

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Teoria quântica de campos
relativística na descrição de
Schrödinger.**

Henrique dos Santos Flores

Porto Alegre
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Teoria quântica de campos relativística na descrição de Schrödinger. *

Henrique dos Santos Flores

Trabalho de conclusão de curso realizado sob orientação da Prof. Dr. Horacio Oscar Girotti e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Porto Alegre
2011

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Abstract

So far, the quantization of gauge models, like Electrodynamics and Yang-Mills theory, only becomes possible after gauge fixing. Indeed, what one looks for are the renormalized vertex functions in Heisenberg picture. On the other hand, one of the open problems of high energy theoretical physics is that of obtaining a background independent formulation of quantum gravity. For that purpose one should first learn about quantizing gauge models while preserving the gauge freedom in full. It has been observed that the Schrödinger picture could be more suitable for this purpose. Since most field theoretical high energy physicists are not familiar with the formulation of relativistic quantum field theory in the Schrödinger picture, we assumed the task of studying this problem. We first look for obtaining a sound Schrödinger picture quantization of the real massive scalar field. Although not a gauge theory, this model serves quite well as a testing example where the main difficulties of the new systematic become exposed. Our work ends by presenting the Schrödinger picture quantization of the free Maxwell field, a true gauge theory.

Resumo

Até o momento, a quantização de modelos de calibre, como a Eletrodinâmica e a teoria de Yang-Mills, só tornam-se possíveis após a fixação de calibre. De fato, o que se procura são as funções de vértice renormalizadas na descrição de Heisenberg. Por outro lado, um dos problemas abertos em física de altas energias é o de obter uma formulação "background independent" da gravitação quântica. Para tal propósito primeiro deve-se aprender a quantizar modelos preservando-se totalmente suas liberdades de calibre. Observou-se que a descrição de Schrödinger seria a mais apropriada para este objetivo. Como a maioria dos físicos teóricos de altas energias não estão familiarizados com a formulação relativística da teoria quântica de campos na descrição de Schrödinger, assumimos a tarefa de estudar este problema. Primeiramente, obteremos uma quantização do campo real massivo escalar e livre, que embora não seja uma teoria de calibre serve muito bem como teste para expor as dificuldades da nova sistemática proposta. Nosso trabalho termina ao apresentar a descrição de Schrödinger para o campo livre de Maxwell, uma verdadeira teoria de calibre.

Agradecimentos

Durante este trabalho recebi apoio de muitas pessoas, no entanto gostaria de agradecer especialmente

- a meus pais, Maria Solange dos Santos e Mauro Renato Flores, pela enorme dedicação e apoio mesmo nos momentos mais difíceis;
- ao Professor Horacio Oscar Girotti pela incrível experiência de trabalho e de vida. Pela confiança, paciência e compreensão;
- a todos os meus amigos, pelo companheirismo.

Muito obrigado a todos.

Conteúdo

Introdução	2
1. O campo escalar real	4
1.1 Formulação Lagrangiana	4
1.2 Formulação Hamiltoniana	5
1.3 Quantização do campo escalar livre	7
1.4 O estado fundamental	8
1.5 Operadores criação e aniquilação.	12
1.6 Primeiro estado excitado	12
1.7 O segundo estado excitado	14
1.8 O estado excitado de ordem n	16
2. O campo eletromagnético.	23
2.1 Formulação clássica	23
2.2 Formulação quântica	26
2.3 O estado fundamental	27
3. Considerações finais	30
Bibliografia	31

Introdução

Uma teoria quântica de campos fica definida pelas suas infinitas partes de vértice 1PI (funções de Green irreduzíveis de uma partícula) renormalizadas, pois a partir delas é possível construir as funções de Green conectadas e, logo após, calcular os elementos de matriz S desejados. Usualmente o cálculo das 1PI é levado a cabo na descrição de interação, também conhecida como descrição de Dirac, mediante a utilização da teoria de perturbações. Entretanto, nos resultados é detectada a presença de divergências ultravioletas, as quais são removidas empregando-se o processo renormalização.

O postulado fundamental da mecânica quântica admite outras (de fato infinitas) descrições. Logo, cabe perguntar se uma mudança de descrição poderia facilitar a formulação de uma teoria quântica de campos. Nosso presente objetivo é o de revisar e aprofundar a formulação da teoria quântica de campos na descrição de Schrödinger, no qual os objetos fundamentais da teoria não são as funções de Green, ainda que elas também possam vir a ser calculadas, mas os autovetores e autovalores de um conjunto maximal de operadores que inclua o Hamiltoniano da teoria como um de seus elementos. Esta formulação foi desenvolvida no passado com relativo sucesso tendo sido rigorosamente demonstrado por Symanzik [2] que a formulação da teoria quântica de campos nesta descrição está bem definida para campos de interação, porque não apresenta divergências ultravioletas e requer, apenas, uma constante de renormalização associada ao funcional que descreve o estado inicial do sistema. Isto representa uma vantagem teórica inegável quando se compara à formulação baseada nas funções de Green.

Nosso interesse na formulação da teoria quântica de campos na descrição de Schrödinger surgiu em conexão com a necessidade de obter uma formulação quântica da gravitação (relatividade geral quantizada) independente de "background", na qual os vínculos existentes, que representam as condições de calibre, determinam restrições sobre o espaço físico de estados e; então a descrição de Schrödinger aparece como a mais apropriada.

Segundo a sistemática desenvolvida por Dirac [1], a dinâmica da teoria quântica nesta descrição, controlada pela equação de Schrödinger, ocorre num espaço reduzido que está contido no espaço de fase do sistema, pois os estados descritos pela equação de movimento estão sujeitos a condições auxiliares denominadas condições de vínculo que alteram a forma do Hamiltoniano da teoria. Explicitamente, o Hamiltoniano do sistema está definido sobre a hipersuperfície delimitada pelos vínculos e o problema consiste em encontrar todos os estados pertencentes a este espaço reduzido que satisfaçam a equação de Schrödinger. Talvez a principal vantagem do método seja a similaridade existente com os resultados obtidos para sistemas não-relativísticos.

Limitaremos-nos, naturalmente, por aplicar a formulação de Schrödinger a um sistema simples como o campo escalar real e livre justamente para entender o processo e verificar o

grau de dificuldade das equações associadas ao sistema. Este modelo não apresenta vínculos, então também não é um teoria de calibre. Logo em seguida, utilizaremos o campo eletromagnético livre para aplicar o método desenvolvido por Dirac no tratamento de sistemas vinculados[4] e trabalharemos com o conjecturado estado de vácuo.

Neste trabalho, utilizaremos o sistema de unidades naturais, no qual $\hbar = c = 1$ juntamente com a seguinte assinatura da métrica: $(+, -, -, -)$. Índices gregos $\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$ irão de 0 a 3 enquanto índices latinos i, j, k irão de 1 a 3. Também utilizaremos a convenção de Einstein no que diz respeito a soma sobre índices repetidos numa expressão monomial.

Capítulo 1

O campo escalar real

O campo real escalar livre é um sistema simples, não apresenta vínculos e fornece resultados cujas interpretações são bastante parecidas àquelas obtidas no desenvolvimento do oscilador harmônico não relativístico. Procederemos pelo o método canônico de quantização, no qual relações de comutação serão impostas às coordenadas e momenta. A descrição utilizada recebe o nome de descrição de Schrödinger, pois os operadores são objetos independentes do tempo e a dinâmica, é carregada nos estados.

O objetivo deste capítulo é descrever o espectro de energia e momentum.

1.1 Formulação Lagrangiana

O funcional ação que descreve o campo escalar real livre é

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad (1.1)$$

no qual, \mathcal{L} é denominado densidade Lagrangeana do sistema. A equação de movimento clássica (equação de Euler-Lagrange) obedecida pelo campo é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} = 0. \quad (1.2)$$

Explicitamente

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} = \partial_\nu \partial^\nu \phi, \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad (1.3b)$$

e portanto

$$\partial_\nu \partial^\nu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (1.4)$$

1.2 Formulação Hamiltoniana

Denotaremos por $\pi(\vec{x})$ o momentum canônico conjugado à coordenada $\phi(\vec{x})$, por definição

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi. \quad (1.5)$$

O fato da velocidade " $\partial_0 \phi(\vec{x})$ " ser eliminada sem ambiguidades em termos do momentum implica ausência de vínculos. Quanto à densidade Hamiltoniana, encontramos

$$\mathcal{H} \equiv \pi \partial^0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \phi \partial^j \phi + m^2 \phi^2), \quad (1.6)$$

o que permite escrever o Hamiltoniano do sistema

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2 + \partial_j \phi \partial^j \phi + m^2 \phi^2). \quad (1.7)$$

Definiremos a seguir o colchete de Poisson, necessário para especificar as relações de comutação que o sistema obedecerá no nível quântico com base no princípio da correspondência de Bohr.

Definição(Colchete de Poisson): A operação definida para dois funcionais analíticos quaisquer das coordenadas do espaço de fase $\Lambda_1 = \Lambda_1[\phi, \pi]$ e $\Lambda_2 = \Lambda_2[\phi, \pi]$

$$[\Lambda_1, \Lambda_2]_{PB} \equiv \int d^3z \left[\frac{\delta \Lambda_1}{\delta \phi(\vec{z})} \frac{\delta \Lambda_2}{\delta \pi(\vec{z})} - \frac{\delta \Lambda_1}{\delta \pi(\vec{z})} \frac{\delta \Lambda_2}{\delta \phi(\vec{z})} \right], \quad (1.8)$$

é chamada de colchete de Poisson entre Λ_1 e Λ_2 . A partir desta definição encontram-se os colchetes básicos

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})]_{PB} = 0, \quad (1.9a)$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})]_{PB} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.9b)$$

$$[\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})]_{PB} = 0. \quad (1.9c)$$

Da definição verifica-se, também, que os colchetes de Poisson satisfazem a álgebra

$$[\Lambda_1, \Lambda_2]_{PB} = -[\Lambda_2, \Lambda_1]_{PB}; \quad (1.10a)$$

$$[\Lambda_1, \Lambda_2 + \Lambda_3]_{PB} = [\Lambda_1, \Lambda_2]_{PB} + [\Lambda_1, \Lambda_3]_{PB}, \quad (1.10b)$$

$$[\Lambda_1, \Lambda_2 \Lambda_3]_{PB} = [\Lambda_1, \Lambda_2]_{PB} \Lambda_3 + \Lambda_2 [\Lambda_1, \Lambda_3]_{PB}, \quad (1.10c)$$

$$[[\Lambda_1, \Lambda_2]_{PB}, \Lambda_3]_{PB} + [[\Lambda_3, \Lambda_1]_{PB}, \Lambda_2]_{PB} + [[\Lambda_2, \Lambda_3]_{PB}, \Lambda_1]_{PB} = 0. \quad (1.10d)$$

Enquanto a evolução dinâmica do sistema é determinada pelas equações de Hamilton

$$\partial_0 \pi(t, \vec{x}) \equiv \dot{\pi}(t, \vec{x}) = -\frac{\delta H}{\delta \phi(\vec{x})} = -\partial^j \partial_j \phi(t, \vec{x}) - m^2 \phi(t, \vec{x}); \quad (1.11a)$$

$$\partial_0 \phi(t, \vec{x}) \equiv \dot{\phi}(t, \vec{x}) = \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x})} = \pi(t, \vec{x}), \quad (1.11b)$$

o que para uma funcional arbitrária $\Lambda = \Lambda[\phi, \pi]$ resulta em

$$\dot{\Lambda} = \int d^3x \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\pi} \dot{\pi} + \frac{\delta\Lambda}{\delta\phi} \dot{\phi} \right) = \int d^3x \left(-\frac{\delta\Lambda}{\delta\pi(\vec{x})} \frac{\delta H}{\delta\phi(\vec{x})} + \frac{\delta\Lambda}{\delta\phi(\vec{x})} \frac{\delta H}{\delta\pi(\vec{x})} \right) = [\Lambda, H]_{PB}. \quad (1.12)$$

Assim, partindo do tensor energia-momentum canônico $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.13)$$

calculamos a energia e o momentum do campo

$$P^0(t) = \int d^3x T^{00} = H, \quad (1.14a)$$

$$P^i(t) = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x \partial^0 \phi \partial^i \phi. \quad (1.14b)$$

A conservação de energia segue de

$$\dot{P}^0 = [P^0, H]_{PB} = [H, H]_{PB} = 0, \quad (1.15)$$

uma vez que a integral sobre o espaço de T^{00} define H^1 . Investigar a persistência no tempo do momentum linear P^i implica em expressá-lo em termos das variáveis do espaço de fase,

$$P^i = \int d^3x \pi(\vec{x}) \partial_x^i \phi(\vec{x}) \quad (1.16)$$

tal como pode ser conferido a partir das equações (1.14a) e (1.5). Logo, encontra-se que

$$\begin{aligned} \dot{P}^i &= [P^i, H]_{PB} = \int d^3x [\pi(t, \vec{x}) \partial_x^i \phi(t, \vec{x}), H]_{PB} \\ &= \int d^3x [(-\partial_k \partial^k \phi(t, \vec{x}) - m^2 \phi(t, \vec{x})) \partial_i \phi(t, \vec{x}) + \pi(t, \vec{x}) \partial_i \pi(t, \vec{x})], \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde a passagem do terceiro para o quarto termo é uma consequência das equações (1.11a) e (1.10c). O segundo termo e o terceiro termos no lado direito (1.17) são termos de superfície e podem ser ignorados sob certas hipóteses referentes ao comportamento assintótico do campo e de suas derivadas especiais. De fato

$$\int d^3x \pi \partial_i \pi = \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i (\pi^2), \quad (1.18a)$$

$$m^2 \int d^3x \phi \partial_i \phi = \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i (m^2 \phi^2). \quad (1.18b)$$

Resta ainda avaliar o primeiro termo no lado direito de (1.17). Porém, a utilização da identidade

¹ ver (1.14a).

$$-(\partial_k \partial^k \phi) \partial_i \phi = \frac{1}{2} [-\partial_k (\partial^k \phi \partial_i \phi) + \partial_i (-\phi \partial_k \partial^k \phi) + \partial_k (\phi \partial^k \partial_i \phi)], \quad (1.19)$$

também o reduz a um termo de superfície e, portanto,

$$\dot{P}^i = 0. \quad (1.20)$$

A conclusão é de que a energia e o momentum linear são conservados. O mesmo se aplica ao momentum angular cuja prova é mais elaborada e será omitida neste trabalho.

1.3 Quantização do campo escalar livre

Pelo princípio da correspondência os comutadores, a tempos iguais, são abstraídos dos colchetes de Poisson (1.9) de acordo com a regra

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i[A, B]_{PB} \Big|_{A \rightarrow \hat{A}, B \rightarrow \hat{B}}. \quad (1.21)$$

Daqui resulta

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] = 0, \quad (1.22a)$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.22b)$$

$$[\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = 0. \quad (1.22c)$$

O vetor de estado obedece à equação de Schrödinger,

$$\hat{H}|\Psi\rangle = i\frac{d}{dt}|\Psi\rangle. \quad (1.23)$$

Todo o problema (1.23) será formulado na representação em que $\hat{\phi}(\vec{x})$ é diagonal. Denominaremos $|\phi\rangle$ o autovetor de $\hat{\phi}$ com autovalor ϕ , ou seja

$$\hat{\phi}(\vec{x})|\phi\rangle = \phi(\vec{x})|\phi\rangle. \quad (1.24)$$

Nesta representação o operador que define o momentum canônico conjugado é dado pela expressão

$$\hat{\pi}(\vec{x}) \longrightarrow -i\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}, \quad (1.25)$$

Enquanto o estado abstrato $|\Psi\rangle$ é mapeado no funcional,

$$\Psi[\phi] = \langle\phi|\Psi\rangle, \quad (1.26)$$

o qual obedece à equação

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi[\phi, t] = \frac{1}{2} \int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\vec{x})} + \partial_j\phi(\vec{x})\partial^j\phi(\vec{x}) + m^2\phi^2 \right) \Psi[\phi, t], \quad (1.27)$$

que nada mais é do que a projeção de (1.23) na base dos autovetores de $\hat{\phi}(\vec{x})$.

Admitiremos, como usual, que o conjunto de autovetores de \hat{H} , representado pelo conjunto de funcionais $\{\psi_j[\phi]\}$, fornece uma base completa no espaço de estados. Portanto, podemos desenvolver o funcional

$$\Psi[\phi, t] = \sum_j c_j e^{-iE_j(t-t_i)} \psi_j[\phi], \quad (1.28)$$

onde

$$\frac{1}{2} \int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\vec{x})} + \partial_j \phi(\vec{x}) \partial^j \phi(\vec{x}) + m^2 \phi^2 \right) \psi_j[\phi] = E_j \psi_j[\phi]. \quad (1.29)$$

1.4 O estado fundamental

Resolveremos a equação (1.29) para o estado fundamental. Por analogia ao caso do oscilador harmônico sugerimos a solução

$$\Psi_0[\phi] = \exp(\mathcal{N}[\phi]), \quad (1.30)$$

onde

$$\mathcal{N}[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^3z d^3z' \phi(\vec{z}) G(\vec{z}, \vec{z}') \phi(\vec{z}'). \quad (1.31)$$

Logo, o problema consiste em mostrar que existe a função $G(\vec{z}, \vec{z}')$ que satisfaz a equação (1.29). Para tal fim, iniciamos calculando

$$\frac{\delta\Psi_0[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} = -\Psi_0[\phi] \int d^3z G(\vec{z}, \vec{x}) \phi(\vec{z}), \quad (1.32)$$

E

$$\frac{\delta^2\Psi_0[\phi]}{\delta\phi^2(\vec{x})} = \Psi_0[\phi] \int d^3z G(\vec{x}, \vec{z}) \phi(\vec{z}) \int d^3z' G(\vec{x}, \vec{z}') \phi(\vec{z}') - \Psi_0[\phi] G(\vec{x}, \vec{x}). \quad (1.33)$$

Nas quais assumimos que $G(\vec{z}, \vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{z})$. Substituindo (1.33) em (1.29) teremos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^3z \int d^3z' \phi(\vec{z}') \left[\int d^3x G(\vec{z}, \vec{x}) G(\vec{x}, \vec{z}') \right] \phi(\vec{z}') \\ & + \frac{1}{2} \int d^3z G(\vec{z}, \vec{z}) = E_0 + \frac{1}{2} \int d^3z \phi(\vec{z}) (-\nabla_z^2 + m^2) \phi(\vec{z}'). \end{aligned} \quad (1.34)$$

A equação (1.34) é uma igualdade entre funcionais que só pode ser satisfeita se as seguintes relações decorrentes forem verdadeiras:

$$E_0 = \frac{1}{2} \int d^3z G(\vec{z}, \vec{z}'), \quad (1.35a)$$

$$\int d^3x G(\vec{z}, \vec{x}) G(\vec{x}, \vec{z}') = (-\nabla_z^2 + m^2) \delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{z}'). \quad (1.35b)$$

Se supormos $G(\vec{z}, \vec{x}) = G(\vec{z} - \vec{x})$, ou seja, que $G(\vec{z}, \vec{x})$ é invariante sob translações, o lado esquerdo da equação (1.35b) é simplesmente um produto convolutivo. Seja $g = g(\vec{k})$ a transformada de Fourier da função $G = G(\vec{z}, \vec{x})$

$$G(\vec{z} - \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{z} - \vec{x})}, \quad (1.36)$$

a invariância de translação da função $G = G(\vec{z}, \vec{x})$ implica que $g(\vec{k}) = g(-\vec{k})$. Lembremos que

$$(-\nabla_z^2 + m^2) \delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{z}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\vec{k}^2 + m^2) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{z} - \vec{z}')}. \quad (1.37)$$

Após substituir (1.37) e (1.36) em (1.35b) encontramos a equação algébrica

$$g^2(\vec{k}) = (\vec{k}^2 + m^2) \equiv \omega_k^2 \quad (1.38)$$

que completa a determinação da função procurada

$$G(\vec{z}, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{z} - \vec{x})} \quad (1.39)$$

Quanto ao autovalor da energia, pela equação (1.35a) obtemos

$$E_0 = \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \int d^3k \omega_k. \quad (1.40)$$

Esta expressão é divergente, representa a energia de ponto zero. No entanto, pode ser reinterpretada por meio do processo de renormalização

$$E'_0 \equiv E_0 - \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \int d^3k \omega_k = 0, \quad (1.41)$$

que implica em escolher o autovalor de energia correspondente ao estado fundamental nulo.

Sabe-se que o Hamiltoniano e o momentum linear do sistema formam um conjunto maximal de operadores², portanto devem partilhar do mesmo espectro de autovetores. Determinaremos na sequência o autovalor correspondente ao momentum. Reescrevemos a contrapartida quântica de (1.16) na forma simétrica³

$$\hat{P}_j = -\frac{1}{2} \int d^3x \left(\partial_j \hat{\phi} \hat{\pi} + \hat{\pi} \partial_j \hat{\phi} \right), \quad (1.42)$$

² $[\hat{P}^i, \hat{H}] = 0$.

³ A simetria garante a Hermiticidade.

o que na representação utilizada torna-se

$$\hat{P}_j = \frac{i}{2} \int d^3x \left[\partial_j^x \phi(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \phi(\vec{x})} + \frac{\delta}{\delta \phi(\vec{x})} (\partial_j^x \phi(\vec{x})) \right]. \quad (1.43)$$

Devemos avaliar o resultado da aplicação $\hat{P}_j \Psi_0[\phi]$, que para o primeiro termo da soma (1.42) resulta

$$\begin{aligned} & - \int d^3x (\partial_j^x \phi(\vec{x})) \pi(\vec{x}) \Psi_0[\phi] = i \int d^3x (\partial_j^x \phi(\vec{x})) \frac{\delta \Psi_0[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} \\ & = -i \Psi_0[\phi] \int d^3x \int d^3z (\partial_j^x \phi(\vec{x})) G(\vec{x} - \vec{z}) \phi(\vec{z}) \\ & = +i \Psi_0[\phi] \int d^3x \int d^3z \phi(\vec{x}) (\partial_j^x G(\vec{x} - \vec{z})) \phi(\vec{z}) \\ & = -i \Psi_0[\phi] \int d^3x \int d^3z \phi(\vec{x}) (\partial_j^z G(\vec{x} - \vec{z})) \phi(\vec{z}) \\ & = +i \Psi_0[\phi] \int d^3x \int d^3z \phi(\vec{x}) G(\vec{x} - \vec{z}) (\partial_j^z \phi(\vec{z})) \\ & = +i \Psi_0[\phi] \int d^3x \int d^3z (\partial_j^x \phi(\vec{x})) G(\vec{z} - \vec{x}) \phi(\vec{z}) \\ & = +i \Psi_0[\phi] \int d^3x \int d^3z (\partial_j^x \phi(\vec{x})) G(\vec{x} - \vec{z}) \phi(\vec{z}) \\ & = 0, \end{aligned} \quad (1.44)$$

depois de levar em conta (1.32) e ignorar todos os termos de superfície que surgem nas integrações por partes. Quanto ao segundo termo, tem-se

$$\begin{aligned} & - \int d^3x \pi(\vec{x}) (\partial_j^x \phi(\vec{x})) \Psi_0[\phi] = i \int d^3x \frac{\delta [(\partial_j^x \phi(\vec{x})) \Psi_0[\phi]]}{\delta \phi(\vec{x})} \\ & = i \int d^3x \frac{\delta (\partial_j^x \phi(\vec{x}))}{\delta \phi(\vec{x})} \Psi_0[\phi] + i \int d^3x (\partial_j^x \phi(\vec{x})) \frac{\delta \Psi_0[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} \\ & = i \left[\int d^3x (\partial_j^x \delta^{(3)}(0)) \right] \Psi_0[\phi], \end{aligned} \quad (1.45)$$

ao utilizar a equação (1.44). Conclui-se então

$$\hat{P}^i \Psi_0[\phi] = \frac{1}{2} i \left[\int d^3x (\partial_i^x \delta^{(3)}(0)) \right] \Psi_0[\phi]. \quad (1.46)$$

Esta expressão claramente apresenta problemas. Um processo de regularização torna-se mandatório para atribuir-se sentido físico. Uma estratégia possível é considerar

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \lim_{V \rightarrow \infty} \int_V \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (1.47)$$

que implica

$$\delta^{(3)}(0) = \lim_{V \rightarrow \infty} \int_V \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3}. \quad (1.48)$$

Substituindo (1.48) em (1.46) e com a inversão não justificada dos limites

$$\partial_j^x \delta^{(3)}(0) = \partial_j^x \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} = \lim_{V \rightarrow \infty} \partial_j^x \frac{V}{(2\pi)^3} = 0 \quad (1.49)$$

obtemos zero como resultado. Em resumo: o vácuo é um auto estado simultâneo de energia em momentum linear no qual os correspondentes autovalores são nulos.

Por fim, normalizaremos a autofunção de energia-momentum, que tem o quadrado de sua norma dado pela integral funcional

$$N^2 \equiv \int \mathcal{D}\phi \psi_0^*[\phi] \Psi_0[\phi] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\int d^3z \phi(\vec{z}) \int d^3z' \phi(\vec{z}') G(\vec{z}, \vec{z}') \right). \quad (1.50)$$

Por definição da transformada de Fourier

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (1.51)$$

o que substituído na (1.50) leva a

$$\Psi_0[\phi] = \exp \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \phi(\vec{k}) \phi(-\vec{k}) \right), \quad (1.52)$$

e, portanto, a

$$N^2 = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(-\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \phi(\vec{k}) \phi(-\vec{k}) \right) = \prod_{\vec{k}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\omega_k}} \right), \quad (1.53)$$

pois

$$\mathcal{D}\phi \equiv \prod_{\vec{k}} \frac{d\phi(\vec{k})}{\sqrt{(2\pi)^3}}. \quad (1.54)$$

Então

$$\Psi_0[\phi] = \prod_{\vec{k}} \left(\frac{\omega_k}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \phi(\vec{k}) \phi(-\vec{k}) \right), \quad (1.55)$$

o que pode ser pensado como um produto infinito de estados fundamentais de osciladores harmônicos.

1.5 Operadores criação e aniquilação.

Completada a determinação do estado fundamental do campo escalar livre, focamos o problema de encontrar os estados excitados. O primeiro passo neste respeito consiste em lembrar as expressões dos operadores aniquilação e criação em termos dos operadores $\hat{\phi}(\vec{x})$ e $\hat{\pi}(\vec{x})$ [3], isto é,

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} [-i\pi(\vec{x}) + \omega_k\phi(\vec{x})], \quad (1.56a)$$

$$\hat{a}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} [i\pi(\vec{x}) + \omega_k\phi(\vec{x})], \quad (1.56b)$$

o que na representação utilizada (1.24) - (1.27) fica

$$\hat{a}^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[\omega_k\phi(\vec{x}) - \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \right], \quad (1.57a)$$

$$\hat{a}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[\omega_k\phi(\vec{x}) + \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \right]. \quad (1.57b)$$

Após uma certa álgebra mostra-se que

$$\begin{aligned} \int d^3k \omega_k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\vec{x})} + \partial_j\phi(\vec{x})\partial^j\phi(\vec{x}) + m^2\phi^2 \right) \\ -\frac{1}{2}\delta^{(3)}(0) \int d^3k \omega_k &= \hat{H}[\phi] - \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0) \int d^3k \omega_k, \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde levamos em conta 1.29. Além do mais,

$$\hat{a}(\vec{k})\Psi_0[\phi] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[\omega_k\Psi_0[\phi] \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{x}) - \omega_k\Psi_0[\phi] \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi(\vec{x}) \right] = 0 \quad (1.59)$$

o que confirma o fato do estado fundamental ser aniquilado pelo operador $\hat{a}(\vec{k})$.

Provaremos nas seguintes sessões que os estados excitados dos campos são construídos a partir do estado fundamental de acordo com a regra[3]

$$\Psi_n[\phi] = \prod_{j=1}^n \frac{\hat{a}^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{n}} \Psi_0[\phi], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.60)$$

1.6 Primeiro estado excitado

Com a equação (1.60) podemos encontrar diretamente o primeiro estado excitado

$$\Psi_1[\phi] = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1)\Psi_0[\phi] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}} \int d^3x e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \left[\omega_{k_1} \phi(\vec{x}) - \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \right] \Psi_0[\phi], \quad (1.61)$$

que ao se levar em conta (1.32) resulta em

$$\Psi_1[\phi] = \frac{\Psi_0[\phi]}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}} \left[\omega_{k_1} \underbrace{\int d^3x e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \phi(\vec{x})}_{\phi(\vec{k}_1)} + \int d^3x \int d^3z e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} G(\vec{z}, \vec{x}) \phi(\vec{z}) \right]. \quad (1.62)$$

Utilizando (1.39) podemos escrever o último termo desta equação na forma

$$\begin{aligned} & \int d^3x \int d^3z e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} G(\vec{z}, \vec{x}) \phi(\vec{z}) \\ &= \int d^3z \phi(\vec{z}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \underbrace{\int d^3x e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_1)}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_1)} = \omega_{k_1} \phi(\vec{k}_1). \end{aligned} \quad (1.63)$$

A delta permite carregar a integral em \vec{k} , e, a partir daí, a integral em \vec{z} definirá a transformada e Fourier da função $\phi(\vec{z})$. Por fim,

$$\Psi_1[\phi] = \frac{\Psi_0[\phi]}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}} \left[\omega_{k_1} \phi(\vec{k}_1) + \omega_{k_1} \phi(\vec{k}_1) \right] = \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) \Psi_0[\phi], \quad (1.64)$$

o que completa a determinação do primeiro estado excitado⁴. O autovalor de energia correspondente a este estado é encontrado por substituição direta de (1.64) em (1.29).

Neste ponto uma digressão é necessária. Inspirados na analogia com o problema do oscilador harmônico não-relativístico propomos o *ansatz*

$$\Psi_n[\phi] = \Psi_0[\phi] \Omega_n[\phi] \quad (1.65)$$

cuja consistência será verificada no decorrer do trabalho. Daqui segue que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Psi_n}{\delta\phi^2(\vec{x})} &= \frac{\delta^2 \Psi_0}{\delta\phi^2(\vec{x})} \Omega_n + 2 \frac{\delta \Psi_0}{\delta\phi(\vec{x})} \frac{\delta \Omega_n}{\delta\phi(\vec{x})} + \Psi_0 \frac{\delta^2 \Omega_n}{\delta\phi^2(\vec{x})} \\ &= \Psi_0 \left\{ \int d^3z \int d^3z' \phi(\vec{z}) [G(\vec{z}, \vec{x}) G(\vec{x}, \vec{z}')] \phi(\vec{z}') - G(\vec{x}, \vec{x}) \right\} \Omega_n \\ &\quad - 2 \Psi_0 \left[\int d^3z G(\vec{x}, \vec{z}) \phi(\vec{z}) \right] \frac{\delta \Omega_n}{\delta\phi(\vec{x})} + \Psi_0 \frac{\delta^2 \Omega_n}{\delta\phi^2(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

⁴ Este funcional já está normalizado.

Na qual (1.32) foi levada em conta. Substituindo (1.66) em (1.29) teremos uma equação para $\Omega_n[\phi]$

$$-\frac{1}{2} \int d^3x \frac{\delta^2 \Omega_n[\phi]}{\delta \phi^2(\vec{x})} + \int d^3z \phi(\vec{z}) \int d^3x G(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \Omega_n[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} = E_n \Omega_n[\phi], \quad (1.67)$$

na qual E_n é o autovalor em energia correspondente ao auto estado de ordem n .

Retornamos agora a nossa linha de desenvolvimento. Vamos utilizar (1.67) para encontrar E_1 . Da (1.64) vem

$$\frac{\delta \Omega_1[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} = \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}}, \quad (1.68a)$$

$$\frac{\delta^2 \Omega_1[\phi]}{\delta \phi^2(\vec{x})} = 0, \quad (1.68b)$$

cuja substituição em (1.67) juntamente com (1.21) nos fornece

$$\int d^3z \phi(\vec{z}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \int d^3x e^{-i\vec{x} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_1)} = E_1 \phi(\vec{k}_1) \quad (1.69)$$

e, por fim,

$$E_1 = \omega_{k_1} \quad (1.70)$$

como autovalor de energia para o primeiro estado excitado.

No que diz respeito ao momentum linear, temos

$$\hat{P}^i \Psi_1[\phi] = i \Psi_0[\phi] \int d^3x \frac{\delta \Omega_1}{\delta \phi(\vec{x})} \partial_x^i \phi(\vec{x}), \quad (1.71)$$

ao levar em conta $\hat{P}^i \Psi_0[\phi] = 0$. Inserindo (1.68a) na última equação encontramos

$$\hat{P}^i \Psi_1[\phi] = i \Psi_0[\phi] \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \int d^3x e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \partial_x^i \phi(\vec{x}), \quad (1.72)$$

a qual, após uma integração por partes, fornece

$$\hat{P}^i \Psi_1[\phi] = k_1^i \Psi_1[\phi], \quad (1.73)$$

onde k_1^i denota a componente i do vetor \vec{k}_1 .

1.7 O segundo estado excitado

Geramos o segundo estado excitado a partir de

$$\Psi_2[\phi] = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) \Psi_1[\phi]. \quad (1.74)$$

Com base em (1.57a), devemos calcular

$$\omega_{k_2} \Psi_1[\phi] \int d^3x e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \phi(\vec{x}) = \omega_{k_2} \Psi_1[\phi] \phi(\vec{k}_2) \quad (1.75)$$

e

$$- \int d^3x e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \frac{\delta \Psi_1[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} = - \int d^3x e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \left[\Omega_1 \frac{\delta \Psi_0[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} + \Psi_0[\phi] \frac{\delta \Omega_1[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} \right], \quad (1.76)$$

que em vista das equações (1.68a), (1.32), (1.36), (1.38) e (1.64) nos leva a

$$\Psi_2[\phi] = \frac{\Psi_0[\phi]}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{2\omega_{k_2}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_2) \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) - \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \right]. \quad (1.77)$$

Resta determinar o auto valor E_2 utilizando a equação (1.67). A equação (1.65) nos permite identificar em (1.77)

$$\Omega_2[\phi] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{2\omega_{k_2}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_2) \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) - \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \right]. \quad (1.78)$$

Logo,

$$\frac{\delta \Omega_2[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{2\omega_{k_2}}{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) + \sqrt{\frac{2\omega_{k_2}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_2) \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \right] \quad (1.79)$$

e

$$-\frac{1}{2} \int d^3x \frac{\delta^2 \Omega_2[\phi]}{\delta \phi^2(\vec{x})} = 2 \sqrt{\frac{2\omega_{k_2} 2\omega_{k_1}}{2(2\pi)^3}} \delta^{(3)}(\vec{k}_2 + \vec{k}_1). \quad (1.80)$$

Com a equação (1.79) podemos calcular o segundo termo de (1.67),

$$\begin{aligned} & \int d^3z \phi(\vec{z}) \int d^3x G(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \Omega_2[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} = \\ & \sqrt{\frac{2\omega_{k_2} 2\omega_{k_1}}{2(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) \int d^3z \phi(\vec{z}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \underbrace{\int d^3x e^{-i\vec{x} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_2)}}_{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_2)} \\ & + (\vec{k}_2 \Leftrightarrow \vec{k}_1) = \sqrt{\frac{2\omega_{k_2} 2\omega_{k_1}}{2(2\pi)^3}} (\omega_{k_2} + \omega_{k_1}) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_1). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Substituindo (1.80), (1.81) na (1.67) encontra-se

$$\begin{aligned}
 & - \sqrt{\frac{2\omega_{k_2}2\omega_{k_1}}{2(2\pi)^3}} \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) + \sqrt{\frac{2\omega_{k_2}2\omega_{k_1}}{2(2\pi)^3}} (\omega_{k_2} + \omega_{k_1}) \phi(\vec{k}_1) \phi(\vec{k}_2) \\
 & = E_2 \sqrt{\frac{2\omega_{k_2}2\omega_{k_1}}{2(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_1) - E_2 \delta^{(3)}(\vec{k}_2 + \vec{k}_1),
 \end{aligned} \tag{1.82}$$

cuja única solução é

$$E_2 = \omega_{k_2} + \omega_{k_1}. \tag{1.83}$$

Quanto ao autovalor de momentum, temos

$$\hat{P}^i \Psi_2[\phi] = i \Psi_0[\phi] \int d^3x \frac{\delta \Omega_2[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} \partial_x^i \phi(\vec{x}), \tag{1.84}$$

o que em vista de (1.79) pode ser escrita

$$\hat{P}^i \Psi_2[\phi] = i \Psi_0[\phi] \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) \sqrt{\frac{2\omega_{k_2}}{(2\pi)^3}} \int d^3x e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \partial_x^i \phi(\vec{x}) + (\vec{k}_2 \Leftrightarrow \vec{k}_1), \tag{1.85}$$

a qual após uma integração por partes juntamente com a identidade $(k_2^i + k_1^i) \delta^{(3)}(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) = 0$ pode ser expressa como

$$\hat{P}^i \Psi_2[\phi] = (k_2^i + k_1^i) \Psi_2[\phi]. \tag{1.86}$$

1.8 O estado excitado de ordem n

Determinaremos primeiramente a energia correspondente ao auto estado de ordem n . Para tal, precisaremos calcular o comutador entre os operadores criação e aniquilação definidos em (1.56). O único comutador não nulo é

$$\begin{aligned}
 & \left[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \right] = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int d^3y e^{i\vec{k}' \cdot \vec{y}} \\
 & \times \left[i\hat{\pi}(\vec{x}) + \omega_k \hat{\phi}(\vec{x}), -i\hat{\pi}(\vec{y}) + \omega_{k'} \hat{\phi}(\vec{y}) \right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}').
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

De posse deste comutador e levando em conta a equação (1.58)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \int d^3k \omega_k + \int d^3k \omega_k \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}), \tag{1.88}$$

calculamos então a energia para um auto estado de n arbitrário definido pela equação (1.60).

Teorema 1: A energia do auto-estado

$$|\Psi_n\rangle = \prod_{j=1}^n \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{n}} |\Psi_0\rangle, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.89)$$

é

$$E_n = \sum_{i=1}^n \omega_{k_i}. \quad (1.90)$$

Prova:

Aplicaremos o Hamiltoniano definido em (1.88) no auto estado (1.89) e utilizaremos o comutador (1.87).

$$\begin{aligned} \left(\hat{H} - \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \int d^3k \omega_k \right) |\Psi_n\rangle &= \int d^3k \omega_k a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) |\Psi_n\rangle \\ &= \int d^3k \omega_k a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \left[\prod_{j=1}^n \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} |\Psi_0\rangle \right] \\ &= \int d^3k \omega_k \frac{a^\dagger(\vec{k})}{\sqrt{n}} \left(\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_n) + a^\dagger(\vec{k}_n) a(\vec{k}) \right) \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} |\Psi_0\rangle \right] \\ &= \int d^3k \omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_n) \frac{a^\dagger(\vec{k})}{\sqrt{n}} \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} |\Psi_0\rangle \right] + \int d^3k \omega_k \frac{a^\dagger(\vec{k}_n)}{\sqrt{n}} a(\vec{k}) \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} |\Psi_0\rangle \right] \\ &= \omega_{k_n} \frac{a^\dagger(\vec{k}_n)}{\sqrt{n}} \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} |\Psi_0\rangle \right] + \int d^3k \omega_k \frac{a^\dagger(\vec{k}_n)}{\sqrt{n}} a(\vec{k}) \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} |\Psi_0\rangle \right] \\ &= \omega_{k_n} |\Psi_n\rangle + \int d^3k \omega_k \frac{a^\dagger(\vec{k}_n)}{\sqrt{n}} a(\vec{k}) \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} |\Psi_0\rangle \right] \end{aligned} \quad (1.91)$$

Repare que o mesmo processo pode ser repetido $n - 1$ vezes no segundo termo, o que nos permite reescrever o último termo da equação acima na forma

$$\sum_{i=1}^n \omega_{k_i} |\Psi_n\rangle + \int d^3k \omega_k \left[\prod_{j=1}^n \frac{a^\dagger(\vec{k}_j)}{\sqrt{j}} \right] a(\vec{k}) |\Psi_0\rangle$$

e, como $a(\vec{k}) |\Psi_0\rangle = 0$, obtemos a igualdade

$$\left(\hat{H} - \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \int d^3k \omega_k \right) |\Psi_n\rangle = \sum_{i=1}^n \omega_{k_i} |\Psi_n\rangle, \quad (1.92)$$

a qual demonstra o teorema quando se leva em conta (1.41). \square

Resta-nos ainda determinar a forma explícita do funcional associado ao auto valor E_n . No entanto, observe que a equação (1.67) é invariante sobre a reflexão ($\phi \rightarrow -\phi$), ou seja se $\Omega[\phi]$ é solução $\Omega[-\phi]$ também o é. Desta forma, as soluções para a equação (1.67) possuem paridade definida. De fato, dado um funcional $\Omega[\phi]$ que satisfaça (1.67), as extensões par (Ω_+) e ímpar (Ω_-), definidas

$$\Omega_+[\phi] \equiv \frac{1}{2} (\Omega[\phi] + \Omega[-\phi]), \quad (1.93a)$$

$$\Omega_-[\phi] \equiv \frac{1}{2} (\Omega[\phi] - \Omega[-\phi]), \quad (1.93b)$$

também satisfazem (1.67). Desta forma, a solução geral para o problema fica expressa em termos da combinação linear

$$\Omega[\phi] = \eta_1 \Omega_+[\phi] + \eta_2 \Omega_-[\phi]. \quad (1.94)$$

Assim sendo, abandonaremos os subíndices + e - e procuraremos por soluções com paridades definidas, tais que soluções pares descrevam estados de ordem n par e soluções ímpares descrevam estados de ordem n ímpar.

É possível encontrar uma relação entre estados de ordem par e estados de ordem ímpar, explicitamente uma relação entre Ω_n e Ω_{n-1} , por intermédio do operador criação (1.57a). Basta aplicá-lo ao estado

$$\Psi_{n-1}[\phi] = \Psi_0[\phi] \Omega_{n-1}[\phi], \quad (1.95)$$

o que gera

$$\begin{aligned} \Psi_n[\phi] &= \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^3 2\omega_{k_n}}} \int d^3x e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \left[\omega_{k_n} \phi(\vec{x}) - \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \right] \Psi_{n-1}[\phi] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^3 2\omega_{k_n}}} \left[\omega_{k_n} \phi(\vec{k}_n) \Psi_{n-1}[\phi] - \int d^3x e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \frac{\delta \Psi_{n-1}[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} \right]. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Agora

$$\frac{\delta \Psi_{n-1}[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} = \Omega_{n-1}[\phi] \frac{\delta \Psi_0[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} + \Psi_0[\phi] \frac{\delta \Omega_{n-1}[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} \quad (1.97)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_{n-1}[\phi] \int d^3x e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \frac{\delta \Psi_0[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} &= -\Psi_{n-1}[\phi] \int d^3x e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \int d^3z \phi(\vec{z}) G(\vec{x}, \vec{z}) \\ &= -\Psi_{n-1}[\phi] \int d^3x e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \int d^3z \phi(\vec{z}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{z})} \\ &= -\Psi_{n-1}[\phi] \int d^3z \phi(\vec{z}) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{z}} \int d^3k \omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_n) \end{aligned}$$

$$= -\omega_{k_n} \phi(\vec{k}_n) \Psi_{n-1}[\phi]. \quad (1.98)$$

Então,

$$\Psi_n[\phi] = \sqrt{\frac{2\omega_{k_n}}{n(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_n) \Psi_{n-1}[\phi] - \frac{\Psi_0[\phi]}{\sqrt{n(2\pi)^3 2\omega_{k_n}}} \int d^3x e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \frac{\delta \Omega_{n-1}}{\delta \phi(\vec{x})}, \quad (1.99)$$

o que invocando mais uma vez (1.95) implica

$$\Omega_n[\phi] = \sqrt{\frac{2\omega_{k_n}}{n(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_n) \Omega_{n-1}[\phi] - \frac{1}{\sqrt{n(2\pi)^3 2\omega_{k_n}}} \int d^3x e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \frac{\delta \Omega_{n-1}[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})}. \quad (1.100)$$

Repare que nesta equação vemos explicitamente que o primeiro termo do lado direito é o responsável por elevar a potência do polinômio em $\phi(\vec{k})$ enquanto o termo em derivada é o único responsável pela criação de deltas novas na solução. Como consequência deste fato, todos os termos em deltas devem aparecer acrescidos de um sinal negativo e o único termo que não possuirá uma delta é o termo que determina a ordem da solução.

Rapidamente já podemos especificar o funcional $\Omega_3[\phi]$ correspondente ao terceiro estado excitado,

$$\begin{aligned} \Omega_3[\phi] = & \frac{1}{\sqrt{3!}} \left[\sqrt{\frac{2\omega_{k_3}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_3) \sqrt{\frac{2\omega_{k_2}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_2) \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) \right. \\ & - \sqrt{\frac{2\omega_{k_3}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_3) \delta^{(3)}(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) - \sqrt{\frac{2\omega_{k_2}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_2) \delta^{(3)}(\vec{k}_3 + \vec{k}_1) \\ & \left. - \sqrt{\frac{2\omega_{k_1}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}_3 + \vec{k}_2) \right], \end{aligned} \quad (1.101)$$

apenas com base nas considerações feitas acima. O importante é perceber que a função deve ser simétrica sobre troca $\vec{k}_i \Leftrightarrow \vec{k}_j, i \neq j$. Isto implica para um estado n , o seu segundo termo, ou seja, o termo de ordem $n - 2$ terá

$$C_{2,2}^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} \quad (1.102)$$

elementos diferentes para garantir a simetria pelas trocas em \vec{k} . No geral, o funcional de ordem n terá no termo m , que possui $2(m-1)$ vetores de onda distribuídos em deltas,

$$C_{2(m-1),2(m-1)}^n = \frac{n!}{(2m-2)!(n-2m-2)!} \quad (1.103)$$

elementos distintos. Em particular, $n = 3$ e $m = 2$ implica $C_{2,2}^3 = 3$ que é exatamente o número de elementos do segundo termo do funcional $\Omega_3[\phi]$.

A simetria aliada à paridade definida das soluções demanda o aparecimento das deltas de Dirac em termos de ordem mais baixa. Ou seja, o termo de ordem $n - 2$ em $\phi(\vec{k})$ deve possuir uma delta de Dirac; já o termo de ordem $n - 4$ deve possuir duas deltas de Dirac, visto que uma delta depende de dois números de onda. Note que termos de ordem $n - 1$ ou $n - 3$ não existem devido ao funcional apresentar paridade definida.

Desta forma, o *ansatz* de solução geral será

$$\begin{aligned} \Omega_n[\phi] = & \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \\ + & \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} \left[\prod_{m=2}^{n \text{ ou } n-2} (-1)^{m/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n-m+2} + \vec{k}_{n-m+1}) \prod_{j=1}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right], \end{aligned} \quad (1.104)$$

na qual a soma sobre $C(\vec{k})$ denota soma sobre todas as combinações possíveis para todos os n vetores de onda. O papel desta soma é preservar a simetria sobre a troca $\vec{k}_i \Leftrightarrow \vec{k}_j, i \neq j$.

É importante ressaltar que o índice m varia apenas entre os pares, e vai até n caso a ordem do estado seja par ou até $n - 2$ caso a ordem do estado seja ímpar, justamente para preservar a paridade do funcional.

Apesar da forma complicada, este funcional apenas diz que ao prosseguir para o termo de ordem mais baixa deve-se incorporar os \vec{k} 's que sobram em deltas e simetrizar totalmente o dito termo.

Teorema 2: O autovetor da equação

$$-\frac{1}{2} \int d^3x \frac{\delta^2 \Omega_n[\phi]}{\delta \phi^2(\vec{x})} + \int d^3z \phi(\vec{z}) \int d^3x G(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\delta \Omega_n[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} = E_n \Omega_n[\phi] \quad (1.105)$$

é dado pelo funcional (1.104)

Prova:

Utilizaremos o método de indução completa na equação (1.100), uma vez que esta equação é uma consequência direta de (1.105), quando se expressam seus autovetores como aplicação do produto de operadores criação. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Omega_n[\phi]}{\delta \phi(\vec{x})} = & \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{2\omega_{k_i}}{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{x}} \prod_{i=1, i \neq j}^n \sqrt{\frac{2\omega_{k_i}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_i) \\ - & \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} \left[\prod_{m=2}^{n \text{ ou } n-2} (-1)^{m/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n-m+2} + \vec{k}_{n-m+1}) \sum_{i=1}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_i}}{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{x}} \right. \\ \times & \left. \prod_{j=1, i \neq j}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right]. \end{aligned} \quad (1.106)$$

O que implica

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_{n+1}}}} \int d^3x e^{i\vec{k}_{n+1}\cdot\vec{x}} \frac{\delta\Omega_n[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} = -\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{j=1}^n \delta^{(3)}(\vec{k}_j + \vec{k}_{n+1}) \prod_{i=1, i\neq j}^n \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \\
 & + \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} \left[\prod_{m=2}^{n \text{ ou } n-2} (-1)^{m/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n-m+2} + \vec{k}_{n-m+1}) \sum_{i=1}^{n-m} \delta^{(3)}(\vec{k}_i + \vec{k}_{n+1}) \prod_{j=1, i\neq j}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right]. \tag{1.107}
 \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito de (1.107) contém apenas uma delta, ou seja, é o termo de ordem $(n+1) - 2 = n - 1$. De fato,

$$-\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{j=1}^n \delta^{(3)}(\vec{k}_j + \vec{k}_{n+1}) \prod_{i=1, i\neq j}^n \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) = -\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n+1} + \vec{k}_n) \prod_{j=1}^{n-1} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j). \tag{1.108}$$

Note que a soma é sobre as combinações de \vec{k}_n e, portanto não há neste termo o elemento $\phi(\vec{k}_{n+1})$. Já o segundo termo, possuirá sempre duas deltas, uma vez que o elemento $\phi(\vec{k}_{n+1})$ não está presente. Ou seja, tem que corresponder aos termo de ordem $m \geq 4$. De fato,

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} \left[\prod_{m=2}^{n \text{ ou } n-2} (-1)^{m/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n-m+2} + \vec{k}_{n-m+1}) \sum_{i=1}^{n-m} \delta^{(3)}(\vec{k}_i + \vec{k}_{n+1}) \prod_{j=1, i\neq j}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right] \\
 & = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} \left[\prod_{m=4}^{n \text{ ou } n-2} (-1)^{(m-2)/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n+1} + \vec{k}_{n-m+4}) \delta^{(3)}(\vec{k}_{n-m+3} + \vec{k}_{n-m+2}) \prod_{j=1}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right] \tag{1.109}
 \end{aligned}$$

Agora a soma de (1.108) e (1.109) implica

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_{n+1}}}} \int d^3x e^{i\vec{k}_{n+1}\cdot\vec{x}} \frac{\delta\Omega_n[\phi]}{\delta\phi(\vec{x})} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} \left[\prod_{m=2}^{n+1 \text{ ou } n-1} (-1)^{m/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n+1} + \vec{k}_{n-m+2}) \prod_{j=1}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right]. \tag{1.110}
 \end{aligned}$$

Entretanto, \vec{k}_{n+1} ainda não entra na combinação. Para solucionar isto, devemos olhar o primeiro termo de (1.99), explicitamente,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\omega_{k_{n+1}}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_{n+1}) \Omega_n[\phi] &= \prod_{j=1}^{n+1} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \\ + \sqrt{\frac{2\omega_{k_{n+1}}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_{n+1}) \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{C(\vec{k}_n)} &\left[\prod_{m=2}^{n \text{ ou } n-2} (-1)^{m/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n-m+2} + \vec{k}_{n-m+1}) \prod_{j=1}^{n-m} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right], \end{aligned} \quad (1.111)$$

onde o termo $\phi(\vec{k}_{n+1})$ não pode entrar na soma sobre as combinações, pois não aparecem seus termos em delta que estão totalmente contidos em (1.110). Portanto a solução do problema se dá ao somar (1.110) e (1.111)

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1}[\phi] &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \prod_{j=1}^{n+1} \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \\ + \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \sum_{C(\vec{k}_{n+1})} &\left[\prod_{m=2}^{n+1 \text{ ou } n-1} (-1)^{m/2} \delta^{(3)}(\vec{k}_{n-m+3} + \vec{k}_{n-m+2}) \right. \\ \times \prod_{j=1}^{n-m+1} &\left. \sqrt{\frac{2\omega_{k_j}}{(2\pi)^3}} \phi(\vec{k}_j) \right] \end{aligned} \quad (1.112)$$

o que completa a demonstração do teorema. \square

Capítulo 2

O campo eletromagnético.

O campo escalar real livre serviu para o entendimento do processo de quantização de uma teoria de campos quando formulada na descrição de Schrödinger. Nosso desejo agora é ilustrar as vantagens da dita descrição quando o objetivo é o de quantizar preservando as simetrias locais da teoria. O campo eletromagnético serve como protótipo realístico visando este objetivo.

2.1 Formulação clássica

O campo eletromagnético é descrito por um campo vetorial de massa nula $A^\mu(x)$ cuja dinâmica, na ausência de interações, é descrita pela ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

na qual $F^{\mu\nu}$ é o tensor antissimétrico, denominado tensor de campo

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.2)$$

denominado tensor de campo eletromagnético. A peculiaridade desta ação é sua invariância sob transformações locais

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \quad (2.3)$$

denominadas transformações de calibres locais.

Parte das equações de Maxwell derivam de (2.1)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\nu)} = -F_{\mu\nu}, \quad (2.4b)$$

que após serem substituídas em (1.2) dão

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Enquanto o restante surge da identidade de Bianchi

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} \equiv 0 \quad (2.6)$$

que é uma consequência direta da estrutura do tensor $F^{\mu\nu}$ ¹.

Utilizando as definições

$$E^i \equiv -F^{0i}, \quad B^i \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}, \quad (2.7)$$

e escolhendo $\nu = 0$ na equação (2.5), encontramos

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.8)$$

que é a Lei de Gauss. Mais ainda, a substituição $\nu = k$ na mesma equação nos conduz à lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \partial_0 \vec{E}. \quad (2.9)$$

Quanto a identidade de Bianchi, ao especificarmos $\alpha = 0$ obtemos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.10)$$

enquanto que a restrição $\alpha = k$ leva à lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_0 \vec{B}. \quad (2.11)$$

Procuramos agora o Hamiltoniano do modelo visando obter sua contrapartida quântica. Os momenta canônicos conjugados π^μ emergem da definição

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = \partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0. \quad (2.12)$$

Observe que

$$\Phi_1(\vec{x}) \equiv \pi^0(\vec{x}) \approx 0, \quad (2.13)$$

o que sinaliza a presença de um vínculo primário². O Hamiltoniano canônico resulta

$$H_C = \int d^3x (\pi_j \partial^0 A^j - \mathcal{L}) = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^j \pi_j + \pi_j \partial^j A^0 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right), \quad (2.14)$$

o qual após uma integração por partes pode ser reformulado como

$$H_C = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^j \pi_j - A^0 \partial_j \pi^j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right). \quad (2.15)$$

Portanto o Hamiltoniano total é

$$H_T = H_C + \int d^3x \zeta(\vec{x}) \Phi_1(\vec{x}), \quad (2.16)$$

¹ ver (2.2).

² o sinal de igualdade fraca sendo utilizado no sentido de Dirac[1].

no qual $\zeta(\vec{x})$ é um multiplicador de Lagrange indeterminado.

A equação de movimento obedecida pelo objeto composto $g(A^\mu, \pi_\mu)$ é

$$\dot{g} \approx [g, H_T]_{PB}. \quad (2.17)$$

Por outro lado o colchete de Poisson entre duas funcionais arbitrárias é definido pela expressão

$$[\Lambda_1, \Lambda_2]_{PB} \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta \Lambda_1}{\delta A^\mu(\vec{x})} \frac{\delta \Lambda_2}{\delta \pi_\mu(\vec{x})} - \frac{\delta \Lambda_2}{\delta A^\mu(\vec{x})} \frac{\delta \Lambda_1}{\delta \pi_\mu(\vec{x})} \right]. \quad (2.18)$$

Em particular, os colchetes básicos resultam

$$[A^\alpha(\vec{x}), \pi_\beta(\vec{y})]_{PB} = \delta_\beta^\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.19a)$$

$$[A^\alpha(\vec{x}), A^\beta(\vec{y})]_{PB} = [\pi_\alpha(\vec{x}), \pi_\beta(\vec{y})]_{PB} = 0. \quad (2.19b)$$

Pesquisaremos as consequências de exigir a persistência do vínculo primário,

$$\dot{\Phi}_1(\vec{x}) = [\Phi_1(\vec{x}), H_T(\vec{x})]_{PB} = -\frac{\delta H_T}{\delta A^0(\vec{x})} = \partial_x^j \pi_j(\vec{x}) \approx 0. \quad (2.20)$$

Utilizamos a equação (2.13) para calcular (2.20). Salientamos que o vínculo secundário encontrado,

$$\Phi_2(\vec{x}) \equiv \partial_x^j \pi_j(\vec{x}) \approx 0 \quad (2.21)$$

é a lei de Gauss. É simples demonstrar que a persistência no tempo de Φ_2 leva a identidade $\partial_x^i \partial_x^j F_{ij} \equiv 0$, o que indica que o algoritmo de Dirac[1] termina e toda a estrutura de vínculos foi detectada. Quanto a sua classificação, as seguintes relações são satisfeitas

$$[\Phi_1(\vec{x}), \Phi_1(\vec{y})]_{PB} = 0, \quad (2.22a)$$

$$[\Phi_1(\vec{x}), \Phi_2(\vec{y})]_{PB} = 0, \quad (2.22b)$$

$$[\Phi_2(\vec{x}), \Phi_2(\vec{y})]_{PB} = 0. \quad (2.22c)$$

e assim concluímos que todos os vínculos são de primeira classe e portanto a eletrodinâmica é uma teoria de calibre.

A construção do Hamiltoniano estendido

$$H_E = H_T + \int d^3x \zeta_2 \Phi_2 = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^j \pi_j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \zeta_1 \Phi_1 + \zeta_2' \Phi_2 \right), \quad (2.23)$$

no qual $\zeta_2'(\vec{x}) = \zeta_2(\vec{x}) - A^0(\vec{x})$ é um outro multiplicador de Lagrange indeterminado que possibilita redefinir o Hamiltoniano canônico na forma

$$H_C \equiv \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^j \pi_j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right). \quad (2.24)$$

2.2 Formulação quântica

Novamente, as quantidades físicas utilizadas na dinâmica clássica aqui são promovidas a operadores auto-adjuntos que satisfazem a álgebra de comutação

$$[\hat{A}^\alpha(\vec{x}), \hat{\pi}_\beta(\vec{y})] = i\delta_\beta^\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.25a)$$

$$[\hat{A}^\alpha(\vec{x}), \hat{A}^\beta(\vec{y})] = [\hat{\pi}_\alpha(\vec{x}), \hat{\pi}_\beta(\vec{y})] = 0, \quad (2.25b)$$

A dinâmica é carregada pelo vetor de estado $|\Psi(t)\rangle$ que obedece à equação de Schrödinger

$$\hat{H}_C |\Psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle \quad (2.26)$$

junto às restrições

$$\hat{\Phi}_1(\vec{x}) |\Psi(t)\rangle = \hat{\pi}_0(\vec{x}) |\Psi(t)\rangle = 0, \quad (2.27a)$$

$$\hat{\Phi}_2(\vec{x}) |\Psi(t)\rangle = \partial_x^j \hat{\pi}_j(\vec{x}) |\Psi(t)\rangle = 0. \quad (2.27b)$$

Esta é a metodologia proposta por Dirac para implementar a quantização da teoria preservando em sua totalidade a liberdade de calibre.

Encaramos agora o problema de autovalores do operador \hat{H}_C . Denominaremos $\{|E_j\rangle\}$ o conjunto dos seus autovetores e

$$\Psi_j[A] \equiv \langle A | E_j \rangle \quad (2.28)$$

as correspondentes funcionais. Na representação em que A^μ é diagonal e, portanto,

$$\hat{\pi}^\nu(\vec{x}) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta A_\nu(\vec{x})}, \quad (2.29)$$

a equação de autovalores é

$$\int d^3x \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta A^k(\vec{x}) \delta A^k(\vec{x})} + \frac{1}{4} F^{ik}(\vec{x}) F_{ik}(\vec{x}) \right) \Psi_j[A] = E_j \Psi_j[A], \quad (2.30)$$

com os estados sujeitos as relações

$$\frac{\delta \Psi_j[A]}{\delta A^0(\vec{x})} = 0, \quad (2.31a)$$

$$\partial_x^k \frac{\delta \Psi_j[A]}{\delta A^k(\vec{x})} = 0. \quad (2.31b)$$

As equações (2.31) impõem que $\Psi_j[A]$ não dependa de $A^0 = A^0(\vec{x})$ e dependa apenas das componentes transversais do vetor \vec{A} .

2.3 O estado fundamental

Conjecturamos que o funcional de vácuo $\Psi_0 = \Psi_0[\vec{A}]$ tenha a seguinte forma

$$\Psi_0[\vec{A}] = \exp \left(G[\vec{A}] \right), \quad (2.32)$$

tal que

$$G[\vec{A}] = -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3z A^i(\vec{x}) A^j(\vec{z}) G_{ij}(\vec{x}, \vec{z}) \quad (2.33)$$

e

$$G_{ij}(\vec{x}, \vec{z}) = (-\delta_{ij} \nabla_x^2 + \partial_i^x \partial_j^x) I(\vec{x} - \vec{z}), \quad (2.34)$$

com

$$I(\vec{x} - \vec{z}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{z})}}{k}, \quad k \equiv |\vec{k}|. \quad (2.35)$$

A integral definida em (2.35) pode ser calculada assumindo que $\vec{x} - \vec{z}$ é ao longo do eixo k^3 no espaço \vec{k}

$$I(\vec{x} - \vec{z}) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k} \int_0^{+\infty} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{z}| \cos \theta}}{k}. \quad (2.36)$$

Estamos utilizando coordenadas esféricas no espaço \vec{k} . Procedendo com o cálculo das integrais[5] de (2.36) encontramos

$$I(\vec{x} - \vec{z}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}|} \int_0^{+\infty} du \sin u. \quad (2.37)$$

O sentido da integral definida em (2.37) é dado ao atribuir uma função $e^{-\alpha u}$ multiplicando $\sin u$ no limite em que α vai a zero.

$$\int_0^{+\infty} du \sin u = \int_0^{+\infty} du \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha u} \sin u = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} du e^{-\alpha u} \sin u = 1. \quad (2.38)$$

Então,

$$I(\vec{x} - \vec{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}|^2}. \quad (2.39)$$

Substituindo (2.39) em (2.34) encontramos

$$G_{ij}(\vec{x}, \vec{z}) = -\frac{2}{\pi^2 R^4} \left(\delta_{ij} - 2\tilde{R}^i \tilde{R}^j \right), \quad R \equiv |\vec{x} - \vec{z}| \text{ e } \tilde{R}^i \equiv \frac{R^i}{R}. \quad (2.40)$$

Feito isto, exploraremos a verificação do vínculo descrito pela lei de Gauss (2.31b). Portanto³

³ Repare que $G_{ij}(\vec{x}, \vec{z}) = G_{ji}(\vec{x}, \vec{z})$ e $G_{ij}(\vec{x}, \vec{z}) = G_{ij}(\vec{z}, \vec{x})$.

$$\frac{\delta\Psi_0}{\delta A^j(\vec{x})}[\vec{A}] = \Psi_0[\vec{A}] \int d^3z G_{jk}(\vec{x}, \vec{z}) A^k(\vec{z}) \quad (2.41)$$

implica que

$$\partial_x^j \frac{\delta\Psi_0[\vec{A}]}{\delta A^j(\vec{x})} = -\Psi_0[\vec{A}] \int d^3z \partial_x^j G_{jk}(\vec{z}, \vec{x}) A^k(\vec{z}). \quad (2.42)$$

Como se vê de (2.40)

$$\partial_x^j G_{jk} = 0, \quad (2.43)$$

o que verifica que o vínculo imposto pela lei de Gauss é satisfeito. Quanto ao vínculo imposto por (2.31a), a não dependência da coordenada $A^0(\vec{x})$ no tensor $G_{ij}(\vec{x}, \vec{x}')$ garante sua realização.

Por fim, determinamos o autovalor correspondente substituindo a solução $\Psi_0[\vec{A}]$ em (2.30). Calculamos

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \frac{\delta^2\Psi_0[\vec{A}]}{\delta A^j(\vec{x})\delta A^j(\vec{x})} = -\frac{1}{2}\Psi_0[\vec{A}] \int d^3y G_{ji}(\vec{x}, \vec{y}) A^i(\vec{y}) \int d^3z G_{jk}(\vec{x}, \vec{z}) A^k(\vec{z}) \\ & + \frac{1}{2}\Psi_0[\vec{A}] G_{jj}(\vec{x}, \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

e, logo após, substituímos em (2.30)

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y G_{ji}(\vec{x}, \vec{y}) A^i(\vec{y}) \int d^3z G_{jk}(\vec{x}, \vec{z}) A^k(\vec{z}) + \int d^3x F^{ij}(\vec{x}) F_{ij}(\vec{x}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x G_{jj}(\vec{x}, \vec{x}) - E_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Observe que por simples contagem de potências da variável A podemos determinar as igualdades

$$\frac{1}{2} \int d^3x G_{jj}(\vec{x}, \vec{x}) = E_0 \quad (2.46)$$

e

$$\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y G_{ji}(\vec{x}, \vec{y}) A^i(\vec{y}) \int d^3z G_{jk}(\vec{x}, \vec{z}) A^k(\vec{z}) = - \int d^3x F^{ij}(\vec{x}) F_{ij}(\vec{x}). \quad (2.47)$$

De acordo com a equação (2.46) a energia do estado fundamental resulta

$$E_0 = \int d^3x G_{jj}(\vec{x}, \vec{x}) = \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k = \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k, \quad (2.48)$$

que é conhecida como energia de ponto zero. Ela pode ser redefinida por meio do processo de renormalização

$$E'_0 \equiv E_0 - \delta^{(3)}(0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k \equiv 0, \quad (2.49)$$

no qual o autovalor renormalizado de energia E'_0 para o estado fundamental é nulo.

Capítulo 3

Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi implementar a quantização de teorias de campo utilizando a descrição de Schrödinger. A descrição torna-se recomendável quando o objetivo é quantizar preservando a liberdade de calibre. Isto exige restrições na construção do espaço físico, o qual fica definido por vínculos que atuam como condições sobre os estados. O método utilizado para o tratamento de sistemas vinculados foi desenvolvido por Dirac [1]. Entretanto, começamos por exemplificar o funcionamento da formulação no caso de um modelo simples tal como o campo escalar real. Daí em diante, nos limitamos a uma teoria de calibre realista: a eletrodinâmica de Maxwell.

No capítulo 1 estudamos o campo escalar livre. Determinamos o espectro de energia e momentum. Definimos operadores criação e destruição que possibilitaram uma maneira de encontrar estados excitados sem a necessidade de resolver cálculos pesados e trabalhosos provenientes das equações diferenciais funcionais. Foi verificado que os autovetores de energia também eram autovetores de momentum linear, o que comprova a consistência da solução encontrada, uma vez que os dois operadores fazem parte do conjunto maximal de observáveis compatíveis.

No capítulo 2 estudamos a solução para o estado de vácuo do campo eletromagnético. O foco foi utilizar a metodologia desenvolvida em [1] para tratar os vínculos de primeira classe existentes na teoria eletromagnética. Encontrou-se uma solução para o estado fundamental compatível com as restrições impostas pelos vínculos. Em presença de interações, a situação torna-se muito complicada haja visto que, por exemplo, não é possível implementar as restrições impostas pelos vínculos dentro da teoria de perturbações do tipo Rayleigh-Schrödinger.

De modo geral, conseguiu-se ter uma noção do como tratar a quantização na descrição de Schrödinger levando em conta a necessidade da preservação total da liberdade de calibre. O formalismo se mostra tratável em sistemas livres. No entanto, ainda resta saber se os cálculos podem ser realizados para modelos mais complexos, como por exemplo, campos interagentes. A inegável vantagem teórica constatada por Symanzik [2] pode ser compensada no tratamento dos desenvolvimentos relacionados a descrição funcional da teoria. No entanto, a formulação possibilita direta associação com sistemas não-relativísticos, o que facilita o entendimento e a interpretação dos resultados, bem como fornece maneiras de abordar e solucionar os problemas.

Bibliografia

- [1] P.A.M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Sciences, Yeshiva University, New York, 1964)
- [2] K.Symanzik, Nucl. Phys. B190, 1(1981).
- [3] B. Hatfield, *Quantum field theory of point particles and strings* (Frontiers in Physics, Westview Press, 1992).
- [4] R. Jackiw, *Topological investigations of quantized gauge theories* (Les Houches, France, 1983)
- [5] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, p.477, 3.893.1 (Academic Press, Inc., New York, 1980).