

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA INTERAÇÃO DE ESCOAMENTOS
TRIDIMENSIONAIS DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS E
ESTRUTURAS DEFORMÁVEIS USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

PAULO ROBERTO DE FREITAS TEIXEIRA

Tese apresentada junto ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Porto Alegre
Junho de 2001

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Prof. Armando Miguel Awruch
Orientador

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Banca Examinadora:

Prof. Horácio Antônio Vielmo
D.Sc. – UFSC

Prof. João Luiz Filgueiras de Azevedo
Ph.D. – Stanford University/USA

Prof^a. Maria Angela Vaz dos Santos
Dr. – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Armando Miguel Awruch pela orientação, amizade e transmissão de valiosos conhecimentos.

À Universidade Federal do Rio Grande por permitir a minha liberação para a realização deste trabalho, particularmente aos colegas do Departamento de Materiais e Construção que entenderam a importância desta missão e que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Centro de Supercomputação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo uso dos seus equipamentos e pelo apoio incondicional dos seus funcionários.

Ao programa PICD/CAPES pelo apoio financeiro concedido.

“Para alcançar a vitória é preciso,
antes de tudo, acreditar nela”

Marechal Foch

Aos meus filhos Renan e Luiza e à
minha esposa Carla pelo apoio, carinho e
dedicação, principalmente nas horas mais
difíceis desta jornada.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 OS PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA.....	1
1.2 A DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPUTACIONAL.....	4
1.3 A DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL.....	7
1.4 SÍNTESES DOS OBJETIVOS E DO CONTEÚDO DO PRESENTE TRABALHO....	11
2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS.....	13
2.1 A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (ALE).....	13
2.2 AS EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O ESCOAMENTO DE FLUIDOS.....	14
2.3 O ALGORITMO PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS.....	16
2.3.1 O método de Taylor-Galerkin de dois passos.....	16
2.3.2 A discretização espacial pela técnica de Galerkin.....	17
2.3.3 Amortecimento numérico da solução.....	20
2.3.4 Condições de contorno.....	21
2.4 O ALGORITMO PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.....	22
2.4.1 Discretização temporal das equações governantes.....	23
2.4.2 A discretização espacial.....	24
2.4.3 A equação da energia para os escoamentos de fluidos incompressíveis.....	27
2.4.4 Condições de contorno.....	28
3 A TÉCNICA DE AVANÇO NO TEMPO UTILIZANDO SUBCICLOS.....	29
3.1 INTRODUÇÃO.....	29
3.2 O PROCEDIMENTO DE PASSO DE TEMPO VARIÁVEL.....	30
3.3 OS INDICADORES DE CONTROLE DO PASSO DE TEMPO.....	33
3.4 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO.....	35
4 A ATUALIZAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS.....	37
4.1 AS TÉCNICAS DE MOVIMENTO DE MALHA.....	37
4.2 O MÉTODO DE MOVIMENTO DE MALHA DO PRESENTE TRABALHO.....	41
5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PLACAS E CASCAS.....	44
5.1 A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA DA MECÂNICA DO CONTÍNUO COMPUTACIONAL.....	44
5.1.1 Tensores de tensão e deformação.....	44
5.1.2 As equações governantes na formulação lagrangeana atualizada.....	46

5.2 O ELEMENTO DE PLACA DELGADA TRIANGULAR.....	48
5.3 A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA PARA DOIS ELEMENTOS DE PLACA DELGADA.....	52
5.4 A SOLUÇÃO ITERATIVA DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO INCREMENTAIS.....	57
6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO- ESTRUTURA.....	61
6.1 INTRODUÇÃO.....	61
6.2 O ESQUEMA DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA PARTICIONADO.....	62
7 A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	67
7.1 RECURSOS COMPUTACIONAIS.....	67
7.2 ASPECTOS SOBRE OTIMIZAÇÃO COMPUTACIONAL.....	67
7.3 A ESTRUTURA E A OTIMIZAÇÃO DOS CÓDIGOS.....	70
7.4 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS PROGRAMAS.....	73
7.4.1 Análise de desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos compressíveis.....	74
7.4.2 Análise de desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos incompressíveis.....	75
7.4.3 Análise de desempenho do algoritmo da estrutura.....	76
7.4.4 Análise de desempenho do algoritmo de interação fluido-estrutura.....	77
8 APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	79
8.1 ESTRUTURA.....	79
8.1.1 Viga engastada-livre sob flexão.....	79
8.1.2 Viga bi-engastada sob carga concentrada.....	81
8.1.3 Placa simplesmente apoiada com carga distribuída.....	84
8.1.4 Placa cilíndrica com carga concentrada.....	88
8.1.5 Calota esférica sob carga concentrada.....	90
8.2 ESCOAMENTOS DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS.....	94
8.2.1 Escoamento sobre uma esfera utilizando subciclos.....	95
8.2.2 Escoamento subsônico e transônico sobre o NACA0012.....	101
8.2.3 Escoamento sobre o VLS.....	108
8.2.3.1 Escoamento supersônico, Mach=2.0.....	112
8.2.3.2 Escoamento transônico, Mach=0.9.....	116
8.3 ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.....	120

8.3.1	Escoamento em uma cavidade.....	120
8.3.2	Escoamento em um canal com expansão.....	124
8.3.3	Escoamento sobre uma esfera.....	127
8.3.4	Escoamento sobre um prisma retangular em um canal.....	130
8.3.5	Onda solitária em um tanque retangular.....	135
8.4	INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA.....	152
8.4.1	Escoamento sobre aerofólio NACA0012 com movimento oscilatório.....	152
8.4.2	Escoamento sobre uma placa plana.....	158
8.4.3	Painel sujeito aos vórtices de um prisma retangular.....	170
8.4.4	Escoamento do ar sobre uma membrana inflada.....	178
8.4.5	Escoamento sobre um cone.....	188
9	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	196
9.1	CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO.....	196
9.2	O ALGORITMO DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.....	197
9.3	A TÉCNICA DE SUBCICLOS.....	197
9.4	O ESQUEMA DE MOVIMENTO DE MALHA.....	198
9.5	O ALGORITMO DA ESTRUTURA.....	198
9.6	A SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA.....	199
9.7	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	199
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	202
	ANEXO A – MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS.....	218
	ANEXO B – EVITANDO AS RESTRIÇÕES DE BABUSKA-BREZZI.....	222
	ANEXO C – A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA PARA O ELEMENTO GPL-T9.....	224
	ANEXO D – A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA PARA O ELEMENTO DKT.....	230
	ANEXO E – A TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS PARA OS ELEMENTOS USADOS NA ANÁLISE DA ESTRUTURA.....	235

LISTA DE FIGURAS

1	Domínios em um meio contínuo.....	14
2	Atualização dos grupos de elementos e de nós para cada subciclo.....	31
3	Esquema do método de passo de tempo variável para três grupos de elementos.....	33
4	Um tetraedro pseudo-estrutural na malha do fluido.....	39
5	Coeficiente de difusão k em função da distância δ do corpo.....	40
6	Desenho esquemático do método de movimento de malha.....	42
7	Desenho esquemático do método simplificado de movimento de malha.....	43
8	Movimento de um corpo em um sistema de coordenadas cartesianas estacionárias.....	45
9	Esquema de um elemento de placa triangular.....	49
10	Graus de liberdade de membrana para o elemento de placa delgada.....	50
11	Graus de liberdade de flexão para o elemento de placa delgada.....	51
12	Deslocamentos de membrana no elemento.....	55
13	Fluxo de informação em uma malha com partição nodal implícita-explicita proposto por Belytschko e Mullen (1978).....	63
14	Algoritmo de interação fluido-estrutura particionado básico.....	65
15	Algoritmo de interação fluido-estrutura com subciclos.....	66
16	Malha colorida (<i>Mesh coloring</i>) da técnica de elementos disjuntos.....	73
17	Geometria do exemplo viga engastada-livre.....	79
18	Configurações da viga engastada-livre para alguns passos de carregamento.....	80
19	Deslocamentos da extremidade livre do exemplo viga engastada-livre.....	80
20	Malha do exemplo viga bi-engastada.....	81
21	Gráfico do deslocamento transversal no centro da viga w com a carga P	82
22	Contornos de deslocamento transversal e configuração deformada para as etapas de carga de 445 e 3115 N na análise estática não-linear do exemplo viga bi-engastada.....	82
23	Gráfico do deslocamento transversal no centro da viga com o tempo para a análise dinâmica linear no exemplo viga bi-engastada.....	83
24	Contornos do deslocamento transversal e configurações deformadas nos instantes 0.00125 s, 0.00350 s e 0.00425 s para a análise dinâmica não-linear de viga bi-engastada.....	84
25	Gráfico do deslocamento transversal no centro da viga com o tempo.....	84
26	Esquema, condições de contorno e malha do exemplo placa apoiada.....	85

27	Análise estática não-linear da placa: contornos do deslocamento transversal e configuração deformada da placa na sua etapa final de carga.....	86
28	Gráfico do parâmetro de carga K com a relação w/h para o exemplo placa apoiada.....	86
29	Contornos do deslocamento transversal e configurações deformadas para os instantes de tempo 0.004 s (a) e 0.009 s (b) na análise dinâmica não-linear do exemplo placa.	87
30	Deslocamento transversal no centro da placa com o tempo.....	88
31	Geometria do exemplo placa cilíndrica.....	88
32	Malha e condições de contorno para o exemplo placa cilíndrica.....	89
33	Exemplo placa cilíndrica: contornos do deslocamento transversal e configuração deformada na etapa final do carregamento.....	89
34	Gráfico da carga aplicada com o deslocamento transversal no centro da placa cilíndrica.....	90
35	Geometria da calota esférica.....	90
36	Malha e condições de contorno para o exemplo calota esférica.....	91
37	Exemplo calota esférica: contornos do deslocamento transversal e configuração da deformada na etapa final de carga.....	91
38	Gráfico da carga P com a relação w/H para o exemplo calota esférica.....	92
39	Gráfico de w/H com o tempo para uma análise linear do exemplo calota esférica.....	93
40	Gráfico de w/H com o tempo para uma análise não-linear do exemplo calota esférica.	93
41	Exemplo calota esférica: contornos do deslocamento transversal e configurações da deformada para os instantes de tempo (a) 100 μs e (b) 450 μs	94
42	Malha de elementos finitos para o exemplo esfera. (a) Vista geral e (b) detalhe da região frontal.....	95
43	Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usado o passo de tempo uniforme no exemplo esfera.....	97
44	Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usada a técnica de subciclos do primeiro algoritmo no exemplo esfera.....	98
45	Exemplo esfera: diferenças percentuais entre os resultados do primeiro algoritmo e de passo uniforme para (a) a massa específica e (b) a pressão.....	98
46	Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usada a técnica de subciclos do segundo algoritmo no exemplo esfera.....	99
47	Exemplo esfera: diferenças percentuais entre os resultados do segundo algoritmo e de passo de tempo uniforme para (a) a massa específica e (b) a pressão.....	99
48	Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usada a técnica de	

subciclos do terceiro algoritmo no exemplo esfera.....	100
49 Exemplo esfera: diferenças percentuais entre os resultados do terceiro algoritmo e de passo de tempo uniforme para (a) a massa específica e (b) a pressão.....	100
50 Exemplo NACA0012: esquema do domínio computacional e condições de contorno..	101
51 Malha não-estruturada no plano de simetria $z=0.0$ para o exemplo NACA0012. (a) Vista geral e (b) detalhe da região próxima ao corpo.....	102
52 Distribuição dos passos de tempo no domínio para o exemplo NACA0012. (a) Vista geral e (b) detalhe na região do perfil.....	103
53 Distribuições de (a) massa específica, (b) Mach e (c) coeficiente de pressão para o exemplo NACA0012 em regime subsônico.....	104
54 Gráficos do (a) número de Mach e do (b) coeficiente de pressão na superfície do NACA0012 em regime subsônico.....	104
55 Comparação de ρ_0 na linha de estagnação com Zienkiewicz <i>et al.</i> (1995) para o exemplo NACA0012 em regime subsônico.....	105
56 Distribuições de (a) massa específica, (b) Mach e (c) coeficiente de pressão para o exemplo NACA0012 em regime transônico.....	107
57 Gráficos do (a) número de Mach e do (b) coeficiente de pressão na superfície do NACA0012 em regime transônico.....	107
58 Resíduo da massa específica em relação ao número de iterações de tempo para o exemplo NACA0012 em regime transônico.....	108
59 Vista geral do VLS.....	109
60 Malha 1 para o exemplo VLS. (a) Vista geral, (b) detalhe da parte frontal do corpo, (c) detalhe da região dos propulsores laterais.....	110
61 Malha 2 para o exemplo VLS. (a) Vista geral, (b) e (c) detalhes da parte frontal do corpo, (d) detalhe da região dos propulsores laterais.....	111
62 Condições de contorno e de escoamento não-perturbado para o exemplo VLS.....	112
63 Distribuição do coeficiente de pressão para o exemplo VLS em regime supersônico. (a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais.....	113
64 Distribuição do número de Mach para o exemplo VLS em regime supersônico. (a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais.....	114
65 Distribuição do coeficiente de pressão C_p na superfície do corpo central com o plano de simetria xy para o exemplo VLS em regime supersônico. (a) Em todo o corpo, (b) na parte frontal e (c) na parte posterior.....	115
66 Resíduo da massa específica ao longo do tempo para o exemplo VLS em regime	

supersônico.....	116
67 Distribuição do coeficiente de pressão para o exemplo VLS em regime subsônico. (a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais.....	117
68 Distribuição do número de Mach para o exemplo VLS em regime subsônico. (a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais.....	118
69 Distribuição do coeficiente de pressão C_p na superfície do corpo central com o plano de simetria xy para o exemplo VLS em regime transônico. (a) Em todo o corpo, (b) na parte frontal, (c) na parte posterior.....	119
70 Geometria e condições de contorno do exemplo cavidade.....	120
71 Malha de elementos finitos do exemplo cavidade.....	121
72 Isolinhas de pressão para o exemplo cavidade.....	122
73 Vetores de velocidade e linhas de corrente do escoamento para o exemplo cavidade...	122
74 Perfis das componentes de velocidade (a) v_1 e (b) v_2 nas linhas médias vertical e horizontal da cavidade, respectivamente.....	123
75 Isolinhas de temperatura para o exemplo cavidade.....	123
76 Perfis de temperatura nas linhas médias vertical e horizontal da cavidade.....	124
77 Fluxo de calor na parede superior da cavidade em termos do gradiente $\partial T/\partial y$	124
78 Geometria e condições de contorno do exemplo canal com expansão.....	125
79 Malha de elementos finitos para o exemplo canal com expansão.....	125
80 Isolinhas de pressão para o exemplo canal com expansão.....	126
81 Linhas de corrente na região próxima ao degrau para o exemplo canal com expansão.	126
82 Perfis da componente de velocidade axial v_1 e os valores do comprimento de recolamento para o exemplo canal com expansão.....	127
83 Malha de elementos finitos para o exemplo esfera.....	128
84 Resíduos do módulo da velocidade e da pressão para o exemplo esfera.....	128
85 Distribuição de pressão no exemplo esfera.....	129
86 Linhas de corrente no exemplo esfera.....	129
87 Distribuição de temperatura na região próxima à esfera.....	130
88 Coeficientes de pressão para o exemplo esfera.....	130
89 Geometria do exemplo prisma retangular.....	131
90 Condições de contorno e propriedades do fluido para o exemplo prisma retangular.....	131
91 Malha para o exemplo prisma retangular.....	132
92 Resultados das (a) linhas de corrente, (b) isobáricas e (c) isotérmicas para o exemplo prisma retangular.....	133

93	Gráficos (a) do número de Nusselt local Nu_x e (b) do coeficiente de fricção C_{fx} para o exemplo prisma retangular.....	134
94	Geometria e condições de contorno do exemplo onda solitária.....	136
95	Condições iniciais do exemplo onda solitária com $H=0.5$. (a) Configuração da malha, (b) distribuição da componente de velocidade v_1 , (d) distribuição da componente de velocidade v_2 , (d) distribuição de pressão.....	137
96	Condições iniciais do exemplo onda solitária com $H=2.0$. (a) Configuração da malha, (b) distribuição da componente de velocidade v_1 , (c) distribuição da componente de velocidade v_2 , (d) distribuição de pressão.....	138
97	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=15.18$ s obtidos pelo algoritmo ALG1.....	142
98	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=30.26$ s obtidos pelo algoritmo ALG1.....	143
99	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=45.29$ s obtidos pelo algoritmo ALG1.....	144
100	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=60.34$ s obtidos pelo algoritmo ALG1.....	145
101	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=8.09$ s obtidos pelo algoritmo ALG2.....	146
102	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=15.83$ s obtidos pelo algoritmo ALG2.....	147
103	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=23.65$ s obtidos pelo algoritmo ALG2.....	148
104	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=31.44$ s obtidos pelo algoritmo ALG2.....	149
105	Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das	

componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=23.64$ s obtidos pelo algoritmo ALG1.....	150
106 Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=32.00$ s obtidos pelo algoritmo ALG3.....	151
107 Corte da malha não-estruturada do exemplo NACA0012 oscilante no plano de simetria $z=0.0$. (a) Vista geral, (b) detalhe da região próxima ao corpo.....	153
108 Distribuição de passos de tempo no domínio para o exemplo NACA0012 oscilante. (a) Vista geral e (b) detalhe na região do aerofólio.....	154
109 Resíduo da massa específica para o exemplo NACA0012 oscilante.....	154
110 Exemplo NACA0012 oscilante. (a) Isolinhas da massa específica, (b) isobáricas e (c) isolinhas de Mach para o regime permanente.....	155
111 Coeficiente de pressão C_p ao longo do aerofólio NACA0012.....	156
112 Gráficos (a) do ângulo de ataque α versus coeficiente de sustentação C_L e (b) do número de ciclos $w_a t / 2\pi$ versus C_L	157
113 Exemplo NACA0012 oscilante: distribuição de pressão para os instantes (a) $t=12.544$ ($\alpha=2.525^\circ$) e (b) $t=40.768$ ($\alpha=-2.383^\circ$).....	158
114 Geometria e condições de contorno do exemplo placa plana.....	159
115 Malhas do exemplo placa plana. (a) Vista geral e (b) detalhe da malha 1 na região da placa. (c) Vista geral e (d) detalhe da malha 2 na região da placa.....	160
116 Valores ao longo do tempo para Mach=1.9, 2.0, 2.02 e 2.05 dos (a) coeficientes de sustentação C_L e dos (b) deslocamentos da placa em $x=0.35$ m.....	161
117 Comparação dos deslocamentos em $x=0.35$ m para Mach=1.9 (a) e 2.0 (b) obtidos pelo presente trabalho e por Rifai <i>et al.</i> (1999).....	163
118 Comparação dos deslocamentos em $x=0.35$ m obtidos pelo presente trabalho para Mach=2.0 e por Rifai <i>et al.</i> (1999) para Mach=1.98.....	163
119 Comparação entre os resultados das malhas 1 e 2 para Mach=2.0.....	164
120 Distribuições de (a) Mach e (b) pressão no domínio para um escoamento de Mach=2.0 e no instante de tempo $t=0.07$ s.....	164
121 Distribuições de (a) Mach e (b) pressão no domínio para um escoamento de Mach=2.0 e no instante de tempo $t=0.1$ s.....	165
122 Configurações da placa para Mach=2.0 e instantes de tempo $t=0.03$, 0.07 e 0.1s.....	165
123 Comparação dos deslocamentos em $x=0.35$ m entre as soluções linear e não-linear com Mach=2.3.....	166

124	Deslocamentos em $x=0.35m$ para $Mach=2.20$ e $n_{SF}=1, 5, 10$ e 20	167
125	Geometria e condições de contorno do exemplo painel sujeito a vórtices.....	170
126	Malha de elementos finitos para o domínio do fluido do exemplo painel sujeito a vórtices. (a) Vista geral e (b) detalhe na região próxima ao prisma e ao painel.....	171
127	Detalhe da malha da estrutura e do fluido no exemplo painel sujeito a vórtices.....	172
128	Coeficientes de sustentação C_L e de arrasto C_D no painel ao longo do tempo.....	173
129	Deslocamentos na extremidade livre e no centro do painel ao longo do tempo.....	173
130	Comparação entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e por Wall e Ramm (1998) para o deslocamento na extremidade do painel.....	174
131	Comparação entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e por Wall e Ramm (1998) para o deslocamento no centro do painel.....	174
132	Configurações da malha nos instantes (a) 3.58701 s, (b) 3.68301 s, (c) 3.765 s e (d) 3.85899 s para o exemplo painel sujeito a vórtices.....	175
133	Distribuições de pressão nos instantes (a) 3.58701 s, (b) 3.68301 s, (c) 3.765 s e (d) 3.85899 s para o exemplo painel sujeito a vórtices.....	176
134	Linhas de corrente nos instantes (a) 3.58701 s, (b) 3.68301 s, (c) 3.765 s e (d) 3.85899 s para o exemplo painel sujeito a vórtices.....	178
135	Detalhe dos vetores de velocidade no instante $t = 3.58701$ s para o exemplo painel sujeito a vórtices.....	178
136	Esquema do domínio e gráfico da velocidade v_{10} com o tempo para o exemplo membrana.....	179
137	Malha de elementos finitos para o exemplo membrana. (a) Vista geral e (b) detalhe da região próxima à membrana.....	180
138	Distribuição de pressão nos instantes (a) 1.5 s, (b) 3.0 s, (c) 4.5 s, (d) 6.0 s, (e) 7.5 s, (f) 9.0 s, (g) 10.5 s e (h) 12.0 s para o exemplo membrana.....	183
139	Vetores de velocidade nos instantes (a) 1.5 s, (b) 3.0 s, (c) 4.5 s, (d) 6.0 s, (e) 7.5 s, (f) 9.0 s, (g) 10.5 s e (h) 12.0 s para o exemplo membrana.....	185
140	Configurações da malha nos instantes (a) 1.5 s, (b) 3.0 s, (c) 4.5 s, (d) 6.0 s, (e) 7.5 s, (f) 9.0 s, (g) 10.5 s e (h) 12.0 s para o exemplo membrana.....	186
141	Vetores de velocidade nos instantes $t=0.25, 1.5, 3.0, 6.0, 7.5$ e 9.0 s obtidos por Argyris <i>et al.</i> para o exemplo membrana.....	187
142	Vetores de velocidade nos instantes $t = 10.5, 11.5$ e 12.0 s e distribuição de pressão nos instantes $t = 3.0, 7.5$ e 10.5 s obtidos por Argyris <i>et al.</i> para o exemplo membrana	187
143	Esquema do domínio computacional do exemplo cone.....	188

144	Esquema da estrutura do corpo do cone.....	189
145	Malha de elementos finitos para o domínio do fluido no exemplo cone.....	190
146	Malha da estrutura no exemplo cone.....	190
147	Distribuições de (a) pressão, (b) massa específica, (c) temperatura e (d) número de Mach para o exemplo cone em regime permanente.....	191
148	Resíduo da massa específica para o exemplo cone.....	192
149	Componentes do deslocamento u_x e u_y na ponta do cone com o tempo.....	192
150	Distribuições de (a) pressão, (b) massa específica, (c) temperatura e (d) número de Mach em $t = 0.00378$ s para o exemplo cone.....	193
151	Vetores de velocidade em $t = 0.00378$ s para o exemplo cone.....	194
152	Configuração da estrutura em $t = 0.00378$ s para o exemplo cone.....	194
153	Distribuição da componente de deslocamento u_y no cone em $t = 0.00378$ s.....	195

LISTA DE TABELAS

1 Classificação do desempenho (em Mflops) para o Cray T94 (OSC).....	74
2 Desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos compressíveis no Cray T94.....	75
3 Desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos incompressíveis no Cray T94.....	75
4 Desempenho do algoritmo de estruturas com o elemento DKT no Cray T94.....	76
5 Desempenho do algoritmo de estruturas com o elemento GPL-T9 no Cray T94.....	77
6 Desempenho (em Mflops) dos algoritmos de interação fluido-estrutura no Cray T94....	77
7 % <i>tcpu</i> , <i>tcpu</i> / Δt nó e parâmetros de convergência dos algoritmos de interação fluido- estrutura no Cray T94.....	78
8 Exemplo esfera: distribuição dos elementos nos grupos em porcentagem.....	96
9 Comparação de resultados analíticos e numéricos no exemplo NACA0012 (Mach = 0.5) para as variáveis no ponto de estagnação.....	105
10 Dados das malhas do exemplo VLS.....	109
11 Alguns parâmetros do escoamento sobre a esfera.....	129
12 Resíduos das variáveis primárias para o exemplo prisma retangular.....	132
13 Resultados do exemplo onda solitária com $H=0.5$	140
14 Resultados do exemplo onda solitária com $H=2.0$	141
15 Distribuição inicial de passos de tempo para o exemplo NACA0012 oscilante.....	153
16 Propriedades da placa e do fluido.....	159
17 Dados das malhas do exemplo placa plana.....	159
18 <i>tcpu</i> dos processos de execução com o uso de subciclos estrutura-fluido.....	168
19 <i>tcpu</i> / Δt nó e ganhos de <i>tcpu</i> com os subciclos estrutura-fluido.....	168
20 Dados de eficiência do algoritmo com os subciclos estrutura-fluido.....	169
21 <i>tcpu</i> dos processos de execução para os algoritmos de movimento de malha.....	169
22 Mflops dos algoritmos de movimento de malha.....	169
23 Propriedades do painel e do fluido.....	170
24 Propriedades do ar e da membrana.....	179
25 Propriedades do cone.....	188
26 Propriedades do fluido no exemplo cone.....	189

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um algoritmo para a simulação de problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura utilizando a técnica de elementos finitos. Um esquema de Taylor-Galerkin de dois passos e elementos tetraédricos lineares são empregados para o fluido, que pode ser compressível ou incompressível. É adotada uma formulação lagrangeana-euleriana arbitrária (ALE), compatível com o movimento da interface fluido-estrutura. Um método fracionado de correção de velocidade é utilizado para os fluidos incompressíveis. A estrutura é analisada usando elementos triangulares com três nós e seis graus de liberdade por nó (três componentes de deslocamentos e três componentes de rotação). Os efeitos da não-linearidade geométrica são incluídos. O método de Newmark é empregado para integrar no tempo as equações dinâmicas de equilíbrio, usando-se uma descrição lagrangeana atualizada. O sistema de equações algébricas é solucionado através do método dos gradientes conjugados e o sistema não-linear, resultante de deslocamentos e rotações finitas da estrutura, é solucionado com um esquema incremental-iterativo. O código é otimizado para aproveitar as vantagens do processamento vetorial.

ABSTRACT

An algorithm to simulate 3-D fluid-structure interaction problems using the finite element technique is presented in this work. A two-step Taylor-Galerkin scheme and linear tetrahedra elements are employed for the fluid, which may be compressible or incompressible. An Arbitrary Lagrangean-Eulerian (ALE) formulation is adopted, which must be compatible with the motion of the fluid-structure interface. A fractional method with velocity correction is used for incompressible fluids. The structure is analyzed using triangular elements with three nodes and six degrees of freedom in each node (three displacement components and three rotation components). Geometrically non-linear effects are included. The Newmark method is employed to integrate in time the dynamic equilibrium equations using an Updated Lagrangean description. The algebraic system of equations is solved using the conjugated gradient method and an incremental-iterative scheme is used to solve the non-linear system, resulting from finite displacements and rotations. The code is optimized to take advantages of vector processors.

LISTA DE SÍMBOLOS

a_0, a_1, \dots, a_{10}	Constantes de integração de Newmark
$\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_b$	Matrizes relação deformação-deslocamento de membrana e de flexão
c	Velocidade do som
C_{ijrs}	Tensor de propriedades do material
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento
CC	Coefficiente de amortecimento numérico
C_p	Calor específico a pressão constante
C_v	Calor específico a volume constante
$\mathbf{D}_m, \mathbf{D}_b$	Matrizes constitutivas de membrana e de flexão para o elemento placa
E	Módulo de elasticidade do material
e_{ij}	Tensor de deformação linear
f_{ij}	Vetor de fluxo da equação de quantidade de movimento
\mathbf{F}	Vetor de forças nodais equivalentes
\mathbf{F}_i	Vetor de fluxo
\mathbf{G}	Matriz geométrica do elemento placa
h	Espessura de placa
k_{ij}	condutividade térmica
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
\mathbf{M}	Matriz de massa
\mathbf{N}	Função de interpolação linear
\mathbf{n}_i	vetor unitário da normal externa à superfície de contorno
n_{SF}	Fator de subciclos
p	pressão termodinâmica
\mathbf{P}_E	Função de interpolação constante
Pr	Número de Prandt
r_1, r_2, r_3	Indicadores de possibilidade de instabilidade numérica
\mathbf{R}	Vetor de forças externas
Re	Número de Reynolds
S_{ij}	Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchoff
t	Instante de tempo
T	Temperatura
u_i	Componentes dos deslocamentos da estrutura

U_i	Variáveis de conservação da equação da quantidade de movimento
v_i	Componentes da velocidade do fluido
\mathbf{V}	vetor das variáveis de conservação
w_i	Componentes da velocidade da malha de elementos finitos
u_x, u_y, w	Componentes dos deslocamentos de translação da placa
x, y, z	Coordenadas cartesianas
X_i	Coordenadas materiais
x_i	Coordenadas espaciais
α, δ	Parâmetros do método de Newmark
δ_{ij}	Delta de Kroenecker
Δt	Passo de tempo
ε	Energia total específica
ε_{ij}	Tensor de deformação total
γ	razão entre os calores específicos C_p e C_v
η_{ij}	Tensor de deformação não-linear
λ	coeficiente de viscosidade volumétrica
μ	coeficiente de viscosidade de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Componentes de deslocamento de rotação da placa
ρ	Massa específica
τ_{ij}	componentes do tensor desviador
ξ_i	Coordenadas de referência

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, muitos esforços foram dedicados a desenvolver técnicas eficientes e precisas de solução numérica das equações governantes de várias áreas de engenharia, entre as quais destacam-se a dinâmica dos fluidos computacional (DFC), a dinâmica de estruturas computacional (DEC), a termodinâmica computacional, a eletromagnética computacional, etc.. Diante dos resultados excelentes obtidos, muitos códigos comerciais têm sido elaborados. A evolução dos computadores pessoais e de grande porte com processamento vetorial e paralelo massivo tiveram um papel decisivo neste desenvolvimento. Uma vez que as técnicas de solução para cada uma das disciplinas foram sendo dominadas, cresceu o interesse da comunidade científica nos chamados problemas acoplados de engenharia, que são aqueles em que os sistemas são compostos de meios fisicamente heterogêneos e que realizam mútuas interações. Como exemplos pode-se mencionar: os problemas do tipo controle-estrutura onde uma estrutura flexível interage com um sistema de controle atuante; os problemas de escoamento em um meio poroso que tratam da propagação de duas fases de fluido (óleos ou poluentes e gás ou água) sobre o solo; os problemas de extrusão termomecânica de um metal ou plástico em um processo de fabricação os quais envolvem o campo térmico, o material extrudado e a estrutura de contenção; os problemas de interação fluido-estrutura (IFE), nos quais o movimento de uma estrutura flexível interage com um meio fluido. No entanto, a questão mais importante é como combinar estas diferentes disciplinas através de uma simulação precisa, eficiente e modular de forma que se possibilite lidar com um número arbitrário de meios diferentes ao mesmo tempo.

1.1 OS PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

O estudo de problemas IFE surge da necessidade de analisar diversos sistemas complexos de engenharia, tais como componentes de reatores nucleares e de turbo-máquinas, estruturas navais e aeroespaciais, estruturas de represas, tubos flexíveis sob escoamento interno, etc... Estes problemas são normalmente divididos em três categorias clássicas (Zienkiewicz e Bettess, 1978):

- a) *Problemas com grande movimento relativo*, governados pelas características do fluido cujos efeitos de compressibilidade são importantes, como por exemplo instabilidades (*flutter*) em asas de avião e oscilações em pontes suspensas.

- b) *Problemas com deslocamentos de fluido limitados e de curta duração* que usualmente ocorrem em situações de explosão ou impacto.
- c) *Problemas com deslocamentos de fluido limitado, mas de longa duração* tais como as vibrações acústicas, os movimentos de um navio e a resposta periódica de estruturas “*off-shore*” devido aos efeitos das ondas ou terremotos.

Uma maneira simplificada de analisar os problemas IFE é obter-se, primeiramente, a resposta do fluido assumindo a estrutura rígida e após a resposta da estrutura, considerando a pressão de interface como carga externa atuante. Esse procedimento desacoplado de tratar o problema pode conduzir a erros muito grandes. Neste caso, por exemplo, as respostas de dutos sujeitos a golpes de ariete ou de reservatórios sob explosão seriam sobrestimadas (Belytschko e Schumann, 1980; Casadei e Halleux, 1995) e as cargas em reservatórios de armazenagem de líquidos excitados por ações sísmicas seriam subestimadas (Ma *et al.*, 1982). Por isso a necessidade de estudar os problemas IFE de forma acoplada, considerando os efeitos mútuos entre os dois subdomínios.

A Aeroelasticidade é um dos campos em que existem mais trabalhos de simulação numérica sobre os problemas de IFE; destacam-se os trabalhos de Batina *et al.* (1988), Guruswamy (1988), Piperno *et al.* (1995), Farhat *et al.* (1995), Koobus e Farhat (1999), Cebral e Löhner (1997) e muitos outros. Os efeitos das forças aerodinâmicas sobre corpos deformáveis são muito importantes no projeto de aviões e de veículos espaciais, influenciando decisivamente nas análises de performance e de segurança. Os casos de *flutter* de painéis ou asas causadas pelo escoamento de ar a alta velocidade são exemplos clássicos desses problemas. Outro exemplo importante que envolve aspectos de segurança é o surgimento de cargas transientes em estruturas devido às flutuações da velocidade do escoamento (*buffeting*). Além disso, pequenas variações do ângulo de incidência ou do número de Mach podem alterar substancialmente a distribuição de pressão e as características dos choques e, por consequência, a performance do veículo.

Muitos dispositivos e equipamentos de plantas industriais contém ou estão contidos em meios líquidos ou gasosos. Os vasos de pressão, as tubulações, os reatores nucleares e químicos, etc.. são alguns exemplos clássicos nesta área. Geralmente o fluido tem um papel importante no comportamento da estrutura, principalmente em condições anormais de trabalho devido a algum acidente, atentado ou mal funcionamento do sistema. As forças geradas no fluido nos casos de explosão, sobrecarregam a estrutura via ondas de pressão. Em simulações de impacto e ruptura de recipientes, a presença de um líquido dentro da estrutura

afeta consideravelmente o seu comportamento. Muitos autores apresentaram estudos sobre problemas de IFE ligados a esta área, sendo que Donea *et al.* (1982), Casadei e Halleux (1995), Soria e Casadei (1997) e outros, tiveram importantes parcelas de contribuição.

Liu e Ma (1982), Hamdan (1999) entre outros, pesquisaram os problemas de IFE na análise de sismos em tanques de armazenagem. Em sismos fortes, o comportamento inelástico e não-linear da estrutura e o movimento de amplitude finita do líquido (*sloshing*) são fenômenos importantes a serem considerados.

Outro campo de interesse no estudo de problemas de IFE é o da bio-mecânica. Especificamente, quando é analisado o problema do escoamento do sangue nas artérias e veias do corpo humano, o que pode ser considerado como um fluido viscoso escoando no interior de um duto deformável (Lou, 1993; Perktold e Rappitsch, 1995; Heil, 1998).

No Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) foram realizados alguns trabalhos na área de IFE. As interações 2-D entre estruturas com movimento de corpo rígido e fluidos incompressíveis e levemente compressíveis foram estudadas por Gonzalez (1993) e Petry (1993), respectivamente. Santos (1993) apresentou um esquema de solução de problemas IFE 2-D entre estruturas deformáveis (tratadas como vigas Timoshenko) e fluidos compressíveis. Um método de solução 3-D que considera a estrutura deformável e o fluido incompressível foi recentemente apresentado por Azevedo (1999).

Nos últimos anos, esforços têm sido empregados para desenvolver modelos numéricos de IFE genéricos que atendam todas as áreas de interesse. Para isso o algoritmo deve ser capaz de simular fluidos compressíveis e incompressíveis, newtoneanos ou não, viscosos e não-viscosos, levando em conta os efeitos de turbulência e de variação da temperatura. Deve contemplar o comportamento elástico e elasto-plástico das estruturas com não-linearidade geométrica para casos de grandes deslocamentos e, considerando também, os efeitos termo-mecânicos. Estas características, desejáveis nos algoritmos de solução de problemas de IFE, devem estar atreladas à necessidade de um código eficiente e preciso. O uso de ferramentas computacionais de alta performance como a vetorização e a paralelização, de técnicas de avanços no tempo em subciclos e de técnicas de discretização espacial e temporal eficientes, são exemplos de estudos que visam otimizar o código quanto ao seu custo computacional. Em busca de códigos precisos, estudos têm sido realizados no que diz respeito à forma de acoplamento dos subdomínios envolvidos, à compatibilidade das discretizações espaciais na

interface, à adaptação de malhas, ao remalhamento e ao desenvolvimento individual de cada disciplina.

Neste trabalho analisa-se, via elementos finitos, os problemas de IFE. Utiliza-se para tanto, um esquema particionado que integra no tempo as equações governantes da estrutura e do fluido de forma isolada. Da estrutura para o fluido, a interação ocorre pela imposição da velocidade na superfície de interface (condição de contorno cinemática), enquanto que no sentido inverso, a pressão e as tensões viscosas são impostas como cargas na estrutura (condição de contorno dinâmica). Um esquema explícito de solução é adotado para o domínio do fluido, enquanto que na estrutura utiliza-se um método implícito. Desta forma, o passo de avanço no tempo é comandado pelo fluido, já que este deve satisfazer a condição de estabilidade de um algoritmo condicionalmente estável. Geralmente um método explícito para a estrutura, implica em um passo de tempo muito pequeno devido à necessidade de captar frequências mais elevadas que as do fluido. Uma discussão sobre os métodos de interação empregados e suas vantagens e desvantagens são apresentadas no Cap. 6.

1.2 A DINÂMICA DE ESTRUTURAS COMPUTACIONAL

O método dos elementos finitos (MEF), aplicado há mais de quarenta anos com sucesso na análise estrutural, é uma técnica consagrada e de uso popular na mecânica das estruturas. O método dos elementos de contorno (MEC) teve um crescimento significativo nos últimos anos sendo, em alguns casos, a técnica mais adequada. Diversas pesquisas resultaram em programas comerciais tais como o ABACUS (1998), ANSYS (1992), MSC/NASTRAN (1998), ADINA (2000) e outros.

As placas e cascas são componentes largamente utilizados em diversos sistemas estruturais que permitem espaços internos de grandes dimensões tais como ginásios, torres de resfriamento, estruturas espaciais, fuselagens de avião, cascos de navio, etc.. Uma propriedade básica das placas e cascas é a de que uma dimensão (espessura) é muito menor do que as outras.

Consideráveis esforços foram, e estão sendo empregados no desenvolvimento de elementos finitos eficientes e confiáveis para a análise de placas e cascas, podendo-se encontrar muitas publicações sobre este assunto. As primeiras tentativas de desenvolver elementos do tipo placa sob flexão surgiram no começo da década de 60, destacando-se alguns autores tais como Clough e Tocher (1965), Adini e Clough (1960), Melosh (1961), Tocher (1962) e outros. Na metade desta década, a base variacional do método de elementos

finitos foi melhor entendida, bem como a propriedade de compatibilidade ou conformidade entre elementos. As equações governantes estavam baseadas nas hipóteses de Kirchhoff, nas quais os efeitos de deformações cisalhantes são desprezados. Os requisitos de conformidade provaram ser particularmente complexos já que estes devem ser satisfeitos tanto para o deslocamento transversal como para o ângulo da normal ao contorno do elemento, exigindo um campo de deslocamentos com continuidade C^1 . Inicialmente, foram desenvolvidos muitos elementos não-conformes (Clough e Tocher, 1965; Adini, 1961; Tocher, 1962). Bazely *et al.* (1965) formularam um elemento (BCIZ1) usando coordenadas de área para as funções de forma, que satisfazem os modos de movimento de corpo rígido e de estado de deformação constante. Embora tenha sido muito utilizado, este elemento não satisfazia o chamado “*patch test*”.

Muitas tentativas foram feitas para desenvolver um elemento conforme. Assim, Bazeley *et al.* (1965) introduziram o elemento BCIZ2 obtido pela superposição de funções de forma polinomiais e racionais, sendo necessário um esquema de integração numérica de alta ordem para desenvolver a matriz de rigidez e, além disso, as segundas derivadas ou curvaturas não eram definidas unicamente nos nós dos elementos. Clough e Tocher (1965) desenvolveram um elemento (HCT) em que um triângulo principal era subdividido em três outros triângulos. Em cada sub-região foi usado um polinômio cúbico incompleto (9 termos) para os deslocamentos transversais e impostas as condições de compatibilidade ao longo dos contornos dos triângulos internos. De todos os diferentes esquemas considerados na época, um dos mais simples foi o que usava polinômios de alta ordem. Argyris *et al.* (1968), Bell (1969), Irons (1969) e Visser (1969), desenvolveram simultaneamente elementos com 21 graus de liberdade com nós intermediários, usando uma função de deslocamento polinomial de quinta ordem completa. Diferentes grupos (Argyris *et al.*, 1968; Bell, 1969; Cowper *et al.*, 1968) desenvolveram elementos sem os nós intermediários, restringindo a uma variação cúbica do ângulo da normal nos contornos do elemento e resultando em um elemento com 18 graus de liberdade.

Outras formulações usaram os multiplicadores de Lagrange para permitir a relaxação dos requisitos de continuidade nos contornos entre elementos, reduzindo os requisitos de conformidade para a continuidade C^0 . Esses funcionais modificados originaram os chamados métodos híbridos. O primeiro método híbrido foi o método de tensões híbridas, desenvolvido por Pian e Tong (1969). Aplicando o princípio da energia potencial complementar modificada, foram utilizados polinômios de tensões para o interior do elemento e de

deslocamentos ao longo do perímetro do mesmo, aplicando a função dos multiplicadores de Lagrange para o equilíbrio de forças entre elementos. Outros autores, tais como Tong (1970) e Kinkuchi e Ando (1972) desenvolveram várias aproximações híbridas de deslocamentos baseadas nas formas modificadas do princípio da energia potencial mínima. Um dos principais problemas identificados nas aproximações híbridas foi a necessidade de grande quantidade de regras específicas para a escolha dos parâmetros de tensão.

Embora na década de 70 tenha havido uma redução no desenvolvimento de novos elementos, houve também, importantes contribuições com a introdução das técnicas de integração reduzida, das funções de forma substitutas, da suavização de derivadas e das restrições discretas de Kirchhoff (Hrabok e Hrudehy, 1984). O uso do método dos deslocamentos baseados na teoria de placa de Mindlin e dos esquemas de integração reduzida também foram extremamente importantes. A motivação para o uso da teoria de placas de Mindlin foi a de que somente as primeiras derivadas aparecem no funcional da energia, necessitando apenas de funções de forma C^0 . Zienkiewicz *et al.* (1971) e Pawsey e Clough (1971) utilizaram esta teoria simultaneamente, aplicando a técnica da integração reduzida seletiva. Muitos outros autores também contribuíram bastante nesta área, entre eles Hughes *et al.* (1977), Hughes e Cohen (1978), Hughes *et al.* (1978), Hinton e Bicanic (1979) e Pugh *et al.* (1978). No entanto, problemas importantes como “*shear locking*” e “*membrane locking*” apareceram, principalmente em elementos com funções de interpolação de baixa ordem. O primeiro fenômeno refere-se a falta de habilidade dos elementos modelarem os modos de flexão de Kirchhoff, resultando em erros consideráveis na energia de cisalhamento. O segundo fenômeno ocorre devido a uma supervalorização da matriz de membrana (Pugh *et al.*, 1978; Hinton e Bicanic, 1979; Loof, 1966; Lee e Pian, 1978; Saleeb, 1987). Entre as diversas soluções propostas para eliminar os problemas citados, o uso de polinômios de alta ordem para a aproximação de deslocamentos foi uma das mais simples (Bathe *et al.*, 1983). No entanto, o alto custo de construção da matriz de rigidez tornou este tipo de elemento impraticável.

O emprego das hipótese discretas de Kirchhoff (Batoz *et al.*, 1980; Batoz e Tahar, 1982; Crisfield, 1983; Fried e Yang, 1978; Irons, 1976; Lyons, 1978; Saleeb e Chang, 1987) teve bons resultados em elementos de placas delgadas. Nesse caso, as funções de forma são contínuas em C^0 , mas são restritas pela imposição da condição de deformações cisalhantes nulas em pontos discretos do elemento. Esse elemento, denominado de DKT (Batoz *et al.*, 1980), é um dos elementos utilizados no presente trabalho devido a sua simplicidade de aplicação e eficiência de desempenho.

Técnicas mais recentes como as que utilizam um elemento conforme generalizado (Yuqiu e Kequi, 1987, 1989), também apresentam bons resultados. Sua formulação está baseada no princípio da energia potencial modificada e nas condições de compatibilidade generalizada para os deslocamentos médios, ao longo de cada lado do elemento. É um elemento não-conforme em malhas grosseiras, mas tende a ser conforme nos casos de malhas refinadas. Esse elemento passa no “*patch test*” e, além disso, apresenta uma excelente performance. No presente trabalho, esse elemento também é utilizado, mas em uma outra versão onde, em um elemento triangular de 9 graus de liberdade, aplicam-se condições de compatibilidade de ponto em cada nó e condições de compatibilidade de linha em cada lado, denominado de GPL-T9 (Yuqiu *et al.*, 1995). Zhang *et al.* (1998) utilizaram este elemento na análise não-linear de estruturas de placas.

No presente trabalho, o método de Newmark na sua forma trapezoidal é utilizado na discretização temporal (Bathe, 1996). A solução do sistema de equações é realizada pelo método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento diagonal (Hestenes e Stiefel, 1952). O sistema não-linear é solucionado por um esquema incremental iterativo. Detalhes sobre o algoritmo estrutural, bem como dos elementos finitos adotados, estão descritos no Cap. 5.

1.3 A DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL

Os métodos de diferenças finitas (MDF) e de volumes finitos (MVF) são usados intensamente com sucesso na dinâmica dos fluidos. Também o método de elementos finitos (MEF) encontrou o seu espaço nesta área, tendo crescido significativamente nos últimos anos. Os programas ANSYS/FLOTRAN (1992) (MEF) e FLUENT (1998) (MVF) são exemplos de códigos neste campo.

O desenvolvimento do MEF para a solução de problemas de escoamentos de fluidos compressíveis a alta velocidade, ocorreu apenas há, aproximadamente, vinte anos. Isto se deve, principalmente, à extensão do método de Lax-Wendroff (Lax e Wendroff, 1960) aplicado em diferenças finitas, no contexto de elementos finitos, que resultaram nos processos de Taylor-Galerkin (Zienkiewicz *et al.*, 1984; Löhner *et al.*, 1984) e de Galerkin com linhas características (Löhner *et al.*, 1985b; Zienkiewicz e Taylor, 1991). Também o método SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin Method*), introduzido por Hughes (1987), merece destaque nesse processo.

A análise de escoamentos viscosos incompressíveis através do MEF foi introduzida por Oden e Welford (1972) através dos métodos mistos, os quais se utilizam de diferentes funções de interpolação para as componentes de velocidade e para a pressão, com o objetivo de evitar modos espúrios de pressão. Outros métodos utilizam funções de penalidade e integração seletiva (eliminando a pressão como variável primária). Malkus e Hughes (1978) e Engelman *et al.* (1982) mostraram a equivalência entre as duas alternativas. A técnica da pseudo-compressibilidade, que assume o fluido como ligeiramente compressível, baseia-se nas idéias apresentadas originalmente por Chorin (1967) e foram usadas por Ramshaw e Musseau (1990,1991) e por Ramshaw e Messina (1991) no contexto de elementos finitos. Os chamados métodos fracionados foram introduzidos por Chorin (1967) e, após, foram apresentados por diversos outros autores tais como Donea *et al.* (1982) e Kim e Moin (1985). Nesses métodos, primeiramente calcula-se o campo de velocidades com a equação de movimento, omitindo os gradientes de pressão. Calcula-se a pressão através de uma equação de Poisson, usando as componentes de velocidade aproximadas obtidas do passo anterior e, finalmente, o campo de velocidades é corrigido usando a pressão obtida pela equação de Poisson. Os esquemas que analisam os escoamentos viscosos incompressíveis desta forma, também conhecidos como métodos de correção de velocidade, permitem o uso de funções de interpolação de mesma ordem para a pressão e para as componentes de velocidade. Esses métodos foram empregados por muitos autores tais como Gresho *et al.* (1984), Ren e Utnes (1993) e Kovacs e Kawahara (1991), entre outros. Os métodos fracionados estimularam o surgimento de algoritmos capazes de simular tanto escoamentos de fluidos compressíveis como de fluidos incompressíveis, bastando, para isso, alterar a equação de continuidade de um caso para outro (Zienkiewicz e Codina, 1995; Zienkiewicz *et al.*, 1995).

Quando os termos advectivos são dominantes em relação aos termos difusivos ou viscosos, as técnicas de refinamento de malha e de “*upwinding*” devem ser usadas para evitar oscilações espúrias das componentes de velocidade, que ocorrem quando aplicado o método clássico de resíduos ponderados de Bubnov-Galerkin. Uma técnica de “*upwinding*” chamada de SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) foi introduzida por Brooks e Hughes (1982) e utilizada mais tarde, com algumas modificações, por diversos autores. Este inconveniente pode também ser contornado usando um tensor de balanceamento difusivo (*Ballancing Diffusive Tensor* - BDT) como apresentado por Gresho *et al.* (1984), ou um esquema de Taylor-Galerkin (Donea, 1984; Zienkiewicz e Taylor, 1991).

As equações de Navier-Stokes podem, em princípio, simular os escoamentos tanto laminares como turbulentos. Contudo, existem dificuldades relacionadas aos custos

computacionais envolvidos na *simulação direta de escoamentos turbulentos* através das equações de Navier-Stokes para todas as escalas da turbulência. A malha necessária para capturar todas as escalas, na maioria dos problemas de interesse, conduzem a tempos de processamento elevadíssimos, mesmo nos computadores mais avançados da atualidade, especificamente para números de Reynolds altos (Grötzbach, 1987).

Os chamados *modelos de turbulência*, baseados na proposta de O. Reynolds (Hinze, 1975), descrevem aproximadamente o escoamento com um determinado conjunto de constantes empíricas, sendo válidos somente para determinado escoamento, ou, no máximo, para um conjunto de escoamentos. Launder e Spalding (1972, 1974) classificam os modelos de turbulência, baseados nas hipóteses de Reynolds, em três grupos principais que são: (a) modelos algébricos de viscosidade turbulenta; (b) modelos que adicionam equações diferenciais às equações de Navier-Stokes para calcular a viscosidade turbulenta; (c) modelos que empregam equações diferenciais de transporte para calcular diretamente as tensões de Reynolds. Mais recentemente, os modelos têm sido agrupados pelo número de equações diferenciais empregadas. Assim, os modelos algébricos são classificados como *modelos de nenhuma equação*, ou *zero equações*. Os chamados *modelos de uma equação* empregam uma equação diferencial que deve ser solucionada para se obter os valores de uma certa quantidade turbulenta. Enquanto os denominados *modelos de duas equações*, como o modelo $k-\epsilon$, largamente empregado, envolvem duas equações diferenciais. Uma classificação dos modelos desta forma é apresentada por Rodi (1980), Markatos (1986) e Marvin e Coakley (1990), entre outros.

Para números de Reynolds elevados a simulação direta da turbulência pode também ser substituída por modelos alternativos, tais como: a captura de estruturas coerentes (Ferziger, 1993) e a simulação direta de grandes vórtices com modelos para escalas inferiores à resolução da malha (na literatura inglesa: *Large Eddy Simulation* – LES). A simulação de grandes vórtices, com modelos para as escalas inferiores à resolução da malha, constitui uma forma de análise numérica de escoamentos turbulentos na qual os grandes vórtices são solucionados diretamente, enquanto os efeitos dos pequenos vórtices são representados por modelos de turbulência. Esta solução apresenta maior universalidade do que os modelos baseados nas equações médias de Reynolds. Os fundamentos da simulação direta de grandes vórtices com modelos para as pequenas escalas podem ser encontrados nos trabalhos publicados por Clark *et al.* (1979), Ferziger (1993) e Roggalo e Moin (1984). Importantes subsídios foram encontrados também no texto publicado por Grötzbach (1987), enquanto

Findikakis e Street (1982) apresentam aspectos relacionados com a simulação direta de grandes vórtices empregando o método de elementos finitos. Com base nesses trabalhos, surgiram numerosas publicações utilizando a simulação direta de grandes vórtices com o emprego de diversos enfoques. O modelo de Smagorinsky (1963) tem sido tradicionalmente empregado para simular as escalas inferiores à resolução da malha, em simulação direta de grandes vórtices. Este é um modelo de viscosidade turbulenta, que relaciona as componentes do tensor de tensões de escalas inferiores ao tensor correspondente do campo de grandes escalas. Algumas variações do modelo de Smagorinsky clássico são apresentadas na revisão apresentada por Murakami (1997).

Embora os efeitos de turbulência não possam ser desprezados em muitos problemas de escoamentos de fluidos, o estudo sobre este assunto não é o objetivo do presente trabalho. No entanto, utilizou-se, especificamente no exemplo 8.4.4 (Cap. 8), um modelo algébrico simples de turbulência baseado na hipótese de comprimento de mistura de Prandtl (Mittal e Tezduyar, 1995).

Para atender grande parte dos problemas de engenharia, o código do presente trabalho permite a simulação tanto de fluidos compressíveis nos regimes de escoamentos subsônicos, transônicos e supersônicos como de fluidos incompressíveis (ver Cap. 2). Utiliza-se o método explícito de Taylor-Galerkin de dois passos para discretizar no tempo e no espaço as equações de Navier-Stokes (Teixeira, 1996). Adota-se um elemento tetraédrico linear, o qual tem a vantagem de se adaptar aos domínios de geometrias complexas e é um elemento de ótima eficiência computacional. Uma técnica de avanço no tempo utilizando subciclos baseada no esquema de Belytschko e Gilbertsen (1992) para problemas de dinâmica estrutural é aplicada no código do fluido para se obter ganhos de tempo de CPU. Uma descrição completa desta técnica é apresentada no Cap. 3.

Uma formulação lagrangeana-euleriana arbitrária (do inglês ALE, Arbitrary Lagrangian-Eulerian) é utilizada para permitir a solução de problemas que envolvem grandes movimentos relativos entre corpos e superfícies. A distribuição espacial da velocidade da malha \mathbf{w} deve ser tal que a distorção dos elementos seja a menor possível. Rostand (1988), Löhner (1988), Bonet e Peraire (1991) e Martin e Löhner (1992) apresentaram algoritmos de movimento de malha baseados em funções analíticas prescritas pelo usuário. Batina (1989) e Farhat (1995) trataram a malha como um sistema discreto pseudo-estrutural. A solução deste sistema resulta em um campo de coordenadas dos nós da malha suavizado. Löhner e Yang (1996) e outros propuseram uma distribuição de velocidades da malha baseada nas

velocidades das superfícies de contorno do domínio. No presente trabalho, as velocidades no interior do domínio são suavizadas através de funções que ponderam a influência da velocidade de cada nó pertencente às superfícies de contorno. Um detalhamento deste algoritmo e dos métodos citados está no Cap. 4.

É desejável que o método usado para a integração das equações governantes do escoamento de fluidos proporcione a solução exata de um escoamento uniforme (Farhat, 1995). Lesoinne e Farhat (1996) mostraram que este requisito é satisfeito somente quando o esquema numérico de solução adotado e o algoritmo de movimento da malha satisfazem a chamada lei da conservação de geometria (do inglês: Geometric Conservation Law – GCL). Essa lei é similar à condição da GCL apresentada por Thomas e Lombard (1979) para malhas estruturadas e esquemas de diferenças finitas e à algumas variantes discutidas por Zhang *et al.* (1993) e Nkonga e Guillard (1994). Segundo Lesoinne e Farhat (1996), a violação da GCL no campo da Aeroelasticidade pode induzir a erros na estimativa da velocidade de *flutter*. Por outro lado, alguns autores, segundo Koobus e Farhat (1999), afirmam que a GCL pode ser violada quando se utiliza um passo de avanço no tempo suficientemente pequeno, obtendo-se, desta forma, resultados precisos. Neste trabalho, o esquema usado para a solução de problemas de escoamentos de fluidos é explícito, sendo necessário que o passo de avanço no tempo seja limitado pela condição de estabilidade de Courant (ver Cap. 2). Além disso, como o interesse principal desta tese (embora não único) seja o de analisar escoamentos transientes no contexto de problemas de interação fluido-estrutura, a necessidade de obter-se uma boa precisão pode restringir mais ainda o passo de avanço no tempo. Por esta razão não se tratou este assunto no desenvolvimento do algoritmo de solução de escoamentos de fluidos.

1.4 SÍNTESES DOS OBJETIVOS E DO CONTEÚDO DO PRESENTE TRABALHO

Como já foi mencionado, o objetivo principal do presente trabalho é analisar os problemas de interação fluido-estrutura, de uma forma abrangente, utilizando a técnica de elementos finitos. O fluido é discretizado no tempo e no espaço pelo esquema de Taylor-Galerkin de dois passos, empregando elementos tetraédricos lineares. Uma aplicação desta técnica para escoamentos de fluidos compressíveis foi desenvolvida por Teixeira (1996). Uma extensão para os escoamentos fluidos incompressíveis é apresentada nesse trabalho, usando um método fracionado de correção de velocidade. É adotada uma descrição lagrangeana-euleriana arbitrária (ALE), compatível com o movimento da interface fluido-estrutura. Uma descrição do esquema empregado para a simulação do fluido é apresentada no Cap. 2. Para

melhorar a eficiência computacional do algoritmo desenvolvido, apresenta-se, no Cap. 3, uma técnica de avanço no tempo em subciclos, a qual utiliza passos de tempo diferentes para cada grupo de elementos e de nós no domínio. A lei de movimento da malha móvel no campo do fluido, apresentada no Cap. 4 deste trabalho, baseia-se na técnica de suavização das componentes de velocidade da malha em cada nó, obedecendo as condições de contorno das superfícies do domínio computacional.

Na estrutura, empregam-se elementos triangulares com três nós e seis graus de liberdade por nó (três componentes de deslocamentos e três componentes de rotação) (Batoz *et al.*, 1980; Zhang *et al.*, 1998). Para a integração temporal das equações dinâmicas de equilíbrio, é utilizado o método de Newmark em uma descrição lagrangeana atualizada (Bathe, 1996). O método dos gradientes conjugados é adotado para a solução do sistema de equações algébricas (Hestenes e Stiefel, 1952). O algoritmo inclui os efeitos de não-linearidade geométrica, resultando em um sistema não-linear, solucionado por um esquema incremental-iterativo (Bathe, 1996). O Cap. 5 descreve a metodologia utilizada para a simulação da estrutura.

O acoplamento do fluido com a estrutura é realizado de forma particionada, que integra no tempo as equações governantes da estrutura e do fluido de forma isolada. São impostas as condições de contorno cinemáticas, da estrutura para o fluido, e as condições de contorno dinâmicas, no sentido inverso. A descrição do esquema de interação fluido-estrutura empregado é apresentada no Cap. 6. O código, desenvolvido na linguagem FORTRAN 90, é otimizado para aproveitar as vantagens do processamento vetorial. No Cap. 7, são discutidos alguns aspectos computacionais dos algoritmos empregados e analisadas as suas performances obtidas no Cray T94/CESUP-UFRGS.

Finalmente, o Cap. 8 apresenta alguns exemplos de validação dos algoritmos utilizados no presente trabalho. São analisadas as respostas do código de estruturas em problemas estáticos com forte não-linearidade geométrica e em problemas dinâmicos lineares e não-lineares. Os escoamentos de fluidos compressíveis são testados em problemas complexos e com o uso da técnica de subciclos. Várias situações são simuladas para os escoamentos de fluidos incompressíveis, abrangendo problemas com superfícies livres, com variação de temperatura e com escoamentos abertos e fechados. O algoritmo de interação fluido-estrutura é validado em problemas de escoamentos de fluidos compressíveis e incompressíveis em estruturas do tipo placa e casca.

2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS

2.1 A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (ALE)

As equações governantes dos fluidos são tradicionalmente descritas na formulação euleriana, enquanto que a descrição lagrangeana é usada para representar os movimentos da estrutura. Na descrição euleriana, representada pelas coordenadas espaciais x_i (ver Fig. 1), o domínio de referência é fixo no espaço e o meio contínuo movimenta-se sobre ele. Na descrição lagrangeana, o domínio de referência é envolvido pelo meio contínuo e movimenta-se com ele, sendo representada pelas coordenadas materiais X_i . São bastante conhecidas as vantagens e desvantagens da utilização de uma ou de outra descrição (Donea *et al.*, 1982). A descrição euleriana permite que o meio tenha grandes distorções, no entanto não consegue identificar os contornos móveis. Enquanto que na descrição lagrangeana, os contornos e interfaces são precisamente identificados, porém não são adequados para meios com grandes distorções como no caso de fluidos em escoamento. Devido às características de cada descrição, surgem dificuldades quando se deseja analisar os domínios da estrutura e do fluido simultaneamente. Para contornar estas dificuldades, típicas em problemas de interação fluido-estrutura, utiliza-se a formulação lagrangeana-euleriana arbitrária (ALE) para descrição do domínio do fluido ou parte do mesmo. A formulação ALE foi originalmente desenvolvida em diferenças finitas (Hirt *et al.*, 1974) e mais tarde estendida para a técnica de elementos finitos (Hughes *et al.* 1981). Consiste basicamente na introdução de um domínio de referência descrito pelas coordenadas de referência ξ_i , permitindo que o seu movimento seja arbitrário e independente dos pontos materiais e espaciais. A equação fundamental da formulação ALE estabelece a derivada material no tempo de uma determinada quantidade f como segue:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\xi} + \frac{\partial f}{\partial x_i} (v_i - w_i), \quad (1)$$

onde $i = 1,2,3$; v_i e w_i são as componentes dos vetores de velocidade do fluido e da malha, respectivamente. As componentes da aceleração a_i para uma descrição ALE podem ser obtidas de forma similar através da equação:

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\xi} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (v_j - w_j) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2)$$

As Eq. (1) e (2) são muito importantes para a descrição das equações que governam o escoamento de fluidos na formulação ALE.

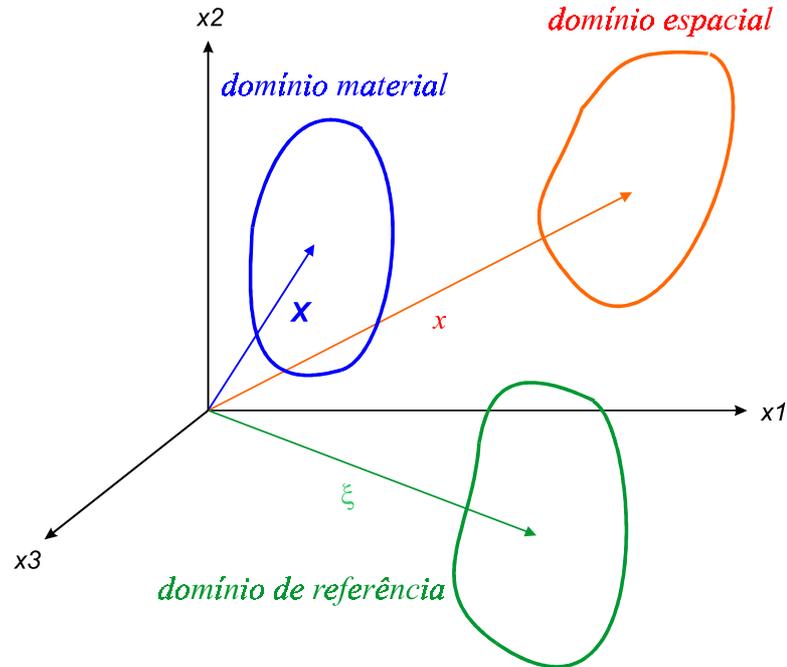


FIGURA 1 – Domínios em um meio contínuo

2.2 AS EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O ESCOAMENTO DE FLUIDOS

As equações fundamentais que governam o escoamento dos fluidos são as equações de Navier-Stokes compostas pelas equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia, expressas da forma (Schlichting, 1979):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i p) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (5)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. Com o uso das Eq. (1) e (2) determinam-se as equações governantes do movimento do fluido na descrição ALE da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = w_j \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i p) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} v_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = w_i \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial x_i}, \quad (8)$$

onde v_i é o vetor velocidade do fluido, w_i é o vetor velocidade da malha, p é a pressão termodinâmica, τ_{ij} são as componentes do tensor desviador, ρ é a massa específica do fluido, T é a temperatura, ε é a energia total específica e k é a condutividade térmica. Os termos de fonte foram omitidos nas Eq. (3) a (8) para simplificar o equacionamento. As componentes do tensor desviador para um fluido newtoneano são expressas pela relação constitutiva dada por:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (9)$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$; μ é o coeficiente de viscosidade de cisalhamento e λ é o coeficiente de viscosidade volumétrica, sendo que, de acordo com a hipótese de Stokes, $\lambda = -2\mu/3$. A equação de estado, considerando o fluido como um gás ideal, é a seguinte:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(\varepsilon - \frac{1}{2} v_i v_i \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10)$$

onde $\gamma = C_p / C_v$ é a razão entre os calores específicos C_p a pressão constante e C_v a volume constante. A temperatura relaciona-se com as variáveis independentes do campo através da relação:

$$T = \frac{1}{C_v} \left(\varepsilon - \frac{1}{2} v_i v_i \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11)$$

A velocidade do som é definida em um escoamento isoentrópico da forma:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho} . \quad (12)$$

As Eq. (6) a (11), acrescidas das condições de contorno e iniciais, definem unicamente o problema a ser resolvido quando se trata de escoamentos de fluidos compressíveis. As equações de Navier-Stokes podem ser escritas numa forma matricial compacta da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{w}_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} , \quad (13)$$

onde $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{iA} + \mathbf{F}_{iD}$ é o vetor de fluxo e

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho \varepsilon \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_{iA} = \begin{Bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{i1} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{i2} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{i3} \\ v_i (\rho \varepsilon + p) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F}_{iD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \\ -\tau_{3i} \\ -\tau_{ij} v_j - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{Bmatrix} , \quad (14)$$

sendo $i, j = 1, 2, 3$; \mathbf{V} as variáveis de campo ou de conservação, \mathbf{F}_{iA} é um vetor que contém os termos advectivos e de pressão e \mathbf{F}_{iD} é um vetor que contém os termos viscosos e de condução de calor.

2.3 O ALGORITMO PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

2.3.1 O método de Taylor-Galerkin de dois passos

O presente algoritmo utiliza o método de Taylor-Galerkin de dois passos para discretização no tempo e no espaço das equações de Navier-Stokes (Teixeira, 1996). A discretização no domínio do tempo é realizada através de uma expansão em série de *Taylor* das variáveis de campo \mathbf{V}^{n+1} no instante $t+\Delta t$ da seguinte forma:

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{V}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{V}^n}{\partial t^2} + \dots = \mathbf{V}^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{V}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{V}^n}{\partial t} \right) + \dots \quad (15)$$

A Eq. (15) é solucionada em dois passos, desprezando os termos de terceira ordem. No primeiro passo, calcula-se as variáveis de campo no instante de tempo $t+\Delta t/2$ correspondente aos termos contidos entre parênteses da Eq. (15), obtendo-se a seguinte equação:

$$\mathbf{V}^{n+1/2} = \mathbf{V}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{V}^n}{\partial t} . \quad (16)$$

No segundo passo, calcula-se as variáveis de campo no instante de tempo $t+\Delta t$ utilizando as variáveis em $t+\Delta t/2$ determinadas no primeiro passo através da Eq. (16), resultando:

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{V}^{n+1/2}}{\partial t} . \quad (17)$$

Substituindo as equações de Navier-Stokes, Eq. (13), nas Eq. (16) e (17), tem-se para o primeiro e segundo passos, as equações:

$$\mathbf{V}^{n+1/2} = \mathbf{V}^n - \frac{1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - w_i^n \frac{\partial \mathbf{V}^n}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1,2,3) , \quad (18)$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^n - \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - w_i^{n+1/2} \frac{\partial \mathbf{V}^{n+1/2}}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1,2,3) . \quad (19)$$

2.3.2 A discretização espacial pela técnica de Galerkin

As Eq. (18) e (19) são discretizadas no espaço conforme a técnica de Galerkin. As aproximações adotadas para as variáveis envolvidas no problema são (Chung, 1978):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^n &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{V}}^n & \mathbf{V}^{n+1/2} &\cong \mathbf{P}_E \bar{\mathbf{V}}^{n+1/2} & \mathbf{V}^{n+1} &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{V}}^{n+1} \\ \mathbf{w}_i^n &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^n & \mathbf{w}_i^{n+1/2} &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1/2} & \mathbf{w}_i^{n+1} &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1} \\ \mathbf{F}_i^n &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{F}}_i^n & \mathbf{F}_i^{n+1/2} &\cong \mathbf{P}_E \bar{\mathbf{F}}_i^{n+1/2} & \mathbf{F}_i^{n+1} &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{F}}_i^{n+1} , \end{aligned} \quad (20)$$

onde $i=1,2,3$; \mathbf{N} é uma função de forma linear do elemento (Teixeira, 1996) e \mathbf{P}_E é uma função de forma constante associada com o elemento E (diferente de zero apenas no elemento E). Assim, a Eq. (18) discretizada no espaço fica da forma:

$$\left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{P}_E^T \mathbf{P}_E d\Omega \right) \bar{\mathbf{V}}^{n+1/2} = \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{V}}^n$$

$$-\frac{\Delta t}{2} \left[\left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \bar{\mathbf{F}}_i^n - \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^n \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \bar{\mathbf{V}}^n \right] \quad (i=1,2,3) \quad (21)$$

ou

$$\Omega_E^{n+1/2} \bar{\mathbf{V}}^{n+1/2} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{V}}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{L}_i \bar{\mathbf{F}}_i^n - \mathbf{T} \bar{\mathbf{V}}^n), \quad (22)$$

onde

$$\Omega_E^{n+1/2} = \int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{P}_E^T \mathbf{P}_E d\Omega \quad \mathbf{C} = \int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} d\Omega$$

$$(i=1,2,3) \quad (23)$$

$$\mathbf{L}_i = \int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \quad \mathbf{T} = \int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^n \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega .$$

Observa-se que $\bar{\mathbf{V}}^{n+1/2}$ é determinado, explicitamente, a nível de elemento através da Eq. (22), proporcionando uma solução rápida e de baixa exigência de espaço de memória. A equação do segundo passo de tempo é obtida pela discretização espacial da Eq. (19), como segue:

$$\left(\int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{V}}^{n+1} = \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{V}}^n + \Delta t \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{P}_E d\Omega \right) (\bar{\mathbf{F}}_i^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1/2} \bar{\mathbf{V}}^{n+1/2})$$

$$- \Delta t \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_i d\Gamma \right) (\bar{\mathbf{F}}_i^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1/2} \bar{\mathbf{V}}^{n+1/2}) \quad (i=1,2,3) \quad (24)$$

ou

$$\mathbf{M}^{n+1} \bar{\mathbf{V}}^{n+1} = \mathbf{M}^n \bar{\mathbf{V}}^n + \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_s, \quad (25)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{n+1} &= \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega & \mathbf{M}^n &= \int_{\Omega^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \\ \mathbf{R}_v &= \Delta t \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{P}_E \, d\Omega \right) \left(\bar{\mathbf{F}}_i^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1/2} \bar{\mathbf{V}}^{n+1/2} \right) \\ \mathbf{R}_s &= -\Delta t \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_i \, d\Gamma \right) \left(\bar{\mathbf{F}}_i^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1/2} \bar{\mathbf{V}}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

e \mathbf{n}_i é o vetor unitário da normal externa à superfície Γ . Os termos do vetor de fluxo $\bar{\mathbf{F}}_{iD}^n$ são obtidos através da técnica de suavização de derivadas aplicadas nos termos $\partial \mathbf{v}_i / \partial x_j$ e $\partial T / \partial x_i$ (Zienkiewicz e Taylor, 1989). Os algoritmos apresentados por Santos (1993) em 2-D e por Teixeira (1996) em 3-D consideram o vetor $\bar{\mathbf{F}}_{iD}^{n+1/2}$ nulo, já que a função de forma (\mathbf{P}_E) adotada para as variáveis no instante $n+1/2$ é constante, implicando em gradientes de temperatura e de velocidade nulos. Depois de alguns testes, observou-se que estes termos podem ser significativos para alguns problemas. Por isso no presente algoritmo, utiliza-se os termos de $\bar{\mathbf{F}}_{iD}^n$ em substituição à $\bar{\mathbf{F}}_{iD}^{n+1/2}$. Os termos do vetor de fluxo $\mathbf{F}_{iA}^{n+1/2}$ são avaliados da forma:

$$\bar{\mathbf{F}}_{iA}^{n+1/2} = \bar{\mathbf{F}}_{iA} \left(\bar{\mathbf{V}}^{n+1/2} \right) \quad (27)$$

a qual utiliza o valor de $\bar{\mathbf{V}}^{n+1/2}$, obtido no primeiro passo. Nas integrais de superfície \mathbf{R}_s da Eq. (25), deve-se avaliar o termo $\left(\bar{\mathbf{F}}_{iA} - \bar{\mathbf{w}}_i \bar{\mathbf{V}} \right)^{n+1/2}$ apenas para os nós de contorno. Para isto, além de se valer da Eq. (27), utiliza-se uma estimativa proposta por Argyris *et al.* (1989) para as variáveis de campo na superfície, como segue:

$$\left(\bar{\mathbf{F}}_{iA} - \bar{\mathbf{w}}_i \bar{\mathbf{V}} \right)_S^{n+1/2} = \left(\bar{\mathbf{F}}_{iA} - \bar{\mathbf{w}}_i \bar{\mathbf{V}} \right)_S^n + \left(\bar{\mathbf{F}}_{iA} - \bar{\mathbf{w}}_i \bar{\mathbf{V}} \right)^{n+1/2} - \left(\bar{\mathbf{F}}_{iA} - \bar{\mathbf{w}}_i \bar{\mathbf{V}} \right)^n, \quad (28)$$

onde o sub-índice "s" refere-se aos valores de contorno das variáveis de campo.

A solução da Eq. (25) é realizada de forma explícita e iterativa, conforme proposto por Donea *et al.* (1982), como segue:

$$\mathbf{M}_L^{n+1} \bar{\mathbf{V}}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{M}^n \bar{\mathbf{V}}^n + \mathbf{R}_v + \mathbf{R}_s - (\mathbf{M}^{n+1} - \mathbf{M}_L^{n+1}) \bar{\mathbf{V}}_k^{n+1}, \quad (29)$$

onde k indica a k -ésima iteração, \mathbf{M}_L^{n+1} é a matriz de massa discreta em t_{n+1} .

Como o método adotado é explícito, está sujeito à condição de estabilidade de Courant (Löhner *et al.*, 1985b). Tal condição, aplicada sobre um elemento E , estabelece que o passo de tempo local Δt_E deve satisfazer a expressão:

$$\Delta t_E \leq \frac{FS h_E}{\max_E (|\bar{v}| + c)}, \quad (30)$$

sendo \bar{v} a velocidade do fluido, c a velocidade do som local e h_E um comprimento característico representativo do elemento (menor aresta do tetraedro). FS é um fator de segurança (foi adotado no presente trabalho uma faixa que varia de 0.1 a 0.25) que considera a dificuldade de estabelecer o comprimento característico h_E mais adequado e favorece, de maneira empírica, os aspectos referentes à precisão em escoamentos altamente transientes.

2.3.3 Amortecimento numérico da solução

Embora a solução das Eq. (22) e (25) seja estável em regimes de escoamentos suaves, podem ocorrer oscilações numéricas na presença de choques. Para suavizar tais efeitos locais, é introduzida uma viscosidade artificial, que é adicionada explicitamente à solução não-amortecida $\bar{\mathbf{V}}^{n+1}$ da seguinte forma (Löhner *et al.*, 1985; Nithiarasu *et al.*, 1998):

$$\mathbf{V}_s^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1} + \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_a \frac{\partial \mathbf{V}^{n+1}}{\partial x_i} \right), \quad (31)$$

onde \mathbf{V}_s^{n+1} é o vetor das variáveis de campo amortecidas no instante de tempo $t + \Delta t$ e μ_a é o coeficiente de difusão artificial. Lapidus (1967) usou este coeficiente baseado no gradiente da velocidade, enquanto que MacCormack e Baldwin (1975) obtiveram resultados melhores considerando a segunda derivada da pressão. Neste trabalho, a segunda derivada da pressão é calculada aproximadamente através das matrizes de massa consistente \mathbf{M} e discreta \mathbf{M}_L (Morgan *et al.*, 1990), resultando na seguinte expressão para as variáveis suavizadas:

$$\mathbf{V}_s^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{D}, \quad (32)$$

onde \mathbf{D} é o vetor de amortecimento artificial, calculado da forma (Peraire *et al.*, 1988):

$$\mathbf{D} = \sum_E \frac{\Delta t}{\Delta t_E} CC \bar{S}_E [\mathbf{M} - \mathbf{M}_L]_E \bar{\mathbf{V}}_E^n, \quad (33)$$

sendo que o índice E indica que a equação acima é estabelecida para cada elemento, Δt_E é o passo de tempo de cada elemento, CC é uma constante especificada pelo usuário, \bar{S}_E é o coeficiente de distribuição de pressão do elemento, calculado como média dos valores nodais S_i do elemento, definidos para o nó i como:

$$S_i = \sum_E \frac{[(\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)_E \mathbf{p}]_i}{|(\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)_E \mathbf{p}|_i}. \quad (34)$$

O valor da constante CC , especificada pelo usuário, deve se ajustar à situação em estudo, sendo que cuidados devem ser tomados no sentido de evitar que o acréscimo excessivo de viscosidade artificial interfira na viscosidade física.

2.3.4 Condições de contorno

As condições de contorno aplicadas em um problema de escoamento de fluido compressível seguem o procedimento descrito em Teixeira (1996). Basicamente, consistem em quatro tipos de situações:

- a) *Superfícies de entrada do domínio computacional em regime supersônico*, onde são impostas a condição de escoamento não perturbado para as variáveis de conservação.
- b) *Superfícies de saída do domínio computacional em regime supersônico*, onde as variáveis de conservação não são prescritas, já que as perturbações a jusante não influenciam no escoamento a montante para este regime.
- c) *Superfícies de corpos móveis ou estáticos*. Neste caso, por se tratar de superfícies de interface entre dois meios, deve-se estabelecer condições de contorno que mantenham a continuidade das variáveis envolvidas. As velocidades e deslocamentos devem ser iguais aos calculados pelo domínio do corpo para o mesmo instante de tempo (condições de contorno cinemáticas). Particularmente, quando os corpos são estáticos, as componentes dos vetores de

velocidade e de deslocamento são nulos. Para o caso específico de fluidos invíscidos, somente as componentes normais dos deslocamentos e velocidades devem ser impostas como iguais aos respectivos valores do corpo. Também devem ser estabelecidas condições de contorno para a energia, pela imposição de temperatura uniforme (superfície isotérmica) ou pela imposição de gradiente nulo de temperatura normal à superfície (superfície adiabática). As superfícies de simetria (constituídas por paredes planas) têm as mesmas condições de contorno das superfícies adiabáticas de corpos estáticos. Uma análise detalhada da imposição das condições de contorno em superfícies de corpos deformáveis é efetuada no Cap. 6.

d) *Superfícies de escoamento em regime subsônico*, onde utiliza-se a técnica de relações características (Argyris *et al.*, 1989; Hughes e Tezduyar, 1984) para promover troca de informações físicas entre a fronteira e o interior do domínio computacional.

2.4 O ALGORITMO PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

Enquanto que nos escoamentos de fluidos compressíveis todas as equações estão acopladas, para os escoamentos de fluidos incompressíveis, nos quais $c=\infty$, a equação da conservação de energia pode ser solucionada de forma independente, após o campo de velocidades ser estabelecido.

Por conveniência, pode-se reescrever as Eq. (13) numa forma mais direta e, inicialmente, omitindo a equação de conservação de energia. A primeira equação das Eq. (13) é a equação da continuidade que, com o auxílio da Eq. (12) pode ser escrita da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3) . \quad (35)$$

As equações da quantidade de movimento podem ser escritas da forma:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + w_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,3) , \quad (36)$$

sendo $U_i = \rho v_i$ e $f_{ij} = v_j(\rho v_i) = v_j U_i \quad (i,j=1,2,3)$.

2.4.1 Discretização temporal das equações governantes

O procedimento de discretização no tempo e no espaço das equações governantes do movimento do fluido é o mesmo já apresentado para escoamentos de fluidos compressíveis. Assim, o primeiro passo de solução para as equações da quantidade de movimento é dado pela expressão (Teixeira e Awruch, 2000):

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial U_i^n}{\partial t} \quad (i=1,2,3), \quad (37)$$

sendo que o termo $\partial U_i^n / \partial t$ é obtido pela Eq. (36) avaliada no instante n como segue:

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial t} = -\frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} + w_j^n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} \quad (i,j=1,2,3), \quad (38)$$

onde $p^{n+\theta} = p^n + \theta \Delta p$, $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ e θ é um parâmetro de limites $0 \leq \theta \leq 1$ (Zienkiewicz e Codina, 1995). No presente trabalho utiliza-se $\theta = 1/2$. Substituindo a Eq. (38) na Eq. (37), obtém-se:

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} - w_j^n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} \right) \quad (i,j=1,2,3). \quad (39)$$

Introduzindo a variável $\tilde{U}_i^{n+1/2}$ que é dada pela Eq. (39) sem o termo de variação de pressão, tem-se:

$$\tilde{U}_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - w_j^n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} \right) \quad (i,j=1,2,3), \quad (40)$$

então

$$U_i^{n+1/2} = \tilde{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3). \quad (41)$$

A discretização no tempo da Eq. (35) resulta na expressão (Zienkiewicz e Codina, 1995):

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \frac{\partial U_i^{n+1/2}}{\partial x_i} \quad (i = 1,2,3). \quad (42)$$

Substituindo a Eq. (41) na Eq. (42) tem-se:

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \left[\frac{\partial \tilde{U}_i^{n+1/2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (43)$$

O segundo passo de tempo é dado pela expressão:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \frac{\partial U_i^{n+1/2}}{\partial t} \quad (i=1,2,3) \quad (44)$$

e utilizando as equações da quantidade de movimento, Eq. (36), com todas as variáveis no instante $t+\Delta t/2$, tem-se:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \Delta t \left(\frac{\partial f_{ij}^{n+1/2}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{n+1/2}}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_i} - w_j^{n+1/2} \frac{\partial U_i^{n+1/2}}{\partial x_i} \right) \quad (i,j=1,2,3). \quad (45)$$

Assim, as Eq. (40), (41), (43) e (45) podem ser solucionadas após uma discretização espacial na seguinte ordem:

- (1) Da Eq. (40) determina-se $\tilde{U}_i^{n+1/2}$,
- (2) da Eq. (43) determina-se Δp e, por consequência p^{n+1} ,
- (3) da Eq. (41) determina-se $U_i^{n+1/2}$, obtendo-se os valores de U_i em $t+\Delta t/2$,
- (4) da Eq. (45) determina-se U_i^{n+1} , obtendo-se os valores de U_i em $t+\Delta t$.

2.4.2 A discretização espacial

Nestas equações, aplica-se o procedimento de Galerkin padrão para a discretização espacial, considerando as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} U_i^n &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{U}}_i^n & \tilde{U}_i^{n+1/2} &= \mathbf{P}_E \tilde{\bar{\mathbf{U}}}_i^{n+1/2} & U_i^{n+1} &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1} \\ w_i^n &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^n & w_i^{n+1/2} &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1/2} & w_i^{n+1} &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_i^{n+1} \\ p &= \mathbf{N} \bar{p} & \Delta p &= \mathbf{N} \Delta \bar{p} \\ f_{ij}^n &\cong \mathbf{N} \bar{\mathbf{f}}_{ij}^n & f_{ij}^{n+1/2} &\cong \mathbf{P}_E \bar{\mathbf{f}}_{ij}^{n+1/2} & \tau_{ij}^n &\cong \mathbf{N} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^n. \end{aligned} \quad (i,j=1,2,3) \quad (46)$$

Aplicando este procedimento na Eq. (40), tem-se (Teixeira e Awruch, 2000):

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{P}_E^T \mathbf{P}_E d\Omega \right) \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = & \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{U}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \right) \bar{\mathbf{f}}_{ij}^n - \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \right) \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^n \right. \\ & \left. + \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \bar{\mathbf{p}}^n - \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{P}_E^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{w}}_j \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \right) \bar{\mathbf{U}}_i^n \right] \quad (i,j=1,2,3) \end{aligned} \quad (47)$$

ou

$$\Omega_E^{n+1/2} \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{U}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{L}_j (\bar{\mathbf{f}}_{ij}^n - \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^n) + \mathbf{L}_i \bar{\mathbf{p}}^n - \mathbf{T} \bar{\mathbf{U}}_i^n \right] \quad (i,j=1,2,3), \quad (48)$$

onde $\Omega_E^{n+1/2}$ e as matrizes \mathbf{C} , \mathbf{L}_i e \mathbf{T} estão definidas nas Eq. (23). De forma similar discretiza-se a equação da pressão, Eq. (43), e, aplicando-se integração por partes no seu lado direito, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \left(\frac{1}{c^2} \right) \mathbf{N} d\Omega \right] \Delta \bar{\mathbf{p}} = & \Delta t \left[\left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{P}_E d\Omega \right) \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} - \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_i d\Gamma \right) \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{4} \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \Delta \bar{\mathbf{p}} + \frac{\Delta t}{4} \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \mathbf{n}_i d\Gamma \right) \Delta \bar{\mathbf{p}} \right] \quad (i=1,2,3) \end{aligned} \quad (49)$$

ou

$$\left(\tilde{\mathbf{M}} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{H} \right) \Delta \bar{\mathbf{p}} = \Delta t \left(\mathbf{L}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} + \mathbf{f}_a \right), \quad (50)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \left(\frac{1}{c^2} \right) \mathbf{N} d\Omega \\ \mathbf{H} &= \int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \\ \mathbf{f}_a &= \int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_i \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} d\Gamma, \end{aligned} \quad (51)$$

sendo que \mathbf{L}_i foi definido nas Eq. (23). Nota-se que o termo de contorno que surgiria na integração por partes do termo de variação de pressão $\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \mathbf{n}_i \Delta \bar{\mathbf{p}} d\Gamma$ foi desprezado devido às seguintes considerações (Zienkiewicz e Taylor, 1991):

a) Se o contorno tem velocidade $\mathbf{U}_i^{n+1/2}$ prescrita então, pela Eq. (41), conclui-se que

$\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{n}_i \left(\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{n}_i \mathbf{U}_i^{n+1/2} d\Gamma$. Sendo, neste caso, desnecessário o cálculo do termo de variação de pressão.

b) Em superfícies de tração nula $p = \Delta p = 0$ em toda superfície. Além disso, a integral de superfície do termo de tensões na Eq. (54) também é nula.

A discretização espacial da Eq. (41) resulta:

$$\left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{P}_E^T \mathbf{P}_E d\Omega \right) \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{P}_E^T \mathbf{P}_E d\Omega \right) \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4} \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \mathbf{P}_E^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \Delta \bar{\mathbf{p}} \quad (i=1,2,3) \quad (52)$$

ou

$$\bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4\Omega_E} \mathbf{L}_i \Delta \bar{\mathbf{p}}. \quad (53)$$

E, finalmente, a discretização espacial da Eq. (45), integrando por partes alguns termos, fica da forma:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1} &= \left(\int_{\Omega^n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\mathbf{U}}_i^n + \Delta t \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mathbf{P}_E d\Omega \right) \left(\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1/2} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} \right) \\ &- \Delta t \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mathbf{N} d\Omega \right) \bar{\tau}_{ij}^n + \Delta t \left(\int_{\Omega^{n+1/2}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} d\Omega \right) \left(\bar{\mathbf{p}}^n + \Delta \bar{\mathbf{p}}/2 \right) \\ &- \Delta t \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_j d\Gamma \right) \left(\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1/2} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} \right) \\ &+ \Delta t \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{n}_j d\Gamma \right) \bar{\tau}_{ij}^n - \Delta t \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{n}_i d\Gamma \right) \left(\bar{\mathbf{p}}^n + \Delta \bar{\mathbf{p}}/2 \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (54) \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{M}^{n+1} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \mathbf{M}^n \bar{\mathbf{U}}_i^n + \Delta t \left[\mathbf{L}_j^T (\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1/2} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2}) - \mathbf{Q}_j \bar{\tau}_{ij}^n + \mathbf{Q}_i (\bar{\mathbf{p}}^n + \Delta \bar{\mathbf{p}}/2) + \mathbf{S}_{bi} \right] \quad (55)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= \int_{\Omega^n} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} \, d\Omega \\ \mathbf{S}_{bi} &= - \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{P}_E \mathbf{n}_j \, d\Gamma \right) (\bar{\mathbf{f}}_{ij}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{w}}_j^{n+1/2} \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2}) \\ &+ \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{n}_j \, d\Gamma \right) \bar{\tau}_{ij}^n - \left(\int_{\Gamma^{n+1/2}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{n}_i \, d\Gamma \right) (\bar{\mathbf{p}}^n + \Delta \bar{\mathbf{p}}/2) \end{aligned} \quad (56)$$

A equação da pressão, Eq. (50), é solucionada pelo método iterativo dos gradientes conjugados (Argyris *et al.*, 1985) utilizando-se um pré-condicionamento diagonal (ver Anexo A). Este método, além de exigir uma capacidade de armazenamento bem menor do que a dos métodos diretos de solução (característica importante para a solução de problemas complexos e maiores), permite explorar bastante os recursos de processamento vetorizado e paralelo dos computadores atuais.

O parâmetro de tempo $\theta = 1/2$, adotado pelo presente trabalho, torna o algoritmo condicionalmente estável (Zienkiewicz e Codina, 1995). O passo de tempo permissível para cada elemento finito é governado pelo limite de estabilidade dado por:

$$\Delta t_E = FS \frac{h_E}{|\mathbf{v}|} \quad (57)$$

onde FS é um fator de segurança, h_E é um comprimento característico do elemento e $|\mathbf{v}|$ o módulo da velocidade do fluido.

2.4.3 A equação da energia para os escoamentos de fluidos incompressíveis

A equação da conservação de energia, expressa em termos de energia total específica ϵ na Eq. (5), é usada em termos de energia interna específica e no algoritmo de escoamentos de fluidos incompressíveis. Considerando a equação da quantidade de movimento, Eq. (7), a

equação da continuidade para escoamentos de fluidos incompressíveis ($\partial v_i / \partial x_i = 0$), a condição de que o coeficiente de viscosidade volumétrica λ é nulo e o fato de que os termos viscosos podem ser desprezados em relação aos termos advectivos e de condução, a Eq. (5) pode ser reescrita em termos de energia interna específica como segue:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (58)$$

onde $e = C_v T$. O mesmo procedimento de discretizações temporal e espacial implementado nas equações de escoamentos de fluidos compressíveis é utilizado na Eq. (58).

2.4.4 Condições de contorno

Os tipos de condições de contorno para os problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis, basicamente, podem ser resumidos da seguinte forma:

- a) *Superfícies de entrada do domínio computacional*, onde é imposta a condição de escoamento plenamente desenvolvido ou não perturbado para os vetores de velocidade \mathbf{v} , a pressão p e a temperatura T (ou energia específica).
- b) *Superfícies de saída do domínio computacional*, onde as variáveis \mathbf{v} e T não são prescritas enquanto que a pressão p e/ou a tração $(\boldsymbol{\tau} + p) \cdot \mathbf{n}$ podem ser fixadas, sendo $\boldsymbol{\tau}$ o vetor de tensões viscosas e \mathbf{n} é o vetor unitário da normal externa da superfície considerada.
- c) *Superfícies de corpos móveis ou estáticos*. Semelhante ao que acontece com os escoamentos de fluidos compressíveis, devem ser impostas condições de contorno cinemáticas, nas quais as velocidades e deslocamentos devem ser iguais aos calculados pelo domínio do corpo para o mesmo instante de tempo. Além disso, deve-se estabelecer condições de contorno para a energia pela imposição de temperatura uniforme (superfície isotérmica) ou pela imposição de gradiente nulo de temperatura normal à superfície (superfície adiabática). As superfícies de corpos estáticos e de paredes de simetria seguem os mesmos procedimentos indicados para escoamentos de fluidos compressíveis.
- d) *Superfícies livres*, onde somente a pressão p deve ser prescrita como igual à pressão atmosférica. Uma discussão mais detalhada deste caso pode ser vista no Exemplo 8.3.5 que apresenta o problema de uma onda solitária em um tanque retangular.

3 A TÉCNICA DE AVANÇO NO TEMPO UTILIZANDO SUBCICLOS

3.1 INTRODUÇÃO

As técnicas de integração no tempo em esquemas explícitos de solução, utilizando passo de tempo variável, são muito importantes em simulações numéricas de problemas de engenharia. O método de passo de tempo variável é uma técnica de integração mista no tempo, usando-se para tanto o mesmo integrador, mas com diferentes passos de tempo para diferentes partes do domínio. Essa técnica permite que cada elemento ou grupo de elementos seja integrado usando um passo de tempo mais próximo do seu passo de tempo crítico, que é o maior passo de tempo que mantém a estabilidade de solução (Belytchko e Mullen, 1976). O passo de tempo crítico é uma função do tamanho do elemento e das propriedades do escoamento do fluido. Sem a técnica de passo de tempo variável, todos os elementos do domínio devem ser integrados usando o menor dos passos de tempo críticos da malha de elementos finitos. O uso da técnica do passo de tempo variável proporciona um aumento substancial na eficiência computacional, principalmente em problemas que possuem tamanhos e propriedades de elementos muito diversificados. Em problemas de escoamentos de fluidos, por exemplo, necessita-se de uma discretização mais refinada em regiões próximas de superfícies de corpos, implicando no uso de elementos finitos de vários tamanhos.

O método de passo de tempo variável foi introduzido por Belytschko e Mullen (1976) quando apresentaram um método implícito-explícito para equações de segunda ordem que surgiam da semidiscretização da equação da continuidade, usando uma partição nodal. A estabilidade deste tipo de procedimento foi estudada por Belytchko e Mullen (1976) e Park (1980). Mais tarde, Hughes e Liu (1978a, 1978b) introduziram um método implícito-explícito no qual a malha era dividida em grupos de elementos ao invés de nós, conhecido como uma partição de elementos. Ambos métodos proporcionaram um aumento substancial na eficiência computacional. Um procedimento de passo de tempo variável explícito foi introduzido por Belytschko *et al.* (1979). Neste, cada grupo de nós era integrado explicitamente com diferentes passos de tempo. O método de passo de tempo variável também foi aplicado na semidiscretização de primeira ordem por Belytschko *et al.* (1985) e Smolinski *et al.* (1988). Nestes métodos citados, é necessário que a relação entre passos de tempo seja inteira, ou seja,

se existe um grupo de elementos ou de nós que possua um passo de tempo Δt , um segundo grupo terá um passo $n\Delta t$ ou $\Delta t/n$, onde n é um número inteiro positivo. Embora esta restrição limite a divisão da malha em grupos, ela permite que o código seja vetorizado, o que não acontece em outros métodos sem esta restrição (Neal e Belytschko, 1989).

Belytschko e Gilbertsen (1992) aplicaram a técnica de passo de tempo variável com a relação entre passos de tempo inteira, utilizando os recursos de paralelização e vetorização para problemas de dinâmica estrutural. No presente trabalho, aplica-se a mesma técnica utilizando uma codificação vetorizada em problemas de escoamento de fluidos 3-D (Teixeira e Awruch, 2001).

3.2 O PROCEDIMENTO DE PASSO DE TEMPO VARIÁVEL

O método de passo de tempo variável permite que o algoritmo de Taylor-Galerkin seja executado considerando o passo de tempo crítico de cada elemento na malha de elementos finitos. Assim, os elementos são divididos em grupos conforme seus passos de tempo críticos. Os grupos de elementos podem ser integrados com passos de tempo diferentes, mas sujeitos às seguintes restrições:

- a) O maior passo de tempo deve ser um inteiro múltiplo de todos os passos;
- b) se algum nó estiver conectado a elementos de grupos diferentes, os passos de tempo dos grupos deverão ser múltiplos um do outro.

Neste trabalho, a primeira restrição é satisfeita fazendo com que todos os passos de tempo sejam inteiros e múltiplos um do outro. Esta restrição adicional permite que os elementos sejam armazenados em grupos de acordo com seus passos de tempo críticos e não pela sua proximidade física.

No início da solução, são determinados os passos de tempo dos grupos de nós (Δt_N) e dos grupos de elementos (Δt_e). Como os elementos e nós são divididos em passos de tempo, estes terão as variáveis do problema no mesmo tempo, somente quando completarem um ciclo. O passo de um ciclo é o maior dos passos de tempo dos grupos de elementos e é chamado de passo de ciclo.

Para separar os elementos e nós por grupos de passos de tempo, deve-se calcular os passos de tempo críticos de cada elemento conforme a Eq. (30). Esses passos são convertidos em inteiros múltiplos do menor passo de tempo da malha. Após, são ajustados para satisfazer

a restrição de que todos os passos devem ser inteiros e múltiplos um do outro. Inicialmente, é calculado o passo de tempo de cada nó, considerando-se o menor passo de tempo de todos os elementos conectados ao nó. Depois do Δt_N de todos os nós serem computados, o mesmo é feito para os passos de tempo de cada elemento, considerando-se o menor dos passos de todos os nós conectados ao elemento. Assim, pode-se garantir que nenhum nó terá algum elemento com passo de tempo maior que o do referido nó. A seguir, os elementos são separados por grupos conforme seus passos de tempo, o mesmo acontecendo com os nós da malha.

Para controlar a atualização dos elementos e dos nós no tempo, é gerado um vetor que indica quais os grupos que serão atualizados a cada instante ou subciclo, até completar um ciclo. No primeiro subciclo, todos os grupos de elementos e de nós são atualizados. Em seguida, estes serão atualizados somente se $t_G \leq t_C$ para o grupo de elementos e $t_N \leq t_C$ para o grupo de nós, onde t_G e t_N são os instantes de tempo dos grupos de elementos e de nós no ciclo, respectivamente, e t_C é o tempo corrente no ciclo.

A Fig. 2 mostra o avanço no tempo de cada grupo de elementos ou de nós ao longo de um ciclo, quando tem-se 7 grupos com os respectivos passos de tempo: $1\Delta t$, $2\Delta t$, $4\Delta t$, $8\Delta t$, $16\Delta t$, $32\Delta t$ e $64\Delta t$. Neste caso, portanto, um ciclo completa-se com $64\Delta t$. Observa-se, por exemplo, que quando $t_C = 25\Delta t$, os grupos de 1 a 4 ($1\Delta t$, $2\Delta t$, $4\Delta t$ e $8\Delta t$, respectivamente) são atualizados.

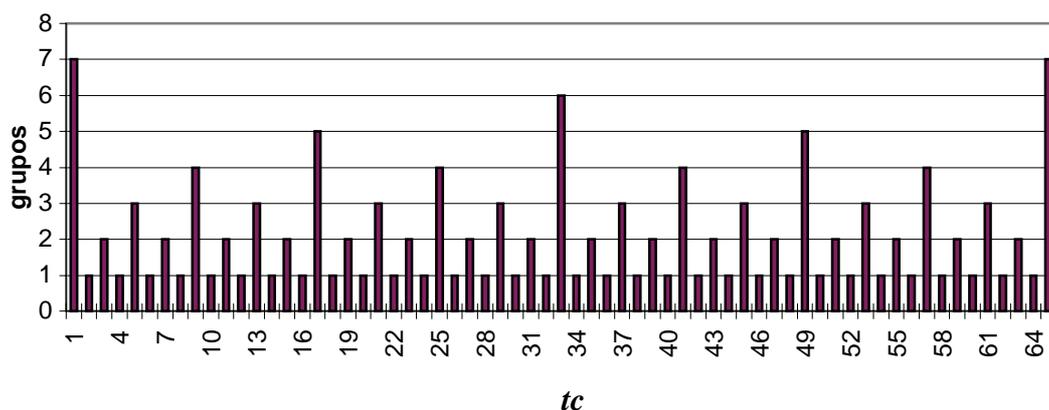


FIGURA 2 – Atualização dos grupos de elementos e de nós para cada subciclo

Quando um elemento é atualizado, necessita-se dos valores das variáveis do problema nos nós conectados a este. Mas como os nós podem ter passos de tempo diferentes dos elementos a eles conectados, o presente método utiliza uma interpolação linear no tempo dos

valores destas variáveis, para que todos os nós do referido elemento estejam no mesmo instante de tempo no momento da atualização.

O processo de avanço no tempo se dá dentro de um ciclo até que todos os nós e elementos tenham sido atualizados para o mesmo tempo corrente (t_c). Nesse instante, completa-se um ciclo e, antes de iniciar um novo, é feita uma reavaliação dos grupos de elementos e de nós. Apenas os elementos e nós que possuem um passo de tempo crítico menor que o passo atual serão rearranjados. Existem outros fatores que devem ser considerados para o arranjo dos grupos de elementos e nós do domínio. As condições de estabilidade de esquemas explícitos de integração no tempo, usados em problemas não-lineares, variam a cada instante devido às mudanças geométricas e de propriedades do material. Portanto, deve-se introduzir um algoritmo que identifique as regiões em que ocorrem fenômenos físicos importantes possíveis de causar perda de precisão ou instabilidade numérica na solução do problema. Assim, o passo de tempo de cada região do domínio pode ser controlado conforme a intensidade destes fenômenos. Em 3.3 apresenta-se o cálculo destes indicadores de controle de passo de tempo.

Para melhor compreensão do algoritmo de passo de tempo variável, analisa-se um exemplo fictício com elementos unidimensionais de dois nós. A Fig. 3 mostra um esquema do método com três grupos de elementos ($1\Delta t$, $2\Delta t$ e $4\Delta t$). O tempo está representado no eixo vertical. O tempo dos nós são representados por círculos escuros. Os círculos não preenchidos representam um tempo no qual as variáveis do nó são interpoladas entre dois instantes conhecidos. A influência dos outros nós sobre o cálculo das variáveis do problema é indicada pelas setas. No primeiro subciclo, o tempo corrente t_c é t , então todos os grupos de elementos e de nós são atualizados. Os nós 1, 2 e 3 são atualizados para $t+\Delta t$; os nós 4 e 5 para $t+2\Delta t$ e os nós 6 e 7 para $t+4\Delta t$. No segundo subciclo, o tempo corrente é $t+\Delta t$, portanto apenas os grupos de nós e de elementos com passos Δt devem ser atualizados (nós 1, 2, 3 e elementos 1, 2, 3). Nota-se que neste subciclo, o nó 3 recebe a influência dos valores interpolados do nó 4. No terceiro subciclo, o tempo corrente é $t+2\Delta t$, sendo atualizados os nós de 1 a 5. Após esta atualização, os nós pertencentes aos grupos com passo de $2\Delta t$ terminam o ciclo, assim como os nós do grupo com $4\Delta t$ que precisaram, apenas, da primeira atualização para finalizar o ciclo. No quarto e último subciclo, novamente, apenas os nós e elementos pertencentes aos grupos com passo Δt são atualizados, completando um ciclo de tempo.

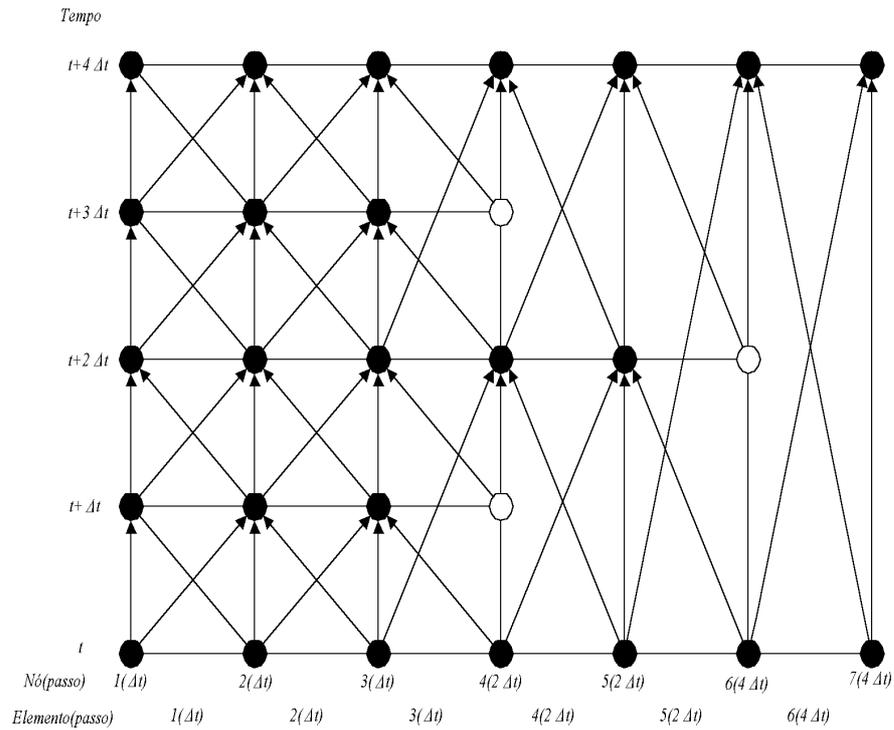


FIGURA 3 – Esquema do método de passo de tempo variável para três grupos de elementos

O ganho teórico de tempo de processamento (*speed-up*) obtido pelo uso da técnica de subciclos pode ser quantificado como segue (Belytschko e Gilbertsen, 1992):

$$\text{ganho teórico de tempo de processamento} = \frac{t^{ns}}{t^s} = \frac{NSUB}{\sum_i^{NSUB} PEAS_i / 100}, \quad (59)$$

onde t^{ns} e t^s são os tempos de processamentos requeridos para a solução do problema, utilizando um passo de tempo uniforme e passos de tempo variáveis, respectivamente. $NSUB$ é o número de subciclos e $PEAS_i$ é a porcentagem de elementos atualizados no subciclo i .

3.3 OS INDICADORES DE CONTROLE DE PASSO DE TEMPO

O presente algoritmo controla o passo de tempo usando os mesmos critérios empregados por Argyris *et al.* (1990) para refinamento da malha de elementos finitos. Nestes critérios, utilizam-se indicadores de refinamento que permitem identificar frentes de choque, regiões de baixa velocidade e regiões com recirculação. Quando os indicadores identificam a

possibilidade de uma instabilidade numérica ou de uma significativa perda de precisão na solução em algum elemento da malha de elementos finitos, o passo de tempo do referido elemento e de seus vizinhos são igualados ao menor passo de tempo entre eles ou, alternativamente, ao menor passo de tempo do domínio. Desta maneira, quando os elementos são atualizados, não há necessidade de interpolar as variáveis dos nós que pertencem aos referidos elementos, pois todas as variáveis estão no mesmo instante de tempo. Este procedimento elimina a possibilidade de ocorrer instabilidades de solução, devido às interpolações lineares das variáveis.

Os indicadores são descritos como segue:

a) Indicador que detecta as frentes de choque dado por:

$$r_1^2 = \left[\left(\frac{\partial v_l}{\partial l} \right) + \left(\frac{\partial v_t}{\partial l} \right) \right] h_E^2, \quad (60)$$

onde l é a direção do vetor gradiente de velocidade, v_l e v_t são as componentes de velocidade ao longo de l e de sua direção normal t , respectivamente, e h_E é uma dimensão característica do elemento E .

b) Indicador que identifica regiões de baixas velocidades ou zonas de estagnação utilizando os seguintes parâmetros:

$$r_2 = (|v_1| + |v_2| + |v_3| + |v_4|)^{-n}, \quad (61)$$

onde v_i refere-se ao módulo da velocidade nos nós $i=1,2,3,4$ de um determinado elemento, e n é um expoente igual a 2.0 no presente trabalho (o mesmo valor usado por Argyris *et al.* (1990)).

c) Indicador que quantifica a variação da direção da velocidade de escoamento entre os nós de cada elemento, conforme a expressão:

$$r_3 = |\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1 - \varphi_3| + |\varphi_1 - \varphi_4|, \quad (62)$$

onde φ_i são os ângulos formados pelos vetores de velocidade em cada nó com o eixo x_1 .

Para cada indicador, dados pelas Eq. (60), (61) e (62), é calculado um valor médio r_m da forma:

$$r_m^2 = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} r_i^2, \quad (63)$$

onde N_e é o número de elementos finitos da malha. O passo de tempo de um determinado elemento k é alterado quando um dos indicadores definidos em (60), (61) e (62) é maior que os respectivos valores médios r_m , ou seja:

$$r_k > r_m. \quad (64a)$$

A condição (64a) pode ser mais flexível de acordo com o problema, substituindo-a por:

$$r_k > a r_m, \quad (64b)$$

onde a é um fator de controle do critério.

3.4 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

O procedimento de passo de tempo variável pode ser resumido como segue:

1. Estabelecer as condições iniciais $\mathbf{V}(0)$ e $\mathbf{x}(0)$.
2. Inicializar os tempos dos grupos de elementos e de nós ($t_G=0$ para todos grupos de elementos; $t_N=0$ para todos os nós; $t_c=0$).
3. Calcular Δt para cada elemento usando a Eq. (30) e os controles numéricos de estabilidade expressos pelas Eq. (60), (61) e (62).
4. Separar os elementos e nós em grupos de acordo com o passo de tempo.
5. Se for o primeiro subciclo, selecionar os elementos (se necessário) e atualizar todos os tempos dos grupos de elementos e nós; atualizar t_c ($t_c=\Delta t$).
6. Para o subciclo n ($n > 1$), atualizar os tempos nodais se $t_N < t_c$ e atualizar os tempos dos grupos de elementos se $t_G < t_c$; atualizar t_c .
7. Para os laços nos elementos a serem atualizados:
 - (a) Calcular $\mathbf{V}^{n+1/2}$ com a Eq. (22).
 - (b) Calcular os termos da Eq. (29) a nível de elemento.
8. Para os nós pertencentes aos grupos que devem ser atualizados:
 - (a) Calcular as variáveis de conservação \mathbf{V}^{n+1} em $t=t_{n+1}$, montar a Eq. (29) e prescrever as condições de contorno.

- (b) Calcular as variáveis de conservação suavizadas através da Eq. (32).
 - (c) Calcular as variáveis dependentes p^{n+1} e T^{n+1} .
9. Interpolar linearmente as variáveis dos nós a serem atualizados neste subciclo.
 10. Se $tc < t_{ciclo}$, selecionar os grupos de elementos e nós que serão atualizados no próximo subciclo; para os nós destes grupos, reconstruir os valores das variáveis interpoladas e voltar para o passo 6.
 11. Se $t < t_{final}$ então voltar para o passo 3, senão, imprimir resultados e finalizar o processo.

No procedimento acima, t_{ciclo} é o instante de tempo em que se completa um ciclo e t_{final} é o instante de término do processo de solução. Embora o passo 11 indique que o rearranjo dos grupos deva ser realizado a cada final de ciclo, é possível que esta seleção ocorra em intervalos maiores, dependendo da intensidade das variações das propriedades do escoamentos e da geometria do problema com o tempo. No presente trabalho, a avaliação dos grupos é feita a cada 10 ciclos.

4 A ATUALIZAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS

Os métodos de solução de problemas que envolvem movimentos relativos entre corpos e superfícies, utilizando uma formulação lagrangeana euleriana arbitrária (ALE), necessitam de uma lei que estabeleça o movimento dos pontos no interior do domínio. A distribuição espacial da velocidade da malha \mathbf{w} deve ser tal que a distorção dos elementos seja a menor possível, respeitando as condições de contorno dadas por:

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_0} = \mathbf{w}_0 \quad (65)$$

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0} ,$$

onde Γ_0 são as superfícies móveis e Γ_1 as superfícies estacionárias. Os contornos de superfícies livres e de superfícies de corpo com movimento rígido e/ou de deformação, são exemplos de superfícies móveis. Geralmente, as superfícies estacionárias são aquelas que contornam externamente o domínio ou as superfícies de um corpo sem movimento. Se a distribuição da velocidade da malha no domínio não for adequadamente suavizada, podem surgir rapidamente elementos distorcidos, forçando muitos remalhamentos locais e globais, causando perdas de precisão (devido às interpolações inerentes ao processo de remalhamento) e aumento de tempo de processamento.

4.1 AS TÉCNICAS DE MOVIMENTO DE MALHA

Há duas décadas atrás, Donea *et al.* (1982) desenvolveram uma técnica de movimento automático de malha, adotada também por Santos (1993), que se baseia em um rezonamento dos nós da malha através de uma média das velocidades da malha dos nós vizinhos. Neste caso, o cálculo das velocidades da malha para cada nó i é dada por:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\sum_{j=1,N} \mathbf{w}^j}{N} + \frac{0.1}{\Delta t N^2} \sum_{j=1,N} \mathbf{d}_{ij} \sum_{j=1,N} \frac{\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_i}{\mathbf{d}_{ij}} , \quad (66)$$

onde j são os nós conectados ao nó i num total de N , Δt é o passo de avanço no tempo, \mathbf{d}_{ij} é um vetor que representa a distância entre os nós i e j , \mathbf{d}_i e \mathbf{d}_j são os deslocamentos que os nós i e j sofreram na última atualização temporal. Sobre a Eq. (66) devem ser impostas as condições (65), implicando uma solução iterativa. Embora a implementação deste algoritmo seja simples, ele deixa a desejar em domínios com superfícies de grandes movimentos relativos, uma vez que os nós no interior do domínio, não acompanham de forma eficiente os movimentos destas superfícies. Os últimos métodos utilizados para especificar o movimento da malha contornam este problema, e podem ser, basicamente, divididos em três famílias (Löhner e Yang, 1996):

- (a) funções analíticas prescritas pelo usuário;
- (b) suavização de coordenadas;
- (c) suavização de velocidades.

No primeiro caso, a velocidade da malha é uma função analítica da distância até a superfície de contorno. Existem eficientes algoritmos baseados neste método, podendo-se citar Rostand (1988), Löhner (1988), Bonet e Peraire (1991), Martin e Löhner (1992). A velocidade \mathbf{w} em um ponto da malha é calculada determinando o ponto mais próximo na superfície móvel $\mathbf{x}|_{\Gamma_0}$ e a distância δ até este ponto, resultando na seguinte expressão:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}|_{\Gamma_0}) f(\delta) . \quad (67)$$

A função $f(\delta)$ assume o valor unitário para $\delta=0$ e decai até zero com o aumento de δ . A maior dificuldade destes procedimentos surge quando existem diversos corpos móveis no domínio. Por outro lado, se for possível o uso da distância inicial δ em todos os instantes de tempo, torna-ser um método extremamente rápido (Boschitsch e Quackenbush, 1993; Davis e Bendiksen, 1993).

No segundo caso, a malha não-estruturada do fluido é tratada como um sistema discreto pseudo-estrutural, composto de uma massa fictícia concentrada em cada ponto da malha e composto de amortecedores e molas fictícias em cada aresta dos elementos (ver Fig. 4) (Farhat, 1995). Assim, o movimento do sistema pseudo-estrutural formado, fica governado pelo sistema de equações:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{K}}_c \mathbf{x}|_{\Gamma} , \quad (68)$$

onde $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$ são as matrizes de massa, amortecimento e de rigidez fictícios associados com a malha do fluido, e $\tilde{\mathbf{K}}_c$ é uma matriz de transferência que descreve a ação do movimento estrutural na malha dinâmica do fluido. A Eq. (68) é integrada no tempo até alcançar-se um deslocamento de equilíbrio permanente \mathbf{x} .

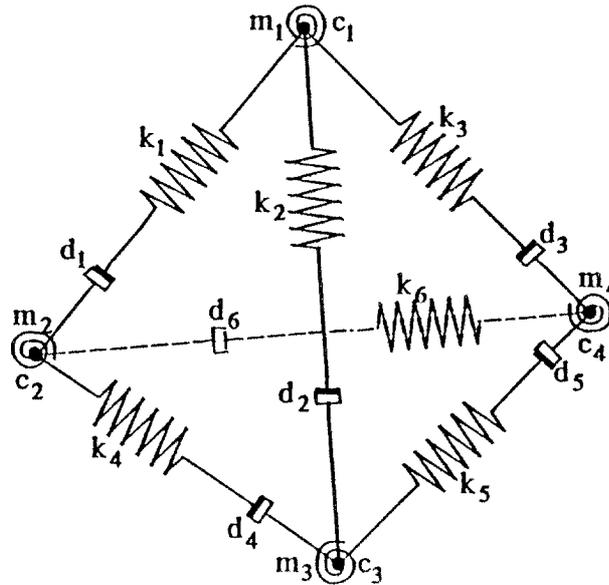


FIGURA 4 - Um tetraedro pseudo-estrutural na malha do fluido

Alternativamente, $\tilde{\mathbf{M}}$ e $\tilde{\mathbf{D}}$ podem ser adotados como nulos, e a nova posição da malha do fluido pode ser calculada via solução do problema estático (Batina, 1989; Farhat, 1995) como segue:

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{K}}_c \mathbf{x}|_{\Gamma} . \quad (69)$$

A rigidez de cada mola linear colocada nas arestas de conexão de dois pontos i e j da malha é inversamente proporcional à distância entre os mesmos dada por:

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{1}{\|x_j - x_i\|_2} . \quad (70)$$

A posição dos pontos na superfície do corpo é prescrita através do cálculo do movimento desta superfície, enquanto que, a posição dos pontos no contorno não-perturbado é mantida

fixa. A cada passo de tempo t^{n+1} , a nova posição dos pontos no interior da malha é determinada através da solução da Eq. (69) por um procedimento iterativo de dois passos (Farhat, 1995).

No terceiro caso, a velocidade da malha é suavizada diretamente, obedecendo as condições de contorno dadas pelas Eq. (65). Nesse método, o campo de velocidades da malha é determinado pela solução do sistema de equações:

$$\nabla \mathbf{k} \nabla \mathbf{w} = 0, \quad (71)$$

onde \mathbf{k} são os coeficientes de difusão. Este sistema é discretizado usando a técnica de elementos finitos, resultando em um sistema de equações que pode ser solucionado via métodos de relaxação (Löhner e Yang, 1996).

Na maioria das aplicações práticas, os fenômenos de escoamento mais relevantes associados aos gradientes de massa específica, velocidade e pressão, ocorrem próximo às superfícies imersas no fluido. Portanto, os elementos menores geralmente estão localizados próximos a estas superfícies. Com o objetivo de diminuir a distorção nesta região, Löhner e Yang (1996) propuseram um coeficiente de difusão k , baseado na distância δ do corpo. Este coeficiente está representado no gráfico da Fig. 5. Para pequenos valores de δ ($\delta \leq \delta_l$), k tem um valor elevado ($k = k_0$), proporcionando um pequeno gradiente de \mathbf{w} , isto é, velocidade de malha quase constante próximo aos corpos móveis. Para δ grande ($\delta \geq \delta_u$), k tende ao valor unitário, mantendo uma deformação quase uniforme para os elementos de tamanho grande, localizados em uma região afastada dos corpos.

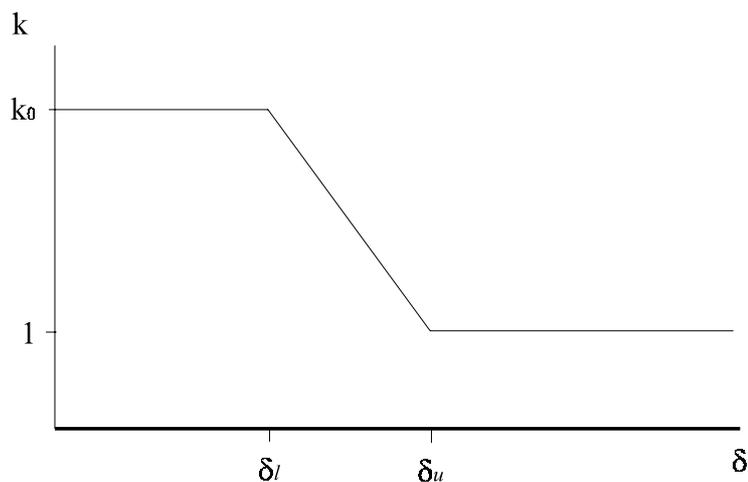


FIGURA 5 – Coeficiente de difusão k em função da distância δ do corpo

4.2 O MÉTODO DE MOVIMENTO DE MALHA DO PRESENTE TRABALHO

O método de movimento de malha, adotado pelo presente trabalho, utiliza um procedimento de suavização de velocidades semelhante ao terceiro caso citado anteriormente. A atualização da velocidade da malha, nos pontos i do interior do domínio, está baseada na velocidade da malha nos pontos j , pertencentes às superfícies de contorno (ver esquema da Fig. 6) da seguinte forma:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\sum_{j=1}^{ns} a_{ij} \mathbf{w}^j}{\sum_{j=1}^{ns} a_{ij}}, \quad (72)$$

onde ns é o número total de pontos pertencentes às superfícies e a_{ij} são os coeficientes de influência entre os pontos no interior do domínio e os de superfície, dados pela seguinte expressão:

$$a_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^4}, \quad (73)$$

sendo d_{ij} a distância entre os pontos i e j . Na realidade, a_{ij} representa o peso que cada ponto j da superfície tem sobre o valor da velocidade da malha nos pontos i do interior do domínio. Quando d_{ij} é pequeno, a_{ij} é elevado, valorizando a influência dos pontos mais próximos. Quanto mais afastado o ponto j estiver do ponto i , menor vai ser a sua influência sobre a velocidade da malha, uma vez que a_{ij} depende do inverso da distância entre os dois pontos na quarta potência. O expoente da distância d_{ij} pode ser ajustado pelo usuário, alterando a lei de interpolação dos valores de velocidade da malha. Um expoente mais baixo permite uma influência maior dos pontos de superfícies mais afastados e, o inverso ocorre, quando utiliza-se expoentes mais elevados. Nesta escolha deve-se considerar, pelas razões já apresentadas, que a velocidade da malha, nos pontos próximos às superfícies, deve ser o mais próximo de um valor constante. Este método, denominado de método completo, proporciona movimentos de malha bastante suavizados, com configurações ao longo do tempo de ótima qualidade, mesmo com a presença de grandes deslocamentos de superfície.

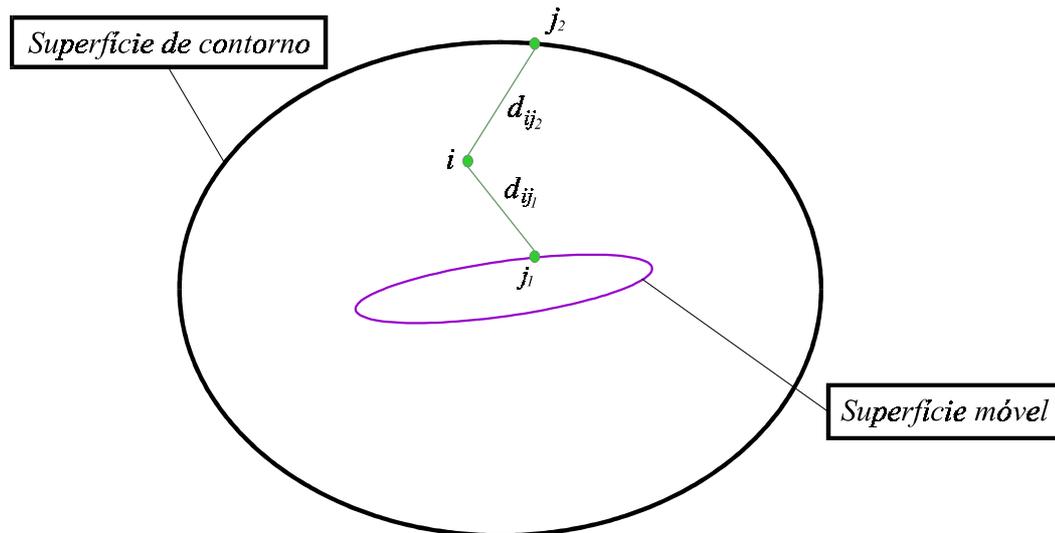


FIGURA 6 – Desenho esquemático do método de movimento de malha

No presente trabalho, também adotou-se uma variação deste método nos casos em que os deslocamentos das superfícies não são significativamente elevados, denominado de método simplificado. Esse consiste em escolher previamente, para cada ponto do interior do domínio, no mínimo dois pontos de superfície mais próximos, que influenciam no cálculo da velocidade da malha conforme estabelece a Eq. (72). Um destes pontos representa a superfície móvel, o outro a superfície estática, geralmente a superfície externa de contorno do domínio. Por serem os pontos mais próximos das respectivas superfícies, estes possuem os maiores valores de coeficiente de influência a_{ij} dentre os existentes nestas superfícies. Portanto, este procedimento utiliza a mesma Eq. (72), apenas desprezando os nós de superfície mais afastados do ponto considerado, resultando na seguinte expressão:

$$\mathbf{w}^i = \frac{a_{ik} \mathbf{w}^k + a_{il} \mathbf{w}^l}{a_{ik} + a_{il}}, \quad (74)$$

onde k e l representam os pontos nas superfícies móvel e estática, respectivamente. Observa-se que este método é semelhante ao apresentado no primeiro caso, em que o campo de velocidades da malha é uma função da distância dos contornos do domínio. A Fig. 7 mostra um desenho esquemático deste método. O procedimento pode ser generalizado quando existirem mais de uma superfície de corpo. Neste caso, deve-se utilizar, não apenas dois pontos, mas um ponto de cada superfície para calcular o campo de velocidades de malha no interior do domínio.

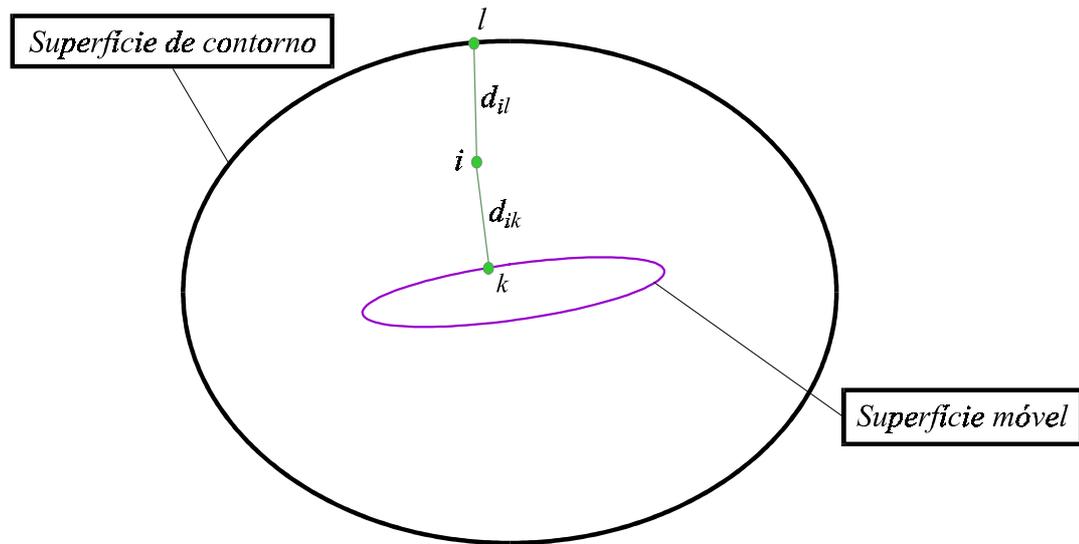


FIGURA 7 – Desenho esquemático do método simplificado de movimento de malha

5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PLACAS E CASCAS

5.1 A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA DA MECÂNICA DO CONTÍNUO COMPUTACIONAL

Antes de descrever as formulações do elemento de placa e casca, utilizadas no presente trabalho, é importante apresentar as equações governantes da mecânica do contínuo, baseadas no princípio dos trabalhos virtuais. Neste estudo, inclui-se a possibilidade do corpo sofrer rotações e deslocamentos finitos.

5.1.1 Tensores de tensão e deformação

A Fig. 8 mostra um corpo de forma genérica em um sistema estacionário de coordenadas cartesianas, experimentando movimentos com deslocamentos finitos. A configuração do corpo varia continuamente, exigindo o uso de medidas de tensão e deformação apropriadas. O instante de tempo, ao qual se refere cada variável, é indicado por um sobrescrito à esquerda da mesma. Assim, representa-se as coordenadas de um determinado ponto por ${}^t x_i$, os deslocamentos por ${}^t u_i$, as áreas de superfície por ${}^t A$ e assim por diante. Como a configuração do corpo no instante de tempo $t+\Delta t$ não é conhecida, as forças aplicadas, as tensões e deformações devem ser referenciadas a uma configuração de equilíbrio conhecida. Por exemplo, as componentes da força de superfície no instante de tempo $t+\Delta t$, referidas à configuração 0, são representadas por ${}^{t+\Delta t} f_i^s$ ($i=1,2,3$), onde o sobrescrito esquerdo indica o instante de tempo em que a variável atua e o subscrito esquerdo indica a configuração com respeito à qual a mesma é medida. Uma exceção é feita quando a quantidade em consideração atua na mesma configuração em que ela é medida. Neste caso, é indicado somente o sobrescrito. Por exemplo, para o tensor de Cauchy tem-se ${}^{t+\Delta t} \tau_{ij} = {}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$ ($i,j=1,2,3$).

Uma medida de tensão muito usada é o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff. Esta tensão no instante t referenciada à configuração 0, é definida como (Bathe, 1996):

$${}^t S_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 x_{i,k} {}^t \tau_{kl} {}^0 x_{j,l} \quad (i,j,k,l=1,2,3), \quad (75)$$

onde ${}^0\rho$ e ${}^t\rho$ são as massas específicas do material nas configurações 0 e t , respectivamente, e ${}^0_{,i}x_{i,k} = \partial^0 x_i / \partial^t x_k$. As componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff podem ser utilizadas em relação a outras configurações. Assim, por exemplo, considerando que atuam no instante $t+\Delta t$, podem ser referenciadas à configuração t , usadas na formulação lagrangeana atualizada.

É conveniente lembrar que

$$\frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} = \det {}^t\mathbf{X}, \quad (76)$$

onde ${}^t\mathbf{X}$ é o gradiente de deformação, cuja componente ${}^tX_{ij}$ é dada por:

$${}^tX_{ij} = \frac{\partial^t x_i}{\partial^0 x_j} \quad (77)$$

e $\det {}^t\mathbf{X}$ é o determinante de ${}^t\mathbf{X}$. Levando em conta a definição do gradiente de deformação, a Expressão (75) pode ser reescrita na forma matricial da seguinte maneira:

$${}^t\mathbf{S} = (\det {}^t\mathbf{X}) {}^t\mathbf{X}^{-1} {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t\mathbf{X}^{-T}. \quad (78)$$

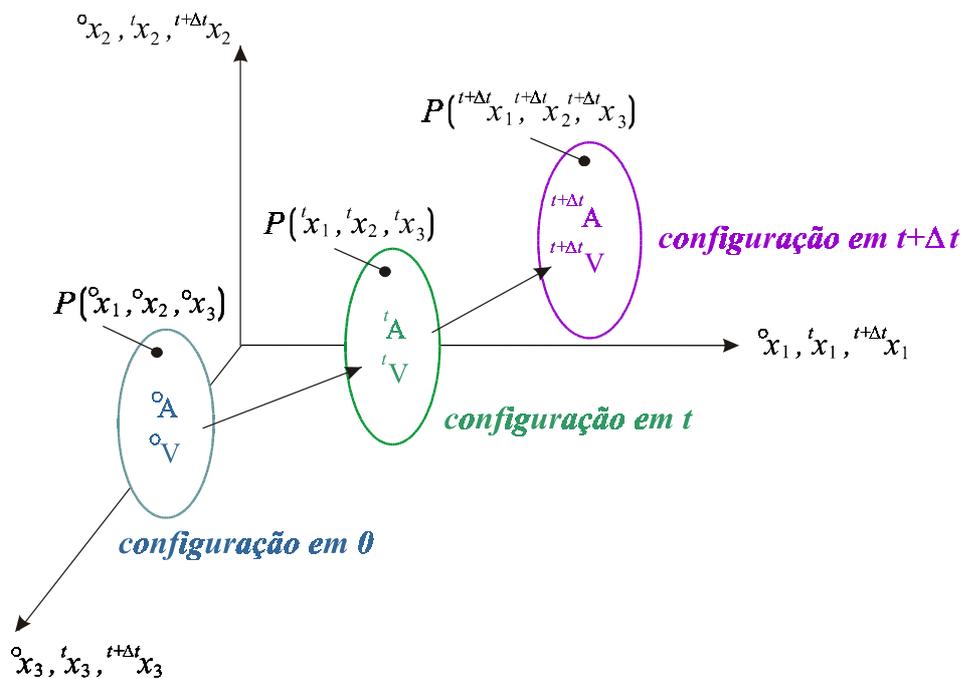


FIGURA 8 – Movimento de um corpo em um sistema de coordenadas cartesianas estacionárias

Observa-se que o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff é função, apenas, das deformações do material e não é afetado pelos movimentos de corpo rígido, sendo, portanto, um tensor objetivo. Existem outras medidas de tensão, como os tensores de taxa de tensão de Jaumann, Lie, Truesdell e Green-Naghdi, que precisam de um processo de integração no tempo para calcular as tensões de Cauchy correntes. Ao contrário, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff é um tensor cujas componentes são tensões totais que podem ser calculadas a partir de deformações correntes totais.

O tensor de deformação usado com o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff é o tensor de deformação de Green-Lagrange definido como:

$${}^t_0 \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t_0 u_{i,j} + {}^t_0 u_{j,i} + {}^t_0 u_{k,i} {}^t_0 u_{k,j} \right) \quad (i,j,k=1,2,3) . \quad (79)$$

Esta medida de deformação satisfaz as mesmas condições que a correspondente medida de tensão, ou seja, é um tensor simétrico e é invariável aos movimentos de corpo rígido.

5.1.2 As equações governantes na formulação lagrangeana atualizada

Na formulação lagrangeana atualizada, as variáveis estão referenciadas à configuração do instante de tempo t . A equação básica do movimento que estabelece o equilíbrio de um corpo em um determinado instante de tempo $t+\Delta t$, na formulação lagrangeana atualizada, é determinada pelo princípio dos trabalhos virtuais expresso por (Bathe, 1996):

$$\int_{{}^t V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (i,j=1,2,3) , \quad (80)$$

onde

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^t x_{i,k} {}^{t+\Delta t} \tau_{kl} {}^t x_{j,l} , \quad (81)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,i} {}^{t+\Delta t} u_{k,j} \right) , \quad (82)$$

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{{}^{t+\Delta t} V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t} dV + \int_{{}^{t+\Delta t} A} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^s {}^{t+\Delta t} dA , \quad (83)$$

sendo $i,j,k,l=1,2,3$; ${}^t\rho/{}^{t+\Delta t}\rho = \det{}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{X}$, onde $\det{}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{X}$ é o determinante do gradiente de deformação. ${}^{t+\Delta t}R$ é o trabalho virtual externo, ${}^{t+\Delta t}f_i^B$ e ${}^{t+\Delta t}f_i^S$ são as componentes dos vetores de força de volume e de superfície aplicadas ao corpo, respectivamente. δu_i são as componentes do vetor de deslocamento virtual. Na análise dinâmica, deve-se incluir um termo do lado esquerdo da Eq. (80) que represente as forças de inércia dado por:

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\rho {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV, \quad (84)$$

sendo

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (85)$$

As tensões ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ podem expressas da seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^t\tau_{ij} + {}_t\Delta S_{ij} \quad (i,j=1,2,3), \quad (86)$$

onde ${}^tS_{ij} = {}^t\tau_{ij}$ e ${}_t\Delta S_{ij}$ é a tensão incremental referenciada à configuração t . Para as deformações, tem-se que:

$${}^{t+\Delta t}{}_{ij}\varepsilon = {}_t\Delta\varepsilon_{ij}, \quad {}_t\Delta\varepsilon_{ij} = {}_t\Delta e_{ij} + {}_t\Delta\eta_{ij} \quad (i,j=1,2,3), \quad (87)$$

sendo ${}_t\Delta e_{ij}$ a deformação incremental linear referenciada à configuração t , dada por:

$${}_t\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t\Delta u_{i,j} + {}_t\Delta u_{j,i}) \quad (i,j=1,2,3) \quad (88)$$

e ${}_t\Delta\eta_{ij}$ a deformação incremental não-linear referenciada à configuração t , dada por:

$${}_t\Delta\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_t\Delta u_{k,i} {}_t\Delta u_{k,j} \quad (i,j=1,2,3). \quad (89)$$

Substituindo as Eq. (86) e (87) na Eq. (80), obtém-se a equação do movimento em termos de decomposições incrementais como segue:

$$\int_{tV} {}^t\Delta S_{ij} \delta {}_t\Delta \varepsilon_{ij} {}^t dV + \int_{tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}_t\Delta \eta_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}_t\Delta e_{ij} {}^t dV \quad (i,j=1,2,3). \quad (90)$$

A equação de movimento é então linearizada considerando a relação constitutiva da forma:

$${}^t\Delta S_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}_t\Delta e_{rs} \quad (i,j,r,s=1,2,3), \quad (91)$$

onde ${}^tC_{ijrs}$ é o tensor de propriedades do material incremental na configuração t . Na Eq. (91) foi considerada a aproximação $\delta {}_t\Delta \varepsilon_{ij} = \delta {}_t\Delta e_{ij}$. Assim, a equação do movimento pode ser reescrita como segue:

$$\int_{tV} {}^tC_{ijrs} \Delta e_{rs} \delta \Delta e_{ij} {}^t dV + \int_{tV} {}^t\tau_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{tV} {}^t\tau_{ij} \delta \Delta e_{ij} {}^t dV \quad (i,j=1,2,3), \quad (92)$$

onde o subscrito esquerdo t , das variáveis incrementais, foi omitido por simplicidade de apresentação.

5.2 O ELEMENTO DE PLACA DELGADA TRIANGULAR

A análise de placas delgadas baseia-se na condição de que a espessura do corpo é pequena em relação às demais dimensões. Quando sujeitas a ação de flexão, as seguintes considerações são importantes:

- a) O plano médio da placa não sofre deformações devido à ação de flexão;
- b) a componente de tensão normal ao plano médio da placa é nula;
- c) as partículas do material que originalmente pertencem a uma determinada reta perpendicular à superfície média da placa, continuam pertencendo a esta reta, mesmo com a deformação da placa (teoria de Mindlin). Na teoria de Kirchhoff, as deformações cisalhantes são desprezadas e a referida reta mantém-se perpendicular à superfície média da placa durante a deformação.

Quando este tipo de estrutura está sujeita a esforços que atuam no plano médio da placa (esforços de membrana) e simultaneamente esforços de flexão, pode-se considerar que as respectivas deformações são independentes (Cowper *et al.*, 1968; Bathe, 1996). Diante destas considerações, os deslocamentos incrementais podem ser expressos da forma:

$$\Delta u_i^z = \Delta u_i - w_{,i} z \quad (93)$$

$$\Delta w^z = \Delta w, \quad (94)$$

onde $i=1,2$ representam as direções x e y respectivamente; Δu_i os incrementos de deslocamentos no plano neutro; w e Δw o deslocamento transversal e seu incremento, respectivamente; z é o valor da coordenada na direção do eixo normal ao plano médio da placa e referenciada a esse plano.

As deformações incrementais são obtidas substituindo as Eq. (93) e (94) nas Eq. (88) e (89), resultando nas seguintes equações:

$$\Delta e_{ij}^z = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) - \Delta w_{,ij} z \quad (i,j=1,2), \quad (95)$$

$$\Delta \eta_{ij}^z = \frac{1}{2} (\Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta w_{,i} \Delta w_{,j}) \quad (i,j,k=1,2). \quad (96)$$

A Fig. 9 mostra um elemento triangular do tipo placa delgada, com 3 nós e 6 graus de liberdade por nó, utilizado no presente trabalho. A matriz de rigidez total do elemento é obtida pela superposição da matriz de membrana com a matriz de flexão.

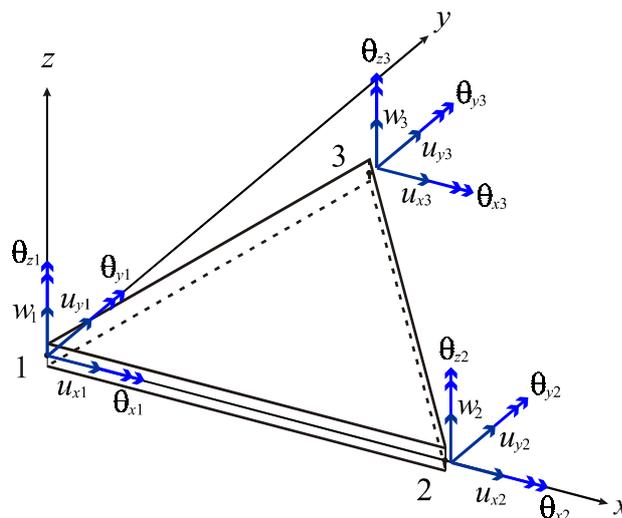


FIGURA 9 – Esquema de um elemento de placa triangular

Um elemento triangular de membrana típico, com cada nó possuindo 2 graus de liberdade de translação e um de rotação, é mostrado na Fig. 10. O vetor de deslocamentos

nodais de membrana, considerando a rotação no plano da superfície média do elemento (*drilling* DOF), é dado por:

$$\mathbf{u}_{mi}^e = [u_{xi} \quad u_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \quad (i=1,2,3), \quad (97)$$

onde u_{xi} , u_{yi} são os graus de liberdade de translação e θ_{zi} é o de rotação no plano da superfície média do elemento. Para elementos sem os graus de liberdade θ_{zi} , utiliza-se um valor fictício para esta variável, definido no Anexo D. Os deslocamentos de membrana, em função de seus valores nodais, podem ser expressos da forma:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}_m \mathbf{u}_m^e, \quad (98)$$

onde \mathbf{N}_m é a função de interpolação de membrana (ver Anexos C e D).

A Fig. 11 mostra um esquema dos graus de liberdade de flexão para uma placa delgada. O vetor de deslocamento nodal de flexão pode ser escrito da forma:

$$\mathbf{u}_{bi}^e = [w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T \quad (i=1,2,3), \quad (99)$$

onde w_i são os deslocamentos transversais nodais, θ_{xi} e θ_{yi} são as rotações nodais em torno dos eixos x e y , respectivamente.

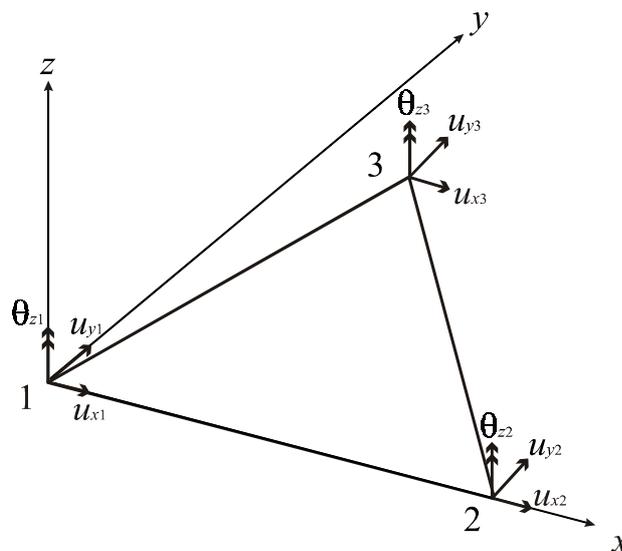


FIGURA 10 – Graus de liberdade de membrana para o elemento de placa delgada

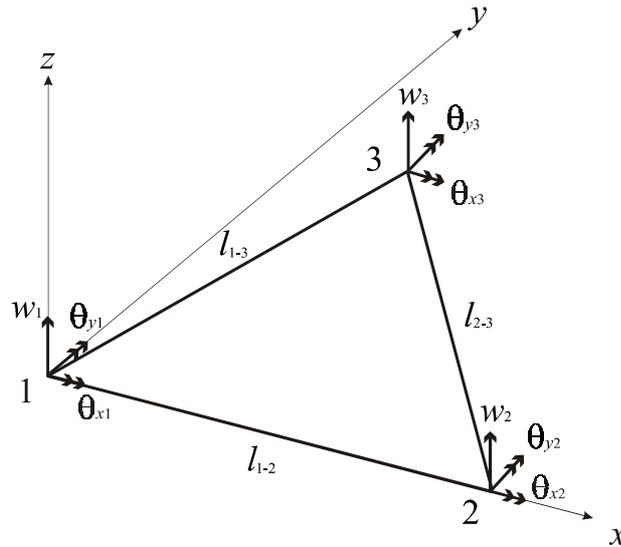


FIGURA 11 – Graus de liberdade de flexão para o elemento de placa delgada

Os incrementos de deformação lineares dados pela Eq. (95), são separados em incrementos de deformação lineares de membrana $\Delta \mathbf{e}_m$ e incrementos de deformação de flexão $\Delta \mathbf{e}_b$ (curvaturas), cujos vetores são dados, respectivamente, por:

$$\Delta \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_{x,x} \\ \Delta u_{y,y} \\ \Delta u_{x,y} + \Delta u_{y,x} \end{bmatrix}, \quad (100)$$

$$\Delta \mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} \Delta k_x \\ \Delta k_y \\ \Delta k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta w_{,xx} \\ \Delta w_{,yy} \\ 2\Delta w_{,xy} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Substituindo a Eq. (98) na Eq. (100), obtém-se o vetor de incrementos de deformação de membrana, em função dos deslocamentos de membrana nodais como segue:

$$\Delta \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{u}_m^e, \quad (102)$$

onde \mathbf{B}_m é a matriz relação deformação-deslocamento de membrana definida nos Anexos C e D.

O vetor de incrementos de deformação de flexão (curvaturas), em função dos deslocamentos nodais de flexão, são obtidos substituindo a Eq. (99) na Eq. (101), resultando:

$$\Delta \mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} \Delta k_x \\ \Delta k_y \\ \Delta k_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_b \Delta \mathbf{u}_b^e, \quad (103)$$

onde \mathbf{B}_b é a matriz relação deformação-deslocamento de flexão definida nos Anexos C e D.

5.3 A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA PARA DOIS ELEMENTOS DE PLACA DELGADA

A equação incremental dos trabalhos virtuais, em uma formulação lagrangeana atualizada, está descrita na Eq. (92) e pode ser reproduzida em uma forma compacta como segue:

$$I_1 + I_2 = I_3 - I_4, \quad (104)$$

onde

$$I_1 = \int_{t,V} {}^t C_{ijrs} \Delta e_{rs} \delta \Delta e_{ij} {}^t dV = \int_{t,A} \delta \Delta \mathbf{e}_m^T \mathbf{D}_m \Delta \mathbf{e}_m {}^t dA + \int_{t,A} \delta \Delta \mathbf{e}_b^T \mathbf{D}_b \Delta \mathbf{e}_b {}^t dA, \quad (105)$$

sendo

$$\mathbf{D}_m = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$\mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (107)$$

as matrizes constitutivas incrementais de membrana e de flexão respectivamente, e h é a espessura da placa, admitida constante.

$$I_2 = \int_{t,V} {}^t \tau_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} {}^t dV \quad (108)$$

é o termo não-linear, que para o elemento GPL-T9 (Zhang *et al.*, 1998) é dado por:

$${}^{GPL-T9} I_2 = \int_{t,A} \delta \Delta \eta_G^T {}^t \mathbf{T} \Delta \eta_G {}^t dA , \quad (109)$$

sendo

$${}^t \mathbf{T} = \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m {}^t \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{T}_{xx} & {}^t \mathbf{T}_{xy} \\ {}^t \mathbf{T}_{yx} & {}^t \mathbf{T}_{yy} \end{bmatrix} \quad (110)$$

as forças internas de membrana e

$$\Delta \eta_G = \begin{bmatrix} \Delta w_{,x} \\ \Delta w_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_G \Delta \mathbf{u}_b^e . \quad (111)$$

\mathbf{G}_G é a matriz geométrica do elemento GPL-T9 e descrita no Anexo C.

Para o elemento DKT (Bathe e Ho, 1981), o termo não-linear é dado por:

$${}^{DKT} I_2 = \int_{t,A} \delta \Delta \eta_D^T {}^t \hat{\mathbf{T}} \delta \Delta \eta_D {}^t dA , \quad (112)$$

onde

$${}^t \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad {}^t \mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{T}_{xx} & {}^t \mathbf{T}_{xy} \\ {}^t \mathbf{T}_{yx} & {}^t \mathbf{T}_{yy} \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$\Delta \eta_D = [\Delta u_{x,x} \quad \Delta u_{x,y} \quad \Delta u_{y,x} \quad \Delta u_{y,y} \quad \Delta w_{,x} \quad \Delta w_{,y}]^T = \mathbf{G}_D \Delta \mathbf{u}_D^e , \quad (114)$$

sendo

$$\Delta \mathbf{u}_D = [\Delta u_{xi} \quad \Delta u_{yi} \quad \Delta w_i]^T \quad (115)$$

e \mathbf{G}_D a matriz geométrica do elemento DKT descrita no Anexo D.

$$I_3 = {}^{t+\Delta t}R = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{t+\Delta t A} {}^{t+\Delta t}f_i^s \delta u_i^s {}^{t+\Delta t}dA \quad (116)$$

é o trabalho virtual devido às forças externas em $t+\Delta t$.

$$I_4 = \int_V {}^t\tau_{ij} \delta \Delta e_{ij} {}^t dV = \int_A \delta \Delta \mathbf{e}_m^T {}^t \mathbf{Q} {}^t dA + \int_A \delta \Delta \mathbf{e}_b^T {}^t \mathbf{M}_b {}^t dA \quad (117)$$

é o trabalho virtual devido às forças internas no instante t , onde

$${}^t \mathbf{Q} = [{}^t \mathbf{T}_{xx} \quad {}^t \mathbf{T}_{yy} \quad {}^t \mathbf{T}_{xy}]^T \quad (118)$$

é o vetor força nodal correspondente as forças internas de membrana e

$${}^t \mathbf{M}_b = [{}^t \mathbf{M}_{xx} \quad {}^t \mathbf{M}_{yy} \quad {}^t \mathbf{M}_{xy}]^T = \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b {}^t \mathbf{u}_b \quad (119)$$

são os momentos de flexão do elemento.

As equações de equilíbrio incrementais para um problema estático (omitindo a matriz de rigidez não-linear para simplificar o equacionamento), discretizadas pela técnica de elementos finitos para o elemento de placa delgada, fica como segue:

a) Parte de membrana

$$\mathbf{K}_m \Delta \mathbf{u}_m = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_m - {}^t \mathbf{F}_m, \quad (120)$$

onde

$$\mathbf{K}_m = \int_A \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m {}^t dA \quad (121)$$

é a matriz de rigidez referente aos efeitos de membrana,

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_m = \int_A \mathbf{N}_m^T \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_x \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_y \end{bmatrix} {}^t dA \quad (122)$$

é o vetor força nodal externa, referente aos efeitos de membrana, \mathbf{R}_x e \mathbf{R}_y são as forças externas nodais nas direções x e y , respectivamente, e

$${}^t\mathbf{F}_m = \int_A \mathbf{B}_m^T {}^t\mathbf{Q} \, dA \quad (123)$$

é o vetor força nodal equivalente devido às forças internas no instante de tempo t , correspondente aos efeitos de membrana. Para o cálculo de ${}^t\mathbf{Q}$, dada pela Eq. (118), utiliza-se os deslocamentos totais de membrana ${}^t\mathbf{u}_m$ em um instante de tempo t (ver Fig. 12). Estes deslocamentos são calculados pela diferença entre as coordenadas locais do elemento no instante t e 0 como segue (Bathe e Ho, 1981):

$${}^t\mathbf{u}_m^T = [0 \quad 0 \quad {}^t\mathbf{u}_1^2 \quad 0 \quad {}^t\mathbf{u}_1^3 \quad {}^t\mathbf{u}_2^3], \quad (124)$$

onde o sobrescrito direito dos termos do vetor ${}^t\mathbf{u}_m^T$ indicam o número do nó.

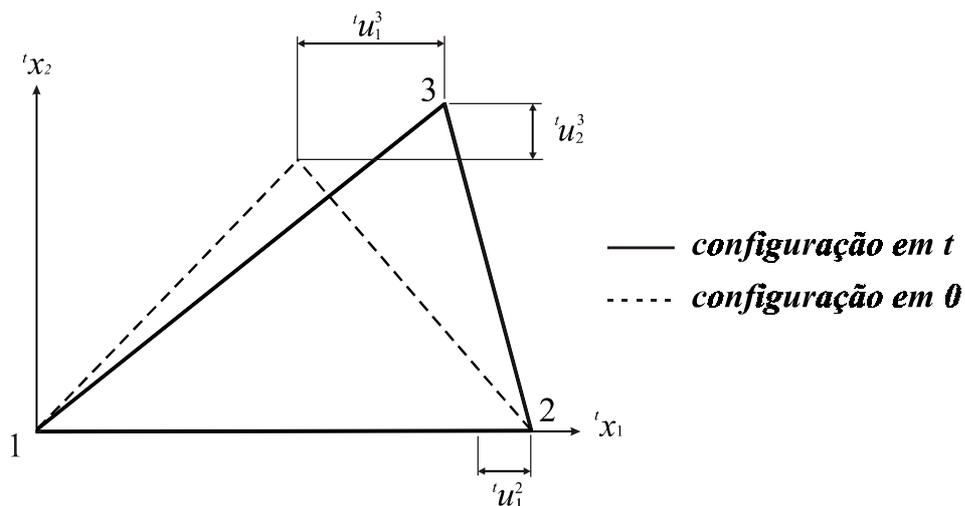


FIGURA 12 – Deslocamentos de membrana no elemento

b) Parte de flexão

$$\mathbf{K}_b \Delta \mathbf{u}_b = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_b - {}^t\mathbf{F}_b, \quad (125)$$

onde

$$\mathbf{K}_b = \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \, dA \quad (126)$$

é a matriz de rigidez referente aos efeitos de flexão,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_b = \int_{t,A} \mathbf{N}_b^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_z {}^t dA \quad (127)$$

é o vetor força nodal externa referente aos efeitos de flexão, \mathbf{R}_z é o vetor de forças externas nodais na direção z , e

$${}^t\mathbf{F}_b = \int_{t,A} \mathbf{B}_b^T {}^t\mathbf{M}_b {}^t dA \quad (128)$$

é o vetor força nodal equivalente devido às forças internas no instante de tempo t , correspondente aos efeitos de flexão. Enquanto que, as forças internas de membrana no instante t são calculadas através dos deslocamentos totais de membrana, os momentos de flexão do elemento são calculados por incrementos, isto é:

$${}^t\mathbf{M}_b = {}^{t-\Delta t}\mathbf{M}_b + {}_{t-\Delta t}\Delta\mathbf{M}_b, \quad (129)$$

onde os momentos de flexão incrementais são dados por:

$${}_{t-\Delta t}\Delta\mathbf{M}_b = \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b {}_{t-\Delta t}\Delta\mathbf{u}_b \quad (130)$$

sendo ${}_{t-\Delta t}\Delta\mathbf{u}_b$ o vetor de deslocamentos incrementais de flexão na configuração $t-\Delta t$.

O sistema de equações a ser solucionado, considerando os efeitos da não-linearidade geométrica, fica da forma:

$${}^t\mathbf{K} \Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}, \quad (131)$$

onde

$$\Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_1 \\ \Delta\mathbf{u}_2 \\ \Delta\mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta\mathbf{u}_i^T = [\Delta u_{xi} \quad \Delta u_{yi} \quad \Delta w_i \quad \Delta\theta_{xi} \quad \Delta\theta_{yi} \quad \Delta\theta_{zi}] \quad (132)$$

e ${}^t\mathbf{K} = \mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL}$, sendo \mathbf{K}_L a matriz de rigidez linear formada pelas matrizes \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_b e ${}^t\mathbf{K}_{NL}$ é a matriz de rigidez não-linear, definidas nos Anexos C e D para os elementos GPL-T9 e DKT, respectivamente.

As equações de equilíbrio incrementais, apresentadas neste capítulo, estão referenciadas ao sistema de coordenadas local. É necessária uma transformação de coordenadas para um sistema global, comum a todos os elementos finitos, para realizar a montagem desses elementos pelo procedimento padrão da técnica de elementos finitos. A transformação de coordenadas de um sistema para outro (global para local e vice-versa) e suas implicações nas equações de equilíbrio, estão apresentadas no Anexo E.

5.4 A SOLUÇÃO ITERATIVA DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO INCREMENTAIS

Adicionando às equações de equilíbrio incrementais, Eq. (131), os efeitos das forças de amortecimento e de inércia, elas podem ser descritas como segue:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} + {}^t\mathbf{K} \Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}, \quad (133)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, ${}^t\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez que inclui as matrizes de rigidez linear e não-linear. ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ é o vetor de forças externas aplicadas no instante de tempo $t+\Delta t$, ${}^t\mathbf{F}$ é o vetor de forças nodais equivalentes no instante t , ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ e ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$ são os vetores nodais de aceleração e velocidade, respectivamente e $\Delta\mathbf{u}$ é o vetor de incremento de deslocamentos nodais do instante t ao instante $t+\Delta t$. As matrizes de massa e de amortecimento estão desenvolvidas no Anexo C.

A Eq. (133) representa as equações de equilíbrio incrementais, que devem ser solucionadas a cada passo de tempo usando um determinado esquema de integração numérica. Diversos operadores de integração são usados na prática, entre eles o método de Newmark, utilizado no presente trabalho. Neste método, a atualização da aceleração e da velocidade é realizada da forma (Bathe, 1996):

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + \Delta t {}^t \dot{u} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t \ddot{u} + \alpha \Delta t^2 ({}^{t+\Delta t} \ddot{u} - {}^t \ddot{u}) \quad (134)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{u} = {}^t \dot{u} + \Delta t {}^t \ddot{u} + \delta \Delta t ({}^{t+\Delta t} \ddot{u} - {}^t \ddot{u}) \quad (135)$$

onde, na análise linear: $\delta \geq \frac{1}{2}$ e $\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\delta + \frac{1}{2} \right)^2$.

Dependendo do grau de não-linearidade do sistema considerado e da magnitude do passo de tempo Δt , a linearização das equações de equilíbrio, que resultou nas Eq. (133), pode introduzir sérios erros ou instabilidades na solução do problema. Para evitar estes problemas, a solução das Eq. (133) é realizada a cada passo de tempo de forma iterativa. Assim, as equações de equilíbrio incrementais na forma iterativa são dadas por:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(k-1)} \Delta \mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} - \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(k)}. \quad (136)$$

Os passos do presente algoritmo, que utiliza o método de Newmark na forma trapezoidal ($\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$), são reproduzidos a seguir (Bathe *et al.*, 1974):

- Cálculos iniciais

1. Formação da matriz de rigidez linear \mathbf{K}_L , da matriz de massa \mathbf{M} e da matriz de amortecimento \mathbf{C} ; inicialização de ${}^0 \mathbf{u}$, ${}^0 \dot{\mathbf{u}}$ e ${}^0 \ddot{\mathbf{u}}$.

2. Cálculo das constantes de integração $\delta \geq \frac{1}{2}$, $\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\delta + \frac{1}{2} \right)^2$ e dos parâmetros:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)}{2} \quad a_6 = a_0 \quad a_7 = -a_2$$

$$a_8 = -a_3 \quad a_9 = \Delta t(1 - \delta) \quad a_{10} = \delta \Delta t$$

3. Formação da matriz de rigidez linear efetiva $\hat{\mathbf{K}}_L = \mathbf{K}_L + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$

- Cálculos a cada passo de tempo:

4. Inicialização dos vetores ${}^t \mathbf{u}$, ${}^t \dot{\mathbf{u}}$, ${}^t \ddot{\mathbf{u}}$ e do contador de iterações $k = 0$.

5. Formação da matriz de rigidez não-linear e total do sistema ${}^t \mathbf{K}_{NL}$ e ${}^t \hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}_L + {}^t \mathbf{K}_{NL}$, respectivamente.

6. Formação do vetor de cargas efetivo ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \mathbf{M}(a_2 {}^t \dot{\mathbf{u}} + a_3 {}^t \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{C}(a_4 {}^t \dot{\mathbf{u}} + a_5 {}^t \ddot{\mathbf{u}}) - {}^t \mathbf{F}$

7. Solução dos incrementos de deslocamentos nodais ${}^t \hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{u}^{(0)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}$

8. Cálculo iterativo de solução

a) $k=k+1$

b) Cálculo da aproximação ($k-1$) para as acelerações, velocidades e deslocamentos

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)} = a_0\Delta\mathbf{u}^{(k-1)} - a_2{}^t\dot{\mathbf{u}} - a_3{}^t\ddot{\mathbf{u}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(k-1)} = a_1\Delta\mathbf{u}^{(k-1)} - a_4{}^t\dot{\mathbf{u}} - a_5{}^t\ddot{\mathbf{u}}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$$

c) Formação das matrizes de rigidez ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{NL}^{(k-1)}$ e ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(k-1)} = \hat{\mathbf{K}}_L + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{NL}^{(k-1)}$

d) Cálculo da carga efetiva na iteração ($k-1$)

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(k-1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(k-1)}$$

e) Solução da correção k dos incrementos de deslocamentos

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(k-1)} \Delta\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}^{(k-1)}$$

f) Atualização dos incrementos dos deslocamentos

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{u}^{(k)}$$

g) Verificação da convergência.

Se ocorrer convergência: $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}^{(k)}$ e seguir cálculos no passo (7)

Se não ocorrer convergência: voltar para o item (a)

7. Atualização das acelerações, velocidades e deslocamentos:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = a_6\Delta\mathbf{u} - a_7{}^t\dot{\mathbf{u}} - a_8{}^t\ddot{\mathbf{u}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_9{}^t\ddot{\mathbf{u}} + a_{10}{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$$

A verificação da convergência no processo iterativo de solução, foi baseada em dois critérios, o critério dos deslocamentos e da energia interna (Bathe e Cimento, 1980; Bathe, 1996). O critério dos deslocamentos é expresso da forma:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{u}^{(k)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}\|_2} \leq utol, \quad (137)$$

onde $utol$ é a tolerância de convergência em deslocamentos, adotando “*a priori*” um valor de 0.001. Como o denominador da Eq. (137) não é conhecido previamente, aproxima-se ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ para o último valor desta variável no processo iterativo, ou seja ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)}$. O critério de

convergência da energia interna compara a energia incremental de cada iteração, com o incremento de energia interna inicial. A convergência é alcançada quando:

$$\frac{\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(k-1)} - \mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)} \right)}{\Delta \mathbf{u}^{(1)T} \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} - \mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{u}} \right)} \leq etol , \quad (138)$$

onde *etol* é a tolerância de convergência em energia, cujo valor adotado no presente trabalho é de 0.001.

O método iterativo dos gradientes conjugados (MGC) com um pré-condicionamento diagonal (Hestenes e Stiefel, 1952) é utilizado para a solução dos incrementos de deslocamento. Este método, além de exigir uma capacidade de armazenamento bem menor do que a dos métodos diretos de solução, característica esta importante para problemas de grande porte, permite a exploração dos recursos de processamento vetorizado e paralelo dos computadores atuais. O detalhamento do método empregado consta no Anexo A.

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

6.1 INTRODUÇÃO

Existem muitos métodos capazes de simular a interação entre um fluido e uma estrutura. De uma forma geral, eles estão contidos basicamente em dois grupos chamados de esquemas particionados e de esquemas monolíticos. Nos esquemas particionados, as equações governantes dos meios fluido e estrutura são integradas no tempo alternadamente, de forma isolada. Nos esquemas monolíticos, os campos são tratados como uma única entidade, permitindo que o avanço no tempo ocorra simultaneamente para os dois sub-domínios. Os esquemas particionados podem ainda ser divididos conforme o tipo de acoplamento entre os sub-domínios. Nos esquemas de acoplamento fraco, tais como os propostos por Soria e Casadei (1997), Rifai *et al.* (1999), Farhat *et al.* (1995), Cebal e Löhner (1997) e tantos outros, as condições de contorno cinemática e dinâmica na interface são as únicas informações trocadas entre os sub-domínios. O acoplamento é chamado de forte (Belytschko e Mullen, 1978; Santos, 1993) quando, além da imposição das condições de contorno de interface, é considerada a influência mútua das equações de movimento na interface dos dois sub-domínios.

Os esquemas particionados possuem alguns aspectos interessantes que justificam a sua escolha (Felippa *et al.*, 1998). Cada sub-domínio pode ser tratado pelas técnicas de discretização e pelos algoritmos de solução mais eficientes, de forma individual. Novos métodos e modelos podem ser introduzidos de maneira modular, de acordo com as necessidades de projeto. Além disso, as malhas de cada sub-domínio podem ser construídas sem a necessidade de coincidência nas interfaces (*non-matching*) (Farhat *et al.*, 1998; Cebal e Löhner, 1997). Estas características de modularidade e flexibilidade são extremamente desejadas, principalmente em universidades e centros de pesquisa. Por outro lado, devido à defasagem inerente entre as integrações temporais do fluido e da estrutura, as implementações e formulações devem ser realizadas com muito cuidado, para evitar ou minimizar os problemas de instabilidade e de falta de precisão da solução. Segundo Farhat (1995), os esquemas particionados com acoplamento forte não são atrativos porque, uma vez implementados, torna-se difícil a modificação das suas formulações já existentes para atender

os avanços dos campos da dinâmica dos fluidos e/ou da dinâmica estrutural na área computacional. Embora os esquemas particionados com acoplamento fraco estejam sujeitos a algumas instabilidades computacionais (Belytschko e Mullen, 1978), esses oferecem diversas características importantes, incluindo a habilidade de usar os métodos mais adequados de discretização e solução para cada área, de simplificar o esforço de desenvolvimento de software, de reutilizar um código existente, de implementar melhorias nas áreas separadamente e de preservar a modularidade do código.

A não existência da defasagem entre as integrações temporais do fluido e da estrutura, constitui a grande vantagem da utilização dos esquemas monolíticos (Felker, 1993; Blom, 1998; Azevedo, 1999). No entanto, além de não possuir as características de modularidade e flexibilidade dos esquemas particionados, os esquemas monolíticos possuem outros inconvenientes importantes. Se o método adotado for implícito, é provável que as matrizes do sistema sejam mal condicionadas, devido às diferenças entre as rigidezes dos sub-domínios envolvidos. As diferentes frequências de comportamento dos fenômenos físicos da estrutura e do fluido limitam o uso dos métodos explícitos, uma vez que deve-se usar o menor passo de avanço no tempo por tratar-se de um algoritmo condicionalmente estável. Esta dificuldade pode ser amenizada utilizando-se as técnicas de avanço no tempo, através de subciclos como a implementada neste trabalho.

6.2 O ESQUEMA DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA PARTICIONADO

As vantagens do esquema particionado, apresentadas na introdução deste Capítulo, foram determinantes para a sua escolha no presente trabalho. Belytschko e Mullen (1978) apresentaram um esquema particionado de acoplamento forte, que utiliza uma integração explícita de diferenças centrais para o sub-domínio do fluido e uma integração implícita de Newmark, na sua forma trapezoidal, para a estrutura, provando a sua estabilidade em problemas lineares. Neste algoritmo, os elementos finitos dos dois campos (fluido e estrutura) são divididos em três grupos: explícitos, implícitos e de interface. Os nós são divididos em explícitos e implícitos. A cada passo de tempo, primeiramente integra-se os nós explícitos, após, os resultados são usados como condições de contorno para a integração dos nós implícitos. Os elementos de interface são integrados implícita e explicitamente, a cada passo de tempo. A malha é subdividida em duas partes, como mostra a Fig. 13 para uma malha unidimensional. Os círculos cheios são pontos nodais, para os quais a malha é integrada implicitamente, enquanto os círculos vazios são pontos nodais, para os quais a malha é

integrada explicitamente. Na partição explícita da malha, o fluxo de informações é indicado por linhas cheias, enquanto que na malha implícita é indicado por linhas pontilhadas. Na malha explícita, as informações circulam somente entre os pontos nodais adjacentes, durante um passo de tempo. Já na malha implícita, as informações circulam instantaneamente, através da malha inteira, durante um passo de tempo. Assim, a solução em qualquer parte da malha implícita depende do valor de resposta de todos os outros pontos da malha implícita, no tempo t e no tempo $t+\Delta t$.

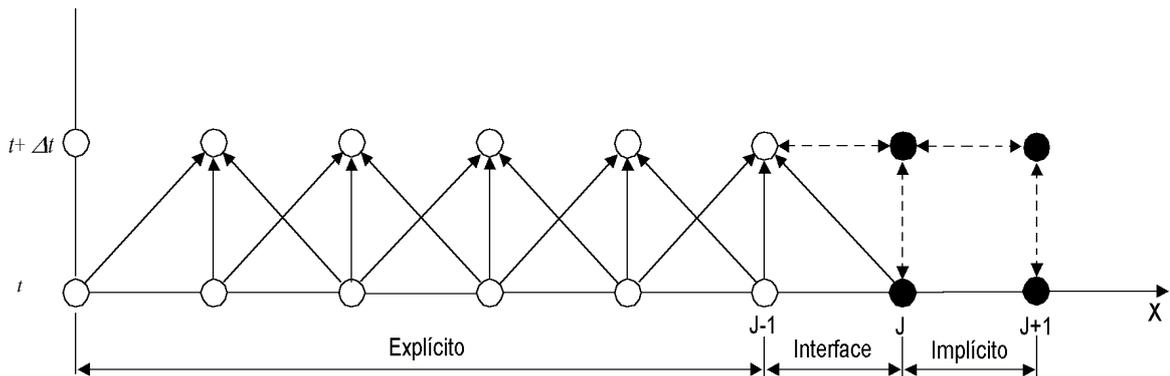


FIGURA 13 - Fluxo de informação em uma malha com partição nodal implícita-explicita proposto por Belytschko e Mullen (1978)

Santos (1993) propôs um acoplamento no qual acrescenta as matrizes de massa e de amortecimento dos elementos do fluido na interface nas respectivas matrizes dos elementos da estrutura, porém considerando apenas os nós implícitos. O carregamento do campo do fluido sobre a estrutura é considerado através das pressões e forças de contorno nos nós implícitos do elemento de interface. Embora este procedimento considere um acoplamento parcial dos elementos de interface através de seus nós implícitos, ele reduz o tamanho do problema estrutural, resultando em uma significativa economia computacional. A determinação das matrizes de massa e de amortecimento e dos vetores de carga relativos aos elementos de interface é realizada através da aplicação da forma residual ponderada de Galerkin às equações que governam o movimento do fluido, resultando em um sistema de equações como segue:

$$\mathbf{M}_{fe} \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i^{n+1} + \mathbf{C}_{fe} \bar{\mathbf{v}}_i^{n+1} = \mathbf{R}_{fe} , \quad (139)$$

onde

$$\mathbf{M}_{fe} = \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \bar{\rho}^{n+1} d\Omega ,$$

$$\mathbf{C}_{fe} = \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} [\bar{\rho}(\bar{\mathbf{v}}_j - \bar{\mathbf{w}}_j)]^{n+1} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega , \quad (140)$$

$$\mathbf{R}_{fe} = -\int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \bar{\mathbf{p}}^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega^{n+1}} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^{n+1} d\Omega .$$

\mathbf{M}_{fe} , \mathbf{C}_{fe} e \mathbf{R}_{fe} são as matrizes de massa, de amortecimento e o vetor de carga de interface, adicionados às respectivas matrizes e ao vetor de carga dos nós de interface da estrutura, conforme o procedimento usual de montagem de elementos finitos.

É evidente que o desempenho global do esquema particionado depende dos desempenhos locais dos algoritmos de análise do campo estrutural e do fluido. Mas, o desempenho global também depende das propriedades de estabilidade e de precisão do procedimento de solução particionado. Sabe-se, por exemplo, que se for usado um algoritmo incondicionalmente estável para os dois campos, não existirão garantias da estabilidade incondicional de todo algoritmo de solução particionado. Piperno *et al.* (1995) contruíram um problema aerolástico “teste” simples, onde o sistema fluido-estrutura é sempre fisicamente estável. Ele permite analisar as propriedades de estabilidade e de precisão de um determinado procedimento particionado. Consequentemente, é um bom modelo que pode ser utilizado em sistemas aeroelásticos não-lineares complexos que se deseja estudar.

No presente trabalho, adotou-se o esquema particionado de acoplamento fraco devido às vantagens já citadas deste tipo de acoplamento. O algoritmo, cujo limite de estabilidade é governado pelo passo de tempo crítico da solução explícita do fluido, segue o procedimento padrão destes esquemas, resumido da seguinte forma (ver gráfico da Fig. 14):

- a) Estabelecimento das condições iniciais para a estrutura e para o fluido.
- b) Atualização das variáveis da estrutura.
- c) Avanço no tempo da malha do fluido, conforme novo contorno da estrutura.
- d) Atualização do escoamento do fluido com a nova condição de contorno da estrutura.
- e) Atualização da estrutura com as novas cargas devido à pressão e às tensões viscosas.
- f) Repetição a partir do passo (c), até os objetivos da simulação serem alcançados.

A imposição das condições de contorno cinemáticas no domínio do fluido, em função do movimento da estrutura, deve levar em conta o tipo de problema analisado. As superfícies de interface do fluido e da estrutura devem ser coincidentes a cada passo de tempo, portanto:

$$x_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F} = {}^{t+\Delta t}x_i\Big|_{\Gamma_E} \quad (i=1,2,3), \quad (141)$$

onde $x_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F}$ e ${}^{t+\Delta t}x_i\Big|_{\Gamma_E}$ são as coordenadas atualizadas para o instante $t+\Delta t$ nas superfícies de interface Γ_F do fluido e Γ_E da estrutura, respectivamente. Em problemas de fluidos viscosos impõe-se a condição de igualdade de velocidade na interface, como segue:

$$w_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F} = v_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F} = {}^{t+\Delta t}\dot{u}_i\Big|_{\Gamma_E} \quad (i=1,2,3), \quad (142)$$

onde $w_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F}$ e $v_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F}$ são as componentes de velocidade da malha e do fluido nos instantes $t+\Delta t$ na superfície de interface do fluido Γ_F , respectivamente. ${}^{t+\Delta t}\dot{u}_i\Big|_{\Gamma_E}$ são as componentes de velocidade da estrutura para o instante $t+\Delta t$ na superfície de interface Γ_E . Quando o fluido é considerado invíscido, o mesmo desliza sobre o corpo e as condições de contorno para as velocidades do domínio do fluido devem ser impostas da forma:

$$w_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F} \cdot n_i = v_i^{n+1}\Big|_{\Gamma_F} \cdot n_i = {}^{t+\Delta t}\dot{u}_i\Big|_{\Gamma_E} \cdot n_i \quad (i=1,2,3), \quad (143)$$

sendo n_i o vetor unitário normal à superfície de interface no instante $t+\Delta t$.

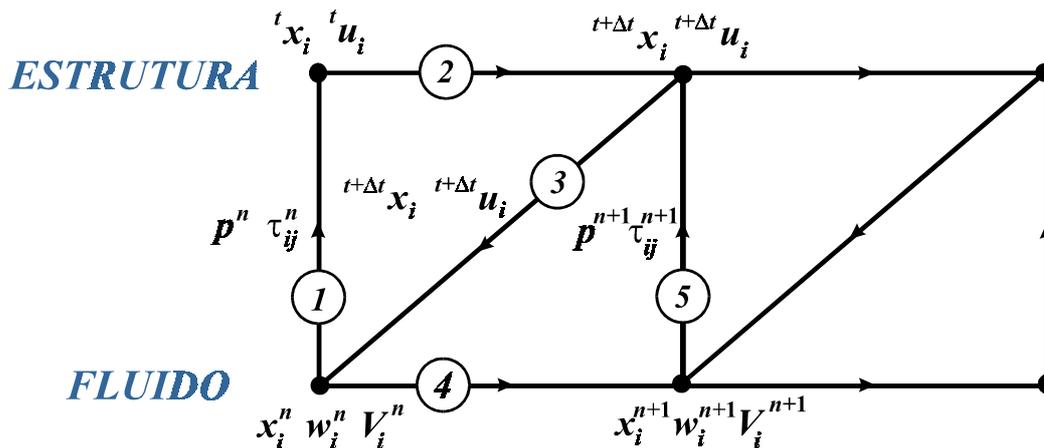


FIGURA 14 - Algoritmo de interação fluido-estrutura particionado básico

Na maioria das vezes, os campos do fluido e da estrutura possuem diferentes escalas de tempo. Usualmente, o escoamento do fluido comanda o passo de tempo global, pois requer uma resolução temporal menor que a da vibração da estrutura. Embora o uso do mesmo passo de tempo para o fluido e para a estrutura proporcione pequenas vantagens de implementação,

o procedimento com subciclos de fator $n_{SF} = \Delta t_S / \Delta t_F$ (onde Δt_S e Δt_F são os passos de tempo da estrutura e do fluido, respectivamente) pode oferecer vantagens computacionais substanciais. Incluindo, assim, uma economia de tempo de CPU, devido ao menor número de avanços da estrutura, e uma economia nas transferências I/O e/ou nos custos de comunicação, devido à menor troca de informações.

Piperno *et al.* (1995) mostram que um procedimento de subciclos convencional deve usar um limite de estabilidade menor do que o estabelecido pelo passo de tempo crítico do integrador temporal explícito do fluido. Entende-se por um procedimento de subciclos convencional aquele que, no final de cada n_{SF} subciclos do fluido, somente as cargas de interface calculadas durante o último subciclo do fluido são transmitidas para a estrutura. Por outro lado, a mesma Referência mostra que o limite de estabilidade pode ser preservado se a deformação da malha do fluido entre t_n e t_{n+1} for distribuída suavemente entre os n_{SF} subciclos e, no final de cada n_{SF} subciclos de fluido, for calculado a média do campo de cargas de interface durante os subciclos entre t_n e t_{n+1} para ser transmitido à estrutura, ao invés da última pressão calculada. O algoritmo com subciclos, adotado pelo presente trabalho, utiliza esse último procedimento citado, consistindo nos seguintes passos (ver esquema da Fig. 15):

- a) Estabelecimento das condições iniciais para a estrutura e para o fluido.
- b) Atualização das variáveis da estrutura.
- c) Atualização do fluido em subciclos $s = 1, \dots, n_{SF}$.
 - c.1 Avanço no tempo da malha do fluido, conforme novo contorno da estrutura.
 - c.2 Atualização do escoamento do fluido com a nova condição de contorno da estrutura.
- d) Atualização da estrutura com as novas cargas, devido à pressão e às tensões viscosas.
- e) Repetir a partir do passo (c), até os objetivos da simulação serem alcançados.

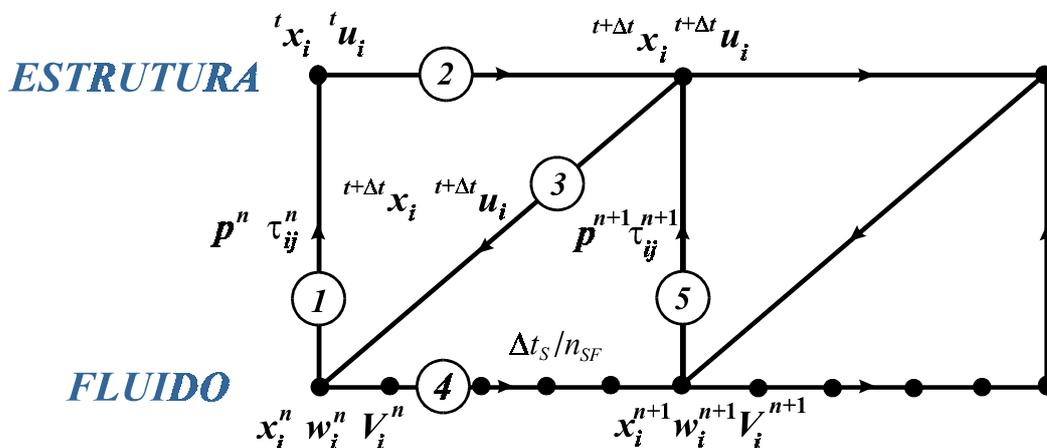


FIGURA 15 – Algoritmo de interação fluido-estrutura com subciclos

7 A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Este capítulo destaca os aspectos mais importantes referentes à implementação computacional dos algoritmos apresentados neste trabalho. Comenta-se sobre os recursos computacionais utilizados, as técnicas de otimização adotadas, a estrutura do código e de dados e, faz-se uma análise sobre o desempenho dos programas.

7.1 RECURSOS COMPUTACIONAIS

A implementação computacional dos códigos contou com os recursos do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP-RS), o qual faz parte do SINAPAD – Sistema Nacional de Processamento de Alto Desempenho, mantido pela Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e pelo Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), operado pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Atualmente, o CESUP-RS possui um supercomputador *Cray YMP* com 2 CPU's de 330 Mflops cada, 256MB de memória RAM e uma capacidade de armazenamento em disco de 43GB; um supercomputador *Cray T94* com 2 CPU's de 1.8Gflops cada, 2GB de memória RAM e uma unidade de disco SCSI com 53Gb e várias estações de trabalho *Silicon Graphics* e *SUN Sparcstation*. Dentre os softwares disponíveis, os mais utilizados foram o compilador *CF90 - FORTRAN90*, o *MSC/PATRAN 9.0* e o *ANSYS 5.5* como geradores de malha e o aplicativo de visualização *EnSight.7*. O *Tecplot 7.5* foi utilizado como visualizador em ambiente windows para PC.

7.2 ASPECTOS SOBRE OTIMIZAÇÃO COMPUTACIONAL

O processo de otimização de um programa consiste em ajustar o seu código de instruções de tal forma que melhore o seu desempenho computacional. Basicamente o procedimento de otimização passa por três etapas (CRAY, 1996):

- Estabelecimento de um desempenho inicial padrão que servirá de referência.
- Escolha do tipo de otimização: da administração de memória, de leituras e impressões (I/O) ou de desempenho de CPU, que depende das características do programa.
- Seleção de técnicas específicas de otimização, que melhoram diretamente o desempenho do programa.

Como em todos os algoritmos de simulação numérica de problemas de engenharia, o presente código solicita muitas operações matemáticas do computador. Por esta razão, a otimização do desempenho de CPU é a mais importante. O processo de vetorização é a etapa mais importante da otimização de CPU, determinando a forma de construção do código e de suas expressões. O processamento vetorial usa os registros vetoriais e as unidades funcionais segmentadas do computador. Cada linha do código processa todos os elementos em um registro vetorial até 128 elementos no caso do Cray T94. Portanto, a ordem de operação do processamento vetorial difere da ordem do processamento escalar, como mostra o exemplo a seguir:

```
DO I=1,3
  L(I) = J(I) + K(I)
  N(I) = L(I) + M(I)
ENDDO
```

Em um processamento escalar, o programa calcula as variáveis na seguinte seqüência: $L(1) \rightarrow N(1) \rightarrow L(2) \rightarrow N(2) \rightarrow L(3) \rightarrow N(3)$. No processamento vetorial, calcula-se todos os valores $L(n)$ antes de calcular os $N(n)$ valores.

Existem instruções dentro de um laço que inibem a vetorização, podendo-se destacar as seguintes:

- Chamadas de subprogramas que não estejam expandidas *inline* pelo sistema de compilação.
- Comandos I/O.
- Comandos condicionais do tipo IF aritmético e GOTO.
- Diretivas de compilação (!DIR\$ NEXTSCALAR, !DIR\$ NOVECTOR).
- Ramificações não estruturadas de retorno ou para fora de um laço.
- Expressões com dependências de dados.

A dependência de dados é a condição mais comum de inibição da vetorização, podendo ser dividida basicamente em três casos:

a) Quando armazena-se os dados antes de calculá-los.

```
DO I=2,5
  A(I-1) = B(I)
  C(I) = A(I)
ENDDO
```

b) Quando existe dependência no armazenamento dos dados.

```

DO I=2,5
  A(I-1) = B(I)
  A(I) = C(I)
ENDDO

```

c) Quando calcula-se os dados em função de variáveis que serão modificadas posteriormente.

```

DO I=2,5
  B(I) = A(I-1)
  A(I) = C(I)
ENDDO

```

Uma situação especial do caso (c) de dependência é a chamada recorrência. Matematicamente, a recorrência é uma sequência cujos elementos são gerados usando elementos anteriores da mesma sequência, por exemplo:

```

DO I=2,5
  A(I) = A(I-1)
ENDDO

```

Para analisar o desempenho do programa a cada etapa do processo de otimização, existem ferramentas tais como *profview*, *flowview*, *hpm*, *perfview* e outros. As mais utilizadas foram o *hpm*, que registra o desempenho geral de todo o programa, através de medição de alguns parâmetros específicos, e o *perfview* que registra o desempenho a nível de subprograma, proporcionando uma análise de granularidade fina comparado com o *hpm*. Os parâmetros mais importantes, utilizados para a avaliação do desempenho do programa, são o número de Megaflops (Mflops) e o tempo de CPU (*tcpu*). Um flop é uma operação de ponto flutuante (número real), especificamente adição, multiplicação ou ambos. As outras operações envolvem a adição e multiplicação, incluindo a divisão e funções tais como a raiz quadrada. Embora a unidade Mflops signifique milhões de operações de ponto flutuante, ela é frequentemente usada como Megaflops por segundo de tempo de CPU. Baixos valores de Mflops indicam a predominância de um código escalar, enquanto que valores altos indicam um código com alto grau de vetorização. Um número de Mflops elevado não garante que um código seja mais veloz que outro com um número de Mflops mais baixo. Considerando que cada código possui caminhos diferentes para obter o mesmo resultado, a velocidade de processamento dependerá não só do grau de otimização de cada um, mas também das características das suas instruções. Por isso, o *tcpu* é o parâmetro que mostra realmente a rapidez de um código, além de ser a grandeza mais adequada para comparar-se o desempenho de dois computadores submetidos a um mesmo programa executável.

7.3 A ESTRUTURA E A OTIMIZAÇÃO DOS CÓDIGOS

Os códigos elaborados foram divididos em três módulos: de pré-processamento, de processamento e de visualização, todos interligados por arquivos intermediários. O módulo de pré-processamento é composto pelas etapas de geração de malha do fluido, utilizando os códigos comerciais PATRAN ou ANSYS, e de geração dos arquivos iniciais do processo de solução. O código de processamento possui uma estrutura padrão em Fortran, composta de um programa principal e subrotinas inseridas como procedimentos internos, da forma:

```
PROGRAM INTFLUESTRU
-----
CONTAINS
  SUBROUTINE STEP1
-----
  END SUBROUTINE STEP1
END PROGRAM INTFLUESTRU
```

Para a elaboração de um código otimizado computacionalmente é preciso levar em conta o tamanho dos laços e as possibilidades de inibição quanto à vetorização. A codificação do algoritmo do fluido, por exemplo, poderia ser feita na forma escalar, conforme mostra o esquema abaixo:

```
DO NE=1,NEM
-----
  CALL STEP1
  CALL STEP2
  CALL ASSEM
-----
ENDDO
```

onde *NEM* é o número de elementos do domínio, *STEP1* e *STEP2* representam as subrotinas de solução das equações do primeiro e segundo passos, respectivamente, e *ASSEM* representa a subrotina de montagem das variáveis no sistema global. Nota-se que, neste caso, à medida que ocorre a solução para um determinado elemento, os resultados são montados a nível de nós. Já em uma concepção vetorizada da codificação, as equações elemento-por-elemento são calculadas conjuntamente e o processo de montagem destes resultados é realizado na seqüência em outro laço, como segue:

```
CALL STEP1
CALL STEP2
CALL ASSEM
```

Neste caso os laços *DO NE=1,NEM* estão no interior das subrotinas, por isso surge a necessidade de armazenar os resultados a nível de elemento de uma subrotina para outra, aumentando consideravelmente a solicitação de memória do computador. Este limitante é de suma importância em problemas de grande porte, embora nesses casos possa optar-se por uma solução particionada em blocos de elementos do domínio.

Uma característica típica de implementações computacionais convencionais do MEF é a frequente utilização de instruções de endereçamento indireto, que envolvem transferência de informações das estruturas de dados globais do problema para as locais dos elementos e vice-versa. As etapas de transição local-global das informações, conhecidas como desmontagem (*disassembling*) e montagem (*assembling*), constituem dois segmentos importantes da implementação e devem ser cuidadosamente tratadas através da eliminação dos potenciais focos de inibição à vetorização. A desmontagem é a transferência de informações efetuada do sistema global de referência para o sistema local dos elementos. Esse processo pode ser feito através de um mapeamento simples, entre variáveis globais e locais, não apresentando problemas de vetorização. Sua implementação computacional pode ser realizada da seguinte forma:

```
DO J=1,ND
  DO NE=1,NEM
    VE(NE,J) = V(KONE(NE,J))
  ENDDO
ENDDO
```

onde *ND* é o número de graus de liberdade por elemento finito, *VE* é o arranjo de grandezas locais ao elemento, *V* é o correspondente arranjo de grandezas globais e *KONE* é o arranjo que efetua o mapeamento entre as grandezas locais e globais (matriz de conectividades). Por outro lado, especial atenção deve ser dada ao processo de montagem que, em uma codificação escalar, é executado de uma forma simples como segue:

```
DO J=1,ND
  DO NE=1,NEM
    V(KONE(NE,J)) = V(KONE(NE,J)) + VE(NE,J)
  ENDDO
ENDDO
```

Observa-se neste caso uma dependência recursiva, uma vez que vários elementos podem contribuir para uma mesma posição dentro do arranjo *V* de grandezas globais. A utilização de uma diretiva de compilação no sentido de ignorar a recorrência, sem um tratamento adequado à estrutura do arranjo *VE*, produziria resultados errados. Uma forma de contornar o problema,

é o emprego da técnica de *mapeamento inverso* (Alves, 1991), utilizada no presente trabalho em suas primeiras versões do código de solução do domínio do fluido (Teixeira, 1996). Esta técnica consiste em criar uma matriz que contenha os elementos topologicamente conectados a uma determinada equação global ou nó I ($NEIBOR$), e uma outra que identifique a equação local correspondente, contendo o número do nó local destes elementos que coincidem com o nó I ($NEIBOL$). Assim, a codificação vetorizada segundo esta técnica fica:

```
DO J = 1,NMAX
DO I = 1,NNM
  K=NEIBOR(J,I) ; L=NEIBOL(J,I)
  V(I) = V(I) + VE(K,L)
ENDDO
ENDDO
```

onde $NMAX$ é o número máximo de elementos que concorrem a um único nó e NNM é o número total de nós da malha. Observa-se que o laço interno não possui dependência de dados, sendo portanto vetorizável. Embora este método apresente o melhor desempenho computacional em relação a outros, ele é recomendado para malhas regulares de elementos finitos, nas quais $NMAX$ tem um valor constante. Teixeira (1996) apresentou uma variação desta técnica para o uso em malhas não-estruturadas de tetraédros, dividindo o processo de montagem em dois blocos. No primeiro, o processo de montagem é feito para todos os nós do domínio, até um número de $NMAX1$ ($NMAX1 < NMAX$) de elementos concorrentes. O segundo bloco, complementa esta montagem apenas para os nós que possuem um número de elementos concorrentes acima de $NMAX1$. Desta forma, consegue-se reduzir os tamanhos das matrizes $NEIBOR$ e $NEIBOL$ e a quantidade de operações de montagem inúteis com zeros. Mesmo assim, esta técnica mostrou-se muito ineficiente, pois além de ocupar um grande espaço de memória, possuía ainda, muitas operações com zeros, baixando o desempenho global do programa.

Para contornar estes problemas, utilizou-se neste trabalho uma outra técnica de montagem denominada de técnica de agrupamento dos elementos disjuntos (*mesh coloring*) (Alves, 1991). Esta consiste em dividir os elementos em tantos grupos quantos forem necessários de tal forma que, no interior de cada um, nenhum elemento compartilhe de um mesmo ponto nodal (elementos disjuntos). Um exemplo deste procedimento está ilustrado na Fig. 16, para uma malha plana regular. Cada cor representa um grupo ou bloco de elementos disjuntos que não possuem nós em comum. O processo de montagem ocorre para cada bloco, separadamente, num total de quatro blocos para este exemplo.

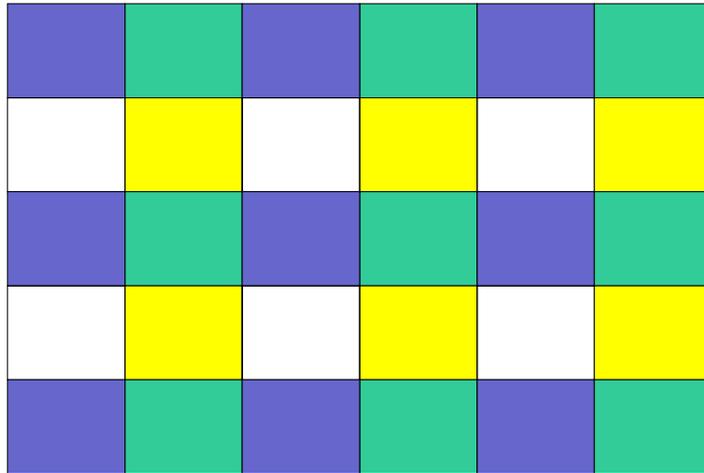


FIGURA 16 – Malha colorida (*Mesh coloring*) da técnica de elementos disjuntos

O código de montagem segundo esta técnica fica da forma:

```

DO I=1,NBLK
  I1=posição do primeiro elemento do bloco I no vetor NBLOCO
  I2=posição do último elemento do bloco I no vetor NBLOCO
  DO J=1,ND
    DO K=I1,I2
      NE=NBLOCO(K)
      V(KONE(NE,J)= V(KONE(NE,J)+VE(NE,J)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO

```

onde *NBLK* é o número de grupos de elementos disjuntos, *NBLOCO* é o vetor que contém o número do elemento disjunto. Nota-se, com certeza, que de *I1* a *I2* serão montadas as variáveis em diferentes nós, não ocorrendo o risco de sobreposição em um mesmo nó. Esta condição garante a não ocorrência de dependência de dados, permitindo a vetorização do laço interno.

7.4 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS PROGRAMAS

A avaliação do desempenho dos programas utilizados no presente trabalho engloba não só a análise da velocidade de processamento alcançada, mas também a quantidade de espaço de memória ocupada. Os principais parâmetros que medem a velocidade de processamento são o número de Mflops médio de processamento e o tempo de CPU (*tcpu*) de execução do programa. O primeiro indica o quanto otimizado está o código, no entanto, o segundo parâmetro é o que realmente mede o quão rápido é o programa analisado.

A Tab. 1 apresenta os parâmetros de referência de desempenho em Mflops para o Cray T94 em aplicações matemáticas, utilizados pelo Centro de Computação de Ohio (Ohio Supercomputer Center – OSC). Estes dados são baseados na análise estatística do desempenho de laços *DO*, comuns em várias aplicações científicas/matemáticas (*Livermore Fortran Kernels*).

TABELA 1 – Classificação do desempenho (em Mflops) para o Cray T94 (OSC)

Classificação	Fraca	Média	Excelente	Ideal
Mflops	50	300 - 400	1400	1800

7.4.1 Análise de desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos compressíveis

O desempenho do presente algoritmo de solução de escoamentos de fluidos compressíveis em FORTRAN 77 foi analisado por Teixeira (1996), no supercomputador Cray YMP/CESUP-UFRGS. A Tab. 2 mostra o desempenho deste algoritmo para alguns exemplos com passo de tempo constante, executados no Cray T94/CESUP-UFRGS e em FORTRAN 90. Obteve-se uma velocidade média de 675 Mflops, um índice de consumo de tempo médio de $1.117 \times 10^{-5} s/\Delta t.nó$ e um espaço médio de memória ocupado de $3.57 \times 10^{-4} Mw/nó$. Observa-se que, segundo a Tab. 1, o desempenho em Mflops obtido está acima da média, embora distante de um índice excelente. Considerando o espaço médio de memória ocupado, existe a possibilidade de utilizar no Cray T94 malhas com até 650000 nós, aproximadamente.

A relação entre os índices de desempenho (em Mflops) obtidos nos algoritmos de escoamentos de fluidos compressíveis que utilizam subciclos e nos de passo constante é de aproximadamente 1:1.50. As razões desta diminuição de velocidade em Mflops foram apresentadas na seção 8.2.3 (no exemplo do escoamento sobre uma esfera utilizando subciclos). Em compensação, ocorre um ganho muito grande em termos de tempo de processamento, baixando em uma ordem de grandeza em relação ao algoritmo de passo de tempo uniforme, dependendo das características da malha e das propriedades físicas do problema. Um dos inconvenientes do procedimento de subciclos é o aumento considerável do espaço de memória requerido, em torno de 1.48:1. Essa característica torna-se mais importante nos problemas de grande porte, que exigem um maior espaço de memória do computador.

TABELA 2 – Desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos compressíveis no Cray T94

Exemplo	Nº nós	Mflops	<i>tcpu</i> (s)	<i>tcpu</i> / $\Delta t.nó$ $\times 10^5$	Mem.máx. (Mw)	Mem.máx/nó $\times 10^4$
NACA0012	28537	627	63707	1.135	10.7344	3.76
VLS	106025	702	19626*	1.157	35.4375	3.34
Esfera	11086	695	4695	1.059	4.0156	3.62
Média	-	675	-	1.117	-	3.57

* Tempo correspondente a apenas 16000 iterações.

7.4.2 Análise de desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos incompressíveis

O desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos incompressíveis, para os exemplos apresentados neste trabalho, está mostrado na Tab. 3. Obteve-se os seguintes índices de desempenho médio: 616 Mflops, 2.196×10^{-5} s/ $\Delta t.nó$ e 3.91×10^{-4} Mw/nó. Observa-se que o consumo médio de tempo é maior que o obtido pelo algoritmo de escoamentos de fluidos compressíveis (2.0 : 1) e que a velocidade em Mflops é menor (1 : 1.14). Isso se deve, principalmente, à mudança da equação da continuidade de um algoritmo para outro, implicando na solução iterativa da equação de Poisson para o algoritmo de escoamentos de fluidos incompressíveis, com um número médio de iterações do MGC (NIGC) de 53. Logicamente que quanto menor for este valor, maior será a eficiência do algoritmo. Este índice depende do condicionamento das matrizes envolvidas e da tolerância adotada no processo iterativo de solução. Os espaços médios de memória requisitados pelos algoritmos de escoamentos de fluidos compressíveis e incompressíveis estão bastante próximos (3.57 e 3.91×10^{-4} Mw/nó, respectivamente).

TABELA 3 – Desempenho do algoritmo de escoamentos de fluidos incompressíveis no Cray T94

Exemplo	Nº nós	Mflops	<i>tcpu</i> (s)	<i>tcpu</i> / $\Delta t.nó$ $\times 10^5$	Mem.máx. (Mw)	Mem.máx/nó $\times 10^4$	NIGC
Cavidade	6498	658	24093	1.030	2.531	3.90	19
Canal	4782	506	2438	2.833	2.063	4.31	59
Esfera	37997	636	8902	2.929	15.563	4.10	56
Retângulo	15342	663	15265	1.990	5.141	3.35	77
Média	-	616	-	2.196	-	3.91	53

7.4.3 Análise de desempenho do algoritmo da estrutura

O algoritmo de solução da estrutura foi validado em problemas de pequeno porte e com um pequeno número de passos de tempo, por isso a análise de seu desempenho ficou prejudicado. Os desempenhos dos problemas mais complexos estão apresentados na Tab. 4 para o algoritmo que utiliza o elemento DKT e na Tab. 5 para o algoritmo do elemento GPL-T9. A solução do sistema de equações pelo MGC requisitou o maior *tcpu* (94% em média) e uma velocidade média de 190 Mflops, enquanto o cálculo da matriz de rigidez geométrica (704 Mflops em média), a leitura de dados e a impressão dos resultados representaram quase que o restante do *tcpu* total. Embora quase todos os laços destas etapas estejam vetorizados, o número de elementos e de nós destes problemas são muitos pequenos, implicando uma baixa eficiência de vetorização. A representatividade do processo de leitura de dados e de impressão dos resultados no *tcpu* total mostra que, para problemas de grande porte, o nível de otimização deve atingir valores bem mais elevados. O número de iterações por passo de tempo (NIP) e o número de iterações do MGC (NIGC) apresentaram valores bastante diferentes de um problema para outro, em função das características do problema, sendo impossível, com poucos exemplos, estabelecer uma tendência ou média. O algoritmo do elemento DKT apresentou uma eficiência computacional bem maior que o correspondente ao elemento GPL-T9 (ganhos de 1.6 a 3.5 vezes). Esta diferença deve diminuir em problemas maiores, pois a etapa de construção das matrizes de rigidez para o algoritmo do GPL-T9 possui uma velocidade em torno de 1.24 vezes maior que a do algoritmo de DKT. A construção mais complexa das matrizes de rigidez e os valores mais altos de NIP e NIGC em relação aos algoritmos com elementos DKT, são as razões da menor eficiência computacional dos algoritmos de elementos GPL-T9. Em compensação, como foi mostrado nos exemplos de validação dos algoritmos de estruturas (seção 8.1), os elementos GPL-T9 apresentaram, de uma forma geral, resultados mais precisos.

TABELA 4 – Desempenho do algoritmo de estruturas com o elemento DKT no Cray T94

Exemplo	Nº nós	Mflops	<i>tcpu</i> (s)	<i>tcpu</i> / Δt .nó $\times 10^3$	Mem.máx. (Mw)	Mem.máx/nó $\times 10^3$	NIP	NIGC
Viga bi-eng.	125	199	40.9	3.27	0.750	6.00	3.04	182
Placa plana	81	154	4.8	1.19	0.656	8.10	2.98	47
Calota	122	213	26.3	0.86	0.750	6.15	3.26	39

TABELA 5 – Desempenho do algoritmo de estruturas com o elemento GPL-T9 no Cray T94

Exemplo	Nº nós	Mflops	tcpu (s)	tcpu/ Δt .nó $\times 10^3$	Mem.máx. (Mw)	Mem.máx/nó $\times 10^3$	NIP	NIGC
Viga bi-eng.	125	205	65.1	5.20	0.797	6.38	3.04	299
Placa plana	81	165	7.9	1.94	0.766	9.45	3.98	59
Calota	122	230	92.9	3.05	0.797	6.53	11.4	39

7.4.4 Análise de desempenho do algoritmo de interação fluido-estrutura

O desempenho do algoritmo de interação fluido-estrutura é analisado com bastante detalhe na seção 8.4.2 (exemplo placa plana). A Tab. 6 mostra o desempenho em Mflops de cada parte do código e da total para os exemplos de interação fluido-estrutura apresentados neste trabalho. Na Tab. 7 tem-se a % *tcpu* de cada parte do código, o *tcpu/ Δt .nó* da estrutura e do fluido, e os dados de convergência da estrutura *NIGC* e *NIP*. Destaca-se os baixos desempenhos do algoritmo da estrutura (em Mflops), com exceção do exemplo cone, que possui uma malha de triângulos de maior tamanho (5786 nós). Observa-se o excelente desempenho (em Mflops) do algoritmo de movimento de malha completo, utilizado nos exemplos placa plana, painel e membrana (média de 1160 Mflops). Em compensação a % *tcpu* é relativamente elevada (da ordem de 43%). Como é constatado nos exemplos placa plana e cone, o uso do esquema de movimento de malha simplificado é menos eficiente em termos de Mflops (330 Mflops em média), no entanto, é mais econômico (representa em torno de 0.65% do *tcpu* total). O algoritmo do fluido manteve desempenhos semelhantes aos encontrados quando no seu uso individual. Constata-se apenas que o *tcpu/ Δt .nó* no exemplo cone, é um pouco mais elevado que nos demais, possivelmente devido à adição dos termos viscosos nas equações governantes.

TABELA 6 – Desempenho (em Mflops) dos algoritmos de interação fluido-estrutura no Cray T94

Exemplo	Mflops				
	Fluido	Estrutura	Mov. malha	Interação	Total
Placa plana	708	192	1178	146	888
Painel	658	224	1157	282	814
Membrana	681	220	1146	341	808
Cone	703	516	338	912	646

TABELA 7 - % $tcpu$, $tcpu/\Delta t.nó$ e parâmetros de convergência dos algoritmos de interação fluido-estrutura no Cray T94

Exemplo	% $tcpu$				$tcpu/\Delta t.nó \cdot 10^5 (s)$		Estrutura	
	Fluido	Estrutura	Mov.malha	Interação	Estrutura	Fluido	NIGC	NIP
Placa plana	48.05	6.03	45.82	0.10	4.925	1.134	10	-
Painel	50.50	9.65	39.80	0.05	28.038	1.884	30	2.07
Membrana	38.15	17.25	44.55	0.05	37.500	1.448	43	2.00
Cone	69.40	29.80	0.60	0.20	9.643	2.203	37	-

8 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Este Capítulo apresenta alguns exemplos de validação dos algoritmos utilizados pelo presente trabalho. Primeiramente, mostra-se as respostas do código da estrutura diante de problemas estáticos com forte não-linearidade geométrica e de problemas dinâmicos lineares e não-lineares. Após, apresenta-se os exemplos de escoamentos de fluidos compressíveis, testando o seu comportamento em superfícies relativamente complexas, seu desempenho em problemas de grande porte e o uso do algoritmo com passo de tempo variável. O código de simulação de escoamentos de fluidos incompressíveis é validado em diversos tipos de situações, abrangendo problemas com superfície livre, com o uso da equação da energia e com escoamentos abertos e fechados. Por último, o algoritmo de interação fluido-estrutura é validado através da análise do escoamento de fluidos compressíveis viscosos e invíscidos e incompressíveis em estruturas flexíveis do tipo placa e casca, utilizando o elemento GPL-T9.

8.1 ESTRUTURA

8.1.1 Viga engastada-livre sob flexão

É realizada uma análise estática não-linear em uma viga engastada-livre, sujeita a um momento fletor concentrado na sua extremidade livre de $M = 0.3954 \text{ Nm}$ ou um valor adimensional de $M^* = ML/2\pi EI = 0.4456$. As dimensões e propriedades de material são (Fig. 17): $L = 2.54 \text{ m}$, $b = 0.254 \text{ m}$, $h = 12.7 \text{ mm}$, $E = 8.268 \text{ MPa}$, $\nu = 0.0$.

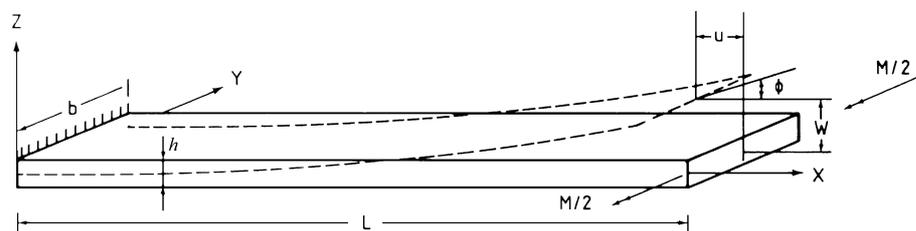


FIGURA 17 – Geometria do exemplo viga engastada-livre

A malha de elementos finitos é regular (5x1) e composta de 10 elementos triangulares. Nas extremidades laterais da viga são aplicadas as condições de contorno de simetria, ou seja, $\theta_x = \theta_z = 0$. O carregamento foi dividido em 175 passos. A Fig. 18 mostra as configurações da viga para alguns destes passos de carregamento. O presente algoritmo necessitou uma média

de iterações por passo de carregamento (*NIP*) de 3.0 para os elementos DKT e GPL-T9 e um número médio de iterações de solução pelo método dos gradientes conjugados (*NIGC*) de 92 com o uso do elemento DKT e de 96 com o elemento GPL-T9. A Fig. 19 apresenta os resultados dos deslocamentos relativos u/L , w/L e $\phi/2\pi$ na extremidade livre da viga, obtidos pelo presente trabalho e os resultados analíticos segundo Ramm (1977). A comparação mostra uma boa precisão dos resultados tanto para o elemento DKT, como para o elemento GPL-T9, que são praticamente iguais.

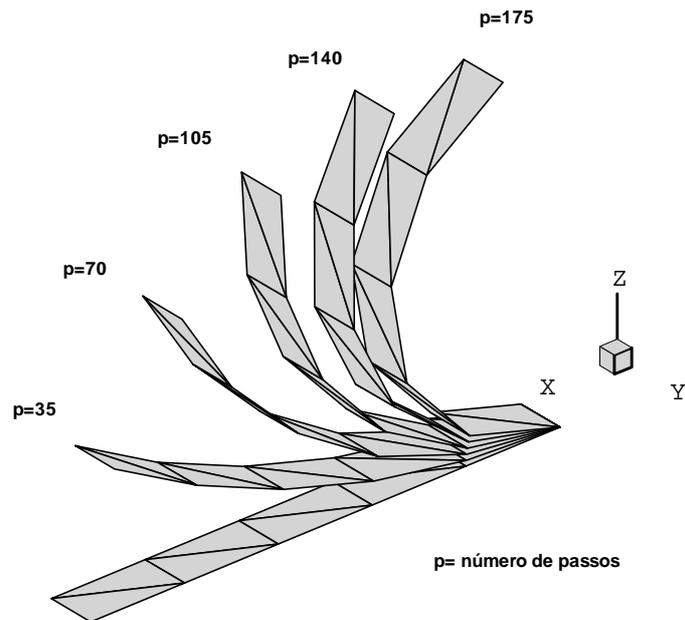


FIGURA 18 – Configurações da viga engastada-livre para alguns passos de carregamento

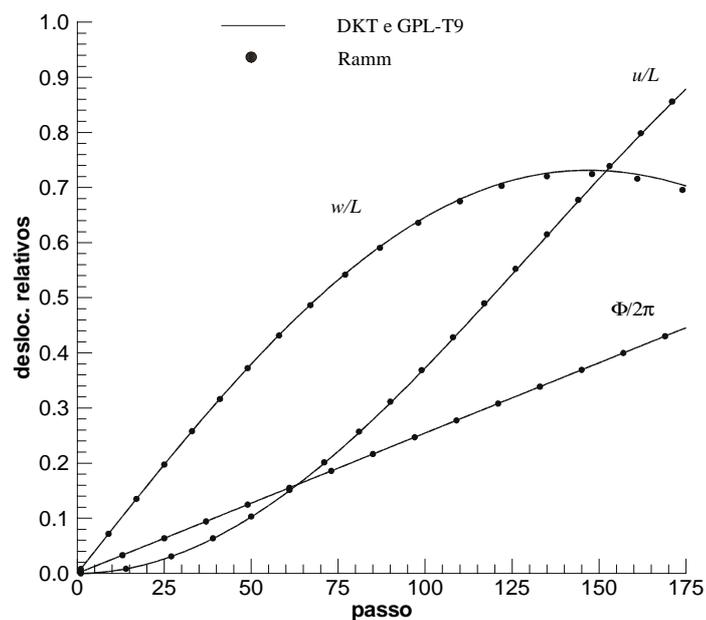


FIGURA 19 – Deslocamentos da extremidade livre do exemplo viga engastada-livre

8.1.2 Viga bi-engastada sob carga concentrada

É analisado neste exemplo uma viga bi-engastada de seção transversal retangular com $L = 0.508$ m de comprimento, $b = 25.4$ mm de largura e $h = 3.175$ mm de altura, sujeita a uma carga concentrada P no centro. As propriedades do material da viga são: $E = 206.7$ GPa, $\nu = 0.0$, $\rho = 2714.81$ Kg/m³. A malha é regular (24x4) e composta de 192 elementos triangulares, como mostra a Fig. 20. Além das condições de contorno de engaste total ($u_x = u_y = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$) nas extremidades da viga, são aplicadas condições de simetria nos contornos longitudinais dadas por $u_y = \theta_x = \theta_z = 0$.

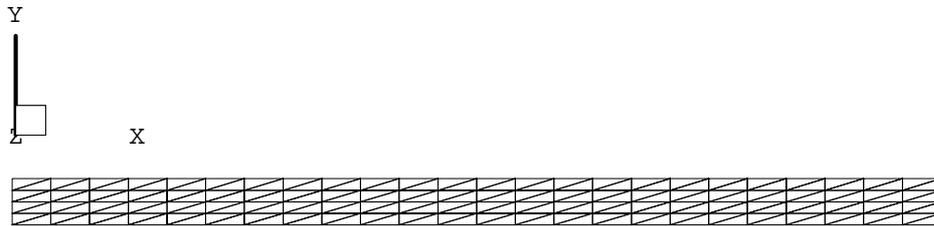


FIGURA 20 – Malha do exemplo viga bi-engastada

Em uma análise estática não-linear do problema, aplica-se uma carga de $P=3115$ N em passos desiguais. Até $P=445$ N, o avanço é de 10 passos e, desta carga até a carga final ($P=3115$ N), são utilizados 6 passos. A diferença do avanço de carga do trecho inicial para o final, se deve ao comportamento da estrutura ser menos rígido no início do carregamento, necessitando de um passo menor para obter-se precisão semelhante a do trecho final de carga. A Fig. 21 mostra um gráfico da carga aplicada P com o deslocamento transversal no centro da viga w . Os resultados obtidos pelo presente trabalho são comparados com os apresentados por Mondkar e Powell (1977) que utilizam 5 elementos de estado plano de tensões de 8 nós para a metade da viga, explorando a simetria do problema. Os resultados obtidos com o elemento DKT foram praticamente iguais aos obtidos com o elemento GPL-T9 e esses estão bem próximos aos resultados apresentados pela referência citada. Para este problema, o presente algoritmo requisitou um NIP de 3.0 para ambos os elementos e um $NIGC$ de 338 com o uso do elemento DKT e de 615 com o elemento GPL-T9. A Fig. 22 mostra a configuração deformada da viga para as etapas de carga de 445 e 3115 N, bem como os contornos de deslocamento transversal. A coordenada z foi ampliada em 10 vezes, para uma melhor visualização.

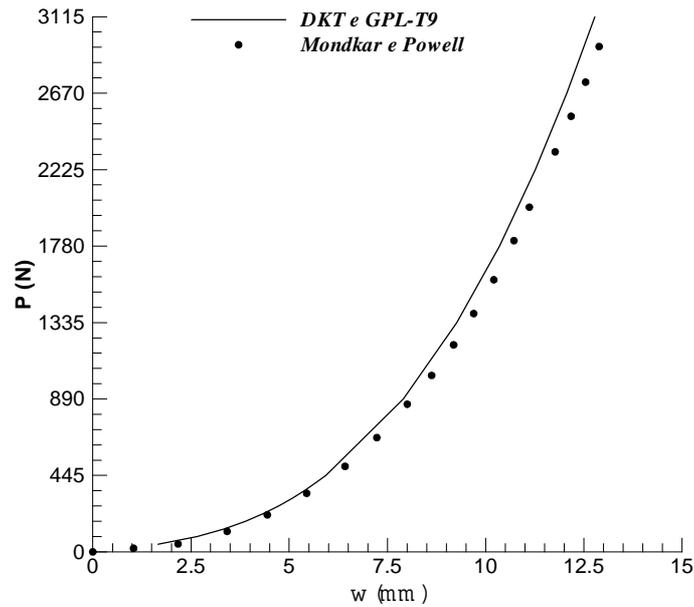


FIGURA 21 – Gráfico do deslocamento transversal no centro da viga w com a carga P

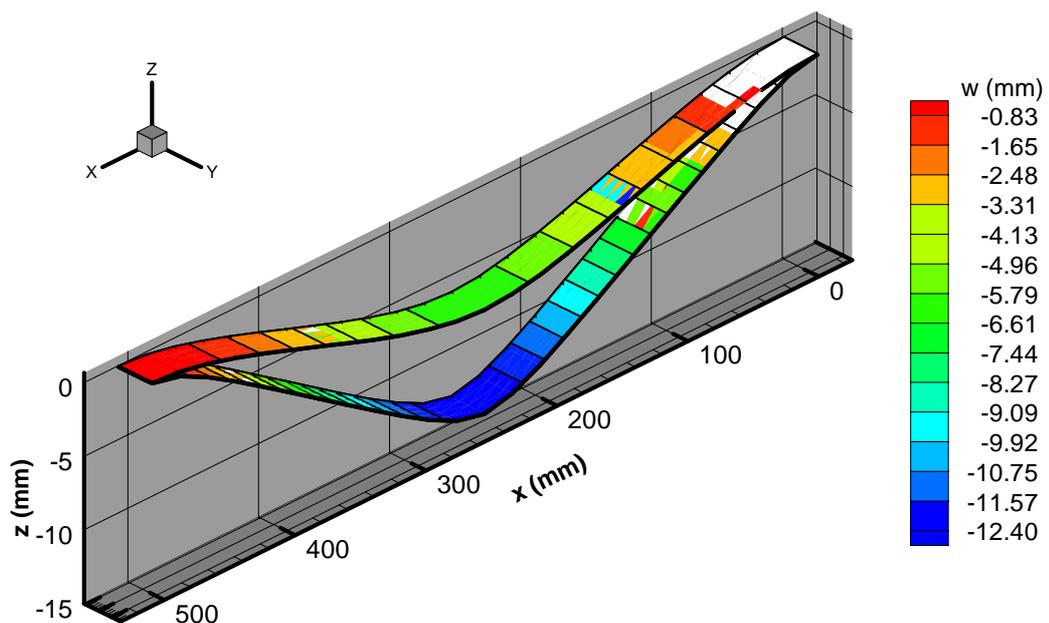


FIGURA 22 – Contornos de deslocamento transversal e configuração deformada para as etapas de carga de 445 e 3115 N na análise estática não-linear do exemplo viga bi-engastada

Uma análise dinâmica linear é feita aplicando uma carga degrau de $P=2848\text{ N}$ e utilizando um passo de tempo de $50\ \mu\text{s}$ até atingir o instante de 0.005 s , em um total de 100 passos de tempo. A Fig. 23 mostra o gráfico do deslocamento transversal no centro da viga com o tempo. Os resultados são comparados com os apresentados por Mondkar e Powell

(1977), com boa concordância tanto com o uso do elemento DKT como do GPL-T9. O *NIGC* foi de 105 para o elemento DKT e de 209 para o elemento GPL-T9.

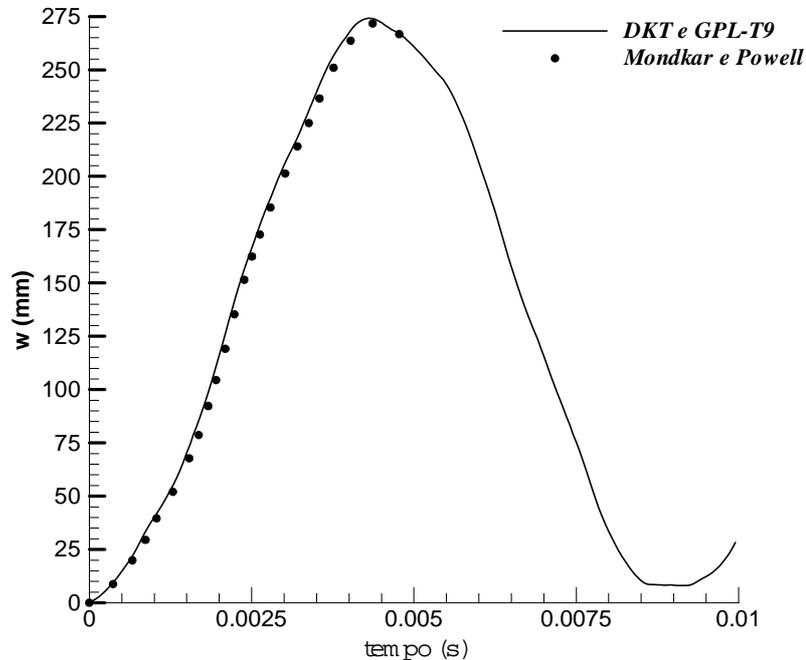


FIGURA 23 - Gráfico do deslocamento transversal no centro da viga com o tempo para a análise dinâmica linear no exemplo viga bi-engastada

Foi realizada uma análise dinâmica não-linear do problema, aplicando também uma carga degrau de $P=2848\text{ N}$. O passo de tempo foi de $50\ \mu\text{s}$ até atingir o tempo final de 0.005 s . A Fig. 24 apresenta os contornos do deslocamento transversal e as configurações deformadas da viga nos instantes de tempo de 0.00125 , 0.00350 e 0.00425 s . As coordenadas z estão aumentadas em 5 vezes, para maior clareza na visualização. A Fig. 25 mostra um gráfico do deslocamento transversal no centro da viga com o tempo para este caso. Os resultados são comparados com os apresentados por Mondkar e Powell (1977) que utilizam um passo de tempo de $25\ \mu\text{s}$. Nota-se uma excelente proximidade entre os resultados. O deslocamento transversal máximo, o qual ocorre no primeiro ciclo de vibração não-linear, foi de 19.56 mm , coincidente com o valor obtido pela Referência. O instante que completa o primeiro ciclo foi de 0.0023 s , também idêntico ao valor apresentado pela Referência. O presente algoritmo necessitou de um *NIP* de 3.04 para ambos os elementos e um *NIGC* de 181 com o uso do elemento DKT e de 297 com o elemento GPL-T9.

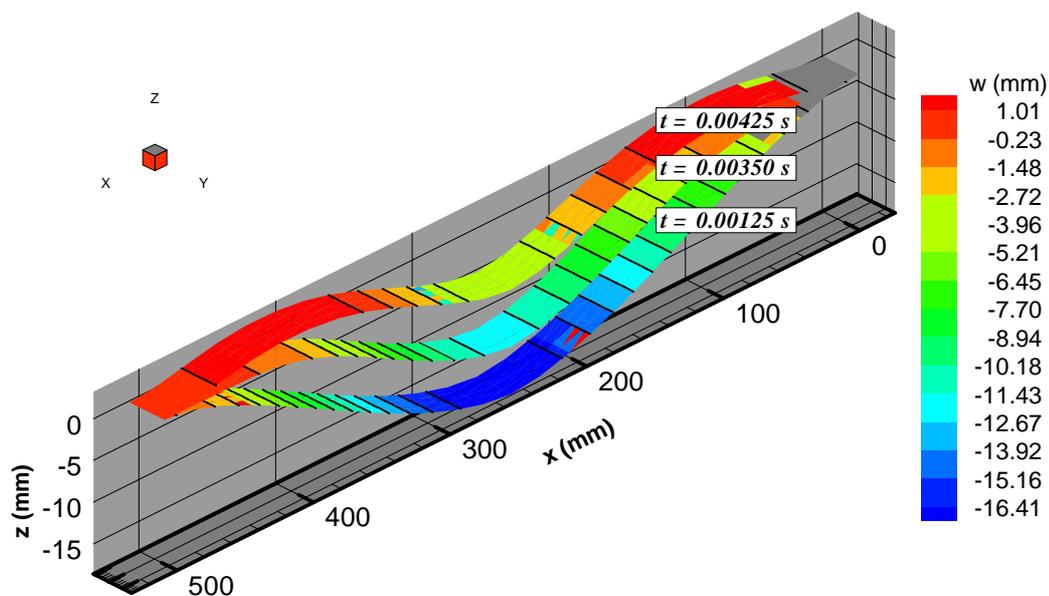


FIGURA 24 – Contornos do deslocamento transversal e configurações deformadas nos instantes 0.00125 s , 0.00350 s e 0.00425 s para a análise dinâmica não-linear da viga bi-engastada

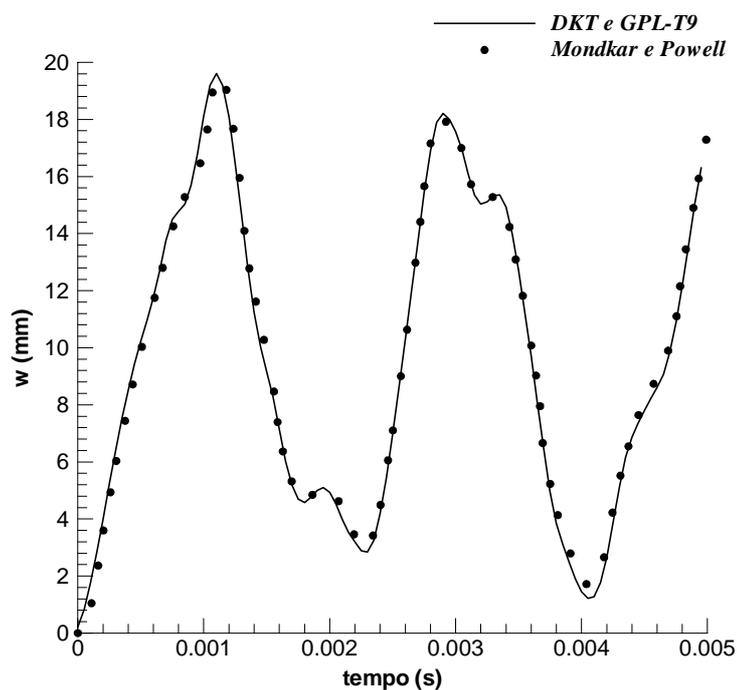


FIGURA 25 – Gráfico do deslocamento transversal no centro da viga com o tempo

8.1.3 Placa simplesmente apoiada com carga distribuída

Uma placa apoiada nos seus quatro lados está sujeita a uma carga uniformemente distribuída. A Fig. 26 mostra um esquema da placa cujas dimensões, bem como suas

propriedades de material são: $a = 1.016$ m, $h = 5.08$ mm, $E = 206.7$ GPa, $\nu = 0.3$ e $\rho = 2714.81$ Kg/m³. Uma malha regular (8x8), com 128 elementos triangulares é modelada em $\frac{1}{4}$ do domínio da placa, aproveitando a simetria do problema. As condições de contorno aplicadas na solução do problema e a configuração inicial da malha estão mostradas na Fig. 26.

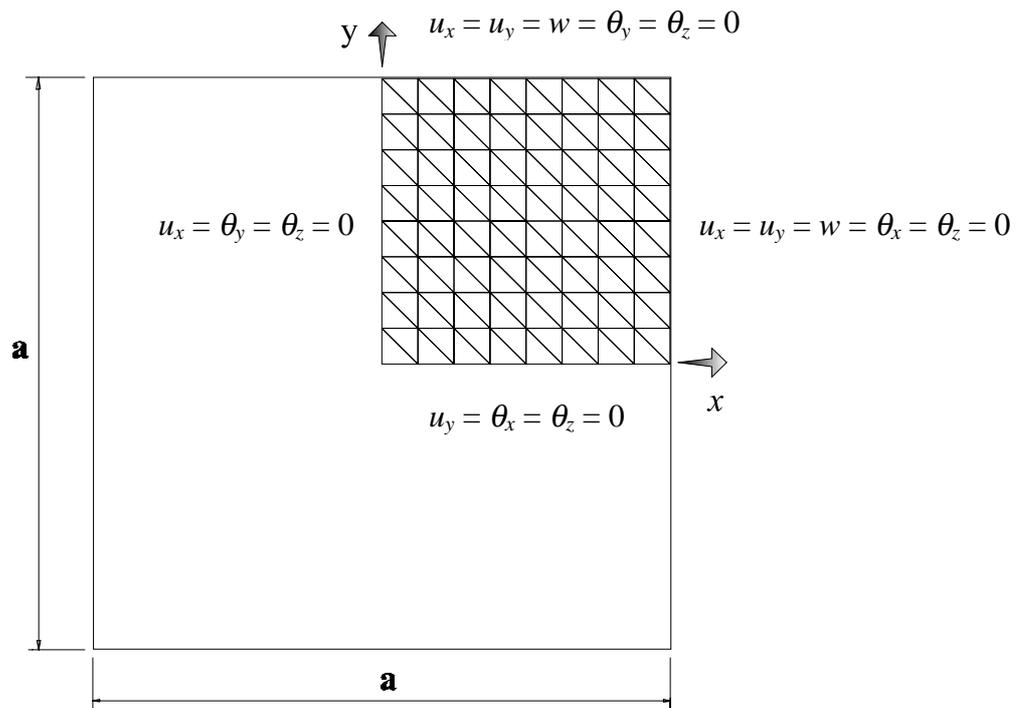


FIGURA 26 – Esquema, condições de contorno e malha do exemplo placa apoiada

É efetuada uma análise estática não-linear, aplicando uma carga uniformemente distribuída de $q = 25.838$ KN/m² em 50 passos. A Fig. 27 apresenta os contornos do deslocamento transversal e a configuração deformada da placa na sua etapa final de carregamento, com a coordenada z aumentada 10 vezes. A Fig. 28 mostra o gráfico do parâmetro de carga K ($K = qa^2/Eh^4$) com a relação entre o deslocamento transversal no centro e a espessura da placa (w/h). Os resultados para os elementos DKT e GPL-T9 são comparados com os apresentados por Liao e Reddy (1987), que utiliza 4 elementos de placa de 9 nós. Observa-se boa semelhança nos resultados, sendo que obteve-se uma proximidade maior com os resultados da Referência quando utilizou-se o elemento GPL-T9. O *NIP* foi de 2.3 para o elemento DKT e de 3.0 para o elemento GPL-T9; o *NIGC* de 110 para o elemento DKT e de 147 para o elemento GPL-T9.

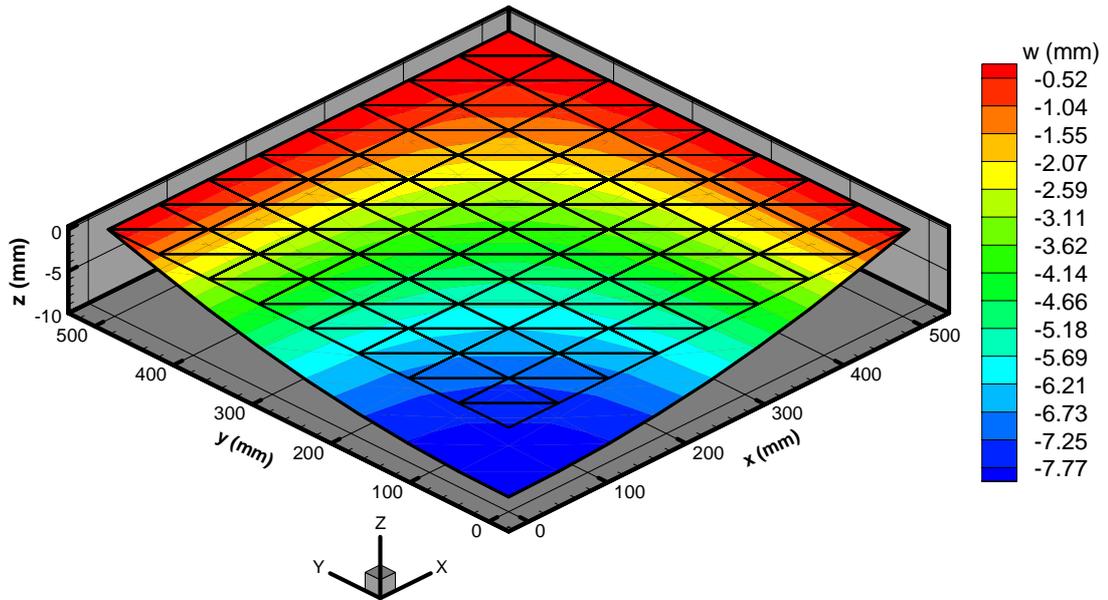


FIGURA 27 – Análise estática não-linear da placa: contornos do deslocamento transversal e configuração deformada da placa na sua etapa final de carga

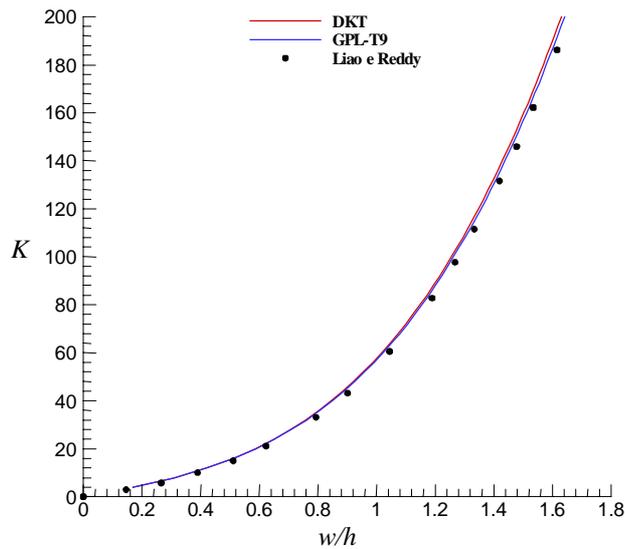


FIGURA 28 – Gráfico do parâmetro de carga K com a relação w/h para o exemplo placa apoiada

Foi realizada uma análise dinâmica não-linear, estudando o comportamento estrutural da placa por $0.01s$, quando aplicada uma carga distribuída de $q = 25.838 \text{ KN/m}^2$ em forma de degrau. O passo de tempo utilizado foi de 0.0002 s . Os contornos do deslocamento transversal bem como as configurações deformadas nos instantes de tempo 0.004 s e 0.009 s estão mostrados na Fig. 29, com uma escala de 1:10 na coordenada z para melhor visualização. O deslocamento transversal no centro da placa com o tempo, está mostrado na Fig. 30. Estes resultados são comparados com os obtidos por Liao e Reddy (1987). Embora exista uma

pequena defasagem em relação aos resultados da Referência, há semelhança no valor máximo do deslocamento transversal no centro da placa: 14.45 mm, para o elemento DKT, 14.53 mm, para o elemento GPL-T9 e 14.55 mm, obtido pela Referência. O instante que completa o primeiro ciclo foi de 0.00840 s para ambos os elementos, bem próximo ao da Referência, o qual apresenta um valor de 0.00842 s. O presente algoritmo requisitou um *NIP* de 2.92 para o elemento DKT; de 3.90 para o elemento GPL-T9; um *NIGC* de 47 com o uso do elemento DKT e de 59 com o elemento GPL-T9. Neste problema, não obteve-se convergência em energia, quando utilizou-se o elemento DKT e a convergência em deslocamentos foi atingida fixando *utol*=0.03. Por outro lado, utilizando o elemento GPL-T9, a solução foi realizada com os valores padrões para os parâmetros de convergência, ou seja, *etol*=*utol*=0.001.

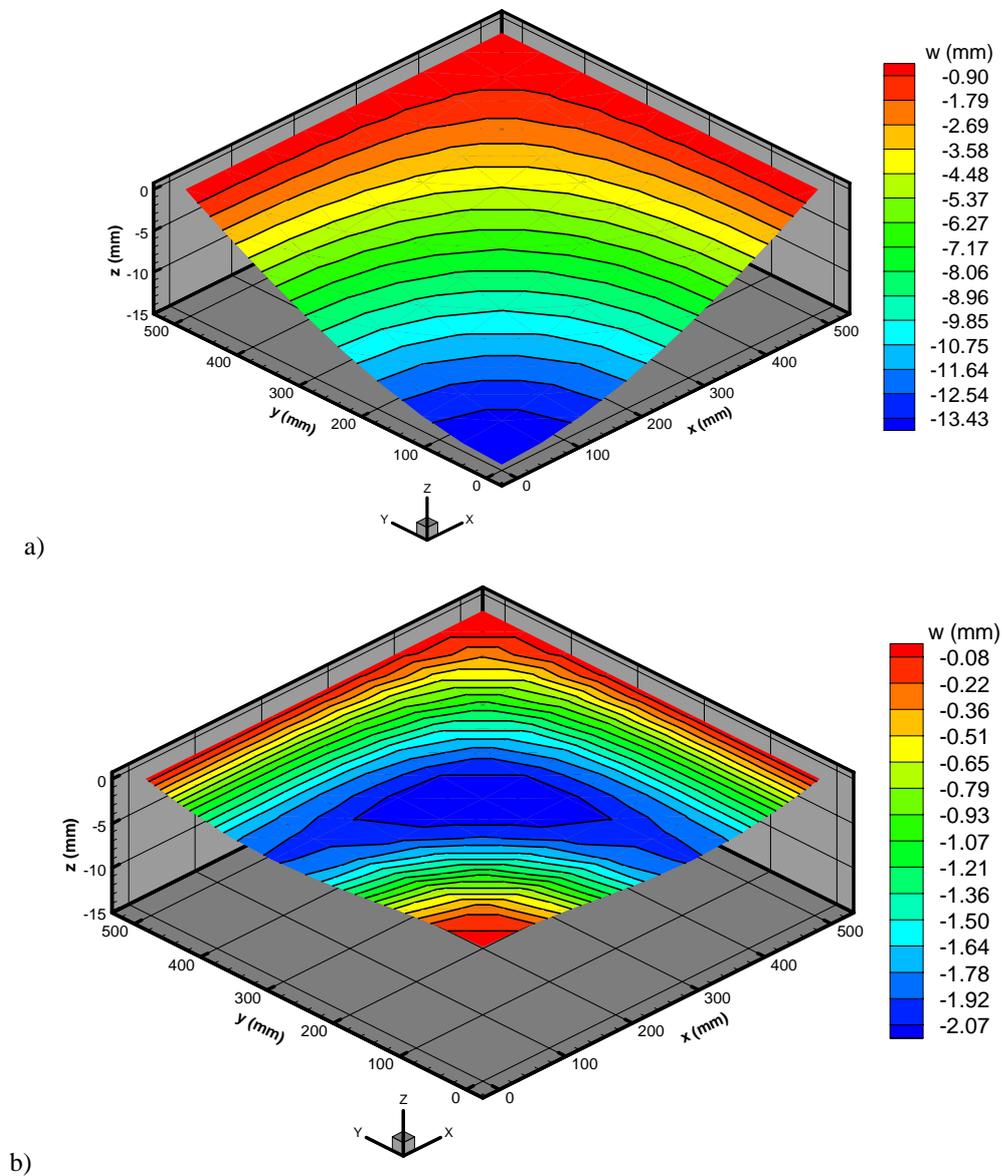


FIGURA 29 – Contornos do deslocamento transversal e configurações deformadas para os instantes de tempo 0.004 s (a) e 0.009 s (b) na análise dinâmica não-linear do exemplo placa

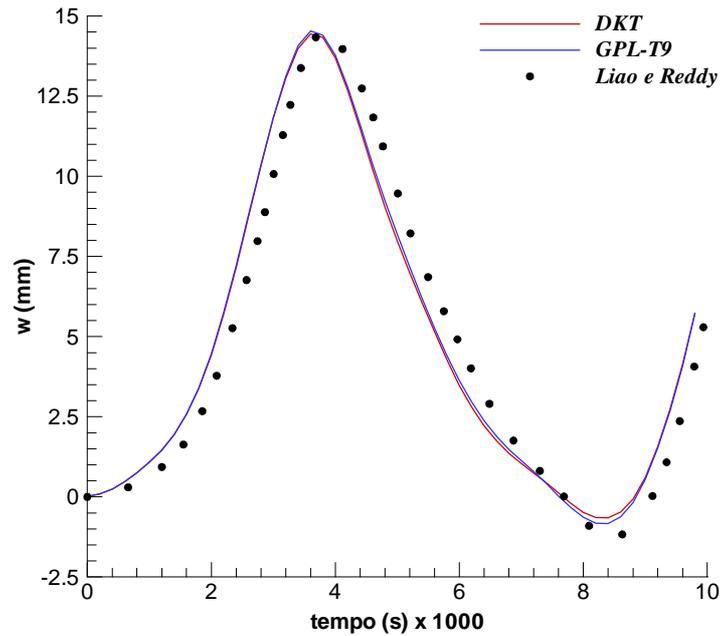


FIGURA 30 – Deslocamento transversal no centro da placa com o tempo

8.1.4 Placa cilíndrica com carga concentrada

Uma análise estática não-linear é desenvolvida em uma placa delgada cilíndrica, que está sujeita a uma carga concentrada no centro, conforme mostra a Fig. 31. As extremidades longitudinais são simplesmente apoiadas, enquanto que as outras extremidades são completamente livres. Os dados geométricos e de material são dados a seguir: $R = 2540$ mm, $L = 254$ mm, $\theta = 0.1$ rad, $h = 12.7$ mm, $E = 3102.75$ N/mm² e $\nu = 0.3$.

O problema é modelado com uma malha regular (4x4) de 32 elementos triangulares, sobre apenas $\frac{1}{4}$ do domínio devido a sua simetria. A malha utilizada e as condições de contorno aplicadas estão mostradas na Fig. 32.

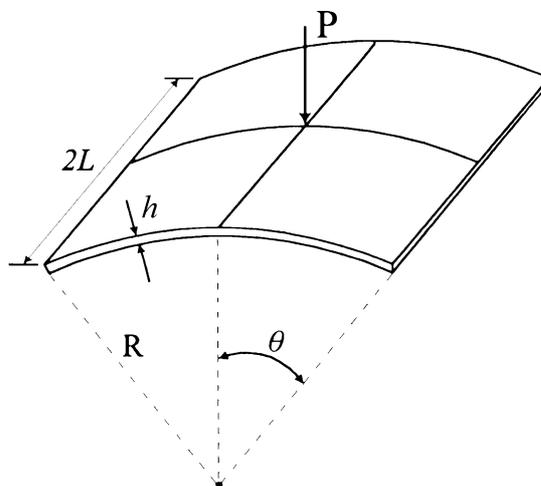


FIGURA 31 – Geometria do exemplo placa cilíndrica

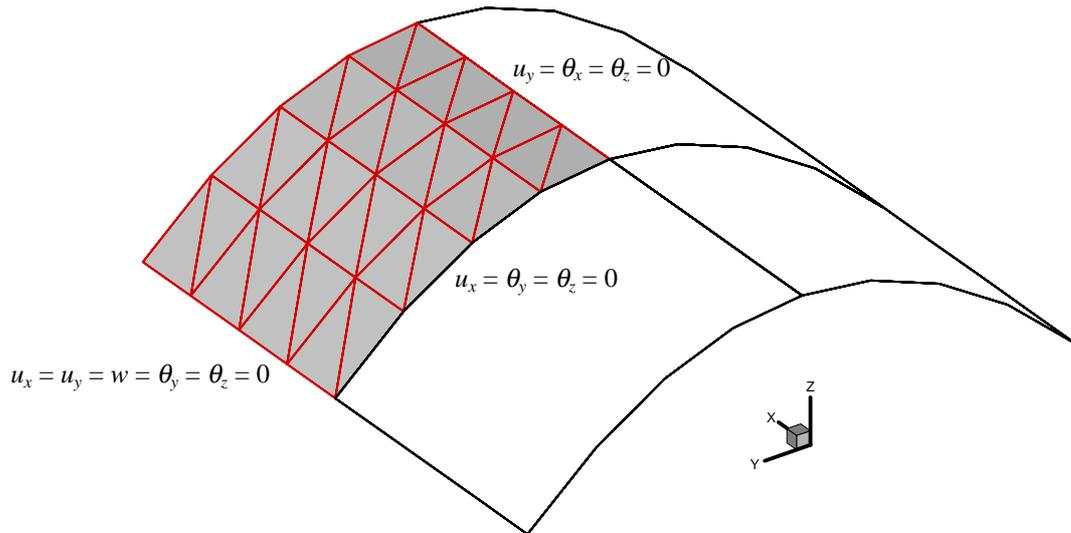


FIGURA 32 – Malha e condições de contorno para o exemplo placa cilíndrica

É aplicada uma carga concentrada máxima de $P = 2.2\text{KN}$ no centro da placa, em incrementos de 100 passos. A Fig. 33 apresenta os contornos do deslocamento transversal e a configuração deformada na etapa final de carga para o elemento GPL-T9, com a coordenada z ampliada em 10 vezes, para maior clareza. A Fig. 34 mostra a relação da carga com o deslocamento transversal no centro da placa, para os elementos DKT e GPL-T9. Estes resultados são comparados com os obtidos por Yang *et al.* (1999) que utiliza uma malha regular 8×8 de elementos triangulares lineares. Observa-se a proximidade dos resultados obtidos pelo presente trabalho com os apresentados pela Referência, com destaque para os obtidos com o elemento GPL-T9, que apresentou uma maior concordância. Neste exemplo, o *NIP* foi de 2.53 para o elemento DKT e de 2.20 para o elemento GPL-T9, o *NIGC* de 114 com o uso do elemento DKT e de 87 com o elemento GPL-T9.

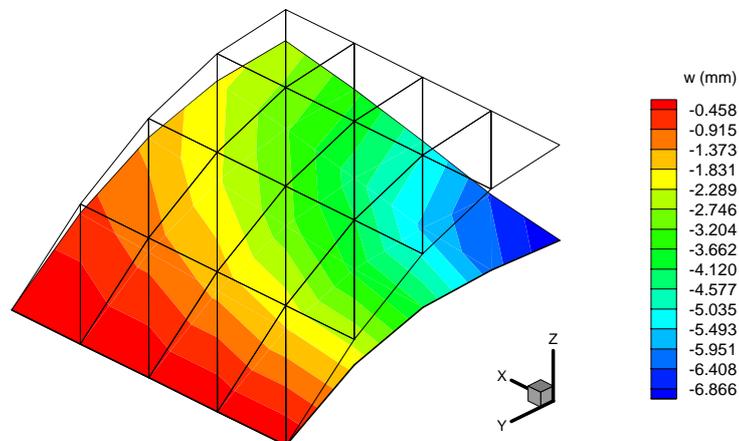


FIGURA 33 – Exemplo placa cilíndrica: contornos do deslocamento transversal e configuração deformada na etapa final do carregamento

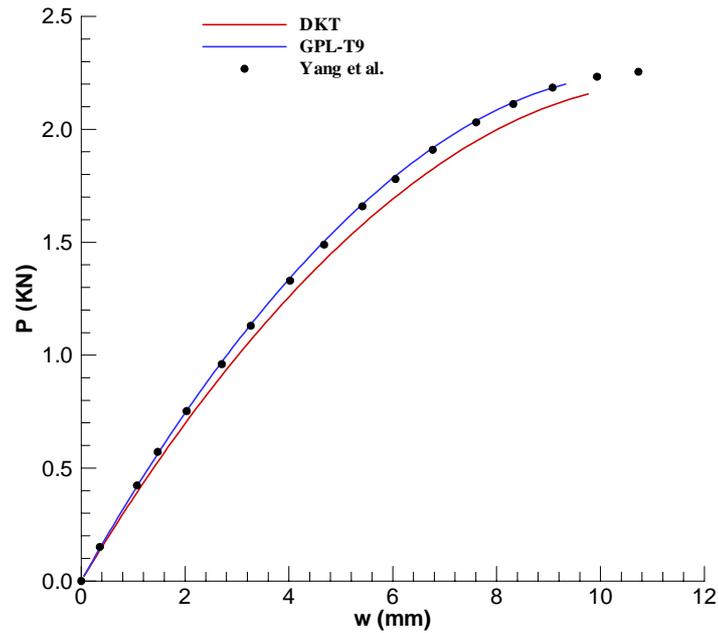


FIGURA 34 – Gráfico da carga aplicada com o deslocamento transversal no centro da placa cilíndrica

8.1.5 Calota esférica sob carga concentrada

Uma calota esférica, com as extremidades engastadas, está sujeita a uma carga concentrada P no seu centro, como mostra o esquema da Fig. 35. As dimensões adotadas para a calota foram: $R = 120.90$ mm, $h = 0.40$ mm, $H = 2.18$ mm e $\theta = 10.8989^\circ$. As propriedades do material são: $E = 68.9$ GPa, $\nu = 0.3$ e $\rho = 2619.34$ Kg/m³.

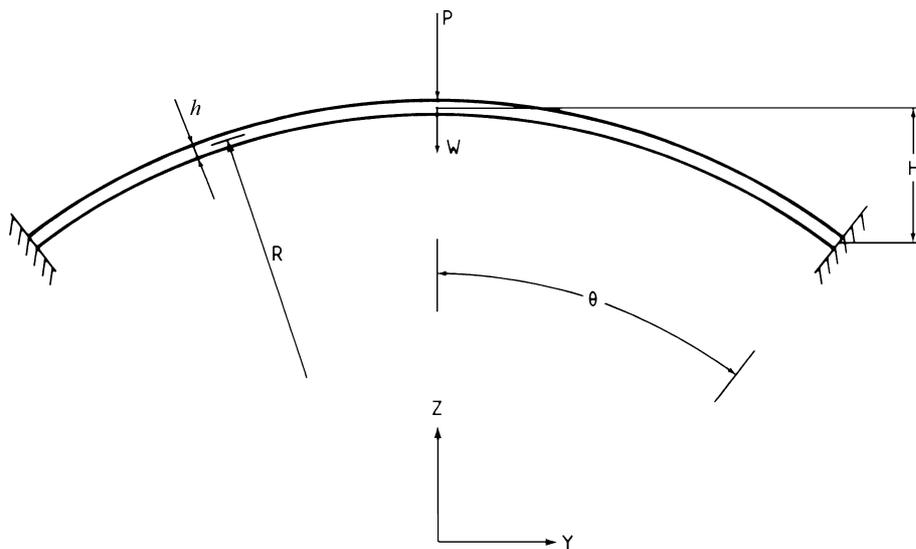


FIGURA 35 – Geometria da calota esférica

A simulação é realizada utilizando uma malha não estruturada com 206 elementos triangulares sobre apenas $\frac{1}{4}$ do domínio, pois é considerada a simetria do problema. A malha e as condições de contorno aplicadas estão mostradas na Fig. 36.

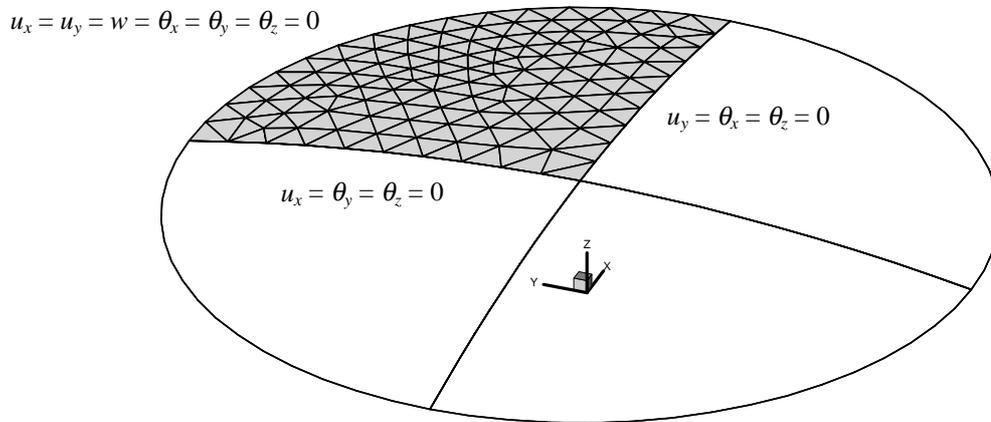


FIGURA 36 – Malha e condições de contorno para o exemplo calota esférica

É realizada uma análise estática não-linear aplicando uma carga $P=445$ N no centro da calota esférica em 100 passos. A fig. 37 mostra os contornos do deslocamento transversal e a configuração deformada da calota na etapa final de carregamento. A Fig. 38 apresenta o gráfico da carga aplicada P com a relação w/H . Os resultados obtidos pelo presente trabalho, são comparados com os apresentados por Mondkar e Powell (1977) que emprega 10 elementos com simetria axial de 8 nós. O resultados obtidos com os elementos DKT e GPL-T9 são muito semelhantes e estes estão bem próximos aos apresentados pela Referência. A solução deste problema requisitou um NIP de 2.82 para o elemento DKT e de 3.92 para o elemento GPL-T9; $NIGC$ de 180 com o uso do elemento DKT e de 210 com o elemento GPL-T9.

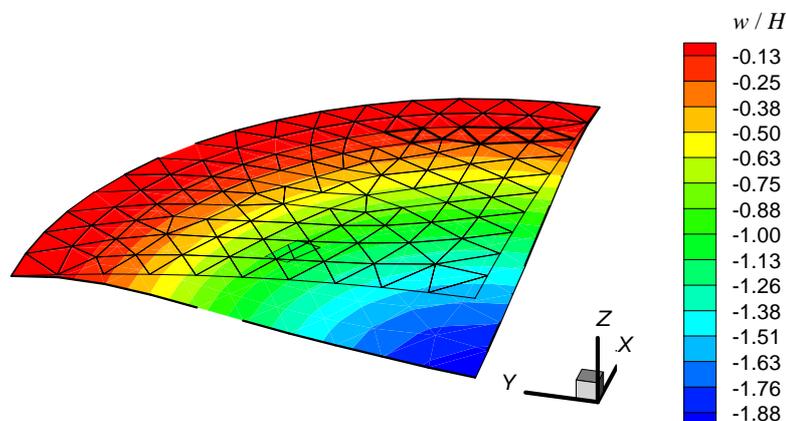


FIGURA 37 – Exemplo calota esférica: contornos do deslocamento transversal e configuração da deformada na etapa final de carga

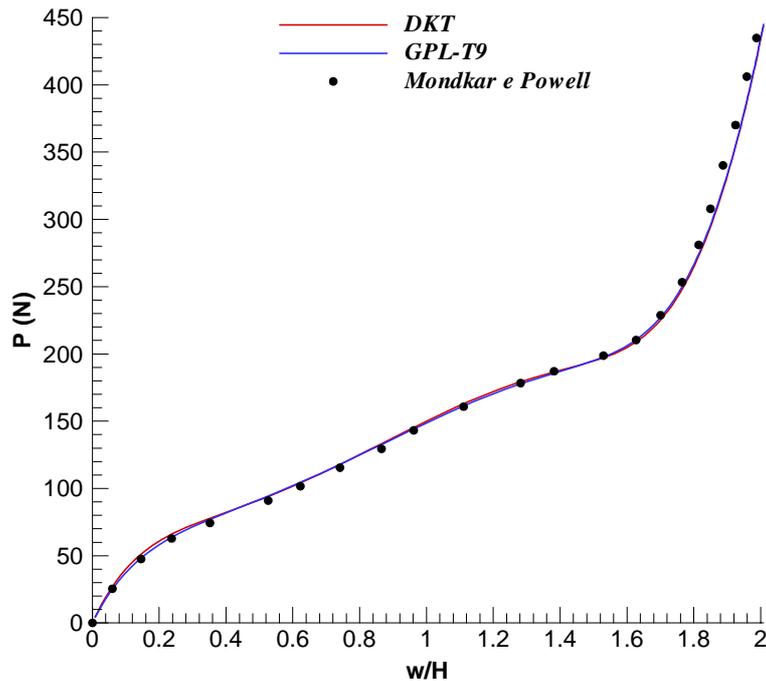


FIGURA 38 – Gráfico da carga P com a relação w/H para o exemplo calota esférica

Fez-se uma análise dinâmica linear com duração de $500 \mu s$, utilizando um passo de tempo de $\Delta t = 2 \mu s$, para uma carga degrau de $P = 445 \text{ N}$. As variações de w/H com o tempo estão mostradas na Fig. 39. Estes resultados são comparados com os apresentados por Mondkar e Powell (1977) que utilizam o mesmo passo de tempo de $2 \mu s$. O presente algoritmo requisitou um *NIGC* de 27 para os elementos DKT e GPL-T9.

O mesmo problema foi analisado considerando a não-linearidade, obtendo-se os resultados apresentados no gráfico da Fig. 40. A Fig. 41 mostra os contornos de deslocamento transversal e as configurações deformadas para os instantes de tempo $100 \mu s$ e $450 \mu s$. Utilizando os elementos DKT e GPL-T9, o presente algoritmo obteve um valor máximo para w/H de 2.43 e 2.44, respectivamente, enquanto que a Referência apresenta um valor de 2.35. O final do segundo ciclo foi atingido no instante de $460 \mu s$ para o elemento DKT e de $456 \mu s$ para o elemento GPL-T9. Mondkar e Powell (1977) encontraram um valor de $478 \mu s$. A solução deste problema, pelo presente algoritmo, requisitou um *NIP* de 3.3 para o elemento DKT e de 13.3 para o elemento GPL-T9, e um *NIGC* de 39 para ambos os elementos. Quando empregou-se o elemento DKT não obteve-se convergência em energia e a convergência em deslocamentos foi atingida fixando $utol = 0.01$. Dificuldades de convergência também ocorreram com o uso do elemento GPL-T9, necessitando de um relaxamento no parâmetro de convergência em energia, fixado em $etol = 1.0$. No entanto, o parâmetro de convergência dos deslocamentos permaneceu com o valor padrão de $utol = 0.001$.

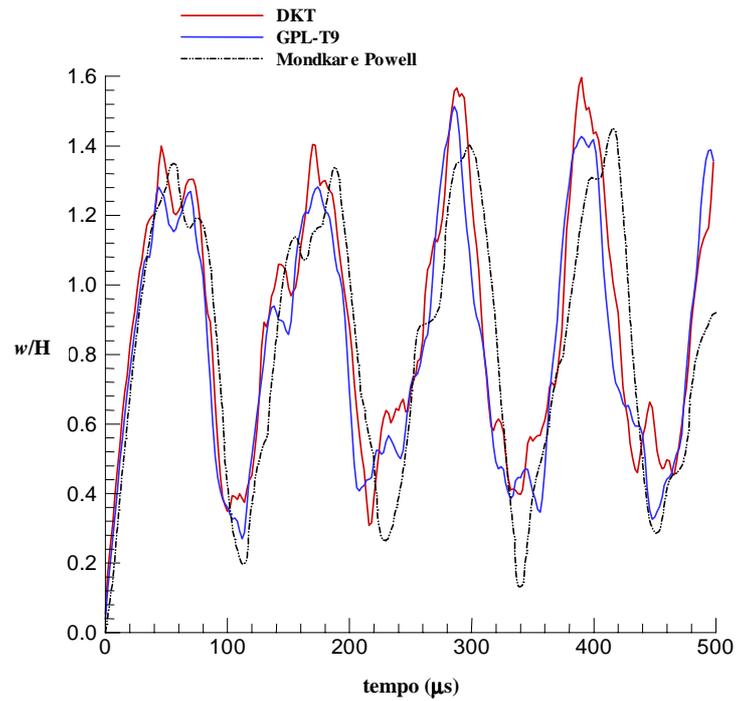


FIGURA 39 - Gráfico de w/H com o tempo para uma análise linear do exemplo calota esférica

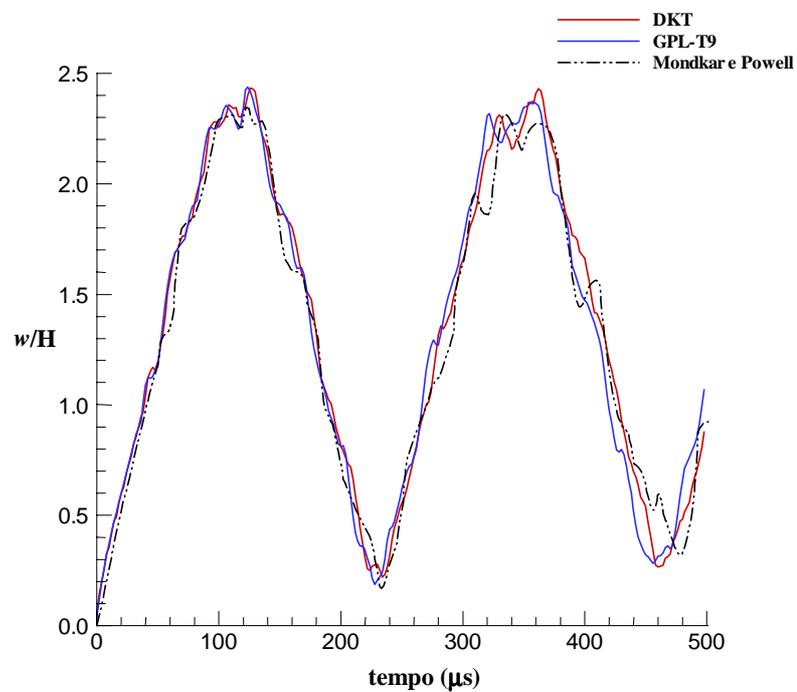


FIGURA 40 – Gráfico de w/H com o tempo para uma análise não-linear do exemplo calota esférica

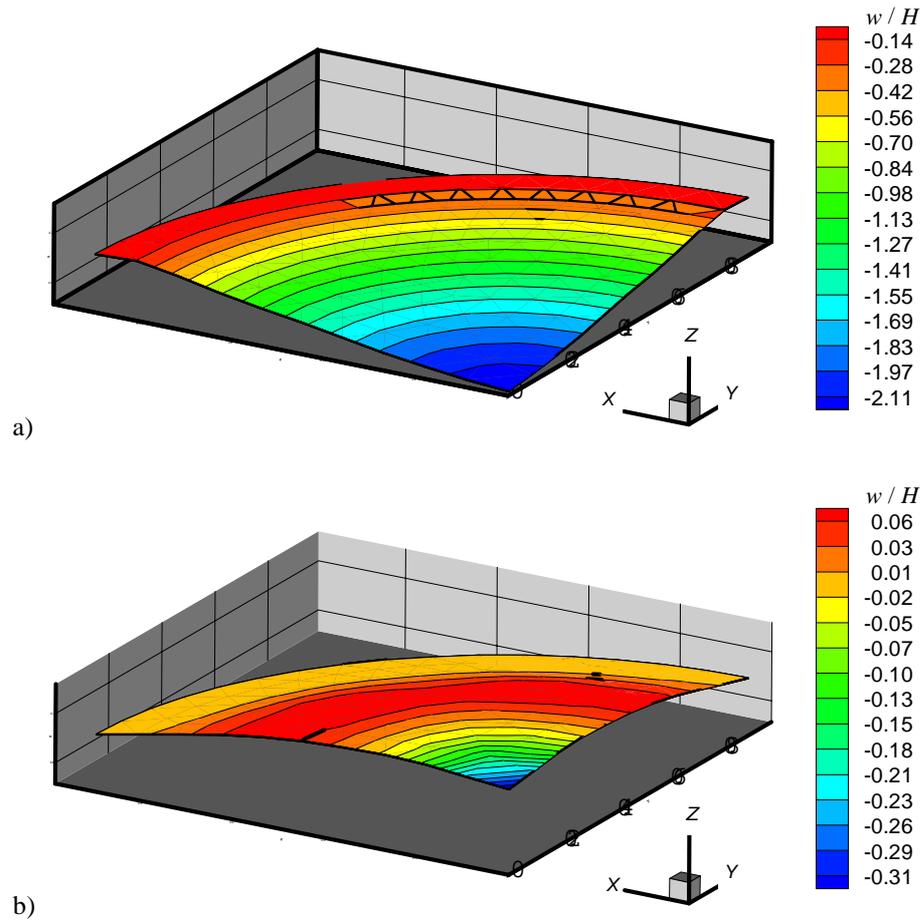


FIGURA 41 – Exemplo calota esférica: contornos do deslocamento transversal e configurações da deformada para os instantes de tempo (a) $100 \mu s$ e (b) $450 \mu s$

8.2 ESCOAMENTOS DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

Nos problemas de escoamentos de fluidos compressíveis, as variáveis envolvidas são adimensionalizadas da seguinte forma (Teixeira, 1996):

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i / L_{ref} & \bar{v}_i &= v_i / c_\infty & \bar{w}_i &= w_i / c_\infty \\ \bar{\rho} &= \rho / \rho_\infty & \bar{t} &= t c_\infty / L_{ref} & \bar{\varepsilon} &= \varepsilon / c_\infty^2 & \bar{p} &= p / (\rho_\infty c_\infty^2) \end{aligned} \quad (144)$$

onde L_{ref} é o comprimento referência, c_∞ e ρ_∞ são a velocidade do som e a massa específica em escoamento não-perturbado, considerados como valores de referência. As variáveis adimensionais do problema possuem barras superiores, as quais serão omitidas doravante para simplificação do texto.

8.2.1 Escoamento sobre uma esfera utilizando subciclos

Neste exemplo, analisa-se o escoamento de um fluido compressível não-viscoso com $Mach = 8.15$ sobre uma esfera. As características de escoamento hipersônico, tais como reações químicas, energias translacionais e vibrações das moléculas, não são consideradas. É utilizada uma malha mista estruturada/não-estruturada com 52732 elementos tetraédricos e 11086 nós. Uma vista geral e detalhes da região frontal da esfera, estão mostrados na Fig. 42. Devido à simetria do escoamento, o domínio computacional é composto de $\frac{1}{4}$ da esfera. As componentes normais aos planos de simetria e à superfície do corpo é anulada. Desta forma, o vetor velocidade fica tangente à superfície da esfera. O escoamento não-perturbado possui os seguintes valores adimensionais para a massa específica, componentes de velocidade e energia, respectivamente: $\rho_{\infty} = 1.4$; $\vec{v}_{\infty} = (8.15, 0, 0)$; $\varepsilon_{\infty} = 34.997$. O menor passo de tempo adimensional adotado é de 6×10^{-5} e o amortecimento artificial utilizado é de $CC = 10.0$.

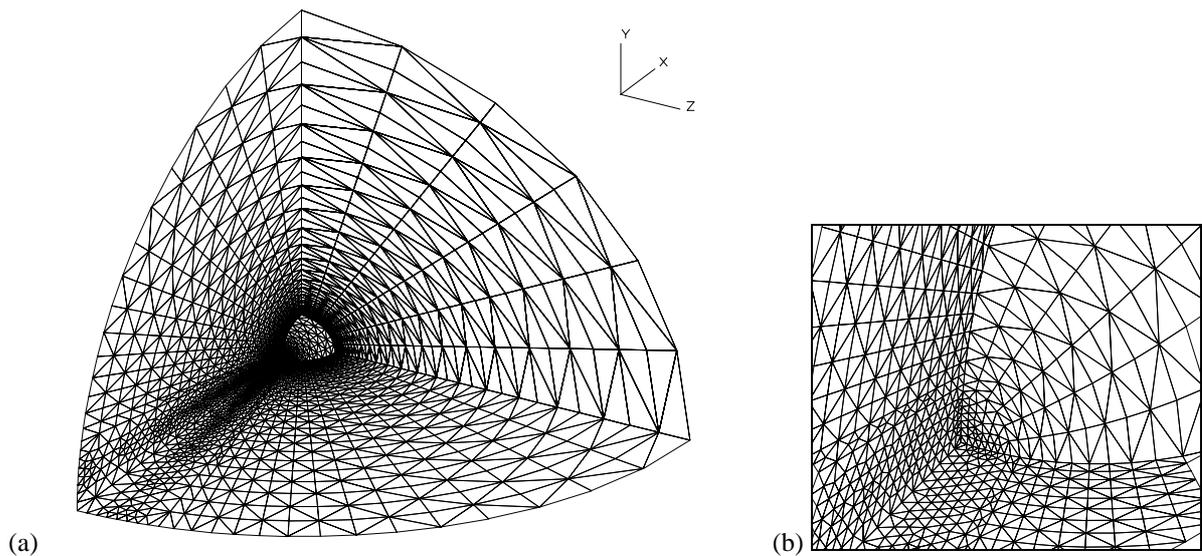


FIGURA 42 – Malha de elementos finitos para o exemplo esfera. (a) Vista geral e (b) detalhe da região frontal

Os grupos de passos de tempo foram formados conforme três critérios diferentes:

- No primeiro algoritmo, forma-se os grupos de elementos e nós baseados apenas na condição de estabilidade de Courant dada pela Eq. (30).
- No segundo algoritmo, a seleção dos grupos, além de estar baseada na condição de estabilidade de Courant, como no primeiro algoritmo, os passos de tempo estão limitados pelos indicadores dados pelas Eq. (60) a (62) e restrições (64a) ou (64b). O elemento que possuir um indicador maior do que a média dos indicadores de toda a malha, terá o seu

passo de tempo e o de seus vizinhos, iguais ao menor passo de tempo entre eles. Desta maneira, evita-se interpolações de variáveis de diferentes instantes de tempo, já que todos os nós pertencentes ao elemento considerado estarão no mesmo nível de tempo.

- c) No terceiro algoritmo, o procedimento é quase igual ao do segundo, a única diferença é que quando algum elemento estiver sujeito às restrições (64), é adotado para este elemento e seus vizinhos, o menor passo de tempo de todo o domínio.

Neste exemplo, a malha é dividida em nove grupos de elementos com passos de tempo iguais a Δt , $2\Delta t$, $4\Delta t$, $8\Delta t$, $16\Delta t$, $32\Delta t$, $64\Delta t$, $128\Delta t$ e $256\Delta t$. A Tab. 8 apresenta a distribuição em porcentagem dos elementos em cada grupo para os três algoritmos citados.

TABELA 8 – Exemplo esfera: distribuição dos elementos nos grupos em porcentagem

Grupo	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
Δt	0.4	1.0	60.6
$2\Delta t$	1.8	2.8	4.3
$4\Delta t$	6.3	10.0	5.7
$8\Delta t$	14.6	15.7	7.9
$16\Delta t$	29.8	28.7	7.7
$32\Delta t$	21.1	18.5	6.7
$64\Delta t$	14.6	13.2	4.5
$128\Delta t$	10.5	9.2	2.6
$256\Delta t$	0.9	0.9	0.0

Para o primeiro algoritmo (onde os indicadores dados por (60), (61), (62) e as restrições (64) não são usadas), o valor do ganho teórico de tempo de processamento (*speed-up*), calculado pela Eq. (59), é de 10.46. No entanto, comparando o tempo de CPU, utilizando um passo de tempo variável e uniforme, o ganho real de tempo de processamento foi de 10.22. As principais razões desta diferença são: (a) as operações de controle dos grupos de elementos e nós aumentam o tempo de processamento, (b) o desempenho decresce, devido a algumas dificuldades de vetorizar as subrotinas que definem os diferentes grupos de elementos e nós e à existência de endereçamentos indiretos nos laços de atualização dos elementos, executados apenas para os grupos selecionados naquele instante.

A Fig. 43 apresenta as distribuições da massa específica e da pressão, quando o passo de tempo é uniforme para todo o domínio obtidos por Teixeira (1996). Na Fig. 44 apresenta-se

a distribuição da massa específica e da pressão quando utilizada a técnica de subciclos, sem levar em conta os indicadores dados por (60) a (62) e pelas restrições de (64). Os resultados apresentados na Fig. 44, são obtidos redefinindo os grupos a cada 10 ciclos. Estes resultados são melhores que aqueles obtidos quando define-se os grupos apenas uma vez, no começo do processo. As distribuições das diferenças percentuais entre os resultados obtidos pelos esquemas de passos variável e uniforme estão mostradas na Fig. 45.

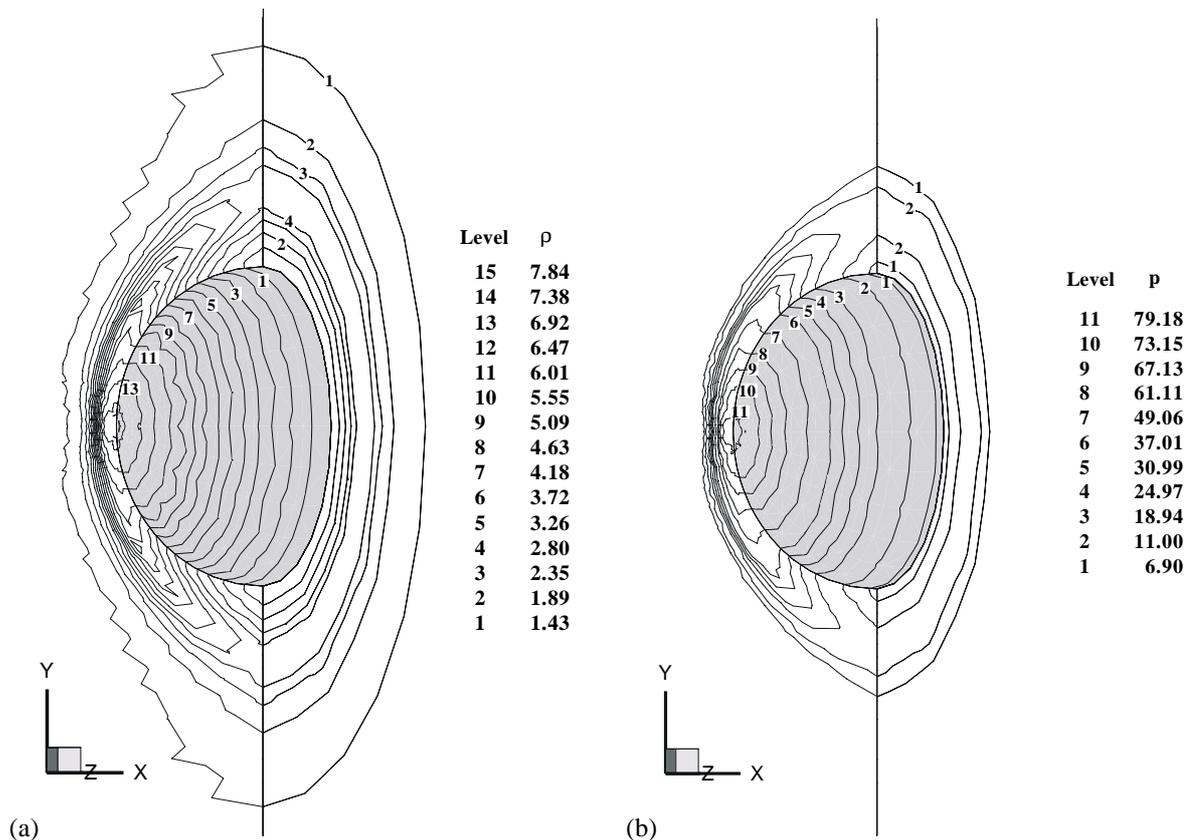


FIGURA 43 – Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usado o passo de tempo uniforme no exemplo esfera

No segundo algoritmo, a malha é dividida em nove grupos (o mesmo número de grupos usados no primeiro algoritmo), e utiliza-se os indicadores dados pelas Eq. (60), (61) e (62) com as restrições (64). Observa-se na Tab. 8 que, em comparação com o primeiro algoritmo, os elementos estão mais concentrados nos grupos de menor passo de tempo. Esta é a razão principal da diminuição do ganho teórico de tempo de processamento de 10.22 para 8.55. Os resultados de distribuição de massa específica e de pressão para o segundo algoritmo, estão apresentados na Fig. 46. A distribuição de diferenças percentuais entre os resultados obtidos com este esquema e os obtidos com o uso de passo de tempo uniforme, estão apresentados na Fig. 47. Nota-se que, embora a eficiência deste algoritmo tenha diminuído em relação a do primeiro, obteve-se resultados mais precisos.

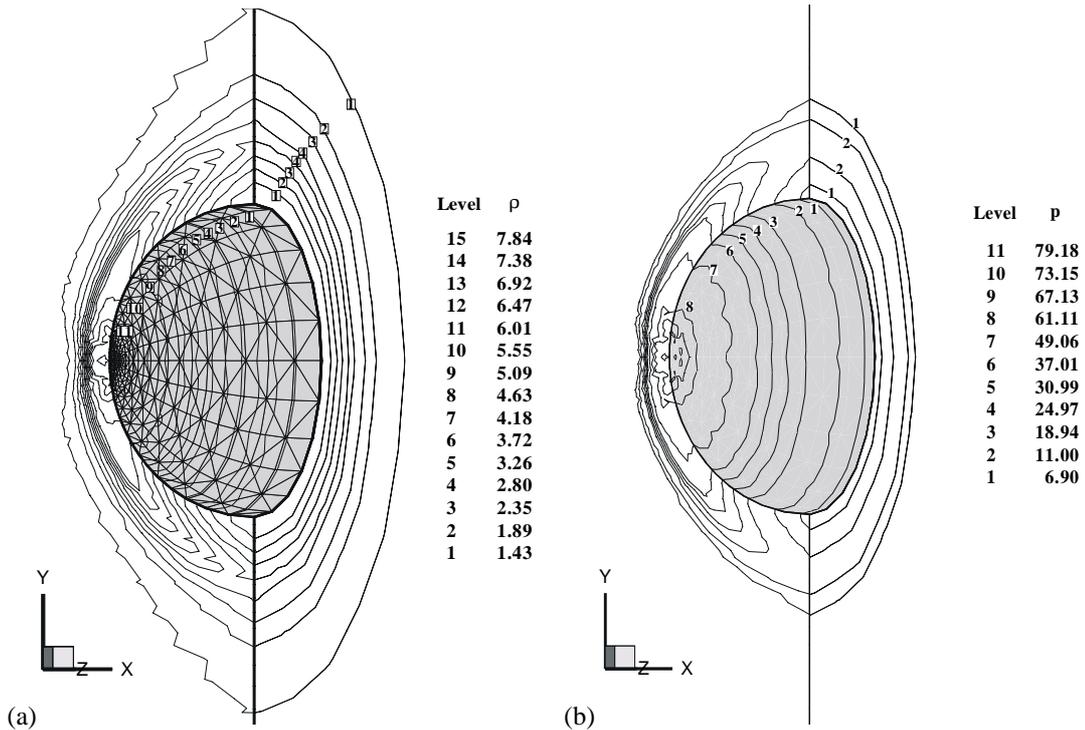


FIGURA 44 – Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usada a técnica de subciclos do primeiro algoritmo no exemplo esfera

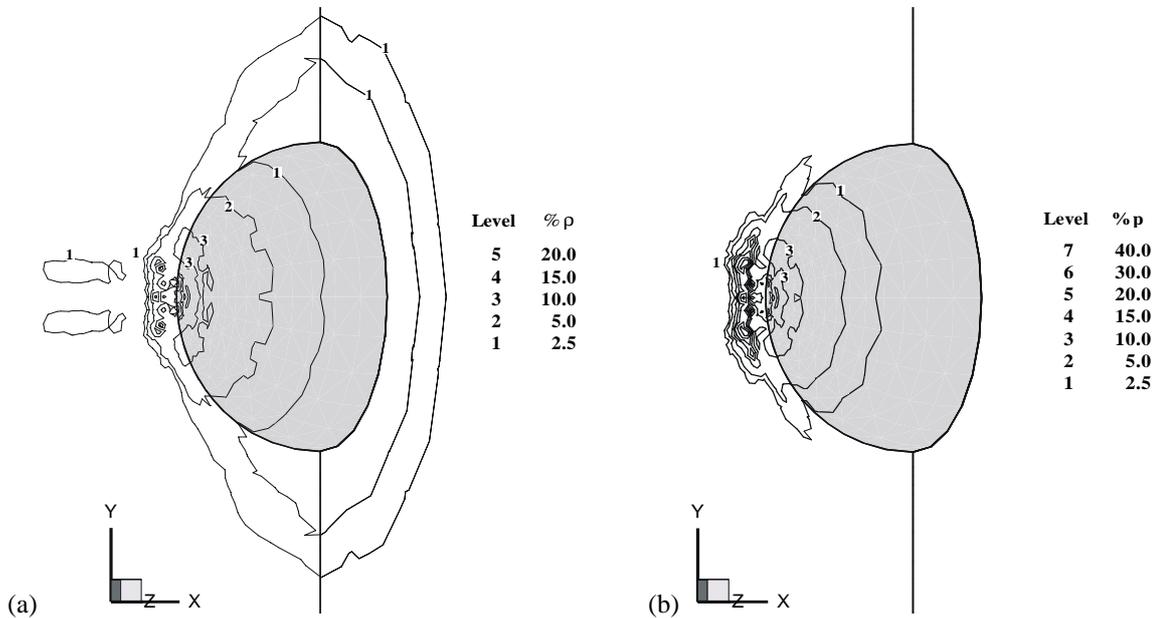


FIGURA 45 – Exemplo esfera: diferenças percentuais entre os resultados do primeiro algoritmo e de passo de tempo uniforme para (a) a massa específica e (b) a pressão

No terceiro algoritmo, a malha é dividida em oito grupos de elementos. Os indicadores dados pelas Eq. (60) a (62) e restrições (64) são utilizados como no segundo caso. Quando a restrição (64) é aplicada, utiliza-se o menor passo de tempo de todo o domínio. Por isso, existem mais elementos nos grupos de menores passos de tempo em relação aos dois últimos

casos, diminuindo o ganho teórico de tempo de processamento para 1.61 apenas. A Fig. 48 mostra os resultados da massa específica e da pressão quando utilizado este esquema. A distribuição de diferenças percentuais entre este algoritmo e o de passo de tempo constante, estão apresentadas na Fig. 49. Observa-se que os resultados obtidos neste caso, estão bem próximos aos obtidos pelo esquema de passo de tempo uniforme.

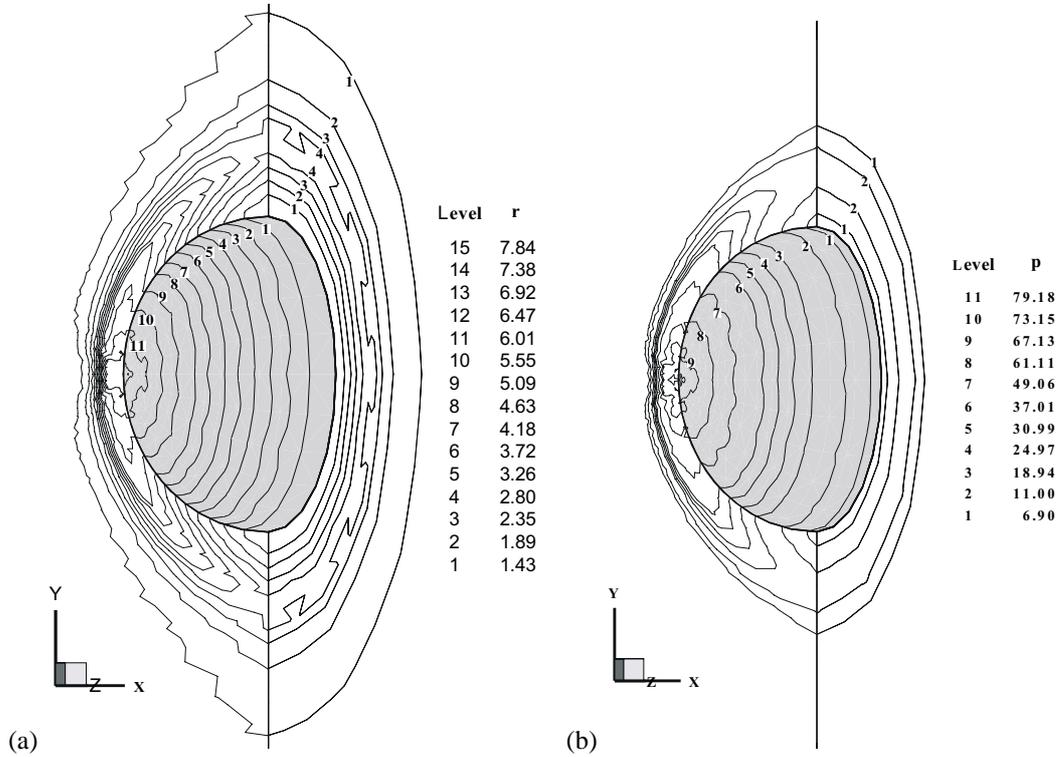


FIGURA 46 – Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usada a técnica de subciclos do segundo algoritmo no exemplo esfera

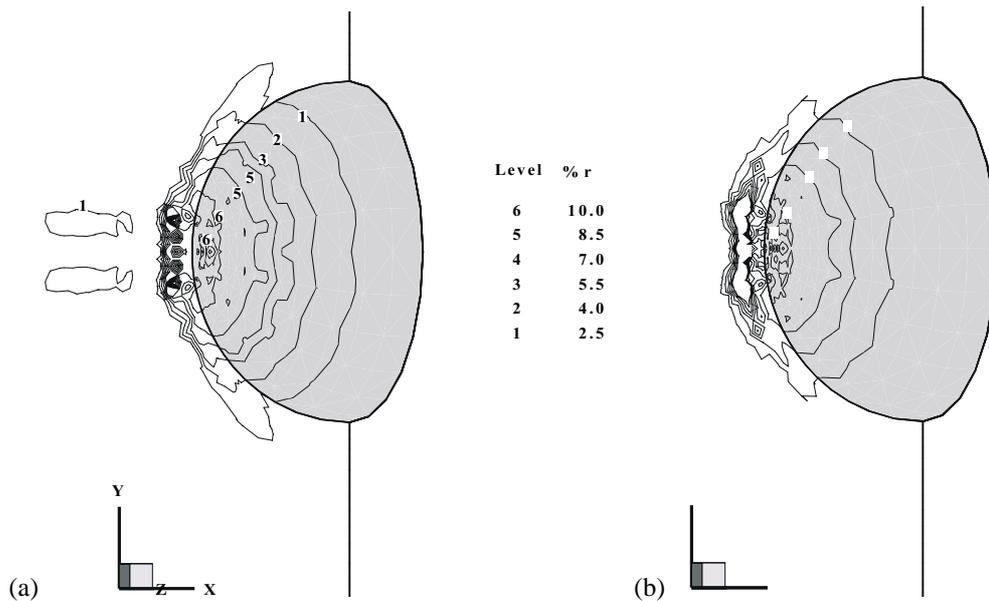


FIGURA 47 – Exemplo esfera: diferenças percentuais entre os resultados do segundo algoritmo e de passo de tempo uniforme para (a) a massa específica e (b) a pressão

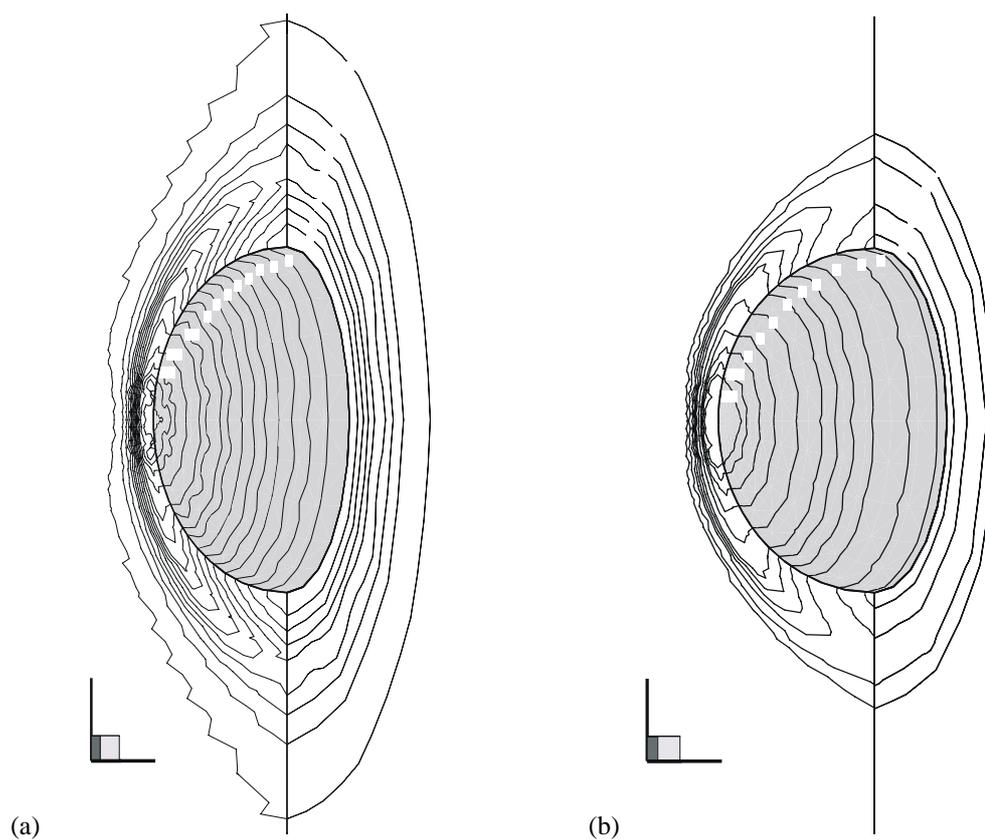


FIGURA 48 – Distribuição (a) da massa específica e (b) da pressão, quando é usada a técnica de subciclos do terceiro algoritmo no exemplo esfera

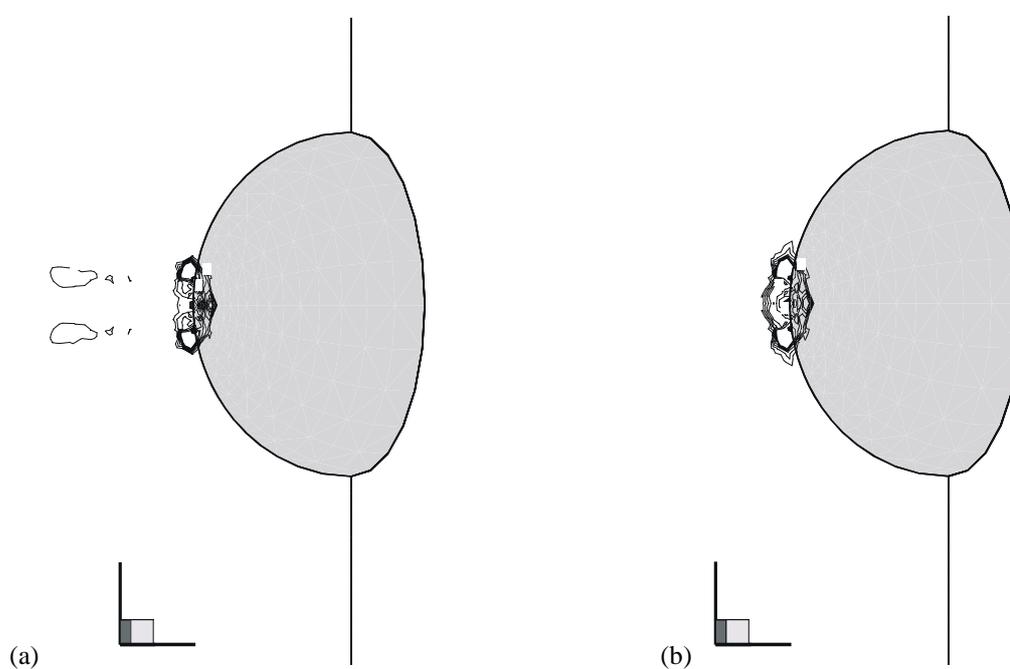


FIGURA 49 – Exemplo esfera: diferenças percentuais entre os resultados do terceiro algoritmo e de passo de tempo uniforme para (a) a massa específica e (b) a pressão

8.2.2 Escoamento subsônico e transônico sobre o NACA0012

Neste exemplo, faz-se a simulação de escoamentos de um fluido compressível e invíscido em regimes subsônico ($Mach=0.5$) e transônico ($Mach=0.95$) sobre um corpo na forma do perfil de aerofólio NACA0012, com um ângulo de incidência zero. O problema proposto é importante pelas validações do algoritmo de solução para estes regimes de escoamento e do método de passo de tempo variável. A Fig. 50 mostra um esquema do domínio do problema e as condições de contorno impostas nas superfícies. A superfície do corpo é adiabática. Utiliza-se apenas a metade do domínio para aproveitar as características de simetria do escoamento. O perfil possui uma corda unitária e uma largura constante igual a 0.1. O domínio externo é composto de um semi-cilindro circular de raio igual a 8. As propriedades de escoamento não-perturbado são adotadas como condições iniciais para todo o domínio, com exceção da superfície do corpo em que o campo de velocidades é nulo. A Fig. 51 ilustra um corte no plano de simetria $z=0.0$ da malha não-estruturada construída para este problema. São 28537 nós e 128021 elementos tetraédricos, distribuídos em duas sub-regiões separadas por um semi-cilindro de raio igual a 3. A discretização do corpo é feita por 94 nós para cada superfície de simetria coincidente com o plano xy .

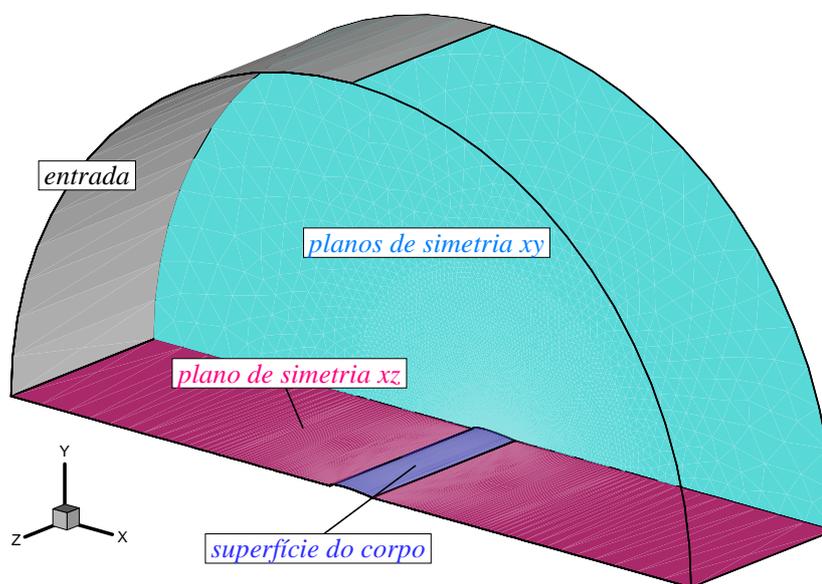


FIGURA 50 – Exemplo NACA0012: esquema do domínio computacional e condições de contorno

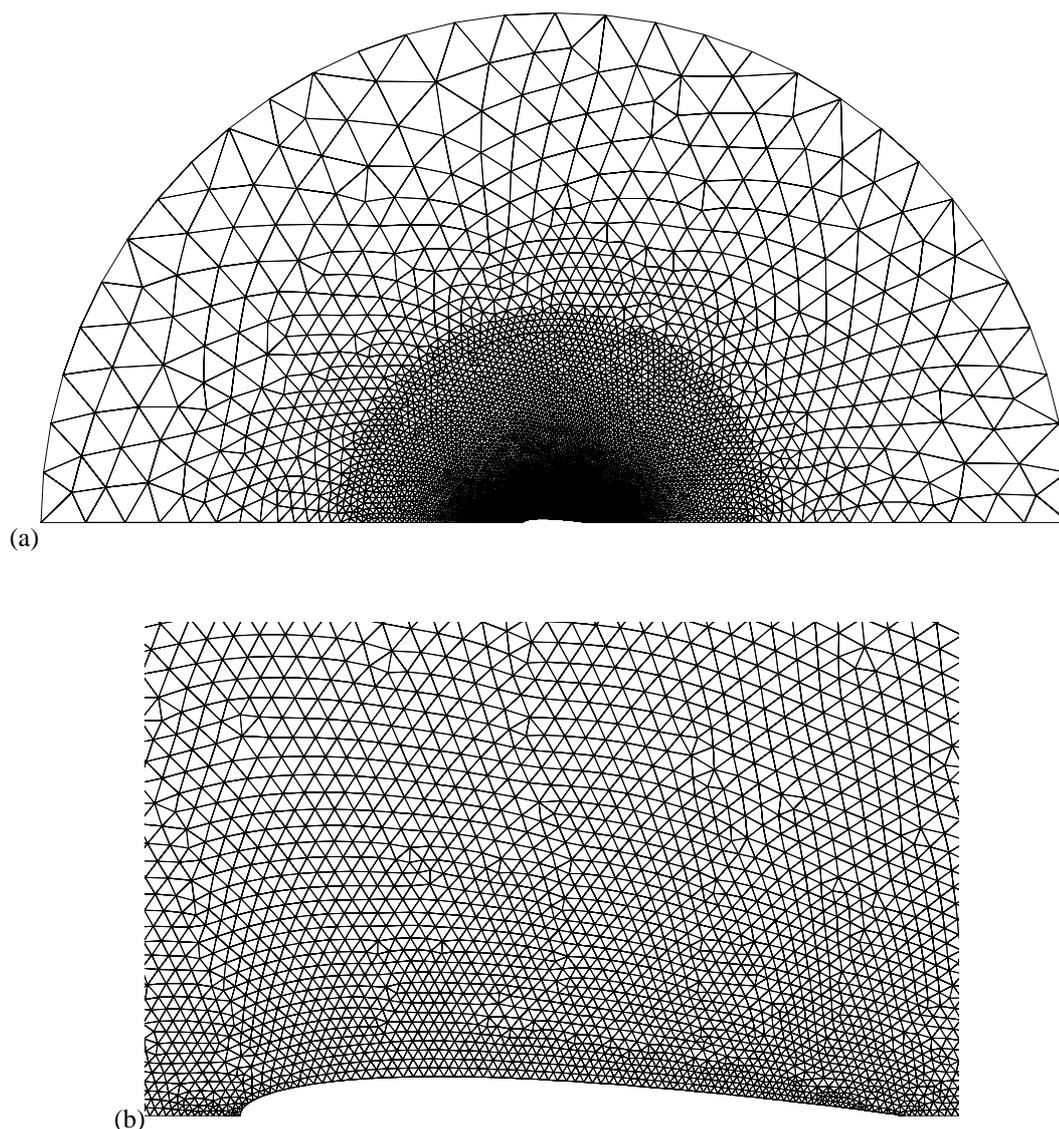


FIGURA 51 – Malha não-estruturada no plano de simetria $z=0.0$ para o exemplo NACA0012.

(a) Vista geral e (b) detalhe da região próxima ao corpo

As simulações foram realizadas utilizando o algoritmo de passo de tempo variável devido à diversidade de tamanhos de elementos da malha. A distribuição dos passos de tempo no domínio, estão mostradas na Fig. 52. Nota-se que a relação entre o maior e o menor passo de tempo é de 256, resultando em um ganho teórico de tempo de processamento de 14.26. As distribuições de massa específica, Mach e coeficiente de pressão para o regime subsônico (Mach=0.5) estão mostradas na Fig. 53. O regime permanente foi atingido após o instante de tempo adimensional de 9.83, utilizando um passo de tempo adimensional mínimo de 6.0×10^{-5} . Os gráficos do coeficiente de pressão e do número de Mach na superfície do corpo, estão mostrados na Fig. 54.

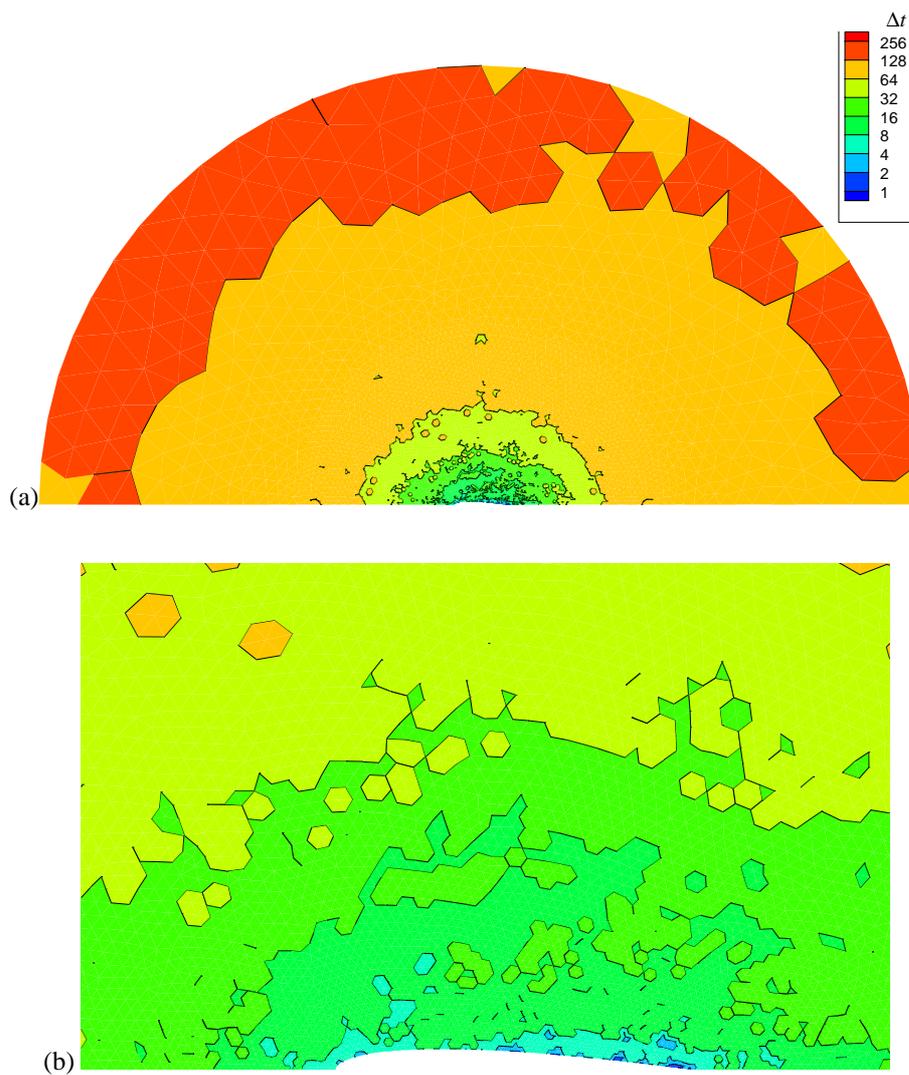
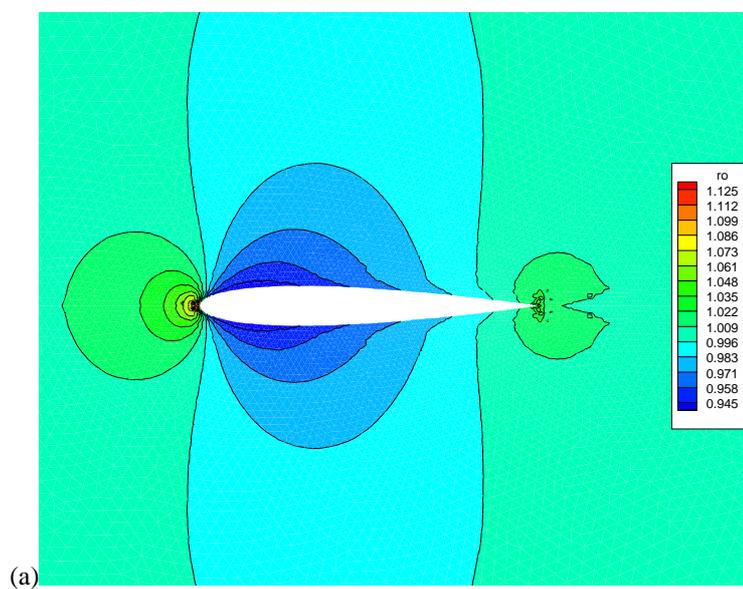


FIGURA 52 – Distribuição dos passos de tempo no domínio para o exemplo NACA0012. (a) Vista geral e (b) detalhe na região do perfil



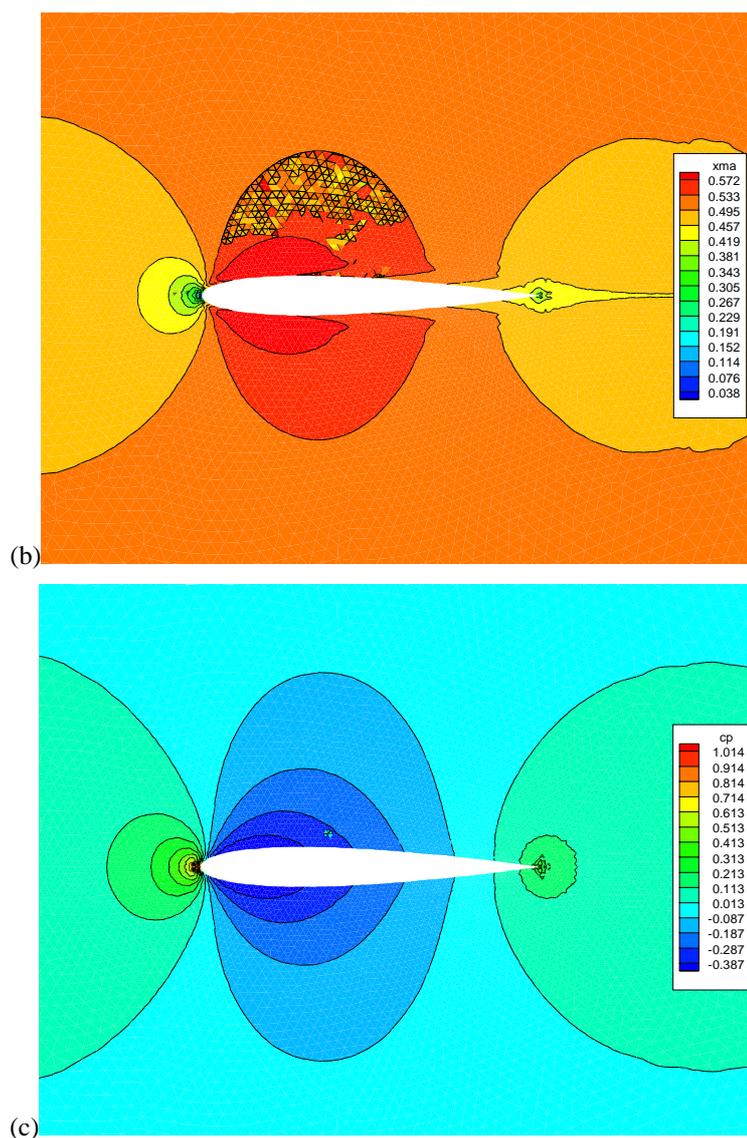


FIGURA 53 – Distribuições de (a) massa específica, (b) Mach e (c) coeficiente de pressão para o exemplo NACA0012 em regime subsônico

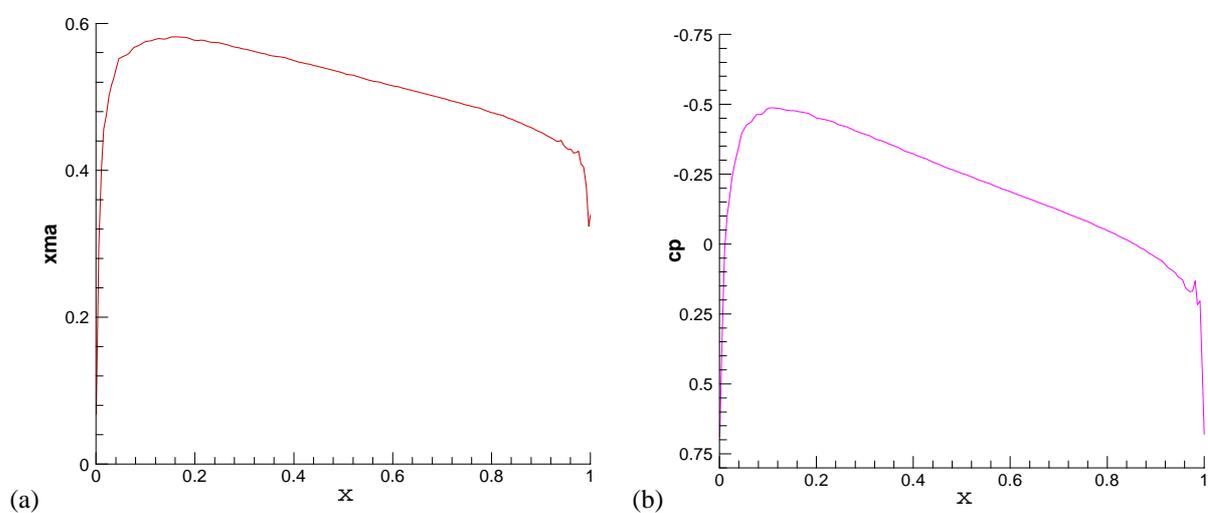


FIGURA 54 – Gráficos do (a) número de Mach e do (b) coeficiente de pressão na superfície do NACA0012 em regime subsônico

Zienkiewicz *et al.* (1995) simularam o mesmo problema utilizando o método particionado de Galerkin com linhas características e uma malha bidimensional com 969 nós e 1824 elementos triangulares, refinada na região próxima a superfície do aerofólio. A Tab. 9 apresenta a massa específica ρ_0 , pressão p_0 e temperatura T_0 no ponto de estagnação, obtidas na solução analítica, pelo presente trabalho e pela Referência. A massa específica e a temperatura teóricas no ponto de estagnação, são calculadas pelas conhecidas expressões:

$$\rho_0 = \rho_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{1/(\gamma - 1)} \quad T_0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right). \quad (144)$$

A pressão no ponto de estagnação é calculada a partir da Equação de estado (10). Os valores apresentados na Tab. 9 estão baseados na adimensionalização utilizada pela Referência citada. Embora T_0 tenha apresentado uma diferença pequena em relação ao resultado analítico (0.4%), ρ_0 teve uma diferença maior que a encontrada pela Referência. A comparação de ρ_0 ao longo da linha de estagnação está mostrada na Fig. 55.

TABELA 9 – Comparação de resultados analíticos e numéricos no exemplo NACA0012 (Mach = 0.5) para as variáveis no ponto de estagnação

Variável	Analítico	Presente	Zienkiewicz <i>et al.</i>
ρ_0	1.1297	1.0541 (6.7)	1.1268 (0.3)
p_0	3.3891	3.1480 (7.1)	3.2195 (5.0)
T_0	10.5000	10.4526 (0.4)	10.3470 (1.5)

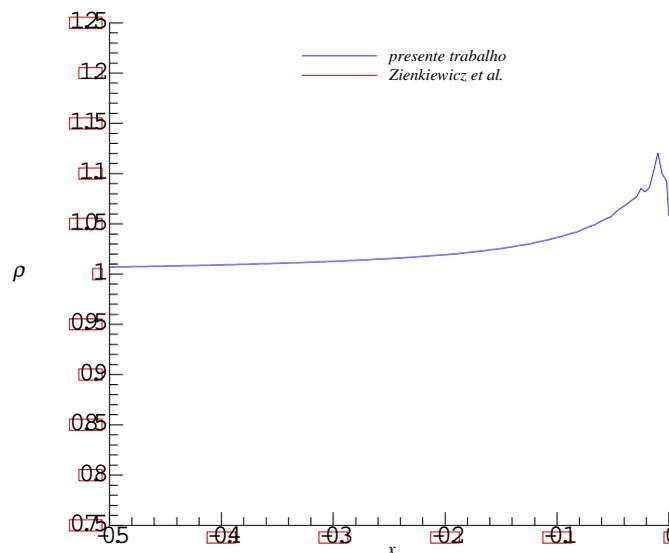
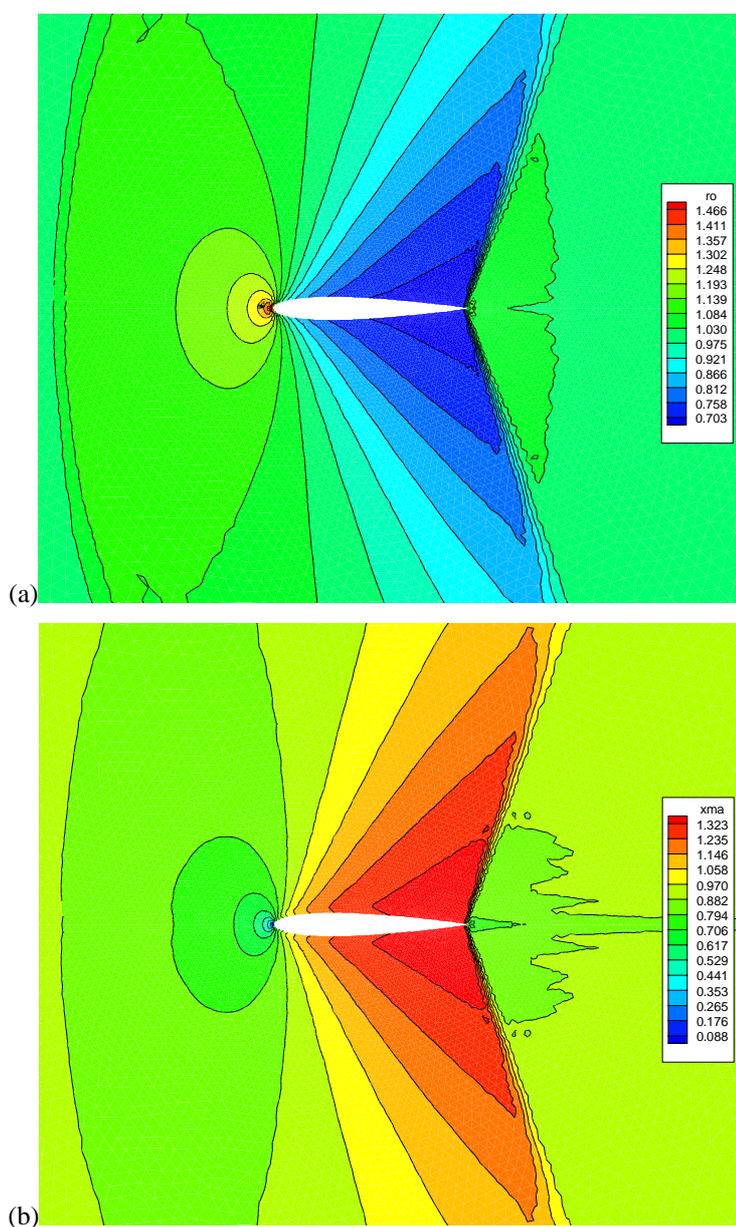


FIGURA 55 – Comparação de ρ_0 na linha de estagnação com Zienkiewicz *et al.* (1995) para o exemplo NACA0012 em regime subsônico

A simulação em regime transônico (Mach=0.95) foi processada utilizando a mesma distribuição de passos de tempo adotada no escoamento anterior, mas com um passo de tempo adimensional mínimo igual a 5.0×10^{-5} . As distribuições de massa específica, Mach e coeficiente de pressão em regime permanente, atingido após o instante de tempo adimensional de 7.68, estão mostradas na Fig. 56. A Fig. 57 apresenta uma comparação com o número de Mach na superfície do corpo obtido por Zienkiewicz e Wu (1992), e com o coeficiente de pressão obtido por Zienkiewicz *et al.* (1995). A primeira Referência, utiliza uma malha com 3753 nós e 7351 elementos triangulares. A simulação da segunda Referência é bidimensional com 3239 nós e 6346 elementos triangulares no domínio com refinamento acentuado nas extremidades do aerofólio. Observa-se a excelente concordância dos resultados. O resíduo da massa específica em relação ao número de iterações de passo de tempo, está mostrado no gráfico da Fig. 58.



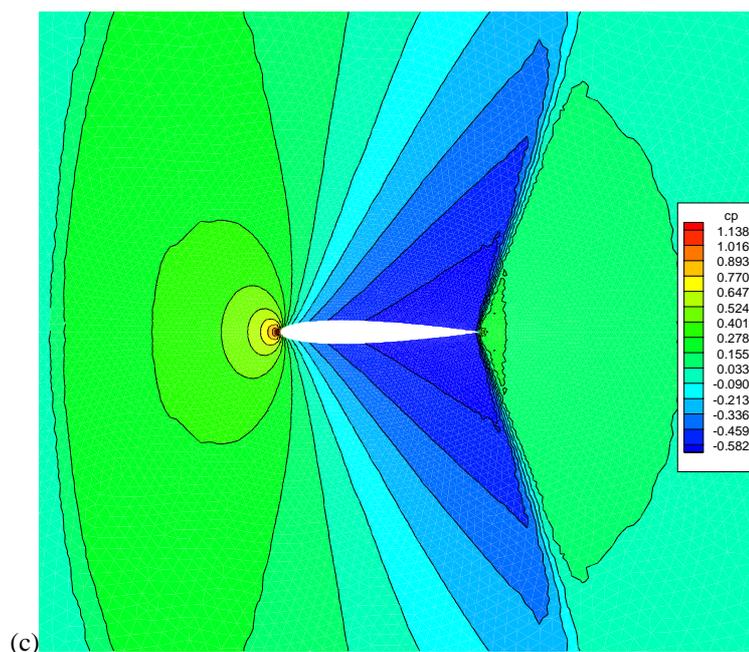


FIGURA 56 – Distribuições de (a) massa específica, (b) Mach e (c) coeficiente de pressão para o exemplo NACA0012 em regime transônico

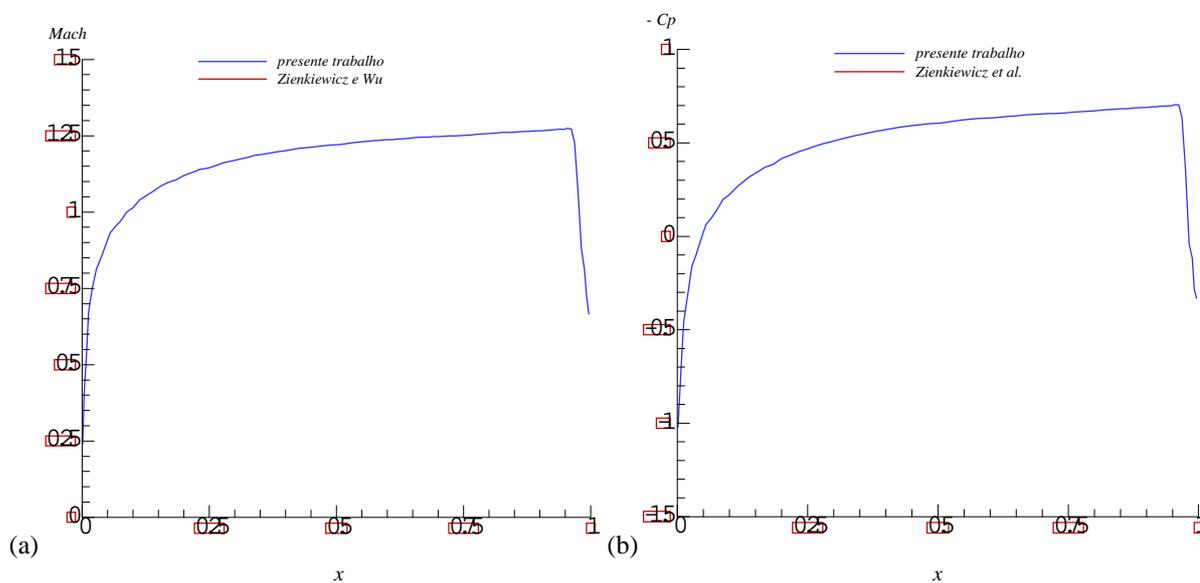


FIGURA 57 – Gráficos do (a) número de Mach e do (b) coeficiente de pressão na superfície do NACA0012 em regime transônico

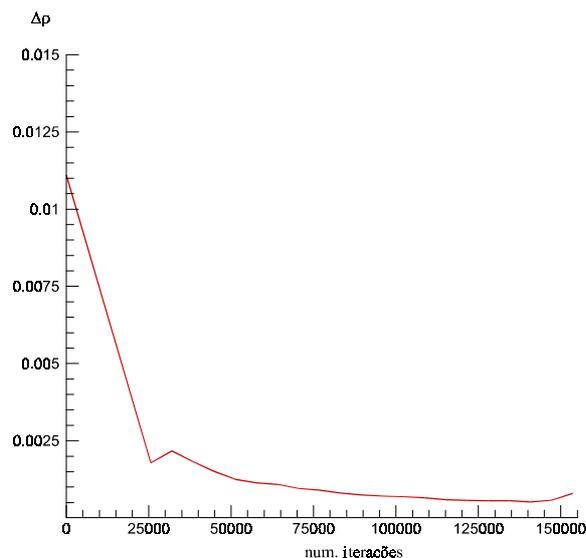


FIGURA 58 – Resíduo da massa específica em relação ao número de iterações de tempo para o exemplo NACA0012 em regime transônico

8.2.3 Escoamento sobre o VLS

O escoamento de um fluido invíscido em regimes transônico ($Mach=0.9$) e supersônico ($Mach=2.0$) sobre o veículo aeroespacial VLS com um ângulo de ataque nulo, é apresentado neste exemplo. Os resultados são consequência de um trabalho em conjunto com o Centro Técnico Aeroespacial do Instituto de Aeronáutica e Espaço (CTA/IAE). A Fig. 59 mostra uma vista geral do veículo, composto basicamente pelo seu corpo central e por quatro propulsores laterais. O corpo central consiste de um cilindro com um comprimento total de 17.859 m e um diâmetro de 1.0 m. Na sua parte frontal, existe uma expansão com 1.2 m de diâmetro. Os propulsores laterais têm um comprimento de 7.978 m e um diâmetro de 1.0 m. O domínio computacional utilizado é apenas um quarto do domínio total, para aproveitar a simetria do problema. Para a simulação, foram usadas duas malhas cujas características estão apresentadas na Tab. 10. A malha 2 possui um refinamento maior na região frontal do corpo, onde acontece os fenômenos físicos mais complexos. Os tamanhos dos elementos da malha 2, próximos à superfície desta região, são em torno de 1.5 a 3 vezes menor do que os da malha 1. As Fig. 60 e 61 mostram as malhas 1 e 2 utilizadas para o problema, respectivamente. A Fig. 62 apresenta as condições de contorno aplicadas no domínio computacional e as condições de escoamento não-perturbado para $Mach=0.9$ e 2.0. As variáveis do problema foram inicializadas com os mesmos valores de escoamento não-perturbado, com exceção dos nós pertencentes à superfície do corpo, na qual as componentes de velocidade foram anuladas.

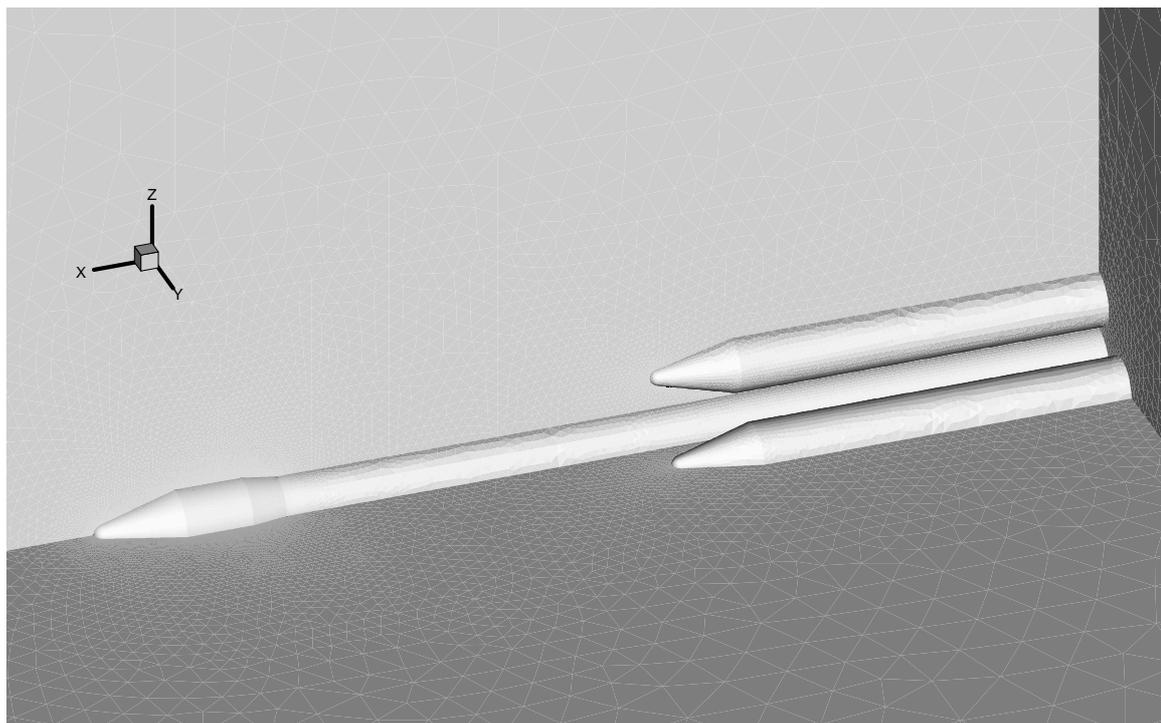
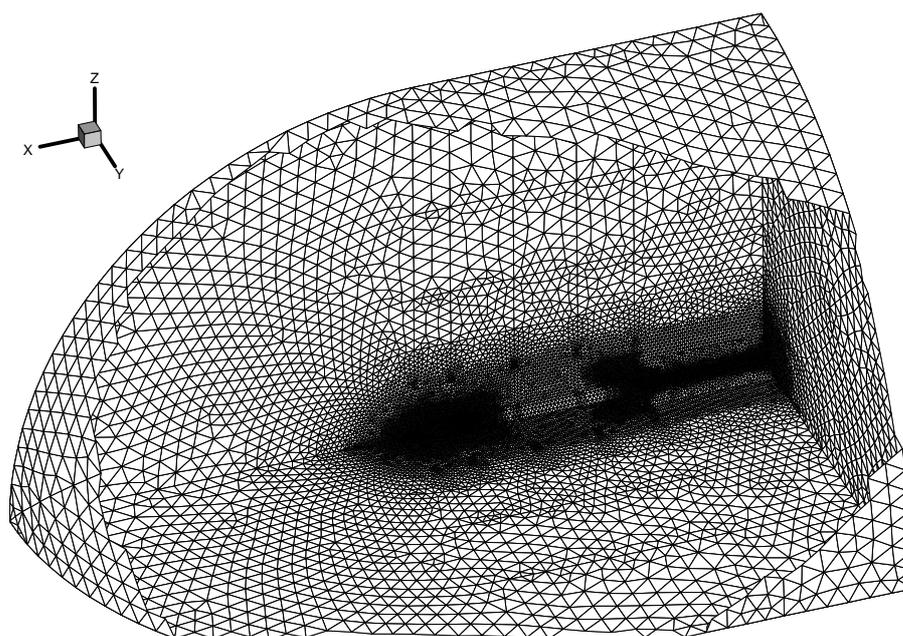


FIGURA 59 – Vista geral do VLS

TABELA 10 – Dados das malhas do exemplo VLS

Malha	Fluido		Menor aresta de elemento (mm)
	Nós	Tetraedros	
Malha 1	106025	581172	8.37
Malha 2	203053	1098544	2.86



(a)

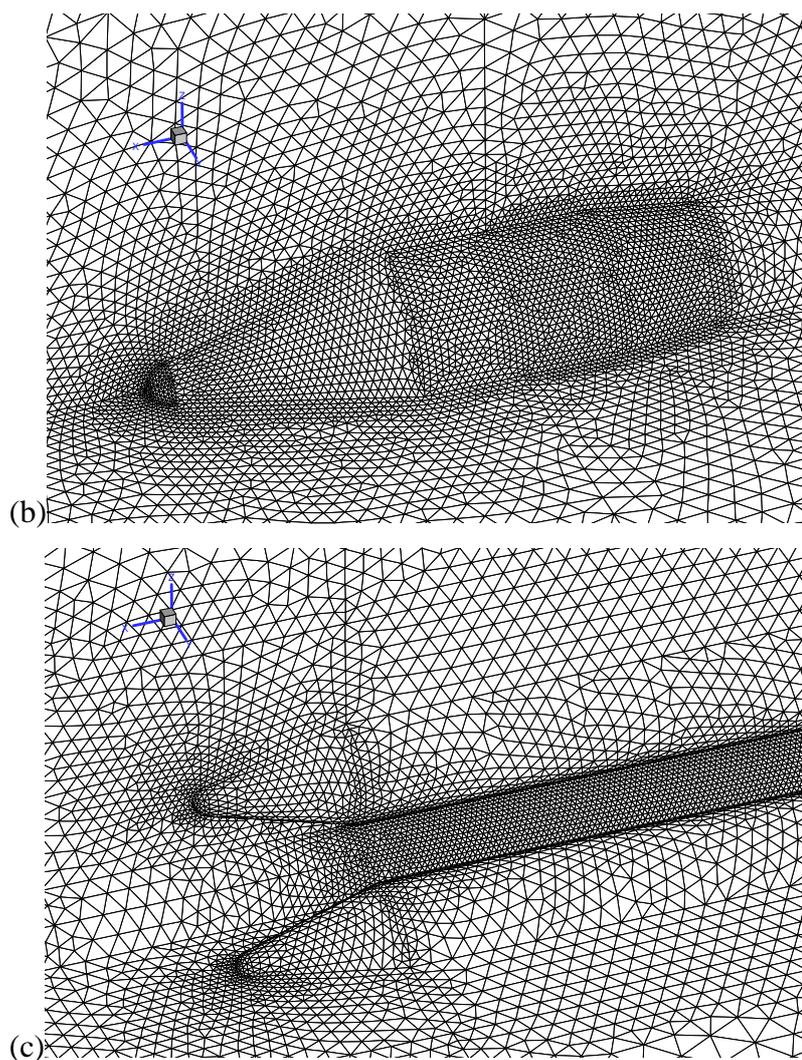
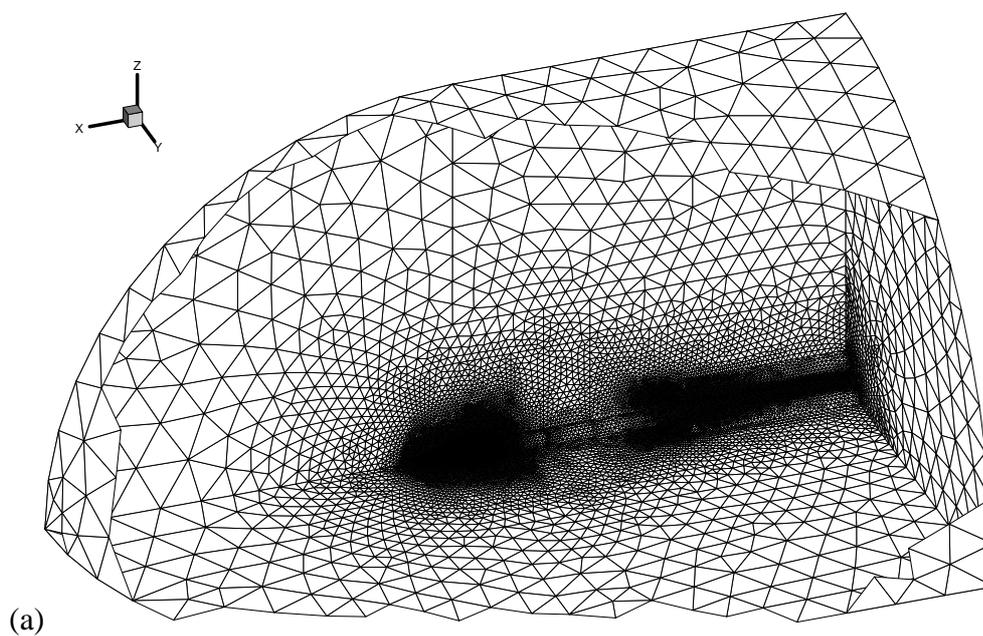


FIGURA 60 – Malha 1 para o exemplo VLS. (a) Vista geral, (b) detalhe da parte frontal do corpo, (c) detalhe da região dos propulsores laterais



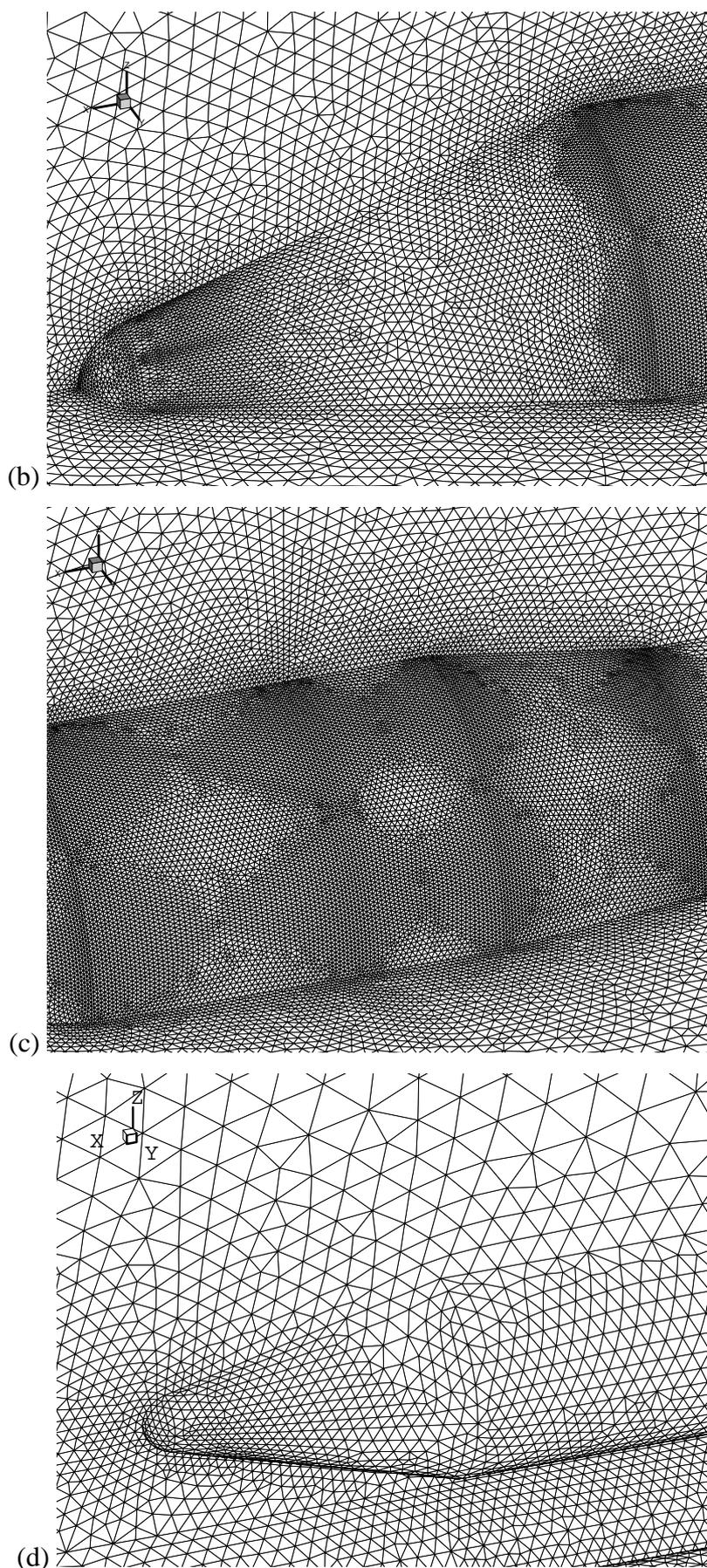


FIGURA 61 – Malha 2 para o exemplo VLS. (a) Vista geral, (b) e (c) detalhes da parte frontal do corpo, (d) detalhe da região dos propulsores laterais

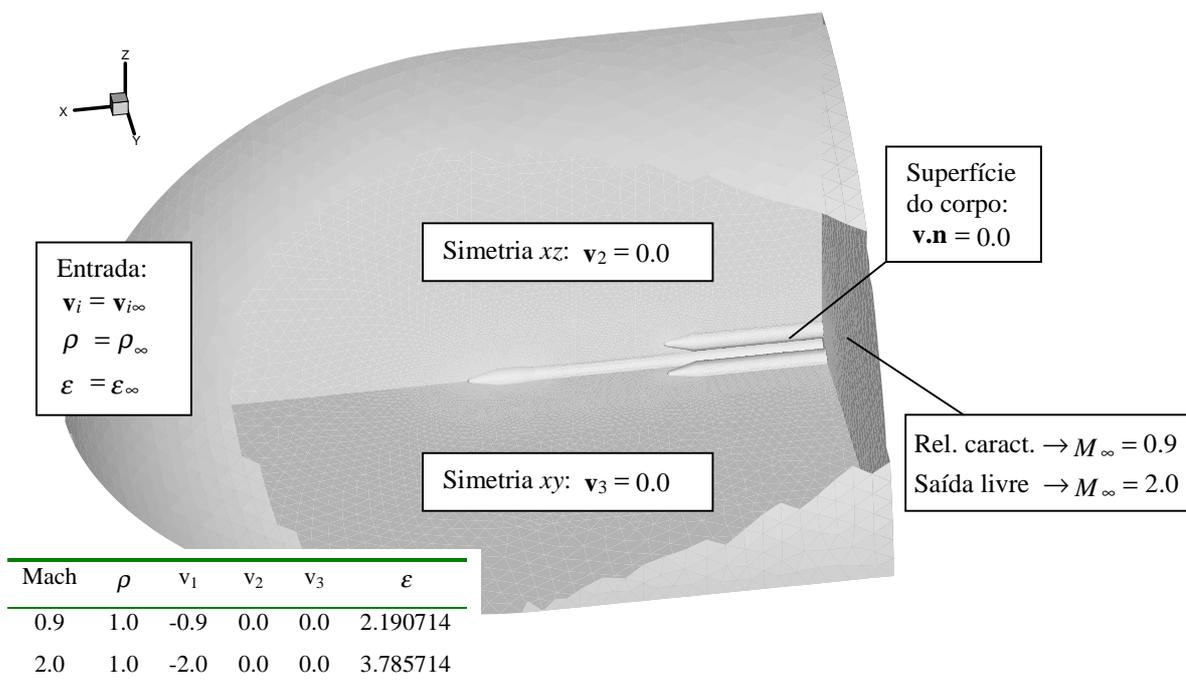


FIGURA 62 – Condições de contorno e de escoamento não-perturbado para o exemplo VLS

8.2.3.1 Escoamento supersônico, Mach=2.0

Neste caso, foi utilizado um passo de tempo adimensional constante em todo o domínio de 0.1. O coeficiente de amortecimento numérico foi de $CC=10.0$. As Fig. 63 e 64 apresentam as distribuições do coeficiente de pressão e do número de Mach, respectivamente, em um regime permanente atingido após 72000 passos de tempo. Destacam-se a forte onda de choque na frente do veículo até a parte cilíndrica. Nas transições da parte cilíndrica com as superfícies cônicas, ocorrem expansões de Prandtl-Meyer. O comportamento do escoamento na frente dos propulsores laterais é semelhante ao da parte frontal do veículo, devido às suas semelhanças geométricas. A Fig. 65 mostra gráficos do coeficiente de pressão C_p ao longo da superfície do corpo central no plano de simetria xy . É utilizada uma coordenada adimensionalizada com relação ao comprimento do corpo do VLS (x/L) e um sistema com origem coincidente com a ponta do VLS. Esses resultados são comparados com os experimentais disponíveis no Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) (Scalabrin, 1999), observando-se a boa concordância de resultados, principalmente na região frontal do veículo. A posição da onda de choque no propulsores laterais está um pouco deslocada da apresentada pelos resultados experimentais em função de diferenças entre a geometria do domínio computacional e a utilizada para a realização das medições experimentais (Scalabrin, 1999). Um gráfico do resíduo da massa específica ao longo do tempo é apresentado na Fig. 66, mostrando a convergência do algoritmo para este problema.

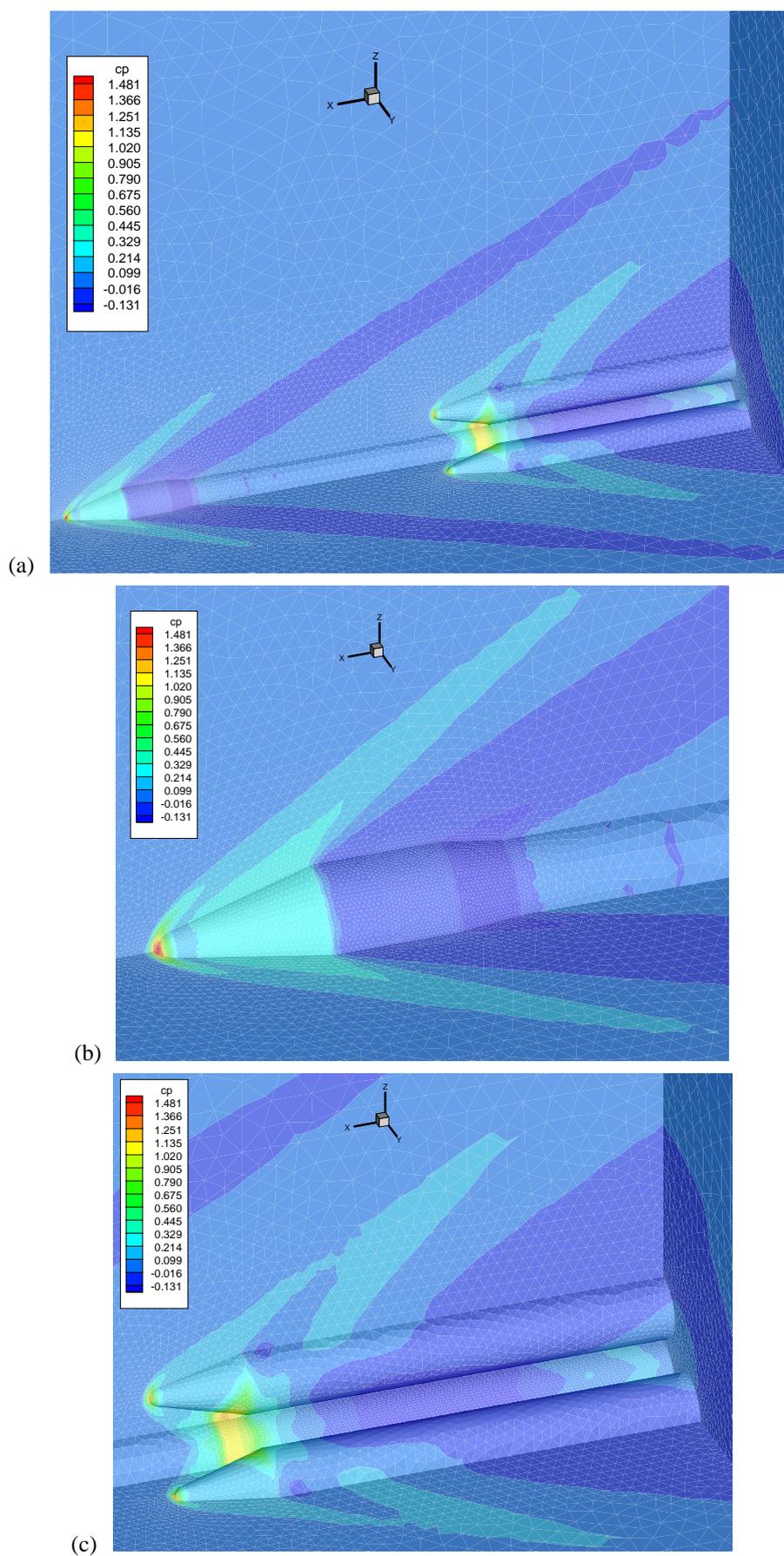


FIGURA 63 – Distribuição do coeficiente de pressão para o exemplo VLS em regime supersônico. (a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais

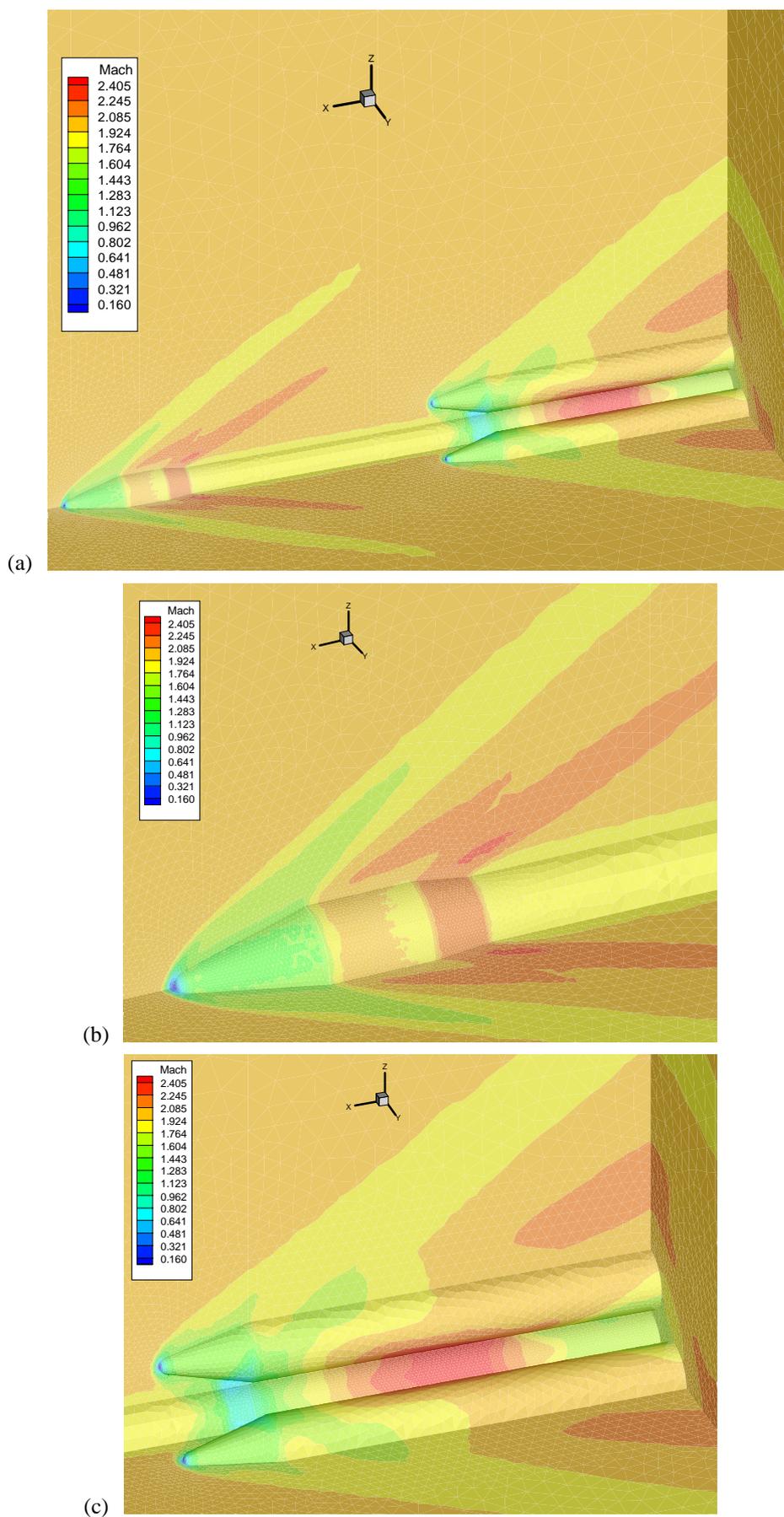


FIGURA 64 – Distribuição do número de Mach para o exemplo VLS em regime supersônico.

(a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais

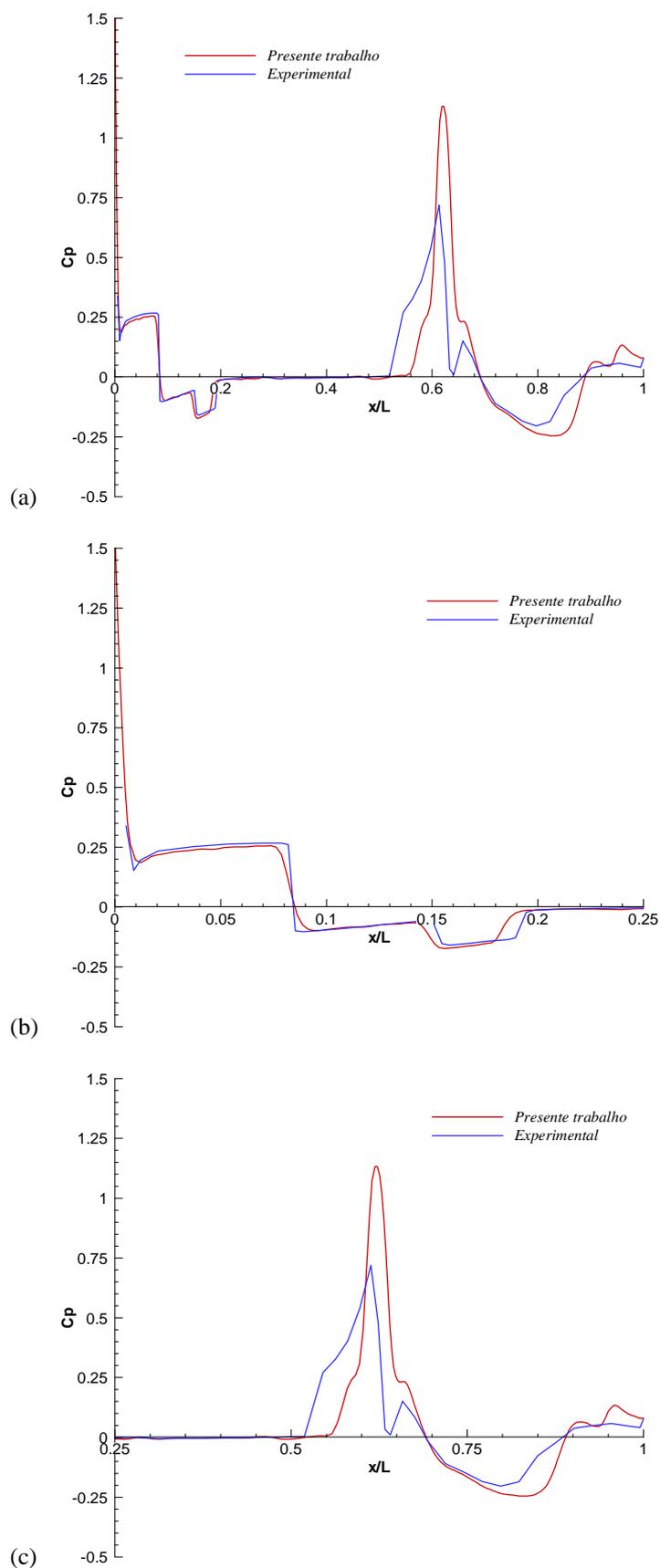


FIGURA 65 – Distribuição do coeficiente de pressão C_p na superfície do corpo central com o plano de simetria xy para o exemplo VLS em regime supersônico. (a) Em todo o corpo, (b) na parte frontal e (c) na parte posterior

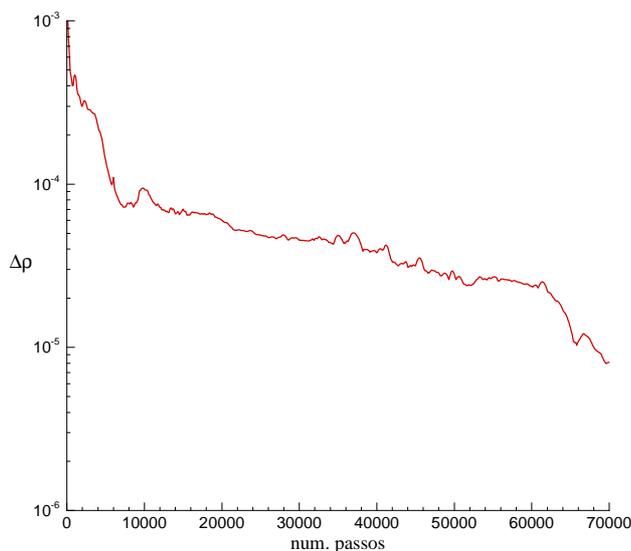


FIGURA 66 – Resíduo da massa específica ao longo do tempo para o exemplo VLS em regime supersônico

8.2.3.2 Escoamento transônico, Mach=0.9

Foi empregado um passo de tempo adimensional constante igual a 0.5 e 0.2 para as malhas 1 e 2 respectivamente; e um coeficiente de amortecimento numérico de $CC=1.0$ para ambas as malhas. Nas Fig. 67 e 68 tem-se as distribuições do coeficiente de pressão e do número de Mach em regime permanente. A Fig. 69 apresenta os resultados do coeficiente de pressão C_p na superfície do corpo central com o plano xy , obtidos pelo presente trabalho e experimentalmente. Após a região de estagnação, observa-se uma expansão na calota esférica da parte frontal do veículo e um pequeno *overshoot* de pressão na quina de encontro desta calota com a superfície tronco cônica. Nesta última, ocorre uma leve expansão identificada tanto pelos resultados numéricos como experimentais. Após a quina da parte tronco-cônica com a cilíndrica na qual ocorre um salto de pressão, existe uma forte onda de choque localizada aproximadamente na metade da parte cilíndrica. Nesta região, os resultados numéricos diferem um pouco dos experimentais, mesmo utilizando a malha 2 que é a mais refinada. Mas, constata-se que o uso da malha 2 proporcionou melhores resultados que os da malha 1, indicando que o refinamento de malha aproxima os resultados com os experimentais. Por esta razão, acredita-se que o uso de um algoritmo de adaptação de malha 3-D, neste exemplo, produziria resultados mais satisfatórios, principalmente nesta zona. Na região dos propulsores laterais, ocorrem praticamente os mesmos fenômenos já citados no caso do regime supersônico.

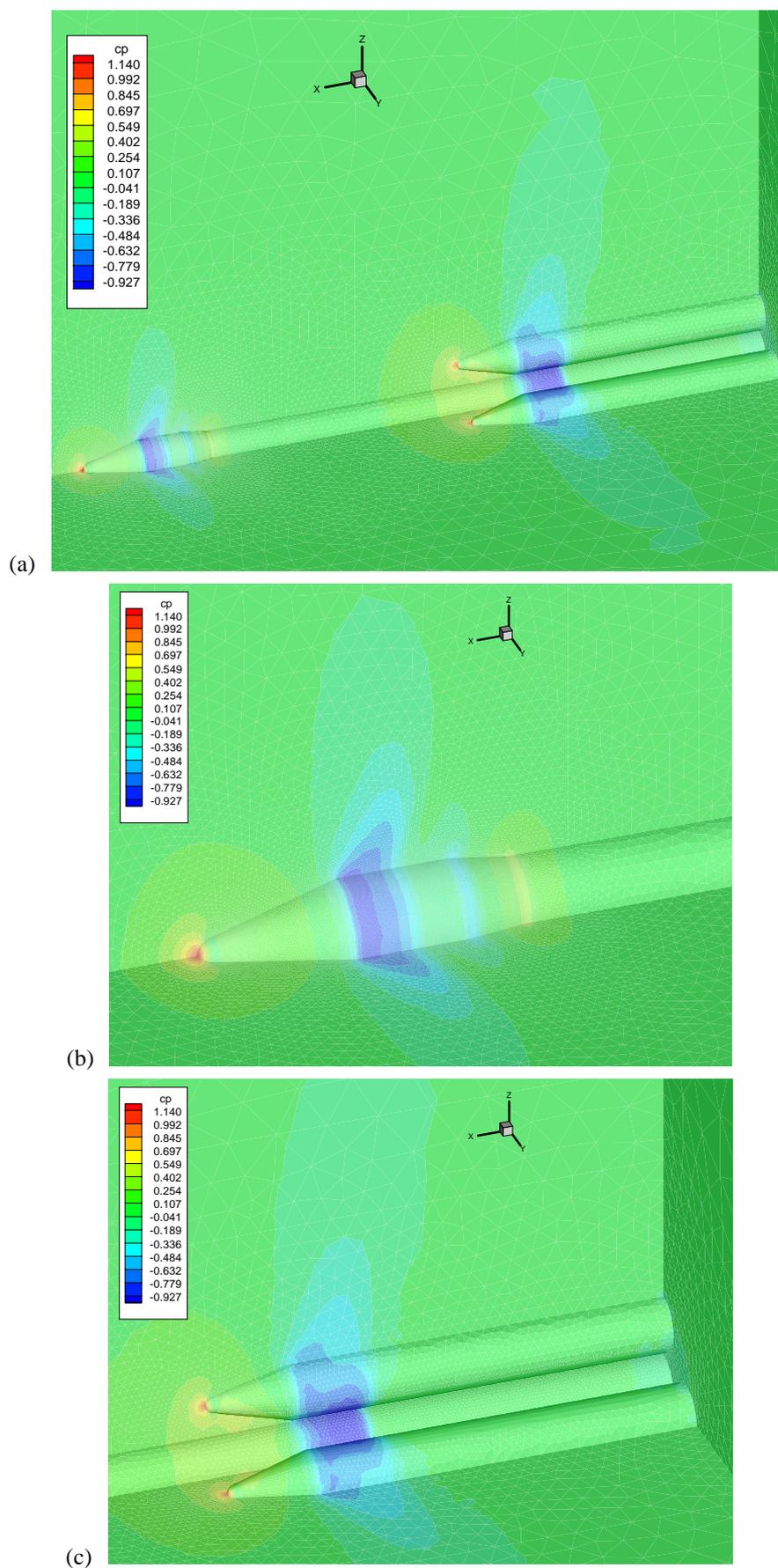


FIGURA 67 – Distribuição do coeficiente de pressão para o exemplo VLS em regime subsônico. (a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais

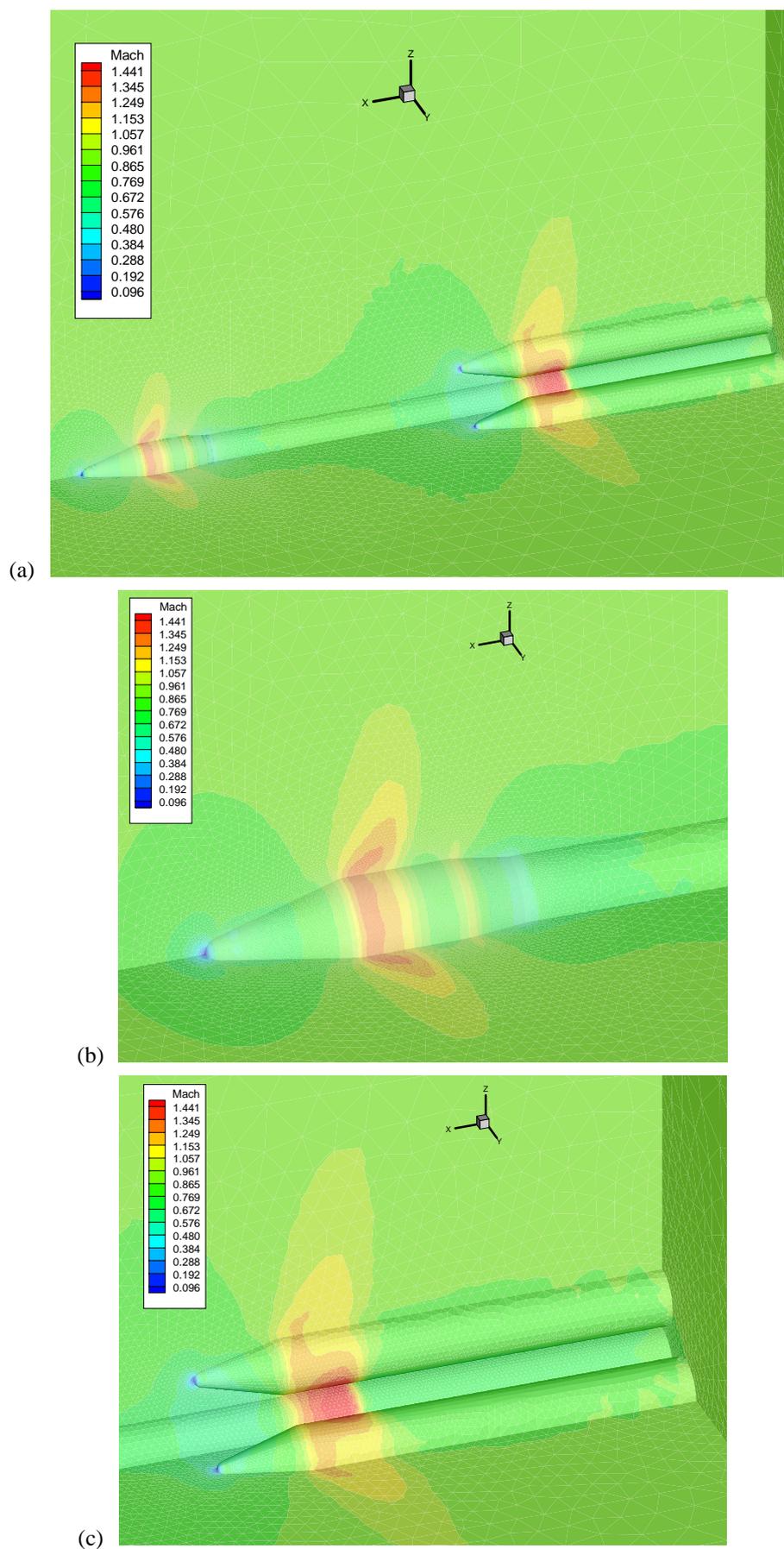


FIGURA 68 – Distribuição do número de Mach para o exemplo VLS em regime subsônico.

(a) Vista geral, (b) detalhe na parte frontal e (c) detalhe nos propulsores laterais

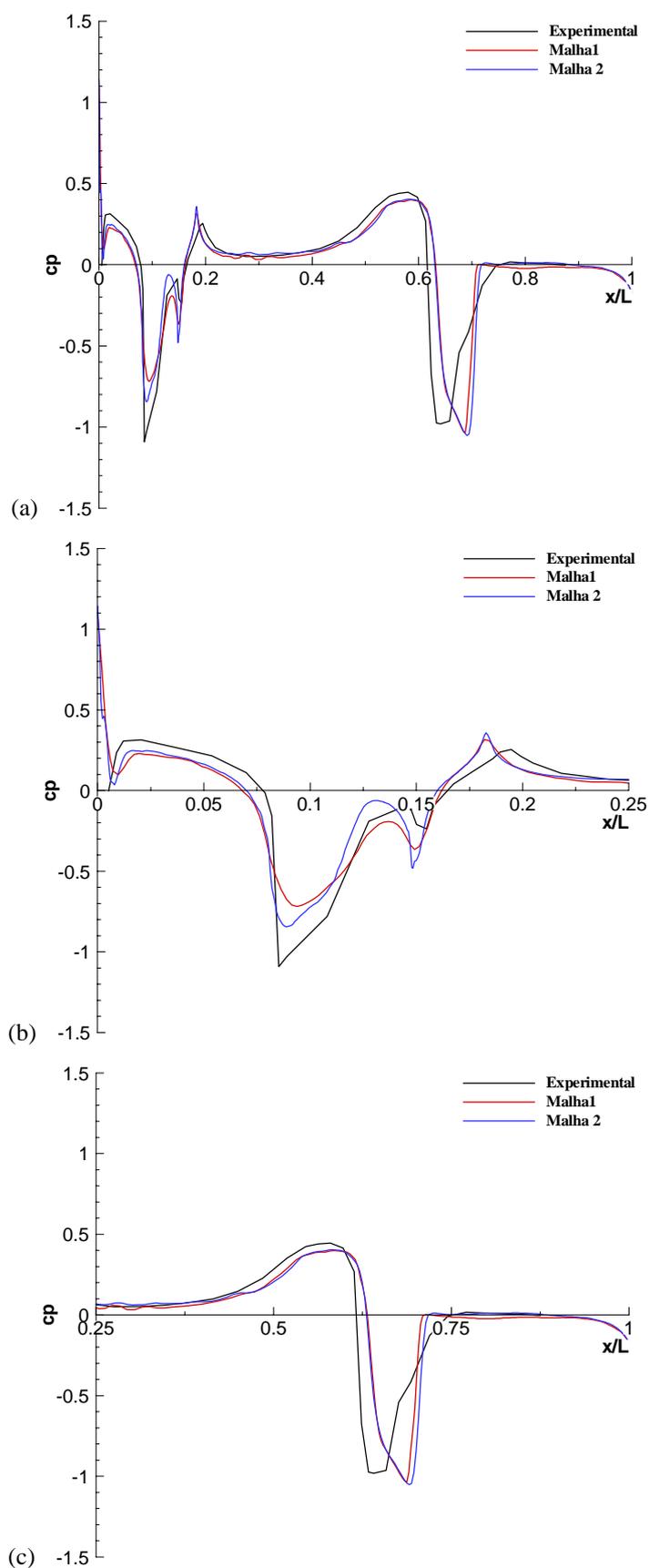


FIGURA 69 – Distribuição do coeficiente de pressão C_p na superfície do corpo central com o plano de simetria xy para o exemplo VLS em regime transônico. (a) Em todo o corpo, (b) na parte frontal, (c) na parte posterior

8.3 ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

O código de solução de escoamentos de fluidos incompressíveis utiliza variáveis adimensionais, definidas como segue:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i / L_{ref} & \bar{v}_i &= v_i / v_{ref} & \bar{w}_i &= w_i / v_{ref} \\ \bar{p} &= p / (\rho v_{ref}^2) & \bar{t} &= t v_{ref} / L_{ref} & \bar{T} &= (T - T_{ref}) / (T_0 - T_{ref}), \end{aligned} \quad (145)$$

onde L_{ref} e v_{ref} são o comprimento e a velocidade de referências, respectivamente. T_{ref} é a temperatura de referência e T_0 é a temperatura da parede do corpo. As variáveis com barra superior representam as variáveis adimensionais do problema. Para simplificação do texto, doravante estas barras serão omitidas.

8.3.1 Escoamento em uma cavidade

Este problema tem sido adotado como padrão para teste de muitos algoritmos de simulação de escoamentos viscosos e incompressíveis. Ele se destaca pela simplicidade do seu domínio e, simultaneamente, pela complexidade do problema físico. Consiste de um fluido viscoso confinado em uma cavidade de dimensões $1 \times 1 \times 0.05$ que escoar na sua face superior, a uma velocidade tangencial adimensional de 1.0 (ver Fig. 70).

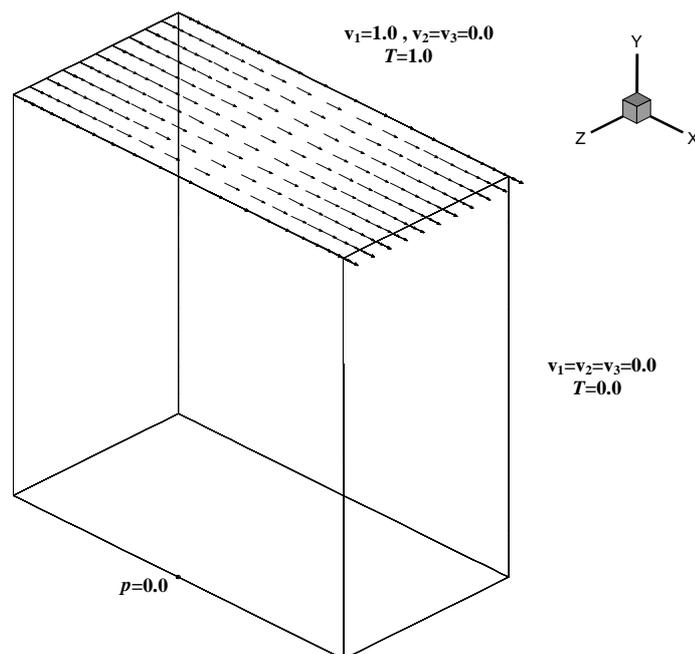


FIGURA 70 – Geometria e condições de contorno do exemplo cavidade

As faces normais ao escoamento e inferior da cavidade são paredes que não permitem o deslizamento do fluido. As faces laterais são consideradas como planos de simetria, uma vez que, originalmente, o problema é bidimensional. O campo de temperatura é distribuído de tal forma que a face superior possua uma temperatura constante $T=1.0$ e nas paredes laterais é imposta $T=0$. É imposto o vetor velocidade tangencial com o módulo unitário ($v_1=1.0$, $v_2=v_3=0$) na face superior. Para que haja uma única solução, é imposto um valor de referência para a pressão ($p=0$) no centro da parede inferior da cavidade. A condição inicial do problema estabelece $v_1=v_2=v_3=p=T=0$ em todo o domínio, exceto na face superior da cavidade, onde as componentes de velocidade são $v_1=1.0$, $v_2=v_3=0$ e a temperatura é $T=1.0$.

O domínio computacional é composto de uma malha com 15680 tetraedros e 6498 nós. Os elementos estão distribuídos de forma que cinco tetraedros estejam contidos em um hexaedro regular, proporcionando um domínio dividido em $56 \times 56 \times 1$, com maior concentração de elementos nas regiões próximas às paredes (ver Fig. 71).

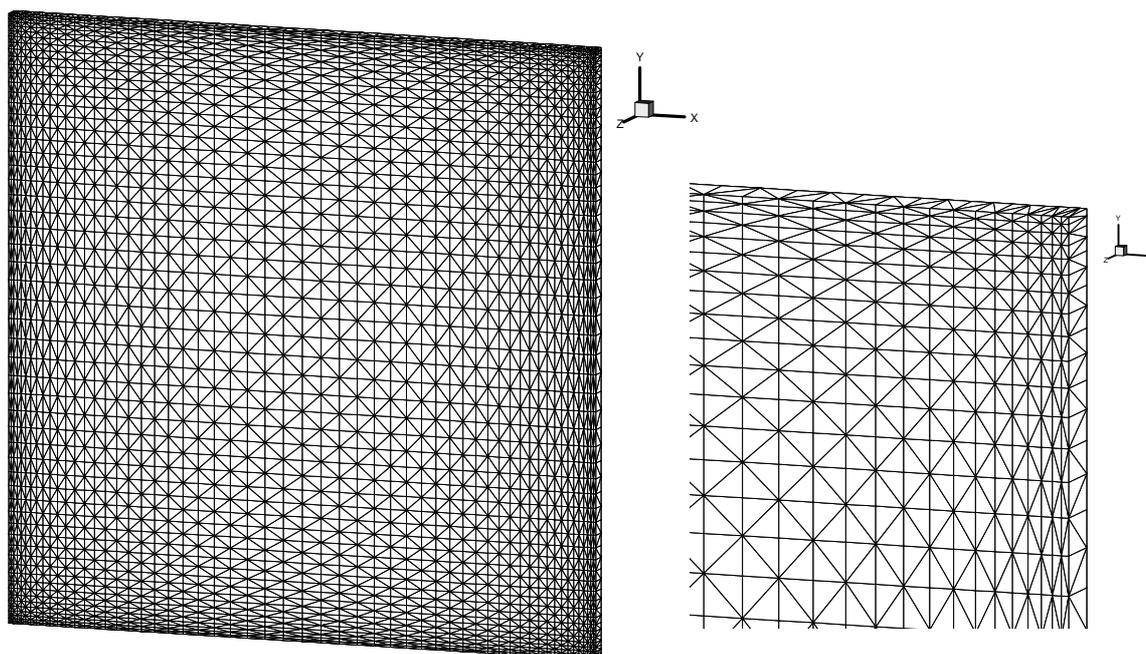


FIGURA 71 – Malha de elementos finitos do exemplo cavidade

O escoamento é viscoso com um número de Reynolds $Re=100$ e um número de Prandtl unitário ($Pr=1$). É adotada uma velocidade do som igual a 150 m/s. O passo de tempo adimensional utilizado neste problema é de $\Delta t=3.0 \times 10^{-5}$, limitado pelas restrições de estabilidade estabelecida pela Eq. (57). Os resultados referentes às isoregiões de pressão, estão mostrados na Fig. 72. Na Fig. 73 estão representados os vetores de velocidade no

domínio e as linhas de corrente do escoamento. Observa-se a formação do vórtice primário, no entanto, os vórtices secundários não são captados devido à falta de um maior refinamento da malha. Vários autores estudaram este problema, entre eles Nallasamy e Prasad (1977), utilizando um tamanho de malha bidimensional de 50×50 e um esquema “*upwind*” de diferenças finitas para a solução de um sistema com as equações da função de corrente, da vorticidade e da temperatura. A posição do núcleo do vórtice primário, encontrado pelo presente trabalho, foi $(x,y)=(0.62,0.74)$, enquanto que a Referência citada apresentou $(x,y)=(0.60,0.74)$, resultando em uma diferença de apenas 3% em x e em valores iguais em y .

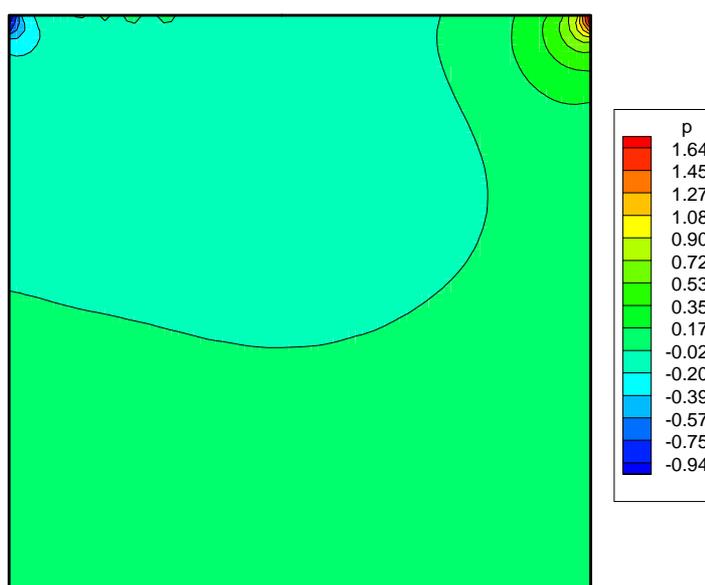


FIGURA 72 - Isolinhas de pressão para o exemplo cavidade

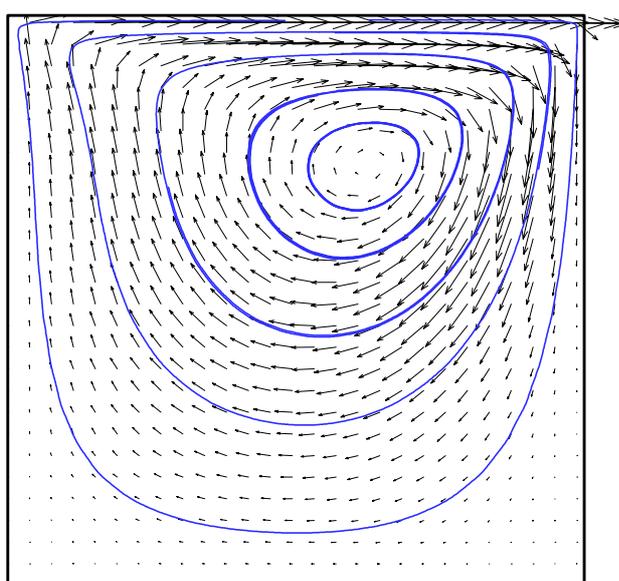


FIGURA 73 – Vetores de velocidade e linhas de corrente do escoamento para o exemplo cavidade

Na Fig. 74 compara-se o perfil da componente de velocidade v_1 na linha média vertical da cavidade e o perfil da componente de velocidade v_2 na linha média horizontal da cavidade com os resultados apresentados por Nallasamy and Prasad (1977). Verifica-se então, a semelhança dos resultados obtidos comparado com os da Referência.

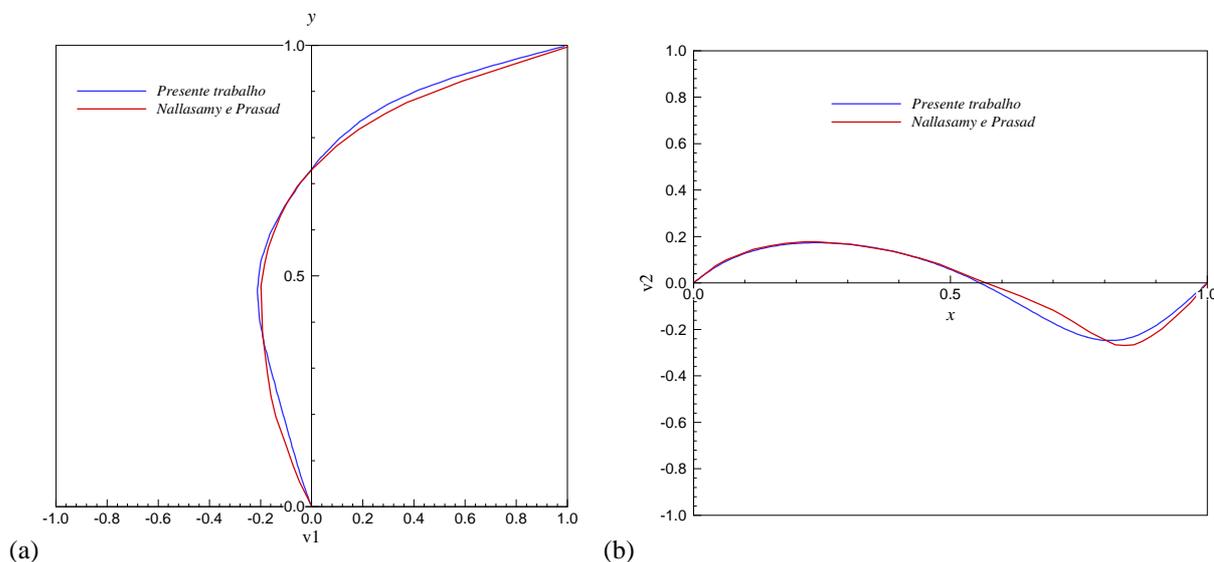


FIGURA 74 – Perfis das componentes de velocidade (a) v_1 e (b) v_2 nas linhas médias vertical e horizontal da cavidade, respectivamente

Na Fig. 75 apresentam-se as isolinhas de temperatura no domínio e na Fig. 76 mostram-se os perfis de temperatura nas linhas médias vertical e horizontal da cavidade. A Fig. 77 mostra o fluxo de calor na superfície superior da cavidade, em termos do gradiente de temperatura $\partial T/\partial y$, apresentando também uma boa concordância com os resultados da Referência.

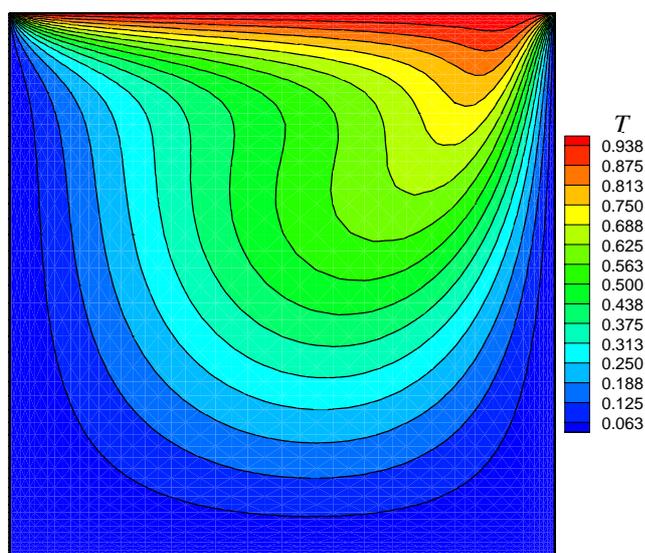


FIGURA 75 – Isolinhas de temperatura para o exemplo cavidade

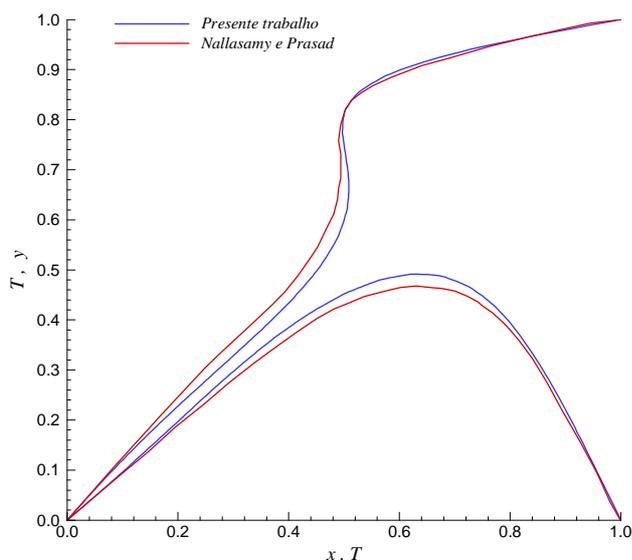


FIGURA 76 – Perfis de temperatura nas linhas médias vertical e horizontal da cavidade

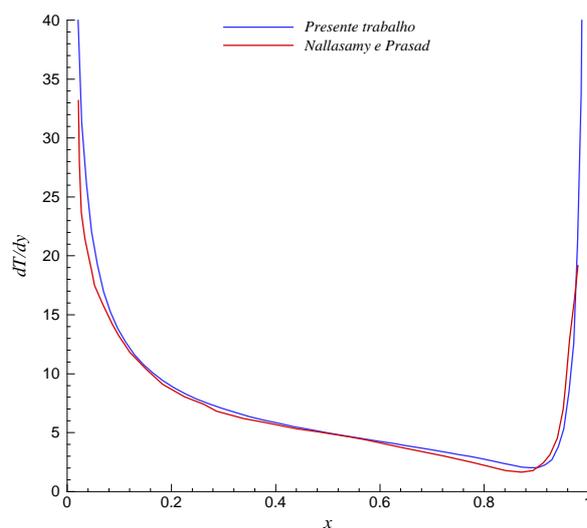


FIGURA 77 – Fluxo de calor na parede superior da cavidade em termos do gradiente $\partial T/\partial y$

8.3.2 Escoamento em um canal com expansão

Este problema consiste na passagem de um fluido viscoso com $Re=73$ em um canal com expansão de relação 2:3. O número de Reynolds é baseado na velocidade média de entrada e na altura do degrau H (adotado $H=1$). A altura de entrada do canal é de $2H$ e está a uma distância de $4H$ do degrau. O contorno de saída está localizado suficientemente afastado do mesmo ($36H$), para obter-se uma condição de saída não-perturbada. A Fig. 78 mostra a geometria e as condições de contorno do problema. É imposta uma condição de pressão nula ($p=0$) no contorno de saída do domínio. Nos planos de simetria xy , a componente normal da

velocidade é anulada. É adotada uma velocidade do som igual a 340 m/s. Na entrada do canal, o perfil da componente de velocidade axial é parabólico e dado pela seguinte expressão:

$$v_1 = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{y - H/2}{H/2} \right)^2 \right] \quad (146)$$

A Fig. 79 apresenta a malha de elementos finitos que possui 4782 nós e 18120 elementos tetraédricos de tal forma que seis tetraedros compõem cada hexaedro, e estes sejam menores próximo às paredes, para melhor captar as variações da camada limite. Na direção do eixo z , a malha possui apenas duas divisões de hexaedros, uma vez que o escoamento é tipicamente 2-D.

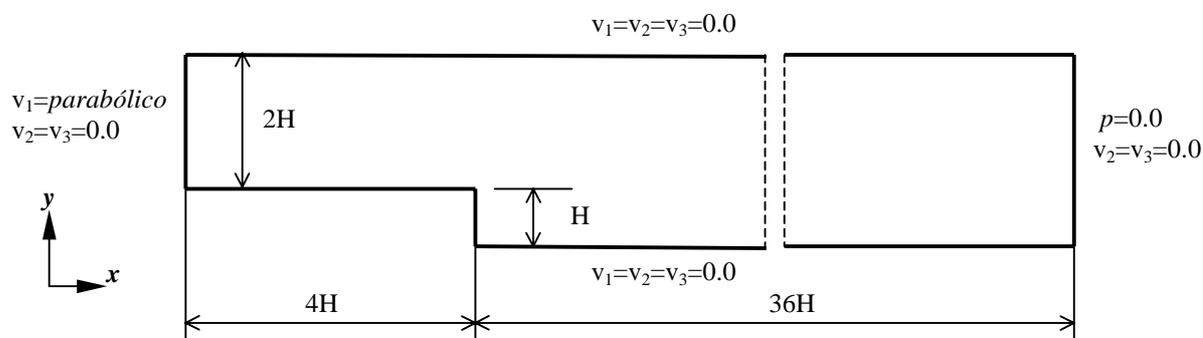


FIGURA 78 – Geometria e condições de contorno do exemplo canal com expansão

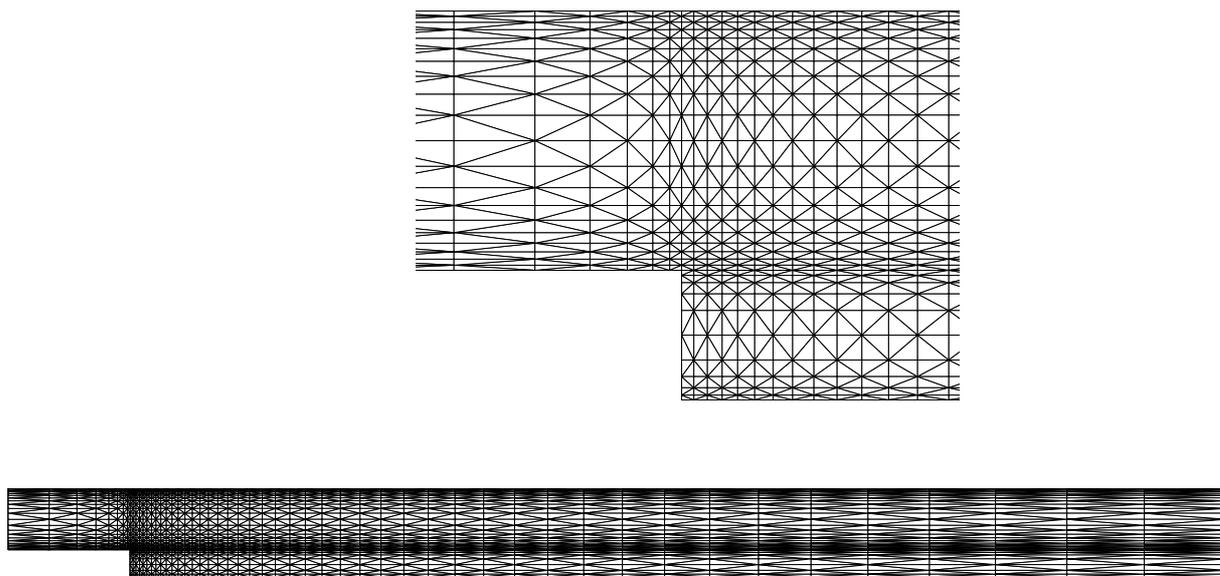


FIGURA 79 – Malha de elementos finitos para o exemplo canal com expansão

O passo de tempo utilizado neste exemplo é $\Delta t=0.002$, atendendo às condições de estabilidade ditadas pela Eq. (57). O regime permanente foi atingido com 18000 passos de tempo. Na Fig. 80, apresentam-se as isolinhas de pressão obtidas pelo presente algoritmo quando atingido o regime permanente. As linhas de corrente na região próxima ao degrau estão mostradas na Fig. 81.

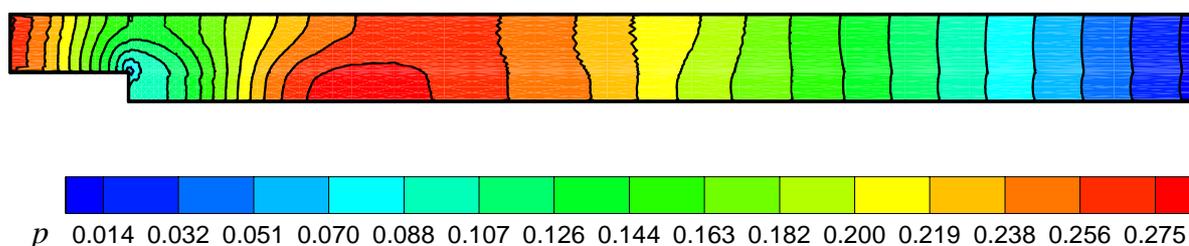


FIGURA 80 – Isolinhas de pressão para o exemplo canal com expansão

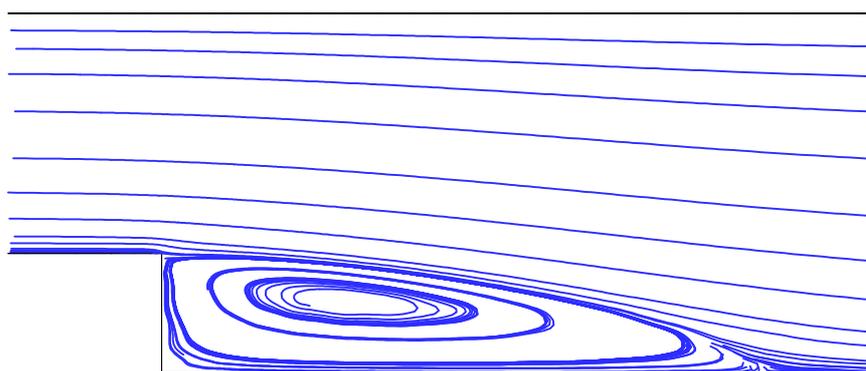
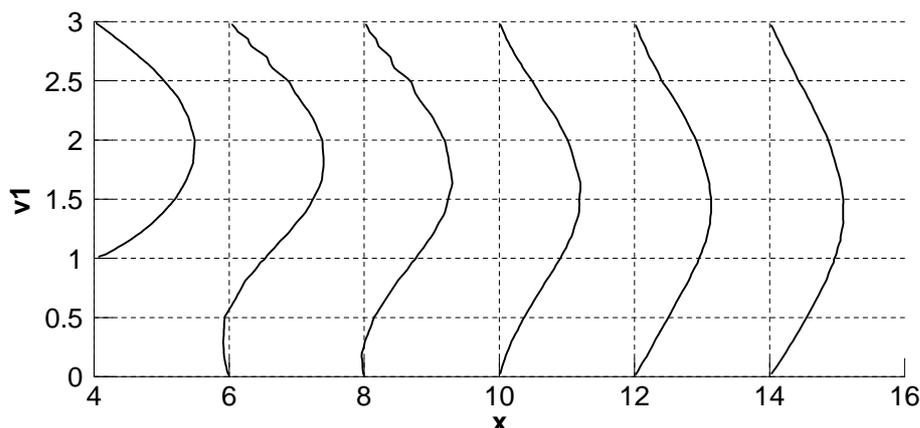


FIGURA 81 – Linhas de corrente na região próxima ao degrau para o exemplo canal com expansão

Na Fig. 82, apresentam-se alguns perfis da componente de velocidade axial v_1 , após a passagem pelo degrau, obtidos pelo presente algoritmo, e o valor do comprimento de recolamento (*reattachment length*) comparado com o obtido por Zienkiewicz *et al.* (1996), Taylor *et al.* (1981) e Denham e Patrick (1974). A primeira Referência utiliza um método particionado de Galerkin com linhas características e a segunda adota um esquema *upwinding* proposto por Heinrich *et al.* (1977). A terceira Referência apresenta resultados experimentais do problema. Entre parênteses, tem-se a porcentagem de erro em relação ao valor experimental. Embora os valores obtidos, através de análises numéricas, estejam um pouco afastados do resultado experimental, observa-se que os valores mais próximos dos experimentais, são aqueles obtidos pelo presente algoritmo e por Zienkiewicz *et al.* (1996).



Referência	Comprimento de recolamento
Presente trabalho	4.9 (25.6)
Zienkiewicz <i>et al.</i> (1996)	4.8 (23.0)
Taylor <i>et al.</i> (1981)	5.3 (35.9)
Denham e Patrick (1974)	3.9 (-)

FIGURA 82 – Perfis da componente de velocidade axial v_1 e os valores do comprimento de recolamento para o exemplo canal com expansão

8.3.3 Escoamento sobre uma esfera

Consiste no escoamento de um fluido viscoso ao redor de uma esfera aquecida. Diferentemente dos casos acima apresentados, este exemplo é um teste para problemas 3-D. O número de Reynolds é $Re=100$, baseado no diâmetro da esfera e na velocidade de escoamento não-perturbado. O número de Prandtl é $Pr=0.706$ e a velocidade do som é igual a 340 m/s. É utilizado um diâmetro da esfera adimensionalizado unitário e um limite externo do domínio, também esférico, de diâmetro adimensionalizado igual a 22.0. A esfera está a uma temperatura constante $T_0=1.0$, enquanto que o fluido tem uma temperatura $T_\infty=0$ em escoamento não perturbado. É imposta uma condição de pressão $p=0$ no contorno externo do domínio. Na Fig. 83, apresenta-se a malha de elementos finitos utilizada. É uma malha não-estruturada que possui 37997 nós e 206722 elementos tetraédricos, distribuídos de forma crescente em tamanho a partir da superfície da esfera. Pela simetria do problema, utiliza-se apenas $\frac{1}{4}$ do domínio, surgindo os planos de simetria xy e xz nos quais é imposta a condição de componente nula de velocidade normal aos planos.

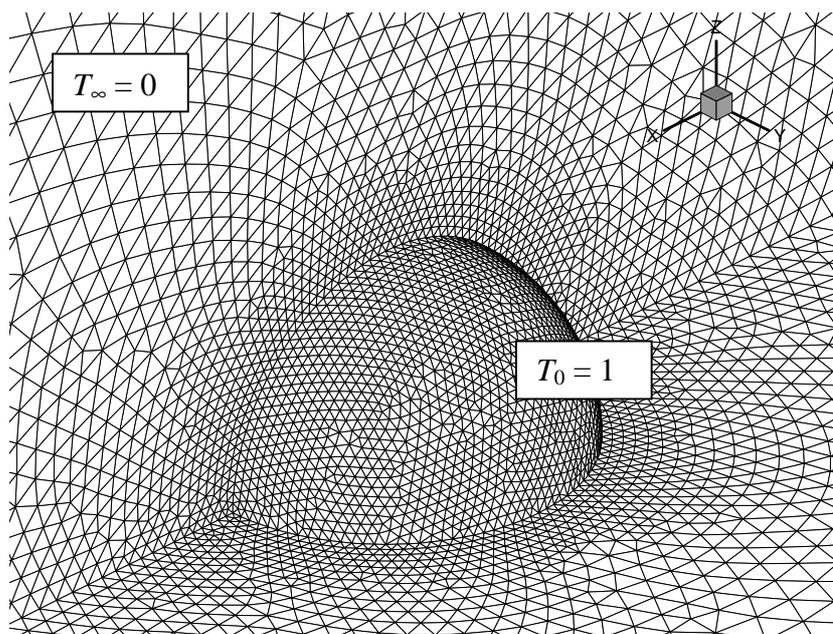


Figura 83 – Malha de elementos finitos para o exemplo esfera

O escoamento atinge o regime permanente após 16000 passos de tempo, utilizando um passo de tempo adimensional de $\Delta t=0.0015$. A Fig. 84 apresenta os resíduos do módulo da velocidade e da pressão ao longo do tempo, considerando que estes valores são as máximas diferenças entre as variáveis nodais de dois instantes de tempo subsequentes.

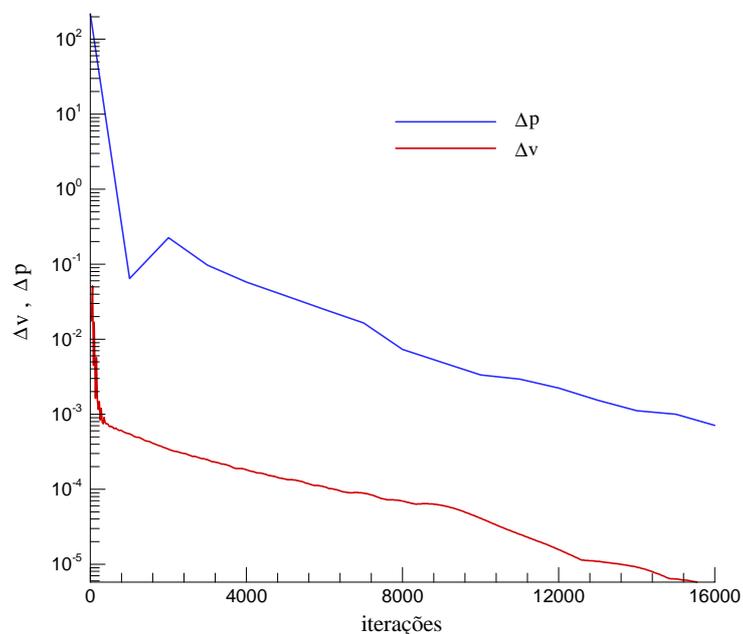


FIGURA 84 – Resíduos do módulo da velocidade e da pressão para o exemplo esfera

A Fig. 85 apresenta a distribuição de pressão em regime permanente. As linhas de corrente próximas à superfície da esfera são mostradas na Fig. 86. A simulação da distribuição de

temperatura no domínio é realizada a partir das condições de regime permanente do escoamento. A Fig. 87 apresenta as isotérmicas na região próxima à esfera. Pode-se observar os pontos de separação do escoamento, caracterizados por um determinado ângulo de separação θ_s , e a extensão da região de recirculação quantificada pela relação l_w/D . Os valores dessas variáveis, obtidos pelo presente trabalho, comparados com os apresentados por Gülçat and Aslan (1997) são mostrados na Tab. 11. Nesta tabela, também são apresentados o coeficiente de arrasto total (C_D) e a sua relação com o coeficiente, devido apenas aos efeitos de fricção (C_{Df}). Nota-se a semelhança dos resultados do presente algoritmo com os obtidos pela Referência.

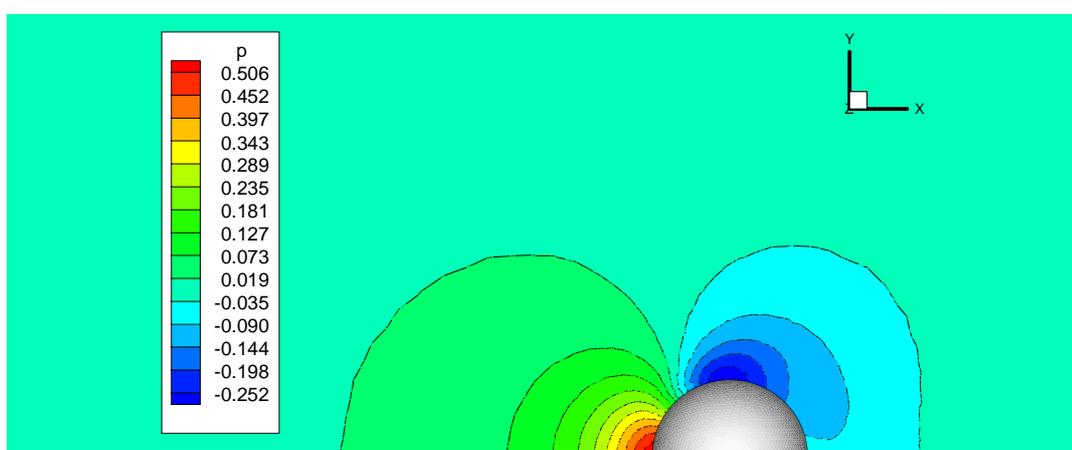


FIGURA 85 – Distribuição de pressão no exemplo esfera

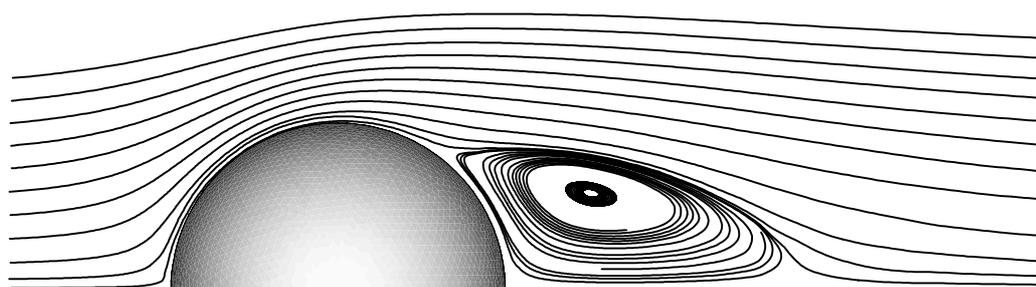


FIGURA 86 – Linhas de corrente no exemplo esfera

TABELA 11 – Alguns parâmetros do escoamento sobre a esfera

Referência	C_D	C_{Df}/C_D	l_w/D	θ_s (graus)
Presente algoritmo	1.07	0.53	0.94	55
Gülçat and Aslan	1.07	0.51	0.93	55

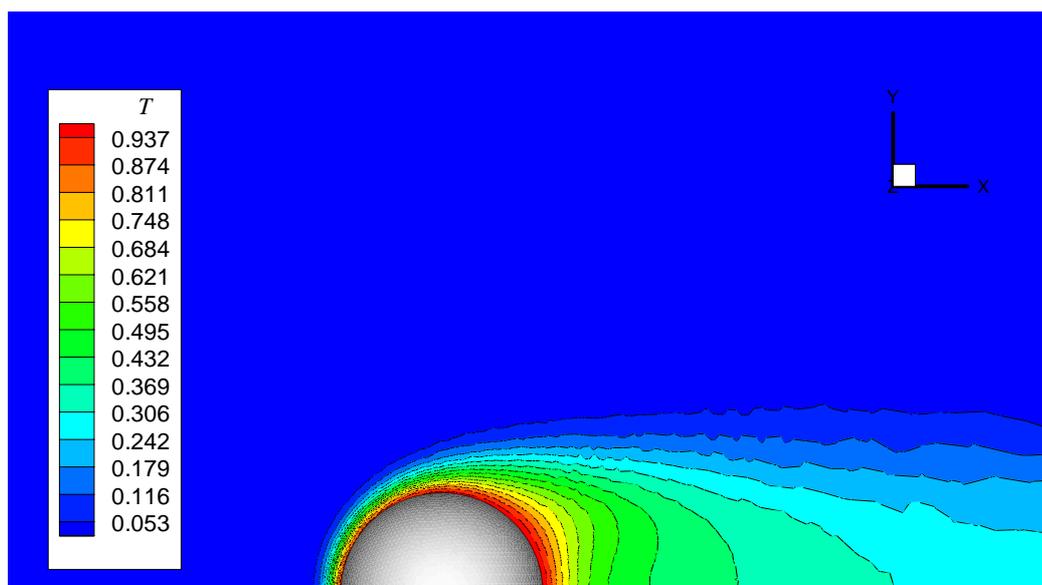


FIGURA 87 – Distribuição de temperatura na região próxima à esfera

Os valores do coeficiente de pressão, obtidos pelo presente trabalho, também estão próximos aos apresentados pela Referência, como mostra o gráfico da Fig. 88.

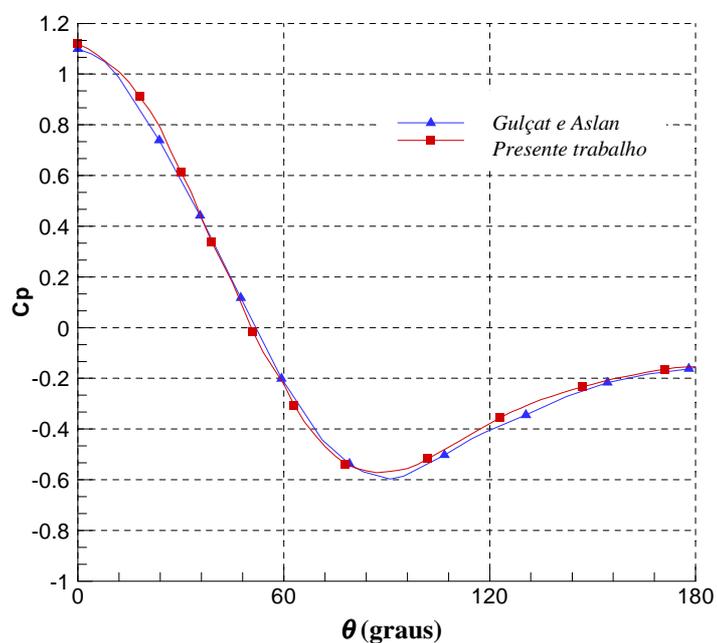


FIGURA 88 – Coeficientes de pressão para o exemplo esfera

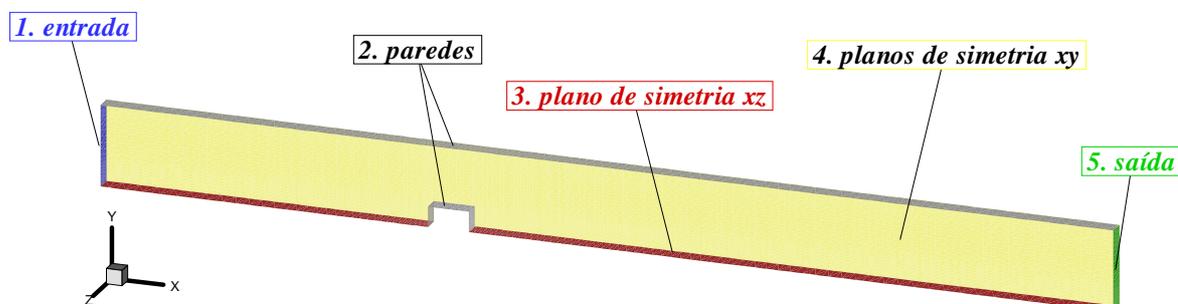
8.3.4 Escoamento sobre um prisma retangular em um canal

A proposta deste exemplo é a de mostrar a precisão do algoritmo em problemas que envolvem o uso da equação da energia. Consiste em um escoamento 2-D em um canal com

um obstáculo rombudo na forma de um prisma retangular, como apresenta o esquema da Fig. 89. Para o uso do algoritmo 3-D, adotou-se uma profundidade adimensional de 0.1. As condições de contorno e as propriedades do fluido estão mostradas na Fig. 90. É imposto um perfil parabólico para a velocidade de entrada a um número de Reynolds de $Re=100$, baseado na altura do canal e na velocidade média da seção de entrada. Nas paredes do canal e do prisma, é prescrita uma temperatura $T_0 = 1$ e na entrada é fixada $T_\infty = 0$. Nessas condições, o escoamento tem simetria em relação ao eixo y perpendicular ao canal e atinge o regime permanente. Por esta razão, o domínio computacional é a metade do domínio do problema, surgindo um plano de simetria que passa pelo eixo central do canal.



FIGURA 89 – Geometria do exemplo prisma retangular



Superfície	Condições de contorno	Propriedades
1	$v_1 = 6(y - y^2)$ $v_2 = v_3 = 0.0$ $T = 0.0$	
2	$v_1 = v_2 = v_3 = 0.0$ $T = 1.0$	$Pr = 0.72$ $c_\infty = 340$
3	$v_2 = 0.0$ $\partial T / \partial y = 0.0$ $\tau_{21} = \tau_{12} = 0.0$	
4	$v_3 = 0.0$ $\partial T / \partial z = 0.0$	
5	$v_2 = 0.0$ $\partial T / \partial x = 0.0$ $p = 0.0$	

FIGURA 90 – Condições de contorno e propriedades do fluido para o exemplo prisma retangular

A malha de elementos finitos tem uma construção regular (200 x 38) de forma que cada cinco tetraedros estejam contidos em um hexaedro. É composta de 15342 nós e 37090 elementos tetraédricos, distribuídos conforme mostra a Fig. 91. Os elementos de menor tamanho estão próximos ao prisma retangular, sendo que a menor aresta do domínio é de 0.015.

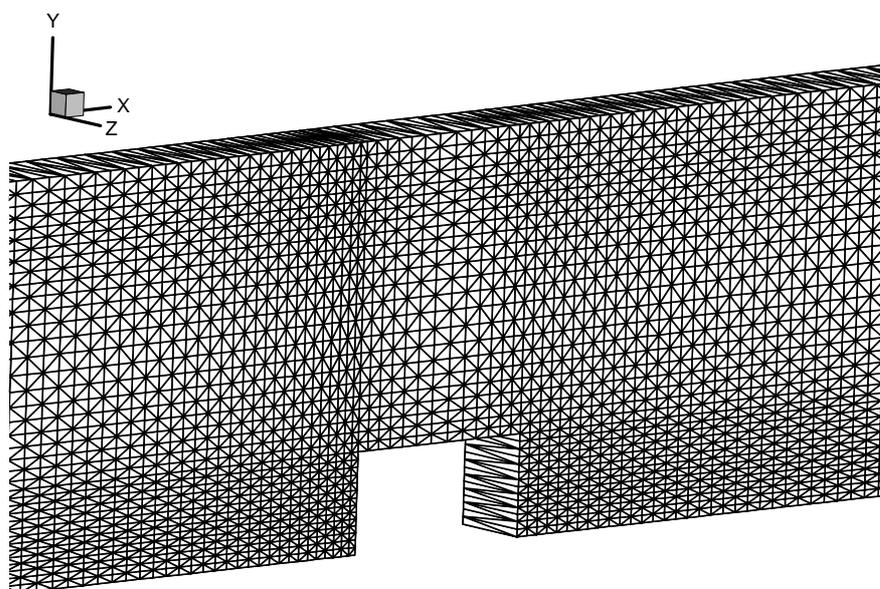


FIGURA 91 – Malha para o exemplo prisma retangular

A simulação foi realizada empregando-se um passo de tempo adimensional de 0.0002. O regime permanente foi atingido em 50000 passos de tempo (instante de tempo adimensional de 10.0), com uma redução assintótica dos resíduos das variáveis do problema. A Tab. 12 mostra os valores dos maiores resíduos do domínio para estas variáveis, nos instantes inicial e final do processo. A Fig. 92 mostra as linhas de corrente, as isobáricas e as isotérmicas no domínio.

TABELA 12 – Resíduos das variáveis primárias para o exemplo prisma retangular

Instante de tempo	Δp	Δv	Δe
0.0	34.027	$4.759 \cdot 10^{-2}$	$6.538 \cdot 10^{-2}$
10.0	$5.150 \cdot 10^{-5}$	$3.318 \cdot 10^{-7}$	$1.001 \cdot 10^{-7}$

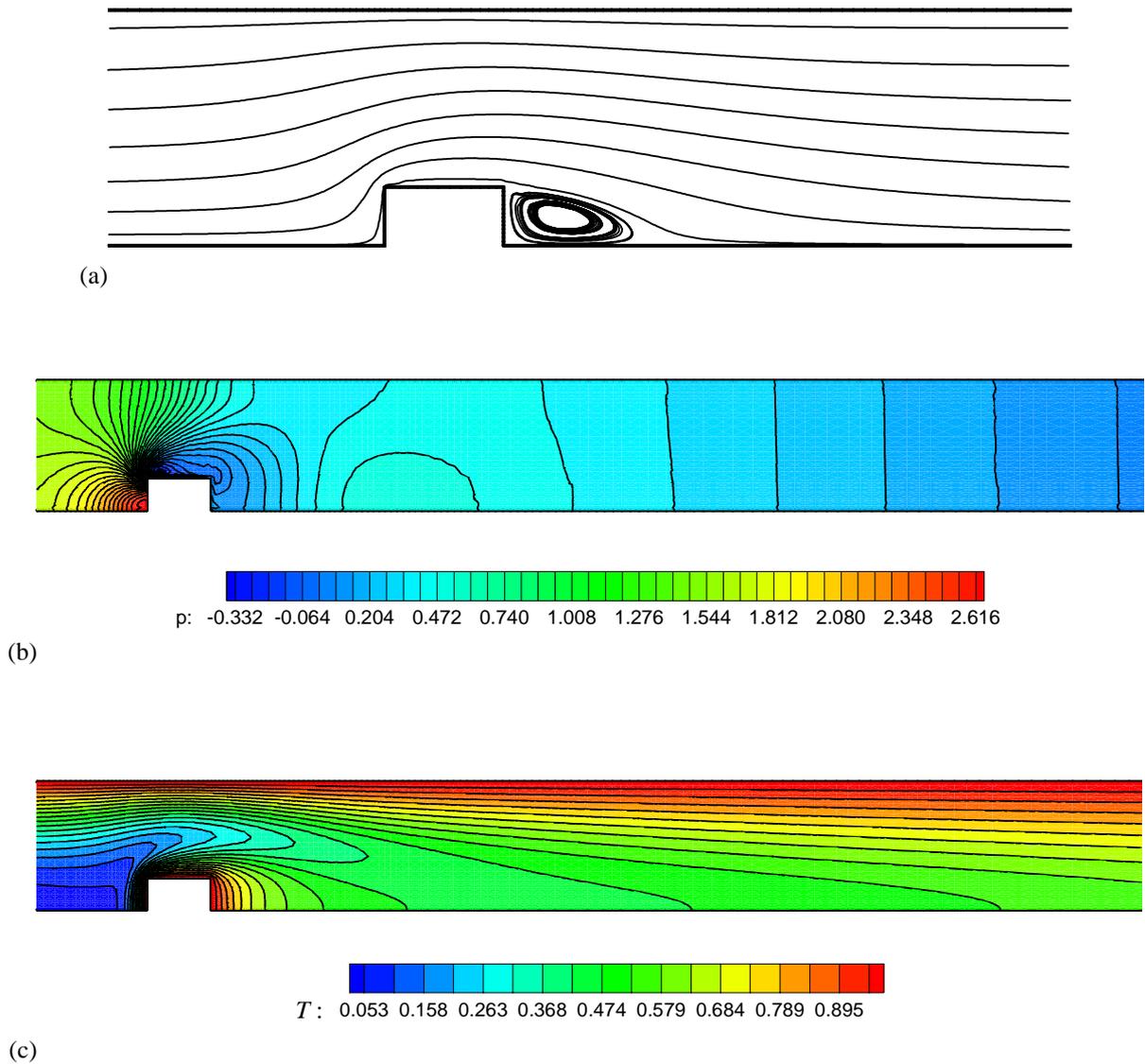


FIGURA 92 – Resultados das (a) linhas de corrente, (b) isobáricas e (c) isotérmicas para o exemplo prisma retangular

O mesmo problema foi simulado numericamente por Ramaswamy e Jue (1992), utilizando uma malha 2-D (99 x 32) de elementos finitos retangulares isoparamétricos e um esquema particionado de solução. Os gráficos da Fig. 93 apresentam uma comparação do número de Nusselt local Nu_x e do coeficiente de fricção local C_{fx} na parede do canal, definidos pelas expressões:

$$Nu_x = \frac{T_0 - T_\infty}{T_0 - T_b} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_x, \quad (147)$$

$$C_{fx} = 2 \left. \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_x, \quad (148)$$

onde T_b é a temperatura média da seção (*Bulk temperature*) calculada para uma seção de largura constante pela Equação:

$$T_b = \frac{\int_y v_1 T dy}{\int_y v_1 dy} \quad (149)$$

Observa-se que os resultados estão bastante próximos: da entrada até o obstáculo, Nu_x decresce continuamente, tendendo a um escoamento termicamente desenvolvido dentro de um canal; em torno de $x=1.375$ Nu_x começa a crescer, alcançando um valor máximo praticamente no final do prisma, onde cai novamente de uma forma assintótica até atingir o valor de um escoamento plenamente desenvolvido. Pequenas diferenças foram encontradas nos valores do coeficiente de fricção C_{fx} , principalmente próximo a região do obstáculo, possivelmente devido ao maior refinamento da malha utilizada pelo presente trabalho.

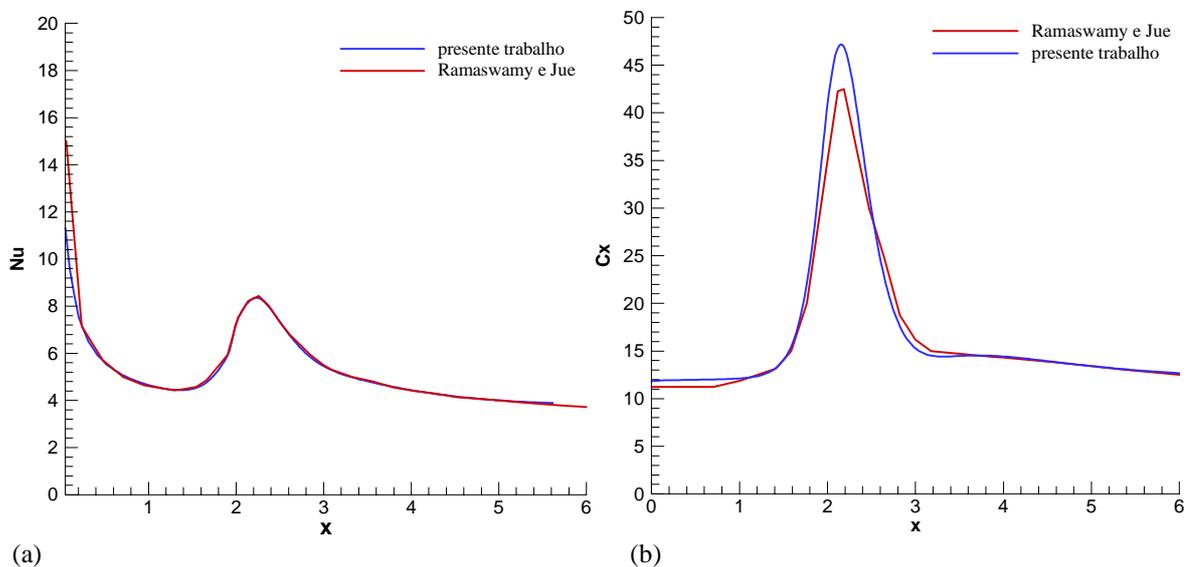


FIGURA 93 – Gráficos (a) do número de Nusselt local Nu_x e (b) do coeficiente de fricção C_{fx} para o exemplo prisma retangular

8.3.5 Onda solitária em um tanque retangular

A análise de escoamentos de fluidos incompressíveis com superfície livre tem grande importância em muitos problemas práticos de engenharia, tais como no projeto de molhes e de estruturas *offshore*. Com o objetivo de demonstrar a utilização do presente algoritmo em problemas com superfície livre, é analisada a propagação de uma onda solitária em um tanque retangular (ver Fig. 94). John Scott Russel, em 1834, apresentou, pela primeira vez, um estudo do fenômeno da propagação de uma onda solitária em um tanque retangular de profundidade uniforme (Ramaswamy e Kawahara, 1987). Russel definiu uma onda solitária como a presença de uma simples elevação acima do nível da água, sem a existência de outras perturbações (elevações ou depressões), produzindo um transporte na direção da propagação da onda em velocidade constante e sem mudança na sua forma. Muitos autores realizaram estudos analíticos sobre este problema (Laitone, 1960; Grimshaw, 1971; Fenton, 1972), mas as aproximações de Laitone são frequentemente utilizadas como comparação (Ramaswamy e Kawahara, 1987; Hayashi *et al.*, 1991). Segundo Laitone, as aproximações da velocidade, da pressão e da elevação da superfície livre são dadas por:

$$v_1 = \sqrt{gd} \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x_1 - ct) \right], \quad (150)$$

$$v_2 = \sqrt{3gd} \left(\frac{H}{d} \right)^{3/2} \left(\frac{x_2}{d} \right) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x_1 - ct) \right] \tanh \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x_1 - ct) \right], \quad (151)$$

$$Y_s = d + H \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x_1 - ct) \right] = \eta + d, \quad (152)$$

$$p = \rho g (\eta - x_2), \quad (153)$$

onde

$$c = \sqrt{gd \left(1 + \frac{H}{d} \right)} \quad (154)$$

é a velocidade de propagação da onda, v_1 e v_2 são as componentes de velocidade nas direções x_1 e x_2 , p é a pressão, Y_s é altura do nível da água, η é a elevação da onda, g é a aceleração da gravidade, d é a profundidade da água e H é a altura inicial da onda. Estas aproximações foram realizadas considerando um tanque de comprimento infinito. Para definir um

comprimento efetivo da onda L , considera-se que a distância da crista da onda até as paredes verticais do tanque $L/2$, seja no mínimo aquela em que $\eta=0.01H$. Utilizando esta condição na Eq. (152), obtém-se o seguinte limite para o comprimento do tanque:

$$\frac{L}{d} \geq 6.90 \sqrt{\frac{d}{H}} . \quad (155)$$

Quando a crista da onda atinge uma das paredes verticais do tanque, a sua altura em relação ao nível da água tem um valor teórico segundo a aproximação de Laitone dado por:

$$R = d \left[2 \left(\frac{H}{d} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{d} \right)^2 \right] . \quad (156)$$

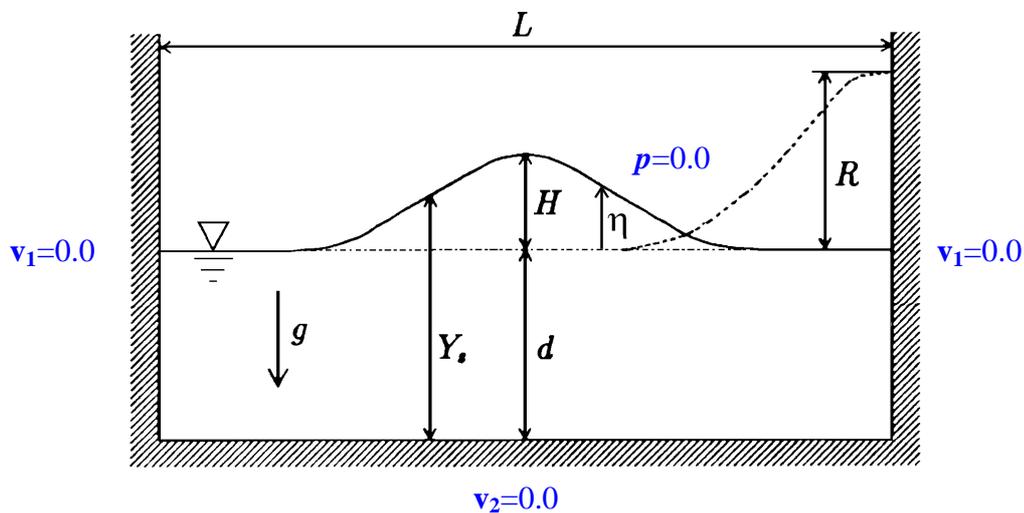


FIGURA 94 – Geometria e condições de contorno do exemplo onda solitária

Para a solução deste problema a força gravitacional ρg_i deve ser acrescida às equações de movimento, Eq. (7), resultando na seguinte expressão:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \rho g_i = w_j \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} . \quad (157)$$

A simulação numérica do problema consiste na análise de dois casos com diferentes dimensões do tanque e condições iniciais da onda. No primeiro caso, a elevação inicial da onda é de $H=0.5\text{m}$ e o comprimento do tanque é de $L=300\text{m}$, no segundo caso $H=2.0\text{m}$ e $L=160\text{m}$. Para ambos os casos, a profundidade do tanque é de $d=10\text{m}$. É utilizada a mesma malha de elementos finitos para os dois problemas, apenas as dimensões são alteradas para atender cada caso. A malha é regular ($128 \times 8 \times 2$), com 3483 nós e 10240 elementos tetraédricos. São adotadas as seguintes propriedades: $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$, $\mu = 0$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ e

velocidade do som igual a 1000 m/s para ambos os casos e um passo de tempo adimensional de $\Delta t = 0.005$. As condições iniciais são calculadas a partir das Eq. (150) a (154) para $t=0$ e estão representadas no domínio através das Fig. 95 e 96 para as ondas de $H=0.5$ e 2.0, respectivamente. Nestas figuras, as dimensões na direção x estão reduzidas em 10 vezes para o problema com $H=0.5$ e 5 vezes para $H=2.0$.

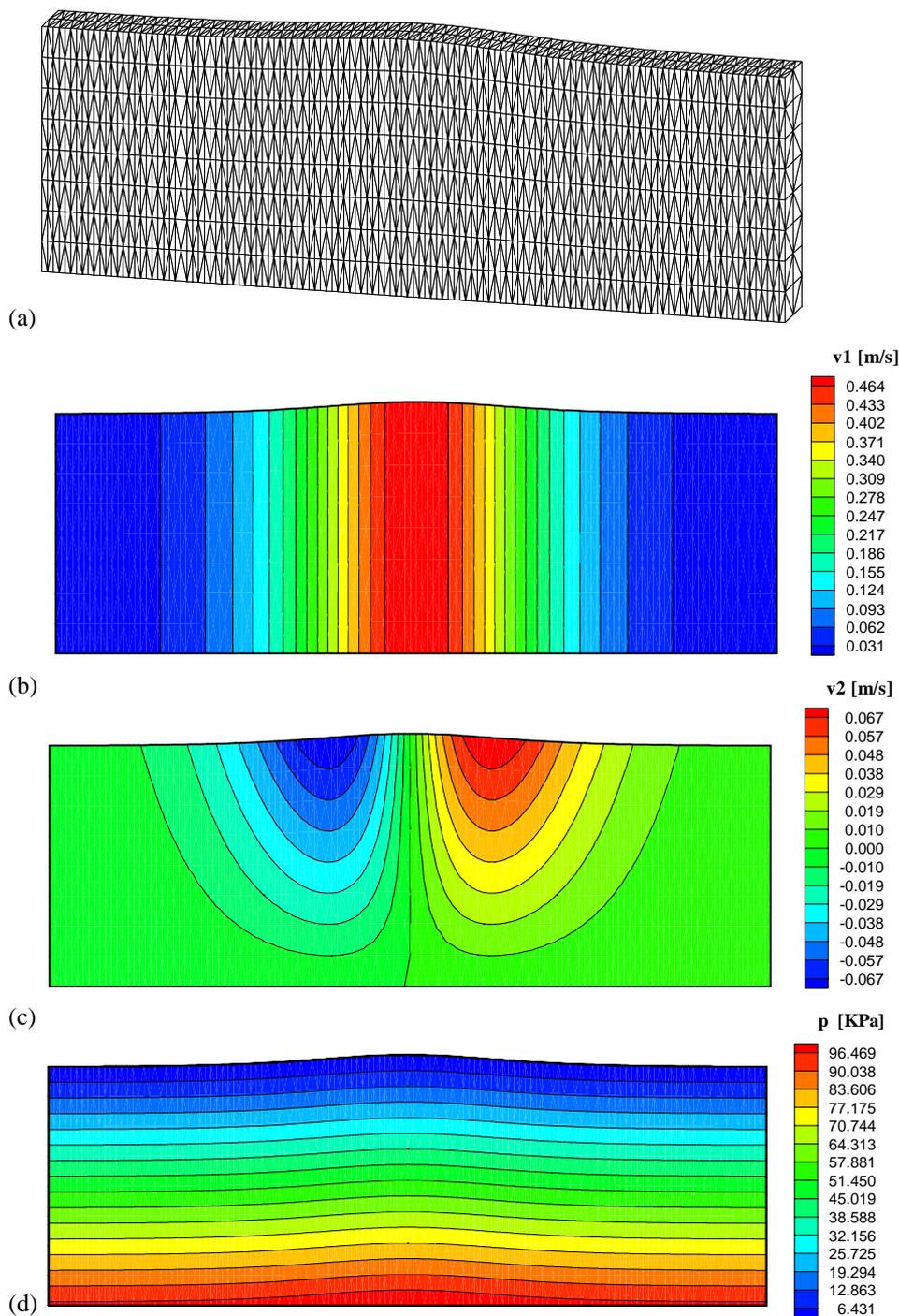


FIGURA 95 – Condições iniciais do exemplo onda solitária com $H=0.5$. (a) Configuração da malha, (b) distribuição da componente de velocidade v_1 , (c) distribuição da componente de velocidade v_2 , (d) distribuição de pressão

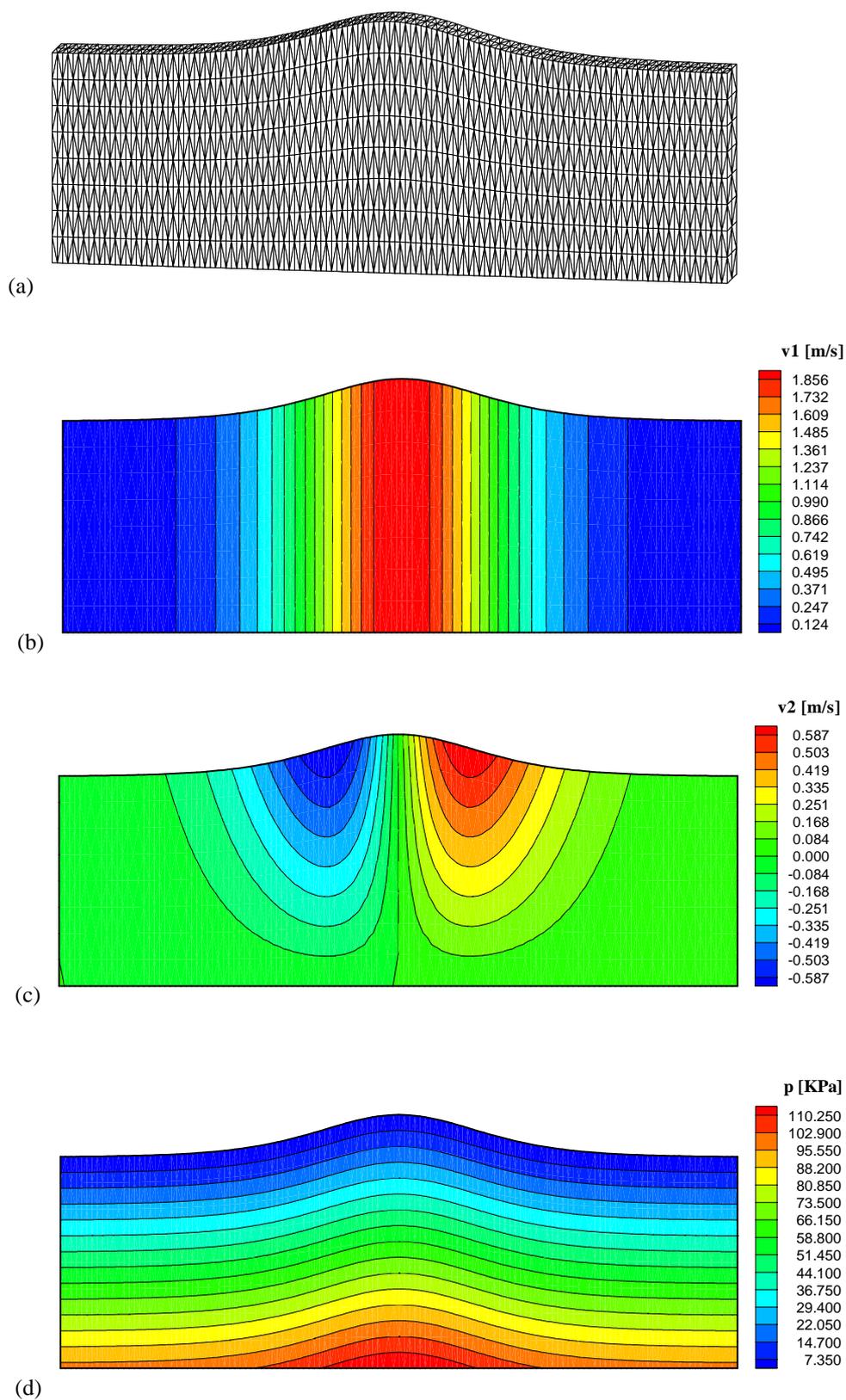


FIGURA 96 – Condições iniciais do exemplo onda solitária com $H=2.0$. (a) Configuração da malha, (b) distribuição da componente de velocidade v_1 , (c) distribuição da componente de velocidade v_2 , (d) distribuição de pressão

A análise é realizada por três algoritmos diferentes. No primeiro algoritmo (ALG1), adota-se um sistema lagrangeano na direção y , ou seja $w_2=v_2$ para todo o domínio e um sistema euleriano na direção das outras coordenadas cartesianas ($w_1=w_3=0.0$). No segundo algoritmo (ALG2), utiliza-se o sistema ALE para todo o domínio, necessitando assim de uma atualização das coordenadas dos nós a cada passo de tempo. No terceiro algoritmo (ALG3), além de ser usada a descrição ALE, é imposta a condição de que a superfície livre deve mover-se com o fluido através da equação cinemática da onda dada por (Ramaswamy e Kawahara, 1987):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left({}^{(s)}v_i - {}^{(s)}w_i \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (158)$$

onde ${}^{(s)}v_i$ e ${}^{(s)}w_i$ são as componentes de velocidade do fluido e da malha na superfície livre respectivamente. A Eq. (158) é discretizada no tempo e no espaço, aplicando a técnica de suavização de derivadas (Zienkiewicz e Taylor, 1989) na derivada espacial da altura da onda $\partial \eta / \partial x_i$, resultando na seguinte expressão calculada para cada nó da superfície:

$$\eta^{n+1} = \eta^n - \Delta t \frac{\partial \eta^n}{\partial x_i} \left({}^{(s)}v_i^n - {}^{(s)}w_i^n \right) \quad (i=1,2,3). \quad (159)$$

Nas Tab. 13 e 14 tem-se os valores obtidos para a altura da crista da onda de $H=0.5$ e 2.0 respectivamente, nos instantes em que a onda atinge a parede direita, volta para o centro do tanque, atinge a parede esquerda e, finalmente, retorna à posição inicial. Os resultados analíticos de Laitone e as diferenças percentuais entre as alturas da crista da onda, obtidas pela simulação numérica e pela aproximação analítica, considerando esta última como referência, também são apresentados nas Tab. 13 e 14. As Fig. 97 a 100 mostram as configurações da malha, as distribuições de pressão e das componentes de velocidade para $H=0.5$, nos referidos instantes de tempo obtidos pelo ALG1. As dimensões na direção x , estão reduzidas em 10 vezes para este caso. Observa-se que, para uma onda de $H=0.5$, todos os algoritmos obtiveram excelentes resultados em todos os instantes de tempo, com pequenas diferenças em relação aos analíticos de Laitone. A forma da onda foi preservada ao longo da sua trajetória e a pressão p é praticamente igual à pressão hidrostática, como era de se esperar. Não se observou diferenças consideráveis entre os resultados dos três algoritmos para este caso, no entanto percebe-se que os algoritmos ALG2 e ALG3 obtiveram os mesmos valores de altura da crista da onda e instantes de tempo, nas quatro posições analisadas. As Fig. 101 a 104 mostram os

resultados obtidos utilizando o algoritmo ALG2 para o caso em que a altura da onda é $H=2.0$, sendo que as dimensões na direção x foram reduzidas em 5 vezes. Nesse caso, o algoritmo ALG1 não conseguiu a simulação completa, devido à excessiva deformação da malha, após a onda atingir a parede esquerda do tanque, como mostra a Fig. 105. Conclui-se, portanto, que embora o algoritmo ALG1 seja um código veloz devido à sua simplicidade (aproximadamente 2 vezes mais rápido que os algoritmos ALG2 e ALG3), ocorre uma maior perda de precisão nos resultados à medida que a altura da onda aumenta. Os algoritmos ALG2 e ALG3 apresentaram resultados semelhantes até o instante em que a onda atinge a parede esquerda. Observa-se que não houve preservação da forma da onda ao longo de sua trajetória, principalmente após a onda atingir a parede direita do tanque, embora a malha tenha acompanhado as oscilações da superfície devido ao uso do sistema ALE. A imposição da Equação cinemática da onda (159) no algoritmo ALG3, não aumentou a precisão dos resultados como pode-se notar na Tab. 14. A Fig. 106 apresenta a configuração da malha, os contornos de pressão e de componentes de velocidade quando a onda completa um ciclo, obtidos pelo algoritmo ALG3.

TABELA 13 – Resultados do exemplo onda solitária com $H=0.5$

<i>Instante em que a onda atinge a parede direita do tanque</i>			
Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	1.0301	15.18	1.74
ALG2	1.0330	15.19	2.02
ALG3	1.0330	15.19	2.02
Analítico	1.0125	14.79	-

<i>Instante em que a onda retorna à posição central</i>			
Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	0.4956	30.26	0.88
ALG2	0.4980	30.28	0.40
ALG3	0.4980	30.28	0.40
Analítico	0.5000	29.57	-

<i>Instante em que a onda atinge a parede esquerda do tanque</i>			
Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	1.0157	45.29	2.10
ALG2	1.0233	45.31	2.14
ALG3	1.0233	45.31	2.14

Analítico	1.0125	44.36	-
<i>Instante em que a onda retorna à posição inicial</i>			
Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	0.4890	60.34	2.01
ALG2	0.4932	60.36	2.05
ALG3	0.4932	60.36	2.05
Analítico	0.5000	59.15	-

TABELA 14 – Resultados do exemplo onda solitária com $H=2.0$

Instante em que a onda atinge a parede direita do tanque

Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	4.450	8.08	5.95
ALG2	4.478	8.09	6.62
ALG3	4.478	8.09	6.62
Analítico	4.200	7.38	-

Instante em que a onda retorna à posição central

Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	1.875	15.82	6.25
ALG2	1.889	15.83	5.55
ALG3	1.889	15.83	5.55
Analítico	2.000	14.75	-

Instante em que a onda atinge a parede esquerda do tanque

Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	4.103	23.64	2.31
ALG2	4.159	23.65	0.98
ALG3	4.133	23.88	1.60
Analítico	4.200	22.13	-

Instante em que a onda retorna à posição inicial

Algoritmo	Altura da onda (m)	Instante de tempo (s)	Diferença (%)
ALG1	-	-	-
ALG2	1.850	31.44	7.50
ALG3	1.789	32.00	10.55
Analítico	2.000	29.51	-

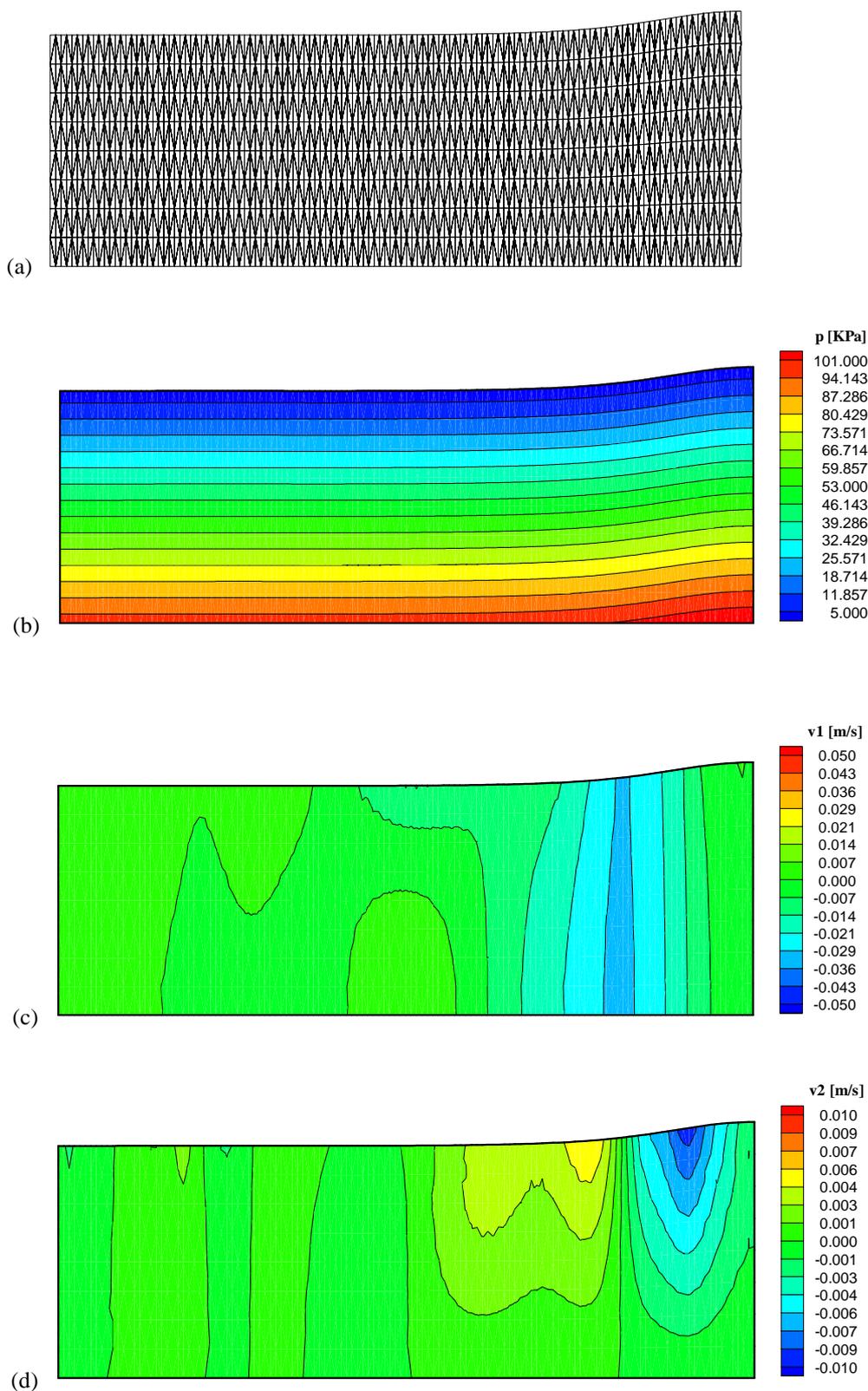


FIGURA 97 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=15.18s$ obtidos pelo algoritmo ALG1

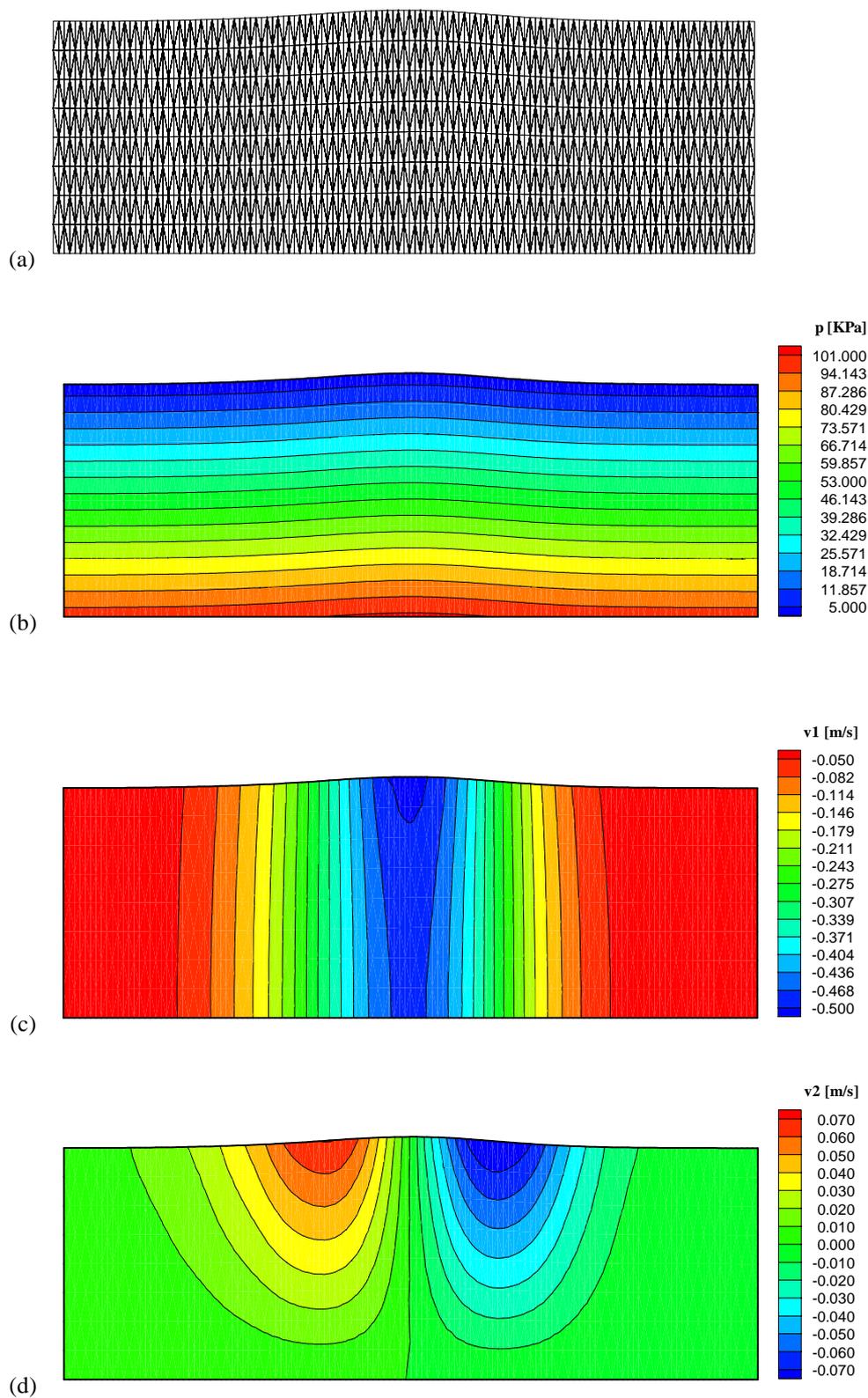


FIGURA 98 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=30.26s$ obtidos pelo algoritmo ALG1.

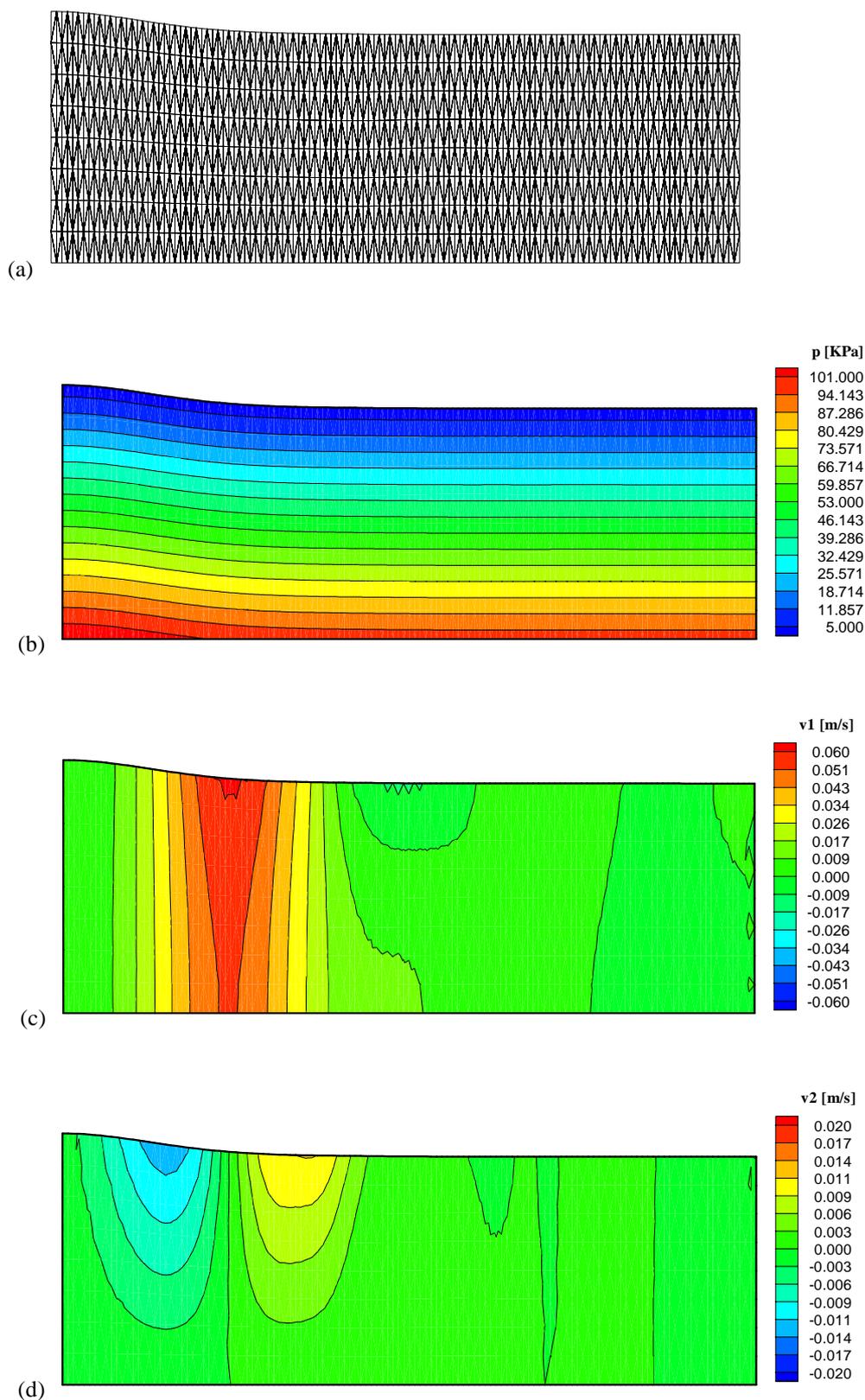


FIGURA 99 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=45.29s$ obtidos pelo algoritmo ALG1

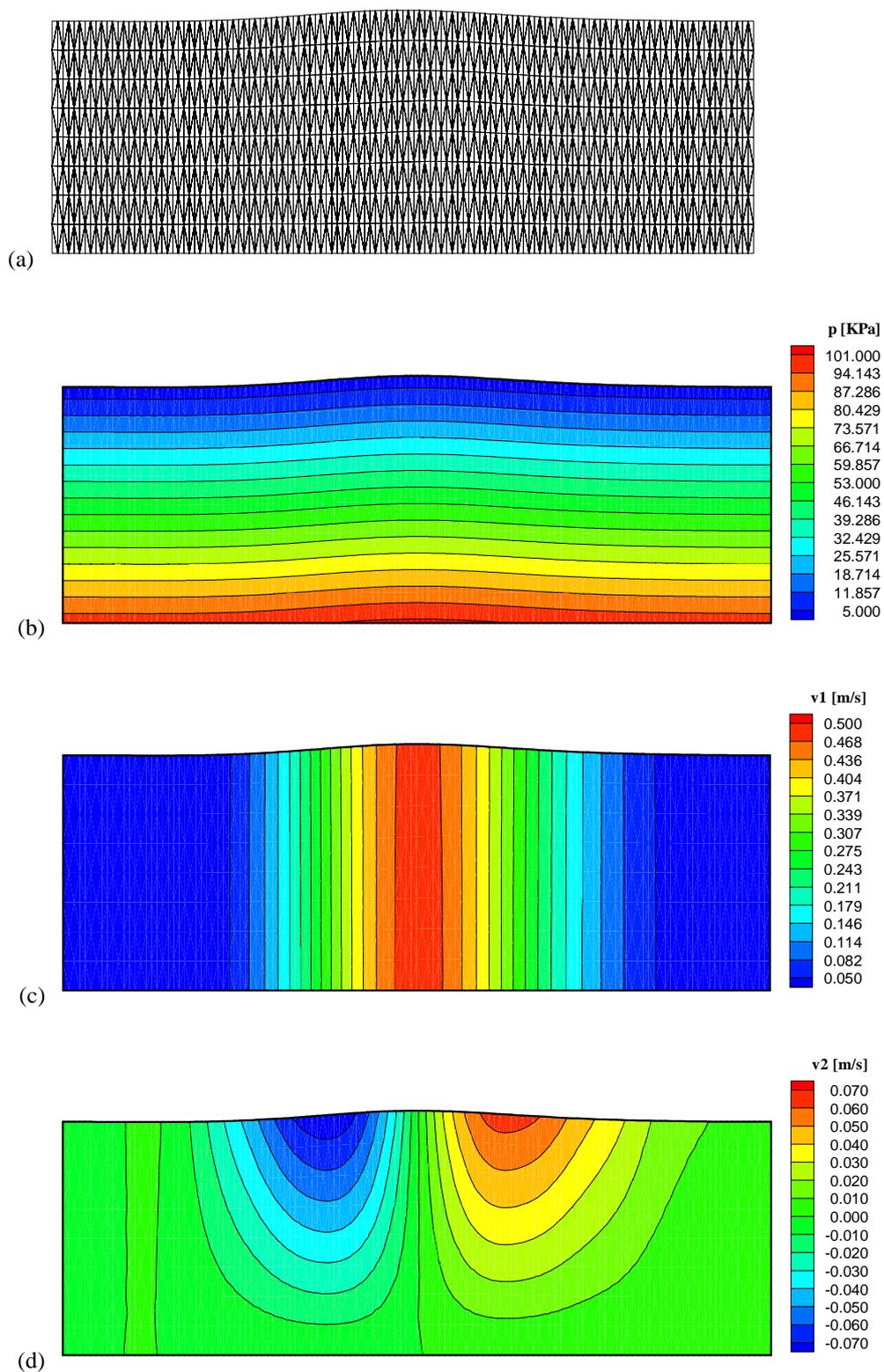


FIGURA 100 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=0.5$ no instante $t=60.34s$ obtidos pelo algoritmo ALG1

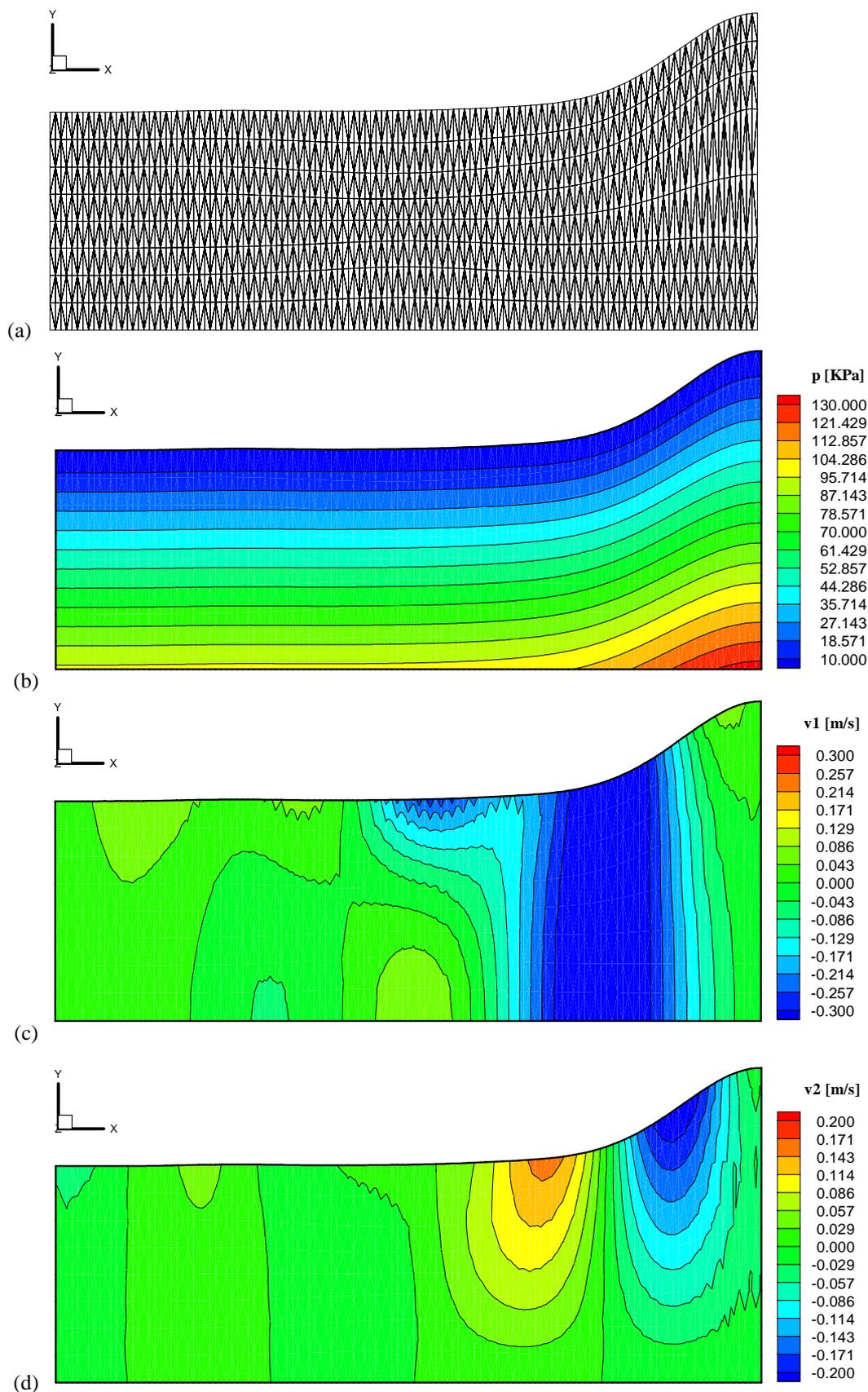


FIGURA 101 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=8.09s$ obtidos pelo algoritmo ALG2

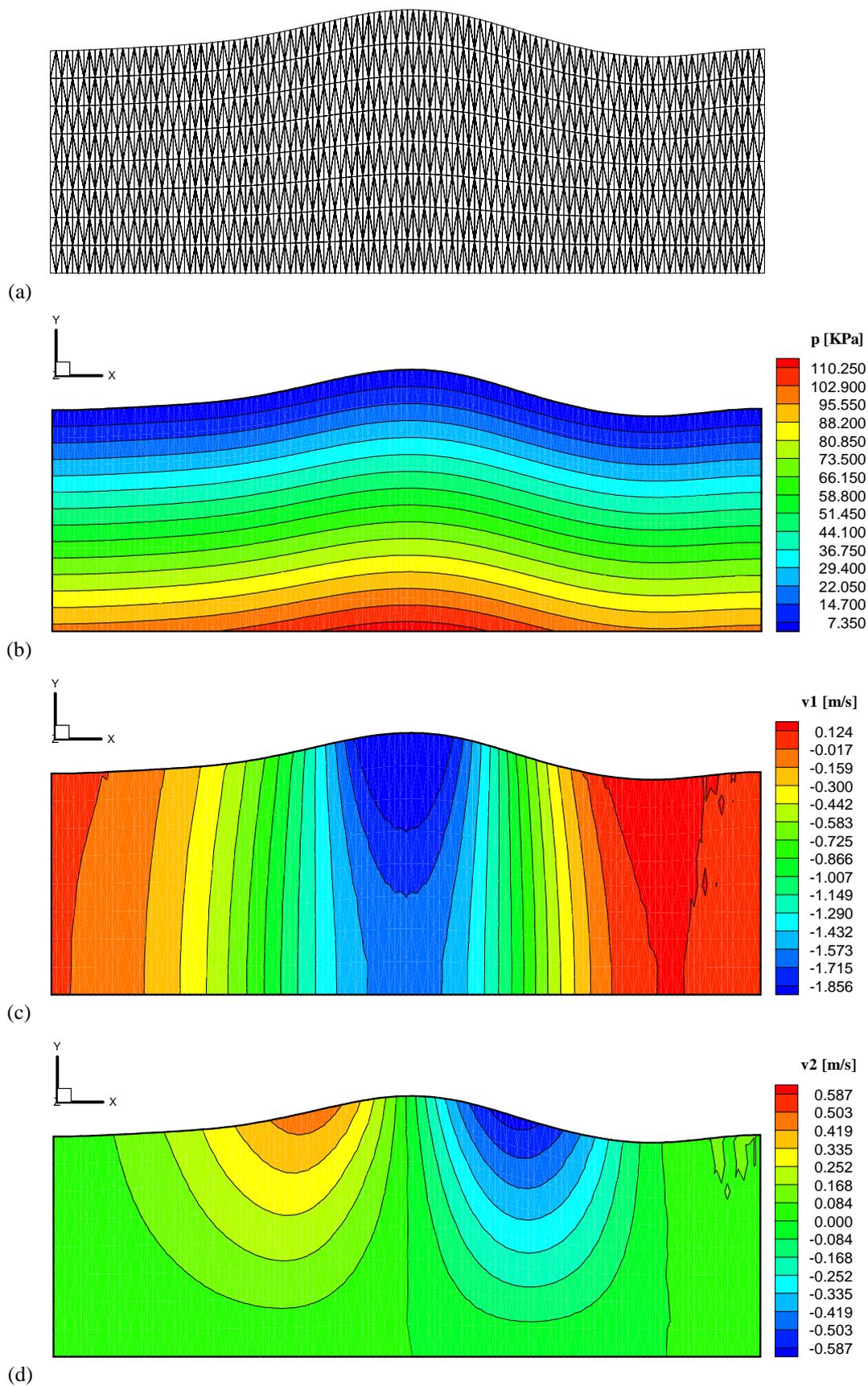


FIGURA 102 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=15.83s$ obtidos pelo algoritmo ALG2

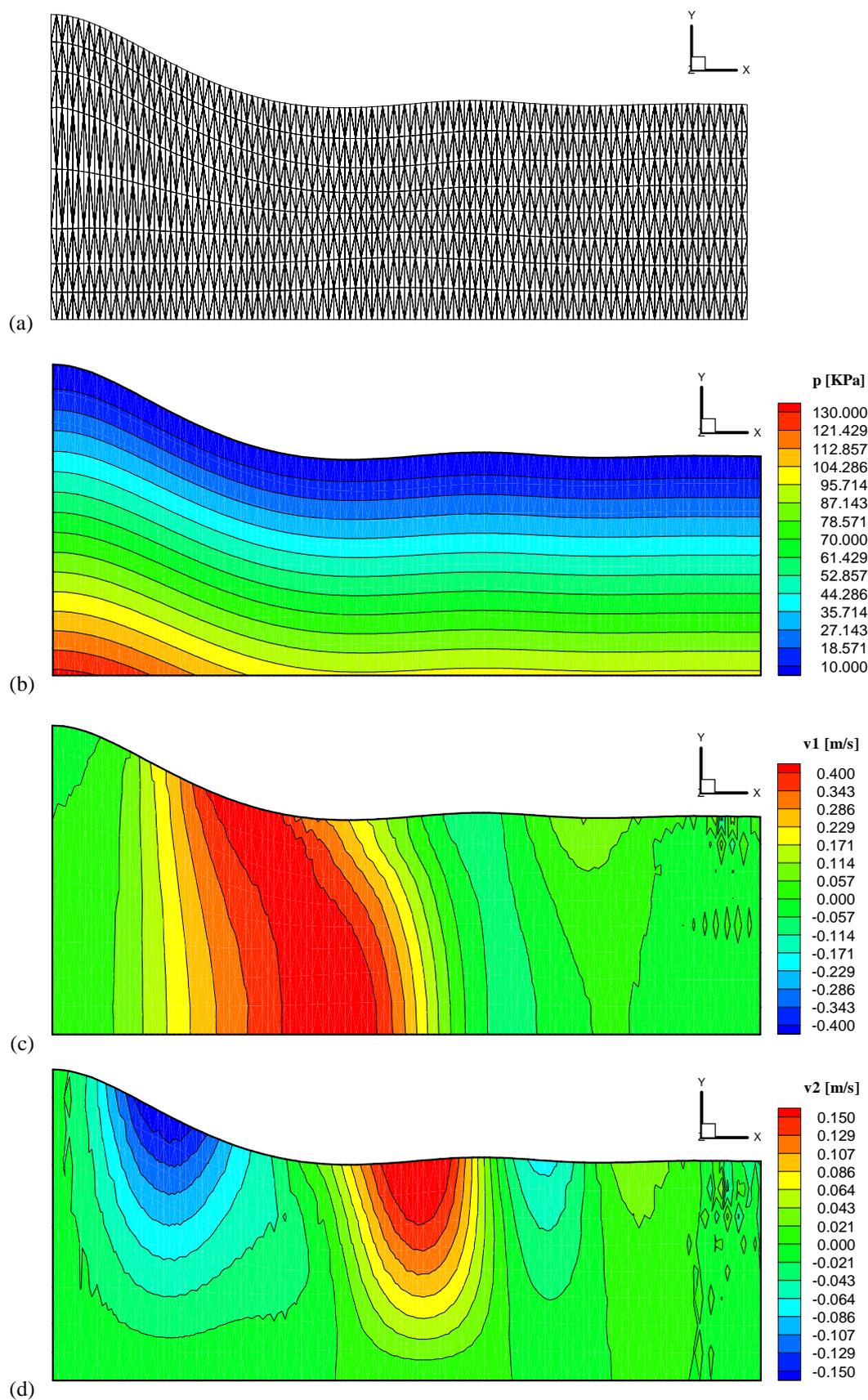


FIGURA 103 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=23.65s$ obtidos pelo algoritmo ALG2

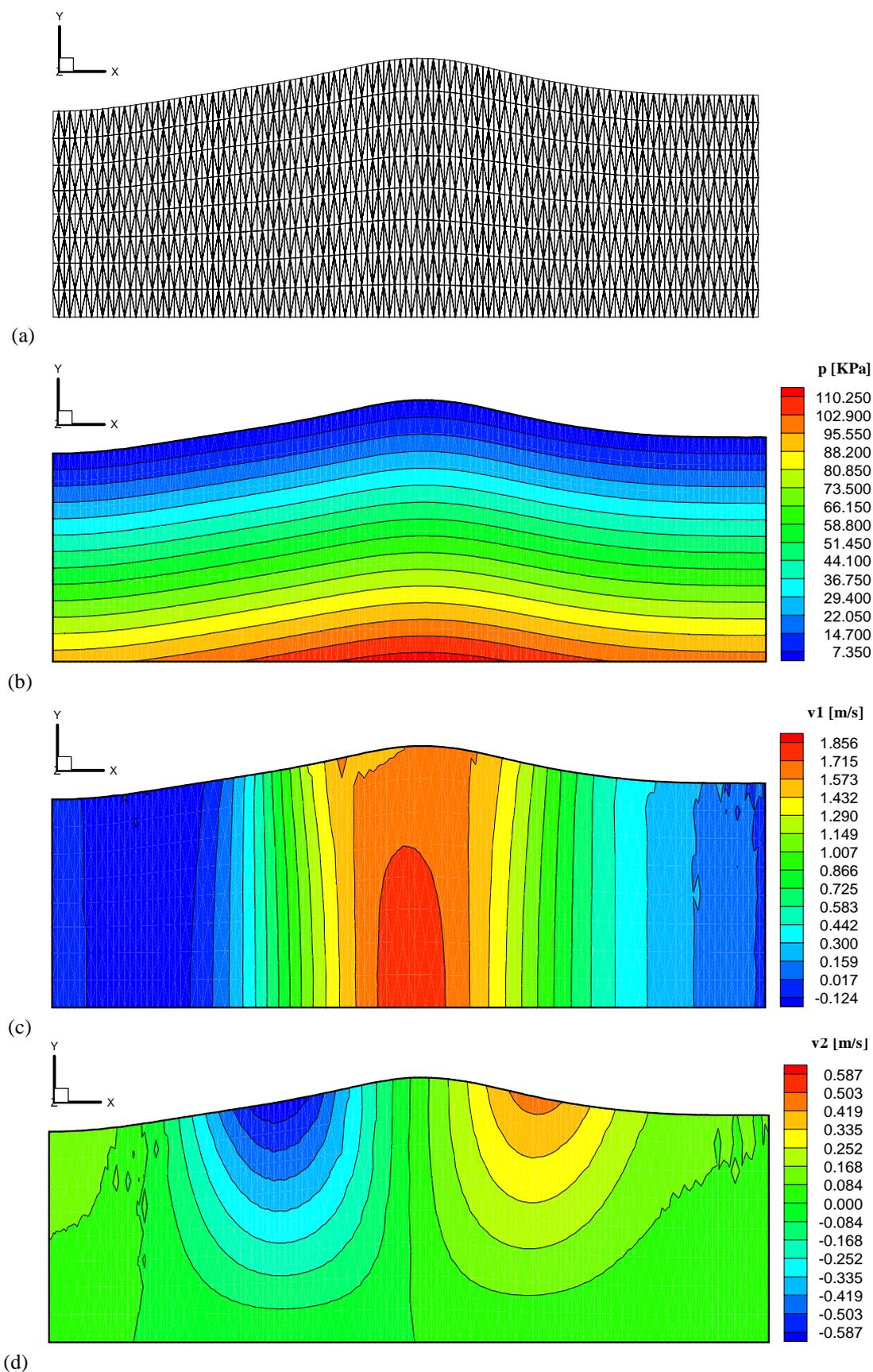


FIGURA 104 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=31.44s$ obtidos pelo algoritmo ALG2

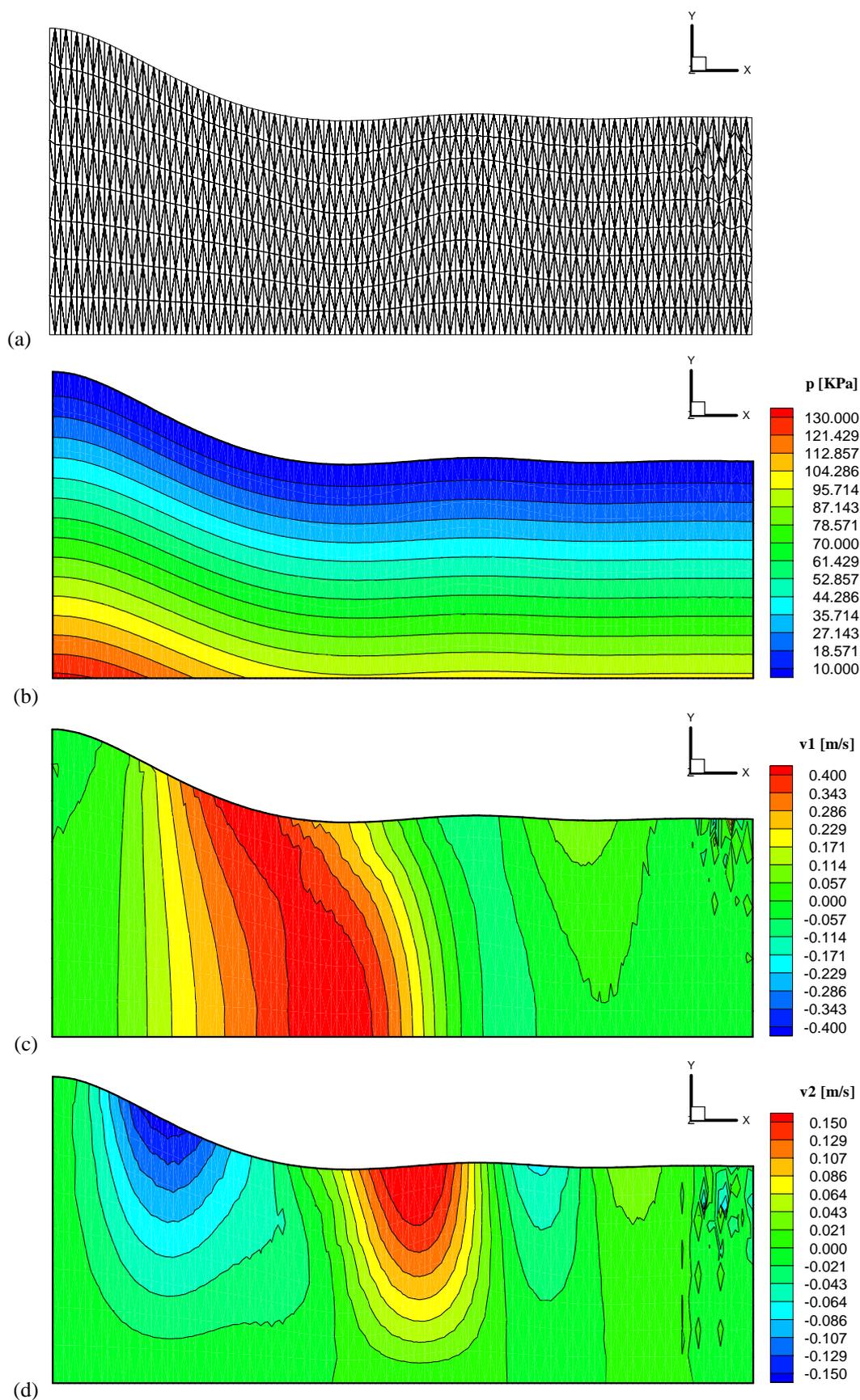


FIGURA 105 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=23.64s$ obtidos pelo algoritmo ALG1

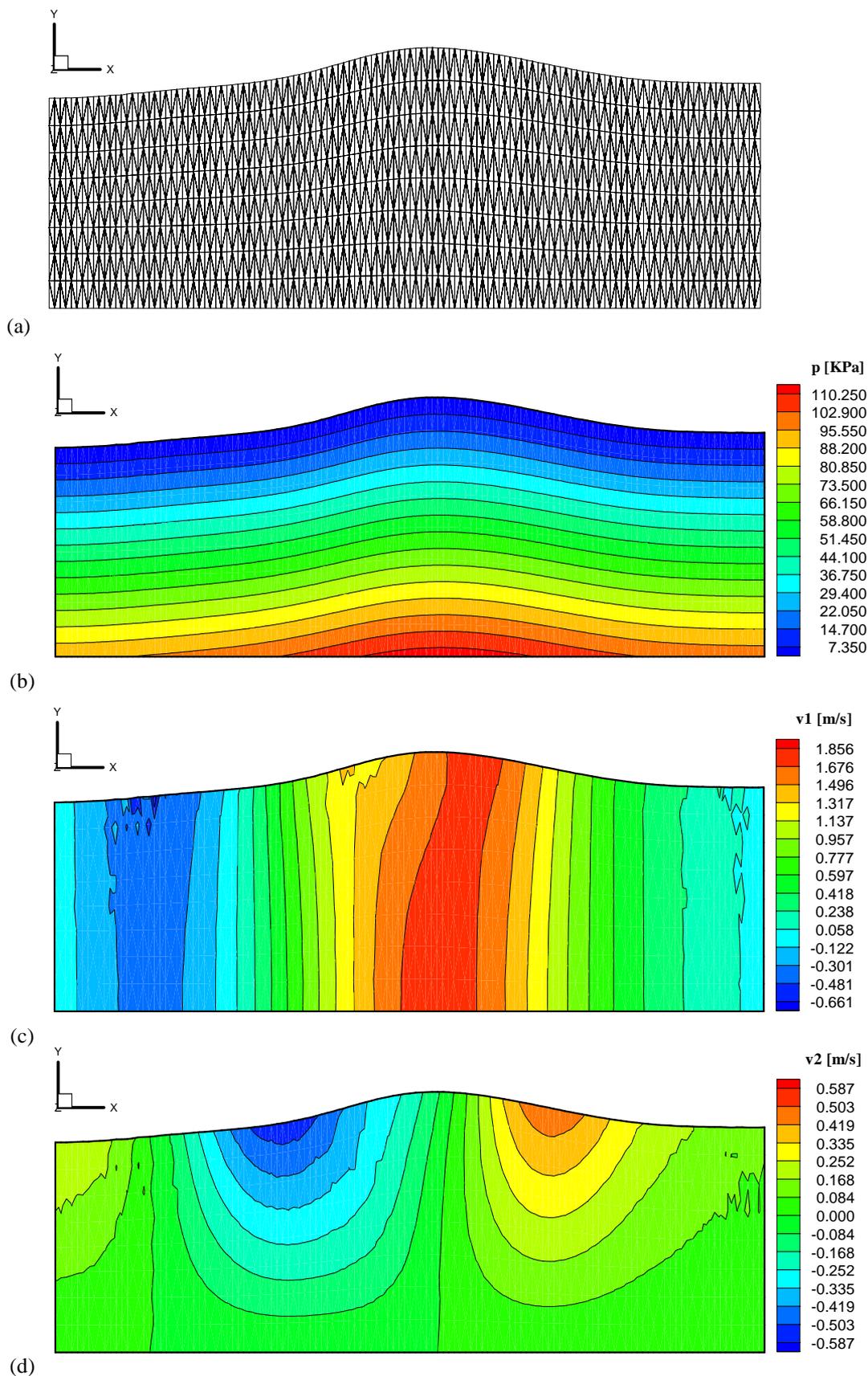


FIGURA 106 – Configuração da malha (a), distribuição de pressão (b) e distribuição das componentes de velocidade v_1 (c) e v_2 (d) para o exemplo onda solitária com $H=2.0$ no instante $t=32,00s$ obtidos pelo algoritmo ALG3

8.4 INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

8.4.1 Escoamento sobre o aerofólio NACA0012 com movimento oscilatório

Este exemplo trata de um problema transiente de um fluido invíscido escoando a um $M_\infty = 0.755$ sobre o aerofólio de perfil NACA0012, com um movimento oscilatório em torno de um ponto localizado no eixo central do perfil, a $\frac{1}{4}$ da sua corda. O ângulo de ataque variável com o tempo é definido da forma:

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \text{ sen } (2 M_\infty k \bar{t}) , \quad (160)$$

onde \bar{t} é o instante de tempo adimensional para um comprimento de referência igual a corda do perfil L_a , $\alpha_m = 0.016^\circ$ é o ângulo médio de ataque, $\alpha_0 = 2.51^\circ$ é a amplitude do ângulo de ataque e $k = 0.0814$ é a frequência reduzida dada por:

$$k = \frac{w_a L_a}{2v_\infty} , \quad (161)$$

sendo w_a a frequência de oscilação e v_∞ é o módulo do vetor de velocidade em escoamento não-perturbado.

As condições de contorno impostas nas superfícies externas do domínio são as mesmas apresentadas no exemplo NACA0012 (seção 8.2.2), com exceção daquelas impostas à superfície do corpo e da inexistência do plano de simetria xz no exemplo em questão. Na superfície do corpo, são impostas as condições de interface fluido-estrutura descritas no Cap. 6. É adotada uma corda unitária e uma largura constante igual a 0.3. O contorno externo consiste na superfície de um cilindro circular de raio igual a 8.0. A malha de elementos finitos, mostrada na Fig. 107, é composta de 21700 elementos tetraédricos e 5150 nós. Os menores elementos estão localizados na região próxima ao perfil, que possui 40 divisões nas partes inferior e superior. O problema tem um comportamento 2-D, por isso existe apenas uma camada de elementos na direção z , perpendicular ao plano de escoamento.

O movimento oscilatório do perfil começa após atingir-se o regime permanente na condição de ângulo de ataque $\alpha = \alpha_m = 0.016^\circ$. Utilizou-se o algoritmo de passo de tempo variável, com a distribuição inicial de passos de tempo apresentadas na Tab. 15 e ilustrados na Fig. 108, resultando em um ganho teórico de tempo de processamento de 2.38. O passo de tempo adimensional mínimo do domínio é de 0.00025, enquanto que o coeficiente de amortecimento usado é de $CC = 2.0$. O regime permanente foi alcançado no instante de tempo

adimensional de 62.72, cujo comportamento do resíduo da massa específica até este instante está mostrado na Fig. 109. As isolinhas da massa específica, isobáricas e isolinhas de Mach estão mostradas na Fig. 110. Os valores do coeficiente de pressão C_p ao longo do perfil estão representados na Fig. 111.

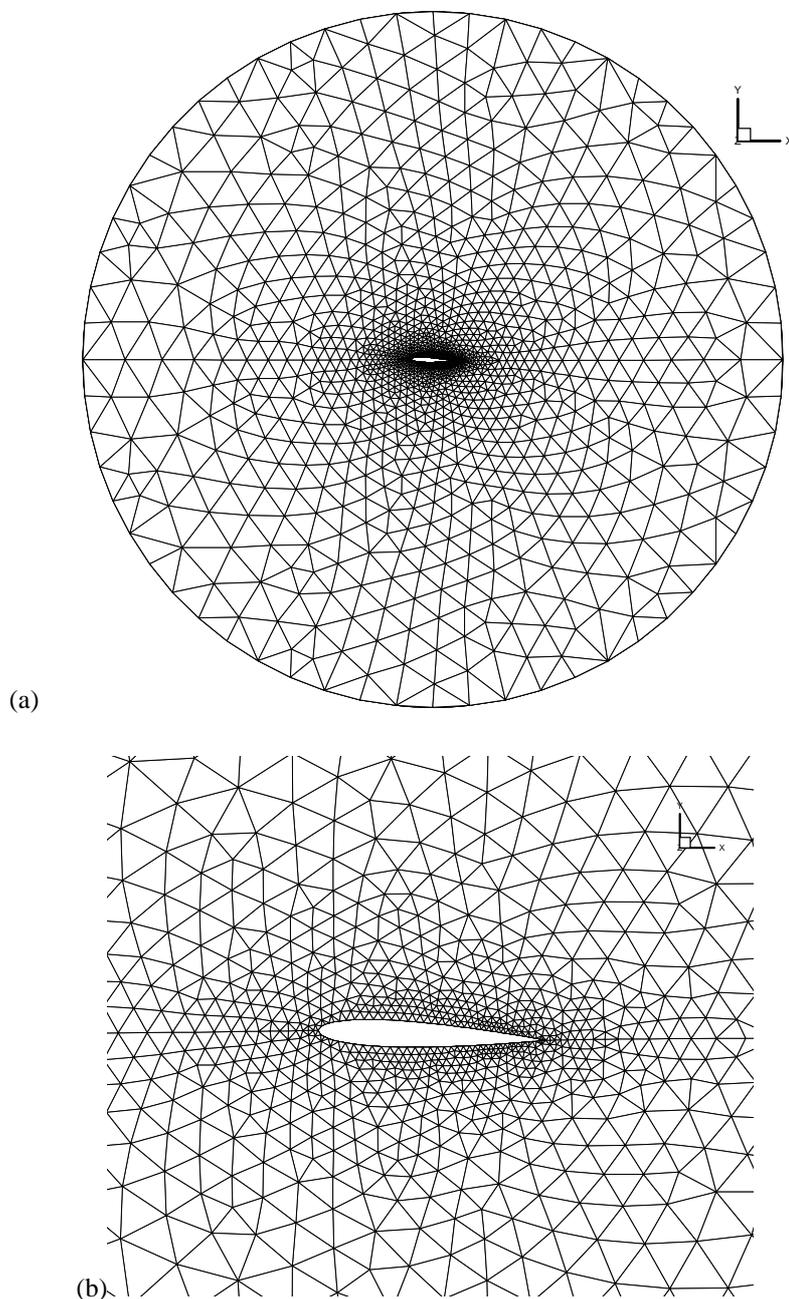


FIGURA 107- Corte da malha não-estruturada do exemplo NACA0012 oscilante no plano de simetria $z=0.0$. (a) Vista geral, (b) detalhe da região próxima ao corpo

TABELA 15 – Distribuição inicial de passos de tempo para o exemplo NACA0012 oscilante

Grupo	$1\Delta t$	$2\Delta t$	$4\Delta t$	$8\Delta t$	$16\Delta t$	$32\Delta t$	$64\Delta t$	$128\Delta t$
Elementos	6463	3114	2183	2615	2320	1459	2044	1502
Nós	1090	638	546	533	569	467	663	644

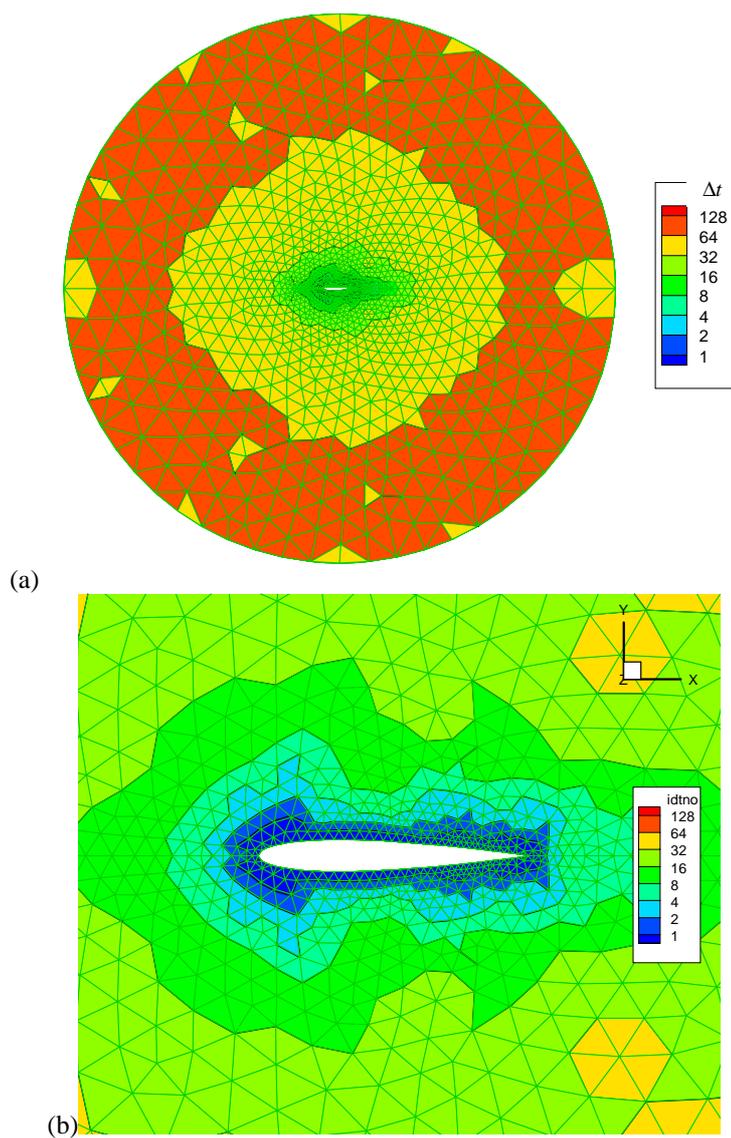


FIGURA 108 – Distribuição de passos de tempo no domínio para o exemplo NACA0012 oscilante. (a) Vista geral e (b) detalhe na região do aerofólio

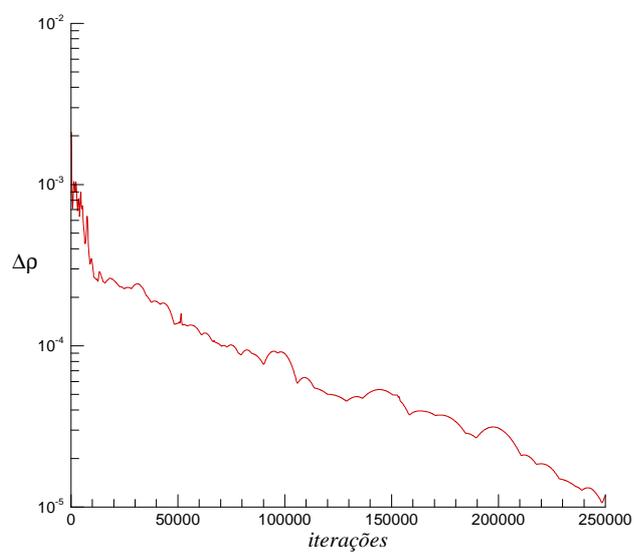


FIGURA 109 – Resíduo da massa específica para o exemplo NACA0012 oscilante

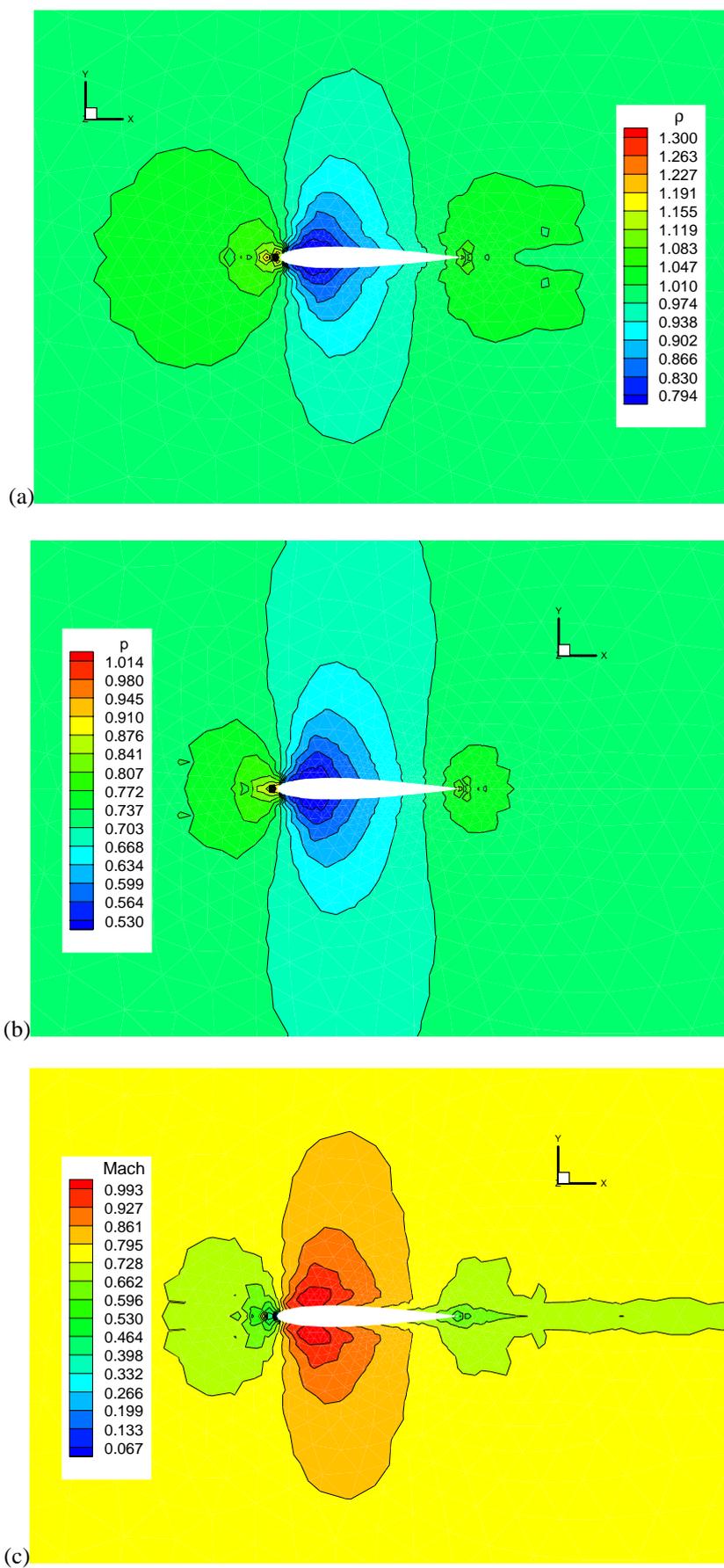


FIGURA 110 – Exemplo NACA0012 oscilante. (a) Isolinhas da massa específica, (b) isobáricas e (c) isolinhas de Mach para o regime permanente

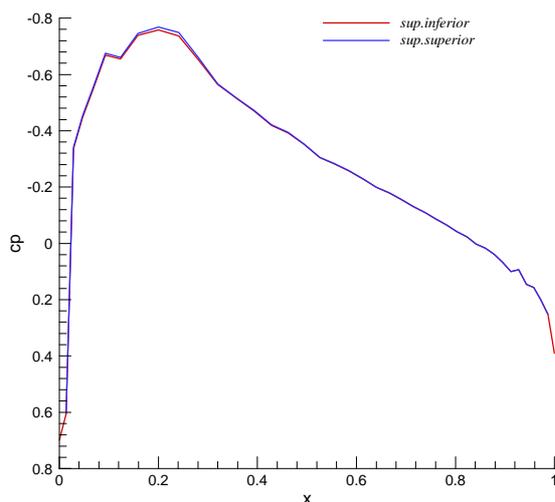
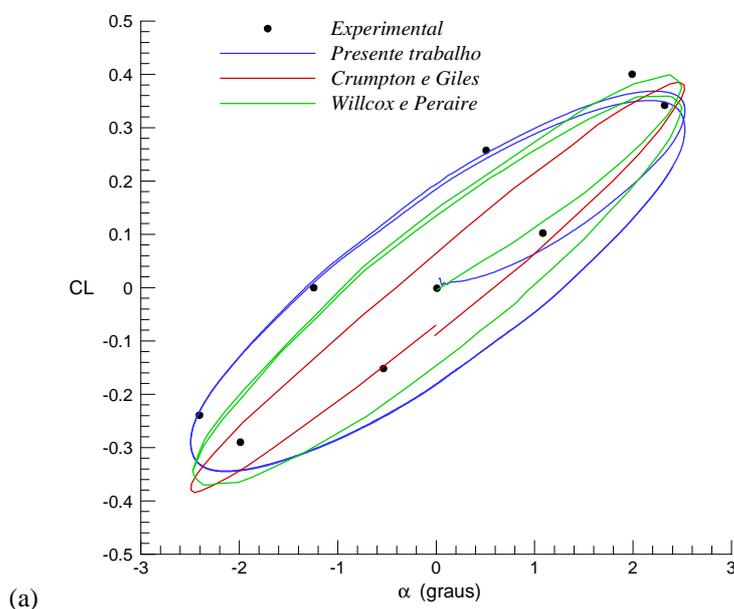
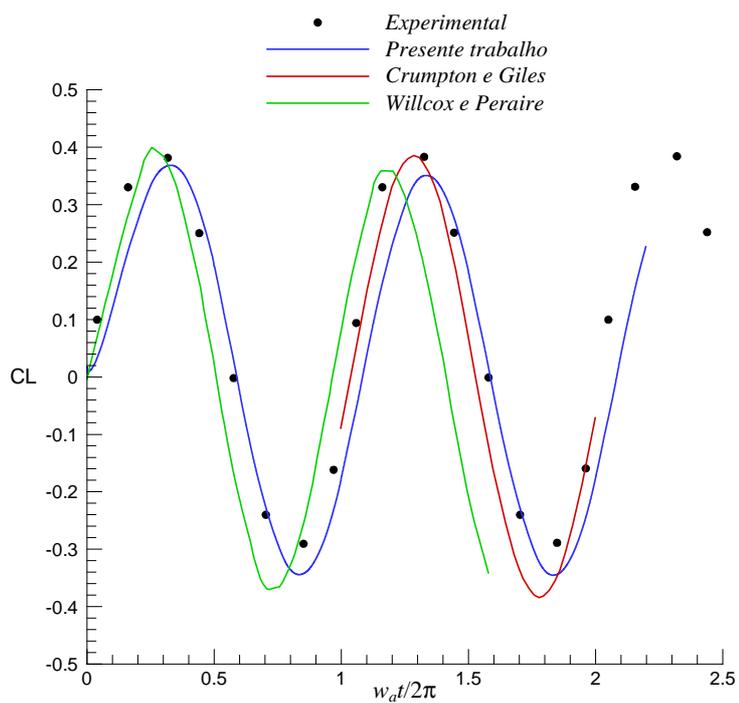


FIGURA 111 – Coeficiente de pressão C_p ao longo do aerofólio NACA0012

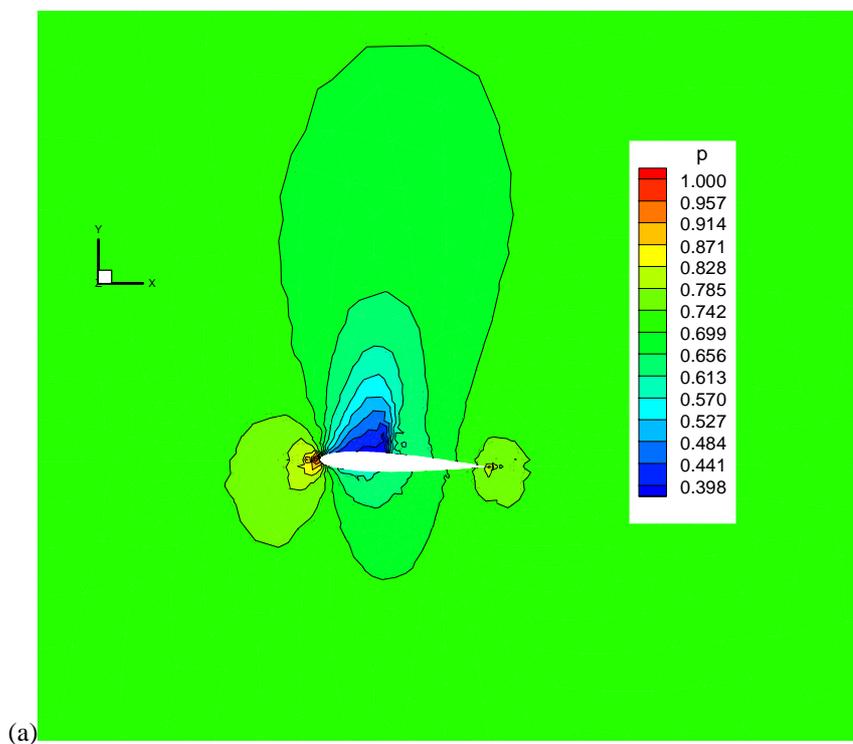
A Fig. 112 apresenta gráficos do coeficiente de sustentação C_L em função do ângulo de ataque α e do número de ciclos medido em $w_{at}/2\pi$. Os resultados são comparados com outras referências. Willcox e Peraire (1997) estudaram o mesmo problema usando volumes finitos, um esquema explícito preditor/corretor, a fatorização *LU-Gauss-Seidel* e o algoritmo *GMRES* (*Generalized Minimal Residual Algorithm*) preconditionado pelo esquema *LU-Gauss-Seidel*. A malha utilizada pela Referência é 2-D não-estruturada e contém 16634 nós e 32908 elementos triangulares. Crumpton e Giles (1997) apresentaram resultados deste problema usando um algoritmo *multigrid* não-estruturado, com um procedimento de solução iterativo das equações que surgem da discretização temporal implícita das equações transientes de Euler. E, por último, Landon (1982) apresentou resultados experimentais deste caso. A Fig. 113 mostra a distribuição de pressão para os instantes $t = 12.544$ ($\alpha = 2.525^\circ$) e $t = 40.768$ ($\alpha = -2.383^\circ$).





(b)

FIGURA 112 – Gráficos (a) do ângulo de ataque α versus coeficiente de sustentação C_L e (b) do número de ciclos $w_{at}/2\pi$ versus C_L



(a)

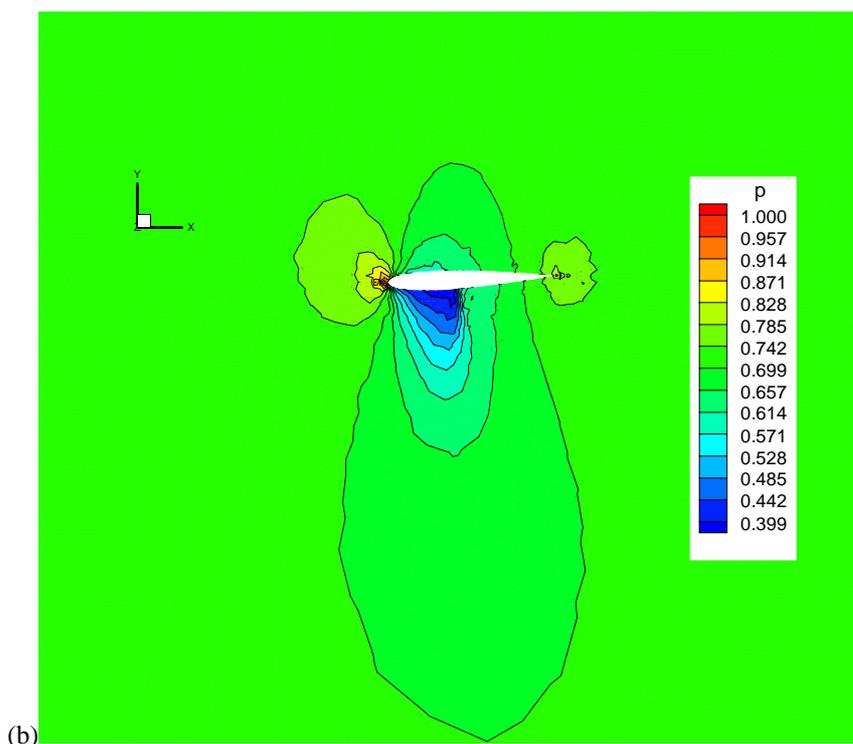


FIGURA 113 – Exemplo NACA0012 oscilante: distribuição de pressão para os instantes (a) $t = 12.544$ ($\alpha = 2.525^\circ$) e (b) $t = 40.768$ ($\alpha = -2.383^\circ$)

8.4.2 escoamento sobre uma placa plana

Neste exemplo, analisa-se um escoamento supersônico invíscido sobre uma placa plana engastada nas suas extremidades, como mostra o esquema da Fig. 114. A placa tem um comprimento de 0.5 m, uma largura de 0.2 m e uma espessura de 1.35 mm. As propriedades do fluido e da placa são apresentadas na Tab. 16. Inicialmente, a placa está sujeita à pressões iguais em ambos os lados. Instantaneamente, faz-se a pressão do lado inferior da placa cair em 0.1% e mantém-se nesta condição por $4\mu\text{s}$, causando deslocamentos na placa e perturbações no escoamento. Após este período, esta pressão volta ao seu valor inicial de 28 kPa. A solução analítica da aeroelasticidade linear para este problema, indica um limite de estabilidade com um número de Mach crítico igual a 2.0 (Rifai *et al.*, 1999), ou seja, esta é a velocidade de escoamento acima da qual ocorre instabilidade na placa. As condições de contorno impostas para o domínio do fluido estão mostradas na Fig. 114. Especificamente na superfície da placa são impostas as condições cinemáticas para fluidos invíscidos dadas pelas Eq. (141) e (143). Para a estrutura da placa, são impostas as seguintes condições: $u_x = u_y = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0.0$ nas extremidades engastadas e $w = \theta_x = \theta_y = 0.0$ nos planos de simetria.

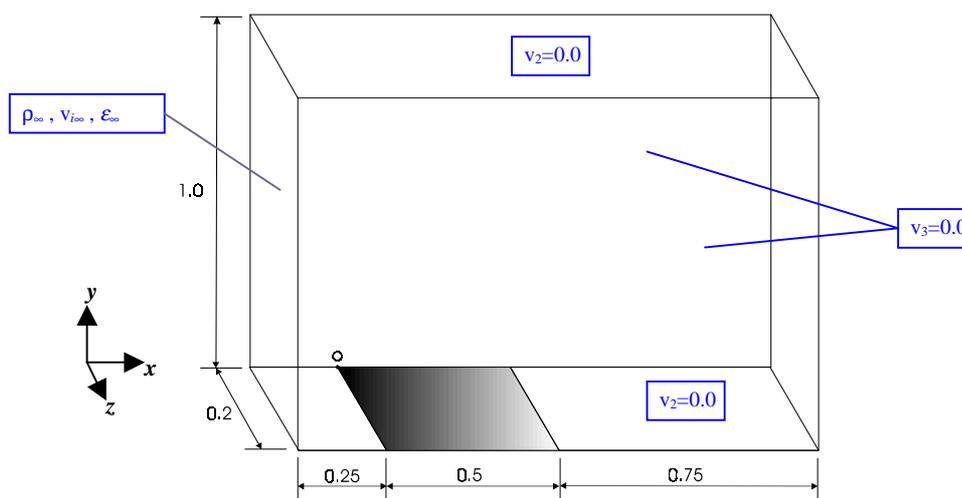


FIGURA 114 – Geometria e condições de contorno do exemplo placa plana

TABELA 16 – Propriedades da placa e do fluido

Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade E	77.28 GPa
Coefficiente de Poisson ν	0.33
Massa específica ρ_E	2710 kg/m ³
Velocidade do som C_∞	340 m/s
Massa específica ρ_F	0.339100346 kg/m ³
Pressão em escoamento não-perturbado p_∞	28 kPa

A discretização dos domínios foi realizada de tal forma que as faces dos tetraedros adjacentes à placa coincidissem com os triângulos pertencentes ao campo da estrutura. Utilizou-se duas malhas diferentes, a malha 1 e a malha 2 mais refinada, conforme os dados mostrados na Tab. 17. Como o problema tem um comportamento 2-D, apenas uma camada de elementos foi adotada para discretizar o domínio na direção do eixo z , transversal ao escoamento. A vista geral, bem como um detalhe na região da placa para as duas malhas, estão mostradas na Fig. 115.

TABELA 17 – Dados das malhas do exemplo placa plana

Malha	Fluido		Estrutura	
	Nós	Tetraedros	Nós	Triângulos
Malha 1	3605	10334	104	104
Malha 2	13303	38915	506	508

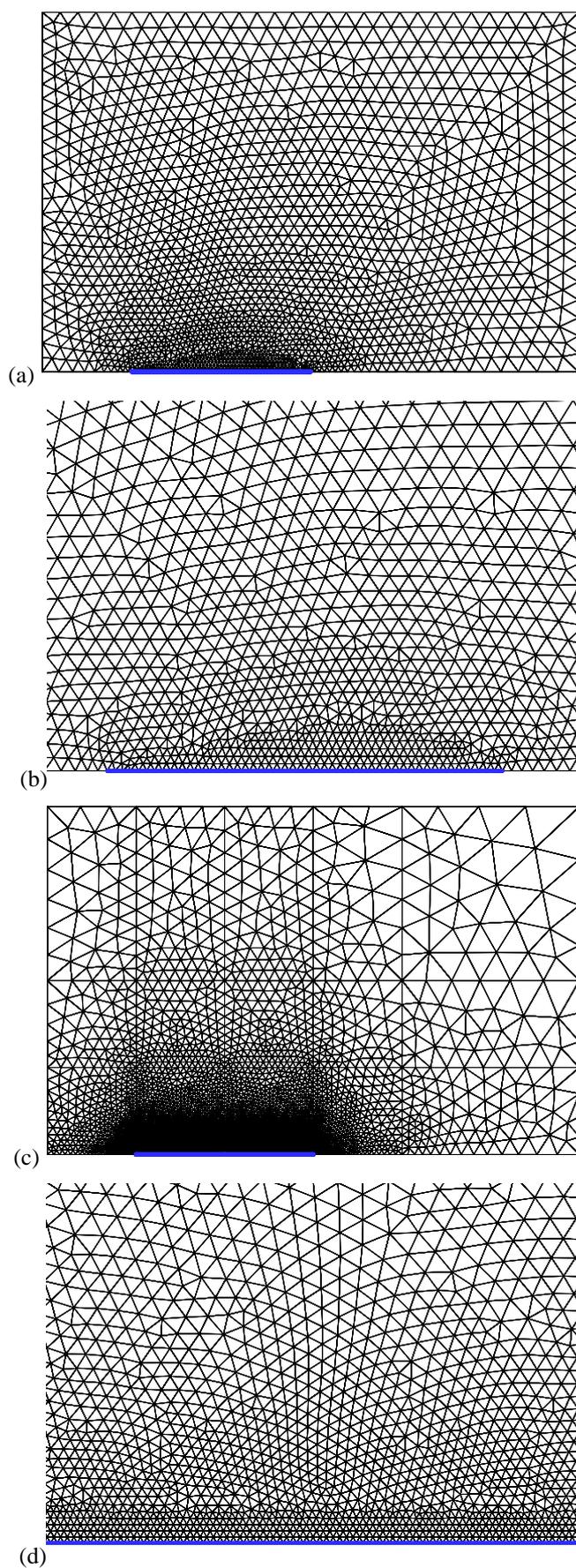


FIGURA 115 – Malhas do exemplo placa plana. (a) Vista geral e (b) detalhe da malha 1 na região da placa. (c) Vista geral e (d) detalhe da malha 2 na região da placa

A primeira análise realizada consistiu em encontrar o número de Mach crítico para o problema. Para isto, fez-se simulações com números de Mach em torno do valor crítico previsto pela solução analítica. Os resultados do coeficiente de sustentação C_L e do deslocamento da placa em $x=0.35\text{m}$ ao longo do tempo são representados nos gráficos da Fig. 116 para os números de Mach = 1.9, 2.0, 2.02 e 2.05. Estes resultados foram obtidos utilizando a malha 2 com passos de tempo de 1.8×10^{-7} s para Mach = 1.9 e 1.75×10^{-7} s para Mach = 2.0, 2.02 e 2.05.

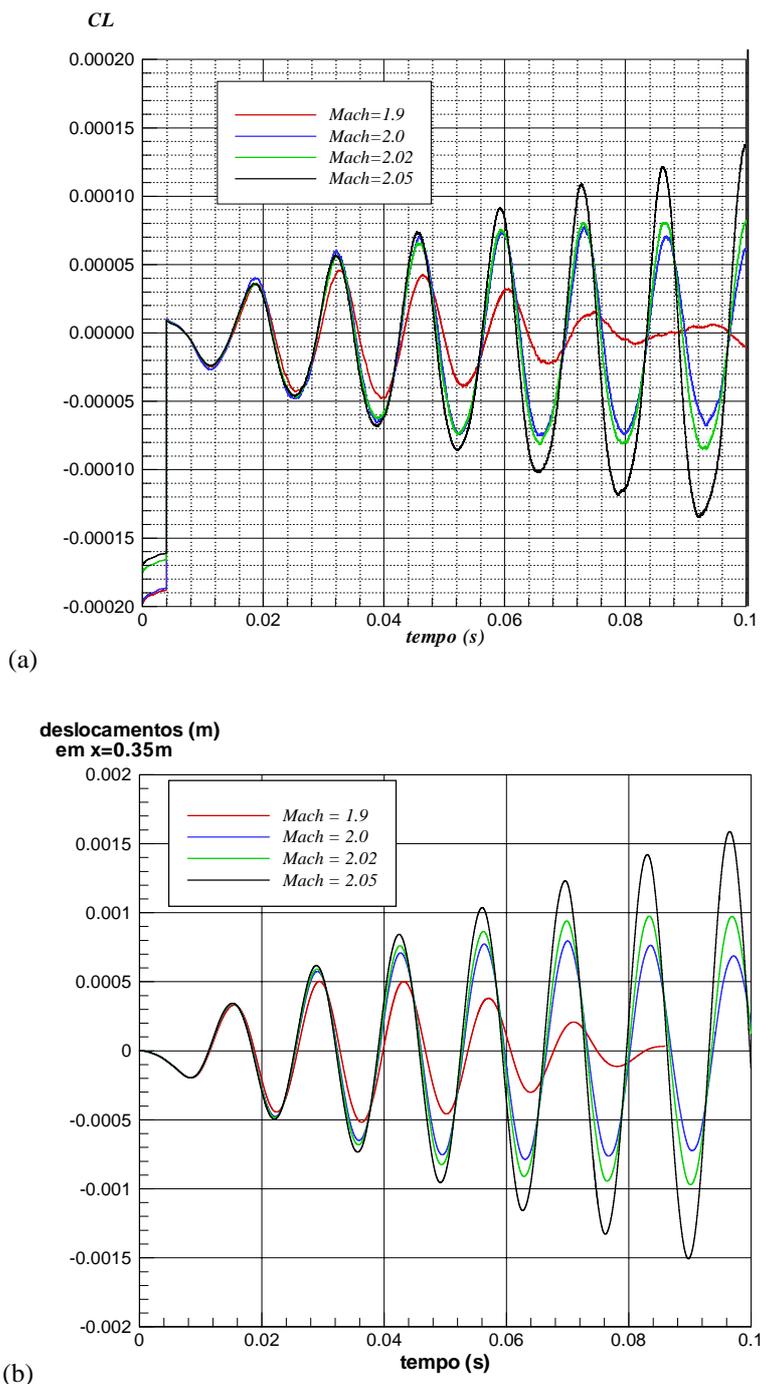
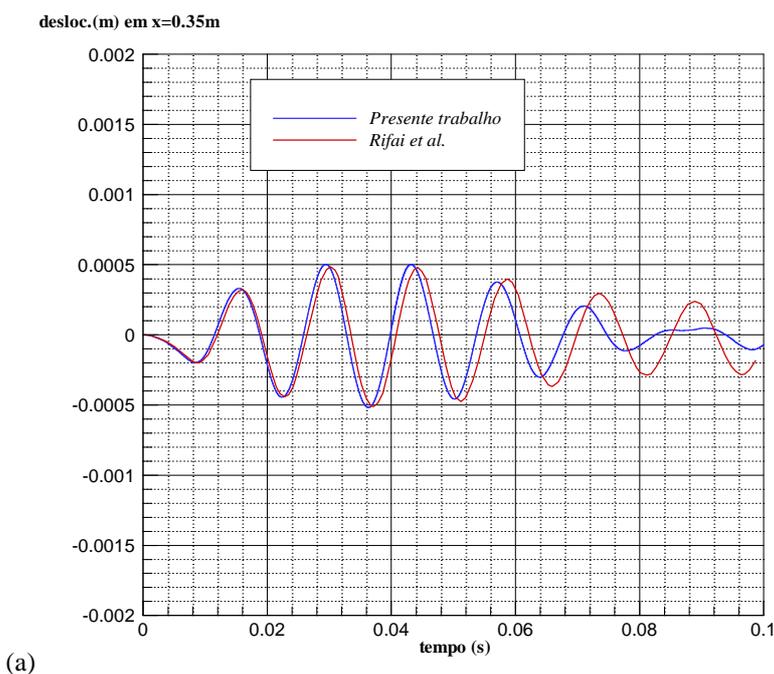


FIGURA 116 – Valores ao longo do tempo para Mach = 1.9, 2.0, 2.02 e 2.05 dos (a) coeficientes de sustentação C_L e dos (b) deslocamentos da placa em $x=0.35\text{m}$

Observa-se que o número de Mach crítico obtido, é praticamente igual ao valor previsto pela solução analítica de 2.0. Rifai *et al.* (1999) encontraram um valor de 1.98. Nesse trabalho, o fluido é discretizado pela técnica de elementos finitos de Galerkin, baseado no método dos mínimos quadrados e se utiliza de elementos triangulares. A estrutura é construída com quadriláteros, utilizando uma formulação de três campos, baseado no princípio variacional de Hu-Washizu. As condições de acoplamento de interface são impostas através do método denominado “*augmented-Lagrangian*”. Uma comparação dos deslocamentos em $x=0.35\text{m}$ para Mach = 1.9 e 2.0 obtidos pelo presente trabalho e por Rifai *et al.* estão mostrados na Fig. 117. Observa-se que os gráficos do presente trabalho têm um amortecimento maior do que os da Referência. Isto se deve à diferença encontrada no número de Mach crítico. A Fig. 118 apresenta uma comparação dos deslocamentos em $x=0.35\text{m}$ obtidos pelo presente trabalho para Mach=2.0 e pela Referência para Mach=1.98. Nota-se que, embora permaneça uma defasagem entre os resultados, as amplitudes estão bem próximas. Uma comparação entre os resultados obtidos com o uso das malhas 1 e 2 para Mach=2.0 estão mostrados no gráfico da Fig. 119. Existem diferenças consideráveis nos deslocamentos, indicando que o refinamento da malha aumentou a precisão dos resultados, como era de se esperar. As distribuições de Mach e de pressão no domínio para um número de Mach=2.0 e nos instantes de tempo $t = 0.07$ e 0.1 s, estão mostradas nas Fig. 120 e 121, respectivamente. A Fig. 122 apresenta as configurações da placa e as isolinhas de deslocamentos verticais para os instantes $t = 0.03$, 0.07 e 0.1 s.



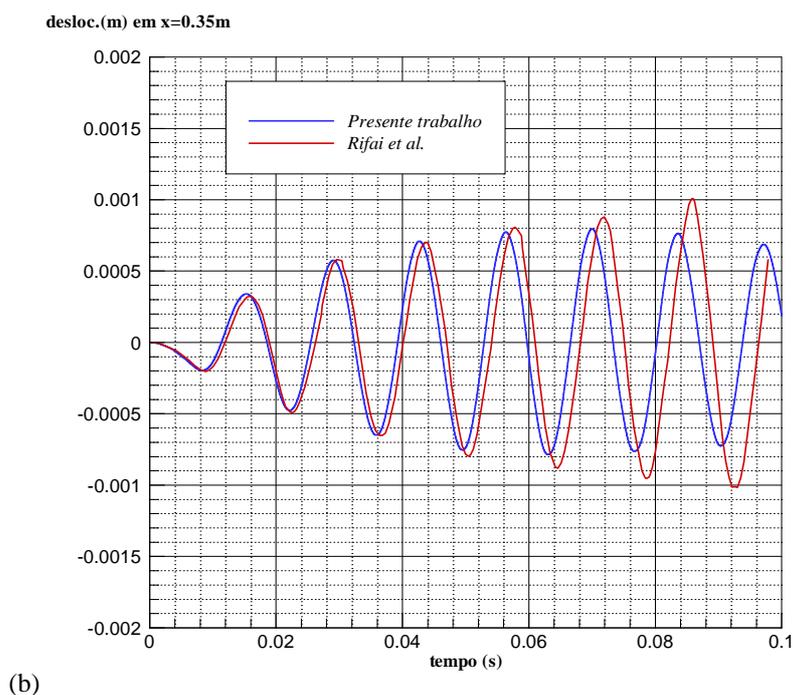


FIGURA 117 – Comparação dos deslocamentos em $x=0.35m$ para Mach = 1.9 (a) e 2.0 (b) obtidos pelo presente trabalho e por Rifai *et al* (1999)

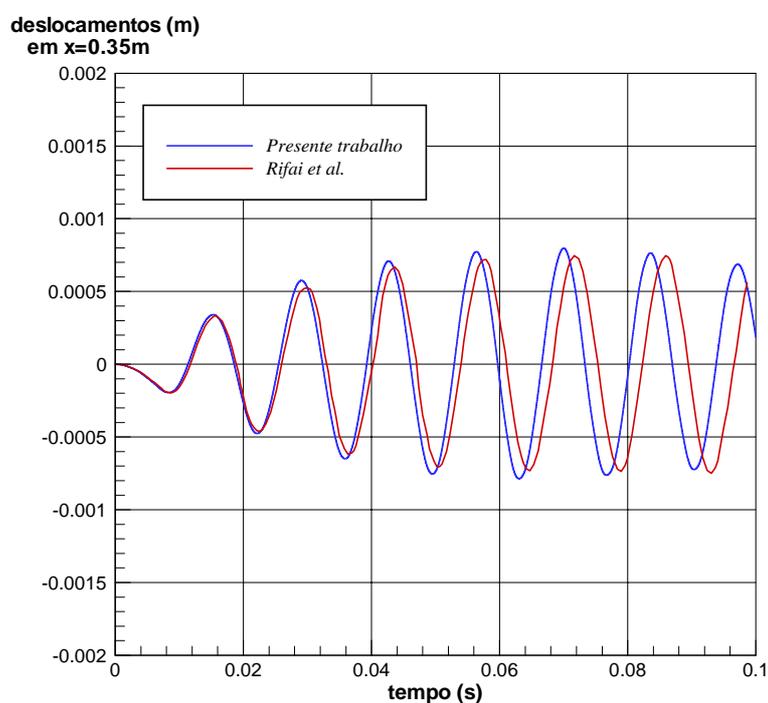


FIGURA 118 – Comparação dos deslocamentos em $x=0.35m$ obtidos pelo presente trabalho para Mach = 2.0 e por Rifai *et al* (1999) para Mach = 1.98

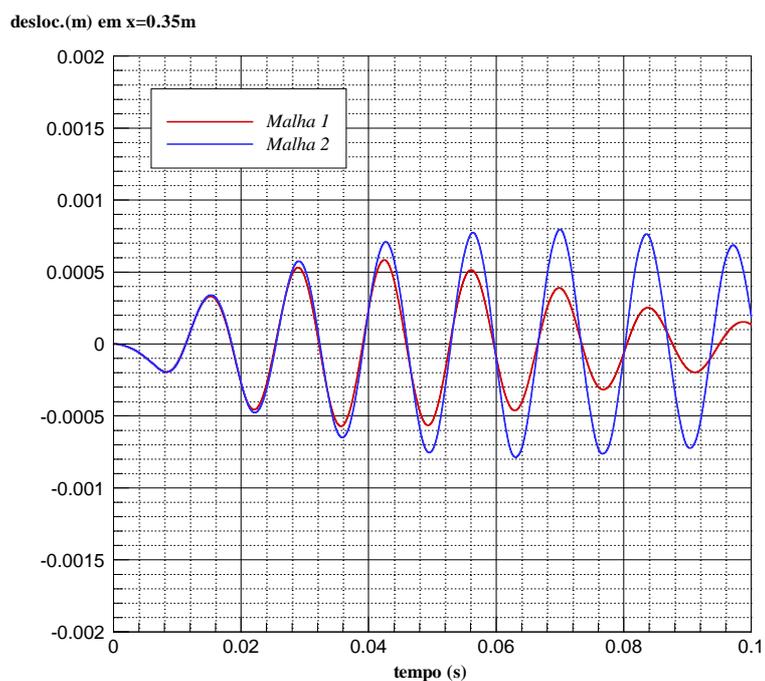


FIGURA 119 – Comparação entre os resultados das malhas 1 e 2 para Mach=2.0

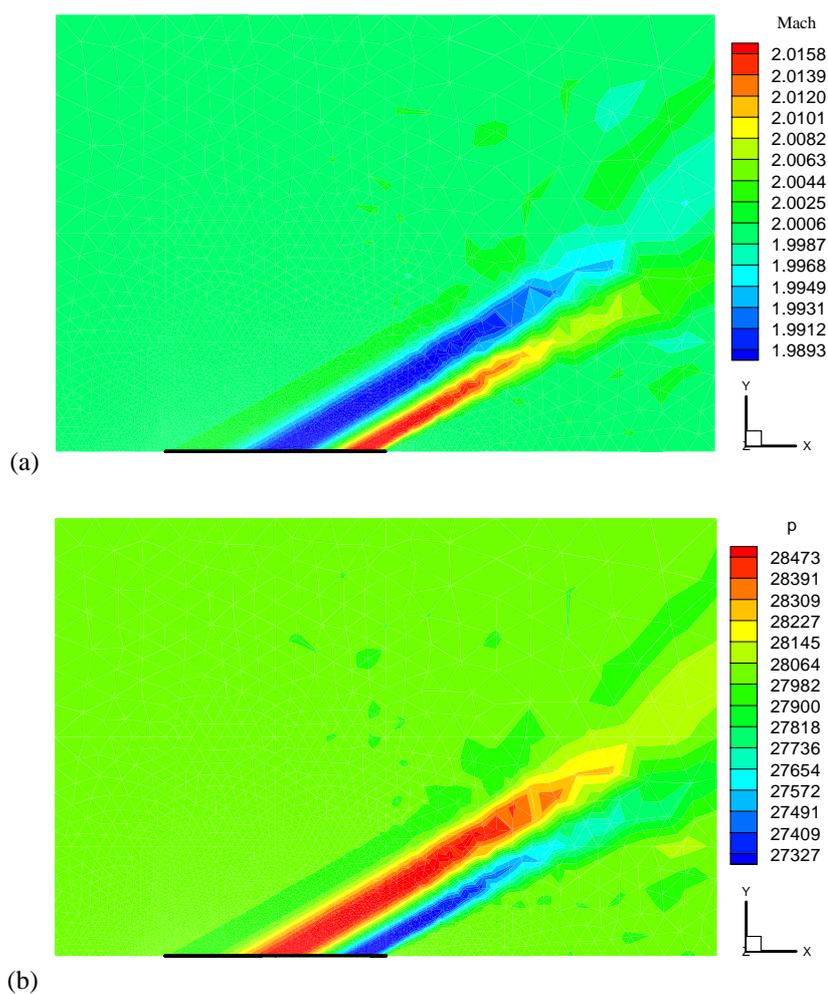


FIGURA 120 – Distribuições de (a) Mach e (b) pressão no domínio para um escoamento de Mach=2.0 no instante de tempo $t = 0.07 s$

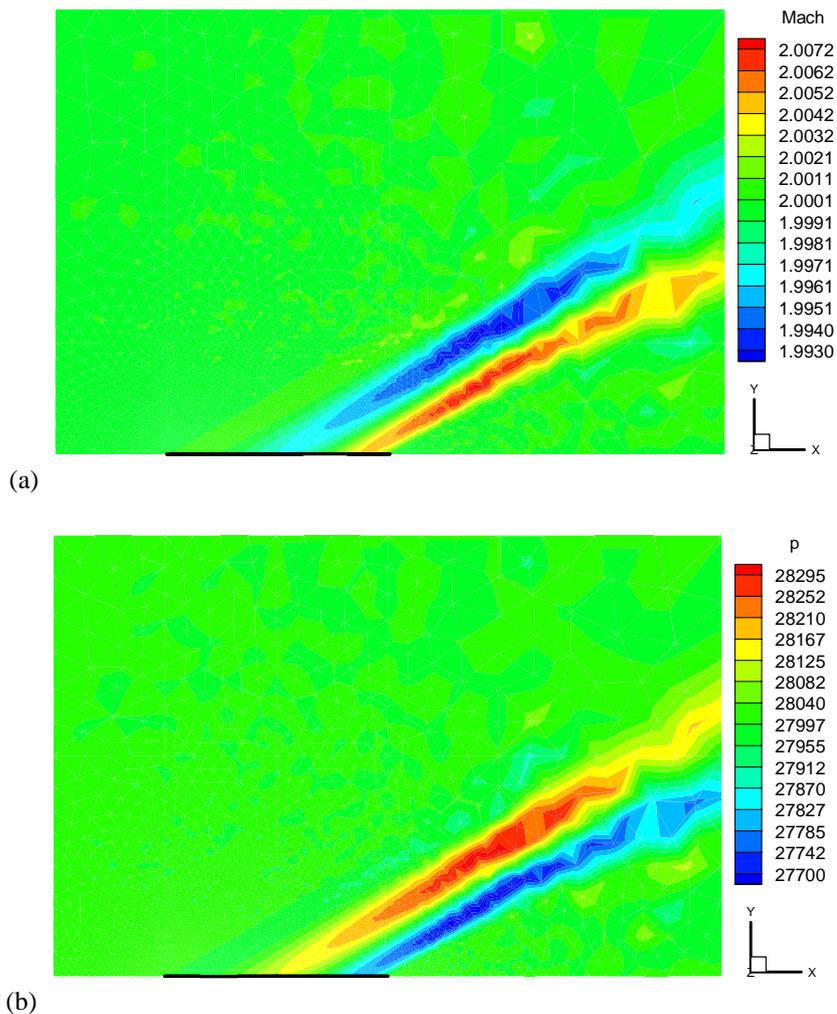


FIGURA 121 – Distribuições de (a) Mach e (b) pressão no domínio para um escoamento de Mach=2.0 no instante de tempo $t = 0.1 s$

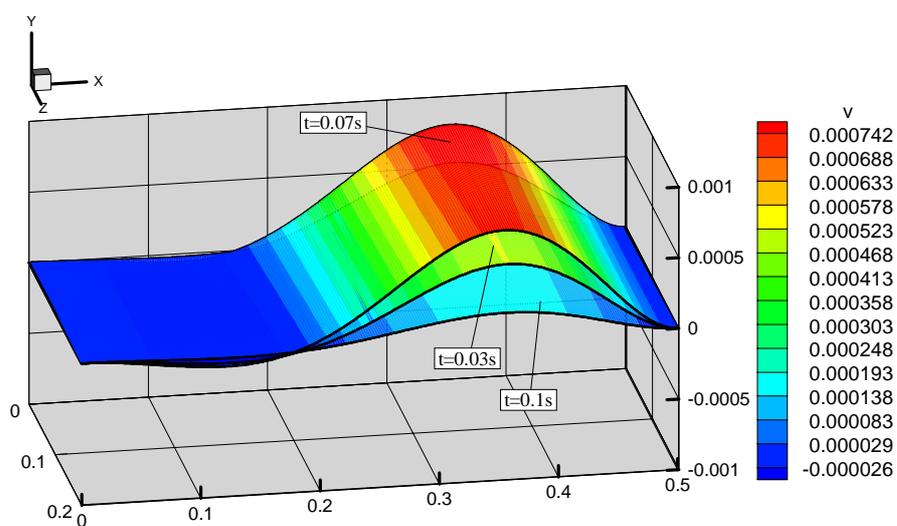


FIGURA 122 – Configurações da placa para Mach=2.0 nos instantes de tempo $t = 0.03, 0.07$ e $0.1 s$

Um outro estudo realizado, foi a comparação do comportamento de uma placa linear com o de uma placa com não-linearidade geométrica. Assim, simulou-se um escoamento com número de Mach = 2.3 e um passo de tempo $\Delta t = 1.6 \times 10^{-7}$ s, cujos deslocamentos em $x=0.35$ m estão mostrados no gráfico da Fig. 123. A solução linear, conforme prevê o resultado analítico, mostra um crescimento exponencial das oscilações a esta velocidade, enquanto que a solução não-linear apresenta amplitudes de deslocamentos limitadas. A diferença entre as duas soluções é atribuída ao acoplamento entre as tensões de membrana e de flexão, que possui uma placa com elasticidade não-linear. Este fenômeno aumenta a rigidez efetiva da placa, à medida que ela se deforma, modificando o comportamento e a resposta do sistema. Esta simulação foi realizada por Rifai *et al.* (1999) apresentando as mesmas conclusões comentadas e resultados semelhantes.

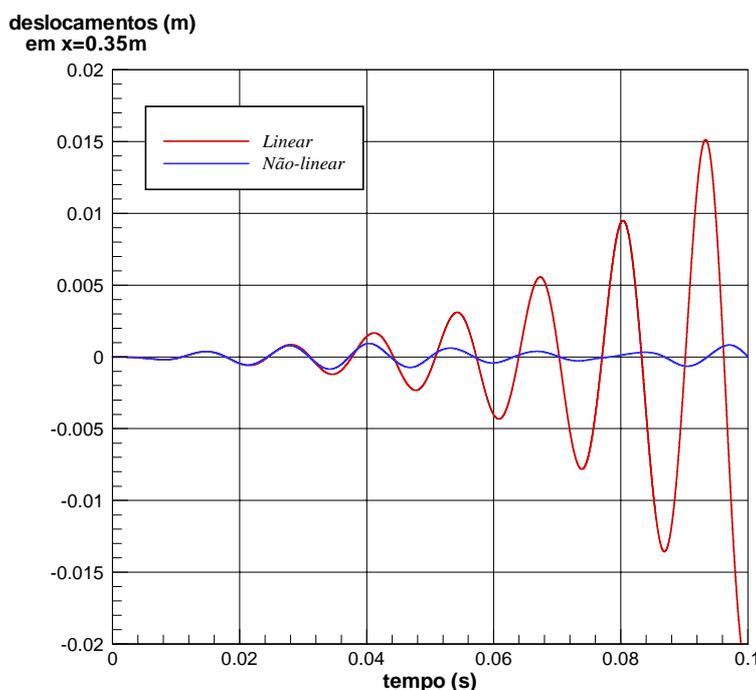


FIGURA 123 – Comparação dos deslocamentos em $x=0.35$ m entre as soluções linear e não-linear com Mach=2.3

A característica de modularidade dos algoritmos permite a existência de diferentes discretizações temporais para a estrutura e para o fluido. Como geralmente o fluido possui o menor passo de avanço no tempo, pode-se utilizar um processo de subciclos entre a estrutura e o fluido. Utilizando a malha 1, foram simulados escoamentos (Mach = 2.20) com diferentes relações n_{SF} entre os passos de tempo da estrutura e do fluido ($n_{SF} = 1, 5, 10$ e 20), cujos

resultados em termos de deslocamentos em $x=0.35\text{m}$, a um passo de tempo mínimo de 9.0×10^{-7} s, estão mostrados na Fig. 124.

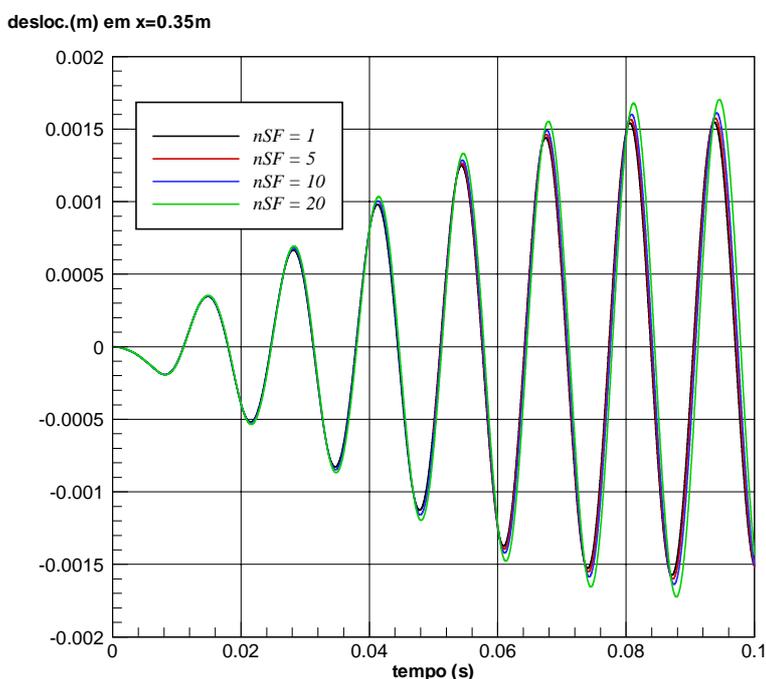


FIGURA 124 – Deslocamentos em $x=0.35\text{m}$ para $\text{Mach}=2.20$ e $n_{SF} = 1, 5, 10$ e 20

Alguns dados do processo de execução do algoritmo com o uso dos subciclos estrutura-fluido no Cray T94/CESUP-UFRGS, estão mostrados nas Tab. 18, 19 e 20. Estas informações computacionais permitem as seguintes interpretações:

- a) O exemplo placa plana possui uma relação entre o número de graus de liberdade do fluido e da estrutura de 28.88, que é um valor elevado. Por esta razão é que a estrutura representa apenas 10.90% do tempo de CPU (t_{cpu}) total para $n_{SF}=1$ como mostra a Tab. 18. Em problemas 3-D e/ou com geometrias mais complexas, esta relação é menor, e a estrutura tem um peso maior no t_{cpu} total. Além disso, as simulações utilizam um comportamento linear para a placa, não havendo as iterações necessárias para obter-se a convergência da solução, como ocorrem em estruturas não-lineares, aumentando consideravelmente o t_{cpu} da estrutura. Estas observações justificam os baixos valores de ganhos de t_{cpu} total, obtidos com o uso de subciclos estrutura-fluido, como mostra a Tab. 19.
- b) A relação $t_{cpu}/\Delta t \text{ nó} = 4.822 \times 10^{-5}$ da estrutura para $n_{SF}=1$ (ver Tab. 19) é mais alto que a do fluido (1.284×10^{-5}). Além do fato de que os algoritmos são diferentes, pode-se justificar

o fraco desempenho do algoritmo da estrutura através do número de elementos triangulares da estrutura que é de apenas 104 (ver Tab. 17), menor que o comprimento de operação dos processos vetorizados do Cray T94, que é de 128. Como consequência, estas subrotinas apresentam desempenhos extremamente baixos, como mostra a Tab. 20.

- c) O ganho de $tcpu$ na estrutura não é linearmente proporcional à relação de subciclo n_{SF} , como pode-se ver na Tab. 19. Nota-se que para $n_{SF}=5$ o ganho é de 3.56, enquanto que para $n_{SF}=10$ o ganho é de apenas 4.38. As explicações para esta característica indesejável do subciclo estrutura-fluido, estão no aumento do número médio de iterações por passo de tempo para obter-se convergência no algoritmo de solução dos gradientes conjugados (NIGC), apresentado na Tab. 20. Como a cada passo de tempo inicializa-se o vetor de deslocamentos com os valores do passo anterior, quanto mais elevada a relação n_{SF} , mais afastado o vetor inicial dos deslocamentos estará do resultado final.

TABELA 18 – $tcpu$ dos processos de execução com o uso de subciclos estrutura-fluido

$n_{F/S}$	$tcpu$ (s)	% $tcpu$			
		Fluido	Estrutura	Mov.malha	Interação
1	5142	88.19	10.90	0.73	0.18
5	4787	95.86	3.29	0.81	0.04
10	4753	96.46	2.69	0.83	0.02
20	4701	96.91	2.26	0.82	0.01

TABELA 19 – $tcpu/\Delta t$ nó e ganhos de $tcpu$ com os subciclos estrutura-fluido

$n_{F/S}$	$tcpu/\Delta t.nó \cdot 10^5$ (s)	Ganho de $tcpu$	
		Estrutura	Total
1	4.822	-	-
5	1.356	1.07	3.56
10	1.101	1.08	4.38
20	0.913	1.09	5.28

TABELA 20 – Dados de eficiência do algoritmo com os subciclos estrutura-fluido

n_{SF}	NIGC	Mflops				
		Fluido	Estrutura	Mov. malha	Interação	Total
1	9.7	710	196	326	147	650
5	14.4	700	193	318	145	680
10	25.0	702	195	319	146	685
20	43.0	706	197	324	146	692

Como a estrutura deste exemplo apresenta deslocamentos relativamente pequenos, todas as análises foram realizadas utilizando o algoritmo de movimento de malha simplificado (ver Cap. 4). Obteve-se os mesmos resultados de deslocamentos ao longo do tempo, em simulações para Mach=2.20 com os algoritmos de movimento de malha completo e simplificado. Isso confirma a expectativa de eficiência do esquema simplificado em problemas com pequenos deslocamentos. Neste exemplo, foram mantidos os mesmos pontos das superfícies móveis e fixas correspondentes a cada nó do interior do domínio, em todos os instantes de tempo. Os dados de comparação de desempenhos obtidos por ambos esquemas estão mostrados nas Tab. 21 e 22. Observando-se a Tab. 21, conclui-se que o ganho de *tcpu* pelo uso do algoritmo simplificado foi de 1.83, mesmo com a queda de Mflops indicada na Tab. 22 (de 888 para 640 Mflops). A razão deste ganho está na diferença do custo computacional que o algoritmo de movimento de malha representa. Enquanto que o algoritmo completo representa 45.82% do *tcpu* total, o algoritmo simplificado apenas 0.74%.

TABELA 21 – *tcpu* dos processos de execução para os algoritmos de movimento de malha

Algoritmo	<i>tcpu</i> (s)	% <i>tcpu</i>			
		Fluido	Estrutura	Mov.malha	Interação
Completo	9450	48.05	6.03	45.82	0.10
Simplificado	5157	88.02	11.06	0.74	0.18

TABELA 22 – Mflops dos algoritmos de movimento de malha

Algoritmo	Mflops				
	Fluido	Estrutura	Mov. malha	Interação	Total
Completo	708	192	1178	146	888
Simplificado	703	195	319	146	640

8.4.3 Painel sujeito aos vórtices de um prisma retangular

Este exemplo exige a habilidade do presente algoritmo em tratar problemas de interação de escoamentos de fluidos viscosos incompressíveis com estruturas sujeitas a grandes deslocamentos. Um painel flexível é fixado em um prisma retangular a jusante de um escoamento ($Re = 332.6$, considerando a aresta do retângulo como comprimento de referência), que desenvolve vórtices, induzindo oscilações na estrutura. O desenho esquemático e as condições de contorno impostas nas superfícies externas do domínio, estão esquematizadas na Fig. 125. Inicialmente, o campo de velocidades é nulo em todo o domínio, com exceção da superfície de entrada na qual são impostas condições de escoamento não perturbado. No painel, é imposta condição de engaste total na extremidade fixada no prisma retangular ($u_x = u_y = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0.0$) e condições de simetria nas extremidades laterais ($w = \theta_x = \theta_y = 0.0$). As propriedades do fluido e do painel estão mostradas na Tab. 23.

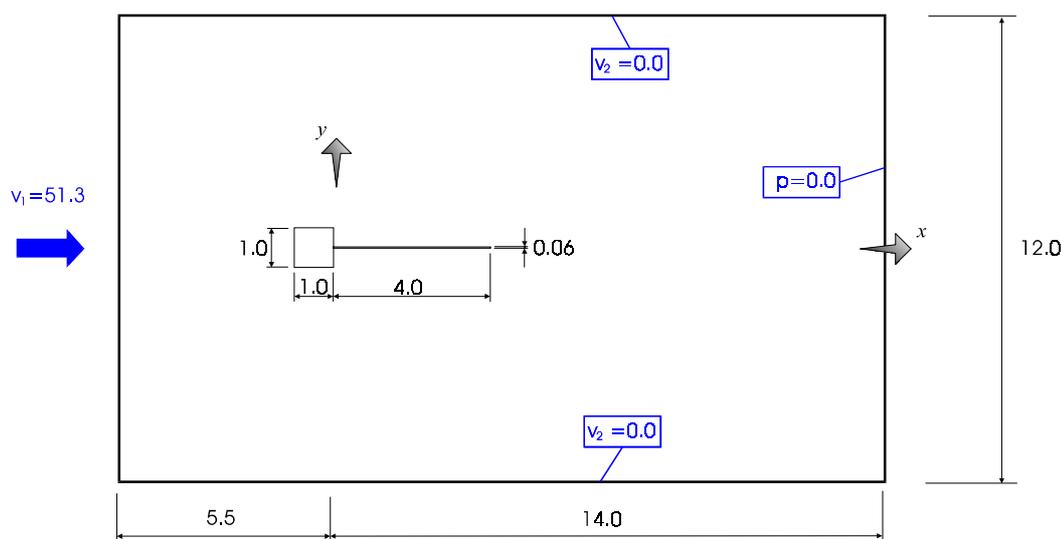


FIGURA 125 – Geometria e condições de contorno do exemplo painel sujeito a vórtices

TABELA 23 – Propriedades do painel e do fluido

Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade E	2.5 MN/cm^2
Coefficiente de Poisson ν	0.35
Massa específica ρ_E	0.1 g/cm^3
Velocidade do som C_∞	34500 cm/s
Massa específica ρ_F	$1.18 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$
Viscosidade cinemática μ	$1.82 \times 10^{-4} \text{ g/cm.s}$

É utilizada uma malha não estruturada de elementos tetraédricos para o domínio do fluido (ver Fig. 126), com apenas uma camada de elementos na direção do eixo z (transversal ao escoamento) por tratar-se de um problema de comportamento 2-D. Esta malha é composta de 6544 nós e 19198 elementos, com maior concentração na região próxima ao prisma e ao painel, resultando em um comprimento mínimo de aresta de elemento igual a 0.1 cm. A malha da estrutura está localizada na linha de centro do painel, com 84 nós e 84 elementos triangulares, como mostra o detalhe da Fig. 127. Assim, a interação com o fluido ocorre nas faces superiores e inferiores dos elementos de contorno.

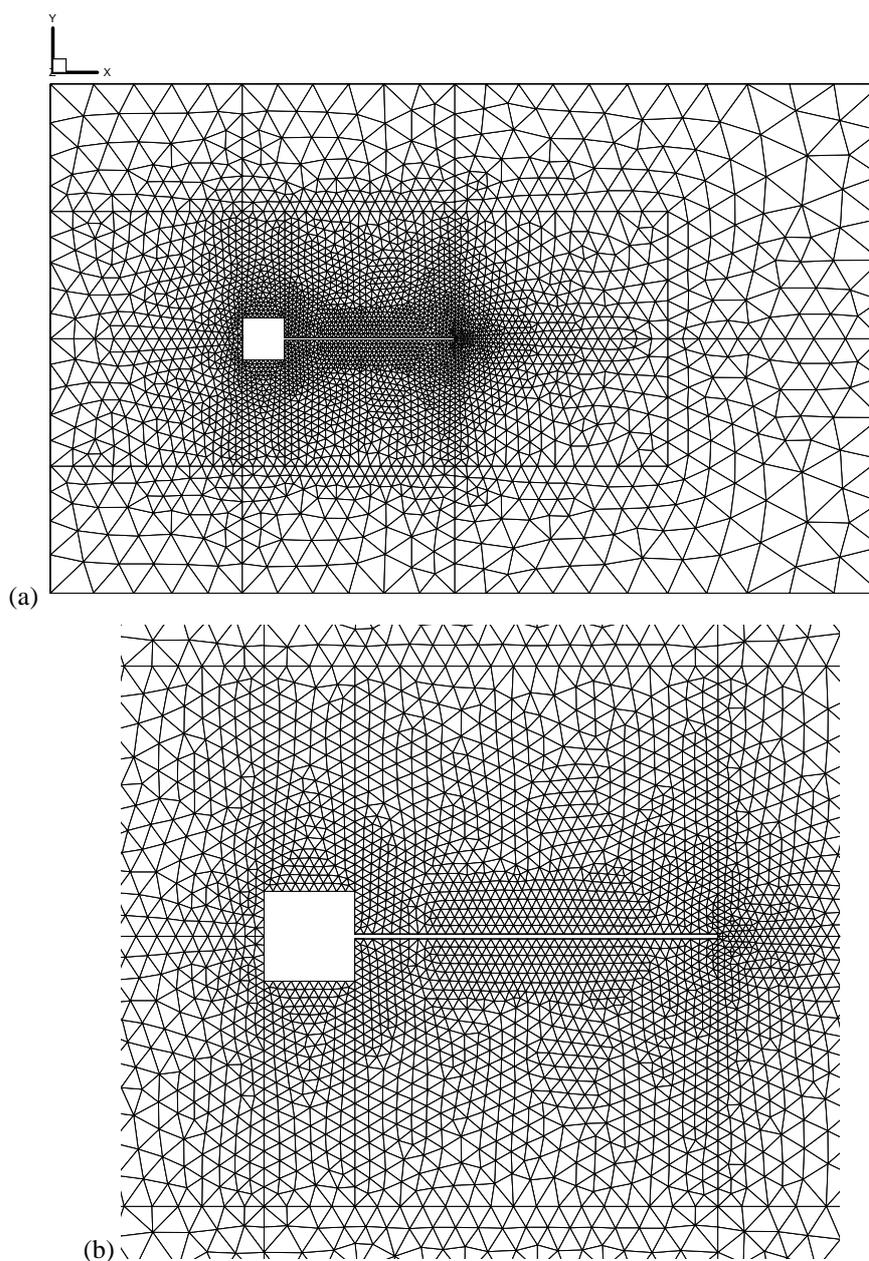


FIGURA 126 – Malha de elementos finitos para o domínio do fluido do exemplo painel sujeito a vórtices. (a) Vista geral e (b) detalhe na região próxima ao prisma e ao painel

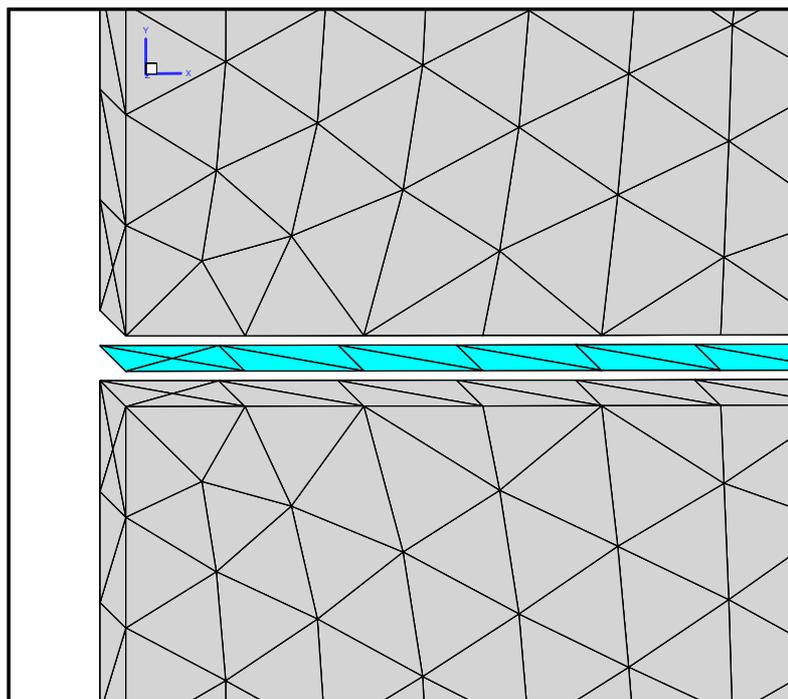


FIGURA 127 – Detalhe da malha da estrutura e do fluido no exemplo painel sujeito a vórtices

A simulação foi feita utilizando um passo de tempo de 3.0×10^{-5} s. Os coeficientes de sustentação C_L e de arrasto C_D no painel ao longo do tempo, estão mostrados na Fig. 128. Os deslocamentos da extremidade livre e o centro da placa estão mostrados nas Fig. 129. Estes resultados são comparados com os obtidos por Wall e Ramm (1998) em 2-D (ver Fig. 130 e 131), onde utilizam para o domínio do fluido uma malha de 6340 elementos quadriláteros do tipo Q1Q1, o método de elementos finitos estabilizado no espaço e uma discretização temporal baseada no esquema θ de um passo. A estrutura é construída com 20 elementos quadriláteros de 9 nós (tensões planas), utilizando o método α -generalizado e o esquema iterativo de Newton-Raphson. Nota-se que os deslocamentos obtidos pelo presente trabalho, estão próximos aos encontrados pela Referência, embora apresentem alguma defasagem que tende a aumentar com o tempo. No entanto, como cada trabalho utilizou esquemas e malhas diferentes, torna-se difícil estabelecer as razões de tais diferenças. A Fig. 132 mostra as configurações da malha nos instantes $t = 3.58701$ s, 3.68301 s, 3.765 s e 3.85899 s, comprovando os excelentes resultados do esquema de movimento de malha adotado. As Fig. 133 e 134 apresentam as distribuições de pressão e das linhas de corrente, respectivamente, no domínio do fluido nos mesmos instantes de tempo citados acima. Um detalhe dos vetores de velocidade em uma região próxima à ponta do painel em $t = 3.58701$ s está mostrada na Fig. 135.

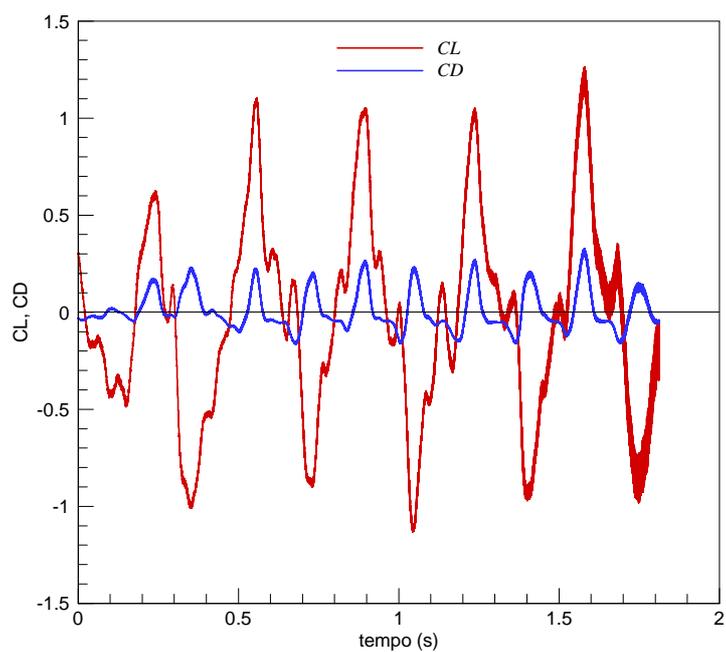


FIGURA 128 – Coeficientes de sustentação C_L e de arrasto C_D no painel ao longo do tempo

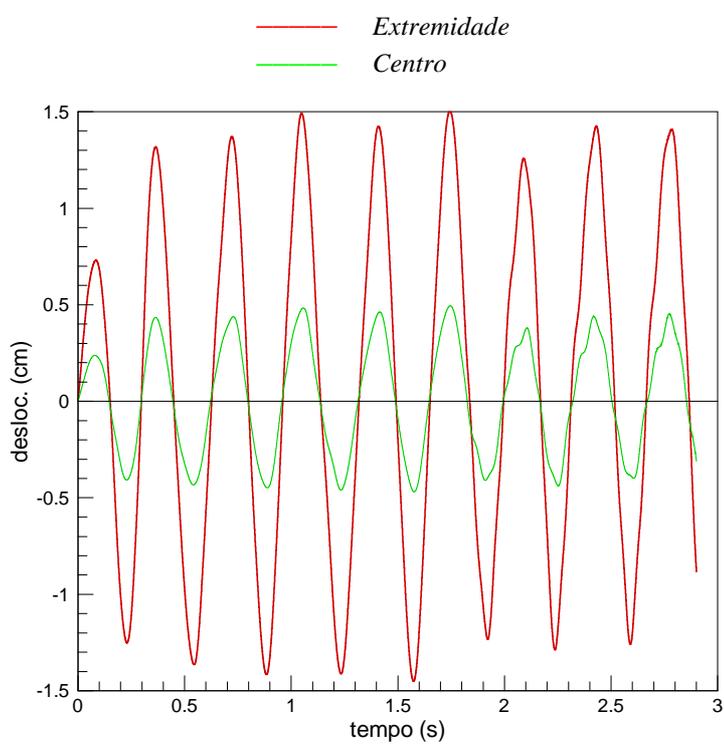


FIGURA 129 – Deslocamentos na extremidade livre e no centro do painel ao longo do tempo

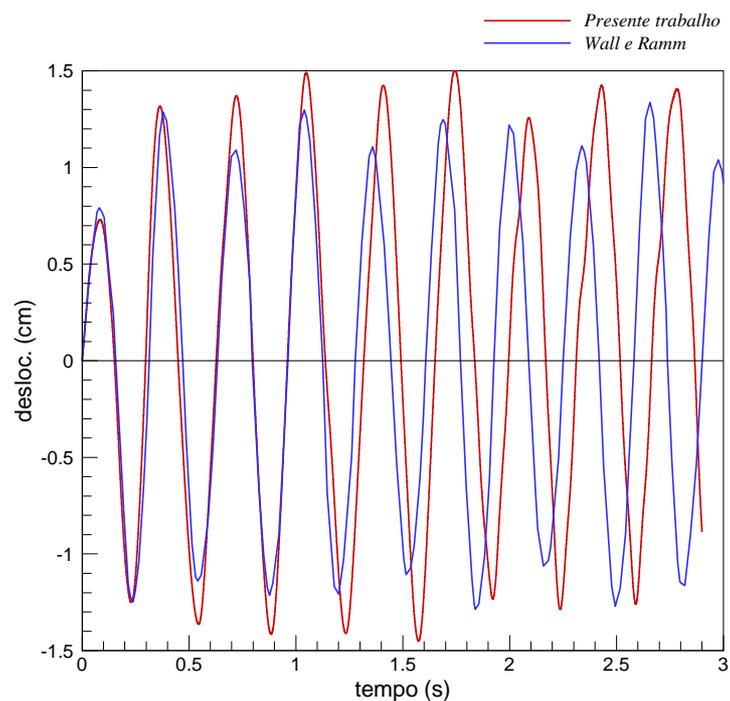


FIGURA 130 – Comparação entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e por Wall e Ramm (1998), para o deslocamento na extremidade do painel

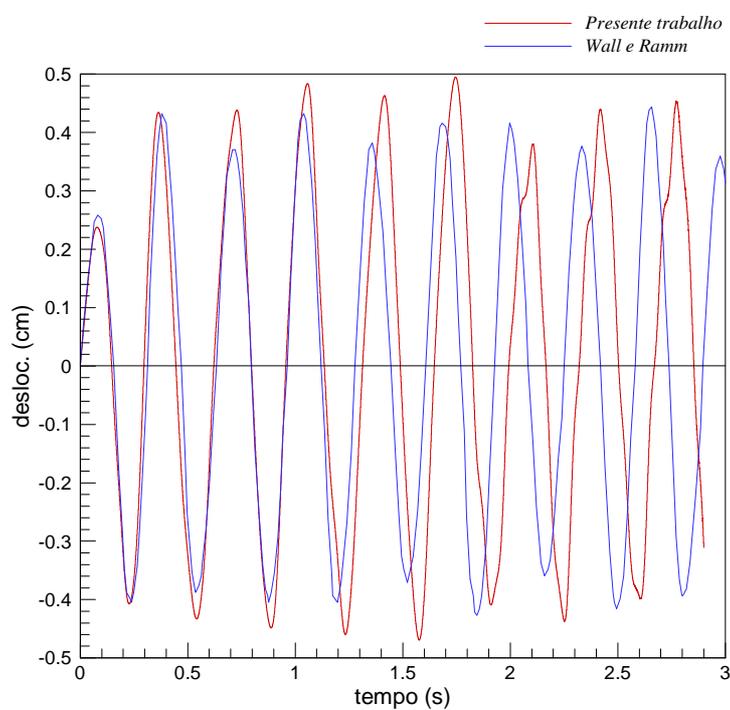


FIGURA 131 – Comparação entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e por Wall e Ramm (1998), para o deslocamento no centro do painel

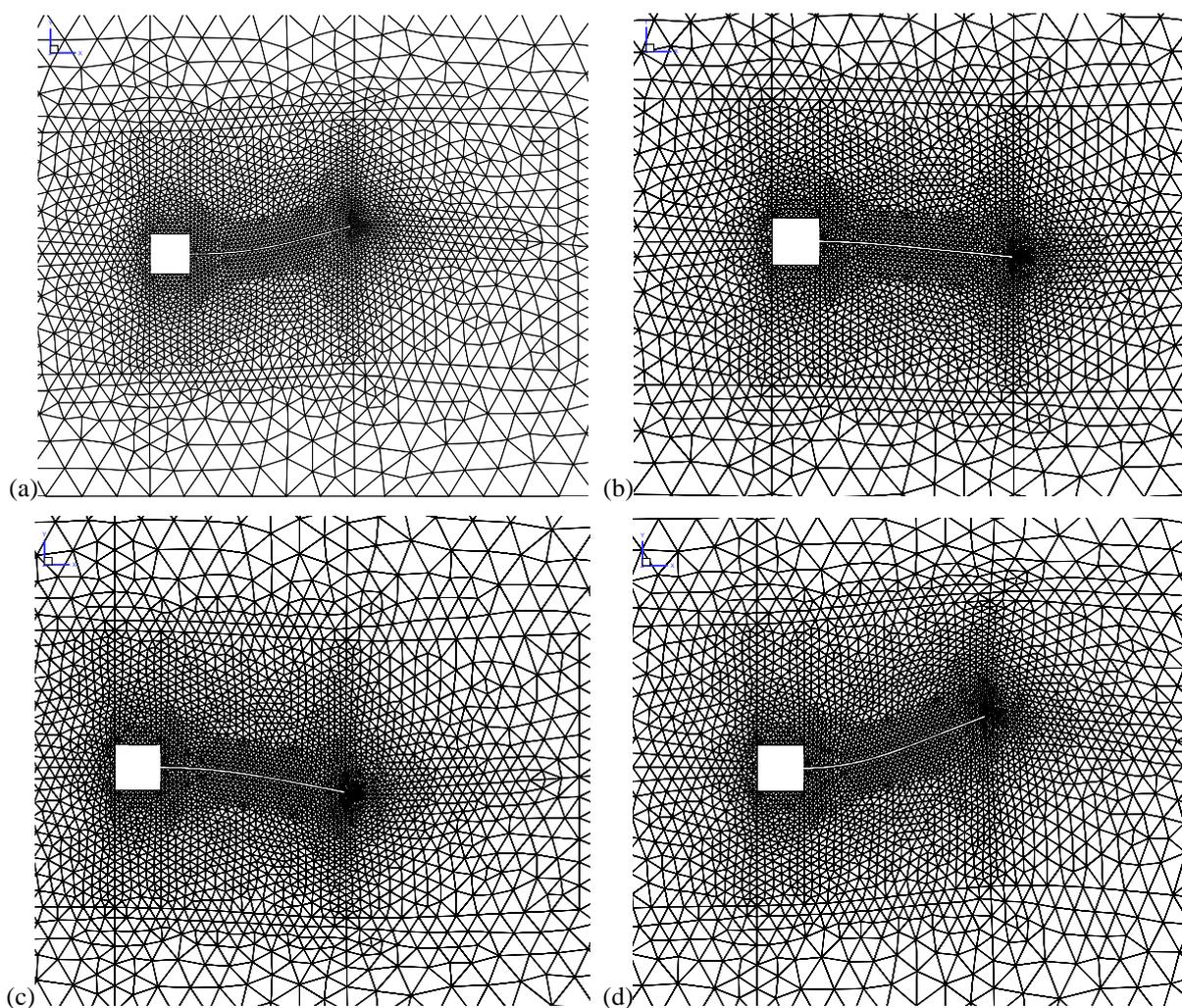
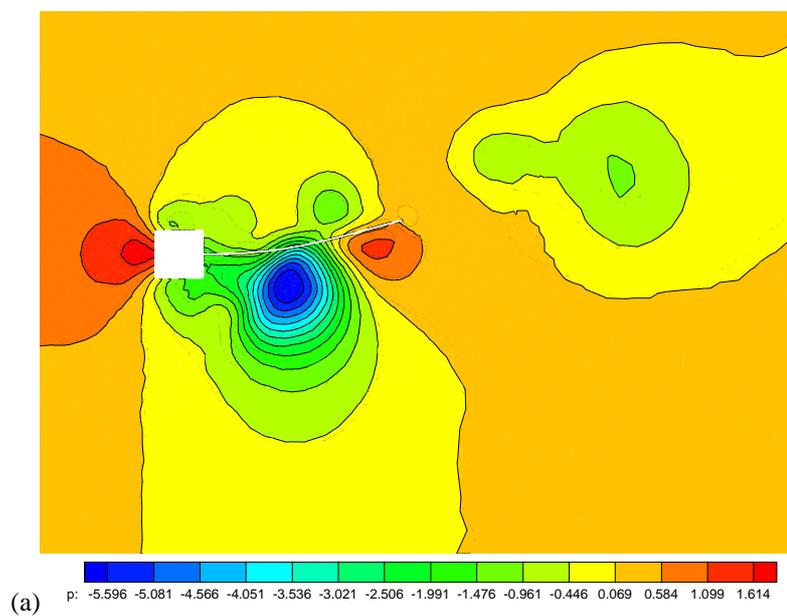


FIGURA 132 – Configurações da malha nos instantes (a) 3.58701 s, (b) 3.68301 s, (c) 3.765 s e (d) 3.85899 s para o exemplo painel sujeito a vórtices.



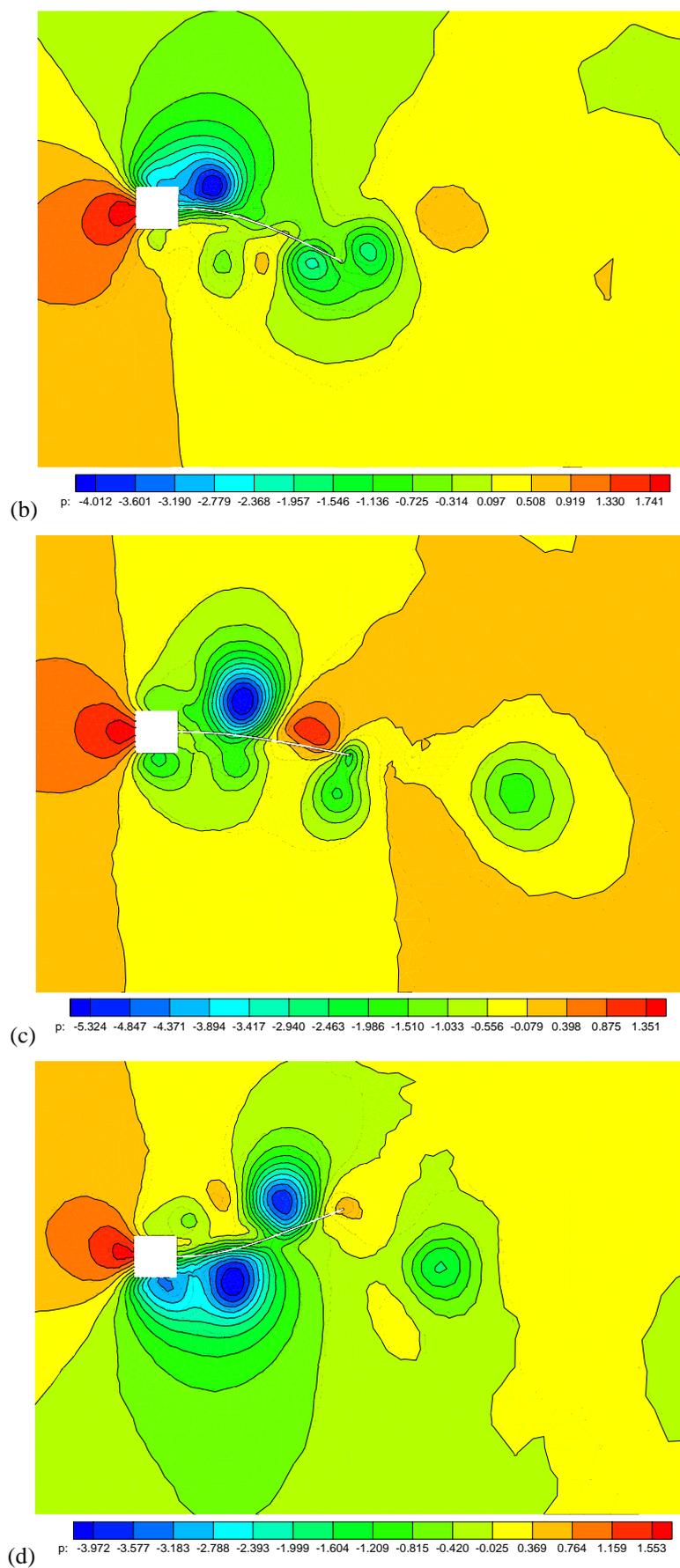
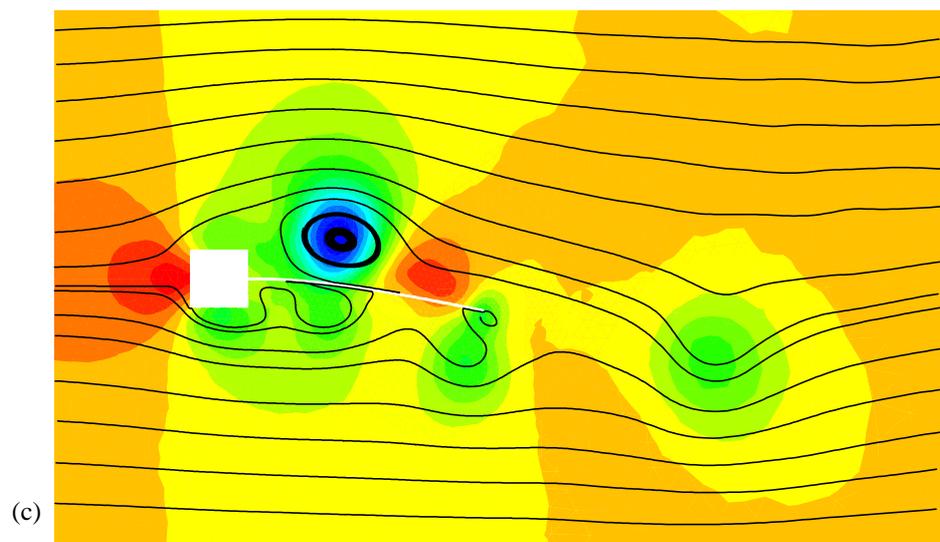
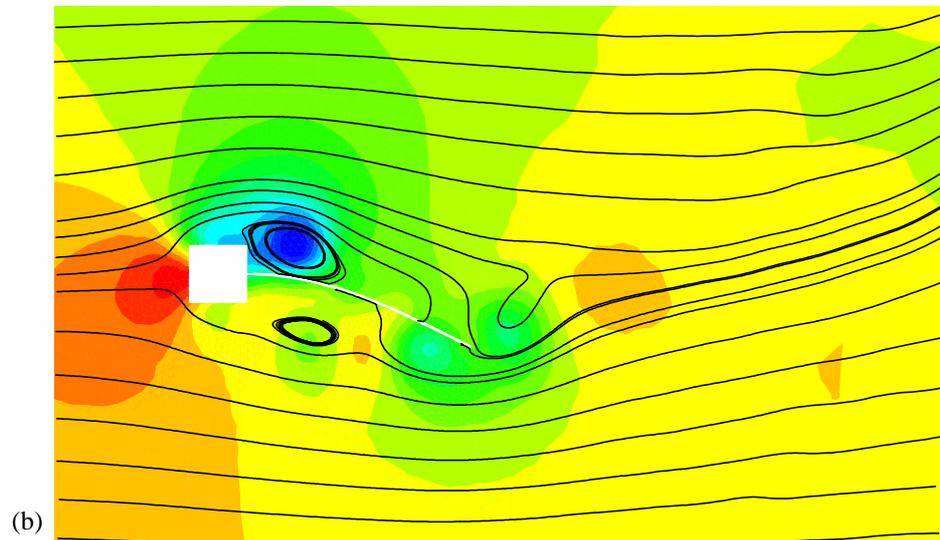
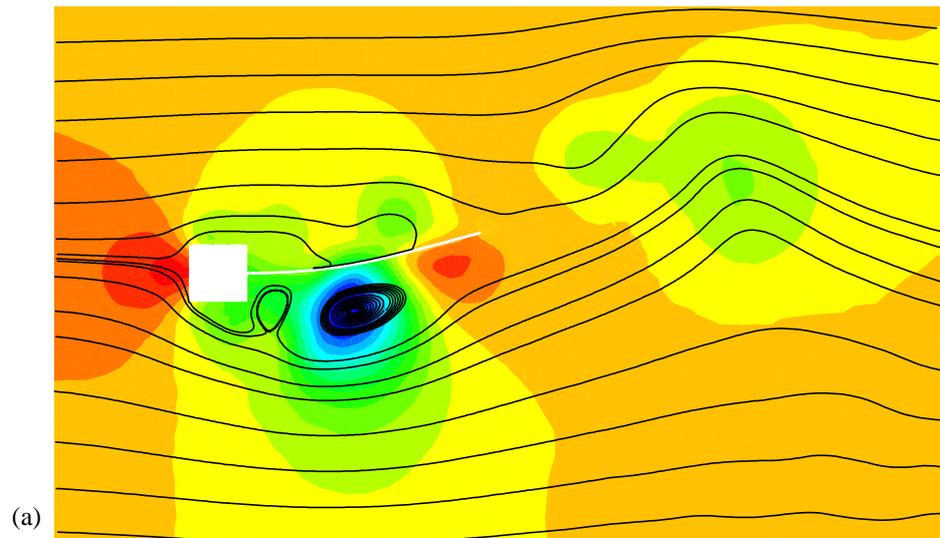


FIGURA 133 – Distribuições de pressão nos instantes (a) 3.58701 s, (b) 3.68301 s, (c) 3.765 s e (d) 3.85899 s para o exemplo painel sujeito a vórtices



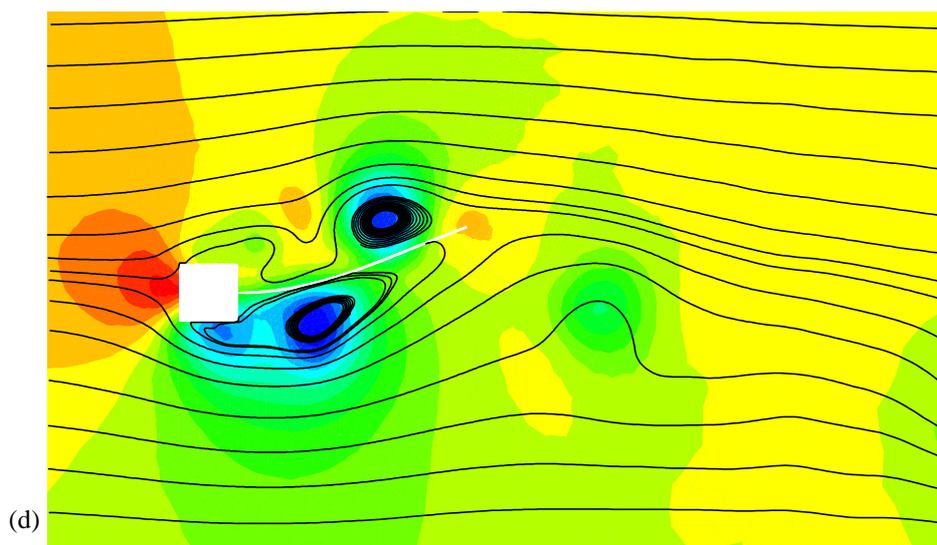


FIGURA 134 – Linhas de corrente nos instantes (a) 3.58701 s, (b) 3.68301 s, (c) 3.765 s e (d) 3.85899 s para o exemplo painel sujeito a vórtices

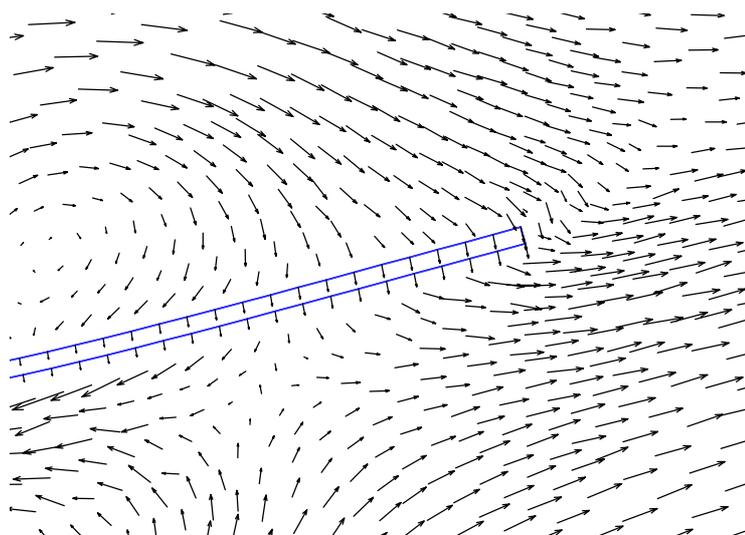


FIGURA 135 – Detalhe dos vetores de velocidade no instante $t = 3.58701$ s para o exemplo painel sujeito a vórtices

8.4.4 Escoamento do ar sobre uma membrana inflada

A interação entre o escoamento do ar e uma membrana inflada flexível é tratada neste exemplo. A membrana tem um formato semi-cilíndrico de raio igual a 10 m e espessura $h = 3.0$ mm, conforme mostra o esquema da Fig. 136. O contorno externo do domínio é composto pela superfície de um semi-cilindro de raio igual a 200 m. É prescrito em todo o contorno externo do domínio um perfil de velocidade em função da altura do solo e

referenciado à velocidade v_{10} , a 10 m de distância do solo. Neste contorno, a velocidade v_{10} varia com o tempo desde 0 até 28 m/s, passando por um período de velocidade constante de 14 m/s, segundo mostra o gráfico da Fig. 136. As mudanças da função da velocidade com o tempo que ocorrem nos instantes $t = 0, 3, 6$ e 9 s são suavizadas utilizando uma função senoidal quadrática. Uma pressão de referência $p = 0$ é imposta a 200 m de altura na superfície de contorno externo do domínio. As propriedades do ar e da membrana estão representadas na Tab. 24. A pressão interna da membrana p_o , que a mantém inflada, é igual a 60% da pressão de estagnação do ar a uma velocidade de 28 m/s ($p_o = 285.0$ Pa).

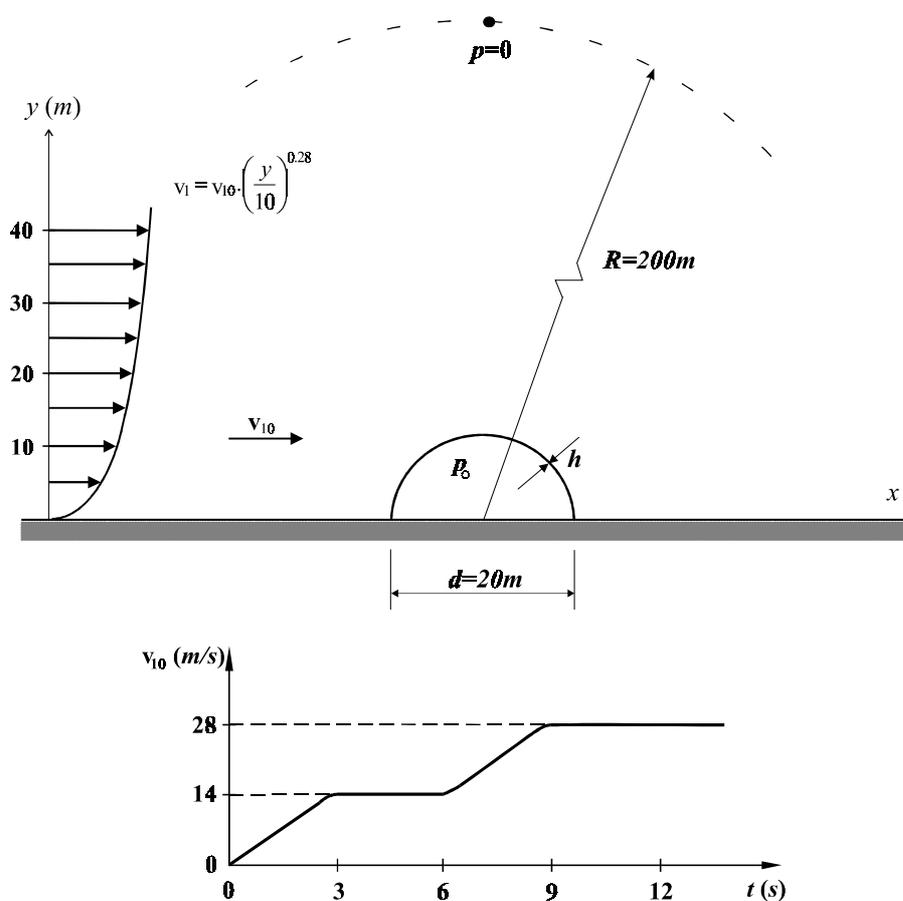


FIGURA 136 – Esquema do domínio e gráfico da velocidade v_{10} com o tempo para o exemplo membrana

TABELA 24 – Propriedades do ar e da membrana

Propriedades do ar	Valor	Propriedades da membrana	Valor
Velocidade do som C_∞	345 m/s	Módulo de Elasticidade E	3.333×10^8 N/m ²
Viscosidade cinemática μ	17.9×10^{-6} Pa.s	Coefficiente de Poisson ν	0.0
Massa específica ρ_F	1.21 Kg/m ³	Massa específica ρ_E	1000.0 Kg/m ³

A existência do ar no interior da membrana implica o uso de um amortecimento viscoso para a estrutura. Utiliza-se o amortecimento de Rayleigh, cujos parâmetros $\alpha=0.003529$ e $\beta=0.443162$ foram determinados adotando-se para os coeficientes de amortecimento das duas primeiras frequências naturais os valores: $\xi_1=1.0\%$ e $\xi_2=2.0\%$, respectivamente. As frequências naturais foram determinadas através de simulação numérica (ANSYS), obtendo-se 0.0551 rad/s para a primeira frequência e 0.0960 rad/s para a segunda.

A malha não-estruturada do fluido é composta de 7097 nós e 20550 elementos tetraédricos, conforme mostra a Fig. 137. Cada semi-círculo, formado pela membrana com os planos xy , possui 60 divisões. A malha da estrutura possui 124 nós e 124 elementos triangulares, coincidentes com as faces dos tetraedros de interface fluido-estrutura.

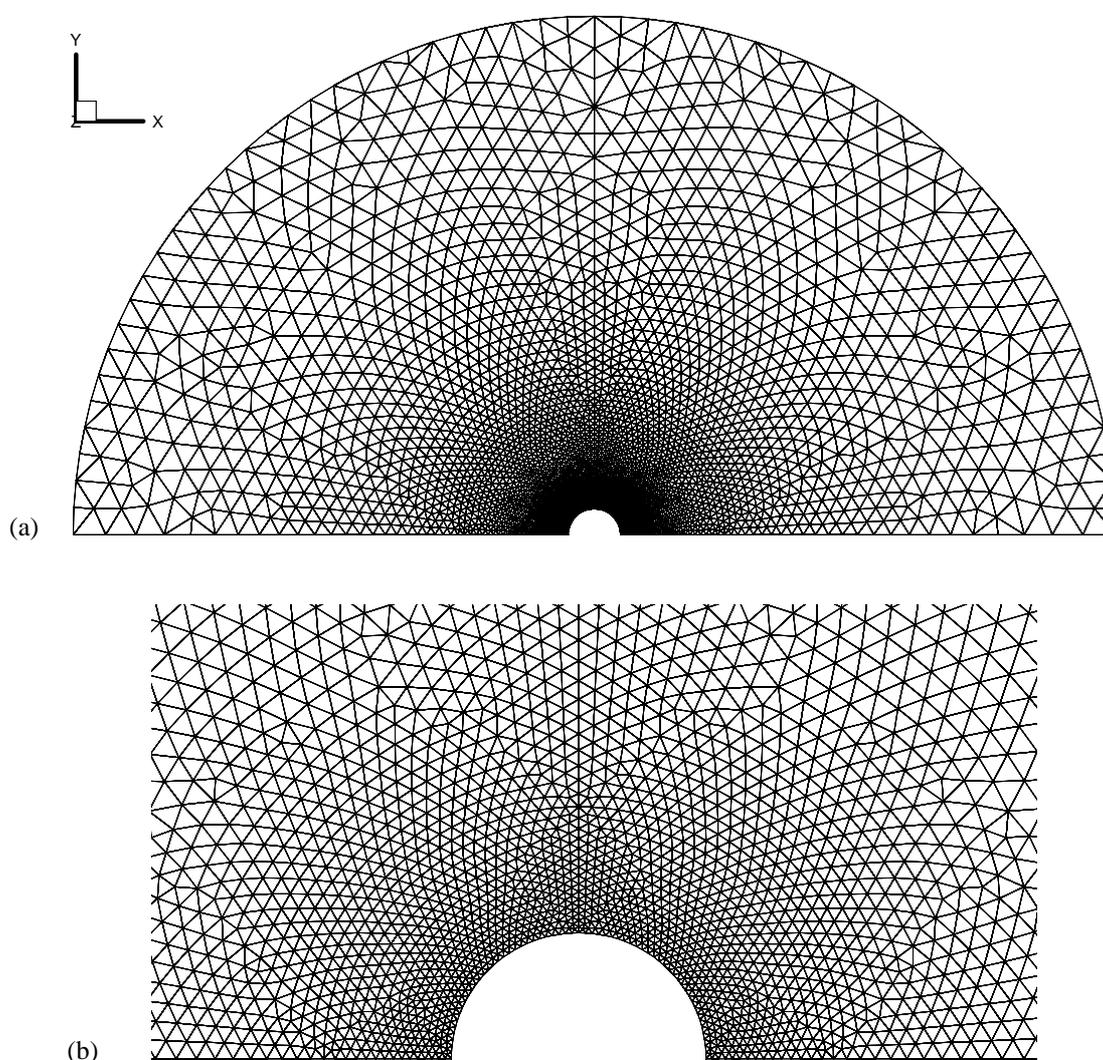


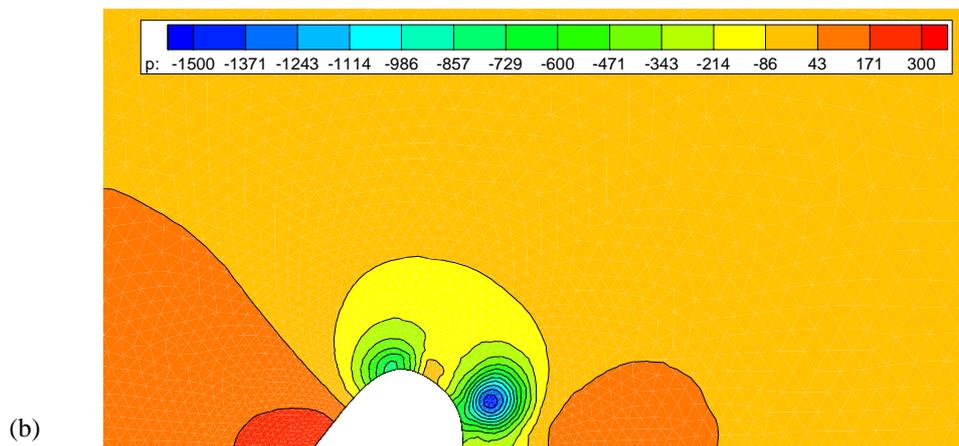
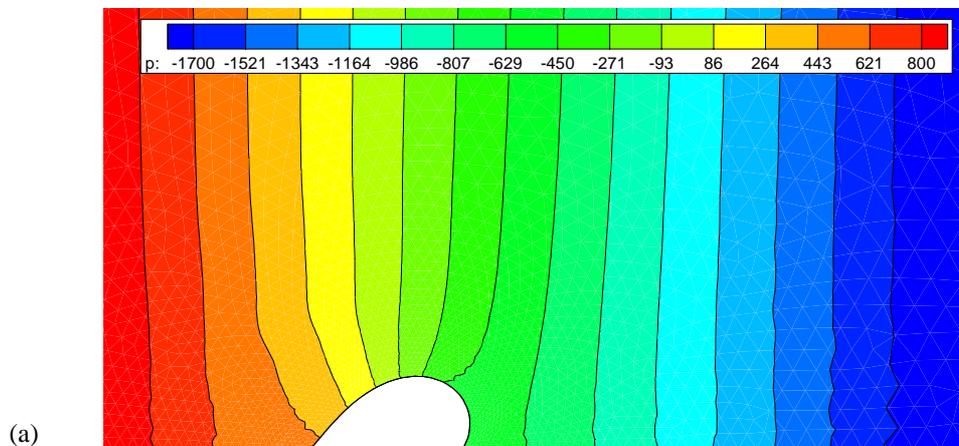
FIGURA 137 – Malha de elementos finitos para o exemplo membrana. (a) Vista geral e (b) detalhe da região próxima à membrana

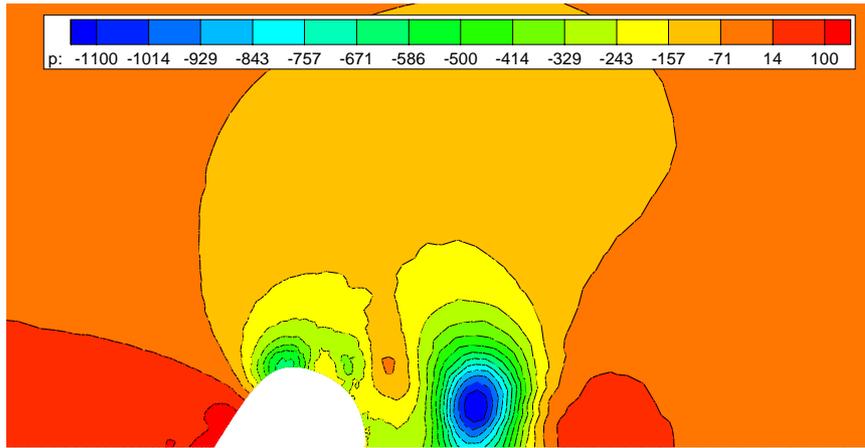
Como o número de Reynolds é relativamente elevado ($Re = 3.78 \times 10^7$, considerando a velocidade de referência igual a 28 m/s e o diâmetro da membrana $d = 20$ m, como o comprimento de referência) utilizou-se um modelo algébrico simples de turbulência (Mittal e Tezduyar, 1995). Nesse modelo, a viscosidade cinemática μ é aumentada por uma viscosidade adicional μ_T (*eddy viscosity*) dada por:

$$\mu_T = (Kl)^2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) : \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}, \quad (162)$$

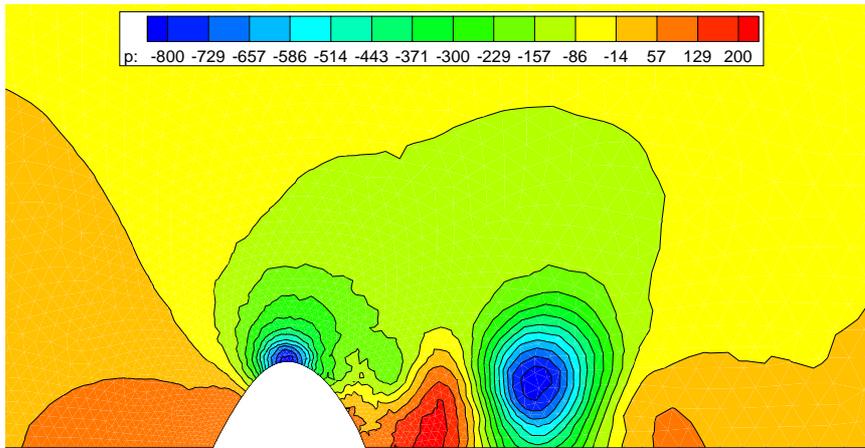
onde $K = 0.41$ é a constante de Von Karman e l é a menor distância entre o ponto de interesse e a parede mais próxima.

Utilizando-se um passo de tempo adimensional para o fluido de 0.0035 e um passo de tempo para a estrutura de 0.000125 s, obteve-se os resultados de distribuição de pressão e dos vetores de velocidade nos instantes $t = 1.5, 3.0, 6.0, 7.5, 9.0, 10.5$ e 12.0 s, apresentados nas Fig. 138 e 139, respectivamente. A configuração da malha do fluido nestes instantes de tempo são mostradas na Fig. 140.

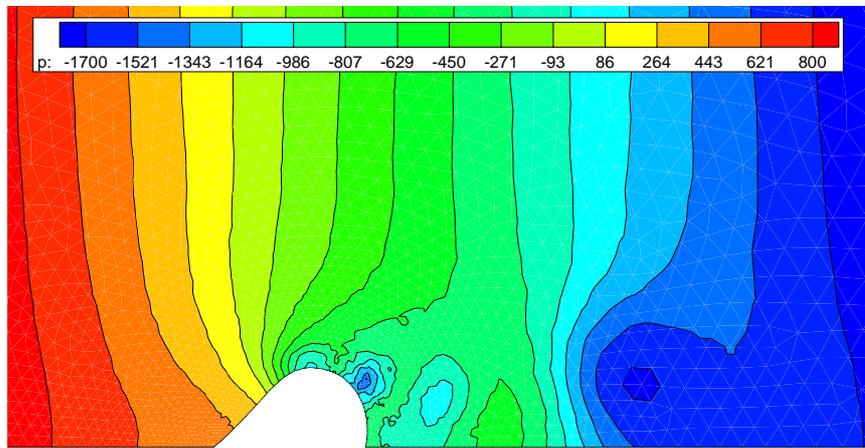




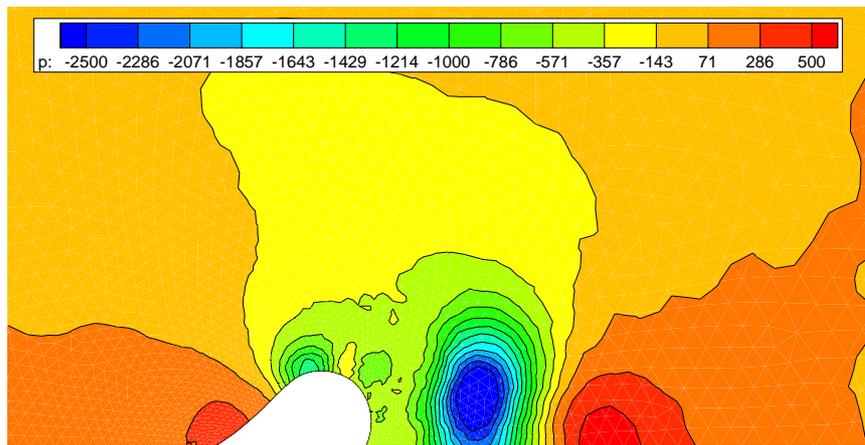
(c)



(d)



(e)



(f)

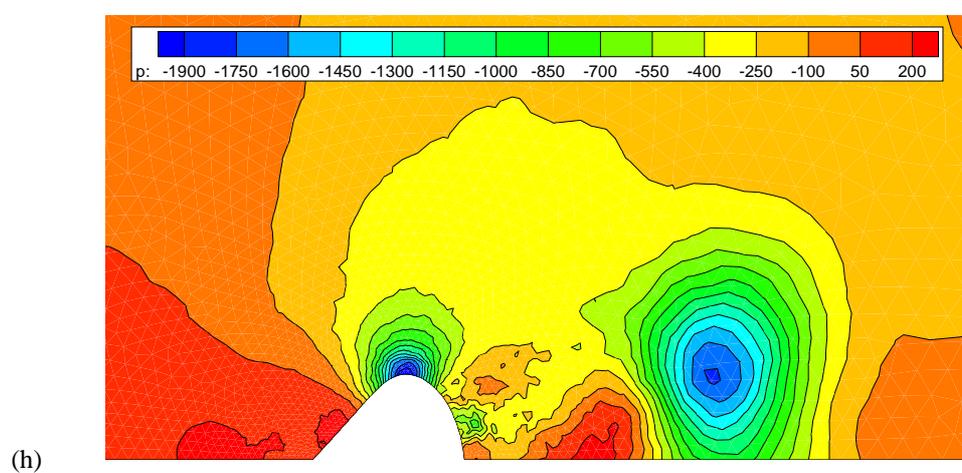
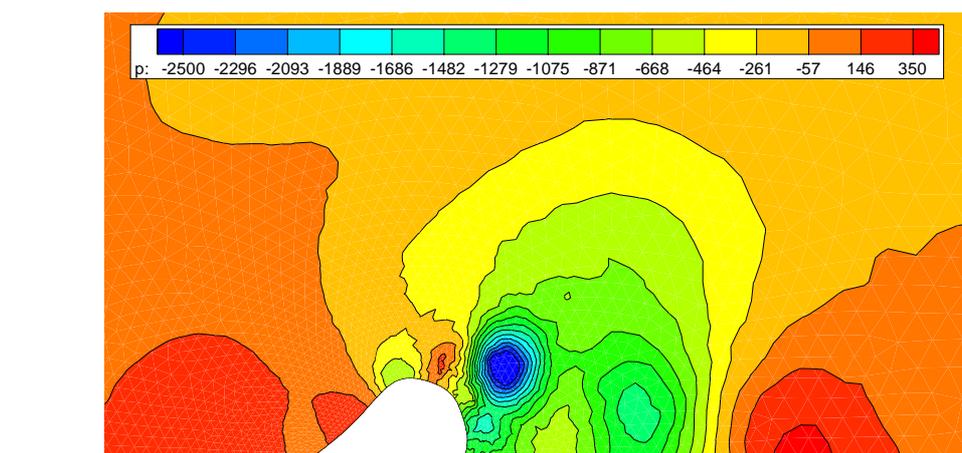
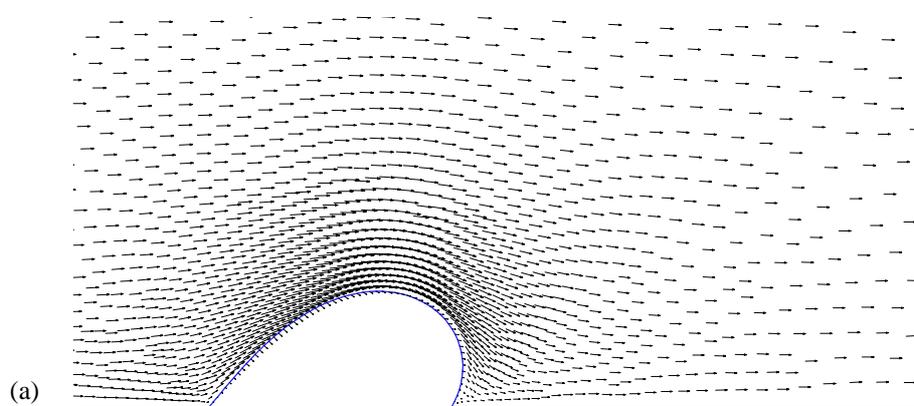
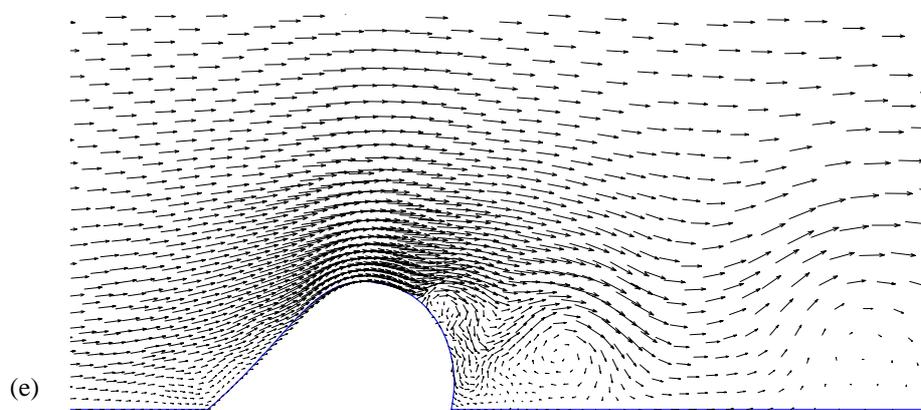
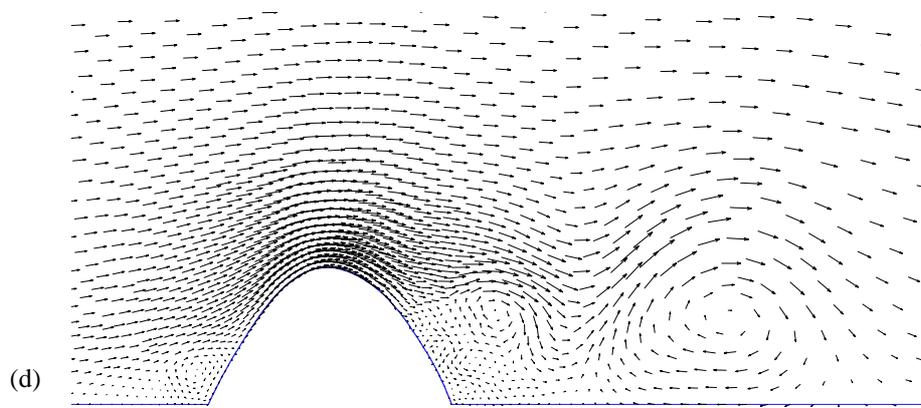
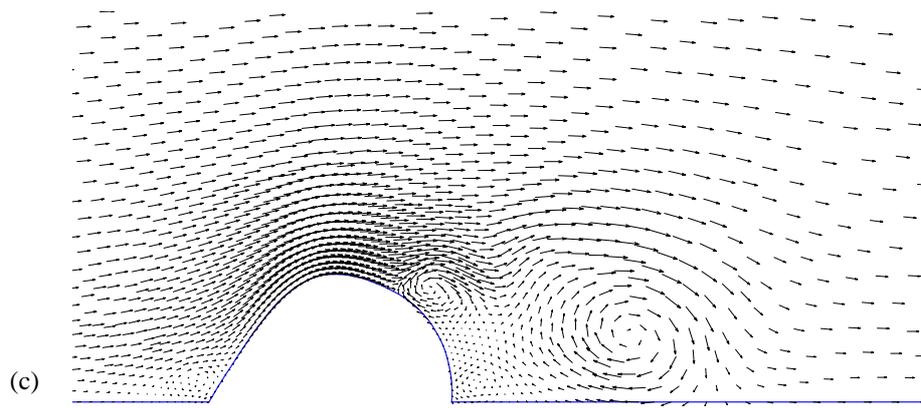
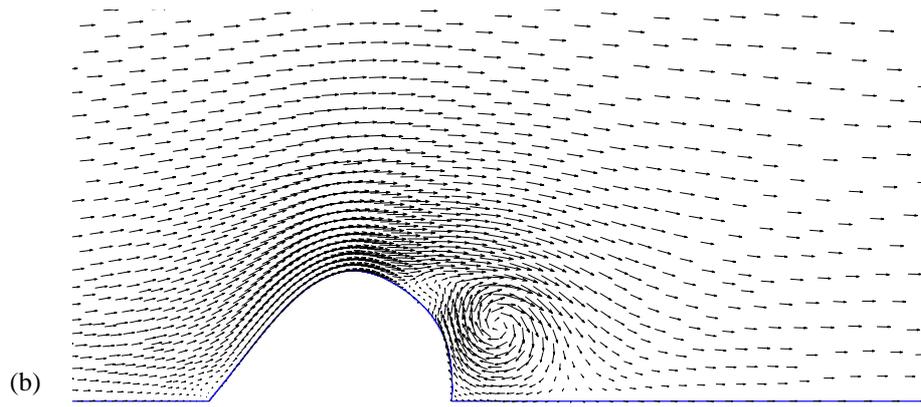


FIGURA 138 – Distribuição de pressão nos instantes (a) 1.5 s, (b) 3.0 s, (c) 4.5 s, (d) 6.0 s, (e) 7.5 s, (f) 9.0 s, (g) 10.5 s e (h) 12.0 s para o exemplo membrana





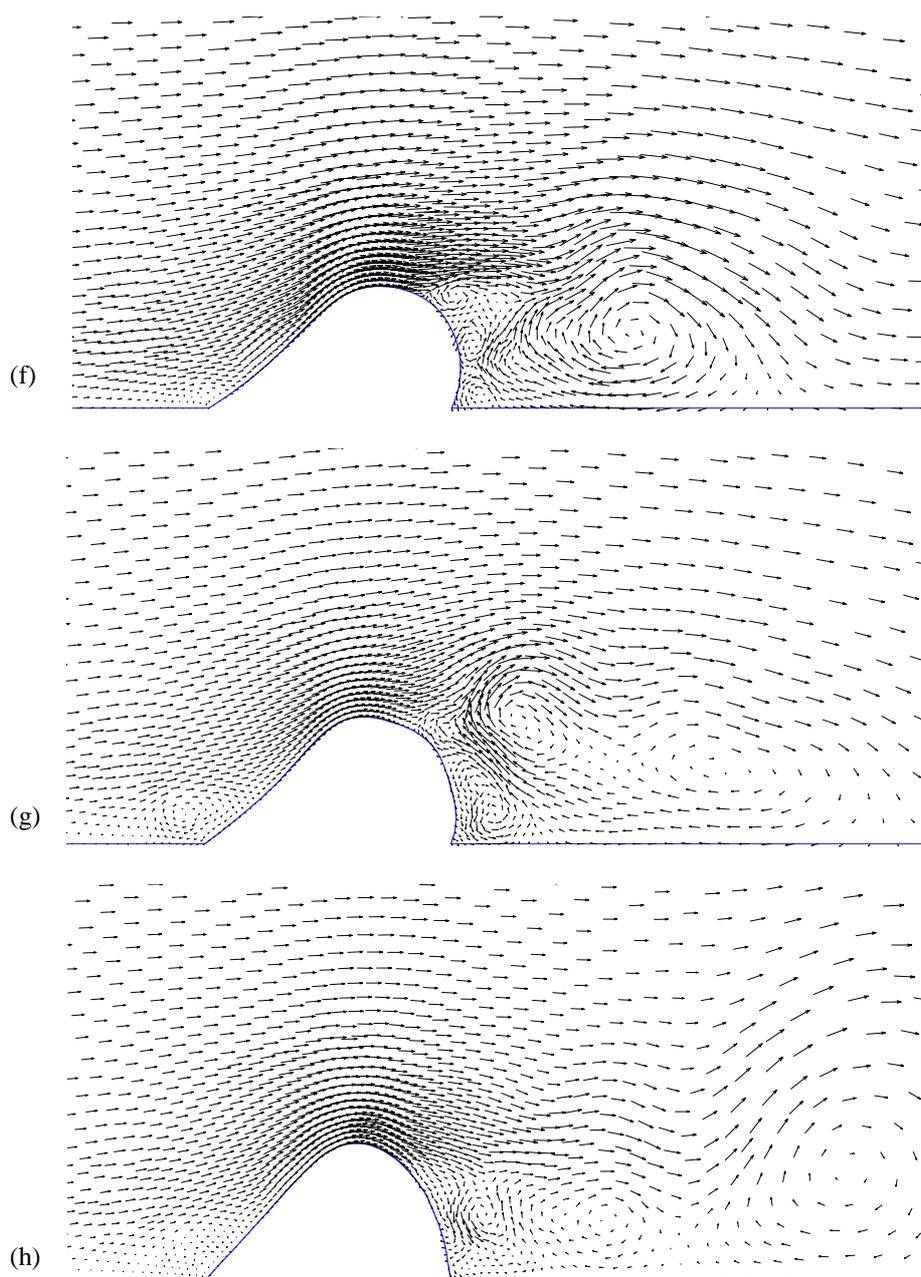
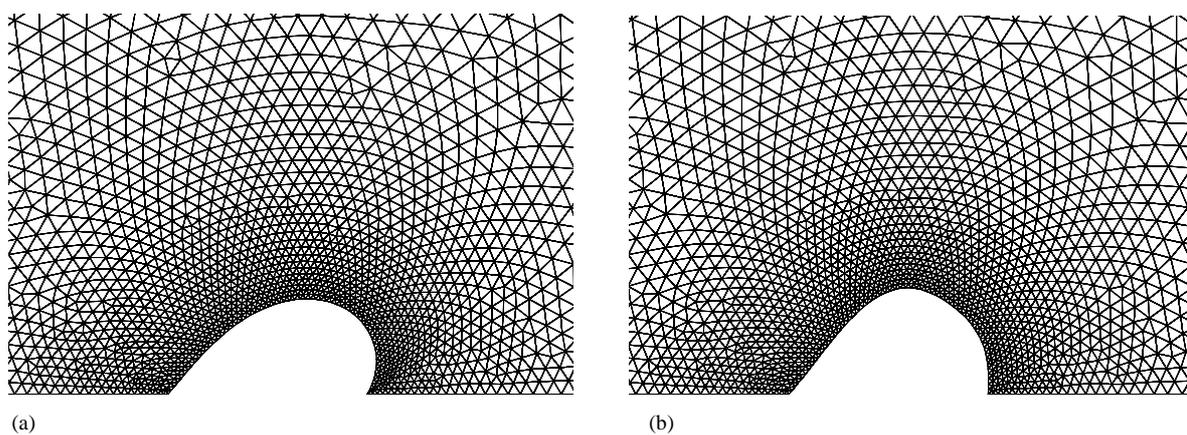


FIGURA 139 – Vetores de velocidade nos instantes (a) 1.5 s, (b) 3.0 s, (c) 4.5 s, (d) 6.0 s, (e) 7.5 s, (f) 9.0 s, (g) 10.5 s e (h) 12.0 s para o exemplo membrana



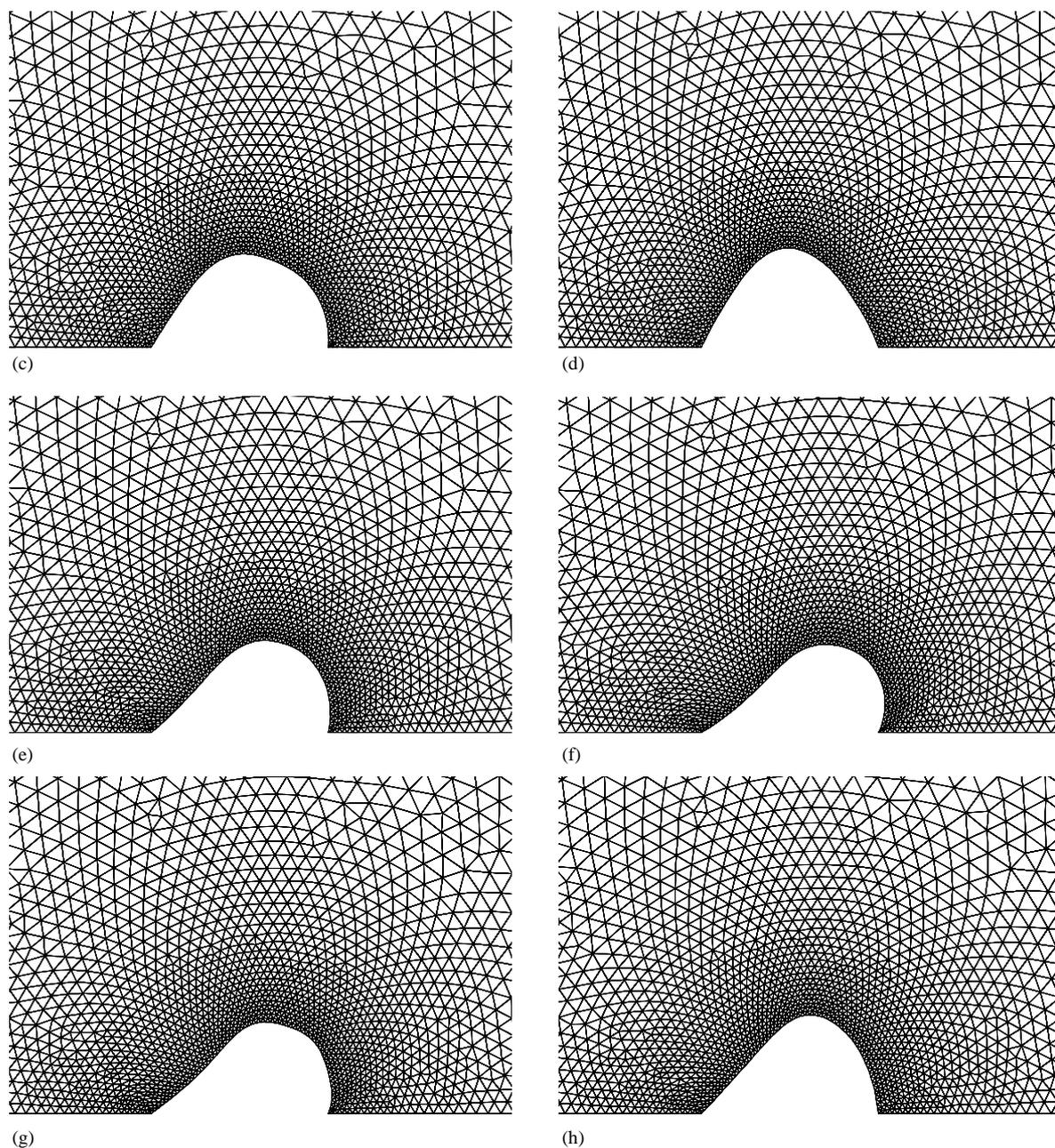


FIGURA 140 – Configurações da malha do fluido nos instantes (a) 1.5 s, (b) 3.0 s, (c) 4.5 s, (d) 6.0 s, (e) 7.5 s, (f) 9.0 s, (g) 10.5 s e (h) 12.0 s para o exemplo membrana

Argyris *et al.* (1985) simularam este problema em 2-D, utilizando para o fluido uma malha com 525 nós e 504 elementos planos de quatro nós (24 divisões na membrana), um esquema com integração reduzida e com funções de penalidade. A presença do fluido no interior da membrana é considerada pela adição da massa de ar na massa específica da estrutura. Os vetores de velocidade e a distribuição de pressão para alguns instantes de tempo obtidos pela Referência, são mostrados nas Fig. 141 e 142. Observa-se que as configurações da membrana obtidas pelo presente trabalho a cada instante de tempo são semelhantes às apresentadas por Argyris *et al.* (1985). No entanto, percebe-se, pelas distribuições de pressão

e de vetores de velocidade no domínio, que este trabalho capturou vórtices a jusante da membrana ao longo do tempo que a citada Referência não evidencia, possivelmente devido ao uso de uma malha pouco refinada para as características do problema.

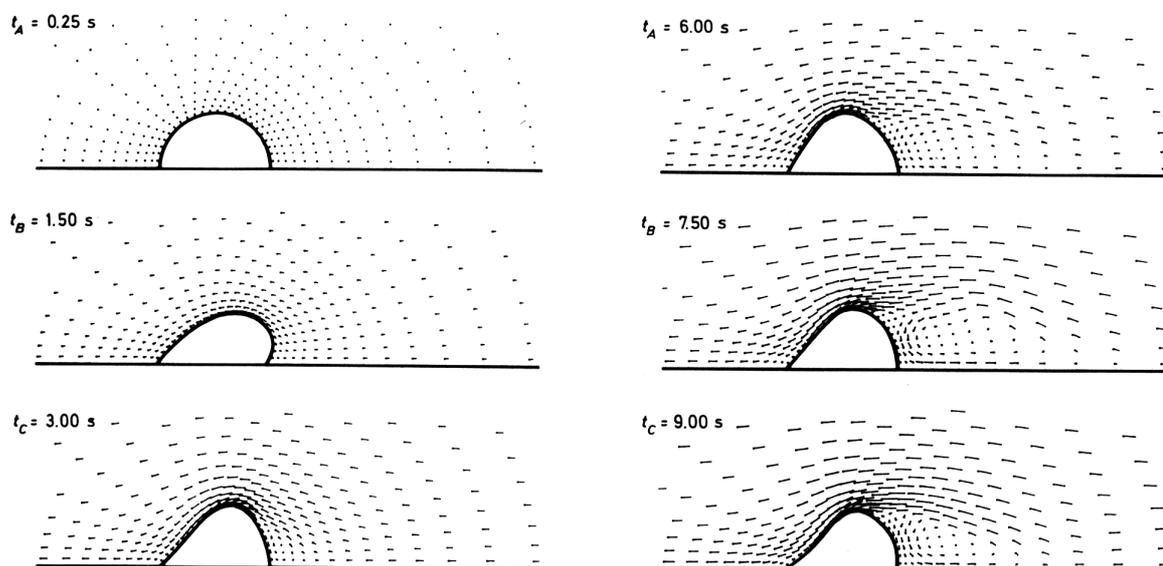


FIGURA 141 – Vetores de velocidade nos instantes $t = 0.25, 1.5, 3.0, 6.0, 7.5$ e 9.0 s obtidos por Argyris *et al.* para o exemplo membrana

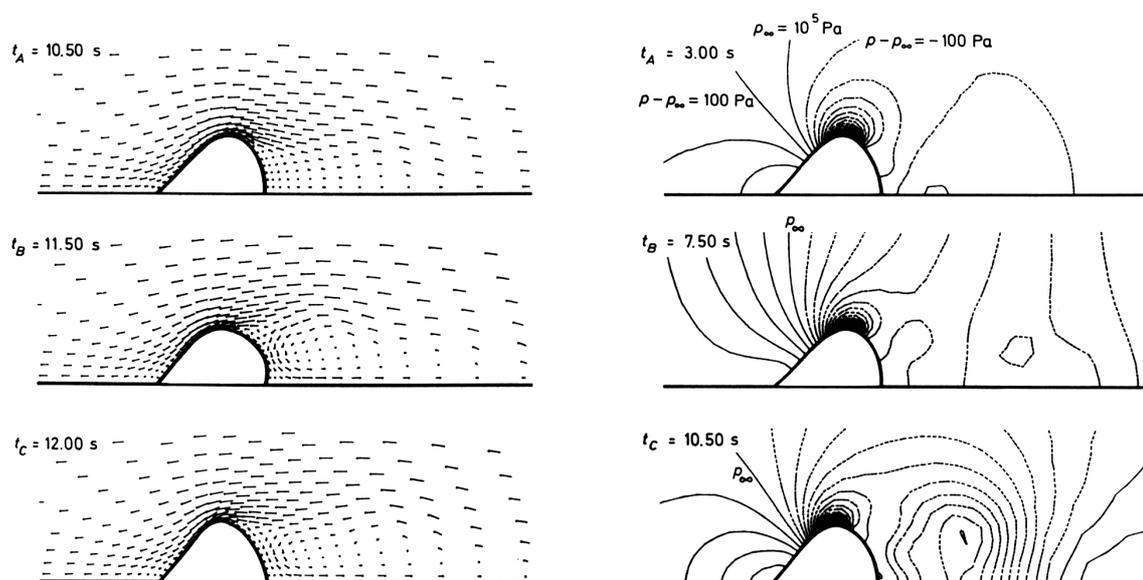


FIGURA 142 – Vetores de velocidade nos instantes $t = 10.5, 11.5$ e 12.0 s e distribuição de pressão nos instantes $t = 3.0, 7.5$ e 10.5 s obtidos por Argyris *et al.* para o exemplo membrana

8.4.5 Escoamento sobre um cone

Este problema trata do escoamento de um fluido viscoso em regime supersônico ($Mach=3.0$) com um ângulo de ataque de 20° sobre um cone deformável ($Re=6.94 \times 10^5$, considerando a altura do cone como comprimento de referência), como mostra o esquema da Fig. 143. A simulação é realizada sobre a metade do domínio, devido à simetria do problema. O contorno externo do domínio é composto pela superfície externa de um cilindro de raio igual a 1.0 m e de altura 1.5 m e pelo plano de simetria xy . O cone tem 1 m de altura e um ângulo de geratriz de 20° . É engastado na sua base e feito de chapa de aço (ver propriedades do material na Tab. 25) de 0.001 m de espessura. No seu interior, existem chapas de reforço de mesmo material, com 0.002 m de espessura, distribuídos conforme apresenta a Fig. 144. Um problema semelhante foi analisado por Cebal e Löhner (1998), considerando os efeitos térmicos sobre a estrutura através da solução de uma equação de calor para a mesma.

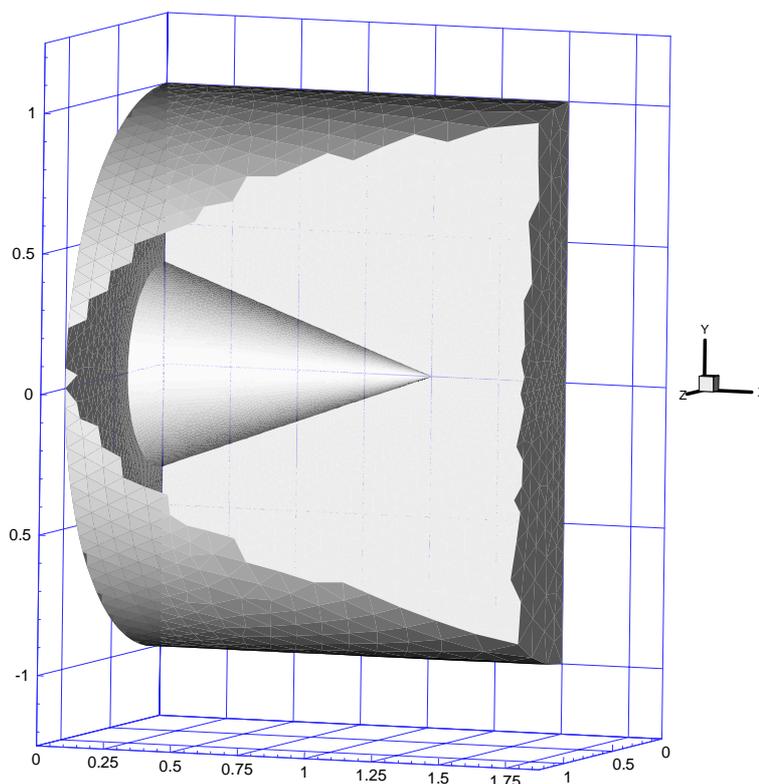


FIGURA 143 – Esquema do domínio computacional do exemplo cone

TABELA 25 – Propriedades do cone

Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade E	200 GPa
Coefficiente de Poisson ν	0.31
Massa específica ρ_E	7840 Kg/m ³

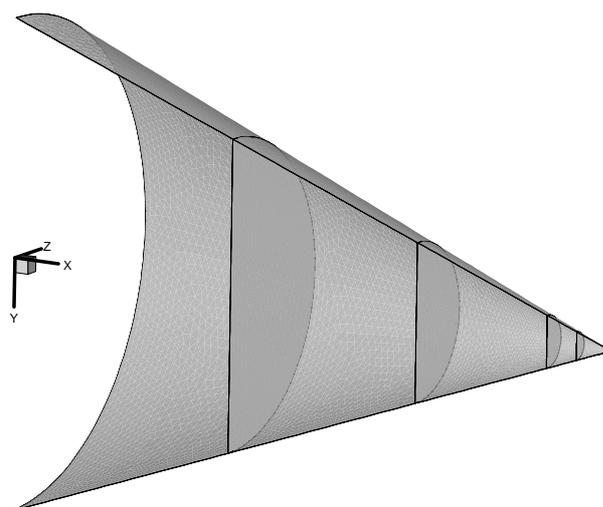


FIGURA 144 – Esquema da estrutura do corpo do cone

São impostas para o fluido, as condições de contorno de simetria no plano xy , a condição de entrada nas outras superfícies externas, com exceção do plano yz em $x = 0$, no qual a condição é de saída livre. Na superfície de interface fluido-estrutura, são impostas as condições expressas pelas Eq. (131) e (132). As propriedades do fluido estão mostradas na Tab. 26.

TABELA 26 – Propriedades do fluido no exemplo cone

Propriedade	Valor	Propriedade	Valor
Massa específica ρ_F	1.25 Kg/m ³	Pressão p_∞	10 ⁵ Pa
Viscosidade cinemática μ	1.8.x.10 ⁻³ Kg/m.s	Temperatura T_∞	273 K
Calor específico C_p	1000 J/Kg.°K	Velocidade do som C_∞	333.33 m/s
Número de Prandtl Pr	0.71		

É utilizada uma malha não estruturada de elementos tetraédricos para o domínio do fluido com 58999 nós e 327806 elementos, conforme mostra a Fig. 145. Na região da ponta do cone, a altura dos tetraedros está em torno de 1.4 mm, valor da ordem de grandeza esperada para a altura da camada limite. A malha de triângulos da estrutura coincide com as faces dos tetraedros de interface do fluido, sendo composta de 5786 nós e 11280 elementos, como apresenta a Fig. 146.

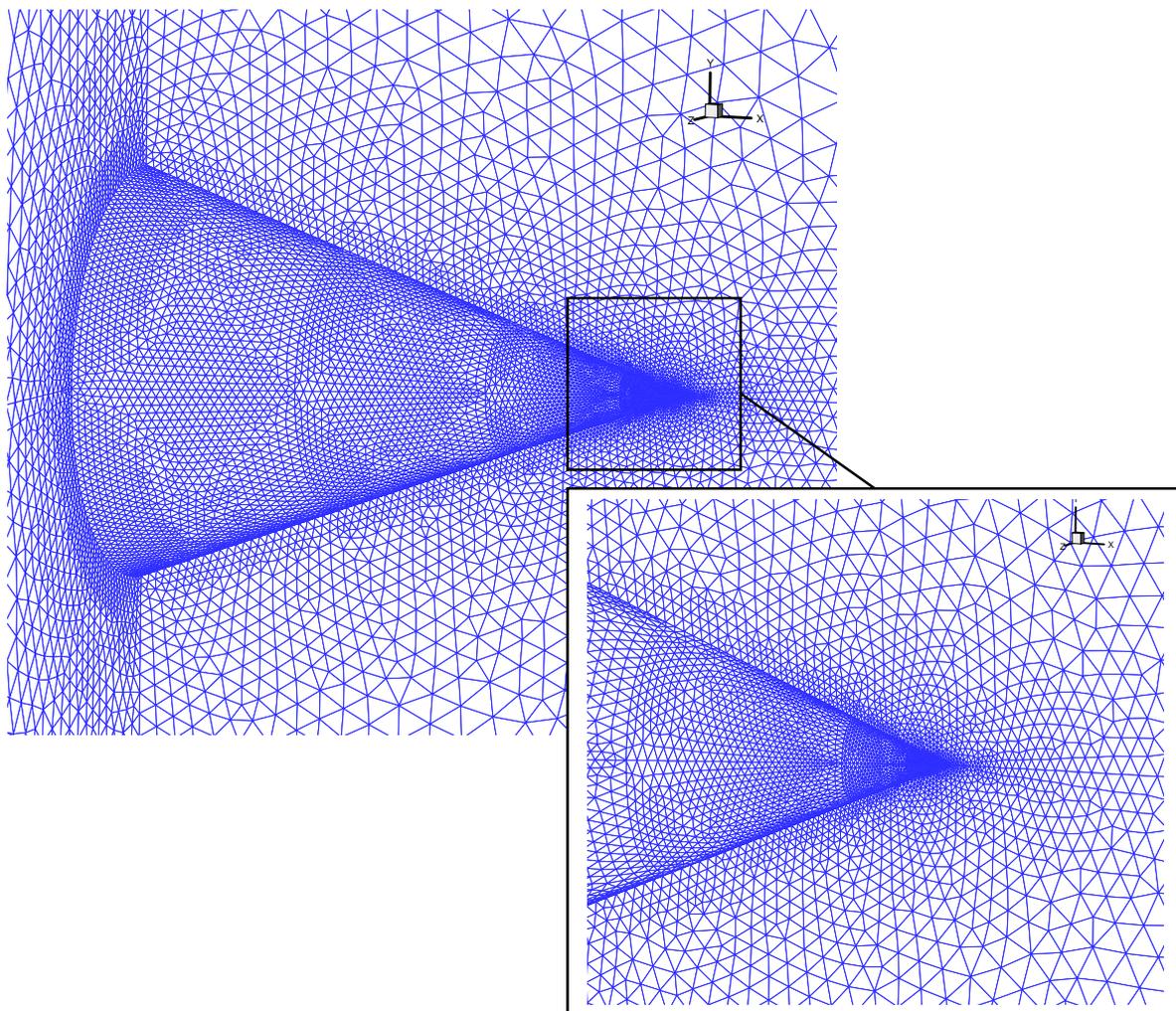


FIGURA 145 – Malha de elementos finitos para o domínio do fluido no exemplo cone

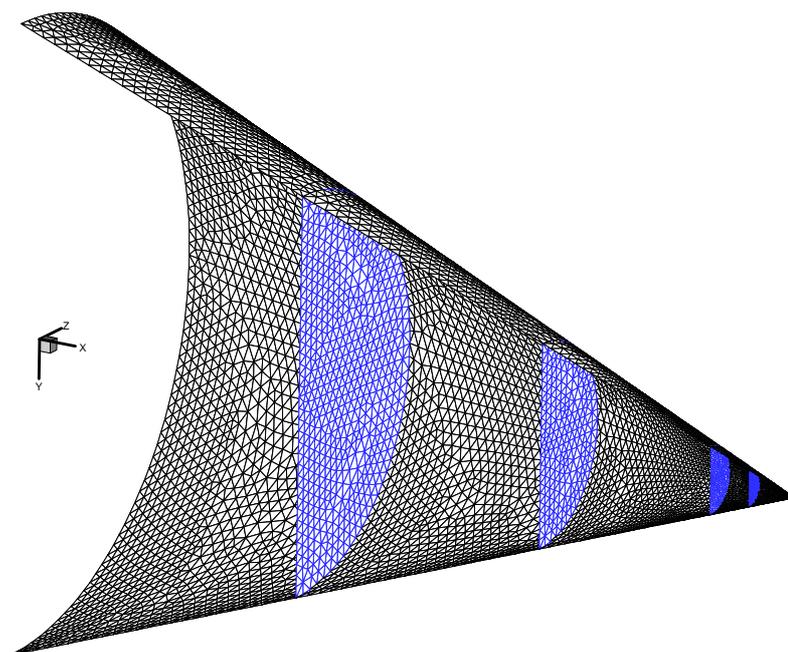


FIGURA 146 – Malha da estrutura no exemplo cone

A interação entre o fluido e a estrutura deformável inicia a partir das condições de regime permanente considerando a estrutura rígida, alcançada com 48000 passos de tempo (o passo de tempo adimensional é de 1.5×10^{-5}). Nesta simulação, as condições iniciais são as de escoamento não perturbado em todo o domínio, com exceção da superfície de corpo, na qual o vetor de velocidade é nulo. A Fig. 147 apresenta os contornos de pressão, massa específica, temperatura e Mach em regime permanente com a estrutura rígida. O maior resíduo da massa específica no domínio com o tempo está mostrado no gráfico da Fig. 148, indicando a sua redução assintótica.

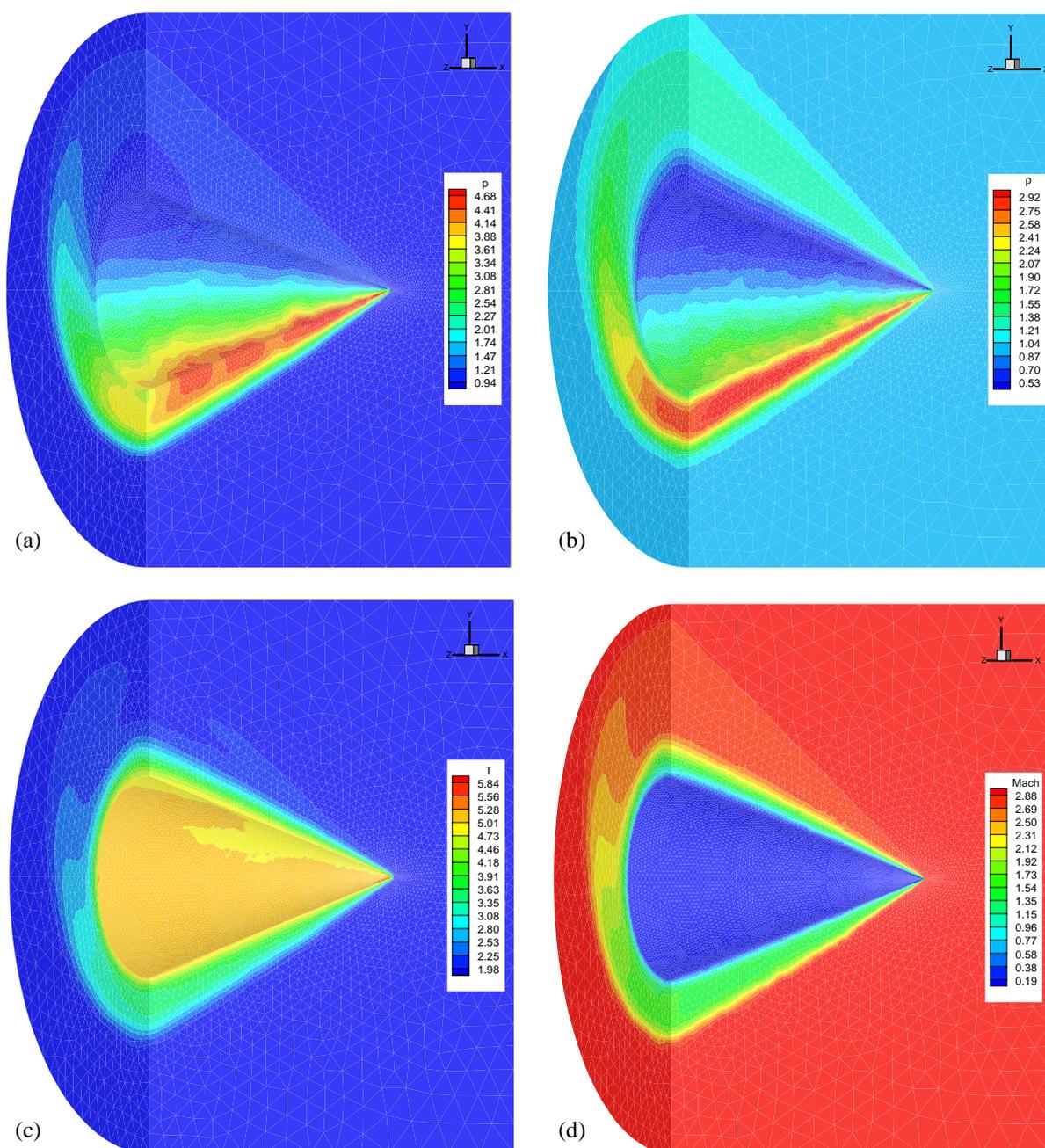


FIGURA 147 – Distribuições da (a) pressão, (b) massa específica, (c) temperatura e (d) número de Mach para o exemplo cone em regime permanente

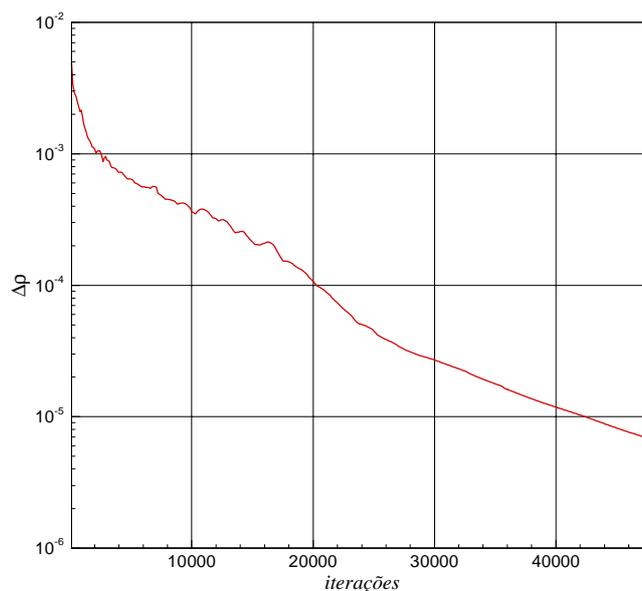


FIGURA 148 – Resíduo da massa específica para o exemplo cone

A estrutura, com um passo de tempo igual a $4.5 \times 10^{-8} s$, desenvolve um movimento oscilatório devido à aplicação súbita do carregamento. A Fig. 149 mostra as componentes de deslocamento u_x e u_y na ponta da cone com o tempo. O estudo de interação fluido-estrutura foi realizado até $t=0.00378 s$, ou 84000 passos de tempo. Os resultados de pressão, massa específica, temperatura e de número de Mach no instante final ($t=0.00378 s$) estão mostrados na Fig. 150. Os vetores de velocidade estão apresentados na Fig. 151. A configuração da estrutura, neste mesmo instante, está mostrada na Fig. 152, considerando uma ampliação de 10 vezes nos deslocamentos. A Fig. 153 apresenta a distribuição da componente de deslocamento u_y na estrutura.

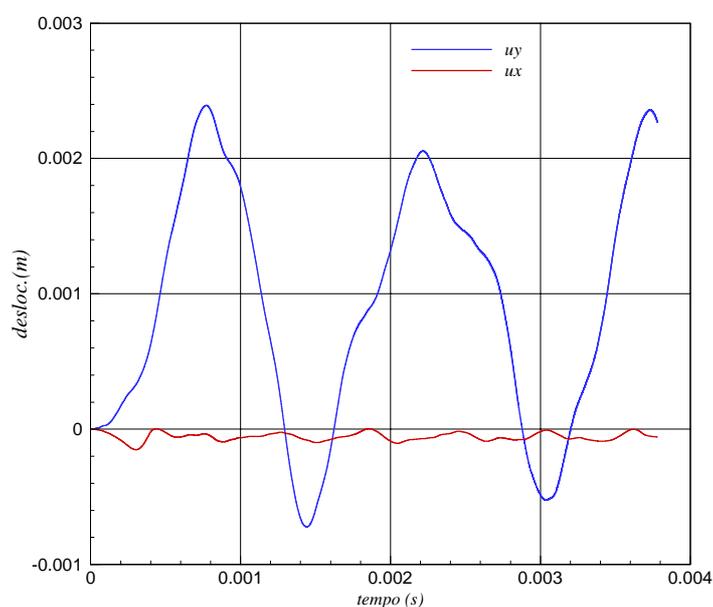


FIGURA 149 – Componentes do deslocamento u_x e u_y na ponta do cone com o tempo

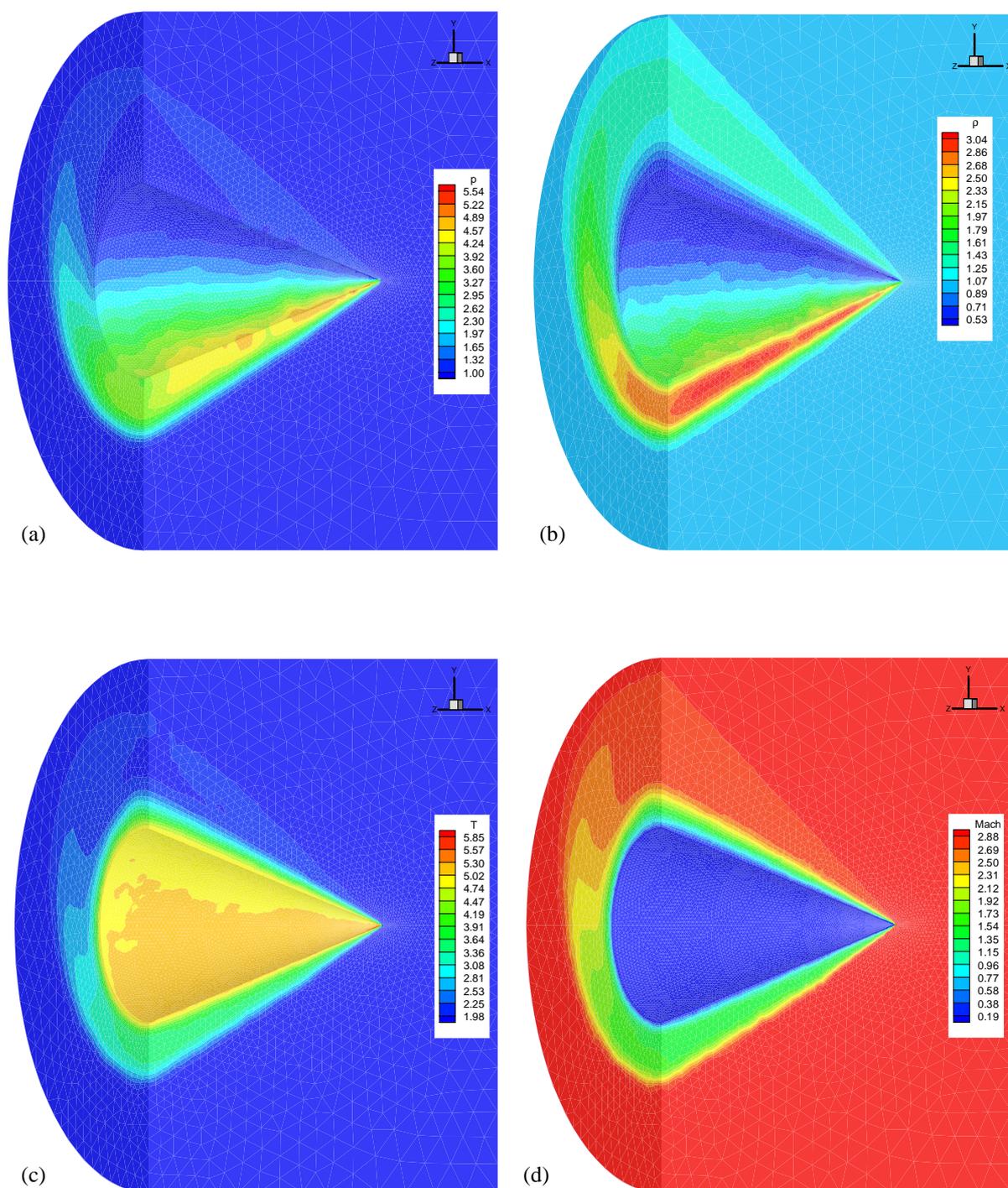
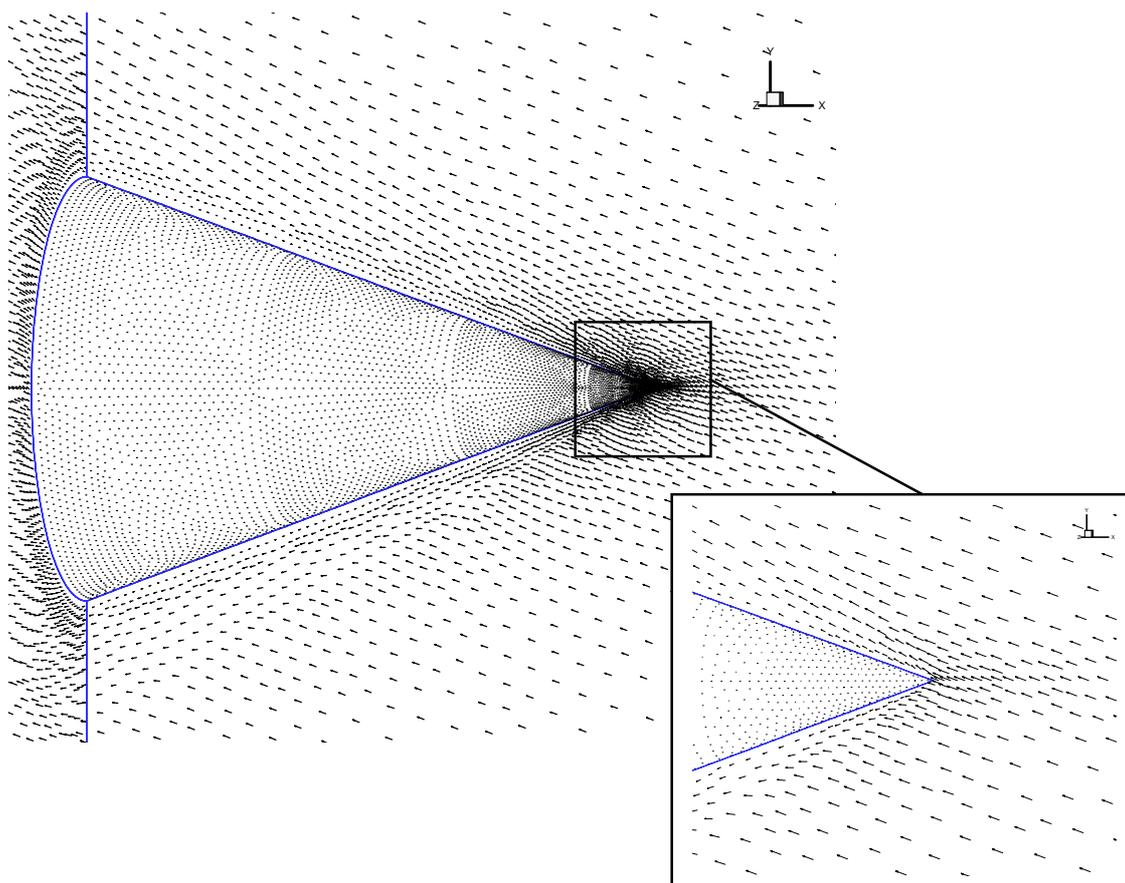
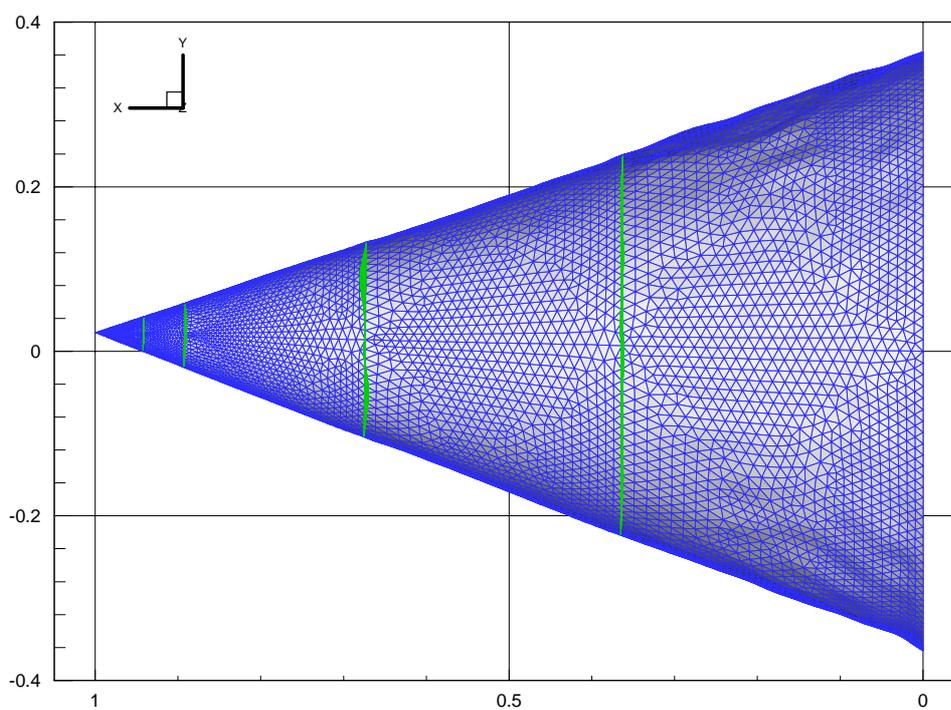


FIGURA 150 – Distribuições da (a) pressão, (b) massa específica, (c) temperatura e (d) número de Mach em $t=0.00378$ s para o exemplo cone

FIGURA 151 – Vetores de velocidade em $t = 0.00378 s$ para o exemplo coneFIGURA 152 – Configuração da estrutura em $t = 0.00378 s$ para o exemplo cone

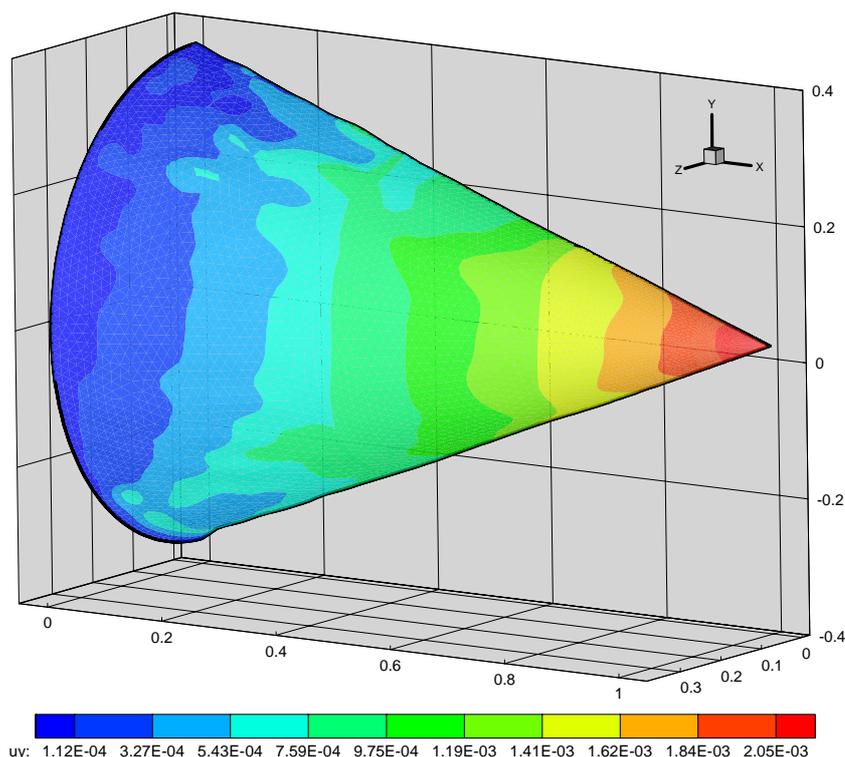


FIGURA 153 – Distribuição da componente de deslocamento u_y , no cone em $t = 0.00378 s$

Este exemplo possui uma relação entre os graus de liberdade do fluido e da estrutura de 8.50, menor que a relação do exemplo placa (28.88). A estrutura representa 29.8% do tempo de CPU total (10.90% para o exemplo placa). Por essa razão, é importante verificar o comportamento do algoritmo, quando é usado um esquema de subciclos entre estrutura e fluido. Em uma simulação com $n_{FS} = 10$, os resultados obtidos foram praticamente os mesmos que os sem uso de subciclos. Neste caso, o ganho de $tcpu$ total foi de 1.25, maior do que aquele obtido no exemplo placa (1.08), devido a uma maior representatividade da estrutura. No entanto, o ganho da estrutura foi de apenas 2.48 (4.38 para o exemplo placa), pois houve um aumento substancial do NIGC que passou de 37 sem o uso de subciclos, para 134 com $n_{FS} = 10$.

9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

9.1 CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

É evidente a existência de muitas dificuldades em elaborar um único algoritmo que tenha a capacidade de simular numericamente os problemas gerais de interação fluido-estrutura. Os diferentes comportamentos dos materiais envolvidos, a complexidade geométrica de cada problema, as diversas excitações dinâmicas possíveis, as várias condições de contorno que devem ser contempladas, são algumas das variantes que tornam este objetivo extremamente difícil. No presente trabalho, procurou-se elaborar um algoritmo capaz de simular problemas genéricos de interação fluido-estrutura, sem a preocupação de solucionar algum caso específico. Apresentou-se um algoritmo com as seguintes características: os fluidos são newtoneanos, compressíveis regidos pela equação de gases perfeitos (para regimes subsônicos, transônicos ou supersônicos) ou incompressíveis, em problemas de escoamentos laminares, isotérmicos ou não. A estrutura é do tipo placa ou casca, podendo ser considerada a não-linearidade geométrica. As propriedades de cada uma das áreas citadas permitem a simulação de problemas com razoável abrangência de casos, tais como em domínios com superfícies livres (interações entre fluido e barragens, escoamentos em tanques, lagoas, oceanos e suas influências sobre obstáculos ou ambientes), a interação de ventos em estruturas do tipo placa ou casca (chaminés, estruturas de edificações), a interação entre fluido e veículos aéreos em movimento, efeitos de explosões em reatores nucleares, entre outros.

A simulação numérica, apresentada no presente trabalho, está baseada na técnica padrão de elementos finitos. O método de Taylor-Galerkin de dois passos é usado em uma solução iterativa das equações de Navier-Stokes, descritas por um sistema de referência arbitrário lagrangeano-euleriano (ALE) no domínio do fluido, cujo elemento finito é o tetraedro linear. O método de Newmark em uma descrição lagrangeana atualizada é aplicado no campo da estrutura, no qual é utilizado um elemento triangular linear. A interação entre os dois domínios envolvidos é realizada pelo método particionado de acoplamento fraco.

Embora tenha-se usado algumas técnicas conhecidas e consagradas, o presente trabalho tem importantes contribuições na área de simulação numérica de problemas de engenharia, tais como:

- a) Fez-se comparações entre os elementos tipo placa e casca DKT e GPL-T9 em termos de eficiência computacional e de precisão de resultados para alguns problemas de validação.
- b) Mostrou-se um domínio das técnicas de otimização para equipamentos com recursos de vetorização, proporcionando algoritmos de boa eficiência computacional.
- c) Construiu-se um algoritmo modular e flexível para simulação de problemas de interação fluido-estrutura 3-D, que pode servir como base para a adição de novos métodos capazes de ampliar a generalidade deste (ver sugestões para trabalhos futuros na seção 9.2).
- d) Apresentou-se com sucesso, uma técnica de solução com o uso de subciclos, aplicada no campo do fluidos, até então somente elaborada no domínio das estruturas.
- e) Criou-se um novo método para o movimento da malha em uma descrição arbitrária lagrangeana-euleriana, apresentando excelentes resultados.
- f) Elaborou-se um esquema fracionado de solução de escoamentos de fluidos incompressíveis ou quase-compressíveis baseado no método de Taylor-Galerkin de dois passos, consagrado no domínio dos escoamentos de fluidos compressíveis.

9.2 O ALGORITMO DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

O presente trabalho mostrou a eficiência e a precisão do esquema de Taylor-Galerkin de dois passos fracionado. Utilizou-se elementos tetraédricos lineares com a mesma função de interpolação para as componentes de velocidade e para a pressão. Os incrementos de pressão foram obtidos pela solução da equação de Poisson, utilizando o método dos gradientes conjugados (MGC) com pré-condicionamento diagonal. O número médio de interações para a convergência do MGC (NIGC) foi de aproximadamente 53. O código apresentou um bom desempenho, alcançando uma média de velocidade em torno de 616 Mflops.

Embora os escoamentos de fluidos compressíveis e incompressíveis tenham sido simulados por dois algoritmos separados, a união em um só é simples, bastando particularizar a equação da continuidade para cada caso e adicionar a equação de estado para escoamentos de fluidos compressíveis.

9.3 A TÉCNICA DE SUBCICLOS

O uso da técnica de integração temporal com passos de tempo variáveis no domínio em função das condições de estabilidade numérica local de cada elemento, apresentou ganhos de tempo de processamento excelentes. As três formas diferentes de dividir a malha em

grupos de elementos e de nós apresentaram bons resultados. Quando os passos de tempo são controlados por indicadores que detectam variações de fenômenos físicos importantes, os ganhos de velocidade de processamento (*speed-up*) diminuem. No entanto obtém-se resultados mais precisos. O terceiro algoritmo, com um ganho de 1.61 para o exemplo esfera, não se mostrou utilizável na prática devido às severas restrições impostas aos passos de tempo locais. Por outro lado, o primeiro algoritmo (*speed-up*=10.22 para o exemplo esfera) é rápido, mas não considera a existência de importantes variações nos fenômenos físicos do escoamento, ocorrendo perdas de precisão. No segundo algoritmo, são usados indicadores de detecção de variações de fenômenos físicos e o ganho de velocidade de processamento (8.55) é relativamente próximo ao obtido pelo primeiro caso (10.22), mas com resultados bem mais precisos. No entanto, quando se utiliza malhas adaptativas, o procedimento de refinamento já possui os indicadores de controle mencionados acima. Espera-se, neste caso, que a primeira opção produza excelentes resultados, conservando ganhos computacionais significativos.

9.4 O ESQUEMA DE MOVIMENTO DE MALHA

Apresentou-se um método de movimento de malha baseado na suavização de velocidades no interior do domínio, respeitando as condições de contorno das superfícies externas. Os esquemas denominados de completo e simplificado, mostraram-se eficientes. O esquema completo é bem mais preciso, pois considera a influência de todos os nós de superfície sobre o cálculo da velocidade dos nós no interior do domínio. Em compensação, possui um consumo de tempo de CPU elevado, representando aproximadamente 40% do tempo total, embora tenha um excelente desempenho em Mflops (em torno de 1170 Mflops). Essa desvantagem pode ser evitada utilizando o esquema simplificado, que utiliza apenas um nó de cada superfície para calcular as velocidades nos nós do interior do domínio. Este esquema obteve uma precisão razoável para problemas com pequenos deslocamentos e uma excelente eficiência computacional (aproximadamente 0.65% do tempo total de CPU). É de se esperar que um esquema intermediário, que utilize um número de nós de superfície entre um e o número total, mantenha o excelente movimento do esquema completo e consiga uma eficiência próxima a do esquema simplificado.

9.5 O ALGORITMO DA ESTRUTURA

Os elementos do tipo placa/casca denominados de DKT e GPL-T9 foram validados com diversos exemplos consagrados na literatura. Constatou-se que o elemento GPL-T9

apresentou resultados um pouco mais precisos em alguns destes exemplos. Os efeitos de não-linearidade geométrica foram testados em problemas que envolvem grandes deslocamentos. De maneira geral, o elemento DKT mostrou-se mais eficiente computacionalmente (ganhos de 1.6 à 3.5 vezes em relação ao elemento GPL-T9) devido à simplicidade da sua formulação. No entanto, escolheu-se o elemento GPL-T9 para compor o algoritmo de interação fluido-estrutura em razão de sua maior precisão.

9.6 A SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Neste trabalho, apresentou-se um algoritmo particionado de solução de problemas de interação fluido-estrutura. Mostrou-se a precisão do método, através de exemplos de escoamentos de fluidos compressíveis e incompressíveis em estruturas do tipo placa/casca deformável, obtendo-se excelentes resultados. As diferenças entre as respostas dinâmicas de um sistema linear e não-linear foram abordadas no exemplo placa plana (8.4.2), mostrando a importância de considerar os efeitos de não-linearidade geométrica nos estudos de fenômenos de instabilidade. Constatou-se que o uso de um procedimento com subciclos, faz aumentar o número de iterações para obter-se a convergência da solução das equações de equilíbrio da estrutura, diminuindo consideravelmente o ganho de tempo de CPU que se obteria se fosse mantido o mesmo número de iterações obtido sem o uso de subciclos. É possível que o fato de os domínios fluido-estrutura possuírem diferentes discretizações temporais, possa ser melhor explorado utilizando uma malha de elementos finitos mais grosseira para a estrutura, suficiente para manter o nível de precisão dos resultados. Por fim, mostrou-se o bom desempenho dos algoritmos utilizados obtendo-se velocidades de 612 à 888 Mflops no Cray T94/CESUP-UFRGS.

9.7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Elaborar um algoritmo de solução de problemas de interação fluido-estrutura abrangente, eficiente e preciso, foi o principal objetivo deste trabalho. Logicamente que os muitos assuntos que envolvem a conquista deste objetivo, deixam várias lacunas a serem preenchidas por outros trabalhos de pesquisa. Sugere-se a seguir, alguns trabalhos importantes que tornariam o algoritmo mais amplo e melhorariam a sua eficiência computacional:

- a) *Inserção de um algoritmo de adaptação de malha 3-D para o domínio do fluido.* Este algoritmo permitiria o uso de malhas menores com um poder de precisão extremamente

elevado, pois haveria um refinamento da malha apenas nas regiões de grandes variações de propriedades físicas do meio. O exemplo VLS apresentado no presente trabalho mostra a importância deste recurso para se conseguir resultados mais precisos, principalmente nas zonas de choque. A malha não-estruturada composta de elementos tetraédricos, utilizada neste trabalho, facilita esta implementação.

- b) *Implementação de equações que governem outros fenômenos importantes no campo do fluido.* Pode-se destacar as equações que descrevem a concentração de poluentes em um meio líquido (lagoas, oceanos e outros) ou em um meio gasoso, tal como o ar atmosférico. Também as equações que governam algumas reações químicas do meio.
- c) *Implementação de modelos de turbulência.* As limitações do tempo de processamento e do espaço de memória dos computadores atuais, exigem o uso de métodos semi-empíricos para simular os efeitos de turbulência no domínio do fluido. Considerando que muitos problemas práticos de engenharia estão na faixa de Reynolds relativamente elevados, esses modelos tornam-se indispensáveis.
- d) *Implementação de técnicas que permitam o uso de malhas que não coincidam na interface fluido-estrutura (non-matching).* Isso possibilita para a estrutura, uma malha de elementos finitos mais grosseira do que aquela imposta pelas faces dos tetraédros do fluido na superfície de interface. Isto porque geralmente as frequências de vibração da estrutura, que devem ser captadas pelo algoritmo de solução, requerem elementos da malha bem maiores que os impostos por estas faces de tetraedros.
- e) *Estudos sobre o amortecimento numérico de captura de choques para escoamentos de fluidos compressíveis.* Encontrou-se algumas dificuldades em estabelecer o valor do coeficiente de amortecimento CC para cada tipo de problema, principalmente em regimes subsônicos. Cada método de captura de choques atinge seu melhor desempenho em determinadas condições específicas de escoamentos. Nithiarasu *et al.* (1998) mostraram que o método de captura de choques, utilizado no presente trabalho, é excelente para escoamentos compressíveis invíscidos mas que não é a melhor escolha quando trata-se de problemas de altas velocidades de fluidos viscosos. Estas razões justificam estudos no sentido de encontrar uma sistematização na escolha do coeficiente de amortecimento mais adequado para cada problema e de investigar outros métodos possíveis de serem utilizados.

- f) *Exploração dos recursos de paralelização.* A otimização dos códigos para problemas de grande porte necessitam utilizar todos os recursos disponíveis nos supercomputadores de hoje. Embora atualmente o Cray T94/CESUP-UFRGS possua apenas 2 processadores, o que torna a paralelização menos eficiente, existe a possibilidade de ampliação deste número ou do uso do presente código em outros equipamentos com maiores recursos, justificando esta proposta.
- g) *Estruturação de dados e melhoria da interação do código com o usuário.* Embora os códigos apresentados no presente trabalho estejam bem otimizados e elaborados de forma organizada, algumas modificações são importantes para que a utilização dos mesmos seja facilitada. As várias hipóteses de condições de contorno dos problemas e a possibilidade de lidar-se com escoamentos de fluidos compressíveis ou incompressíveis, devem ser organizadas em um único algoritmo. As etapas de pré-processamento, processamento e pós-processamento devem ser interligadas de forma automática, facilitando a entrada de dados e a interpretação dos resultados.
- h) *Implementação de algoritmos mais abrangentes para a estrutura.* O presente algoritmo permite simular problemas de estruturas tipo placa e casca com não-linearidade geométrica. A abrangência deste algoritmo deve ser melhorada englobando a não-linearidade do material, problemas com materiais compostos e a possibilidade de instabilidade geométrica (*buckling*).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ABACUS **Standard user's manual** Version 5.8, 1998. HIBBITT, KARLSSON AND ORENSEN, INC.1080, Main Street, Pawtucket, RI 02860-4847.
- 2 ADINA **User's manual** Version 7.4, 2000. ADINA R&D INC., 71 Elton Avenue, Watertown, Massachussets (MA 02472), USA.
- 3 ADINI, A. **Analysis of shell structures by the finite element method**. Berkeley, 1961. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Civil Engineering, University of California.
- 4 ADINI, A.; CLOUGH, R.W. **Analysis of plate bending by the finite element method**. Report submitted to the National Science Foundation (Grant G7337), Washington, D.C., 1960.
- 5 ALQUATI, E.L.G. **Precondicionamento do método dos gradientes conjugados numa formulação elemento-por-elemento**. Porto Alegre, 1991. 117p. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC/UFRGS.
- 6 ALVES, J.L.D. **Análise transiente de grandes deformações em computadores de arquitetura vetorial/paralela**. Rio de Janeiro, 1991. 123p. Tese de Doutorado – COPPE/UFRJ.
- 7 ANSYS **User's manual** Revision 5.0, 1992. SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC. P. O. box 65, Johnson Road, Houston, PA 15342-0065.
- 8 ANSYS/FLOTRAN **User's manual** Revision 5.0, 1992. SWANSON ANALYSIS SYSTEMS, INC. P. O. box 65, Johnson Road, Houston, PA 15342-0065.
- 9 ARGYRIS, J. *et al.* Finite element solution of viscous flow problems. **Finite Elements in Fluids**. New York: Wiley, 1985. 6v., p.89-114.
- 10 ARGYRIS, J. *et al.* Τα παντα ρει. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.51, p.289-362, 1985.
- 11 ARGYRIS, J.; DOLTSINIS, I.S.; FRIZ H. Hermes space shuttle: exploration of reentry aerodynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.73, p.1-51, 1989.
- 12 ARGYRIS, J.; DOLTSINIS, I.S.; FRIZ, H. Studies on computational reentry aerodynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.81, p.257-289, 1990.

- 13 ARGYRIS, J.H.; FRIED, I.; SCHARPF, D.W. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. **The Aeronaut. J. Royal Aeronaut. Soc.**, v.72, p.701-709, 1968.
- 14 AZEVEDO, R.L. **Análise de problemas de interação fluido-estrutura usando o método dos elementos finitos com um acoplamento monolítico.** Porto Alegre, 1999. 116p. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC/UFRGS.
- 15 BATHE, K.J. **Finite element procedures.** Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.
- 16 BATHE, K.J.; CIMENTO, A.P. Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.22, p.59-85, 1980.
- 17 BATHE, K.J.; DVORKIN, E.D.; HO, L.-W. Our discrete-Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis - an assessment. **Computers & Structures**, v.16, n.1-4, p.89-98, 1983.
- 18 BATHE, K.J.; HO, L.-W. A simple and effective element for analysis of general shell structures. **Computers & Structures**, v.13, p.673-681, 1981.
- 19 BATINA, J.T. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes, **AIAA-89-0115**, p.9-12, 1989.
- 20 BATINA, J.T. *et al.* Recent advances in transonic computational aeroelasticity. **Computers & Structures**, v.30, n.1/2, p.29-37, 1988.
- 21 BATOZ, J.L. A study of three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.15, p.1771-1812, 1980.
- 22 BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.-W. A study of three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.15, p.1771-1812, 1980.
- 23 BATOZ, J.L.; TAHAR, M.B. Evaluation of a quadrilateral thin plate bending element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.18, p.1655-1677, 1982.
- 24 BAZELEY, G.P.; CHEUNG, Y.K.; IRONS, B.M.; ZIENKIEWICZ O.C. Triangular elements in plate bending-conforming and non-conforming solutions. Proc. 1st on Matrix Meth. In: **Structural Mech.**, Ohio, p.547-576, 1965.
- 25 BELL, K. A refined triangular plate bending finite element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.1, n.1, p.101-122, 1969.

- 26 BELYTSCHKO, T.; GILBERTSEN, N.D. Implementation of mixed time integration techniques on a vectorized computer with shared memory. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.35, p.1803-1828, 1992.
- 27 BELYTSCHKO, T.; MULLEN, R. Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, v.12, p.1575-1586, 1978.
- 28 BELYTSCHKO, T.; MULLEN, R. Mesh partitions of explicit-implicit time integrators. In: BATHE, K.J.; ODEN, J.T.; WUNDERLICH, W. (Ed.) **Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis**. Cambridge, MA: MIT Press, 1976. p.673-690.
- 29 BELYTSCHKO, T.; SCHUMANN, U. Fluid-structure integrations in light water reactor systems. **Nuclear Engng Design**, v.60, p.173-195, 1980.
- 30 BELYTSCHKO, T.; SMOLINSKI, P.; LIU, W.K. Stability of multi-time-step partitioned integrators for first order finite element systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.49, p.281-297, 1985.
- 31 BELYTSCHKO, T.; YEN, H. -J.; MULLEN, R. Mixed methods for time integration **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.17/18, p.259-275, 1979.
- 32 BLOM, F.J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.167, p.369-391, 1998.
- 33 BONET, J.; PERAIRE, J. An alternate digital tree algorithm for geometric searching and intersection problems. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, v.31, p.1-17, 1991.
- 34 BOSCHITSCH, A.H.; QUACKENBUSH, T.R. High accuracy computations of fluid-structure interaction in transonic cascades. **AIAA-93-0485**, 1993.
- 35 BROOKS, A.M.; HUGHES, T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection-dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.32, p.199-252, 1982.
- 36 CASADEI, F.; HALLEUX, J.P. An algorithm for permanent fluid-structure interaction in explicit transient dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.128, p.231-289, 1995.

- 37 CEBRAL, J.R.; LÖHNER, R. Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. **AIAA Journal**, v.35, p.687-692, 1997.
- 38 CEBRAL, J.R.; LÖHNER, R. Load transfer for viscous fluid-structure interaction. In: IDELSOHN, S. *et al.* (Ed.) **Computational Mechanics**, CIMNE, Barcelona, 1998.
- 39 CHORIN, A.J. A numerical method for solving incompressible viscous problems. **J.Comput.Phys.**, v.2, p.12-26, 1967.
- 40 CHUNG, T.J. **Finite element analysis fluid dynamic**. New York: McGraw-Hill, 1978.
- 41 CLARK, R.A.; FERZIGER, J.H.; REYNOLDS,W.C. Evaluation of sub-grid scale turbulence models using na accurately simulated turbulent flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v.91, n.1, p.1-16, 1979.
- 42 CLOUGH, R.W.; TOCHER, J.L. Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending. Proc. 1st Conf. On Matrix Meth. In: **Structural Mech.**, Ohio, p. 515-545, 1965.
- 43 COMINI, G.; GUIDICE, S. Finite element solution of the incompressible Navier-Stokes equations. **Numer. Heat Transfer**, v.5, p.463-478, 1972.
- 44 COWPER, G.R.; KOSKO, E.; LINDBERG, G.M.; OLSON, M.D. Formulation of a new triangular plate bending element. **Trans. Canadian Aeronaut. Space Inst.**, v.1, n.2, p.86-90, 1968.
- 45 CRAY RESEARCH, INC. **Optimizing application code on Cray PVP systems**. TR-VOPT 2.0 (A), 1996.
- 46 CRISFIELD, M.A. A four-noded thin-plate bending element using shear constraints - a modified version of Lyons element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.38, p.93-120, 1983.
- 47 CRUMPTON, P.I.; GILES, M.B. Implicit time – accurate solutions on unstructured dynamic grids. **International Journal Numerical Methods in Fluids**, v.25, p.1285-1300, 1997.
- 48 DAVIS, G.A.; BENDIKSEN, O.O. Unsteady transonic two-dimensional Euler solutions using finite elements. **AIAA Journal**, v.31, p.1051-1059, 1993.
- 49 DENHAM, M.K.; PATRICK, M.A. Laminar flow over a downstream – facing step in a two-dimensional flow channel. **Trans. Inst. Chem. Eng.**, v.52, n.4, p.361-367, 1974.

- 50 DONEA, J.; GIULIANI, S.; LAVAL, H.; QUARTAPELLE, L. Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.33, p.53-73, 1982.
- 51 DONEA, J. A Taylor-Galerkin method for convection transport problems. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, v.20, p.101-119, 1984.
- 52 DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.33, p.689-723, 1982.
- 53 ENGELMAN, M.; SANI, R.L.; GRESHO, P.M. *et al.* Consistent vs. reduced integration penalty methods for incompressible media using general old and new elements. **International Journal Numerical Methods in Fluids**, v.2, p.25-42, 1982.
- 54 FARHAT, C. Computation in sciences, methods and algorithms on supercomputing for engineering – COSMASE. **Advanced course on computational fluid dynamics**. Lausanne, Switzerland, 1995.
- 55 FARHAT, C.; LESOINNE, M.; LETALLEC, P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.157, p.95-114, 1998.
- 56 FARHAT, C.; LESOINNE, M.; MAMAN, N. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: three-field formulation, geometric conservation and distributed solution. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, v.21, p.807-835, 1995.
- 57 FELIPPA, C.A.; PARK, K.-C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled systems. In: IDELSOHN, S. *et al.* (Ed.) **Computational Mechanics**, CIMNE, Barcelona, 1998.
- 58 FELKER, F.F. Direct solution of two-dimensional Navier-Stokes equations for static aeroelasticity problems. **AIAA Journal**, v.31, n.1, p.148-153, 1993.
- 59 FENTON, J. A ninth-order solution for the solitary waves. **J. Fluid. Mech.**, v.53, p.257-271, 1972.
- 60 FERZIGER, J.H. Simulation of complex turbulent flow: recent advances and prospects in wind engineering. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.46 e 47, p.195-212, 1993.

- 61 FINDIKAKIS, A.N.; STREET, R.L. Mathematical description of turbulent flows. **Journal of Hydraulics Division, ASCE**, v.108, p.887-903, 1982.
- 62 FLUENT **User's manual** Version 5.0, 1998. FLUENT WORLDWIDE CORPORATE HEADQUARTERS, Center Resource Park, 10. Cavendish Court, Lebanon, NH 03766-142.
- 63 FRIED, I.; YANG, S.K. Triangular nine-degree-of-freedom C^0 plate bending element of quadratic accuracy. **Quarterly Journal of Applied Mathematics**, v.31, p.303-312, 1978.
- 64 GOLUB, G.H.; VAN LOAN, C.F. **Matrix computations**. Baltimore, Maryland: John Hopkins University Press, 1989. 642p.
- 65 GONZALEZ, L.A.S. **Análise de escoamentos de fluidos quase-incompressíveis e das vibrações induzidas em objetos imersos**. Porto Alegre, 1993. 150p. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC/UFRGS.
- 66 GRESHO, P.M.; CHAN, T.S.; LEE, R.L.; UPSON, C.D. A modified finite element method for solving incompressible Navier-Stokes equations. Part I, theory. **International Journal Numerical Methods in Fluids**, v.4, p.557-598, 1984.
- 67 GRÖTZBACH, G. Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows. **Encyclopedia of Fluid Mechanics**, v.6, p.1337-1391, 1987.
- 68 GRIMSHAW, R. The solitary wave in water of variable depth. **J. Fluid. Mech.**, v.46, p. 611-622, 1971.
- 69 GÜLÇAT, Ü.; ASLAN, A.R. Accurate 3D viscous incompressible flow calculations with the FEM. **International Journal Numerical Methods in Fluids**, v.25, p.985-1001, 1997.
- 70 GURUSWAMY, G.P. Interaction of fluids and structures for aircraft applications. **Computers & Structures**, v.30, n.1/2, p.1-13, 1988.
- 71 HAMDAN, F.H. Near-field fluid-structure interaction using Lagrangian fluid finite elements. **Computers & Structures**, v.71, p.123-141, 1999.
- 72 HAYASHI, M.; HATANAKA, K.; KAWAHARA, M. Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.13, p.805-840, 1991.
- 73 HEIL, M. Stokes flow in an elastic tube – a large-displacement fluid-structure interaction problem. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.28, p.243-265, 1998.

- 74 HEINRICH, J.C.; HUYAKORN, P.S.; MITCHELL, A.R. *et al.* An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, v.11, p.131-144, 1977.
- 75 HESTENES, M.R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v.49, n.6, p.409-436, 1952.
- 76 HINTON, E.; BICANIC, N. A comparison of Lagrangian and serendipity Mindlin plate elements for free vibration analysis. **Computers & Structures**, v.10, p.483-493, 1979.
- 77 HINZE, J.O. **Turbulence**. 2.ed. New York: McGraw-Hill, 1975, 790p.
- 78 HIRT, C.W.; AMSDEN, A.A.; COOK, J.L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. **J. Comp. Phys.**, v.14, p.227-253, 1974.
- 79 HOOD, P.; TAYLOR, C. Navier-Stokes equations using mixed interpolation. In: ODEN, J.T. *et al.* (Ed.), **Finite Element Methods in Flow Problems**. Huntsville, AL: UAH Press, 1974, p.121-132.
- 80 HRABOK, M.M; HRUDEY, T.M. A review and catalogue of plate bending finite elements. **Computers & Structures**, v.19, n.3, p.479-495, 1974.
- 81 HUERTA, A.; LIU, W.K. Viscous flow with large free surface motion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.69, p.277-324, 1988.
- 82 HUGHES, T.J.R. Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with spatial reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, v.7, p.1261-1275, 1987.
- 83 HUGHES, T.J.R.; FRANCA, L.P.; BALASTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problems accommodating equal-order interpolations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.59, p.85-99, 1986.
- 84 HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K. Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory. **J. Appl. Mech.**, v.45, p. 371-374, 1978.
- 85 HUGHES, T.J.R.; COHEN, M.; HAROUN, M. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. **Nuclear Engng Design**, v.46, p.203-222, 1978.

- 86 HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K. Implicit-explicit finite elements in transient analysis: Implementations and numerical examples. **J. Appl. Mech.**, v.45, p. 375-378, 1978.
- 87 HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; ZIMMERMAN, T. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flow. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.29, p.329-349, 1981.
- 88 HUGHES, T.J.R.; TAYLOR, R.L.; KANOKNUKULCHAI, W. A simple and efficient finite element for plate bending. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, v.11, n.10, p.1529-1543, 1977.
- 89 HUGHES, T.J.R.; COHEN, M. The "Heterosis" finite element for plate bending **Computers & Structures**, v.9, p.445-450, 1978.
- 90 HUGHES, T.V.R.; TEZDUYAR, T.E. Finite element methods for first order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.45, p.217-284, 1984.
- 91 IRONS, B.M. A conforming quartic triangular element for plate bending. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, v.1, n.1, p.29-45, 1969.
- 92 IRONS, B.M. The semi-loof shell element. In: ASHWELL, D.G.; GALLAGHER, R.H. (Ed.), **Finite Elements for Thin Shells and Curved Members**. London: Wiley, 1976. p.197-222.
- 93 KAWAHARA, M.; OHMIYA, K. Finite element analysis of density flow using the velocity correction method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.5, p.981-993, 1985.
- 94 KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method for incompressible Navier-Stokes equations. **J.Comput.Phys.**, v.59, p.308-323, 1985.
- 95 KINKUCHI, F.; ANDO, Y. Some finite element solutions for plate bending problems by simplified hybrid displacement method. **Nuclear Engng. Design**, v.23, p.155-178, 1972.
- 96 KOBBUS, B.; FARHAT, C. Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.170, p.103-129, 1999.
- 97 KOVACS, A.; KAWAHARA, M. A finite element scheme based in the velocity correction method for the solution of the time dependent incompressible Navier-Stokes equations. **International Journal Numerical Methods in Fluids**, v.13, p.403-423, 1991.

- 98 LAITONE, E.V. The second approximation to conoidal and solitary waves. **J. Fluid. Mech.**, v.9, p.430-444, 1960.
- 99 LANDON, R.H. NACA0012 oscillatory and transient pitching. **AGARD R-702**, 1982.
- 100 LAPIDUS, A. A detached shock calculation by second-order finite differences. **J. Comput. Phys.**, v.2, p.154-177, 1967.
- 101 LAUNDER, B.E.; SPALDING, D.B. **lectures in mathematical models of turbulence**. New York: Academic Press, 1972.
- 102 LAUNDER, B.E.; SPALDING, D.B. The numerical computation of turbulent flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.3, p.269-289, 1974.
- 103 LAX, P.D.; WENDROFF, B. Systems of conservation laws. **Comm. Pure Appl. Math.**, v.13, p.217-237, 1960.
- 104 LEE, S.W.; PIAN, T.H.H. Improvement of plate and shell finite element by mixed formulation. **AIAA Journal**, v.16, p.29-34, 1978.
- 105 LESOINNE, M.; FARHAT, C. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.134, p.71-90, 1996.
- 106 LIAO, C.-L.; REDDY, J.N. **An incremental total Lagrangian formulation for general anisotropic shell-type structures**. Research report No. VPI-E-87.22, 1987.
- 107 LIU, W.K.; MA, D.C. Computer implementation aspects for fluid-structure interaction problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.31, p.129-148, 1982.
- 108 LÖHNER, R. Some useful data structures for the generation of unstructured grids. **Communications in Applied Mechanical Methods**, v.4, p.123-135, 1988.
- 109 LÖHNER, R.; MORGAN, K.; ZIENKIEWICZ, O.C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method. **International Journal of Numerical Methods in Fluids**, v.4, p.1043-1063, 1984.
- 110 LÖHNER, R.; MORGAN, K.; PERAIRE, J. A simple extension to multidimensional problems of the artificial viscosity due to Lapidus. **Communications in Applied Mechanical Methods**, v.1, p.141-147, 1985.
- 111 LÖHNER, R.; MORGAN, K.; ZIENKIEWICZ, O.C. An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.51, p.441-465, 1985.

- 112 LÖHNER, R.; YANG, C. Improved ALE mesh velocities for moving bodies. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.12, p.599-608, 1996.
- 113 LOOF, H.W. **The economical computation of stiffness of large structural elements.** Symp. On the Use of Electronic Digital Computers in Structural Engng, University of Newcastle upon Tyne, 1966.
- 114 LOU, Z. A computer simulation of the blood flow at the aortic bifurcation with flexible walls. **ASME J. Biomech. Eng.**, v.115, p.306-315, 1993.
- 115 LYONS, L.P.R. **A general finite element system with special reference to the analysis of cellular structures.** London, 1977. Ph.D. Thesis, Imperial College of Science and Technology.
- 116 MA, D.C.; LUI, W.K.; GVILDIS, J.; CHANG, J. Seismic behavior of liquid-filled shells. **Nuclear Engng Design**, v.70, p.437-455, 1982.
- 117 MAC CORMACK, R.W.; BALDWIN, B.S. A numerical method for solving the Navier-Stokes equations with application to shock-boundary layer interaction. **AIAA Paper**, p.1-75, 1975.
- 118 MALKUS, D.S.; HUGHES, T.J. Mixed finite element methods - reduced and selective integration technique: A unification of concept. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.15, p.63-81, 1978.
- 119 MARKATOS, N.C. The mathematical modelling of turbulent flows. **Applied Mathematical Modelling**, v.10, p.190-220, 1986.
- 120 MARVIN, J.G.; COAKLEY, T.J. **Turbulence modeling for hypersonic flows.** California: Ames Research Center, 1990.
- 121 MELOSH, R.L. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. **J. Aeronaut. Sci.**, v.28, n.1, p. 34-42, 1961.
- 122 MONDKAR, D.P.; POWELL, G.H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.11, p.499-520, 1977.
- 123 MORGAN, K. *et al.* Adaptive remeshing applied to the solution of a shock interaction problem on a cylindrical leading edge. In: STOW, P. (Ed.) **Computational Methods in Aeronautical Fluid Dynamics.** Oxford: Clarendon Press, 1990. p.327-344.
- 124 MSC/NASTRAN **Quick Reference Guide** Version 70.5, 1998. Mc NEAL – SCHWFENDLER CORPORATION 815 Colorado Boulevard, Los Angeles, CALIFORNIA 90001-1277.

- 125 MURAKAMI, S. Current status and future trends in computational wind engineering. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.67 e 68, p.3-34, 1997.
- 126 NALLASAMY, M.; PRASAD, K.K. On cavity flow at high Reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, v.79, n.2, p.391-414, 1977.
- 127 NEAL, M.O.; BELYTSCHKO, T. Explicit-explicit subcycling with non integer time step ratios for structural dynamic systems. **Computers & Structures**, v.31, n.6, p.871-880, 1989.
- 128 NITHIARASU, P.; ZIENKIEWICZ, O.C.; SATYA SAY, B.V.K. *et al.* Shock capturing viscosities for the general fluid mechanics algorithm. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.28, p.1325-1353, 1998.
- 129 NKONGA, B.; GUILLARD, H. Godunov type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.113, p.183-204, 1994.
- 130 PARISCH, H. A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell applications and reduced integration. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.20, p.323-350, 1979.
- 131 PARK, K.C. Partitioned transient analysis procedure for coupled field problems: Stability analysis. **J. Appl. Mech.**, v.47, p.370-376, 1980.
- 132 PAWSEY, S.F.; CLOUGH, R.W. Improved numerical integration of thick shell finite elements. **International Journal for Numerical Methods Engineering**, v.3, n.4, p.575-586, 1971.
- 133 PERAIRE, J. *et al.* Finite element Euler computations in three dimensions. **International Journal for Numerical Methods Engineering**, v.26, p.2135-2159, 1988.
- 134 PERKTOLD, K.; RAPPITSCH, G. Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model. **J. Biomech. Eng.**, v.28, p.845-856, 1995.
- 135 PETRY, A. **Análise numérica da interação fluido-estrutura através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre, 1993. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC/UFRGS.
- 136 PIAN, T.H.H.; TONG, P. Basis of finite element methods for solid continua **International Journal for Numerical Methods Engineering**, v.1, n.1, p.3-28, 1969.

- 137 PIPERNO, S.; FARHAT, C.; LARROUTUROU, B. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part I: Model problem, theory and two-dimensional application. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.124, p.79-112, 1995.
- 138 PUGH, E.D.L.; HINTON, E.; ZIENKIEWICZ, O.C. A study of quadrilateral plate bending elements with “reduced integration”. **International Journal for Numerical Methods Engineering**, v.12, n.7, p.1059-1079, 1978.
- 139 RAMASWAMY, B. Finite element for advection and natural convection flows. **Comput.Fluids**, v.16, p.349-388, 1988.
- 140 RAMASWAMY, B.; JUE, T.C. Some recent and developments in finite element analysis for incompressible thermal flows. **International Journal for Numerical Methods Engineering**, v.35, p.671-707, 1992.
- 141 RAMASWAMY, R.; KAWAHARA, M. Arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.7, p.1053-1075, 1987.
- 142 RAMM, E. A plate/shell element for large deflections and rotations. In: BATHE, K.J. *et al.* (Ed.) **Formulations and computational algorithms in finite element analysis**. Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1977.
- 143 RAMSHAW, V.D.; MESSINA, G.L. A hibrid penalty pseudo-compressibility method for transient incompressible fluid flow. **Computers & Fluids**, v.20, p.165-175, 1991.
- 144 REN, G.; UTNES, T. A finite element solution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using a modified velocity correction method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.17, p.349-364, 1993.
- 145 RICE, J.G.; SCHNIPKE, R.J. An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.58, p.135-149, 1986.
- 146 RICHTMEYER, R.D.; MORTON, K.W. **Difference methods for initial value problems**. New York: Interscience, 1967.
- 147 RIFAI, S.M. *et al.* Multiphysics simulation of flow-induced vibrations and aeroelasticity on parallel computing platforms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.174, p.393-417, 1999.
- 148 RODI, W. **Turbulence models and their application in hydraulics**. Netherlands: International Association for Hydraulic Research Publ., 1980.

- 149 ROGALLO, R.S.; MOIN, P. Numerical simulation of turbulent flows. **Ann. Rev. Fluid Mechanics**, v.16, p.99-137, 1984.
- 150 ROSTAND, P. Algebraic turbulence models for the computation of 2-D high speed flows using unstructured grids, **ICASE Rep.** 88-63, 1988.
- 151 SALEEB, A.F.; CHANG, T.Y. An efficient quadrilateral element for plate bending analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, p.1123-1155, 1987.
- 152 SANI, R.L.; GRESHO, P.M.; LEE, R.L.; GRIFFITHS, D.F. The cause and cure (?) of the spurious pressure generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations: Part I. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.1, p.17-43, 1981.
- 153 SANTOS, M.A.V. **Simulação numérica de escoamentos compressíveis e sua interação com estruturas deformáveis.** Porto Alegre, 1993. 180p. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC/UFRGS.
- 154 SCALABRIN, L.C. **Simulação de escoamentos tridimensionais sobre a configuração do VLS completo.** São José dos Campos, 1999. Trabalho de graduação em Engenharia Aeronáutica – ITA/CTA.
- 155 SCHLICHTING, H. **Boundary layer theory.** 2.ed. NY: McGraw-Hill, 1979.
- 156 SHIMURA, M.; KAWAHARA, M. Two dimensional finite element flow analysis using velocity correction method. **Struct. Eng./Earthquake Eng.**, v.5, p.255-263, 1988.
- 157 SHNEIDER, G.E.; RAITHBY, G.D.; YOVANOVICH, M.M. Finite element analysis of incompressible fluid flow incorporating equal order pressure and velocity interpolation. In: TAYLOR, C.; MORGAN, K.; BREBBIA, C.A. (Ed.) **Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow.** Plymouth: Pentech Press, 1978.
- 158 SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations: I - The basic experiment. **Monthly Weather Review**, v.91, p.99-164, 1963.
- 159 SMOLINSKI, P.; BELYTSCHKO, T.; NEAL, M.O. Multi-time-step integration using nodal partitioning. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.26, p.349-359, 1988.
- 160 SORIA, A.; CASADEI, F. Arbitrary Lagrangian-Eulerian multicomponent compressible flow with fluid-structure interaction. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.25, p.1263-1284, 1997.

- 161 TAYLOR, C.; THOMAS, C.E; MORGAN, K. Analysis of turbulent flow with separation using the finite element method. In: TAYLOR, C.; MORGAN, K. (Ed.) **Recent Advances in Numerical Methods in Fluids - Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow**. Pineridge, Swansea, 1981, v.2, p.283-325.
- 162 TEIXEIRA, P.R.F. **Simulação numérica de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis aplicando elementos finitos**. Porto Alegre, 1996. 73p. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC/UFRGS.
- 163 TEIXEIRA, P.R.F.; AWRUCH, A.M. Numerical simulation of three dimensional incompressible flows using the finite element method. **ENCIT**, 8., 2000, Porto Alegre.
- 164 TEIXEIRA, P.R.F.; AWRUCH, A.M. Three dimensional simulation of high compressible flows using a multi-time-step integration technique with subcycles. **Applied Mathematical Modelling**, v.25/7, p.613-627, 2001.
- 165 THOMAS, P.D.; LOMBARD, C.K. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. **AIAA Journal**, v.17, p.1030-1037, 1979.
- 166 TOCHER, J.L. **Analysis of plate bending using triangular elements**. Berkeley, 1962. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Civil Engineering, University of California.
- 167 TONG, P. New displacement hybrid finite element models for solid continua. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.2, n.1, p.73-83, 1970.
- 168 VISSER, W. A refined mixed type plate bending element. **Am. Inst. Aeronaut. and Astronaut. J.**, v.7, n.9, p.1801-1803, 1969.
- 169 WALL, W.A.; RAMM, E. Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method. In: IDELSHON, S. *et al.* (Ed.) **Computational Mechanics**, CIMNE, Barcelona, 1998.
- 170 WILLCOX, K.; PERAIRE, J. Aeroelastic computations in the time domain using unstructured meshes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.40, p.2413-2431, 1997.
- 171 YANG, Y.-B.; CHANG, J.-T; YAU, J.-D. A simple nonlinear triangular plate element and strategies of computation for nonlinear analysis, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.178, p.307-321, 1999.

- 172 YIANG, C.B.; KAWAHARA, M. A three step finite element method for unsteady incompressible flows. **Comput.Mech.**, v.11, p.355-370, 1993.
- 173 YUQIU, L.; KEQUI, X. Generalized conforming element for bending and buckling analysis of plates. **Finite Elements Anal. Des.**, v.5, p.15-30, 1989.
- 174 YUQIU, L.; KEQUI, X. Generalized conforming element. **J. Civil Engng.**, v.20, n.1, p.1-14, 1987.
- 175 YUQIU, L.; XIAOMING, B.; ZHIFEI, L.; YIN, X. Generalized conforming plate bending elements using point and line compatibility conditions. **Computers & Structures**, v.54, n.4, p.717-723, 1995.
- 176 ZHANG, H. *et al.* Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes. **Comput. Fluids**, v.22, p.9-23, 1993.
- 177 ZHANG, Q.; UM, L.; WENQI, K. Geometric non-linear analysis of space shell structures using generalized conforming flat shell elements – for space shell structures. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.14, p.941-957, 1998.
- 178 ZIENKIEWICZ, O.C.; BETTESS, P. Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.13, p.1-16, 1978.
- 179 ZIENKIEWICZ, O.C.; CODINA, R. A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part I. The split, characteristic-based scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.20, p.869-885, 1995.
- 180 ZIENKIEWICZ, O.C. *et al.* High speed compressible flow and other advection-dominated problems of fluid dynamics. In: GALLAGHER *et al.* (Ed.) **Finite Elements in Fluids**. New York: Wiley, 1988. v.6, p. 41-48.
- 181 ZIENKIEWICZ, O.C. *et al.*, Split, characteristic based semi-implicit algorithm for laminar/turbulent incompressible flows. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.23, p.787-809, 1996.
- 182 ZIENKIEWICZ, O.C.; LÖHNER, R.; MORGAN, K.; NAKAZAWA, S. Finite elements in fluid mechanics – A decade of progress. In: GALLAGHER *et al.* (Ed.) **Finite Elements in Fluids**. New York: Wiley, 1984. v.5, cap.1, pp.1-26.
- 183 ZIENKIEWICZ, O.C.; MORGAN, K.; SATYA SAI, B.V.K. A general algorithm for compressible and incompressible flow – Part II. Tests on the explicit form. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.20, p.887-913, 1995.

- 184 ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method, basic formulation and linear problems**. 4.ed. Singapore: McGraw-Hill, 1989. v.1.
- 185 ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The finite element method, solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity**. 4.ed. Singapore: McGraw-Hill, 1991. v.2.
- 186 ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; TOO, J.M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.3, n.2, p.275-290, 1971.
- 187 ZIENKIEWICZ, O.C.; WU, J. A general explicit or semi-explicit algorithm for compressible and incompressible flows. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.35, p.457-479, 1992.
- 188 ZIENKIEWICZ, O.C.; WU, J. Incompressibility without tears – how to avoid restrictions of mixed formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.32, p.1189-1203, 1991.

ANEXO A - MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

A discretização via método de elementos finitos de problemas expressos por equações diferenciais parciais implica, frequentemente, na solução de sistemas lineares de equações do tipo:

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b} \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz quadrada, simétrica positiva definida e esparsa, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ o vetor das incógnitas e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ o vetor dos termos independentes. Os métodos de solução direta exigem muita capacidade de armazenamento de dados, além da solução direta por fatorização da matriz global implicar um grande número de multiplicações e adições, que podem conduzir a erros de sérias proporções, quando se trata de uma solução de grandes sistemas de equações. Já os métodos iterativos, exigem uma capacidade de armazenamento bem menor, permitindo a solução de problemas complexos e maiores. Aliado a isso, estes métodos exploram bastante os recursos de processamento vetorizado e paralelo dos computadores atuais.

Neste trabalho, é utilizado o método dos gradientes conjugados (MGC) (Hestenes e Stiefel, 1952) para a solução destes sistemas que consiste, como na maioria dos métodos iterativos, na minimização de um funcional quadrático definido em \mathbb{R}^N . Este funcional quadrático surge da aplicação do método de Ritz-Galerkin para elementos finitos e tem a forma:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Kx} - \mathbf{b}^T \mathbf{x} - c \quad (\text{A.2})$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e $f(\mathbf{x})$ é a energia potencial do sistema discreto. O funcional da Eq. (A.2) tem um mínimo no ponto onde seu gradiente dado por

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Kx} - \mathbf{b} \quad (\text{A.3})$$

torna-se nulo. A solução da Eq. (A.1) é equivalente a minimização do funcional (A.2), realizando iterações do tipo:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k \quad (\text{A.4})$$

onde \mathbf{x}^k é uma estimativa da solução exata na iteração k , $\alpha_k \mathbf{p}^k$ a correção desta estimativa. Nessa expressão, o vetor \mathbf{p}^k define a direção da correção e é chamado de *vetor de busca* e o escalar α_k determina a magnitude desta correção. O processo de determinação de α_k é denominado de *busca de linha (line search)*. α_k é calculado de modo a minimizar f ao longo da linha $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k$, ou seja:

$$\frac{d}{d\alpha_k} [f(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k)] = 0 \quad (\text{A.5})$$

No MGC, admite-se que o vetor direção de busca é definido pela seguinte iteração:

$$\mathbf{p}^{k+1} = -\mathbf{g}^{k+1} + \beta_k \mathbf{p}^k \quad (\text{A.6})$$

com $\mathbf{p}^0 = -\mathbf{g}^0$ e a iteração do gradiente de f dada por

$$\mathbf{g}^{k+1} = \mathbf{g}^k + \alpha_k \mathbf{K} \mathbf{p}^k \quad (\text{A.7})$$

A escolha de β_k é feita de modo a assegurar que os vetores \mathbf{p}^k sejam mutuamente ortogonais (ou conjugados) em relação à matriz \mathbf{K} , de forma que é possível escrever

$$\mathbf{p}^{i,T} \mathbf{K} \mathbf{p}^j = 0 \text{ para todo } i \neq j \quad (\text{A.8})$$

esta condição conduz a outra relação de ortogonalidade dada por (Golub e Van Loan, 1989):

$$\mathbf{g}^{i,T} \mathbf{g}^j = 0 \text{ para todo } i \neq j \quad (\text{A.9})$$

Estas relações estabelecem os coeficientes de correção dados pelas expressões:

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}^{k+1,T} \cdot \mathbf{g}^{k+1}}{\mathbf{g}^{k,T} \cdot \mathbf{g}^k} \quad (\text{A.10})$$

e

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{g}^{k,T} \cdot \mathbf{g}^k}{\mathbf{p}^{k,T} \cdot \mathbf{K} \mathbf{p}^k} \quad (\text{A.11})$$

Se for definido um vetor \mathbf{r} , denominado de vetor resíduo, da forma:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{g} = \mathbf{b} - \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (\text{A.12})$$

é possível formalizar o MGC através da sequência de operações com as expressões (A.4), (A.6), (A.7), (A.10) e (A.11), substituindo o vetor gradiente \mathbf{g} pelo vetor resíduo definido pela expressão (A.12). Assim, o algoritmo básico do método dos gradientes conjugados fica como segue (Alquati, 1991):

1. Inicialização

a) $k=0$, $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0 = \mathbf{b}$

2. Atualização dos vetores estimativa e resíduo

b) $\alpha_k = \frac{\mathbf{r}^{k,T} \cdot \mathbf{r}^k}{\mathbf{p}^{k,T} \cdot \mathbf{K}\mathbf{p}^k}$

c) $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k$

d) $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \alpha_k \mathbf{K}\mathbf{p}^k$

3. Teste de convergência

e) Se $\frac{\|\mathbf{r}^{k+1}\|_2}{\|\mathbf{r}^0\|_2} \leq \textit{tolerância}$, pare

4. Atualização do vetor direção de busca

h) $\beta_k = \frac{\mathbf{r}^{k+1,T} \cdot \mathbf{r}^{k+1}}{\mathbf{r}^{k,T} \cdot \mathbf{r}^k}$

i) $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{r}^{k+1} + \beta_k \mathbf{p}^k$

j) $k=k+1$

k) retorna à etapa 2.

A técnica de pré-condicionamento tem por objetivo acelerar a taxa de convergência na solução iterativa de um determinado sistema de equações. A idéia central desta técnica consiste na aplicação do MGC a um sistema transformado de equações, obtido pela pré-multiplicação da Eq.(A.1) por uma matriz \mathbf{P} da forma:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{A.13})$$

onde \mathbf{P} é uma matriz de condicionamento. O sistema (A.13) é chamado de sistema condicionado. Neste trabalho, é utilizado o pré-condicionamento diagonal ou de Jacobi que além de sua simplicidade, exige uma capacidade de armazenamento computacional bem menor do que o da maioria dos condicionadores, haja visto que os termos não diagonais de \mathbf{P} são nulos. Define-se a matriz de condicionamento da forma:

$$\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{K}) = \mathbf{D} , \quad (\text{A.14})$$

ou seja, \mathbf{P} é constituída dos termos da diagonal de \mathbf{K} .

O algoritmo do método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento fica da forma (Alquati, 1991):

1. Inicialização

a) $k=0, \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}, \mathbf{r}^0 = \mathbf{b}$

b) resolver $\mathbf{P} \mathbf{z}^0 = \mathbf{r}^0$

c) $\mathbf{p}^0 = \mathbf{z}^0$

2. Atualização dos vetores estimativa e resíduo

d) $\alpha_k = \frac{\mathbf{r}^{k,T} \cdot \mathbf{z}^k}{\mathbf{p}^{k,T} \cdot \mathbf{K} \mathbf{p}^k}$

e) $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k$

f) $\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \alpha_k \mathbf{K} \mathbf{p}^k$

3. Teste de convergência

g) Se $\frac{\|\mathbf{r}^{k+1}\|_2}{\|\mathbf{r}^0\|_2} \leq \text{tolerância}$, pare

4. Atualização do vetor direção de busca

h) resolver $\mathbf{P} \mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{r}^{k+1}$

i) $\beta_k = \frac{\mathbf{r}^{k+1,T} \cdot \mathbf{z}^{k+1}}{\mathbf{r}^{k,T} \cdot \mathbf{z}^k}$

j) $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{z}^{k+1} + \beta_k \mathbf{p}^k$

k) $k=k+1$

l) retorna à etapa 2.

ANEXO B – EVITANDO AS RESTRIÇÕES DE BABUSKA-BREZZI

Os problemas de escoamentos de fluidos incompressíveis ou quase-compressíveis, geralmente, requerem a solução de um sistema misto de equações em termos de velocidade e de pressão na seguinte forma discretizada (Zienkiewicz e Wu, 1991):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{v} e \mathbf{p} são os valores nodais da velocidade e da pressão para o domínio em análise. Nota-se que, devido à existência de elementos nulos na diagonal, tal sistema é singular, a menos que o número de variáveis de \mathbf{v} seja maior que o de \mathbf{p} , requerendo que as funções de interpolação das componentes de velocidade seja de uma ordem maior do que as usadas para a pressão. Esta restrição ao uso de interpolações arbitrárias das Equações discretizadas (B.1) é chamada de condição de estabilidade de *Babuska-Brezzi* (Zienkiewicz e Taylor, 1989). Como já citado na seção 1.3, alguns autores propuseram alternativas para evitar a dificuldade imposta por esta condição.

Pretende-se neste Anexo, examinar a estrutura do sistema de equações proposto no presente trabalho, quando o regime permanente é alcançado. As equações discretizadas no tempo e no espaço para o campo de velocidades e pressão são dadas pelas Eq. (48), (50), (53) e (55), reproduzidas a seguir na formulação euleriana e sem os termos advectivos para simplificação da apresentação:

$$\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = (\Omega_E)^{-1} \left[\left(\mathbf{C} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_a \right) \bar{\mathbf{U}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_i \bar{\mathbf{p}}^n \right] \quad (\text{B.2})$$

$$\left(\tilde{\mathbf{M}} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{H} \right) \Delta \bar{\mathbf{p}} = \Delta t \left(\mathbf{L}_i^T \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} + \mathbf{f}_a \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{4\Omega_E} \mathbf{L}_i \Delta \bar{\mathbf{p}} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{M} \Delta \bar{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \Delta t \left[-\mathbf{K}_b \bar{\mathbf{U}}_i^n + \mathbf{Q}_i \left(\bar{\mathbf{p}}^n + \Delta \bar{\mathbf{p}}/2 \right) + \mathbf{S}_{bi} \right] \quad (\text{B.5})$$

onde $\mathbf{K}_a \bar{\mathbf{U}}_i^n = \mathbf{L}_j \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^n$; $\mathbf{K}_b \bar{\mathbf{U}}_i^n = \mathbf{Q}_j \bar{\boldsymbol{\tau}}_{ij}^n$ e $i, j = 1, 2, 3$. Em regime permanente $\Delta \bar{\mathbf{U}}_i$ e $\Delta \bar{\mathbf{p}}$ são nulos, logo as Eq. (B.2) a (B.5) ficam da seguinte forma:

$$\tilde{\bar{\mathbf{U}}}_i^{n+1/2} = (\Omega_E)^{-1} \left[\left(\mathbf{C} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_a \right) \bar{\mathbf{U}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_i \bar{\mathbf{p}}^n \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{L}_i^T \tilde{\bar{\mathbf{U}}}_i^{n+1/2} = -\mathbf{f}_a \quad (\text{B.7})$$

$$\bar{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \tilde{\bar{\mathbf{U}}}_i^{n+1/2} \quad (\text{B.8})$$

$$-\mathbf{K}_b \bar{\mathbf{U}}_i^n + \mathbf{Q}_i \bar{\mathbf{p}}^n = -\mathbf{S}_{bi} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo as Eq. (B.6) nas Eq. (B.7) obtém-se a seguinte equação:

$$(\Omega_E)^{-1} \left[\mathbf{L}_i^T \left(\mathbf{C} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_a \right) \bar{\mathbf{U}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i \bar{\mathbf{p}}^n \right] = -\mathbf{f}_a \quad (\text{B.10})$$

Assim, o sistema misto de equações fica composto das Eq. (B.10) e (B.9) resultando:

$$\begin{bmatrix} (\Omega_E)^{-1} \mathbf{L}_i^T \left(\mathbf{C} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_a \right) & -\frac{\Delta t}{2} (\Omega_E)^{-1} \mathbf{L}_i^T \mathbf{L}_i \\ -\mathbf{K}_b & \mathbf{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_i^n \\ \bar{\mathbf{p}}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_a \\ -\mathbf{S}_{bi} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Observa-se que o sistema de equações misto formado não possui os elementos da diagonal nulos, evitando a restrição de *Babuska-Brezzi*.

ANEXO C – A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA PARA O ELEMENTO GPL-T9

O elemento GPL-T9 é um elemento triangular conforme generalizado, que considera a rotação no plano da superfície média do elemento θ_z (*drilling* DOF). Ele utiliza as condições de compatibilidade de ponto em cada nó e as condições de compatibilidade de linha ao longo de cada lado do elemento. A introdução de θ_z , além de evitar a singularidade da matriz de rigidez em elementos coplanares, aumenta a precisão numérica das variáveis de membrana. Sua simples construção para o campo de deslocamentos com 6 graus de liberdade por nó, permite o uso conjunto com elementos de tipo viga.

C.1 DESLOCAMENTOS DE MEMBRANA

Os deslocamentos de membrana em função de seus valores nodais foram mostrados na Eq. (98) e é reproduzida como segue:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}_m \mathbf{u}_m^e \quad (\text{C.1})$$

onde \mathbf{u}_m^e são os valores nodais dos deslocamentos de membrana para cada elemento e \mathbf{N}_m é a função de interpolação de membrana, dada por (Zhang *et al.*, 1998):

$$\mathbf{N}_{mi} = \begin{bmatrix} L_i & 0 & N_{u\theta i} \\ 0 & L_i & N_{v\theta i} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{C.2})$$

sendo

$$N_{u\theta i} = \frac{1}{2} L_i (b_m L_j - b_j L_m)$$

$$N_{v\theta i} = \frac{1}{2} L_i (c_m L_j - c_j L_m) \quad (\text{C.3})$$

$$b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j \quad (i,j,m=1,2,3)$$

Nas Eq. (C.2) e (C.3) L_i são as coordenadas de área e x_i, y_i são as coordenadas nodais. A matriz de relação deformação-deslocamento de membrana é dada por:

$$\mathbf{B}_{mi} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} 2b_i & 0 & b_i(b_m L_j - b_j L_m) \\ 0 & 2c_i & c_i(c_m L_j - c_j L_m) \\ 2c_i & 2b_i & (c_i b_m + b_i c_m)L_j - (c_i b_j + b_i c_j)L_m \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

onde A é a área do elemento.

C.2 DESLOCAMENTOS DE FLEXÃO

O princípio da energia potencial modificada é utilizado como ponto de partida para o desenvolvimento do elemento de placa delgada conforme generalizado, expresso da seguinte forma (Yuqiu *et al.*, 1993):

$$\pi_{mp} = \sum_e (\pi_p^e + H) = \text{estacionário} \quad (\text{C.5})$$

onde π_{mp} é a energia potencial modificada, π_p^e é a energia potencial do elemento e e H é uma energia adicional correspondente aos deslocamentos incompatíveis no contorno do elemento ∂A_e dada por:

$$H = \int_{\partial A_e} \left[M_n \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \tilde{\theta}_s \right) + M_{ns} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \right) - Q_n (w - \tilde{w}) \right] ds \quad (\text{C.6})$$

sendo w o deslocamento transversal, \tilde{w} o deslocamento transversal no contorno, $\tilde{\theta}_s$ a rotação de contorno em relação ao eixo tangencial s em ∂A_e , e M_n, M_{ns}, Q_n são os multiplicadores de Lagrange, que representam os esforços de contorno (momento de flexão normal, momento torçor e esforço de corte, respectivamente). Quando o tamanho do elemento tende a zero, também a energia adicional H tende a um valor nulo. Então, π_{mp} degenera para π_p e a matriz de rigidez pode ser desenvolvida baseada na energia potencial na sua forma degenerada π_p . Esse tipo de elemento é chamado de elemento conforme generalizado. Integrando por partes a Eq. (C.6), pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$H = \int_{\partial A_e} \left[M_n \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \tilde{\theta}_s \right) - \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) (w - \tilde{w}) \right] ds + \sum_j (\Delta M_{ns})_j (w - \tilde{w})_j = 0 \quad (C.7)$$

onde j representa o nó do elemento e $(\Delta M_{ns})_j$ é a diferença entre os momentos torçores, agindo em ambos os lados conectados ao nó j . Logo, o campo de deslocamentos transversais w deve satisfazer as seguintes condições:

$$(w - \tilde{w})_j = 0 \quad (C.8)$$

$$\int_{S_k} (w - \tilde{w}) ds = 0 \quad (C.9)$$

$$\int_{S_k} \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \tilde{\theta}_s \right) ds = 0 \quad (C.10)$$

onde S_k ($k=1,2,3$) são lados do elemento. A Eq.(C.8) representa a condição de compatibilidade de ponto para os deslocamentos transversais nodais. As Eq. (C.9) e (C.10) são as condições de compatibilidade para o deslocamento transversal médio e para a inclinação normal média em cada lado do elemento, respectivamente. Considera-se o deslocamento transversal \tilde{w} e o ângulo da normal $\tilde{\theta}_s$ ao longo do lado 1-2, por exemplo, como funções cúbica e linear, respectivamente, como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{1-2} = & (L_1 + L_1^2 L_2 - L_2^2 L_1) w_1 - b_3 L_1^2 L_2 \theta_{x1} - c_3 L_1^2 L_2 \theta_{y1} + (L_2 + L_2^2 L_1 - L_1^2 L_2) w_2 + \\ & b_3 L_2^2 L_1 \theta_{x2} - c_3 L_2^2 L_1 \theta_{y2} \end{aligned} \quad (C.11)$$

$$\tilde{\theta}_{1-2} = \frac{1}{l_{1-2}} [L_1 (c_3 \theta_{x1} - b_3 \theta_{y1}) + L_2 (c_3 \theta_{x2} - b_3 \theta_{y2})] \quad (C.12)$$

onde L_i ($i=1,2,3$) são as coordenadas de área, l_{1-2} é o comprimento do lado conectado aos nós 1 e 2 (ver Fig. 11), $b_3=y_1-y_2$ e $c_3=x_2-x_1$. Expressões similares podem ser obtidas para os lados 2-3 e 3-1 por permutação. Assume-se o campo de deslocamentos transversais no elemento da seguinte forma:

$$w = w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3 + \hat{w} \quad (C.13)$$

onde

$$\hat{w} = \lambda_1 L_1 L_2 + \lambda_2 L_2 L_3 + \lambda_3 L_3 L_1 + \lambda_4 F_4 + \lambda_5 F_5 + \lambda_6 F_6 \quad (\text{C.14})$$

sendo

$$\begin{aligned} F_4 &= L_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right) (L_1 - 1) \\ F_5 &= L_2 \left(L_2 - \frac{1}{2} \right) (L_2 - 1) \\ F_6 &= L_3 \left(L_3 - \frac{1}{2} \right) (L_3 - 1) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Os coeficientes λ_1 a λ_6 da Eq. (C.14) são determinados, aplicando as condições de compatibilidade de linha (C.9) e (C.10), resultando na seguinte expressão para o campo de deslocamentos transversais:

$$w = \mathbf{N}_b \mathbf{u}_b^e \quad (\text{C.16})$$

onde

$$\mathbf{u}_{bi}^e = [w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T \quad (i=1,2,3) \quad (\text{C.17})$$

e \mathbf{N}_b é uma função de interpolação de momento dada por:

$$N_{bi} = [N_i \quad N_{xi} \quad N_{yi}]^T \quad (i=1,2,3) \quad (\text{C.18})$$

sendo

$$\begin{aligned} N_i &= L_i - 2 F_i + (1 - r_j) F_j + (1 + r_m) F_m \\ N_{xi} &= -\frac{1}{2} [b_m L_i L_j - b_j L_m L_i + (b_j - b_m) F_i + (r_j b_j + b_m) F_j + (r_m b_m - b_j) F_m] \\ N_{yi} &= -\frac{1}{2} [c_m L_i L_j - c_j L_m L_i + (c_j - c_m) F_i + (r_j c_j + c_m) F_j + (r_m c_m - c_j) F_m] \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

e

$$F_i = L_i(L_i - 0.5)(L_i - 1)$$

$$r_i = \frac{1}{l_{j-m}^2} (l_{i-m}^2 - l_{i-j}^2) \quad (i,j,m=1,2,3) \quad (C.20)$$

$$l_{i-j} = \sqrt{x_{i-j}^2 + y_{i-j}^2}, \quad x_{i-j} = x_i - x_j, \quad y_{i-j} = y_i - y_j$$

A matriz relação deformação-deslocamento de momento é dada por:

$$\mathbf{B}_{bi} = - \begin{bmatrix} N_{i,xx} & N_{xi,xx} & N_{yi,xx} \\ N_{i,yy} & N_{xi,yy} & N_{yi,yy} \\ 2N_{i,xy} & 2N_{xi,xy} & 2N_{yi,xy} \end{bmatrix} \quad (C.21)$$

C.3 MATRIZ DE RIGIDEZ NÃO-LINEAR

A matriz geométrica apresentada na Eq. (111) é dada por:

$$\mathbf{G}_{Gi} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & N_{xi,x} & N_{yi,x} \\ N_{i,y} & N_{xi,y} & N_{yi,y} \end{bmatrix} \quad (C.22)$$

resultando em uma matriz de rigidez não-linear geométrica como segue:

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_{t_A} \mathbf{G}_G^T \mathbf{T} \mathbf{G}_G \, dA \quad (C.23)$$

onde \mathbf{T} são as forças internas de membrana dada pela Eq.(110).

C.4 MATRIZES DE MASSA E DE AMORTECIMENTO

É empregada uma matriz de massa consistente, com funções lineares iguais para todos os graus de liberdade de translação, dada pela equação:

$$\mathbf{M} = h \rho_E \int_A \mathbf{H}_M^T \mathbf{H}_M \, dA \quad (C.24)$$

onde h é a espessura do elemento, ρ_E é a massa específica e

$$\mathbf{H}_M = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

Para a matriz de amortecimento utiliza-se o amortecimento de Rayleigh (Bathe, 1996), dado por:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (\text{C.26})$$

onde α e β são as constantes de Rayleigh determinadas a partir dos autovalores do sistema.

ANEXO D – A FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA PARA O ELEMENTO DKT

D.1 DESLOCAMENTOS DE MEMBRANA

O vetor de deslocamentos nodais de membrana para este elemento é dado por:

$$\mathbf{u}_{mi}^e = [u_{xi} \quad u_{yi}]^T \quad (i=1,2,3) \quad (\text{D.1})$$

onde u_{xi} , u_{yi} são os graus de liberdade de translação nodais. A função de interpolação \mathbf{N}_m para este elemento é dada pela expressão:

$$\mathbf{N}_{mi} = \begin{bmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{D.2})$$

A matriz relação deformação-deslocamento de membrana fica da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_{mi} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} 2b_i & 0 \\ 0 & 2c_i \\ 2c_i & 2b_i \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Neste elemento, as matrizes \mathbf{K}_b e \mathbf{K}_m não contém rigidez correspondente a rotação θ_z . Com o objetivo de evitar uma singularidade da matriz de rigidez, mas sem afetar os resultados significativamente, impõe-se uma rigidez artificial dada por (Bathe e Ho, 1981):

$$k_{\theta_z} = \left(\frac{E h^3}{2A} \right) 10^{-4} \quad (\text{D.4})$$

onde E é o módulo de elasticidade, h é a espessura da placa e A é a área da superfície média do elemento.

D.2 DESLOCAMENTOS DE FLEXÃO

A teoria de placas que inclui o cisalhamento transversal (teoria de Reissner ou Mindlin) é uma generalização da hipótese de Kirchhoff: “os pontos pertencentes a uma reta originalmente normal à superfície indeformada da placa permanecem contidas nesta reta que

não necessariamente é normal à superfície média deformada”. Como as placas delgadas são governadas pela teoria de Kirchhoff, essa teoria é aplicada apenas em pontos discretos do elemento DKT. A formulação do elemento DKT (Batoz, 1980) baseia-se nas seguintes considerações:

a) As rotações da normal à superfície média da placa com os planos xz e yz representadas por $\beta_x = -w_{,x}$ e $\beta_y = -w_{,y}$, respectivamente, variam de forma quadrática no elemento, isto é

$$\beta_x = -w_{,x} = N_i \beta_{xi} \quad \beta_y = -w_{,y} = N_i \beta_{yi} \quad (D.5)$$

onde $i=1$ a 6 representam os nós de canto e intermediários (como mostra a Fig. D.1) e N_i são as funções de forma dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= 2L_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right) & N_2 &= L_2 (2L_2 - 1) & N_3 &= L_3 (2L_3 - 1) \\ N_4 &= 4L_2 L_3 & N_5 &= 4L_3 L_1 & N_6 &= 4L_2 L_1 \end{aligned} \quad (D.6)$$

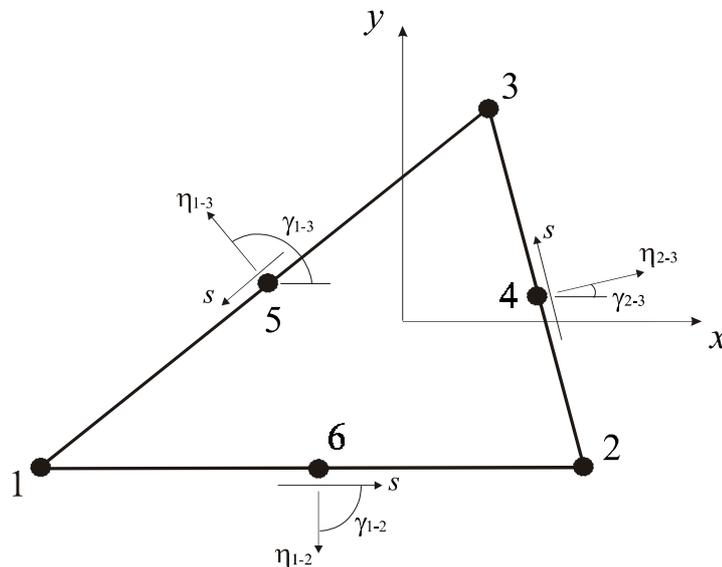


FIGURA D.1 – Representação das rotações da normal à superfície média da placa

b) A hipótese de Kirchhoff impõe as seguintes condições para os nós de canto 1, 2 e 3:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{bmatrix} = 0 \quad (D.7)$$

e para os nós intermediários 4, 5 e 6:

$$\beta_{sk} + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_k = 0 \quad (\text{D.8})$$

Também a condição de que a variação de w ao longo dos lados é cúbica, ou seja:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_k = \frac{3}{2l_{i-j}} w_i - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \frac{3}{2l_{i-j}} w_j - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_j \quad (\text{D.9})$$

onde o índice k representa os nós intermediários 4, 5 e 6 e os índices i, j representam os nós dos vértices do triângulo. $l_{i,j}$ é o comprimento do lado $i-j$.

c) É imposta uma variação linear de β_n ao longo dos lados como segue:

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} (\beta_{ni} + \beta_{nj}) \quad (\text{D.10})$$

onde $k=4,5$ e 6 representam os nós intermediários dos lados 2-3, 3-1 e 1-2, respectivamente. Das Eq. (D.5) a (D.10) observa-se que a relação entre as rotações e o deslocamento transversal w , nos lados do triângulo, dada pela Eq. (D.8), tem uma variação cúbica (ou variação quadrática de $\partial w/\partial s$).

Para obter-se β_x e β_y , em termos de deslocamentos nodais, são necessárias as seguintes relações geométricas para cada lado do triângulo (ver Fig. D.1):

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{i-j} & -\text{sen} \gamma_{i-j} \\ \text{sen} \gamma_{i-j} & \cos \gamma_{i-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{bmatrix} w_{,s} \\ w_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{i-j} & \text{sen} \gamma_{i-j} \\ \text{sen} \gamma_{i-j} & -\cos \gamma_{i-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

onde $\gamma_{i-j} = (\bar{x}, \bar{n}_{i-j})$. Usando as Eq. (D.5) a (D.12), pode-se obter as seguintes expressões para β_x e β_y :

$$\beta_x = \mathbf{H}_x \mathbf{U}_b^e \quad \beta_y = \mathbf{H}_y \mathbf{U}_b^e \quad (\text{D.13})$$

onde \mathbf{H}_x e \mathbf{H}_y são funções de interpolação dadas por:

$$\mathbf{H}_{x1} = 1.5(a_6 N_6 - a_5 N_5) \quad \mathbf{H}_{x2} = b_5 N_5 + b_6 N_6 \quad \mathbf{H}_{x3} = N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6 \quad (D.14)$$

$$\mathbf{H}_{y1} = 1.5(d_6 N_6 - d_5 N_5) \quad \mathbf{H}_{y2} = -N_1 + e_5 N_5 + e_6 N_6 \quad \mathbf{H}_{y3} = -\mathbf{H}_{x2}$$

As funções \mathbf{H}_{x4} , \mathbf{H}_{x5} , \mathbf{H}_{x6} , \mathbf{H}_{y4} , \mathbf{H}_{y5} e \mathbf{H}_{y6} são obtidas através das expressões acima, substituindo N_1 por N_2 e os índices 6 e 5 por 4 e 6, respectivamente. As funções \mathbf{H}_{x7} , \mathbf{H}_{x8} , \mathbf{H}_{x9} , \mathbf{H}_{y7} , \mathbf{H}_{y8} e \mathbf{H}_{y9} são obtidas substituindo N_1 por N_3 e os índices 6 e 5 por 5 e 4, respectivamente. As outras variáveis que compõem as Eq. (D.14) são:

$$a_k = -\frac{x_{i-j}}{l_{i-j}^2} \quad b_k = -\frac{3x_{i-j} y_{i-j}}{4l_{i-j}^2} \quad c_k = \frac{\left(\frac{1}{4}x_{i-j}^2 - \frac{1}{2}y_{i-j}^2\right)}{l_{i-j}^2} \quad (D.15)$$

$$d_k = -\frac{y_{i-j}}{l_{i-j}^2} \quad e_k = -\frac{\left(\frac{1}{4}y_{i-j}^2 - \frac{1}{2}x_{i-j}^2\right)}{l_{i-j}^2}$$

onde $k=4, 5, 6$ são os nós intermediários dos lados $i-j=2-3, 3-1, 1-2$, respectivamente. A matriz relação deformação-deslocamento de flexão fica da forma:

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x,x}^T \\ \mathbf{H}_{y,y}^T \\ \mathbf{H}_{x,y}^T + \mathbf{H}_{y,x}^T \end{bmatrix} \quad (D.16)$$

A formação da matriz de rigidez de flexão ${}^t\mathbf{K}_b$ é realizada utilizando uma integração numérica com três pontos de integração.

D.3 MATRIZ DE RIGIDEZ NÃO-LINEAR

A matriz de rigidez não-linear para o elemento DKT é dada por (Bathe e Ho, 1981):

$${}^t\mathbf{K}_{NL} = \int_A \mathbf{G}_D^T {}^t\hat{\mathbf{T}} \mathbf{G}_D dA \quad (D.17)$$

onde

$$\mathbf{G}_D = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_i & c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i & c_i \end{bmatrix}^T \quad (i = 1,2,3) \quad (\text{D.18})$$

é a matriz geométrica, e $\hat{\mathbf{T}}$ é uma matriz composta pelas forças internas de membrana dada pela Eq. (113).

As matrizes de massa e de amortecimento do elemento DKT são as mesmas utilizadas pelo elemento GPL-T9, descritas no Anexo C.

ANEXO E – A TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS PARA OS ELEMENTOS USADOS NA ANÁLISE DA ESTRUTURA

As equações de equilíbrio da estrutura devem ser estabelecidas no sistema de coordenadas global. Por isso, é necessário determinar uma relação entre o sistema de coordenadas local x^l, y^l, z^l e o sistema de coordenadas global x^g, y^g, z^g (ver Fig. E.1).

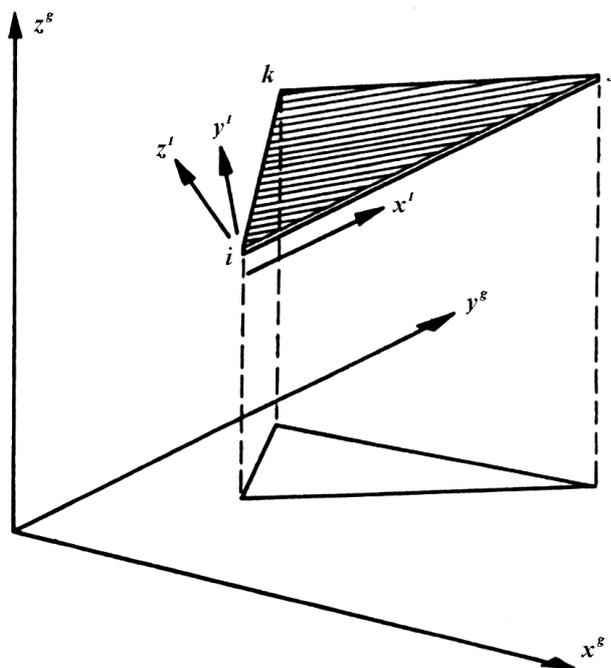


FIGURA E.1 – Sistemas de coordenadas local e global de um elemento triangular

Os deslocamentos de um determinado nó i , por exemplo, são transformados de um sistema global para um sistema local da forma (Zienkiewicz e Taylor, 1991):

$$\mathbf{u}_i^l = \mathbf{T}_r \mathbf{u}_i^g \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\mathbf{u}_i = [u_{xi} \quad u_{yi} \quad u_{zi} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^T \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

é a matriz de transformação global-local, sendo $\boldsymbol{\lambda}$ uma matriz composta pelos cossenos dos ângulos entre os eixos (x^l, y^l, z^l) e os eixos (x^g, y^g, z^g) , dada por:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Na Equação (E.4), λ_{xx} , por exemplo, é o cosseno do ângulo entre o eixo x^l e o eixo x^g . Os valores desses cossenos são calculados da seguinte forma (Zhang *et al.*, 1998):

$$\begin{aligned} \lambda_{xx} &= \frac{x_2^g - x_1^g}{l_{1-2}} & \lambda_{xy} &= \frac{y_2^g - y_1^g}{l_{1-2}} & \lambda_{xz} &= \frac{z_2^g - z_1^g}{l_{1-2}} \\ \lambda_{zx} &= \frac{x_c}{2A} & \lambda_{zy} &= \frac{y_c}{2A} & \lambda_{zz} &= \frac{z_c}{2A} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\lambda_{yx} = \lambda_{zy} \lambda_{xz} - \lambda_{xy} \lambda_{zz} \quad \lambda_{yy} = \lambda_{xx} \lambda_{zz} - \lambda_{zx} \lambda_{xz} \quad \lambda_{yz} = \lambda_{zx} \lambda_{xy} - \lambda_{xx} \lambda_{zy}$$

onde

$$\begin{aligned} l_{1-2} &= \sqrt{(x_2^g - x_1^g)^2 + (y_2^g - y_1^g)^2 + (z_2^g - z_1^g)^2} \\ x_c &= (y_2^g - y_1^g)(z_3^g - z_1^g) - (z_2^g - z_1^g)(y_3^g - y_1^g) \\ y_c &= (x_2^g - x_1^g)(z_3^g - z_1^g) - (z_2^g - z_1^g)(x_3^g - x_1^g) \\ z_c &= (x_2^g - x_1^g)(y_3^g - y_1^g) - (y_2^g - y_1^g)(x_3^g - x_1^g) \\ 2A &= \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

A relação entre os vetores de deslocamentos nodais local e global, de um determinado elemento, é expressa como segue:

$$(\mathbf{u}^e)^l = \tilde{\mathbf{T}}_r (\mathbf{u}^e)^g \quad (\text{E.7})$$

onde

$$\tilde{\mathbf{T}}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_r \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

A Equação (E.7) também é válida para a transformação de outros vetores que fazem parte das equações de equilíbrio, tais como os vetores de força, de aceleração, de velocidade, etc.. A transformação da matriz de rigidez e dos vetores de cargas do sistema local para o sistema global de coordenadas, necessária para o processo de montagem dos elementos finitos (ver Eq. (131)), fica da seguinte forma:

$$(\mathbf{K}^e)^g = \tilde{\mathbf{T}}_r^T (\mathbf{K}^e) \tilde{\mathbf{T}}_r \quad (\text{E.9})$$

$$(\mathbf{R}^e - \mathbf{F}^e)^g = \tilde{\mathbf{T}}_r^T (\mathbf{R}^e - \mathbf{F}^e) \quad (\text{E.10})$$