^\alpha, \quad (\text{C.4})$$

$$\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = 4g^{\alpha\beta} \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (\text{C.5})$$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\lambda\mu\nu\pi} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\pi \equiv \gamma_5, \quad (\text{C.6})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu} \gamma^\nu. \quad (\text{C.8})$$

A matriz que aparece quando escrevemos os geradores de Lorentz na representação espinorial é dada por:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{C.9})$$

A contração de um índice do tensor completamente antissimétrico no espaço de Minkowski é:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\mu\gamma\tau\xi} = - \left[\delta_\nu^\gamma \delta_\alpha^\tau \delta_\beta^\xi + \delta_\nu^\tau \delta_\alpha^\xi \delta_\beta^\gamma + \delta_\nu^\xi \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\tau - \delta_\nu^\gamma \delta_\beta^\tau \delta_\alpha^\xi - \delta_\alpha^\tau \delta_\beta^\gamma \delta_\nu^\xi - \delta_\beta^\xi \delta_\alpha^\gamma \delta_\nu^\tau \right], \quad (\text{C.10})$$

onde $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é definidor por:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu = 0, \nu = 1, \alpha = 2, \beta = 3 \text{ ou permutação par} \\ -1 & \text{se } \mu = 1, \nu = 0, \alpha = 2, \beta = 3 \text{ ou permutação par} \\ 0 & \text{qualquer outra possibilidade} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

C.2 Relações Importantes e Algumas Demonstrações

Relações importantes utilizadas para a demonstração de expressões:

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda\mu} \sigma^\lambda{}_\nu &= \frac{i}{2} [\gamma_\lambda, \gamma_\mu] \frac{i}{2} [\gamma^\lambda, \gamma^\nu] \\ &= -\frac{1}{4} (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda) (\gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\lambda) \\ &= -\frac{1}{4} \underbrace{(\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\lambda)}_{(\text{C.4})} \gamma^\nu - \underbrace{\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda}_{(\text{C.5})} - \gamma_\mu \underbrace{\gamma_\lambda \gamma^\lambda}_{(\text{C.3})} \gamma^\nu + \gamma_\mu \underbrace{\gamma_\lambda \gamma^\nu \gamma^\lambda}_{(\text{C.4})} \\ &= -\frac{1}{4} ((-2)\gamma_\mu \gamma^\nu - 4g_{\mu\nu} - 4\gamma_\mu \gamma^\nu + (-2)\gamma_\mu \gamma^\nu) \\ &= 2\gamma_\mu \gamma^\nu + g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Contração do tensor de spin:

$$\begin{aligned}
 \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} &= \left(\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) \left(\frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right) \\
 &= -\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \\
 &= -\frac{1}{4}\left(\underbrace{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu}_{(C.4)}\gamma_\nu - \gamma^\mu\underbrace{\gamma^\nu\gamma_\nu}_{(C.3)}\gamma_\mu - \gamma^\nu\underbrace{\gamma^\mu\gamma_\mu}_{(C.3)}\gamma_\nu + \underbrace{\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu}_{(C.4)}\gamma_\mu\right) \\
 &= -\frac{1}{4}((-2)\gamma^\nu\gamma_\nu - 4\gamma^\mu\gamma_\mu - 2\gamma^\nu\gamma_\nu + (-2)\gamma^\mu\gamma_\mu) \\
 &= 12 = \frac{4!}{2}. \tag{C.13}
 \end{aligned}$$

Observando a definição do vetor de Pauli-Lubanski (A.13) e a sua representação espinorial (1.20) podemos construir a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}\gamma^5\sigma_{\lambda\nu} &= -\frac{i}{2}\epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}\epsilon_{\lambda\delta\omega\nu}\sigma^{\delta\omega} \\
 &= -\frac{i}{2}\epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}\underbrace{\left(\epsilon_{\lambda\delta\omega\nu}\frac{i}{2}[\gamma^\delta, \gamma^\omega]\right)}_{\text{mesmo que em (C.17)}} \\
 &= -\frac{i}{2}\epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}(\epsilon_{\lambda\delta\omega\nu}i\gamma^\delta\gamma^\omega) \\
 \epsilon^\lambda{}_{\alpha\beta\mu}\gamma^5\sigma_{\lambda\nu} &= \frac{1}{2}g_{\nu\xi}\epsilon_{\lambda\alpha\beta\mu}\epsilon^{\lambda\delta\omega\xi}\gamma_\delta\gamma_\omega.
 \end{aligned}$$

Vamos trocar os índices para utilizar a (C.10). Trocas: $\lambda \rightarrow \mu$, $\mu \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \alpha$, $\alpha \rightarrow \nu$, $\delta \rightarrow \gamma$, $\omega \rightarrow \tau$ e $\nu \rightarrow \omega$.

$$\begin{aligned}
 \epsilon^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\gamma^5\sigma_{\mu\omega} &= \frac{1}{2}g_{\omega\xi}\underbrace{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\gamma\tau\xi}}_{(C.10)}\gamma_\gamma\gamma_\tau \\
 &= -\frac{1}{2}g_{\omega\xi}\left[\delta_\nu^\gamma\delta_\alpha^\tau\delta_\beta^\xi + \delta_\nu^\tau\delta_\alpha^\xi\delta_\beta^\gamma + \delta_\nu^\xi\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\tau\right. \\
 &\quad \left.- \delta_\nu^\gamma\delta_\beta^\tau\delta_\alpha^\xi - \delta_\alpha^\tau\delta_\beta^\gamma\delta_\nu^\xi - \delta_\beta^\xi\delta_\alpha^\gamma\delta_\nu^\tau\right]\gamma_\gamma\gamma_\tau \\
 &= -\frac{1}{2}\left[g_{\omega\beta}\gamma_\nu\gamma_\alpha + g_{\omega\alpha}\gamma_\beta\gamma_\nu + g_{\omega\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta\right. \\
 &\quad \left.- g_{\omega\alpha}\gamma_\nu\gamma_\beta - g_{\omega\nu}\gamma_\beta\gamma_\alpha - g_{\omega\beta}\gamma_\alpha\gamma_\nu\right] \\
 &= \frac{1}{2}g_{\omega\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\nu] + \frac{1}{2}g_{\omega\alpha}[\gamma_\nu, \gamma_\beta] + \frac{1}{2}g_{\omega\nu}[\gamma_\beta, \gamma_\alpha]. \tag{C.14}
 \end{aligned}$$

Calculando explicitamente a relação que surge na expressão acima:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}[\gamma_\beta, \gamma_\alpha] &= g_{\mu\nu} \left(\underbrace{\gamma_\beta \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\beta}_{(C.1)} \right) \\
 &= g_{\mu\nu} ((2g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) - \gamma_\alpha \gamma_\beta) \\
 &= 2g_{\mu\nu} (g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta).
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Escrevendo o vetor de Pauli-Lubanski na representação espinorial:

$$\begin{aligned}
 W_\lambda &= \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\alpha\beta\nu} \underbrace{(M_S^{\alpha\beta})}_{(1.19)} p^\nu \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\alpha\beta\nu} \left(\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \right) p^\nu \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\alpha\beta\nu} \sigma^{\alpha\beta} \right)}_{\equiv T_{\lambda\nu}} p^\nu.
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

Vamos fazer uma conta particular explícita, com o objeto definido $T_{\lambda\nu}$:

$$\begin{aligned}
 \sigma^{\lambda\nu} T_{\lambda\nu} &= \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_{\lambda\alpha\beta\nu}}_{\substack{\uparrow\beta\downarrow\alpha \\ \downarrow\beta\uparrow\alpha}} \sigma^{\lambda\nu} \sigma^{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \sigma^{\lambda\nu} \sigma^{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \left(\frac{i}{2} [\gamma^\lambda, \gamma^\nu] \right) \left(\frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{i}{2} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (\gamma^\lambda \gamma^\nu - \underbrace{\gamma^\nu}_{\downarrow\lambda} \underbrace{\gamma^\lambda}_{\downarrow\nu}) \left(\frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{i}{2} \left[\epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \gamma^\lambda \gamma^\nu - \underbrace{\epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta}}_{\downarrow\lambda} \gamma^\lambda \gamma^\nu \right] \left(\frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{i}{2} [\epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \gamma^\lambda \gamma^\nu + \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \gamma^\lambda \gamma^\nu] \left(\frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (i\gamma^\lambda \gamma^\nu) \underbrace{\left(\frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \right)}_{\text{mesmo procedimento}} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} (i\gamma^\lambda \gamma^\nu) (i\gamma^\alpha \gamma^\beta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^{\lambda\nu} T_{\lambda\nu} &= -\frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta)}_{(C.6)} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{4!}{i} \gamma^5 \right) = i \underbrace{\frac{4!}{2}}_{(C.13)} \gamma^5 \\
 &= \sigma^{\lambda\nu} \underbrace{(i\sigma_{\lambda\nu} \gamma^5)}_{= T_{\lambda\nu}}. \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

Voltando agora, para a expressão (C.16):

$$(w_\lambda)_{ab} = \frac{i}{2} (\gamma^5 \sigma_{\lambda\nu})_{ab} p^\nu \tag{C.18}$$

Encontrando $\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^A$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^A &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}}_{(1.27)} - \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta\nu\mu}}_{(1.27)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3} (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) + \frac{1}{6} (\epsilon^\lambda_{\alpha\beta\mu} \gamma^5 \sigma_{\lambda\nu} + \epsilon^\lambda_{\alpha\beta\nu} \gamma^5 \sigma_{\lambda\mu}) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{12} \sigma_{\lambda\mu} \sigma^\lambda_{\nu} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \\
 &\quad - \frac{2}{3} (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}) - \frac{1}{6} (\epsilon^\lambda_{\alpha\beta\nu} \gamma^5 \sigma_{\lambda\mu} + \epsilon^\lambda_{\alpha\beta\mu} \gamma^5 \sigma_{\lambda\nu}) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} \sigma_{\lambda\nu} \sigma^\lambda_{\mu} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) + \frac{1}{12} \left(\underbrace{\sigma_{\lambda\mu} \sigma^\lambda_{\nu}}_{(C.12)} - \underbrace{\sigma_{\lambda\nu} \sigma^\lambda_{\mu}}_{(C.12)} \right) g_{\alpha\beta} \right] \\
 &= \frac{1}{3} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) + \frac{1}{24} (2\gamma_\mu \gamma_\nu + g_{\mu\nu} - 2\gamma_\nu \gamma_\mu - g_{\mu\nu}) g_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{3} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) + \underbrace{\frac{1}{12} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]}_{(C.9)} g_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{3} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) - \frac{i}{6} \sigma_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^A &= -\frac{i}{3} \left[\underbrace{i(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu})}_{(1.19)} + g_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}}_{(1.19)} \right] \\
 &= -\frac{i}{3}(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta ab}.
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

Agora o $\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}}_{(1.27)} + \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta\nu\mu}}_{(1.27)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{3}(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) + \frac{1}{6}(\epsilon^\lambda_{\alpha\beta\mu}\gamma^5\sigma_{\lambda\nu} + \epsilon^\lambda_{\alpha\beta\nu}\gamma^5\sigma_{\lambda\mu}) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{12}\sigma_{\lambda\mu}\sigma^\lambda_\nu g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \\
 &\quad + \frac{2}{3}(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) + \frac{1}{6}(\epsilon^\lambda_{\alpha\beta\nu}\gamma^5\sigma_{\lambda\mu} + \epsilon^\lambda_{\alpha\beta\mu}\gamma^5\sigma_{\lambda\nu}) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{12}\sigma_{\lambda\nu}\sigma^\lambda_\mu g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{3}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{2}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) + \frac{1}{3}(\epsilon^\lambda_{\alpha\beta\mu}\gamma^5\sigma_{\lambda\nu} + \epsilon^\lambda_{\alpha\beta\nu}\gamma^5\sigma_{\lambda\mu}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{12}(\sigma_{\lambda\mu}\sigma^\lambda_\nu g_{\alpha\beta} + \sigma_{\lambda\nu}\sigma^\lambda_\mu g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \right\} \\
 &= \frac{5}{12}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{6} \left(\underbrace{\epsilon^\lambda_{\alpha\beta\mu}\gamma^5\sigma_{\lambda\nu}}_{(C.14)} + \underbrace{\epsilon^\lambda_{\alpha\beta\nu}\gamma^5\sigma_{\lambda\mu}}_{(C.14)} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{24} \left(\underbrace{\sigma_{\lambda\mu}\sigma^\lambda_\nu}_{(C.12)} + \underbrace{\sigma_{\lambda\nu}\sigma^\lambda_\mu}_{(C.12)} \right) g_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S &= \frac{5}{12}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}g_{\nu\mu}[\gamma_\beta, \gamma_\alpha] - \frac{1}{2}g_{\nu\beta}[\gamma_\mu, \gamma_\alpha] - \frac{1}{2}g_{\nu\alpha}[\gamma_\beta, \gamma_\mu]\right) \\
 &\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\gamma_\beta, \gamma_\alpha] - \frac{1}{2}g_{\mu\beta}[\gamma_\nu, \gamma_\alpha] - \frac{1}{2}g_{\mu\alpha}[\gamma_\beta, \gamma_\nu]\right) \\
 &\quad + \frac{1}{24}(2\gamma_\mu\gamma_\nu + g_{\mu\nu} + 2\gamma_\nu\gamma_\mu + g_{\mu\nu})g_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Utilizando (C.15) em todos os comutadores:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S &= \frac{5}{12}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{6}\{g_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta) - g_{\nu\beta}(g_{\alpha\mu} - \gamma_\alpha\gamma_\mu) \\
 &\quad - g_{\nu\alpha}(g_{\mu\beta} - \gamma_\mu\gamma_\beta) + g_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta) \\
 &\quad - g_{\mu\beta}(g_{\alpha\nu} - \gamma_\alpha\gamma_\nu) - g_{\mu\alpha}(g_{\nu\beta} - \gamma_\nu\gamma_\beta)\} \\
 &\quad + \frac{1}{24}\left(\underbrace{2\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}}_{(C.1)} + 2g_{\mu\nu}\right)g_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{5}{12}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{6}\{2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - 2g_{\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta - 2(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) \\
 &\quad + g_{\nu\beta}\gamma_\alpha\gamma_\mu + g_{\nu\alpha}\gamma_\mu\gamma_\beta + g_{\mu\beta}\gamma_\alpha\gamma_\nu + g_{\mu\alpha}\gamma_\nu\gamma_\beta \\
 &\quad + \frac{1}{24}(4g_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu})g_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{5}{12}g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) + \frac{1}{3}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta \\
 &\quad - \frac{1}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{6}\{\gamma_\alpha(g_{\nu\beta}\gamma_\mu + g_{\mu\beta}\gamma_\nu) + (g_{\nu\alpha}\gamma_\mu + g_{\mu\alpha}\gamma_\nu)\gamma_\beta\} \\
 &\quad + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} \\
 &= g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - \frac{2}{3}(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}) - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta \\
 &\quad + \frac{1}{6}\{\gamma_\alpha(g_{\nu\beta}\gamma_\mu + g_{\mu\beta}\gamma_\nu) + (g_{\nu\alpha}\gamma_\mu + g_{\mu\alpha}\gamma_\nu)\gamma_\beta\}. \tag{C.20}
 \end{aligned}$$

$$[\pi_\alpha, \pi_\beta] = ieF_{\alpha\beta} \tag{C.21}$$

Agora, contraído com as derivadas covariantes e deixando α à esquerda e β à direita:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^S \pi^\mu \pi^\nu &= g_{\alpha\beta} \pi^2 - \frac{2}{3} \left(\pi_\alpha \pi_\beta + \underbrace{\pi_\beta \pi_\alpha}_{(C.21)} \right) - \frac{1}{3} \gamma_\alpha \gamma_\beta \pi^2 \\
 &+ \frac{1}{6} \left\{ \gamma_\alpha \gamma_\mu \pi^\mu \pi_\beta + \gamma_\alpha \gamma_\nu \underbrace{\pi_\beta \pi^\nu}_{(C.21)} + \gamma_\mu \gamma_\beta \underbrace{\pi^\mu \pi_\alpha}_{(C.21)} + \gamma_\nu \gamma_\beta \pi_\alpha \pi^\nu \right\} \\
 &= g_{\alpha\beta} \pi^2 - \frac{2}{3} (2\pi_\alpha \pi_\beta + ieF_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3} \gamma_\alpha \gamma_\beta \pi^2 + \frac{1}{6} \{ \gamma_\alpha \not{\pi} \pi_\beta \\
 &\quad + \gamma_\alpha \gamma_\nu (ieF_\beta{}^\nu + \pi^\nu \pi_\beta) + \gamma_\mu \gamma_\beta (ieF_\alpha{}^\mu + \pi_\alpha \pi^\mu) + \gamma_\nu \gamma_\beta \pi_\alpha \pi^\nu \} \\
 &= g_{\alpha\beta} \pi^2 - \frac{4}{3} \pi_\alpha \pi_\beta - \frac{2}{3} ieF_{\beta\alpha} - \frac{1}{3} \gamma_\alpha \gamma_\beta \pi^2 + \frac{1}{6} \{ \gamma_\alpha \not{\pi} \pi_\beta \\
 &\quad + ie\gamma_\alpha \gamma_\nu F_\beta{}^\nu + \gamma_\alpha \not{\pi} \pi_\beta + ie\gamma_\mu \gamma_\beta F_\alpha{}^\mu + \gamma_\mu \gamma_\beta \pi_\alpha \pi^\mu + \gamma_\nu \gamma_\beta \pi_\alpha \pi^\nu \} \\
 &= g_{\alpha\beta} \pi^2 - \frac{4}{3} \pi_\alpha \pi_\beta + \frac{2}{3} ieF_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \gamma_\alpha \gamma_\beta \pi^2 + \frac{1}{3} \gamma_\alpha \not{\pi} \pi_\beta \\
 &\quad + \frac{ie}{6} \gamma_\alpha \gamma_\nu F_\beta{}^\nu + \frac{ie}{6} \gamma_\mu \gamma_\beta F_\alpha{}^\mu + \frac{1}{3} \pi_\alpha \not{\pi} \gamma_\beta \\
 &= \pi^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} (\gamma_\alpha \not{\pi} - 4\pi_\alpha) \pi_\beta + \frac{1}{3} (\pi_\alpha \not{\pi} - \gamma_\alpha \pi^2) \gamma_\beta + \frac{2}{3} ieF_{\alpha\beta} \\
 &\quad + \frac{ie}{6} \gamma_\alpha \gamma^\nu F_{\beta\nu} + \frac{ie}{6} \gamma^\mu F_{\mu\alpha} \gamma_\beta. \tag{C.22}
 \end{aligned}$$

Algumas contas explícitas para o próximo cálculo:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\lambda\nu} A^\nu &= \frac{i}{2} [\gamma_\lambda, \gamma_\nu] A^\nu \\
 &= \frac{i}{2} \left(\gamma_\lambda \gamma_\nu - \underbrace{\gamma_\nu \gamma_\lambda}_{(C.1)} \right) A^\nu \\
 &= \frac{i}{2} (2\gamma_\lambda \gamma_\nu - 2g_{\nu\lambda}) A^\nu \\
 &= i(\gamma_\lambda \not{A} - A_\lambda), \tag{C.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_\alpha{}^\mu \gamma_\mu &= [\pi_\alpha, \pi^\mu] \gamma_\mu \\
 &= (\pi_\alpha \pi^\mu - \pi^\mu \pi_\alpha) \gamma_\mu \\
 &= \pi_\alpha \not{\pi} - \not{\pi} \pi_\alpha, \tag{C.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_\alpha^\mu \sigma_{\beta\mu} &= \frac{i}{2} F_\alpha^\mu [\gamma_\beta, \gamma_\mu] \\
 &= \frac{i}{2} F_\alpha^\mu (\gamma_\beta \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\beta) \\
 &= \frac{i}{2} \left(F_\alpha^\mu \underbrace{\gamma_\beta \gamma_\mu}_{(C.1)} - F_\alpha^\mu \gamma_\mu \gamma_\beta \right) \\
 &= \frac{i}{2} (F_\alpha^\mu (2g_{\beta\mu} - \gamma_\mu \gamma_\beta) - F_\alpha^\mu \gamma_\mu \gamma_\beta) \\
 &= i (F_{\alpha\beta} - F_\alpha^\mu \gamma_\mu \gamma_\beta), \tag{C.25}
 \end{aligned}$$

Antissimétrico:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}^A \pi^\mu \pi^\nu &= -i \left\{ g \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ig' \underbrace{(\pi_\alpha \pi_\beta - \pi_\beta \pi_\alpha)}_{(C.21)} \right\} \\
 &\quad + ic \left\{ \sigma_{\beta\nu} \pi_\alpha \pi^\nu - \sigma_{\beta\mu} \underbrace{\pi^\mu \pi_\alpha}_{(C.21)} - \sigma_{\alpha\mu} \pi^\mu \pi_\beta + \sigma_{\alpha\nu} \underbrace{\pi_\beta \pi^\nu}_{(C.21)} \right\} \\
 &= -ig \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ieg' F_{\alpha\beta} + ic \{ \pi_\alpha \pi^\nu \sigma_{\beta\nu} \\
 &\quad - \sigma_{\beta\mu} (ie F_\alpha^\mu + \pi_\alpha \pi^\mu) - \sigma_{\alpha\mu} \pi^\mu \pi_\beta + \sigma_{\alpha\nu} (ie F_\beta^\nu + \pi^\nu \pi_\beta) \} \\
 &= -ig \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ieg' F_{\alpha\beta} + ic \{ \pi_\alpha \pi^\nu \sigma_{\beta\nu} - ie \sigma_{\beta\mu} F_\alpha^\mu \\
 &\quad - \sigma_{\beta\mu} \pi_\alpha \pi^\mu - \sigma_{\alpha\mu} \pi^\mu \pi_\beta + ie \sigma_{\alpha\nu} F_\beta^\nu + \sigma_{\alpha\nu} \pi^\nu \pi_\beta \} \\
 &= +ig \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ieg' F_{\alpha\beta} + ic \{ \pi_\alpha \sigma_{\beta\mu} \pi^\mu \\
 &\quad - ie \underbrace{F_\alpha^\mu \sigma_{\beta\mu}}_{(C.25)} - \pi_\alpha \sigma_{\beta\mu} \pi^\mu - \sigma_{\alpha\mu} \pi^\mu \pi_\beta \\
 &\quad \left. + ie \underbrace{F_\beta^\mu \sigma_{\alpha\mu} + \sigma_{\alpha\mu} \pi^\mu \pi_\beta}_{(C.25)} \right\} \\
 &= -ig \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ieg' F_{\alpha\beta} \\
 &\quad - ec \{ i (F_{\alpha\beta} - F_\alpha^\mu \gamma_\mu \gamma_\beta) \\
 &\quad + i (F_{\beta\alpha} - F_\beta^\mu \gamma_\mu \gamma_\alpha) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\mu\nu}^A \pi^\mu \pi^\nu &= -ig \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ieg' F_{\alpha\beta} \\
 &\quad + iec \left(F_\alpha^\mu \gamma_\mu \gamma_\beta + F_\beta^\mu \underbrace{\gamma_\mu \gamma_\alpha}_{(C.1)} \right) \\
 &= -ig \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ieg' F_{\alpha\beta} \\
 &\quad + iec (\gamma^\mu F_{\alpha\mu} \gamma_\beta + F_\beta^\mu (2g_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha \gamma_\mu)) \\
 &= -ig \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} + ieg' F_{\alpha\beta} \\
 &\quad + iec (-\gamma^\mu F_{\mu\alpha} \gamma_\beta + 2F_{\beta\alpha} - F_\beta^\mu \gamma_\alpha \gamma_\mu) \\
 &= -i \left(g \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} - eg' F_{\alpha\beta} \right) \\
 &\quad - 2iec F_{\alpha\beta} - iec \underbrace{\gamma^\mu F_{\mu\alpha} \gamma_\beta}_{(C.24)} - iec \gamma_\alpha \underbrace{\gamma^\mu F_{\beta\mu}}_{(C.24)} \\
 &= -i \left(g \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} - eg' F_{\alpha\beta} \right) \\
 &\quad - 2iec F_{\alpha\beta} + iec (\pi^\alpha \not{\pi} - \not{\pi} \pi^\alpha) \gamma_\beta + iec \gamma_\alpha (\not{\pi} \pi^\beta - \pi^\beta \not{\pi}) \\
 &= -i \left\{ g \frac{\sigma_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu}{2} g_{\alpha\beta} - eg' F_{\alpha\beta} \right\} - 2iec F_{\alpha\beta} \\
 &\quad + iec (\pi_\alpha \not{\pi} - \not{\pi} \pi_\alpha) \gamma_\beta + iec \gamma_\alpha (\not{\pi} \pi_\beta - \pi_\beta \not{\pi}). \tag{C.26}
 \end{aligned}$$

Vamos reescrever (1.75) da seguinte maneira para inserirmos os vínculos (já substituindo $\pi^\mu \rightarrow n^\mu$):

$$\begin{aligned}
 &\left(n^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} (\gamma_\alpha \not{n} - 4n_\alpha) (\pi \cdot \psi)_\beta + \frac{1}{3} (n_\alpha \not{n} - \gamma_\alpha n^2) (\gamma \cdot \psi)_\beta \right) \psi^\beta \\
 &+ \left(-\frac{i}{2} g_{3/2} \sigma_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + ie F_{\alpha\beta} \right) \psi^\beta - m^2 \psi_\alpha = 0. \tag{C.27}
 \end{aligned}$$

O termo relevante para o cálculo do determinante é o que pertence à primeira linha da expressão acima. Após encontrarmos os vínculos (1.76) e (1.77) substituimos de volta na equação (1.75), chamemos agora $(\pi \cdot \psi)_\beta = N_\beta$ e $(\gamma \cdot \psi)_\beta = \Gamma_\beta$. Vamos mostrar que chegamos em (1.78). O tensor $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ já está na forma correta, e Γ_β também, pois é apenas o vínculo $(\gamma \cdot \psi)$.

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = n^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} (\gamma_\alpha \not{n} - 4n_\alpha) N_\beta + \frac{1}{3} (n_\alpha \not{n} - \gamma_\alpha n^2) \Gamma_\beta, \tag{C.28}$$

$$\Gamma_\beta = \frac{ie}{6m^2} (3g_{3/2} + 2) \left(F_{\mu\beta} \gamma^\mu + i \gamma^5 \gamma^\mu \tilde{F}_{\mu\alpha} \right). \tag{C.29}$$

Basta mostrarmos que o vínculo $\pi \cdot \psi$ trocando $\pi^\mu \rightarrow n^\mu$ resulta em N_β :

$$\begin{aligned}
 (\pi \cdot \psi)_\beta = N_\beta &= \frac{1}{m^2} \left\{ ie \left(1 - \frac{g_{3/2}}{2} \right) \underbrace{(F_{\beta\mu} n^\mu + n^\mu F_{\beta\mu})}_{n^\mu \text{ comuta}} + ieg_{3/2} n^\mu F_{\mu\beta} \right. \\
 &\quad \left. - e \left(\frac{g_{3/2}}{4} + \frac{1}{6} \right) \gamma^5 [\gamma^\alpha \tilde{F}_{\beta\alpha}, \not{n}] + ie \left(\frac{g_{3/2}}{4} - \frac{1}{6} \right) \{ \gamma^\mu F_{\beta\mu}, \not{n} \} \right\} \\
 &\quad + \frac{ie}{m^2} \left(\left(\frac{g_{3/2}}{4} - \frac{1}{6} \right) \gamma^\nu \underbrace{(F_{\nu\mu} n^\mu + n^\mu F_{\nu\mu})}_{n^\mu \text{ comuta}} \right) \Gamma_\beta. \tag{C.30}
 \end{aligned}$$

Mas agora como temos um 4-vetor n^μ , esse 4-vetor comuta com todos objetos, podemos assim simplificar vários termos. Vamos fazer o cálculo de uma expressão que utilizaremos à seguir:

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu F_{\beta\mu} \not{n} &= \gamma^\mu F_{\beta\mu} \gamma^\alpha n_\alpha \\
 &= n_\alpha \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\alpha}_{(C.1)} F_{\beta\mu} \\
 &= n_\alpha (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) F_{\beta\mu} \\
 &= 2n^\mu F_{\beta\mu} - \not{n} \gamma^\mu F_{\beta\mu}. \tag{C.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_\beta &= \frac{1}{m^2} \left\{ ie \left(1 - \frac{g_{3/2}}{2} \right) 2n^\mu F_{\beta\mu} - ieg_{3/2} n^\mu F_{\beta\mu} - e \left(\frac{g_{3/2}}{4} + \frac{1}{6} \right) \gamma^5 [\gamma^\alpha \tilde{F}_{\beta\alpha}, \not{n}] \right. \\
 &\quad \left. + ie \left(\frac{g_{3/2}}{4} - \frac{1}{6} \right) \underbrace{(\gamma^\mu F_{\beta\mu} \not{n} + \not{n} \gamma^\mu F_{\beta\mu})}_{2 n^\mu F_{\beta\mu} \text{ (C.31)}} \right\} + \frac{ie}{m^2} \left(\left(\frac{g_{3/2}}{4} - \frac{1}{6} \right) 2\gamma^\nu F_{\nu\mu} n^\mu \right) \Gamma_\beta \\
 &= \frac{1}{m^2} \left\{ 2ien^\mu F_{\beta\mu} - ieg_{3/2} n^\mu F_{\beta\mu} - ieg_{3/2} n^\mu F_{\beta\mu} - e \left(\frac{g_{3/2}}{4} + \frac{1}{6} \right) \gamma^5 [\gamma^\alpha \tilde{F}_{\beta\alpha}, \not{n}] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} ieg_{3/2} n^\mu F_{\beta\mu} - \frac{1}{3} ien^\mu F_{\beta\mu} \right\} + \frac{ie}{m^2} \left(\left(\frac{g_{3/2}}{2} - \frac{1}{3} \right) \gamma^\nu F_{\nu\mu} n^\mu \right) \Gamma_\beta \\
 &= \frac{1}{m^2} \left(ie \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2} g_{3/2} \right) n^\mu F_\mu^\nu - e \left(\frac{g_{3/2}}{4} + \frac{1}{6} \right) \gamma^5 [\gamma^\alpha \tilde{F}_{\beta\alpha}, \not{n}] \right) \\
 &\quad + \frac{ie}{m^2} \left(\frac{g_{3/2}}{2} - \frac{1}{3} \right) \gamma^\nu F_{\nu\mu} n^\mu \Gamma_\beta. \tag{C.32}
 \end{aligned}$$

Referências

- [1] E. Öptik, (1915), Bull. de la Soc. Astr. de Russie, 21, 150
- [2] J. C. Kapteyn, (1922), ApJ, 55, 302
- [3] J. H. Oort, (1932), Bull. Astron. Inst. Netherlands, 6, 249
- [4] J. H. Jeans, (1922), MNRAS, 82, 122
- [5] F. Zwicky, (1933), Helvetica Physica Acta, 6, 110
- [6] J. Einasto, (1974), in Stars and the Milky Way System, ed. L. N. Mavridis, 291
- [7] J. Einasto, Baltic Astronomy, vol 20, 2011. arXiv:1109.5580v1
- [8] J. Lesgourgues, S. Pastor, LAPTH-1131/05, IFIC/05-59. arXiv:astro-ph/0603494v2
- [9] G. Bertone, D. Hooper, J. Silk, Phys. Reports 405 279-390 (2005).
- [10] W. Rarita, J. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
- [11] G. Velo, D. Zwanziger, Phys. Rev. **186**, 5 (1969).
- [12] M. Kobayashi, Y. Takahashi J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 6581-6589 (1987)
- [13] S. Ferrara, M. Porrati Phys. Rev. D **46**, 8 (1992)
- [14] S. Deser, A. Waldron, V. Pascalutsa Phys. Rev. D **62**,
- [15] M. Napsuciale, M. Kirchbach, Journ. Math. Phys. **45**, 12 (2004).
- [16] M. Napsuciale, C. A. Vaquera-Araujo, (2005). arXiv:hep-ph/0310106v2
- [17] D. V. Ahluwalia, M. Kirchbach, Mod. Phys. Let. A, vol **16**, No. 1 1377-1383 (2001). arXiv:hep-th/0101009v2
- [18] F. J. Belifante, Phys. Rev. **92**, 4 (1953).

-
- [19] M. Napsuciale, M. Kirchbach, S. Rodrigues, Eur. Phys. J. A **29**, 289-306 (2006). arXiv:hep-ph/0606308v1
- [20] M. Kirchbach, M. Napsuciale, (2005). arXiv:hep-ph/0407179v3
- [21] M. Kirchbach, G. Cabral, AIP Conf.Proc. 670 , 544-546 (2003). arXiv:nucl-th/0310017v1
- [22] B. Körs, P. Nath, JHEP 0507:069 (2005). arXiv:hep-ph/0503208
- [23] K. Cheung, T-C Yuan, JHEP03 (2007). arXiv:hep-ph/0701107v2
- [24] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific Published, 1985).
- [25] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory, 2nd edition* (John Wiley & Sons, 2010).
- [26] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introduction Course in Modern Particle Physics* (John Wiley & Sons, 1984).
- [27] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Applications to Physical Problems* (Dover Books on Physics & Chemistry).
- [28] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics, 3rd edition* (Springer, 2000).
- [29] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, 1995).
- [30] M. Rivas, *Kinematical Theory of Spinning Particles; Classical and Quantum Mechanical Formalism of Elementary Particles* (Kluwer Academic Publishers, 2002).
- [31] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Wiley Interscience, 1962) Vol II, Chap. V