

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**

**ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO**

**PPGA – PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO**

**Guilherme Ribeiro de Macêdo**

**TESE DE DOUTORADO**

**O USO DE CÓPULAS PARA GESTÃO DE RISCOS**

**Porto Alegre**

**2012**

**Guilherme Ribeiro de Macêdo**

**TESE DE DOUTORADO**

**O USO DE CÓPULAS PARA GESTÃO DE RISCOS**

Tese de Doutorado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Administração.

Orientador: Prof. Marcelo Savino Portugal, Ph.D.

**Porto Alegre**

**2012**

Dedico este trabalho a minha esposa Érika, ao meu pai José, a minha mãe Maria Celia e aos meus irmãos Lucas e Carlos Eduardo.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pela imensa torcida pela vitória dos filhos durante a caminhada da vida e pelos valores transmitidos, principalmente a dedicação ao trabalho, a importância e a liberdade que o ato de poupar recursos proporciona e respeito ao próximo.

À Érika, minha amada esposa que me acompanha nesta jornada com bastante carinho, apoio e paciência.

À Dilcéia, minha sogra que está sempre presente nos momentos mais importantes da vida.

Ao Prof. Marcelo Savino Portugal, Ph. D., pelo exemplo de professor dedicado, didático e zeloso com o rigor teórico e prático de qualquer discussão; pela preocupação e atenção destinada a todos os seus orientandos.

Ao Prof. Gilberto de Oliveira Kloeckner, Ph. D., pelas contribuições essenciais na defesa do projeto, pela amizade e pelo exemplo de conduta moral em tudo o que faz.

Ao Prof. Marco Antônio dos Santos Martins, Dr., pela longa amizade e apoio nos momentos difíceis da vida.

Ao meu amigo Pedro Lutz Ramos, exemplo de companheirismo.

Aos meus amigos de Exército Moisés, Carlos, Adriano, Silveira e Bratfisch por terem me substituído sempre que fiz falta e por apoiarem incondicionalmente meus estudos.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, pelo apoio recebido, pelo estímulo de seus dirigentes, pela amizade e incentivo dos meus estimados colegas de trabalho.

Ao Exército Brasileiro, em especial ao Chefe da CRO/3, pelo apoio financeiro recebido e pelo tempo parcial concedido.

Aos colegas e amigos da Associação dos Profissionais de Investimentos do Mercado de Capitais – APIMEC Sul, pelo apoio e estímulo recebido.

A todos os amigos, familiares e às demais pessoas que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O grande número de publicações na área de finanças atualmente utilizando a modelagem de cópulas pode ser explicada pela capacidade de esta técnica estatística conseguir lidar com a evidência de não normalidade das séries de retornos de ativos financeiros. A não normalidade é evidenciada através do “sorriso de volatilidade” presente em séries de opções de ações perto do vencimento; existência de “caudas pesadas” em carteiras de instituições e consequentemente no gerenciamento de risco das Instituições. Particularmente com relação ao *Value at Risk* (VaR), que é uma técnica estatística que tem por objetivo calcular a perda máxima de uma carteira em dado horizonte de tempo considerando um nível de significância adotado, a existência de caudas pesadas nas séries gera um problema para a determinação da distribuição de probabilidade conjunta, implicando em grande dificuldade na mensuração do grau de exposição aos fatores de risco. Esse fato acaba por dificultar o correto e efetivo gerenciamento de risco de uma carteira, pois em tese, devido à existência de não normalidade, não é possível separar os efeitos de ativos de diferentes características. Em casos de crises e bolhas, o portfólio pode ser mais arriscado que o desejado ou excessivamente conservador. Neste sentido, a utilização de Cópulas torna-se atrativa, pois com esta técnica é possível separar as distribuições marginais de cada ativo da estrutura de dependência das variáveis. O objetivo do trabalho é propor uma modelagem de risco a partir do uso de Cópulas para o cálculo do *Value at Risk* (VaR), utilizando os métodos de volatilidade GARCH (1,1), EWMA e HAR. A aplicação empírica do modelo foi efetuada a partir de uma amostra de uma série de retornos de uma carteira teórica composta por ativos de renda variável (ações preferenciais) das empresas Petrobras, Vale, Usiminas e Gerdau. A amostra utilizada corresponde aos preços diários entre o período de 03 de março de 2006 até 30 de abril de 2010, representando 1.026 observações diárias. Os resultados apurados para a amostra demonstraram que as cópulas tendem a gerar um *Value at Risk* (VaR) significativo para a maioria das famílias de Cópulas, quando testado pelo Teste de Kupiec (1995).

Palavras-Chave: Risco de Mercado – Cópulas – *Value at Risk* (VaR)

## ABSTRACT

The large number of publications in finance using currently copulas can be explained by the ability of this technique to deal with statistical evidence of non-normality of the return series of financial assets. The non-normality is evidenced by the "volatility smile" in the series of stock options near expiration, the existence of "heavy tails" in portfolios of institutions and consequently the risk management of the institutions. Especially regarding the Value at Risk (VaR), which is a statistical technique that aims to calculate the maximum loss a portfolio at a given time horizon considering a significance level, the existence of heavy tails in the series creates a problem for determining the joint probability distribution, resulting in great difficulty in measuring the degree of exposure to risk factors. This fact makes difficult the correct and effective risk management of a portfolio, because in theory, due to the existence of non-normality, it is not possible to separate the effects of assets with different characteristics. In cases of crises and bubbles, the portfolio may be riskier than desired or overly chatty. In this regard, the use of copulas becomes attractive, because with this technique is possible to separate the marginal distributions of each dependence structure of the variables. The objective is to propose a model of risk using copulas for the calculation of Value at Risk (VaR), using the methods of volatility GARCH (1,1), EWMA and HAR. The empirical application of the model was made from a sample of a series of returns of a theoretical portfolio of assets in equities (shares) of Petrobras, Vale, Usiminas and Gerdau. The sample corresponds to the daily prices in the period between March 3<sup>rd</sup>, 2006 until April 30<sup>th</sup>, 2010, representing 1026 daily observations. The results obtained showed that copulas tend to generate a Value at Risk (VaR) for the most significant families of copulas, when tested by the Test of Kupiec (1995).

Keywords: Market Risk - Copulas - Value at Risk (VaR)

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Duas distribuições distintas com igual correlação de $\rho = 0,7$ .....	14
Figura 2 – Dinâmica de dois ativos totalmente não correlacionados.....	15
Figura 3 – Dinâmica de dois ativos totalmente correlacionados .....	16
Figura 4 – Duas distribuições com mesma média porém com desvios diferentes.....	21
Figura 5 – Simulação de um processo estacionário do tipo ruído branco .....	25
Figura 6 – Simulação de um processo AR(1) do tipo $Y_t = 1 + 0,5Y_{t-1} + \varepsilon_t$ , com $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ .	26
Figura 7 – Simulação de um passeio aleatório.....	27
Figura 8 – Simulação de um movimento Browniano Geométrico .....	28
Figura 9 – Gráfico de retornos do Ibovespa no período de 02 de janeiro de 2001 à 26 de novembro de 2011.....	30
Figura 10 – Gráfico das volatilidades pelo desvio padrão e pelo modelo EWMA dos retornos referente ao índice Ibovespa .....	31
Figura 11 – Gráfico de preços normalizados dos ativos pesquisados.....	65
Figura 12 - Função de probabilidade cumulativa para série PETR4 .....	71
Figura 13 - Ajuste das caudas por distribuição de Pareto.....	72
Figura 14 - Simulação de retornos diários com cópula t .....	73

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Matriz de transição de ratings para horizonte de 1 ano.....	41
Tabela 2 – Taxas forward para cada Rating.....	42
Tabela 3 – Número de observações por intervalo de tempo fixado.....	66
Tabela 4 - Teste de ARCH para detecção de heterocedasticidade.....	67
Tabela 5 – Teste estatístico indicando que aceitação da hipótese de que os resíduos não possuem heterocedasticidade .....	67
Tabela 6 – Coeficientes dos modelos GARCH estimados para cada um dos ativos .....	68
Tabela 7 - Distribuição da série estimada por EWMA .....	68
Tabela 8 - Distribuição da série estimada pelo GARCH .....	68
Tabela 9 – Estimação da frequência ótima para os quatro ativos pesquisados.....	69
Tabela 10 - Distribuição da Volatilidade Realizada da GGBR4 .....	69
Tabela 11 - Distribuição da Volatilidade Realizada da PETR4.....	70
Tabela 12 - Distribuição da Volatilidade Realizada da VALE5.....	70
Tabela 13 - Distribuição da Volatilidade Realizada da USIM5 .....	70
Tabela 14 - Resultados calculados para o VaR utilizando GARCH(1,1).....	73
Tabela 15 - Teste de Kupiec para os modelos GARCH(1,1) estimados usando <i>Back Testing</i> .....	73
Tabela 16 - Cálculo do VaR para o modelo EWMA .....	74
Tabela 17 - Resultado do teste de <i>Kupiec</i> para modelos EWMA.....	74
Tabela 18 - Cópulas estimadas para modelos HAR ALL <sup>1</sup> e HAR ALL <sup>2</sup> sem a correção de erro de microestrutura .....	75
Tabela 19 - Cópulas estimadas para modelos HAR ALL <sup>5</sup> , HAR ALL <sup>15</sup> e HAR ALL <sup>30</sup> sem a correção de erro de microestrutura .....	76
Tabela 20 - Testes de Kupiec para os modelos HAR ALL <sup>1</sup> e HAR ALL <sup>2</sup> .....	77
Tabela 21 - Testes de Kupiec para os modelos HAR ALL <sup>5</sup> , HAR ALL <sup>15</sup> e HAR ALL <sup>30</sup> .....	78
Tabela 22 - Cópulas estimadas para o modelo OPT utilizando frequência ótima.....	78
Tabela 23 - Teste de Kupiec para o modelo OPT .....	78
Tabela 24 - Cópulas estimadas para os modelos HAR com correção de microestrutura em intervalos fixos de tempo .....	79
Tabela 25 - Teste de Kupiec para os modelos HLL <sup>1</sup> , HLL <sup>2</sup> e HLL <sup>5</sup> .....	80
Tabela 26 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para GGBR4 .....	91
Tabela 27 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para PETR4.....	92
Tabela 28 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para USIM5 .....	93

Tabela 29 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para VALE5.....	94
---	----

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
<b>PROBLEMA DE PESQUISA</b> .....	12
<b>JUSTIFICATIVA</b> .....	12
<b>OBJETIVOS</b> .....	13
Objetivo Geral.....	13
Objetivos Específicos .....	13
<b>1 Correlação como Medida de Dependência</b> .....	14
1.1 Distribuições Esféricas e Elípticas .....	18
<b>2 Conceituação e Caracterização de Riscos e o modelo do <i>Value at Risk</i> (VaR)</b> .....	20
2.1 Conceituação e Classificação dos tipos de Riscos.....	21
2.2 Modelando preços de ativos financeiros .....	23
2.3 Modelo para preços de ações e outros ativos financeiros .....	27
2.4 Modelos para Estimação de Volatilidade .....	29
2.6 Value at Risk .....	35
2.6.1. VaR Paramétrico e o modelo RiskMetrics® .....	36
2.6.2. VaR Paramétrico de uma carteira com um único ativo .....	36
2.6.3. VaR paramétrico de uma carteira com diferentes ativos.....	38
2.6.4. Simulação Histórica.....	38
2.6.5. Simulação de Monte Carlo.....	39
2.6.6. VaR aplicado a Risco de Crédito : CreditMetrics® .....	40
<b>3 Cópulas</b> .....	47
3.1Exemplificação de Cópulas .....	48
3.2Propriedade da Invariância .....	49
3.3Propriedade da Comonotonicidade.....	49
3.4Medida de dependência em Cópulas .....	50
3.5Dependência Caudal .....	50
3.6Concordância .....	51
3.7Estimação de Cópulas.....	52
3.8Modelos para Estimação de Volatilidade .....	53
<b>4 Comparação entre a estrutura de dependência de Cópulas e Correlação</b> .....	56
<b>5 Método</b> .....	60
<b>6 Resultados</b> .....	65
<b>7 Conclusão</b> .....	81

## INTRODUÇÃO

A modelagem da dependência entre séries financeiras ao longo do tempo é de grande importância para alocação de ativos entre carteiras bem como para o gerenciamento de risco. Modelos tradicionais de alocação de ativos consideram como *proxy* a correlação linear, que é uma medida de dependência intertemporal entre duas variáveis aleatórias. Como exemplo, pode-se citar o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e APT (*Arbitrage Pricing Theory*) (Campbell, Lo, e MacKinlay, 1997) que utilizam a correlação como uma medida de dependência entre diferentes instrumentos financeiros e são derivados sob a hipótese de uma distribuição multivariada Gaussiana, ou seja, uma distribuição normal entre os retornos, para obter uma carteira ótima.

A crescente utilização de derivativos e produtos relacionados nas carteiras mostra as limitações da utilização de correlação linear na modelagem da dependência de risco (Wang, 1997). Isso ocorre, pois a hipótese sobre a distribuição de retornos ser normal não mais se verifica, pelo contrário, as caudas pesadas e a assimetria da distribuição ficam mais evidenciadas pelas pesquisas empíricas.

A proposta da tese é discutir os problemas associados à utilização da correlação linear como medida de dependência; apresentar as implicações decorrentes da utilização da correlação linear no cálculo de *Value at Risk* (VaR) e propor possíveis soluções com o uso das Cópulas para o cálculo de risco em carteira.

Para tanto, a tese está estruturada em sete seções: a primeira é dedicada a apresentar a correlação como medida de dependência entre duas variáveis e as variantes desta medida; a segunda apresenta uma conceituação de risco, classificação dos tipos de risco, análise de séries temporais financeiras e aplicações no cálculo do VaR (*Value at Risk*). Na terceira, estão descritos os principais modelos de Cópulas utilizados na área de finanças para modelagem do grau de dependência entre duas variáveis, a estimação dessas estruturas bem como testes de adequação. A quarta seção está dedicada a mostrar os problemas atuais com a utilização da correlação para cálculo do risco em carteira e comparar as diferenças da técnica do VaR com a utilização de Cópulas. A quinta seção é dedicada à metodologia de aplicação da técnica de correção de microestrutura em séries de ativos brasileiros intradiários para geração do HAR e modelagem de cópulas para cálculo de risco de mercado através da

utilização de uma carteira teórica. A sexta e a última sessão apresentam os resultados encontrados e apontam possíveis aplicações futuras.

### PROBLEMA DE PESQUISA

O *Value at Risk*, originado pelo J.P Morgan, é atualmente a principal ferramenta utilizada para a mensuração de risco, principalmente o de mercado e de crédito. Apesar da exigência de hipóteses simplificadoras, tal modelo estatístico é largamente adotado por sua simplicidade, tanto de implementação, quanto de interpretação. Entretanto, são justamente algumas hipóteses não verificáveis empiricamente que causam uma variação muito grande no resultado. Um desses parâmetros relevantes para a mensuração do VaR é a correlação entre ativos.

A proposta desta tese é apresentar a teoria estatística tanto de correlação linear quanto de cópulas, apresentando os pontos positivos e negativos de cada metodologia; discutir a aplicação das cópulas no cálculo do VaR e apresentar duas contribuições para a literatura de finanças no Brasil: i) análise da técnica de cópulas aplicadas ao *Value at Risk* no Brasil, utilizando as metodologias já conhecidas para verificação da eficácia do modelo estimado para risco de mercado; e ii) utilização dos modelos HAR, GARCH e EWMA para geração das cópulas, sendo que o último é frequentemente utilizado em Instituições Bancárias com a recomendação de uso do parâmetro lambda à 94%.

### JUSTIFICATIVA

O grande número de publicações na área de finanças atualmente utilizando a modelagem de cópulas pode ser explicada pela capacidade de esta técnica estatística conseguir lidar com a evidência de não normalidade das séries de retornos de ativos financeiros. A não normalidade é evidenciada através do “sorriso de volatilidade” presente em séries de opções de ações perto do vencimento; existência de “caudas pesadas” em carteiras de instituições e conseqüentemente no gerenciamento de risco das Instituições.

Particularmente com relação ao *Value at Risk* (VaR), que é uma técnica estatística que tem por objetivo calcular a perda máxima de uma carteira em dado horizonte de tempo considerando um nível de significância adotado, a existência de caudas pesadas nas séries gera um problema para a determinação da distribuição de probabilidade conjunta, implicando em grande dificuldade na mensuração do grau de exposição aos fatores de risco. Esse fato acaba por dificultar o correto e efetivo gerenciamento de risco de uma carteira, pois em tese, devido à existência de não normalidade, não é possível separar os efeitos de ativos de

diferentes características<sup>1</sup>. Em casos de crises e bolhas, o portfólio pode ser mais arriscado que o desejado ou excessivamente conservador. Neste sentido, a utilização de Cópulas torna-se atrativa, pois com esta técnica é possível separar as distribuições marginais de cada ativo da estrutura de dependência, das variáveis. A implicação deste fato é o abandono do uso da correlação linear cujas limitações são apresentadas em detalhes no capítulo 1.

Além da contribuição teórica através da aplicação da técnica de cópulas no cálculo do VaR, a tese reveste-se de grande importância empírica em face dos recentes desdobramentos no que concerne à regulação do setor bancário. O novo acordo<sup>2</sup> de bancos centrais ocorrido na Basileia durante o mês de setembro de 2010 estipula novos limites mínimos de capital que deve ser alocado nos bancos para fazer frente à crises severas.

## CONTRIBUIÇÃO ORIGINAL

O presente trabalho apresenta como contribuição original a proposição de modelos de *Value at Risk* (VaR) que utilizem cópulas como estruturas de dependência para mensuração de risco de mercado no Brasil.

## OBJETIVOS

### **Objetivo Geral**

Propor e aplicar empiricamente modelos de VaR baseados em cópulas para mensuração de risco de mercado.

### **Objetivos Específicos**

- Estudo das características de cópulas, através das estimações para dados de ativos brasileiros;
- Aplicação da estrutura de dependência estimada acima para utilização no cálculo de risco de mercado através do *Value at Risk*;
- Verificação da eficácia dos modelos de risco de mercado de diversas variantes utilizando testes de *backtesting*.

---

<sup>1</sup> Por exemplo, torna-se difícil separar os efeitos de um ativo lastreado em câmbio, de outro ativo lastreado em taxa SELIC.

<sup>2</sup> O novo acordo ficou conhecido como Basileia 3.

## 1 Correlação como Medida de Dependência

A correlação é um dos conceitos mais utilizados em finanças e também um dos mais incompreendidos. Isso ocorre em grande parte, pois essa ferramenta é utilizada para modelar qualquer noção de dependência.

Para um matemático, a correlação é uma dentre muitas outras medidas de dependência estocástica entre variáveis. Formalmente, a correlação é uma medida utilizada para distribuições multivariadas Gaussianas, mais especificamente para distribuições elípticas.<sup>3</sup> Portanto, como a maioria das séries financeiras não possui essa característica, utilizar essa medida como *proxy* pode se tornar em muitos casos uma aproximação muito ruim para o que se pretende investigar, ou seja, a relação entre duas séries.

Como exemplificação dos problemas que a correlação apresenta, considere duas distribuições bivariadas com diferentes estruturas de dependência<sup>4</sup>, cujos gráficos de simulação de 1000 variáveis randômicas são apresentados na figura 1.

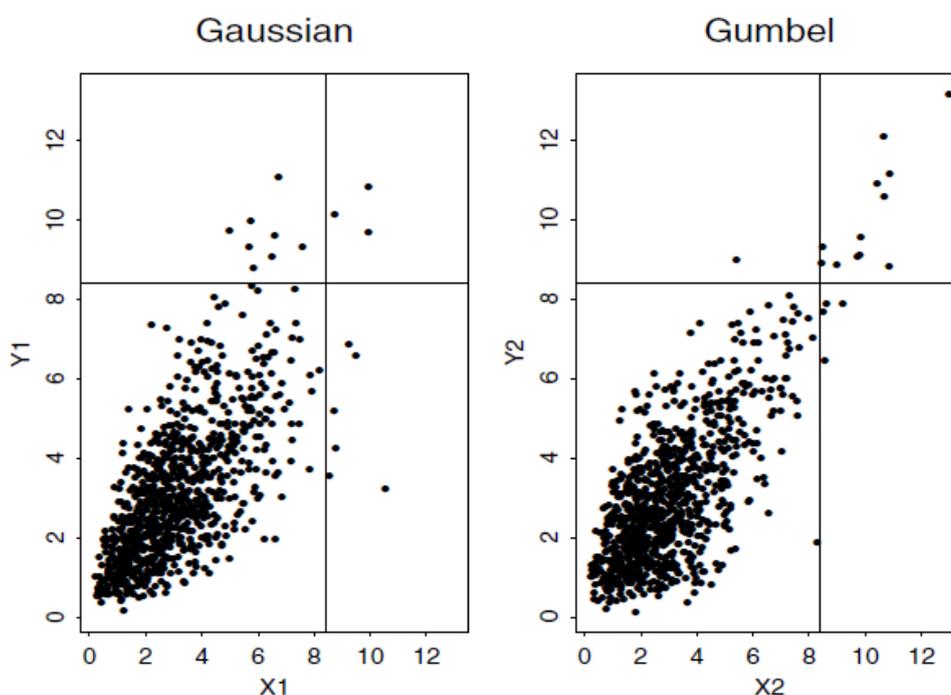


Figura 1 – Duas distribuições distintas com igual correlação de  $\rho = 0,7$ <sup>5</sup>

<sup>3</sup> Uma distribuição do tipo elíptica é definida pela seguinte função  $f(x) = k \cdot g((x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu))$ , onde  $k$  representa um fator de escala;  $x$  é um vetor aleatório de dimensão  $n$  e média  $\mu$ ;  $\Sigma$  é uma matriz proporcional à matriz de covariância; e  $g$  é uma função de mapeamento de números reais não-negativos em uma área finita sob a curva. Se a dimensão é 2, ou seja, se  $n=2$ , então necessariamente cada locus (conjunto de pares de valores  $x_1, x_2$  que levam a um valor de  $f(x)$ ) é uma elipse. É fácil perceber que a função densidade acima é simétrica em torno do vetor de média  $\mu$  e tal propriedade é chamada de simetria elíptica. (Owen, J., e Rabinovitch, R., 1983)

<sup>4</sup> A estrutura de dependência das séries será explicitada na sessão de Teoria sobre as Cópulas.

Essas duas distribuições possuem uma correlação entre  $X_1, Y_1$  e entre  $X_2, Y_2$  de 0,70, apesar de o gráfico mostrar que as dispersões são um pouco diferentes. Além disso, se interpretarmos a escala dos dois gráficos como um rótulo, medido em porcentagem, para perdas financeiras em carteiras de ativos, a dispersão mais a direita mostra-se pior, por permitir maiores perdas em carteira. Tal situação demonstra que é muito perigoso utilizar somente a correlação como parâmetro relevante para medição de grau de dependência entre duas variáveis.

O fato de as duas distribuições acima apresentarem o mesmo grau de correlação é devido à utilização da correlação linear que é definida como:

$$\rho(X, Y) = \text{COV}[X, Y] / ((\sigma^2[X] \sigma^2[Y])^{1/2}) \quad (1)^6$$

A correlação linear, como o próprio nome sugere, é medida de dependência linear. Os casos extremos aparecem quando:

- a) As variáveis aleatórias são independentes:

Neste caso, como não há nenhum grau de dependência entre as variáveis, o valor da correlação entre elas é NULO, pois a covariância também é NULA. Graficamente, uma situação que expressa essa relação entre dois ativos hipotéticos encontra-se na figura 2.

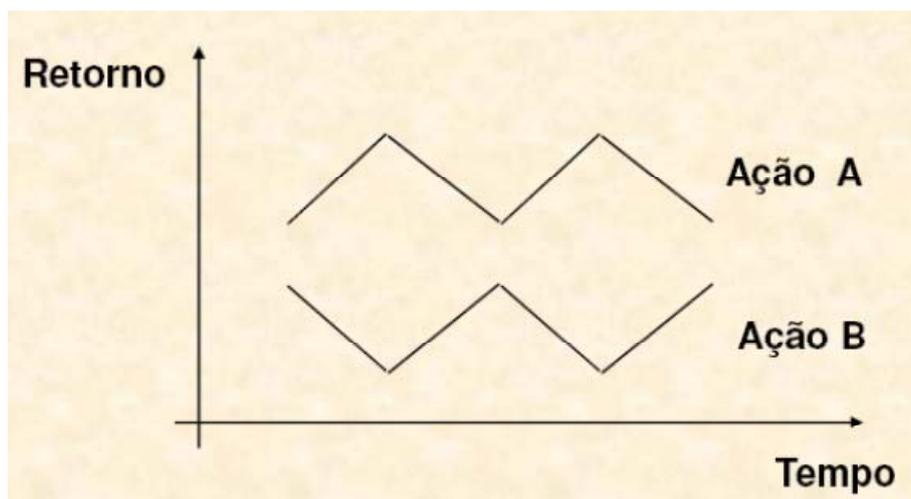


Figura 2 – Dinâmica de dois ativos totalmente não correlacionados

Fonte: Elaborado pelo autor do projeto de tese

<sup>5</sup> A figura e a dependência entre as séries utilizadas como exemplo neste projeto foram baseadas no artigo Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls de Paul EMBRECHTS, Alexander MCNEIL, e Daniel STRAUMANN.

<sup>6</sup>  $\text{COV}[X, Y] = E[X, Y] - E[X]E[Y]$ ;  $\sigma^2[X]$  é a variância da variável aleatória X e  $\sigma^2[Y]$  é a variância da variável aleatória Y.

b) As variáveis aleatórias são totalmente dependentes:

Neste caso, pode-se representar a dinâmica entre duas variáveis aleatórias<sup>7</sup> como uma função de primeiro grau, já que a relação é linear, e estimar o coeficiente linear e angular através de uma minimização do quadrado da distância. Matematicamente, temos o seguinte:

$$\rho(X, Y)^2 = \frac{\sigma^2[Y] - \min_{a,b} E[(Y - (aX + b))^2]}{\sigma^2[Y]} \quad (2)$$

Os coeficientes a e b acima são obtidos do problema de minimização apresentado na equação 2 que fornece o seguinte resultado:

$$a = \frac{COV[X, Y]}{\sigma^2[X]} \quad (3)$$

$$b = E[Y] - a.E[X] \quad (4)$$

Graficamente, uma correlação perfeita é apresentada na figura 3.

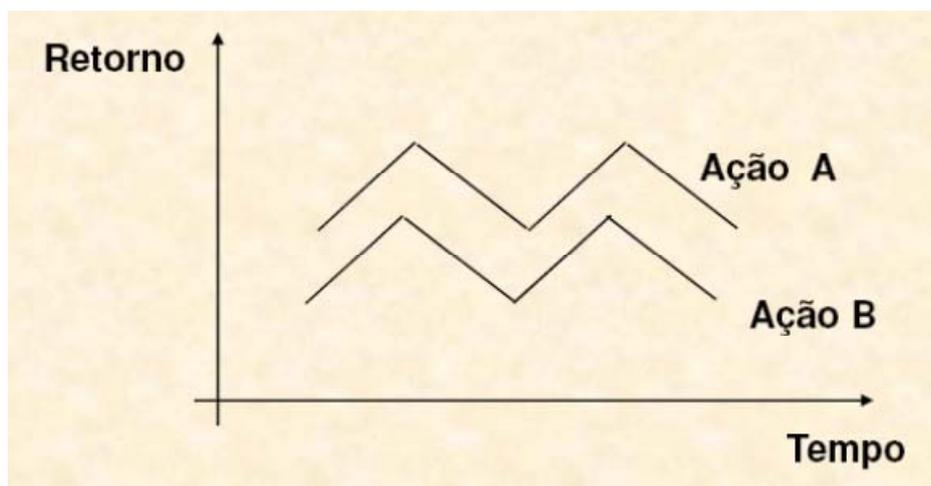


Figura 3 – Dinâmica de dois ativos totalmente correlacionados

Fonte: Elaborado pelo autor do projeto

Os casos intermediários ocorrem quando temos correlação linear imperfeita, ou seja, quando  $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$ .

A correlação, por ser uma medida que admite a propriedade linear, é invariante sobre transformações lineares.

A popularidade da correlação linear pode ser atribuída à sua facilidade de cálculo, à propriedade de manipulação sob transformações lineares<sup>8</sup> e sua aplicação como medida de

<sup>7</sup> Como notação neste projeto, as variáveis aleatórias serão representadas por letras maiúsculas. Quando estivermos nos referindo ao par de variáveis aleatórias estudadas para a dinâmica de movimentos conjuntos representaremos por X e Y.

<sup>8</sup> Um exemplo de transformação linear muito utilizada para maximização de carteiras é  $COV[AX + a, BY + b] = ACOV[X, Y]B^t$ , onde A, B e  $B^t$  são matrizes, com  $B^t$  representando a matriz transposta de B.

dependência em distribuições normais multivariadas, mais genericamente em distribuições elípticas.

Além da discussão apresentada acima, algumas observações importantes sobre a correlação devem ser elencadas:

- a) A correlação entre duas variáveis não é definida se houver variância infinita.

Este fato causa problemas para a medida de dependência de distribuições de caudas pesadas, que aparecem em ativos financeiros.

- b) A independência entre duas variáveis aleatórias implica que a correlação é nula, mas o contrário pode não ser verdade.

Um exemplo simples deste fato é obtido através da simulação  $X \sim N(0,1)$ <sup>9</sup>,  $Y = X^2$ , dado que o terceiro momento de uma distribuição normal padrão é nulo.

- c) A correlação linear não é invariante sob transformações estritamente crescentes não lineares  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para duas variáveis aleatórias, em geral, a seguinte desigualdade é estabelecida:

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y) \quad (5)$$

Para uma distribuição bivariada normal com correlação igual a  $\rho$  e a transformada  $T(x) = \Phi(x)$ <sup>10</sup> vale a seguinte igualdade:

$$\rho(T(X), T(Y)) = \frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad (6)^{11}$$

Genericamente, para quaisquer dois vetores normalmente distribuídos, qualquer transformação da forma  $T, \hat{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , obedece à seguinte desigualdade:

$$|\rho(T(X), \hat{T}(Y))| \leq |\rho(X, Y)| \quad (7)^{12}$$

Além da correlação linear, há outra medida de dependência de variáveis que é calculada de forma não paramétrica e é conhecida como correlação ordenada ou correlação

<sup>9</sup> A notação  $X \sim N$  significa que a variável aleatória  $X$  segue a função distribuição dada por  $N$ .

<sup>10</sup>  $\Phi(x)$  denota a função de distribuição normal padrão.

<sup>11</sup> A demonstração deste resultado encontra-se no artigo intitulado “*Measures of Dependence*”, de Joag-Dev, K., 1997.

<sup>12</sup> A demonstração deste resultado encontra-se no livro intitulado “*Handbook of Statistics*”, de Kendall, M. e Stuart, A., 1979.

de Spearman.<sup>13</sup> Este nome é proveniente do método de cálculo que consiste em ordenar as variáveis aleatórias e efetuar a diferença entre elas. Matematicamente, a definição da correlação ordenada é dada por:

$$\rho_s(X,Y) = \rho(F_1(X),F_2(Y))$$

onde  $\rho$  é a correlação linear,  $F_1$  e  $F_2$  são as funções de distribuição das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ .

A diferença entre essas duas correlações é proveniente do fato de que a correlação linear é medida por uma função linear específica de duas variáveis, enquanto que a correlação ordenada é medida por uma função monotônica<sup>14</sup> qualquer. Intuitivamente, uma correlação ordenada perfeita é obtida quando as duas variáveis aleatórias são relacionadas por qualquer função monotônica.

A correlação ordenada possui como vantagem em relação à correlação linear o fato de que a primeira é invariante sob transformações monotônicas. Como desvantagem pode-se perceber que esta medida não é baseada em momentos da distribuição, ou seja, para distribuições multivariadas normal ou do tipo  $t$ , o primeiro e o segundo momento são facilmente determinados e, portanto, a correlação linear se aplica. Entretanto, para distribuições que não seguem esse padrão acima, os momentos da distribuição se tornam difíceis de se calcular e nestes casos, a correlação ordenada é utilizada.

### 1.1 Distribuições Esféricas e Elípticas

A correlação apresenta algumas propriedades interessantes, como foi visto na sessão anterior, para as distribuições esféricas e elípticas. As primeiras são uma extensão da distribuição multivariada normal padronizada, ou seja, corresponde a uma família de distribuições simétricas de vetores aleatórios não correlacionados de média zero.

Um vetor aleatório  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$  possui distribuição esférica se, para todo mapa ortogonal<sup>15</sup>  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vale a igualdade:

$$U\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}. \quad (8)^{16}$$

<sup>13</sup> Em referência à Charles Spearman.

<sup>14</sup> Uma função monotônica é aquela que preserva a ordenação. Uma função monotônica crescente é aquela tal que para  $x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ . Caso contrário, a função é chamada de monotônica decrescente.

<sup>15</sup> Mapa ortogonal é aquele que satisfaz  $UU^t = U^tU = I_{n \times n}$

Esta classe de distribuição possui densidade de probabilidade constante em esferas, pois:

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^t\mathbf{x}) = g(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \quad (9)$$

Outras funções densidades pertencentes a esta classe de distribuição são a distribuição-t multivariada com  $v$  graus de liberdade, ou seja,  $f(\mathbf{x}) = c(1 + \mathbf{x}^t\mathbf{x}/v)^{-(n+v)/2}$  e a função distribuição exponencial ou *logistic*, da forma  $f(\mathbf{x}) = c.\exp(-\mathbf{x}^t\mathbf{x})/[1 + \exp(-\mathbf{x}^t\mathbf{x})]^2$ , sendo  $c$  uma constante que normaliza ambas as funções.

Embora as funções acima exibam variáveis aleatórias não correlacionadas, não há independência entre elas. O único caso onde isso ocorre é distribuição normal multivariada. (Fang, Kotz e Ng, 1987)

Uma distribuição é elíptica quando um vetor aleatório  $\mathbf{X}$  satisfaz:

$$\mathbf{X} = T(\mathbf{Y}) \text{ e } \mathbf{Y} \sim S_n(\phi), \text{ sendo } T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mu, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mu \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

A notação mais usual para distribuições deste tipo é da forma  $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ , onde  $\Sigma$  representa o produto da matriz  $A$  pela sua transposta  $A^t$ , resultando em uma matriz estritamente positiva.

Este capítulo inicial teve como objetivo principal apresentar as principais características da correlação como medida de dependência e sua limitação para diferenciar distribuições esféricas das elípticas. No próximo tópico, será apresentado o *Value at Risk* que utiliza as matrizes de correlação como *proxy* para o cálculo de diversos tipos de riscos.

---

<sup>16</sup> =<sub>d</sub> significa igualdade na distribuição.

## 2 Conceituação e Caracterização de Riscos e o modelo do *Value at Risk* (VaR)

Jorion (1998) define que “risco é o grau de incerteza a respeito de um evento”. Assim, pode-se definir o risco, ou seja, “a possibilidade de perda” ou “o grau de incerteza”, como a probabilidade de ocorrência do evento gerador da perda ou da incerteza.

Portanto, podemos considerar risco como a medida do grau de incerteza sobre um evento qualquer. No estudo de finanças, estamos interessados em medir o grau de incerteza sobre o valor futuro de um ativo financeiro, ou ainda, sobre o seu retorno, que é uma medida da variação do valor do ativo com relação ao seu valor original. Seja  $X_0$  o valor inicial do ativo, e  $X_t$  o valor após um intervalo de tempo  $t$ , então o retorno discreto do período é definido matematicamente por:

$$r_t = \frac{X_t - X_0}{X_0} \quad (11)$$

Em geral não se sabe qual será o retorno de um determinado ativo durante um período futuro. Tem-se apenas uma ideia de qual seria o seu retorno esperado: pode-se atribuir uma probabilidade aos diferentes valores de retorno que podem ocorrer, então a média destes possíveis retornos seria o retorno esperado do investimento. Desta forma, tem-se uma distribuição de probabilidades do retorno deste investimento. Assim, quanto maior for a dispersão dos retornos em relação ao retorno esperado, maior será o risco do investimento. Logo, pode-se utilizar como medida de risco, o próprio desvio padrão desta distribuição de probabilidades do retorno.

Pode-se estimar o valor esperado e o desvio padrão dos retornos de um investimento utilizando valores históricos. A maneira mais simples é aplicar o estimador de média amostral e desvio padrão amostral. Para isso, temos que assumir a hipótese de que a distribuição de probabilidade dos retornos não muda durante o período analisado.

A média amostral é dada por  $\mu_r = \frac{r_1 + \dots + r_n}{n}$  e o desvio padrão amostral é dado por

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \mu_r)^2}{n-1}}.$$

Observe que o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, que por sua vez é a média dos desvios quadráticos com relação à média. Como não se conhece a média verdadeira<sup>17</sup> (fizemos uma estimação via média amostral  $\mu_r$ ), temos que aplicar uma pequena correção de

---

<sup>17</sup> Média da população.

viés na fórmula substituindo  $n$  por  $(n-1)$  no denominador (como está na fórmula do desvio padrão acima), mas isso faz pouca diferença para amostras com mais de 30 observações. Em finanças, é comum chamar a dispersão do retorno de um ativo de volatilidade.

O gráfico a seguir mostra a densidade de probabilidade dos retornos de 2 investimentos R1 e R2. O eixo horizontal indica os diversos valores que cada retorno pode assumir, sendo o ponto médio igual ao retorno esperado, que é o mesmo para os dois investimentos. O eixo vertical indica o quão provável é cada valor possível para o retorno, ou seja, se refere à verossimilhança. R1 e R2 possuem o mesmo retorno esperado, porém R2 é um investimento mais arriscado do que R1, pois apresenta uma maior dispersão em torno da média, isto é, um maior desvio padrão.

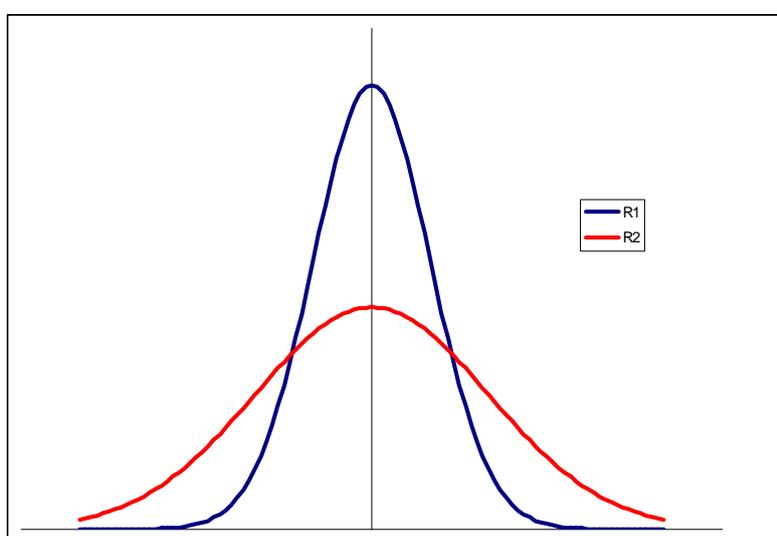


Figura 4 – Duas distribuições com mesma média porém com desvios diferentes

Fonte : Elaborado pelo autor.

Pode-se classificar os tipos de risco em categorias, facilitando o desenvolvimento de técnicas de gestão e modelos teóricos. É importante ter em mente que existem outras classificações possíveis, mas que se referem basicamente aos mesmos tipos de risco aqui apresentados.

## 2.1 Conceituação e Classificação dos tipos de Riscos

Há na literatura diversas classificações dos tipos de riscos existentes no mercado, sendo que as principais contribuições como Jorion (2007) e Morgan (1996) são apresentadas nos subtópicos abaixo.

### **2.1.1. Risco de Mercado**

É o risco da perda associado a movimentos nos preços de ativos negociados no mercado.

No caso de ações e moedas estrangeiras, o risco de mercado está associado à possível variação adversa na cotação destes ativos.

No caso de títulos de renda fixa e debêntures, o fator de risco em questão será a estrutura a termo das taxas de juros negociadas no mercado. Se por exemplo uma carteira estiver comprada em um título zero-coupon com vencimento em 1 ano, ter-se-á uma perda no portfólio se a taxa de juros de mercado com prazo de 1 ano subir, visto que existe uma relação inversa entre a taxa de juros e o preço do título.

No caso de opções, há vários fatores que poderiam afetar o seu valor. Por exemplo, bastaria uma queda na volatilidade do ativo subjacente para uma diminuição no valor desta opção. Logo, um dos fatores de risco de mercado seria a própria volatilidade do ativo subjacente ao contrato da opção.

### **2.1.2. Risco de Liquidez**

Pode-se analisar o Risco de Liquidez de duas formas: o Risco de Liquidez de Ativos, e o Risco de Liquidez de Financiamento (Funding). O Risco de Liquidez de Ativos, também designado Risco de Liquidez de Mercado, aparece quando uma determinada transação não pode ser efetuada pelo preço de mercado corrente por conta do tamanho da posição a ser liquidada. O Risco de Liquidez de Funding, ou Risco de Fluxo de Caixa, se refere ao risco de não ser possível captar recursos com o objetivo de cobrir desequilíbrios de fluxo de caixa.

### **2.1.3 Risco de Crédito**

É o risco que tem como origem a possibilidade de uma contraparte de um contrato financeiro não honrar integralmente suas obrigações.

Quando um banco concede um empréstimo, e a contraparte não efetua pagamento dos juros devidos, temos um evento de risco de crédito.

É comum classificar a qualidade creditícia de empresas usando um sistema de Rating. Agentes especializados, como a S&P e Moody's, analisam inúmeras informações sobre uma determinada empresa (estrutura do balanço, condições do mercado, etc.) e atribuem uma nota a ela, que é o Rating. Uma nota alta implica que a empresa tem uma maior probabilidade de honrar com seus compromissos financeiros.

### 2.1.4. Risco Operacional

É o risco associado a falhas em processos, pessoas, sistemas, ou eventos externos. Em geral, todo tipo de risco que não se enquadra nas classificações anteriores é considerado risco operacional.

Exemplos: Falhas em sistemas, treinamento inadequado de pessoal, falhas humanas, fraudes, risco legal.

## 2.2 Modelando preços de ativos financeiros

A volatilidade possui um papel central no gerenciamento de riscos de ativos financeiros, pois é a medida de risco utilizada nos modelos. Por ser uma variável não observável, é preciso escolher algum método de estimação para a volatilidade. Para tal, deve-se compreender a natureza do processo aleatório que se está interessado em modelar que são preços de ativos financeiros, que são considerados como séries de tempo. Em seguida, tem-se que estimar a volatilidade a partir de uma série de retornos de preços, cuja forma de obtenção será detalhada no tópico abaixo.

### 2.2.1 Cálculo do Retorno

Uma das formas de medir retorno é através do retorno discreto como visto anteriormente na equação 11.

Uma outra forma de reescrever a equação consiste em isolar o numerador para ficarmos com:

$$X_t - X_0 = \Delta X = rX_0 \quad (12)$$

onde  $\Delta X$  indica a variação de  $X$ .

Desta forma, percebe-se que a variação no período  $T$  é uma fração fixa do valor inicial  $X_0$ . Isso indica que, a cada período  $T$ , estamos capitalizando  $X$  usando uma taxa  $r$ .

$$X_t = X_0(1+r) \quad (13)$$

Outra forma de medir retorno é através do retorno com composição contínua. A ideia é capitalizar por uma taxa  $r$  continuamente. Neste caso, a equação ficaria assim:

$$dX = rXdt \quad (14)$$

Aplicando integração temos:

$$\int_{X_0}^{X_t} \frac{1}{x} dx = \int_0^T r dt \Rightarrow \ln X_t - \ln X_0 = rT \quad (15)$$

Partindo do valor inicial  $X_0$ , obtemos o valor corrigido  $X_T$  :

$$X_T = X_0 e^{rT} \quad (16)$$

Utilizar retorno com composição contínua possui a vantagem da agregação temporal. Suponha que estamos trabalhando com dados diários, de forma que  $r$  é o retorno de 1 dia ( $T = 1$ ) e suponha que  $X_0$  seja o valor inicial do ativo. Se em um determinado dia o retorno foi  $r = 1\%$ , e no dia seguinte o retorno foi  $r = -1\%$ , teremos o valor  $X_0$  no final destes dois dias. Essa propriedade não é válida se utilizarmos retorno discreto.

Se temos uma série diária de preços, o retorno diário ( $T = 1$ ) utilizando composição contínua é dado, a partir de 16, por  $r = \ln(P_1/P_0)$ .

### 2.2.2 Características das Séries Temporais

Séries Temporais são sequências de observações indexadas pelo tempo, tiradas de uma determinada variável aleatória. Pode-se ter, por exemplo, uma série de preços de uma ação, ou uma série de retornos da mesma ação. Uma das formas de se modelar séries temporais é a utilização de processos estocásticos, que são sequências de variáveis aleatórias: se o processo estocástico define a dinâmica teórica, a série de tempo seria uma amostra retirada a partir deste processo estocástico.

Uma das principais aplicações de modelos de séries de tempo é a realização de previsões. No momento em que se conhece a dinâmica de um processo, mesmo que ele tenha uma componente aleatória, pode-se calcular o valor esperado de uma realização futura deste processo. Entretanto, só podemos realizar previsões se o processo estudado não mudar sua dinâmica. Ou seja, para prever um determinado processo, precisamos que ele seja estacionário.

Um processo é dito estacionário se todos os aspectos de seu comportamento não mudam com o tempo (Ruppert, 2006). Como é difícil definir quais seriam “todos os aspectos”, normalmente trabalha-se com o conceito de processos fracamente estacionários. Neste caso, um processo  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  é fracamente estacionário se :

$$E(Y_i) = \mu, \text{ onde } \mu \text{ é uma constante}$$

$$\text{Var}(Y_i) = \sigma^2, \text{ onde } \sigma \text{ é uma constante}^{18}$$

$\text{CORR}(Y_i, Y_j) = \rho(|i-j|)$ , ou seja, a correlação entre duas realizações do processo depende apenas da distância entre estas realizações onde  $\rho$  é a função de autocorrelação.

<sup>18</sup>  $\text{Var}(Y_i)$  é a variância de  $Y_i$ , neste contexto. Não confundir com VaR de Value at Risk.

Nesta discussão, é útil definir a função  $\gamma(h)$  como a autocovariância, ou seja, a covariância entre  $Y_t$  e  $Y_{t+h}$ . Sendo assim, tem-se que  $\gamma(h) = \sigma^2\rho(h)$ , e ainda  $\gamma(0) = \sigma^2$ .

### 2.2.3. Ruído Branco

O processo estacionário mais simples é o Ruído Branco. Uma sequência  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  é um Ruído Branco de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  se, além das condições apresentadas para um processo fracamente estacionário,  $Y_i$  e  $Y_j$  são independentes, para todo  $i \neq j$ .

Se adicionarmos a hipótese de que  $Y_i$  possui distribuição normal, temos um Ruído Branco Gaussiano.

Observe que o Ruído Branco é um processo estacionário: possui média e variância constantes, além de não ter nenhum aspecto da sua dinâmica mudando com o tempo.

A seguir, temos um gráfico simulado de um processo de Ruído Branco Gaussiano com média 0 e variância 1. Observe que ele apresenta uma oscilação em torno de 0, sem apresentar tendência ou nenhuma estrutura perceptível. Desta forma, a previsão do processo é sempre igual a sua média.

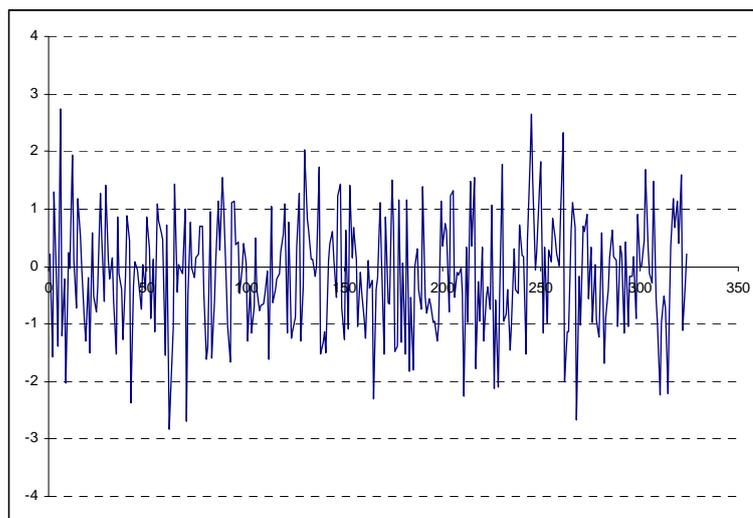


Figura 5 – Simulação de um processo estacionário do tipo ruído branco

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.2.4. Processo Autoregressivo

Temos um processo Autoregressivo quando  $Y_t$  é modelado como uma média ponderada de seus valores passados, adicionando um Ruído Branco como “erro” ou “nova informação”. Para ilustrar, podemos analisar o processo Autoregressivo de primeira ordem, ou AR(1), descrito por:

$$Y_t = \omega + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \text{ onde } \varepsilon_t \sim \text{Ruído Branco } (0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ e } |\phi| < 1 \quad (17)$$

No gráfico a seguir, temos um exemplo de processo AR(1) com  $\omega = 1$ ,  $\phi = 0,5$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ . A principal característica deste processo é a reversão à média: observe como o gráfico oscila em torno do valor 2, que é a média incondicional do modelo<sup>19</sup>. Este tipo de modelo é útil na modelagem de taxas de juros, por exemplo.

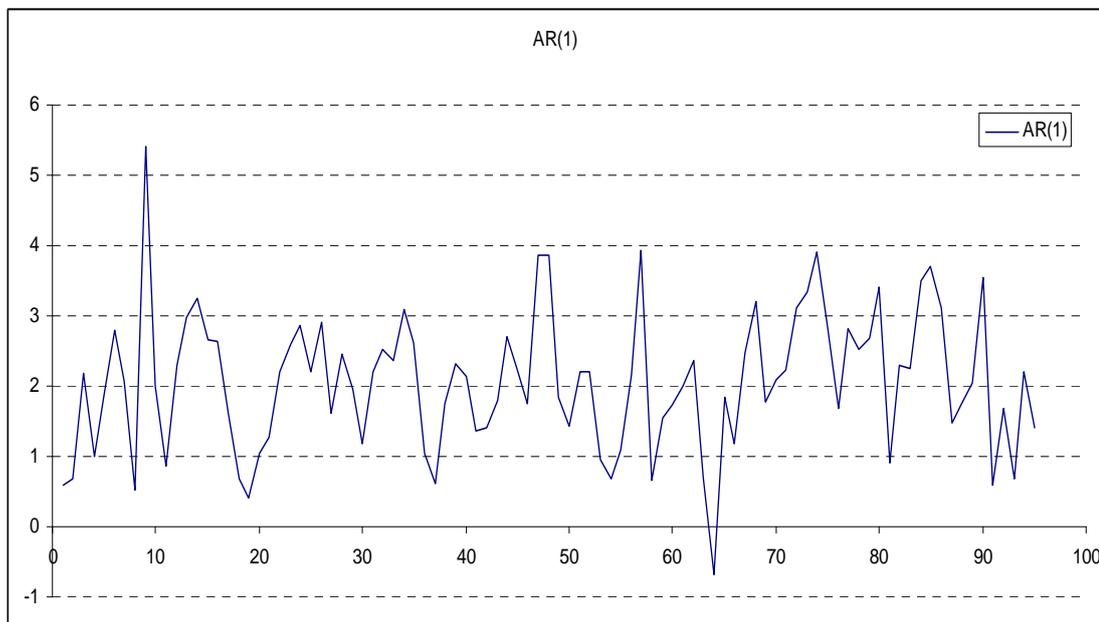


Figura 6 – Simulação de um processo AR(1) do tipo  $Y_t = 1 + 0,5Y_{t-1} + \varepsilon_t$ , com  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

Fonte: Elaborado pelo autor

### 2.2.5. Passeio Aleatório (Random Walk)

A restrição  $|\phi| < 1$  imposta no processo AR(1) é importante para que o processo seja estacionário. Quando violamos a restrição acima, temos um processo não estacionário, pois a média, variância e correlação não são constantes.

Quando  $|\phi| = 1$ , temos o Passeio Aleatório<sup>20</sup>.

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (18)$$

Suponha que o processo inicie em um valor arbitrário  $Y_0$ . Aplicando a equação acima recursivamente, é fácil ver que os choques são todos acumulados até a observação  $Y_t$ , de forma que o processo oscila livremente.

$$Y_t = Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t \quad (19)$$

<sup>19</sup> Escrevendo 2.10 recursivamente e aplicando o operador de esperança incondicional, temos que :

$$E(Y) = \omega \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i = \frac{\omega}{1-\phi}, \text{ se } |\phi| < 1. \text{ De modo que } \frac{1}{1-0,5} = 2.$$

<sup>20</sup> Também chamamos de processo com raiz unitária quando  $\phi = 1$ . O Passeio Aleatório é tido como um modelo com tendência estocástica, pois sua tendência é determinada por choques aleatórios, em contraste com modelos de tendência determinística. Para mais detalhes, veja Diebold (2007), Cap. 13.



processo do Movimento Browniano Geométrico. Este processo é utilizado, por exemplo, no modelo de Black-Scholes de apreçamento de opções.

A ideia por trás do Movimento Browniano Geométrico é fazer com que o log natural da variável de interesse siga um Passeio Aleatório. A versão em tempo discreto deste processo pode ser representada por:

$$\ln(P_t) = c + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \text{ onde } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (20)$$

Observe que  $\ln(P_t)$  segue um Passeio Aleatório, e incluímos a possibilidade de um impulso  $c$ .

O gráfico a seguir simula o preço de uma ação utilizando o Movimento Browniano Geométrico, na versão discreta, utilizando volatilidade de 30%, sem impulso ( $c = 0$ ), e valor inicial igual a 50. Observe que o modelo não permite valores negativos para a variável modelada.

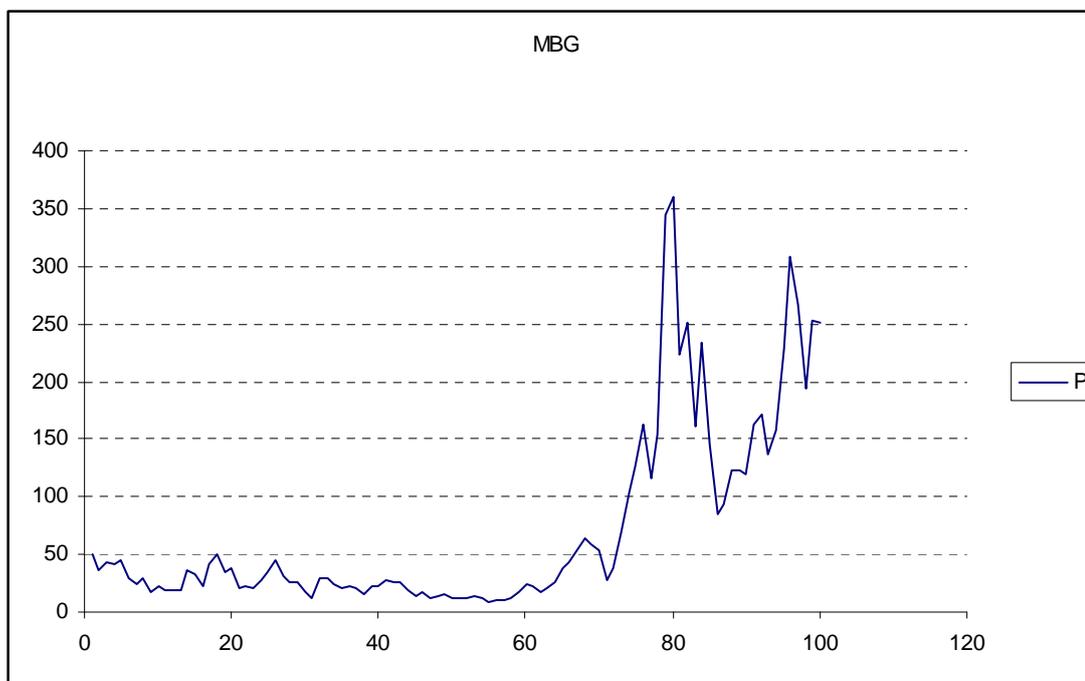


Figura 8 – Simulação de um movimento Browniano Geométrico

Fonte : Elaborado pelo autor

Dado o modelo do Movimento Browniano Geométrico para os preços de ativos, qual será a dinâmica dos retornos? Partindo da equação do processo, podemos escrever:

$$\ln(P_t) = c + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \Rightarrow r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = c + \varepsilon_t \Rightarrow r_t \sim N(c, \sigma^2) \quad (21)$$

onde  $r_t$  é o retorno com composição contínua do preço do ativo do período.

Ou seja, ao utilizar o modelo do Movimento Browniano Geométrico estamos assumindo que o retorno com composição contínua possui distribuição normal. Em gerenciamento de risco, é comum assumir  $c = 0$ , pois muitas vezes tomaremos como base o

retorno de um dia do ativo (período curto), além de obtermos uma estimativa de risco mais conservadora. Sendo assim, trabalharemos com a seguinte distribuição para o retorno  $r_t \sim N(0, \sigma^2)$ , onde  $\sigma$  é a volatilidade do ativo.

A hipótese de normalidade para os retornos é uma aproximação. Em geral, a distribuição empírica possui caudas grossas, implicando em uma maior probabilidade para eventos extremos do que o previsto pela distribuição normal. É útil aplicar um teste estatístico nas séries de retornos de ativos para avaliar se a distribuição é normal.

Um teste bastante utilizado é o Jarque-Bera. Este teste é baseado nos valores da assimetria (skewness) e curtose (kurtosis) da distribuição normal, que estão associados ao terceiro e quarto momentos desta distribuição.

A assimetria pode ser estimada por  $\gamma = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - \mu)^3}{\sigma^3}$ , e a curtose por  $\delta = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{(r_i - \mu)^4}{\sigma^4}$ .

Para a distribuição normal, os parâmetros valem  $\gamma = 0$  e  $\delta = 3$ . O teste de Jarque-Bera testa se, de fato, a assimetria da amostra é zero (distribuição é simétrica), e se a curtose é igual a 3 (medida de achatamento da normal). O teste tem a seguinte forma  $JB = n \left( \frac{\gamma^2}{6} + \frac{(\delta-3)^2}{24} \right)$ , onde JB possui distribuição qui-quadrada com 2 graus de liberdade.

## 2.4 Modelos para Estimação de Volatilidade

Conforme discussão anterior, a forma mais simples de estimar volatilidade é utilizando o desvio padrão amostral. O problema com esta abordagem é que todas as observações de retorno possuem a mesma importância. Assim, a observação de um retorno que ocorreu há 1 ano possui a mesma importância que o retorno que ocorreu no último dia. Utilizar o desvio padrão amostral implica que se está considerando que a volatilidade é constante durante todo o período. Em geral, isso não ocorre. Observamos com certa frequência a formação de clusters de volatilidade: períodos com alta/baixa volatilidade costumam ocorrer em períodos agrupados. Por exemplo, o gráfico a seguir mostra o retorno do IBOVESPA durante o período de 03/01/2001 a 18/02/2010. Observe que existem períodos de “nervosismo” em que a volatilidade aumenta durante alguns dias consecutivos, como, por exemplo, durante o mês de outubro de 2008. Estatisticamente, este fato é capturado por testes de autocorrelação dos retornos ao quadrado, que mostram uma autocorrelação significativa (Morgan, 1996). Isso nos motiva a utilizar modelos onde a

previsão da volatilidade, quando condicionada a um conjunto de informações, varia no tempo, por exemplo o EWMA e o modelo GARCH.

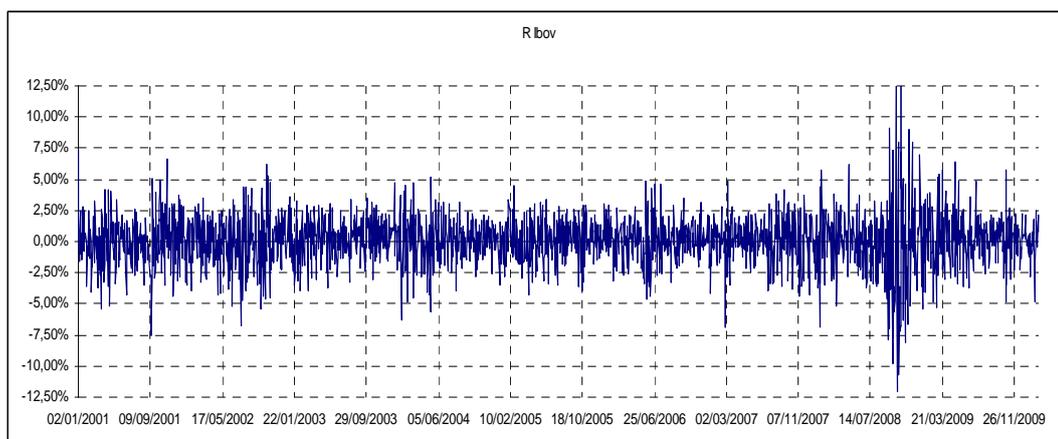


Figura 9 – Gráfico de retornos do Ibovespa no período de 02 de janeiro de 2001 à 26 de novembro de 2011

Fonte: Elaborado pelo autor

#### 2.4.1. EWMA

O modelo EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), empregado pelo *RiskMetrics*, atribui peso maior nas observações de retorno mais recentes, de forma que o peso decai exponencialmente. Partindo do retorno mais recente para o mais antigo, os pesos aplicados são: 1,  $\lambda$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda^3$ , e assim sucessivamente. O parâmetro  $\lambda$  controla os pesos aplicados.

Este modelo é de fácil implementação. Na sua forma recursiva, a volatilidade estimada é dada por:

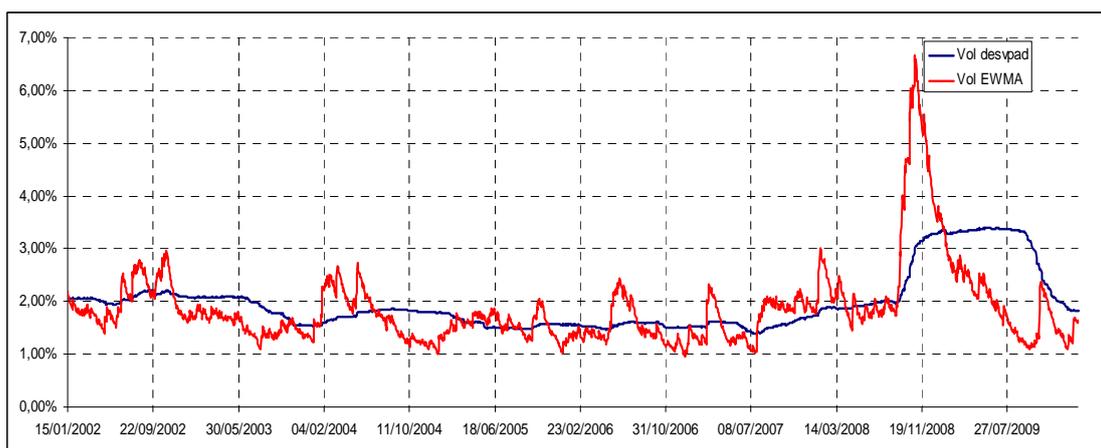
$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (22)$$

onde  $0 < \lambda < 1$ . Quanto mais próximo de 0 for o  $\lambda$ , maior será o peso dado às observações mais recentes do retorno.

O RiskMetrics adota  $\lambda = 0,94$ . Este parâmetro pode ser escolhido de forma a adequar-se melhor a volatilidades históricas, através de testes de previsão<sup>21</sup>.

O gráfico a seguir mostra a comparação da estimação da volatilidade utilizando o desvio padrão amostral com janela de 252 dias, e o modelo EWMA com  $\lambda = 0,94$ . Observe que o EWMA é mais sensível a mudanças na volatilidade, ajustando-se rapidamente a estimativa. Esta característica é importante para responder rapidamente a períodos de estresse de mercado.

<sup>21</sup> Veja, por exemplo, o exercício 21.17 de John Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Sétima Edição.



**Figura 10 – Gráfico das volatilidades pelo desvio padrão e pelo modelo EWMA dos retornos referente ao índice Ibovespa**

Fonte: Elaborado pelo autor

#### 2.4.2. GARCH(1,1)

Proposto por Bollerslev (1986), o modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) pode ser visto como uma generalização do modelo EWMA. Em sua forma mais utilizada ao modelar retornos financeiros, a volatilidade do modelo GARCH(1,1) é especificada por<sup>22</sup>:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \quad (23)$$

onde  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes que definem a dinâmica. Observe que no caso do EWMA havia apenas um parâmetro  $\lambda$  a ser escolhido. No caso do GARCH(1,1) temos 3 parâmetros. Para obtermos uma dinâmica estável, devemos adicionar mais uma restrição ao modelo:  $\alpha + \beta < 1$ .

A forma usual de estimar os parâmetros deste modelo é através de um estimador de máxima verossimilhança. Dado que  $r$  possui distribuição normal com média nula e variância  $\sigma_t^2$ , a estimação por máxima verossimilhança consiste em escolher os parâmetros  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  de forma a maximizar a seguinte função:

$$\sum_{i=1}^n \left( -\ln \sigma_i^2 - \frac{r_i^2}{\sigma_i^2} \right) \quad (24)$$

#### 2.4.3. HAR (Heterogenous Autoregressive)

O modelo de Corsi (2004, 2009), denominado *Heterogenous Autoregressive* (HAR), parte do pressuposto que os mercados são heterogêneos como apresentado por Muller, Dacorogna, Dav, Pictet, Olsen, e Ward (1993). Essa teoria afirma que diferentes agentes

<sup>22</sup> Diebold, 2007 apresenta o modelo mais geral, GARCH(p,q).

atuam no mercado, possuindo objetivos, restrições institucionais, horizonte de realização, informação, conhecimento e outras variáveis próprias, o que faz com que cada mudança no mercado seja respondida de forma diferente por esses agentes. Essa teoria tenta explicar o motivo pelos quais os ativos mais procurados são os de maior volatilidade, uma vez que caso os mercados fossem homogêneos, mais rapidamente as oscilações fora do preço eficiente (ou verdadeiro) seriam corrigidas e ocorreriam menos oscilações.

Em termos práticos, essa teoria comprova que as mudanças ocorridas no longo prazo afetam as estratégias de curto prazo, mas mudanças nas últimas não modificam as primeiras. Isso ocorre, pois na formalização da ideia de Müller, Dacorogna, Dav e Pictet (1993) a mudança no tipo dos agentes está ligada aos três horizontes de realização: curto, médio e longo prazo. No grupo dos primeiros estariam as corretoras que buscam lucrar com as operações diárias ou intradiárias; nos grupos médios estariam os operadores de fundo de alto risco; já no longo prazo estariam os bancos centrais, bancos comerciais e fundos de pensão. Dessa forma, quando as corretoras modificam suas operações, por mudanças no curto prazo, isso não significa que os demais irão alterar suas estratégias. Todavia, quando os Bancos Centrais e os fundos de pensão modificam suas posições, acabam afetando a dinâmica dos agentes de curto prazo.

Dessa forma, a relação descrita acima acaba determinando uma relação hierárquica dos efeitos da volatilidade de curto e longo prazo, e por consequência, a forma da equação estimada. Assim, a volatilidade determinada pelos agentes de longo prazo é  $RV_t^m$ , sendo que a média da volatilidade realizada dos 22 últimos dias segue um comportamento autorregressivo de 1º ordem, tal qual:

$$\log(RV_t^m) = c^m + \beta_m \log(RV_{t-1}^m) + \widetilde{\omega}_t^m \quad (25)$$

onde  $c^m$  é a constante e  $\widetilde{\omega}_{t+1}^m$  é o erro que é contemporâneo e serialmente independente. Além disso, a volatilidade relacionada aos agentes de médio prazo é  $RV_t^w$ , que é a volatilidade média dos últimos 5 dias e é explicada por ela mesma no período anterior e pela expectativa da volatilidade relacionada aos agentes de longo prazo:

$$\log(RV_t^w) = c^w + \beta_w \log(RV_{t-1}^w) + \gamma_m E_t[\log(RV_t^m)] + \widetilde{\omega}_t^w \quad (26)$$

Por fim, a volatilidade relacionada aos agentes de curto prazo, que é a volatilidade realizada diariamente, é explicada pela própria variável no período anterior e pela expectativa para o mesmo período da volatilidade dos agentes de médio e longo prazo, como segue:

$$\log(RV_t^d) = c^d + \beta_d \log(RV_{t-1}^d) + \gamma_w E_t[\log(RV_t^w)] + \gamma_m E_t[\log(RV_t^m)] + \widetilde{\omega}_t^d \quad (27)$$

Colocando essas três equações em um sistema e resolvendo a mesma, temos a equação estimada por Corsi (2004, 2009), sendo o HAR igual a:

$$\log(RV_t^d) = C + \theta_d \log(RV_{t-1}^d) + \theta_w \log(RV_{t-1}^w) + \theta_m \log(RV_{t-1}^m) + \widetilde{\omega}_{t+1}^d \quad (28)$$

A expressão acima é estimada por OLS e usa a correção da covariância de Newey-West para correlação serial.

Para realizar previsão a partir de (23), estimamos para cada horizonte  $h$  de previsão um modelo, como descrito abaixo

$$\log(RV_t^d) = C + \theta_d \log(RV_{t-h}^d) + \theta_w \log(RV_{t-h}^w) + \theta_m \log(RV_{t-h}^m) + \widetilde{\omega}_t^d \quad (29)$$

## 2.5 Modelos de Correção de Microestrutura

A implementação da Volatilidade Realizada tem por premissa corrigir o problema de microestrutura, verificado por Black (1986). Nessa teoria haveria um preço  $P_{t,n}^0$ , que é o preço observável no dia  $t$  na  $n$ -ésima divisão, que é composto de  $p_{t,n+1}^0 = p_{t,n+1}^L + \varepsilon_{t,n+1}$ , sendo que  $p_{t,n}^L$  é o preço latente e  $\varepsilon_{t,n}$  é um distúrbio IID com  $E[\varepsilon_t] = 0$ ,  $E|\varepsilon_t|^4 < \infty$  e não correlacionado com o preço latente (ou eficiente). Se caso obedecermos à técnica apontada por Merton (1980) e somarmos os  $N$  retornos ao quadrado advindo das  $N+1$  partições do dia, sendo  $N$  grande o suficiente, nossa estimativa ficará viesada, pois o termo de erro irá se acumular. Ou seja, quando tiramos a primeira diferença do logaritmo de  $P_{t,n}^0$  e elevamos ao quadrado, acumularemos os  $N \varepsilon_{t,n}$  na volatilidade realizada. Desta forma, o problema está em criar uma amostra frequente o suficiente para conseguir convergir para função contínua, mas não tão frequente a ponto de incorrer em um grande viés dos problemas de microestrutura.

Observe que quanto maior a partição do dia  $t$ , maior será o viés de microestrutura. Formalmente, o logaritmo do preço observável é:

$$p_{t,n}^0 = p_{t,n}^L + \varepsilon_{t,n} \quad (30)$$

Tirando a primeira diferença de (5) e definindo  $r_{t,n+1}$  como sendo o retorno, teremos:

$$\begin{aligned} p_{t,n+1}^0 - p_{t,n}^0 &= p_{t,n+1}^L + \varepsilon_{t,n+1} - p_{t,n}^L - \varepsilon_{t,n} \\ r_{t,n+1}^o &= r_{t,n+1}^L + \varepsilon_{t,n+1} - \varepsilon_{t,n} \end{aligned} \quad (31)$$

Mas  $v_{t,n+1} = \varepsilon_{t,n+1} - \varepsilon_{t,n}$ ,

$$r_{t,n+1}^o = r_{t,n+1}^L + v_{t,n+1} \quad (32)$$

Elevando ao quadrado, temos:

$$(r_{t,n+1}^o)^2 = (r_{t,n+1}^L)^2 + (v_{t,n+1})^2 + 2(r_{t,n+1}^L v_{t,n+1}) \quad (33)$$

Somando os  $N$  retornos, usando definição de (3) e  $\sum_{n=1}^N (v_{t,n+1})^2 = \varepsilon_t^2$

$$(RV_t^o)^2 = (RV_t^L)^2 + (\varepsilon_t)^2 + 2 \sum_{n=1}^N (r_{t,n+1}^L v_{t,n+1}) \quad (34)$$

Assumindo que o problema de microestrutura é IID, com  $E v_{t,n} = 0$ , como  $p_{t,n}^0$  não é correlacionado estocasticamente com  $v_{t,n}$  e a variância do estimador é não infinita,  $E|v_{t,n}|^4 < \infty$  e levando em consideração que  $\text{var}(v_{t,n}) = E(v_{t,n})^2$ , teremos:

$$E[(RV_t^o)^2 | (RV_t^L)^2] = (RV_t^L)^2 + 2n(\varepsilon_t)^2 \quad (35)$$

O que demonstra ser nitidamente um processo amostral viesado. Seguindo a abordagem de Zhang, Mykland e Aït-Sahalia (2005), que prova as derivações abaixo, a variância condicional torna-se:

$$\text{var}[(RV_t^o)^2 | (RV_t^L)^2] = 4nE(\epsilon_t)^4 + (8RV_t^L E(\epsilon_t)^2 - 2\text{var}(\epsilon_t)^2) + O_p(n^{-\frac{1}{2}}) \quad (36)$$

Colocando, portanto, N ao infinito:

$$n^{-\frac{1}{2}}((RV_t^o)^2 - 2n((\epsilon_t)^2)) \xrightarrow{L} 2(E(\epsilon_t)^4)^{-\frac{1}{2}} Z_{Noise} \quad (37)$$

$Z_{Noise}$  tem uma distribuição normal e vem do distúrbio contido em  $RV_t^o$ . Além disso, os autores verificam que além da média e da variância estarem comprometidos com o problema de microestrutura, verificam também que existe o problema de discretização, ou seja, o processo não é efetivamente contínuo na prática. Dessa forma, aponta que há convergência em distribuição a Volatilidade Realizada Observada, como:

$$RV_t^o \stackrel{d}{\approx} IV + \underbrace{2N_t E(\epsilon_t^2)}_{\text{Viés devido ao ruído}} + \underbrace{\left[ 4N_t E(\epsilon_t^4) + \frac{2}{N_t} \int_0^1 \sigma_t^4 dt \right]^{\frac{1}{2}}}_{\substack{\text{devido ao ruído} \quad \text{devido à discretização} \\ \text{Variância total}}} N(0,1) \quad (38)$$

## 2.6 Value at Risk

*Value at Risk* (VaR) é uma medida de risco que foi criada pelo banco J. P. Morgan, cuja metodologia foi tornada pública em 1994. Atualmente, a maior parte dos modelos de risco utilizados em bancos e recomendados por reguladores são baseados em VaR. Esta medida consegue sintetizar em um único número uma medida de risco fácil de entender e de divulgar.

Podemos definir o *Value at Risk* (Valor em Risco) como o valor monetário da perda máxima de uma determinada carteira, para um determinado horizonte de tempo, para um determinado nível de confiança. Por exemplo, se o VaR calculado hoje, considerando um horizonte de tempo (holding period) de 1 dia, e com nível de confiança de 99%, for igual a R\$ 1.000,00, então esperamos que 1 vez a cada 100 dias ocorra uma perda maior ou igual a R\$ 1.000,00 se a situação do mercado não mudar com relação ao que sabemos hoje.

Na prática, a situação do mercado muda a cada dia. Mas, se considerarmos que atualizaremos o cálculo do VaR diariamente, e se utilizarmos sempre o nível de confiança de 99%, então esperamos que uma vez a cada 100 dias, ocorra a situação em que a perda realizada é maior ou igual ao VaR reportado para aquela data.

Seja  $\Delta X$  a variável aleatória que representa o P&L da carteira<sup>23</sup> para o holding period considerado,  $(1-\alpha)$  o nível de confiança<sup>24</sup>, então o VaR é definido matematicamente como sendo  $P(\Delta X \leq \text{VaR}) = \alpha$ , onde  $P(\cdot)$  indica a probabilidade de um evento. Ou seja, podemos interpretar o VaR como o  $\alpha$ -quantil da distribuição de probabilidade do P&L da carteira.

Observe que, à princípio, o conceito do VaR é simples de compreender. A dificuldade está em obter uma distribuição de probabilidade para o P&L da carteira: quanto mais complexo for o portfólio, mais complicada será a modelagem desta distribuição.

### 2.6.1. VaR Paramétrico e o modelo RiskMetrics®

O método paramétrico para cálculo do *Value at Risk* consiste em atribuir uma distribuição de probabilidade conhecida aos retornos dos ativos que compõem a carteira. Dizemos que o modelo é paramétrico, pois ele é determinado pelos parâmetros estimados para a distribuição de probabilidade escolhida.

O modelo utilizado pelo J. P. Morgan é conhecido como modelo RiskMetrics (J.P Morgan, 1996) que consiste em um modelo paramétrico onde a distribuição de probabilidade do retorno com composição contínua dos ativos segue uma distribuição normal<sup>25</sup> com média igual a zero. Além disso, o modelo estima a volatilidade e covariâncias utilizando modelo EWMA, com  $\lambda = 0,94$  para dados diários. No caso de instrumentos de renda fixa, o retorno com composição contínua das taxas de juros (ou seja, o retorno calculado com base na variação da yield do papel) é modelado como tendo uma distribuição normal.

### 2.6.2. VaR Paramétrico de uma carteira com um único ativo

Seja  $X_0$  o valor de mercado inicial da carteira. Supondo que temos uma série de retornos discretos diários, onde modelamos que  $R_d \sim N(0, \sigma^2)$ , tal que  $\sigma$  é estimativa de

<sup>23</sup> P&L, ou *Profit and Loss*, é a variação no valor da carteira.

<sup>24</sup>  $\alpha$  é chamado nível de significância.

<sup>25</sup> Hipótese que está de acordo com o Movimento Browniano Geométrico.

volatilidade diária, utilizando um método de estimação. Podemos converter a variável aleatória em uma normal padronizada  $Z$ :

$$Z = \frac{R_d - 0}{\sigma} \Rightarrow R_d = Z\sigma \quad (39)$$

Seja  $Z_\alpha$  o  $\alpha$ -quantil da normal padrão, então o  $\alpha$ -quantil de  $R_d$  será dado por:

$$\text{PiorRetorno} = Z_\alpha\sigma \quad (40)$$

onde (PiorRetorno) é o pior retorno associado à medida de VaR. Como a média de  $R_d$  é zero, (PiorRetorno) será um valor negativo pois é um quantil da cauda esquerda da distribuição.

Assim, lembrando que estamos utilizando retornos discretos, o VaR será calculado por:

$$\text{VaR} = X_0 - X_{\text{PiorCaso}} = X_0 - X_0(1 + \text{PiorRetorno}) = -X_0Z_\alpha\sigma \quad (41)$$

Tipicamente, o VaR é reportado em valores absolutos (em módulo), mesmo que represente um valor negativo.

No caso do VaR RiskMetrics, utiliza-se retornos com composição contínua. Neste caso, ficamos com:

$$\text{VaR} = X_0 - X_{\text{PiorCaso}} = X_0 - X_0e^{\text{PiorRetorno}} = X_0(1 - e^{Z_\alpha\sigma}) \quad (42)$$

onde  $Z_\alpha\sigma$  é um valor negativo.

O VaR calculado acima considera um *holding period* de 1 dia, pois a volatilidade considerada é diária. Para um horizonte de tempo  $t$ , diferente de um dia, realizamos o seguinte ajuste na volatilidade  $\sigma_t = \sigma(t)^{1/2}$  onde  $\sigma_t$  é a volatilidade referente a todo o holding period  $t$  (medido em dias). Esta regra, conhecida como regra da raiz quadrada, é válida apenas se os retornos forem independentes<sup>26</sup>.

---

<sup>26</sup> Se estimamos a volatilidade com modelo GARCH, por exemplo, a regra da raiz quadrada não é válida, pois a estrutura a termo de volatilidades deste modelo não é constante.

### 2.6.3. VaR paramétrico de uma carteira com diferentes ativos

Quando temos mais de um tipo de ativo na carteira, temos que levar em consideração a correlação entre eles para calcular a volatilidade da carteira.

Considerando uma carteira com 2 ativos, e medindo o retorno da forma discreta, o retorno  $R_p$  do portfólio é dado por  $R_p = w_1R_1 + w_2R_2$ , onde  $R_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$ ,  $R_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$ ,  $w_1$  e  $w_2$  são os pesos de cada ativo ( $w_1 + w_2 = 1$ ) e  $R_1$  e  $R_2$  são as variáveis aleatórias dos retornos dos ativos 1 e 2 respectivamente.

Seja  $V(x)$  a variância da variável aleatória  $x$ , temos que a variância da carteira será dada por  $V(R_p) = V(w_1R_1 + w_2R_2) = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2}$ , onde  $\sigma_{1,2}$  é a covariância entre  $R_1$  e  $R_2$ .

Observe que podemos utilizar notação matricial, generalizando para uma quantidade qualquer de ativos. Seja  $w$  uma matriz linha com os pesos e  $\Sigma$  a matriz de covariâncias, temos que  $V(R_p) = w\Sigma w^T$ . Sendo assim, o VaR da carteira é dado por  $VaR_{carteira} = -X_0Z_\alpha(w\Sigma w^T)^{1/2}$ .

A derivação do VaR da carteira foi realizada supondo a utilização de retorno discreto. Se utilizarmos retorno com composição contínua, teremos  $R_p = \ln(w_1e^{r_1} + w_2e^{r_2})$ .

Assim, a utilização de retorno com composição contínua facilita a agregação temporal, mas dificulta na agregação do retorno dos ativos do portfólio. O RiskMetrics ignora este fato, baseando-se em uma aproximação por expansão de Taylor<sup>27</sup>, de forma que, na prática, mesmo que  $R_1$  e  $R_2$  sejam calculados com composição contínua, o RiskMetrics<sup>28</sup> utiliza a forma discreta de agregação de ativos do portfólio.

### 2.6.4. Simulação Histórica

Existem mercados em que supor normalidade para os retornos dos ativos não corresponde à realidade. Tipicamente, a distribuição de probabilidade empírica dos retornos de ativos apresentam caudas grossas, onde os eventos extremos ocorrem com uma maior probabilidade do que o descrito por uma distribuição normal. Entretanto, muitas vezes não é

<sup>27</sup> Se  $r$  é um número próximo de zero ( $0 < r \ll 1$ ), então  $\ln(1 + r) \cong r$ .

<sup>28</sup> Ver seção 4.1 de “RiskMetrics – Technical Document”.

possível identificar uma distribuição de probabilidade que descreva os retornos de um determinado ativo. Ou, quando isso é possível, é difícil ou impossível obter uma fórmula fechada para o cálculo do *Value at Risk*.

Uma solução para estes problemas são os modelos não paramétricos. Eles consistem na simulação de cenários.

O método da Simulação Histórica consiste em utilizar cenários históricos para obter uma distribuição de probabilidade empírica para os retornos de uma carteira. A grande vantagem deste método é que ele não faz nenhuma hipótese sobre a real distribuição de probabilidade dos retornos.

Podemos calcular o VaR por simulação histórica seguindo os seguintes passos (Jorion, 2007):

Passo 1: Devemos definir um período histórico do qual será extraído uma série de variações de preços. Por exemplo, se escolhermos um período de 252 dias, então iremos buscar as séries de retornos dos últimos 252 dias para os ativos que constam na carteira atualmente.

Passo 2: A partir das séries de retornos históricos, devemos simular para cada um dos dias do período histórico qual seria a variação no valor da carteira.

Passo 3: A série simulada determina a distribuição empírica das variações de valor da carteira. Basta extrair o quantil desejado desta série.

### **2.6.5. Simulação de Monte Carlo**

A Simulação de Monte Carlo consiste em simular um número grande de cenários que aproximam o comportamento dos preços de ativos. A partir destes cenários simulados, obtemos uma distribuição de probabilidade simulada para a variação do valor do portfólio, de onde extraímos o VaR como um quantil desta distribuição. Conceitualmente, este método é similar à Simulação Histórica, com a diferença que utilizamos modelos paramétricos para simular preços futuros, em vez de utilizar cenários históricos.

Este método é útil quando temos ativos complexos na carteira, de onde não conseguimos extrair uma fórmula fechada para a variação do preço em função do fator de risco escolhido. Ou ainda no caso de ativos não-lineares, onde pode existir uma fórmula para a variação do preço, mas esta é uma função não linear dos fatores de risco escolhidos. Como exemplo, se modelarmos o preço de uma opção pelo modelo de Black-Scholes, e escolhermos o preço do ativo subjacente como fator de risco, temos uma função não linear.

Atribuindo a dinâmica do Movimento Browniano Geométrico a um ativo, aplicando o teorema de Ito (Hull, 2008) podemos mostrar que o preço do ativo pode ser simulado como  $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma \varepsilon (\Delta t)^{1/2})$ , onde  $S_0$  é o preço inicial,  $S_t$  é o preço simulado após um intervalo de tempo  $\Delta t$ ,  $\mu$  é o retorno médio do ativo (drift),  $\sigma$  a volatilidade (suposta constante), e  $\varepsilon$  é um número aleatório de uma normal padrão.

Para cada número  $\varepsilon$ , teremos um preço simulado do ativo<sup>29</sup>. Após simular vários cenários, teremos uma distribuição de probabilidade simulada, de onde extraímos um quantil que será o VaR simulado por Monte Carlo.

A grande vantagem deste método está na sua flexibilidade: podemos escolher qualquer dinâmica para os fatores de risco. Entretanto, este método requer muito esforço computacional: uma rotina de simulação pode levar horas para executar.

#### **2.6.6. VaR aplicado a Risco de Crédito : CreditMetrics®**

O risco de crédito está associado a perda em razão de mudanças na qualidade de crédito de uma contraparte: uma pior qualidade creditícia de uma contraparte implica numa maior probabilidade de inadimplemento da mesma. Infelizmente, o risco de crédito é muito mais difícil de quantificar do que o risco de mercado, pois temos um número maior de fatores de risco, e mais difíceis de serem levados em consideração por dificuldade em obter dados.

Para o risco de crédito, temos três fatores de risco (Jorion, 2007):

- Risco de default, medido pela probabilidade de default (PD);

---

<sup>29</sup> Quando temos mais de um ativo na carteira, temos que simular um preço para cada um dos ativos. Neste caso, temos que gerar números aleatórios  $\varepsilon$  para cada ativo de forma a preservar a correlação que pode existir entre eles. Para tal, devemos utilizar o método da Decomposição de Cholesky.

- Risco de exposição, que é o risco de flutuação no valor de mercado de títulos da contraparte. No caso de default, temos a exposição no default (*exposure at default*, EAD);

- Risco de recuperação de crédito, que é a incerteza associada a qual fração de crédito poderemos recuperar no caso de default. Esta fração também é igual a  $1 - \text{LGD}$ , onde LGD é a perda dado o default (*loss given default*).

O modelo *CreditMetrics* desenvolvido pelo J. P. Morgan utiliza uma estrutura de cálculo de *Value at Risk* aplicado a avaliação de risco de crédito de empréstimos e títulos de renda fixa. O modelo se baseia na abordagem de migração da qualidade de crédito, onde uma matriz de probabilidades de transição de Ratings para um determinado horizonte temporal é empregada a fim de estimar uma distribuição de perdas na carteira, dado um nível de confiança.

A ideia por trás do modelo é a de que as taxas de juros empregadas para avaliar empréstimos e títulos de uma determinada contraparte flutuam de acordo com sua qualidade de crédito. Se, por exemplo, o Rating de uma empresa diminui de qualidade, o mercado irá cobrar uma taxa maior para emprestar a esta empresa. O modelo simula cenários possíveis para a transição de Rating da uma empresa, reavaliando seus títulos em cada cenário. Como cada cenário possui uma probabilidade atribuída, temos uma distribuição de probabilidade para o valor do título, cuja flutuação decorre apenas da possibilidade de mudança na qualidade de crédito da contraparte.

A tabela a seguir mostra um exemplo de matriz de transição de Ratings para o horizonte de 1 ano.

One-year transition matrix (%)

Initial rating	Rating at year-end (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Source: Standard & Poor's CreditWeek (15 April 96)

Tabela 1 – Matriz de transição de ratings para horizonte de 1 ano

Fonte: Standard & Poor's

Observe que a matriz também admite possibilidade de default. No caso de default, também temos que estimar a taxa de recuperação de crédito do título.

Dado um determinado título de renda fixa, ele deve ser reavaliado em cada cenário possível de *Rating*. Para isso, utilizaremos uma estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) ajustada para cada *Rating*. Levando em consideração o horizonte de 1 ano, podemos utilizar as taxas forward de 1 ano para os cálculos. A tabela a seguir mostra um exemplo de ETTJ para cada *Rating*. As taxas da coluna de 2 anos, por exemplo, representam a taxa forward 1 ano à frente, para o prazo de 2 anos (ou seja, a taxa entre os prazos 1 ano e 3 anos contados a partir de hoje).

Example one-year forward zero curves by credit rating category (%)

Category	Year 1	Year 2	Year 3	Year 4
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Tabela 2 – Taxas forward para cada Rating

Fonte: Standard & Poor's

Após recalcular o preço do título para cada Rating, basta utilizar a matriz de transição para atribuir probabilidades a cada valor possível. De posse destas probabilidades, podemos calcular um quantil da distribuição, que será o valor de pior caso do título. Subtraindo o valor original do título, obteremos o *Value at Risk* de crédito deste título.

### 2.6.7. Expected Shortfall

Durante o período de 1 ano, por exemplo, utilizando um VaR com nível de confiança de 99%, esperamos que ocorram entre 2 ou 3 perdas maiores do que o VaR reportado.

Embora o VaR seja um bom termômetro para o risco, ele não informa qual será o tamanho da perda no caso em que ocorre uma perda maior que o VaR reportado.

Uma medida de risco mais informativa que o VaR, neste sentido, é o *Expected Shortfall*, ou *Expected Tail Loss* (ETL). Esta medida informa qual é o valor esperado da perda, dado que houve uma perda maior do que o VaR reportado. Matematicamente:

$$ETL = E [\text{Perda} | \text{Perda} > \text{VaR}] \quad (43)$$

No caso da distribuição normal, é possível mostrar que :

$$ETL = \frac{\sigma f(F^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \quad (44)$$

onde  $\sigma$  é a volatilidade,  $f(\cdot)$  é a função densidade de probabilidade da normal padrão,  $F^{-1}(\cdot)$  é a inversa da função de distribuição de probabilidade acumulada da normal padrão, e  $\alpha$  é o nível de confiança do VaR.

Este capítulo teve por objetivo apresentar os principais modelos de mensuração de risco baseados na metodologia do *Value at Risk*, mostrando a metodologia de cálculo de cada tipo e possíveis derivações da teoria.

### 2.6.8. Teste de Kupiec

Para observar se o número de violações do VaR está de acordo com a perda escolhida percentualmente, escolhemos o Teste de Kupiec (1995). Esse teste tem como hipótese nula que a taxa de erro ( $\pi$ ) do VaR é igual ao percentual ( $\alpha$ ) escolhido de perdas (10%, 5% e 1%, em nosso caso), ou seja,  $H_0: \pi = \alpha$ . A estatística segue uma distribuição assintótica de qui-quadrado com 1 grau de liberdade, como segue abaixo:

$$TK = -2 \ln \left( \frac{\alpha^{t_f(1-\alpha)^{t_v}}}{\pi^{t_f(1-\pi)^{t_v}}} \right) \sim \chi^2(1) \quad (45)$$

Dessa forma a 5% de confiança rejeitamos a hipótese nula com valores maiores 3,841, ou seja, rejeitamos a hipótese de que o  $\text{VaR}(\alpha)$  é aderente ao efetivamente ocorrido. Destacamos que o modelo deve ter o número de violações de acordo com a probabilidade proposta para estar bem ajustado, pois se não podemos estar subestimando ou superestimando a perda, o que tem conseqüências graves sobre o nível de alavancagem que uma carteira pode possuir.

### 2.6.9. Teste de Christoffersen

Um problema do Teste de Kupiec é que podemos estar correlacionando as violações do modelo, de tal forma, que o percentual encontrado, embora semelhante ao desejado, pode incorrer em mais erros em um determinado período que fez esse teste ser aprovado. Dessa forma, baseado em cadeias de Markov, Christoffersen (1998), verifica se o período  $t-1$  é correlacionado com  $t$ , e propõe o seguinte teste:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{se há falha} \\ 0 & \text{se não há falha} \end{cases}$$

Além disso, definimos que  $n_{i,j}$  sendo o número de dias que a situação  $i$  aconteceu no dia anterior e a condição  $j$  no dia corrente, de tal forma que:

	$I_{t-1} = 0$	$I_t = 1$
$I_{t-1} = 0$	$n_{00}$	$n_{01}$
$I_t = 1$	$n_{10}$	$n_{11}$

Agora definindo  $\varphi_i$  como a probabilidade de ocorrer uma violação dado que no dia anterior ocorreu  $i$ , ficamos com:

$$\varphi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}$$

$$\varphi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

$$\varphi = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01}n_{10} + n_{11}}$$

Com essas probabilidades, o teste verifica se estatisticamente  $\varphi_0 = \varphi_1$ , verificando então se a probabilidade de falhar é igual a de não falhar. Ou seja, falhar hoje não aumenta a probabilidade de falhar amanhã novamente. Assim, Christoffersen (1998) deriva o teste LM para verificar se há diferença:

$$TC = -2 \ln \left( \frac{(1-\varphi)^{n_{00}+n_{01}} \varphi^{n_{10}+n_{11}}}{(1-\varphi_0)^{n_{00}} \varphi_0^{n_{01}} (1-\varphi_1)^{n_{10}} \varphi_1^{n_{11}}} \right) \sim \chi^2(1) \quad (46)$$

### 2.6.10 Métodos de Previsão

O desempenho preditivo dos modelos é testado a partir das avaliações tradicionais sobre a Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE), o Erro Absoluto Médio (MAE), o erro percentual absoluto médio (MPAE) e pelo teste de Mincer-Zarnowits. Contudo, esses critérios são construídos a partir do erro de previsão  $h$  passos a frente da volatilidade<sup>30</sup>, sendo que para gerar os modelos EWMA e GARCH não temos variável endógena para comparar o modelo. Assim, usamos como volatilidade em nossa avaliação principal a Volatilidade Realizada (RV), como comumente usado na literatura, ver Hansen e Lunde (2001), Medeiros e McAleer (2008) e Corsi (2004). Porém, como essa variável é dependente dos modelos HAR, isso gera uma vantagem a esse modelo. Assim, mostra-se que o erro de previsão  $h$  passos a frente dos modelos GARCH contra uma proxy da volatilidade, normalmente empregada a raiz do retorno ao quadrado. Abaixo, são apresentados os testes:

$$RMSE_h^{Proxy} = \sqrt{\frac{(\ln(Proxy) - \ln(Modelo(h)))^2}{T_{prev}}} \quad (47)$$

$$MAE_h^{Proxy} = \frac{|\ln(Proxy) - \ln(modelo(h))|}{T_{prev}} \quad (48)$$

$$MPAE_h^{Proxy} = \frac{\left( \frac{|\ln(Proxy) - \ln(modelo(h))|}{\ln|modelo(h)|} \right)}{T_{prev}} \quad (49)$$

Nas fórmulas 34, 35 e 36 a *proxy*<sup>31</sup> pode ser RV (Volatilidade Realizada) ou o retorno ao quadrado e *modelo(h)* é a previsão do HAR, GARCH ou EWMA  $h$  passos a frente. Na artigo optou-se por fazer a previsão para 1, 2, 5 e 10 passos a frente.

Além disso, destaca-se que as previsões são realizadas a partir dos parâmetros estimados em toda amostra, ou seja, a aplicação é para testes de previsão dentro da amostra. Porém, embora utilizem os parâmetros estimados, a previsão mais que um passo a frente respeita a quantidade de informação disponível até aquele momento. Ou seja, no momento de

<sup>30</sup> O modelo HAR gera um resultado para o desvio padrão  $\sigma$  e os modelos GARCH geram a variância  $\sigma^2$ . Para podermos comparar, necessitamos tirar a raiz quadrada do retorno ao quadrado e das previsões um passo a frente dos modelos GARCH.

<sup>31</sup> Colocamos ainda como referência a própria estimação do GARCH e do EWMA um passo a frente, para verificarmos as diferenças dos modelos.

realizar a previsão de um modelo GARCH três passos a frente, por exemplo, tem-se que os parâmetros estimados na equação é que determinam o GARCH, mas o passo 2 é feito a partir da previsão da 1, e a de 3 passos a frente é feito a partir da previsão de 2 passos a frente. No caso do HAR, a previsão sempre é um passo a frente, mas o modelo usa as variáveis endógenas defasadas, ou seja, para cada horizonte tem-se um modelo estimado.

### 2.6.11 Teste de Mincer-Zarnowitz

O teste de Meicer-Zarnowitz verifica quando que a previsão  $h$  passos a frente explica o que é efetivamente observado. Para tanto é empregada uma regressão que usa como variável dependente a Volatilidade Realizada observada e usa como variável explicativa a previsão da volatilidade  $h$  passos a frente, que é obtida dos modelos de previsão, como segue na equação abaixo:

$$\sum_{j=0}^h RV_{t+j} = b_0 + b_1 E_{t-h} [\sum_{j=0}^h RV_{t+j}] + erro \quad (50)$$

A medida para saber o nível de explicação é o  $R^2$  ajustado, amplamente conhecido em estatística e econometria. Ou seja, quanto maior  $R^2$  ajustado, melhor é a capacidade preditiva do modelo.

### 3 Cópulas

Este capítulo apresenta os principais tipos de cópulas existentes para modelagem de ativos financeiros bem como a teoria estatística das mesmas. O objetivo é apresentar ao leitor as vantagens com relação à dependência linear.

A dependência entre variáveis aleatórias  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  é formalmente descrita pela função de distribuição conjunta, ou seja,  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$ . A concepção de cópulas surgiu a partir da separação da função  $F$  acima em duas partes: uma que descreve a estrutura de dependência e a outra que descreve o comportamento marginal das variáveis. Desta forma, qualquer cópula consiste de uma transformação sobre as variáveis aleatórias. Como exemplo, suponha uma transformação no vetor aleatório  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^t$  tal que tenhamos distribuições normais padronizadas marginais  $U(0,1)$ <sup>32</sup>. Como simplificação, pode-se assumir que  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  possui distribuições contínuas marginais  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , através da transformação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))^t$ . A função de distribuição conjunta  $C$  de  $(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))^t$  é então chamada de cópula do vetor aleatório  $(X_1, \dots, X_n)^t$  ou da distribuição multivariada  $F$ . Desta forma, chega-se a seguinte formulação:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_n(X_n) \leq F_n(x_n)] = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

A partir da formalização acima, uma cópula é qualquer função  $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  que possui três propriedades:

- a)  $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é crescente em cada componente  $x_i$ ;
- b)  $C(1, 1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in [0,1]$ ;
- c) Para todo  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in [0,1]^n, a_i \leq b_i$ , temos que:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(x_{1i_1}, \dots, x_{ni_n}) \geq 0, \text{ onde } x_{j1} = a_j \text{ e } x_{j2} = b_j \text{ para todo } j \in \{1, \dots, n\}$$

A primeira propriedade é trivial; a segunda decorre do fato de que as marginais são uniformes  $(0,1)$  e a terceira é verdadeira, pois o somatório pode ser interpretado como  $P[a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n]$ , o que é sempre não-negativo.

A unicidade da representação em forma de cópula para qualquer distribuição contínua multivariada é sempre garantida e a demonstração formal deste resultado pode ser encontrado em Schweizer e Sklar (1983, Capítulo 6).

<sup>32</sup> A utilização da normal padronizada  $U(0,1)$  é apenas uma simplificação, pois a rigor a transformação pode gerar qualquer outra distribuição.

### 3.1 Exemplificação de Cópulas

A garantia da unicidade permite obter algumas famílias de cópulas que se aplicam em séries de ativos financeiros, que é o objeto principal de análise deste projeto.

Para variáveis aleatórias independentes, a cópula possui a seguinte forma:

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad (51)$$

A cópula normal ou Gaussiana para pares de variáveis aleatórias (X,Y) não independentes é dada por :

$$C_{\rho}^{Ga}(x, y) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left[ \frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)} \right] ds dt \quad (52)$$

Onde o parâmetro  $\rho \in [-1,1]$  e  $\Phi$  é a função distribuição normal padronizada. Essa é uma outra forma de analisar dependência intertemporal, uma vez que  $\rho$  é o coeficiente de correlação e as variáveis possuem distribuições marginais da forma normal padronizada.

Outra cópula muito utilizada é chamada de Gumbel e possui a seguinte relação:

$$C_{\beta}^{Ga}(x, y) = \exp \left[ -\left\{ (-\log(x))^{\frac{1}{\beta}} + (-\log(y))^{\frac{1}{\beta}} \right\}^{\beta} \right] \quad (53)$$

Onde o parâmetro  $\beta \in (0,1]$  e indica a quantidade de dependência entre X e Y, ou seja, quando  $\beta = 1$ , há total independência das variáveis e quando  $\beta = 0$ , o contrário ocorre. A vantagem desta cópula com relação à anterior é que esta permite modelagem consistente com a teoria de valores extremos, utilizada no cálculo do VaR (Joe (1997) e Galambos (1987)).

Uma maneira simples de gerar qualquer cópula é considerar duas funções f e g quaisquer tais que  $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(y)dy = 0$  e  $f(x)g(x) \geq -1$  para todo  $x, y \in [0,1]$ . Desta forma,  $h(x,y) = 1 + f(x)g(y)$  é uma função densidade bivariada em  $[0,1]^2$  e  $C(x,y) = \int_0^x \int_0^y h(u,v)dudv = xy + \left(\int_0^x f(u)du\right)\left(\int_0^y g(v)dv\right)$ . Como exemplificação, se adotarmos  $f(x) = \alpha(1-2x)$ ,  $g(y) = (1-2y)$ ,  $\alpha \in [-1,1]$ , obtém-se a cópula<sup>33</sup>  $C(x,y) = xy[1+\alpha(1-x)(1-y)]$ . Salienta-se que há outros métodos de obtenção de cópulas e uma discussão bastante detalhada deste tópico é encontrada em Hutchinson e Lai (1990) ou Joe (1997). Desta forma, encontra-se na literatura diversas outras famílias de cópulas, que são geradas utilizando as funções acima.

<sup>33</sup> Esta cópula é chamada de Farlie-Gumbel-Morgenstern.

### 3.2 Propriedade da Invariância

Esta propriedade refere-se ao fato de que uma cópula é invariante sob transformações contínuas e crescentes nas marginais. Dito de outra forma, se  $(X_1, \dots, X_n)^t$  possui uma cópula  $C$  e  $T_1, \dots, T_n$  são funções contínuas crescentes, logo  $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))^t$  também possui uma cópula  $C$ .

PROVA: Por hipótese  $(U_1, \dots, U_n)^t$  possui uma função de distribuição  $C^{34}$ .

Portanto, pode-se deduzir que :

$$\begin{aligned} C(F_{T_1(X_1)}(x_1), \dots, F_{T_n(X_n)}(x_n)) &= P[U_1 \leq F_{T_1(X_1)}(x_1), \dots, U_n \leq F_{T_n(X_n)}(x_n)] = \\ P[F_{T_1(X_1)}^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F_{T_n(X_n)}^{-1}(U_n) \leq x_n] &= P[T_1 \circ F_{X_1}^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, T_n \circ F_{X_n}^{-1}(U_n) \leq \\ xn &= P[T_1 X_1 \leq x_1, \dots, T_n X_n \leq xn] \end{aligned} \quad (54)$$

Este resultado indica que se modelarmos, por exemplo, uma carteira composta por vários ativos utilizando a série de retornos através de percentual ou utilizando a série de retornos por logaritmo, a cópula para as duas metodologias serão as mesmas, a única diferença será com relação às distribuições marginais dos ativos.

### 3.3 Propriedade da Comonotonicidade

Para qualquer cópula, os limites de Fréchet (Fréchet, 1957) se aplicam, ou seja:

$$C_\ell(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1 + x_2 + \dots + x_n - 1 + n, 0\} \leq C(x_1, \dots, x_n) \leq \min\{x_1, \dots, x_n\} = C_u(x_1, \dots, x_n)$$

Esta igualdade é decorrência do fato de que toda cópula é uma função de distribuição de um vetor aleatório  $(U_1, \dots, U_n)^t$  onde  $U_i \sim U(0,1)$ . Para o caso particular em que  $n=2$ , temos que:

$$C_\ell(x_1, x_2) = P[U \leq x_1, 1 - U \leq x_2] \quad (55)$$

$$C_u(x_1, x_2) = P[U \leq x_1, U \leq x_2] \quad (56)$$

A função  $C_\ell$ , por possuir função de distribuição dada por  $(U, 1-U)^t$ , apresenta a densidade da dados na diagonal entre  $(0,1)$  e  $(1,0)$ , enquanto que  $C_u$ , cuja função de distribuição é dada por  $(U,U)^t$ , possui a densidade de dados na diagonal entre  $(0,0)$  e  $(1,1)$ . Desta forma, geometricamente percebe-se que a função  $C_\ell$  descreve dependência positiva perfeita enquanto que  $C_u$  descreve dependência negativa perfeita.

Em função desta interpretação, Yaari (1987) define que se  $(X,Y)^t$  possui cópula  $C_u$ , então  $X$  e  $Y$  são ditos co-monotônicos; ao contrário se possui cópula  $C_\ell$ , então  $X$  e  $Y$  são chamados de contra-monotônicos.

<sup>34</sup> Em funções marginais contínuas  $F_{X_i}$  observa-se que  $U_i = F_{X_i}(X_i)$

### 3.4 Medida de dependência em Cópulas

A correlação ordenada<sup>35</sup> definida na primeira seção deste projeto é interpretada como a correlação da cópula  $C$  associada a  $(X, Y)^{\dagger}$ . Neste caso,  $\rho_s$  é interpretado como sendo o grau de dependência monotônica entre as variáveis  $X$  e  $Y$ .

Supondo o par de variáveis aleatórias  $(X, Y)^{\dagger}$  com funções de distribuição contínuas  $F_1$  e  $F_2$ , função de distribuição conjunta  $F$  e cópula  $C$  valem as seguintes afirmações:

$$A1 - \rho_s(X, Y) = \rho_s(Y, X)$$

$$A2 - \text{Se } X \text{ e } Y \text{ são independentes então } \rho_s(X, Y) = 0$$

$$A3 - \rho_s(X, Y) \in [-1, +1]$$

$$A4 - \rho_s(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 \{C(x, y) - xy\} dx dy$$

$$A5 - \rho_s(X, Y) = 1 \leftrightarrow C = C_u \leftrightarrow Y = T(X), \text{ onde } T \text{ é uma transformação crescente}$$

$$A6 - \rho_s(X, Y) = -1 \leftrightarrow C = C_l \leftrightarrow Y = T(X), \text{ onde } T \text{ é uma transformação decrescente}$$

As demonstrações de todas as assertivas encontram-se em Höfding (1940) e Dhaene e Goovaerts (1996).

### 3.5 Dependência Caudal

A dependência caudal, que está relacionada com valores extremos das distribuições, pode ser definida para pares de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ . Se a primeira variável possui função de distribuição  $F_1$  e a última  $F_2$ , então a dependência caudal de  $X$  e  $Y$  é definida como:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P[Y > F_2^{-1}(\alpha) | X > F_1^{-1}(\alpha)] = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P[Y > VaR_{\alpha}(Y) | X > VaR_{\alpha}(X)] = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} 1 - C(\alpha, \alpha) = \lambda \quad (57)$$

onde  $\bar{C}(u, u) = 1 - 2u + C(u, u)$  é a função sobrevivência<sup>36</sup> da cópula  $C$  associada ao par de variáveis aleatórias  $(X, Y)^{\dagger}$ . Se o parâmetro  $\lambda$  acima pertence ao intervalo  $(0, 1]$  então  $X$  e  $Y$  são chamados de assintoticamente dependentes e se  $\lambda$  é nulo então  $X$  e  $Y$  são ditos assintoticamente independentes.

Se a cópula possui uma forma fechada simples, então o cálculo do parâmetro  $\lambda$  é feito de forma direta.<sup>37</sup> Para os outros casos<sup>38</sup>, aplica-se a regra de L'Hospital para encontrar o parâmetro, ou seja:

<sup>35</sup> Ou também chamada de correlação de Spearman.

<sup>36</sup> A função sobrevivência é tal que  $G(t) = P(\{T > t\}) = \int_t^{\infty} f(u) du = 1 - F(t)$ , onde  $T$  é uma variável aleatória cuja função de distribuição é dada por  $F(t)$ .

<sup>37</sup> Por exemplo, a cópula de Gumbel possui  $\lambda = 2 - 2^{\beta}$ , logo para haver dependência nesta distribuição teremos  $\beta < 1$ .

<sup>38</sup> A cópula Gaussiana é um exemplo de cópula sem uma forma simples definida.

$$\lambda = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{d\bar{C}(x,x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \Pr[U_2 > x | U_1 = x] + \lim_{x \rightarrow 1^-} \Pr[U_1 > x | U_2 = x] \quad (58)$$

Uma outra forma de calcular o limite acima é aplicar a transformação quantil  $F_1^{-1}$  em ambas as marginais de forma a obter a distribuição bivariada em que a probabilidade condicional é conhecida. Desta forma, ficamos com:

$$\lambda = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \Pr[U_2 > x | U_1 = x] = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr[F_1^{-1}(U_2) > x | F_1^{-1}(U_1) = x] = \\ 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr[Y > x | X = x, \text{ onde } (X,Y) \sim \mathcal{C}(F_1(x), F_1(y))] \quad (59)$$

Para a cópula Gaussiana, com  $F_1 = \Phi$  e correlação  $\rho$  e utilizando-se do fato de que  $Y | X = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$ , pode ser mostrado que:

$$\lambda = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right) \quad (60)$$

A interpretação deste resultado indica que esta família de cópula possui independência assintótica, pois  $\rho < 1$ . Dito de outra forma, extremos eventos parecem ocorrer independentemente em cada cauda. (Sibuya(1961) e Resnick (1987)).

Entretanto, para a distribuição bivariada t com  $\nu$  graus de liberdade e correlação  $\rho$ , o valor do coeficiente de dependência caudal é:

$$\lambda = 2 t_{\nu+1}\left(\frac{\sqrt{(\nu+1)(1-\rho)}}{\sqrt{1+\rho}}\right) \quad (61)$$

A diferença entre esta família e a Gaussiana é que como  $\rho > -1$ , a primeira é assintoticamente dependente. Pela expressão acima, a medida em que os graus de liberdade aumentam, o grau de dependência diminui e as distribuições marginais passam a ter caudas mais pesadas.

### 3.6 Concordância

O termo concordância se refere a determinar se a dependência entre duas variáveis aleatórias é concordante (positiva) ou discordante (negativa). Para isto, não basta garantir, no caso de concordância entre variáveis, que  $\rho(X,Y) > 0$  ou  $\rho_s(X,Y) > 0$ . São necessárias condições mais fortes, quais sejam (Joe, 1997):

- a) Duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são quadrantes dependentes positivamente se:

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x]P[Y > y] \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

- b) Duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são positivamente associadas se:

$$E[g_1(X,Y)g_2(X,Y)] \geq E[g_1(X,Y)]E[g_2(X,Y)] \text{ para toda função de medida real}^{39} g_1 \text{ e } g_2, \text{ crescentes em } X \text{ e } Y.$$

<sup>39</sup> Função de medida real é aquela que preserva a estrutura de funções entre espaços mensuráveis.

Ambas as condições acima são invariantes sob transformações crescentes e a seguinte cadeia de implicações pode ser demonstrada<sup>40</sup>: (Embrechets, 1997)

Comonotonicidade  $\rightarrow$  Positivamente Associadas  $\rightarrow$  Quadrantes dependentes positivamente  $\rightarrow \rho_s(X, Y) \geq 0$ .

### 3.7 Estimação de Cópulas

Um ponto crítico para a metodologia é a determinação da estrutura de dependência. Supondo que temos dois vetores de variáveis aleatórias e que as distribuições marginais são normais com média nula e variância  $\sigma_a^2$  e  $\sigma_b^2$  respectivamente, e utilizando o teorema de Sklar<sup>41</sup>, ficamos com:

$$G.(\epsilon_a, \epsilon_b) = C.(N(\epsilon_a/\sigma_{a.}), N(\epsilon_b/\sigma_{b.})) \quad (62)$$

Na equação acima, a notação “.” significa a escolha de uma função cópula qualquer. O objetivo consiste em obter a função de máxima verossimilhança para obtenção dos parâmetros  $(\omega. , \sigma_{a.}, \sigma_{b.})$  da função distribuição conjunta de G.

A função de máxima verossimilhança então assume a seguinte forma:

$$\ln L.(\omega., \sigma_{a.}, \sigma_{b.}, ; \epsilon_{a,t}, \epsilon_{b,t}) = \sum_{t=1}^T \ln \frac{1}{\sigma_{a.}\sigma_{b.}} c. \left( N \left( \frac{\epsilon_{a,t}}{\sigma_{a.}} \right), N \left( \frac{\epsilon_{b,t}}{\sigma_{b.}} \right) N' \left( \frac{\epsilon_{a,t}}{\sigma_{a.}} \right) N' \left( \frac{\epsilon_{b,t}}{\sigma_{b.}} \right) \right) \quad (63)$$

Na função acima,  $N'$  é a densidade da distribuição normal padronizada e  $c.$  é uma densidade de alguma cópula conhecida. Como as estimativas dos parâmetros da cópula  $\hat{\omega}_T$  possuem as propriedades da máxima verossimilhança<sup>42</sup>, as estimativas dos parâmetros de dependência caudal,  $\hat{\lambda}_T = \lambda(\hat{\omega}_T)$  serão consistentes e assintoticamente distribuídos de acordo com uma normal com:

$$\sqrt{T}(\hat{\lambda}_T - \lambda) \rightarrow N(0, \sigma_\lambda^2) \quad (64)$$

A variância  $\sigma_\lambda^2$  pode ser aproximada utilizando a primeira ordem do polinômio de Taylor<sup>43</sup> por:

$$\sigma_\lambda^2 = \left( \frac{\partial \lambda(\hat{\omega}_T)}{\partial \omega_T} \right)^T \sum_{\hat{\omega}_T} \frac{\partial \lambda(\hat{\omega}_T)}{\partial \omega_T} \quad (65)$$

<sup>40</sup> A demonstração encontra-se em Embrechets, 2001.

<sup>41</sup> Conforme explicado no início desta sessão, o teorema de Sklar garante a unicidade e temos o seguinte resultado :  $H(z_1, z_2) = C(F_{Z_1}(z_1), F_{Z_2}(z_2))$ . A interpretação é imediata: a estrutura de dependência e as marginais univariadas podem ser separadas.

<sup>42</sup> Ou seja, permitem a maximização da função L.

<sup>43</sup> Uma função pode ser aproximada pelo polinômio de Taylor através da fórmula  $f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^n \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} (x - a)^\alpha + \alpha = n + 1 R_\alpha(x)(x - a)^\alpha$

Na aproximação de primeira ordem acima,  $\frac{\partial \lambda}{\partial \omega_T}$  é o gradiente da dependência caudal como função de  $\lambda$  e  $\Sigma \hat{\omega}_T$  é a matriz de covariância dos parâmetros  $\hat{\omega}_T$  gerados pela estimação através do método de máxima verossimilhança.

### 3.8 Modelos para Estimação de Volatilidade

Conforme foi visto na sessão 2 deste projeto, séries financeiras, tais como retorno de índices de ações, curvas de juro com diferentes maturidades, apresentam características tais como: autocorrelação serial, heterocedasticidade variável ao longo do tempo, ou seja, dependência intertemporal.

Especificamente com relação à estimação de cópulas, se a verdadeira cópula pertence à uma família paramétrica  $C = \{C_\theta, \theta \in \Theta\}$ , o parâmetro desejado é obtido através dos métodos de máxima verossimilhança de duas formas: a primeira assume que uma distribuição das marginais é paramétrica e desta forma, cada marginal é inserida da função de verossimilhança cuja maximização é realizada com relação à  $\theta$ ; a segunda forma não assume a hipótese da primeira e portanto, a função de distribuição cumulativa empírica das marginais é agregada à função de máxima verossimilhança. Ambos os métodos de estimação são detalhados em Genest(1993) e Shi e Louis (1995).

Outra possibilidade para a estimação é considerar algum modelo não paramétrico baseado na distribuição empírica e segundo Deheuvels (1979), o resultado consiste em cópulas com descontinuidades e sem interpretação geométrica<sup>44</sup>.

Após a estimação de parâmetros de uma família de cópulas qualquer, são necessários testes estatísticos de adequação para garantir a qualidade, consistência e aderência dos dados à série analisada. Para tanto, considerando a hipótese de que escolhemos uma determinada família de cópulas a priori para estimação, o problema do teste de adequação consiste em dois testes:

a) O primeiro da forma:

Hipótese Nula ( $H_0$ ) :  $C = C_0$

Hipótese Alternativa ( $H_1$ ):  $C \neq C_0$

b) O último possui a estrutura:

Hipótese Nula ( $H_0$ ) :  $C$  pertence à  $c$

Hipótese Alternativa ( $H_1$ ):  $C$  não pertence à  $c$

<sup>44</sup> Em função das descontinuidades, não é possível a obtenção do gráfico.

Nos testes acima,  $C_0$  indica alguma forma de cópula conhecida e  $c = \{ C_\theta, \theta \in \Theta \}$  é alguma família paramétrica conhecida de cópulas<sup>45</sup>.

Fermanian (2005) discute a dificuldade em realizar os testes acima dado que as funções de distribuição cumulativas das marginais não são conhecidas. Desta forma, este autor afirma que o problema de teste de adequação ainda é um campo de grande desenvolvimento em estatística e neste artigo, ele propõe algumas alternativas para esta questão.

O método mais usual segundo Fermanian (2005) é realizar o teste em cada distribuição marginal separadamente e uma vez que o teste foi aceito, prossegue-se com o teste na distribuição multivariada como um todo. Embora simples do ponto de vista metodológico, computacionalmente há algumas restrições para a parte de testes na distribuição multivariada completa. Além disso, é mais importante o estudo da estrutura de dependência, independentemente das especificações das marginais.

Uma forma simples de contornar o problema descrito para o teste na distribuição multivariada é utilizar uma estimação da densidade da cópula. Para tanto, o processo de elaboração da cópula neste caso é da forma:

$$C_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^d \mathbf{1}(F_{n,k}(X_{i,k}) \leq u_k) \quad (66)$$

E não da especificação mais usual de cópulas que é:

$$C_n^*(\mathbf{u}) = F_n(F_{n,1}^-(u_1), \dots, F_{n,d}^-(u_d)), \text{ onde } F_{n,k}^-(u) = \inf \{t | F_{n,k}(t) \geq u\} \quad (67)$$

Apesar da mudança nos processos geradores das cópulas, segundo Fermanian (2005) esse fato não altera o resultado dos testes estatísticos propostos.

Considerando que o vetor  $\mathbf{Y}_i$  possui densidade  $\tau$  com relação à medida de Lebesgue<sup>46</sup> e pela definição do estimador kernel, temos que a densidade  $\tau$  da cópula no ponto  $\mathbf{u}$  é dada por:

$$\tau_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{h^d} \int K\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{v}}{h}\right) C_n(d\mathbf{v}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{u}-\mathbf{Y}_{n,i}}{h}\right) \quad (68) \text{ onde } K \text{ é o kernel de dimensão } ^{47} d$$

Definido desta forma acima, o teste de especificação é:

$$S = \frac{nh^d}{\int K^2} \sum_{k=1}^m \frac{(\tau_n(\mathbf{u}_k) - \tau(\mathbf{u}_k, \hat{\theta}))^2}{\tau(\mathbf{u}_k, \hat{\theta})^2} \quad (69)$$

Onde  $\hat{\theta}$  é o parâmetro estimado e  $S$  tende à distribuição qui-quadrada de dimensão  $m$ .

<sup>45</sup> Conforme visto em sessão pertinente deste projeto, a cópula dos testes é uma função de distribuição cumulativa de  $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$

<sup>46</sup> A medida de Lebesgue refere-se a teoria da medida e é utilizada em análise real. Simplificadamente, esta medida é utilizada para associar comprimentos, áreas e volumes em subconjuntos do espaço Euclidiano.

<sup>47</sup> Como notação, usamos  $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h^d$ , onde  $h=h(n)$  denota a sequência de comprimentos dos intervalos e  $h(n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Pelo fato de a escolha dos pontos  $(\mathbf{u}_k)_{k=1,\dots,m}$  ser arbitrária e também como  $m$  torna-se muito grande quando a dimensão  $d$  aumenta, a adequação para alguns pontos não é garantia de que a estrutura de dependência estará bem especificada para todos os pontos. Desta forma, o poder do teste fica comprometido.

Com o objetivo de realizar o teste de especificação em todos os pontos, faz-se uso da teoria da medida, mais especificamente, utilizaremos o espaço  $L^2$ . Tal teste é baseado na proximidade entre a densidade da cópula suavizada e a densidade paramétrica estimada, denotada por  $\hat{\tau}$ . Desta forma, o método considera a seguinte estatística:

$$J_n = \int (\tau_n - K_h * \hat{\tau})^2(\mathbf{u})\omega(\mathbf{u})d\mathbf{u} \quad (70)$$

Na estatística acima,  $\omega$  é a função peso e o símbolo “\*” denota o operador convolução<sup>48</sup>.

A minimização do critério estatístico  $J_n$  definido acima produz estimativas consistentes em diversas situações. Fermanian (2005) apresenta um histórico de artigos que tratam somente da consistência dos estimadores. Utilizando a densidade definida acima bem como o  $J_n$ , o teste estatístico é:

$$T = \frac{n^2 h^d (J_n - (nh^d)^{-1} \int K^2(\mathbf{t}) \cdot (\hat{\tau} \omega)(\mathbf{u} - h\mathbf{t}) dt d\mathbf{u} + (nh)^{-1} \int \hat{\tau}^2 \omega \cdot \sum_{r=1}^d \int K_r^2)^2}{2 \int \hat{\tau}^2 \omega \cdot \int \{K(\mathbf{u})K(\mathbf{u} + \mathbf{v})\}^2 d\mathbf{v}} \quad (71)$$

A estatística  $T$  acima tende para uma distribuição do tipo qui-quadrada.

Alguns softwares estatísticos já embutem essa rotina como, por exemplo, o MATLAB.

Neste capítulo foram abordados os principais modelos de cópulas utilizados em Finanças, sendo tratados a questão de adequação dos dados e testes de aderência.

---

<sup>48</sup> Convolução entre duas funções é definida como  $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$

#### 4 Comparação entre a estrutura de dependência de Cópulas e Correlação

Na primeira seção deste projeto foram apresentadas as distribuições esféricas e elípticas, pois são muito utilizadas em finanças por permitir a utilização das ferramentas de gerenciamento de risco tais como o VaR, a técnica média-variância de Markowitz para gerenciamento de risco e otimização de portfólio.

Na segunda seção vimos que a utilização do VaR depende de certas características da distribuição de retorno, de tal forma que a medida possa ser realizada matematicamente. Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999) apresentam uma medida coerente de risco através da função  $\rho$  que deve satisfazer as seguintes propriedades:

P1 – Monotonicidade

Para quaisquer duas variáveis aleatórias, se  $X \geq Y$  então  $\rho(X) \geq \rho(Y)$ .

P2 – Subaditividade

Para quaisquer duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  temos que  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .<sup>49</sup>

P3 – Homogeneidade de grau um positiva

Para qualquer  $\lambda \geq 0$  temos que  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ .

P4 – Invariância quanto à translação

Para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , temos que  $\rho(X + a) = \rho(X) + a$ .

Para distribuições elípticas, o uso de qualquer medida para ordenação de risco ou para determinar carteiras ótimas através de minimização de risco é equivalente a metodologia de Markowitz onde a variância é utilizada como medida de risco. Outras medidas de risco, tais como o VaR, apesar de gerarem valores numéricos diferentes, não alteram o gerenciamento de risco.

Especificamente com relação ao VaR<sup>50</sup>, utilizando a função  $\rho$  apresentada no início desta sessão e utilizando o conjunto de todas as carteiras lineares dado por  $\mathcal{P} = \{Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i | \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ , podemos afirmar o seguinte:

<sup>49</sup> Esta propriedade também é chamada de desigualdade triangular.

<sup>50</sup> Neste projeto, o VaR é apresentado em sua forma mais simples, ou seja, sem o horizonte de tempo do portfólio.

### A1 – Subaditividade do VaR

Para quaisquer duas carteiras  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}$  e  $\alpha \in [0.5, 1)$  temos que  $\text{VaR}_\alpha(Z_1 + Z_2) \leq \text{VaR}_\alpha(Z_1) + \text{VaR}_\alpha(Z_2)$ .

PROVA: Considere  $q_\alpha$  o quantil correspondente à distribuição padronizada. Logo, temos que:

$$\text{VaR}_\alpha(Z_1) = E[Z_1] + \sigma[Z_1]q_\alpha \quad (72)$$

$$\text{VaR}_\alpha(Z_2) = E[Z_2] + \sigma[Z_2]q_\alpha \quad (73)$$

$$\text{VaR}_\alpha(Z_1 + Z_2) = E[Z_1 + Z_2] + \sigma[Z_1 + Z_2]q_\alpha \quad (74)$$

Como  $\sigma[Z_1 + Z_2] \leq \sigma[Z_1] + \sigma[Z_2]$  e  $q_\alpha \geq 0$ , fica provado A1.

### A2 – Equivalência da variância e da homogeneidade positiva

Seja  $\mathbf{q}$  uma medida de risco que depende somente da distribuição da variável aleatória  $X$  e que esta medida satisfaz a propriedade P3<sup>51</sup> vista acima. Logo, para  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}$  teremos:

$$\mathbf{q}(Z_1 - E[Z_1]) \leq \mathbf{q}(Z_2 - E[Z_2]) \leftrightarrow \sigma^2[Z_1] \leq \sigma^2[Z_2] \quad (75)$$

PROVA: Como  $Z_1$  e  $Z_2$  são variáveis aleatórias que possuem o mesmo tipo de distribuição, existe uma constante  $a > 0$  tal que  $Z_1 - E[Z_1] =_d a(Z_2 - E[Z_2])$ . Portanto, podemos deduzir que:

$$\mathbf{q}(Z_1 - E[Z_1]) \leq \mathbf{q}(Z_2 - E[Z_2]) \leftrightarrow a \leq 1 \leftrightarrow \sigma^2[Z_1] \leq \sigma^2[Z_2] \quad (76)$$

### A3 – Minimização de risco de carteira por Markowitz

Seja  $\mathbf{q}$  uma função tal como descrita em A2 que satisfaça a propriedade P4<sup>52</sup> e o conjunto  $\mathcal{E} = \{Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, E[Z] = r\}$  que representa o subconjunto de todas as carteiras com retorno esperado igual a  $r$ . Logo, temos que:

$$\text{argmin}_{Z \in \mathcal{E}} \mathbf{q}(Z) = \text{argmin}_{Z \in \mathcal{E}} \sigma^2[Z] \quad (77)$$

PROVA: Se A2 é verdadeiro, logo A3 é uma decorrência direta partindo da hipótese de que a otimização é operada sob expectativas idênticas.

Apesar de esta medida de risco ser muito utilizada em finanças, para algumas distribuições essas propriedades não são verdadeiras. Como forma de obter uma generalização, Embrechts (2001) propõe uma medida de dependência dada pela função  $\delta(\cdot, \cdot)$  cujo contradomínio é um número real para quaisquer pares de valores das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  pertencentes ao domínio da função. Idealmente, esta função deve satisfazer as seguintes propriedades:

P1 – Propriedade de simetria:  $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$

P2 – Propriedade de normalização:  $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$

P3 – Se  $\delta(X, Y) = 1 \leftrightarrow X$  e  $Y$  são co-monotônicos;

<sup>51</sup> Ou seja, satisfaz a propriedade de homogeneidade de grau um positiva.

<sup>52</sup> Ou seja, satisfaz a propriedade de invariância quanto à translação.

$\delta(X,Y) = -1 \leftrightarrow X$  e  $Y$  são contra-monotônicos

A correlação linear satisfaz somente às propriedades P1 e P2 acima enquanto que a correlação ordenada, que é utilizada em cópulas, satisfaz as três condições. Além dessa vantagem do uso de cópulas, a correlação linear apresenta alguns problemas tais como:

i) Distribuições marginais e a correlação determinam a distribuição conjunta.

Esta afirmação somente é verdadeira para distribuições esféricas e elípticas, uma vez que há uma infinidade de famílias de cópulas para as quais tem-se as distribuições marginais de duas variáveis aleatórias com correlação  $\rho$ . Um exemplo deste fato é a discussão da figura 1 deste projeto, que apresenta duas variáveis aleatórias com mesma correlação, entretanto, com distribuições conjuntas distintas. Naquele caso, para obtenção do gráfico, foram consideradas duas distribuições com marginais  $\text{Gamma}(3,1)$ , mesma correlação  $\rho = 0,7$ , entretanto com estruturas de dependência distintas, dadas por:

$$F_{Ga}(x, y) = C_{\rho}^{Ga}(G(x), G(y)) \quad (78)$$

$$F_{Gu}(x, y) = C_{\beta}^{Gu}(G(x), G(y)) \quad (79)$$

Nas equações de dependência acima,  $C_{\rho}^{Ga}$  representa a cópula Gaussiana enquanto que  $C_{\beta}^{Gu}$  representa a cópula de Gumbel.<sup>53</sup> A diferença entre estas duas famílias de cópulas foi discutida na sessão pertinente deste projeto e se refere basicamente a dependência assintótica. Empiricamente, a cópula de Gumbel é a que apresenta maior dependência caudal, o que interfere diretamente no cálculo do VaR. Se fixarmos o nível de significância do VaR em 1%, ou seja,  $u = \text{VaR}_{0,99}(X) = \text{VaR}_{0,99}(Y) = G_{3,1}^{-1}(0,99)$ , e calcularmos a probabilidade condicional, obteremos:

$$\widehat{P}_{F_{Ga}}[Y > u | X > u] = \frac{3}{9} \cong 0,34 \quad (80)$$

$$\widehat{P}_{F_{Gu}}[Y > u | X > u] = \frac{12}{16} = 0,75 \quad (81)$$

Esses resultados corroboram com a discussão na sessão sobre cópulas: a probabilidade de um evento extremo ser acompanhado de um outro é muito maior na família de cópulas do tipo Gumbel, ou seja, há uma menor diversificação de riscos elevados nesta estrutura de dependência. Como na cálculo da VaR, estamos interessados em valores extremos e, portanto, a escolha da família de cópulas é extremamente importante.

ii) Dadas as distribuições marginais  $F_1$  e  $F_2$  para  $X$  e  $Y$  respectivamente, todas as correlações lineares entre  $-1$  e  $1$  podem ser calculadas através de uma especificação adequada da distribuição conjunta dessas duas variáveis.

<sup>53</sup> Para obtenção de correlação igual a  $0,7$ , os parâmetros das cópulas foram calibrados para  $\rho = 0,71$  e  $\beta = 0,54$ .

Suponha duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  tais que o limite de valores esteja contido em  $[0, \infty)$ , ou seja,  $F_1(x) = F_2(y) = 0$  para todo  $x, y < 0$ . Suponha também que  $\sup_x \{x | F_1(x) < 1\} = \sup_y \{y | F_2(y) < 1\} = \infty$ . Assuma que  $\rho(X, Y) = -1$ , o que implica em  $Y = aX + b$ , onde  $a < 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Desta forma, temos que:

$$F_2(y) = P[Y \leq y] = P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] \geq P\left[X > \frac{y-b}{a}\right] = 1 - F_1\left(\frac{y-b}{a}\right) > 0 \quad (82)$$

Este resultado é uma contradição uma vez que viola a hipótese de que  $F_2(y) = 0$ .

Desta forma, percebe-se que este capítulo dedicou a apresentar uma comparação entre correlação linear e cópulas, sendo que medidas adequadas de risco sugerem que a utilização do último é mais adequada matematicamente e empiricamente.

## 5 Método

Na discussão teórica ficou evidenciado que o uso da correlação linear como medida de dependência entre duas variáveis aleatórias está restrito a uma classe específica de distribuições dessas variáveis, entretanto, para o cálculo do *Value at Risk*, este fato não é considerado, tornando o resultado do ponto de vista estatístico duvidoso.

Uma possível alternativa para a medida de dependência entre duas variáveis aleatórias é a utilização das cópulas, cuja correlação é calculada como proposta por Spearman. A grande vantagem no uso de cópulas deve-se ao fato de que elas são invariantes sob transformações estritamente crescentes de suas marginais e isso permite que um problema clássico em finanças, que é encontrar a distribuição multivariada completa, seja menos custoso computacionalmente, pois como foi visto em estimação de cópulas, são necessários dois passos apenas: a modelagem da distribuição marginal e a estimação da cópula propriamente dita pelo método da máxima verossimilhança, representando a estrutura de dependência das variáveis.

No capítulo IV desta tese, foram apresentadas algumas modificações necessárias que devem ser feitas na função de medida, de forma a tornar o cálculo do *Value at Risk* correto matematicamente. Para tanto, as condições necessárias para a função medida de risco foram discutidas bem como as implicações no cálculo da função perda em caudas pesadas.

É importante ressaltar que há diversas contribuições empíricas para o cálculo do VaR utilizando cópulas como, por exemplo: Cherubini e Luciano (2001) utilizaram as funções cópula para o cálculo de probabilidade nas caudas com diferentes níveis de confiança; Ané e Kharoubi (2003) investigaram a importância das distribuições marginais e da estrutura de dependência para estimação do VaR; Miller e Liu (2006) utilizaram a cópula Gaussiana para a estimação do VaR de uma carteira de hedge. Os resultados apontados por todos os autores indicaram que a utilização de uma estrutura de cópula nos diagnósticos de *backtesting* superaram os modelos que adotam a correlação linear para os níveis de 95% e 99% como indicados pela Basileia II.

O desenvolvimento desta tese é a aplicação empírica da teoria estatística de cópulas nas distribuições encontradas em ativos negociados no Brasil e a comparação com a correlação linear usual que é utilizada como *proxy* para cálculo do Value at Risk, no que

tange ao risco de mercado. Neste sentido, considerando o artigo seminal de Dias e Embrechts (2003) e Patton (2003a), as seguintes etapas devem ser implementadas:

- i) Como caracterização estatística das séries de retornos, devem-se realizar as medidas descritivas tais como: média, desvio padrão, retorno mínimo e máximo, mediana, excesso de curtose e grau de assimetria das séries;
- ii) Modelam-se as séries de retorno presentes na carteira teórica utilizando modelos ARCH, GARCH, EWMA ou HAR que capturam a presença de heterocedasticidade, se houver. Desta forma, considera-se que nesta etapa serão realizados os testes Q e ARCH de Engle para detecção de variação e agrupamento de volatilidades. Após estimação, serão realizados novamente esses testes estatísticos nos erros padronizados para verificação da adequação do modelo escolhido;
- iii) Uma vez que os modelos tenham sido corretamente especificados no passo acima, utilizam-se os erros padronizados de cada série para modelagem da cópula;
- iv) Como as cópulas exigem a especificação da distribuição condicional marginal, podem-se utilizar distribuições conhecidas como t de Student ou Normal e utilizar as diversas famílias de cópulas existentes na literatura;
- v) Como critério de decisão da melhor cópula ajustada, calcula-se a distância quadrática entre a estimada e a empírica, através da seguinte fórmula:

$$d(C1,C2) = [\sum_{i=1}^m (C_1(a_i) - C_2(a_i))^2]^{1/2} \quad (82)$$

O critério de decisão é a seleção da cópula  $C_k$  que minimiza a distância entre a estimada e a empírica<sup>54</sup>. Como o objetivo é cálculo do VaR, a região de interesse deve ser a cauda inferior;

- vi) Para a estimação do Value at Risk, utiliza-se o *backtesting* aos níveis de confiança de 95%, 99% e 99,5%. O procedimento consiste em simular o modelo acima escolhido para toda a janela de amostra, calcular o VaR para os níveis de significância de 5%, 1% e 0,05% e testar se algum dado simulado ficou abaixo dos valores estimados;

---

<sup>54</sup> Cópula empírica é definida como  $\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{1}_{[x_{1,t} \leq x_{1,(t_1)}, x_{2,t} \leq x_{2,(t_2)}]}$ , ou seja, é a proporção de elementos da amostra que satisfaz  $x_{1,t} \leq x_{1,(t_1)}$  e  $x_{2,t} \leq x_{2,(t_2)}$ .

- vii) Para obtermos base de comparação, calcula-se o VaR pelos métodos tradicionais descritos na sessão teórica e calcular dentro da janela de observação o número de vezes em que foi observado que a perda da carteira ultrapassou o VaR estimado.

Como o objetivo é aplicar empiricamente a metodologia de cópulas, é necessária a geração de outros modelos para cálculo de VaR. Neste sentido, foram escolhidos os modelos EWMA, GARCH e HAR descritos na sessão teórica para geração dos erros padronizados. O último exige a utilização da técnica de volatilidade realizada que impõe a correção de microestrutura devido à utilização de dados intradiários.

Para correção do problema de microestrutura, devem-se realizar dois passos: determinar a frequência amostral ótima e aplicação de filtro de acordo com a metodologia proposta por Hansen, Large e Lunde (2006). O sistema de amostragem ótima de Bandi e Russel (2005a, 2006) faz uma aproximação da fórmula, arbitrando a frequência ótima da variância do estimador.

Bandi e Russel (2005a, 2006) derivam e minimizam a função de erro causado pelo problema de microestrutura, de tal forma a garantir a convergência para uma função contínua de volatilidade integrada. Dessa forma, a função de erro quadrático médio é dada por:

$$\begin{aligned}
 MSE_t = & \\
 & 2 \left( \frac{1}{N} \right) (IQ_t + o_{a.s.}(1)) + N \left( 2E(v_t^4) - 3(E(v_t^2))^2 \right) + N^2 (E(v_t^2))^2 + \\
 & 4E(v_t^2) \left( \int_{t-1}^t \sigma_\tau^4 d\tau \right) - E(v_t^4) + 2(E(v^2))^2
 \end{aligned} \tag{83}$$

Sendo T é o número total de dias e  $IQ_t$  sendo chamada de *Integrated Quarticity* e é definida teoricamente através de um processo de difusão apresentado por:

$$IQ_t = \int_0^1 \sigma^4(t + \tau - 1) d\tau$$

Minimizando o  $MSE_t$  da equação acima chega-se a:

$$N^* = 2N^3 (E(v^2))^2 + N^2 (2E(v^4) - 3(E(v^2))^2) - 2IQ_t \tag{84}$$

Os autores derivam que  $E(v^2)$  é igual a  $\frac{(\sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N r_{t+n}^2)}{TN}$  e  $E(v^4)$  é igual a  $\frac{(\sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N r_{t+n}^4)}{TN}$ .

Assim, definem a aproximação de N ótimo:

$$N^* \sim \left( \frac{IQ_t}{(E(v^2))^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{IQ_t}{\left( \frac{(\sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N r_{t+n}^2)}{TN} \right)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (85)$$

Todavia,  $IQ_t$  precisa ser estimado e Bandi e Russel definem a equação (16) para uma frequência amostral de 15 minutos que seria rápida o suficiente, dado os experimentos empíricos, para aproximar, mas sem incorrer em erro de microestrutura. Nos testes estatísticos deriva-se IQ com frequência de 15 e 30 minutos, sendo que o resultado obtido para todas as séries pesquisadas ficou em torno de 7 minutos.

$$IQ_t = \frac{N_t}{3} \sum_{n=0}^{N_t} r_t^4 \quad (86)$$

Utilizando esta metodologia, encontra-se uma forma de minimizar significativamente o problema de microestrutura, como Zhang, Mykland e Aït-Sahalia (2005) apontam através de simulação. Além disso, Hansen e Lunde (2006) mostram que o erro de microestrutura para ações do DJIA é pequeno em frequências amostrais inferiores a 20 minutos, o que indica que essa técnica já seria suficiente para implementar os modelos tal como Andersen (2007) aborda em seu artigo.

Todavia, a discussão de como calcular o *Integrated Quarticity* de forma ótima, leva muitos autores como Bandi e Russel (2005a, 2006b) a calculá-la com frequência amostral de 15 minutos, evitando utilizar um método complexo demonstrado em Zhang, Mykland e Aït-Sahalia (2005). Assim, em função das limitações de escolha ótima, opta-se por realizar amostragem em diversas frequências (1, 2, 5, 15 e 30 minutos) a fim de resolver esse problema, embora se calcule a variância dos estimadores como demonstrado acima, apontando a escolha ótima para cada ação.

O estimador baseado em filtro foi apresentado por Ebens (1999) e Andersen, Bollerslev, Diebold e Ebens (2001) e tinha como ideia geral estimar um modelo auto-regressivo ou média móvel a partir do retorno intradiário, porque aquele processo de

autocorrelação e autocorrelação parcial deriva exclusivamente de um processo gerado pelo problema de microestrutura. Dessa forma, ao estimar um modelo AR ou MA consegue-se identificar a parte do retorno intradiário que é viés de microestrutura, podendo filtrá-lo através dos parâmetros estimados. Todavia, Bandi e Russel (2005) criticam o modelo e demonstram que a técnica não é suficiente para acabar com a tendência. Assim, Hansen, Large e Lunde (2006) demonstram que é necessária uma maior defasagem no tempo com relação ao MA para garantir consistência.

Assim, considerando o erro como sendo correlacionado ao preço latente e assumindo independência serial, define-se que o retorno do preço segue o seguinte processo MA(q):

$$r_{t,N} = u_{t,i} - \theta_1 u_{t,i-1} - \theta_2 u_{t,i-2} - \dots - \theta_q u_{t,i-q}, \quad i = 0, \dots, N \quad (87)$$

onde a seqüência  $\{u_{t,m}\}$  é  $IID(0, \sigma_{u,t}^2)$ . Dessa forma, o filtro torna-se:

$$RV^{MA} = \left( \frac{(1 - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_q)^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} \right) RV \quad (88)$$

Contudo, como a disponibilidade de dados com frequência maior que 1 minuto é baixíssima para séries de ativos negociados na Bovespa, os autores demonstram que a utilização de um intervalo equidistante e considerando que a volatilidade no intervalo deve ser constante, o problema de consistência do estimador diminui.

## 6 Resultados

O sexto capítulo apresenta os resultados da aplicação dos modelos descritos acima para comparação de diferentes modelagens. Na primeira seção deste capítulo faz-se uma discussão da base de dados escolhida e sua motivação; a segunda e terceira sessão apresentam os resultados estatísticos dos modelos de volatilidade GARCH, EWMA e HAR; a quarta sessão apresenta a modelagem para cálculo do VaR por Cópula utilizando volatilidade por GARCH, EWMA e HAR e a última apresenta os resultados obtidos.

### 6.1 DESCRIÇÃO DOS DADOS

Utiliza-se nesta tese quatro ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo, que possuem os códigos de negociação PETR4 (Petrobrás), USIM5 (Usiminas), GGBR4 (Gerdau) e VALE5 (Vale do Rio Doce), compreendendo o período de 03/03/2006 a 30/04/2010 da base de dados disponibilizada pelo Instituto Educacional BM&FBovespa.

A figura abaixo representa a evolução de preços com uma base diária e normalizada para a primeira data e para todos os ativos.

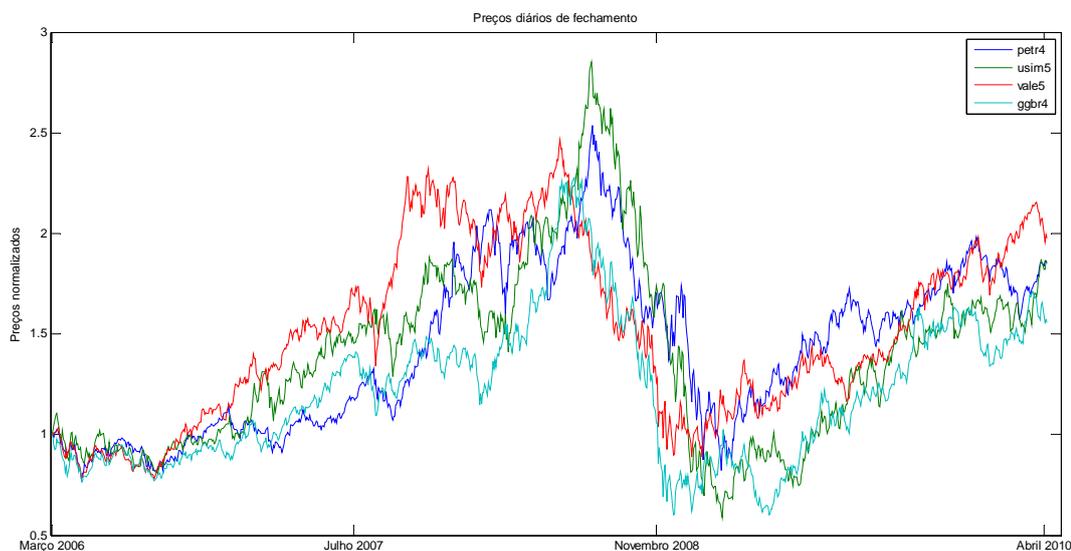


Figura 11 – Gráfico de preços normalizados dos ativos pesquisados

O critério de escolha dos ativos adotados foi a disponibilidade de dados e a liquidez, uma vez que esta medida é importante para modelos de Volatilidade Realizada em função do problema de microestrutura. Para os dados do EWMA e GARCH utilizaram-se os preços diários de fechamento, enquanto que para os dados da Volatilidade Realizada usou-se dados

das 10:00 às 17:00 horas para os pregões realizados neste horário e das 11:00 às 18:00 horas quando da ocorrência de horário de verão<sup>55</sup>. Destaca-se que o método de extração é importante para os mecanismos de correção de erros, e por isso, tal método foi utilizado por horário. Para tanto, o algoritmo busca dados baseado em uma data e horário pré-determinado sendo válido o preço mais próximo daquele horário. Isso é importante, pois a base de dados fornecida não possui regularidade no que se refere à negociação, o que faz com que o número de amostra por dia modifique significativamente, não se tendo, efetivamente, um modelo de amostra baseado em calendário, e sim, um sistema híbrido entre negociação e calendário. Por fim, foram realizados ajustes de *Stock Split*.

A tabela seguinte apresenta o número de observações por ativo:

Ativo	Diária	30 minutos	15 minutos	5 minutos	2 minutos	1 minuto
GGBR4	1026	14364	28728	86184	215461	430921
PETR4	1026	14364	28728	86184	215461	430921
USIM5	1026	14364	28728	86184	215461	430921
VALE5	1026	14364	28728	86184	215461	430921

**Tabela 3 – Número de observações por intervalo de tempo fixado**

Para a composição de carteira teórica para cálculo do *Value at Risk*, supõe-se composição igual de cada ativo, ignorando os custos de transação necessários para rebalancear esta carteira.

<sup>55</sup> A Bovespa altera o horário de negociação de acordo com o horário de verão, sendo que não necessariamente o início e fim deste regime de horário coincidem com a mudança de horário no pregão.

## 6.2 Estimação de Modelos GARCH e EWMA

As séries de ativos financeiros possuem como característica o agrupamento de volatilidade, caracterizado pela presença de heterocedasticidade. Desta forma, são necessários testes de autocorrelação serial na série de retornos para verificação desta hipótese. Para tanto é realizado o teste de Engle nas quatro séries de ativos para 10, 15 e 20 defasagens.

O resultado é apresentado na tabela 9 abaixo.

Ativo	Hipótese	Estatística	Valor Crítico	Lags
USIM5	1	202.8864	18.307	10
	1	240.405	24.9958	15
	1	264.3578	31.4104	20
PETR4	1	237.1285	18.307	10
	1	272.4248	24.9958	15
	1	304.6029	31.4104	20
GGBR4	1	280.4628	18.307	10
	1	292.6219	24.9958	15
	1	302.5517	31.4104	20
VALE5	1	200.317	18.307	10
	1	205.2666	24.9958	15
	1	222.4825	31.4104	20

Tabela 4 - Teste de ARCH para detecção de heterocedasticidade

Os modelos GARCH (1,1) foram estimados através de máxima verossimilhança, no software MATLAB. Observou-se que as séries de retorno exibiam efeito ARCH pelo menos até a décima defasagem, sendo que a modelagem propiciou a obtenção de ruídos brancos, indicando que a estimação foi satisfatória, como apresentado na Tabela 5.

Teste\ Ativo	GGBR4	PETR4	USIM5	VALE5
Série diária do retorno	0	0	0	0
Resíduo do GARCH	0.5649	0.5353	0.7068	0.7027

Tabela 5 – Teste estatístico indicando que aceitação da hipótese de que os resíduos não possuem heterocedasticidade

Os coeficientes dos modelos estimados para cada um dos ativos é apresentado na tabela 6.

Variável	GGBR4		PETR4	
	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.
w	2.15E-06	0.0284	1.79E-06	0.0024
$\alpha$	0.071252	0	0.074029	0
$\beta$	0.915909	0	0.911047	0

Variável	USIM5		VALE5	
	Coef.	Prob.	Coef.	Prob.
w	2.83E-06	0.0071	2.83E-06	0.0071
$\alpha$	0.077405	0	0.077501	0
$\beta$	0.907215	0	0.907111	0

Tabela 6 – Coeficientes dos modelos GARCH estimados para cada um dos ativos

Por fim, toma-se o logaritmo natural da volatilidade estimada pelo GARCH e pelo EWMA, que foi estimado como apresentado no capítulo referente ao método. Os resultados são apresentados nas tabelas abaixo.

Ativo\Momento	Mean	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis
GGBR4	-4.34349	0.31212	1.055487	4.242361
PETR4	-4.639748	0.358441	1.095302	4.321611
USIM5	-4.317289	0.299914	1.097908	4.506207
VALE5	-4.610429	0.353679	0.888831	3.98666

Tabela 7 - Distribuição da série estimada por EWMA

Ativo\ Momento	Mean	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis
GGBR4	-4.437278	0.316071	1.108404	4.239725
PETR4	-4.608215	0.342299	1.229766	4.318741
USIM5	-4.393586	0.294194	1.100405	4.339393
VALE5	-4.393781	0.294312	1.101729	4.337651

Tabela 8 - Distribuição da série estimada pelo GARCH

### 6.3 Estimação do modelo HAR

Conforme discutido no capítulo referente ao método, uma forma de reduzir o problema de microestrutura é estimar a volatilidade realizada em diversas frequências amostrais. Desta forma, esta etapa consiste de dois passos: estimação da volatilidade sem correção do problema de microestrutura com séries de frequência de 1, 2, 5, 15 e 30 minutos, denotada por  $ALL^1$ ,  $ALL^2$ ,  $ALL^5$ ,  $ALL^{15}$  e  $ALL^{30}$ , respectivamente; e estimação da volatilidade com o método de correção de microestrutura de Hansen, Large e Lunde (2006) denominados  $HLL^1$ ,  $HLL^2$  e  $HLL^5$  respectivamente. Além disso, conforme Bandi e Russel (2005), é necessária a estimação do *Integrated Quarticity* (IQ), discutido no capítulo de metodologia, e

estes autores sugerem a utilização do intervalo de 15 minutos para mercados líquidos<sup>56</sup>. Considerando que o volume de negociação no mercado brasileiro é significativamente menor que o volume do mercado americano, onde a metodologia sugerida pelos autores foi testada, optou-se por estimar também para a frequência de 30 minutos.

Os resultados apresentados na tabela abaixo evidenciam que a frequência ótima para todos os ativos ficam em torno de 7 minutos, sofrendo pouquíssima influência da frequência amostral.

Ativo	Freq. amostral do IQ	Freq. Ótima ( em min)
GGBR4	15 min	7.7553
	30 min	6.5562
PETR4	15 min	7.7040
	30 min	6.6477
USIM5	15 min	8.2067
	30 min	6.9453
VALE5	15 min	7.5756
	30 min	6.4190

**Tabela 9 – Estimação da frequência ótima para os quatro ativos pesquisados**

A volatilidade realizada pelo método utilizando frequência ótima de 7 minutos é denotada por OPT.

Os resultados das estimações com correção e sem correção de microestrutura são apresentados nas tabelas abaixo para cada um dos ativos pesquisados. Os coeficientes estimados para cada um dos ativos são apresentados nas tabelas em anexo a esta tese.

Modelo	1º momento	2º momento	3º momento	4º momento
ALL 1	-4.421157	0.404033	0.843259	3.954799
ALL 2	-4.458405	0.416578	0.809826	3.875392
ALL 5	-4.501202	0.440506	0.711545	3.734478
ALL 15	-4.563046	0.468618	0.631542	3.704188
ALL 30	-4.610009	0.505225	0.518403	3.579628
HLL 1	-4.345466	0.404033	0.843259	3.954799
HLL 2	-4.391233	0.416578	0.809826	3.875392
HLL 5	-4.451299	0.440506	0.711545	3.734478
OPT	-4.519145	0.451244	0.722456	3.688488

**Tabela 10 - Distribuição da Volatilidade Realizada da GGBR4**

<sup>56</sup> Os autores não definem uma medida de liquidez como *proxy* para os 15 minutos.

Modelo	1º momento	2º momento	3º momento	4º momento
ALL 1	-4.6853	0.441071	0.99078	4.23273
ALL 2	-4.721184	0.459941	0.892529	3.951214
ALL 5	-4.762177	0.484044	0.845146	3.809193
ALL 15	-4.808497	0.510234	0.666641	3.624253
ALL 30	-4.838894	0.547069	0.544077	3.520688
HLL 1	-4.64162	0.441071	0.99078	4.23273
HLL 2	-4.689048	0.459941	0.892529	3.951214
HLL 5	-4.761531	0.484044	0.845146	3.809193
OPT	-4.781008	0.489373	0.775947	3.661625

**Tabela 11 - Distribuição da Volatilidade Realizada da PETR4**

Modelo	1º momento	2º momento	3º momento	4º momento
ALL 1	-4.656461	0.465569	0.656686	3.552221
ALL 2	-4.678516	0.481621	0.571408	3.382949
ALL 5	-4.712957	0.505414	0.504084	3.323086
ALL 15	-4.759971	0.525347	0.360199	3.209626
ALL 30	-4.792632	0.555442	0.285751	3.193579
HLL 1	-4.613046	0.465569	0.656686	3.552221
HLL 2	-4.624028	0.481621	0.571408	3.382949
HLL 5	-4.661982	0.505414	0.504084	3.323086
OPT	-4.721151	0.510326	0.465175	3.235819

**Tabela 12 - Distribuição da Volatilidade Realizada da VALE5**

Modelo	1º momento	2º momento	3º momento	4º momento
ALL 1	-4.421691	0.395451	0.735221	4.056223
ALL 2	-4.462425	0.404723	0.704063	3.938455
ALL 5	-4.51346	0.427799	0.658733	3.791962
ALL 15	-4.58738	0.451209	0.563894	3.573505
ALL 30	-4.631624	0.481613	0.466403	3.560391
HLL 1	-4.318825	0.395451	0.735221	4.056223
HLL 2	-4.364121	0.404723	0.704063	3.938455
HLL 5	-4.454681	0.427799	0.658733	3.791962
OPT	-4.538838	0.43235	0.646835	3.848222

**Tabela 13 - Distribuição da Volatilidade Realizada da USIM5**

#### 6.4 Modelagem da estrutura de dependência

Dadas as estimações para cada um dos ativos com diferentes modelos, o próximo passo conforme descrito na sessão de metodologia, é a seleção de cópulas. Para tanto, serão utilizados os modelos estimados na sessão acima para geração das cópulas t, Clayton, Frank e Gumbel. A cópula que melhor ajusta ao modelo de volatilidade escolhido para as séries de

retorno será aquela em que gera menos violações no teste de Kupiec. Desta forma, esta sessão subdivide-se em três: estimação de cópulas com modelos GARCH, EWMA e HAR.

#### 6.4.1 Estimação de cópulas com modelos GARCH(1,1)

Utilizando os quatro modelos GARCH (1,1) estimados para cada uma das séries de ativos, obtêm-se os resíduos padronizados que são utilizados para estimação da função de probabilidade cumulativa, adotando como suavizador uma função kernel gaussiana<sup>57</sup>. Isso pode induzir a um problema no que tange aos valores extremos, uma vez que funções de suavização não paramétricas possuem bom desempenho somente no interior da distribuição onde ocorre a maior frequência de dados, tendendo a possuir desempenho ruim nas caudas, que é justamente a região de interesse do VaR. Para contornar este fato, utiliza-se a distribuição de Pareto generalizada<sup>58</sup> para cerca de 10% dos dados, envolvendo as caudas inferior e superior, dado um valor de corte. Tal procedimento permite a modelagem de caudas mais pesadas, o que é extremamente vantajoso para o propósito desta tese.

A função de probabilidade cumulativa para a série de resíduos da PETR4 é apresentada na figura abaixo.

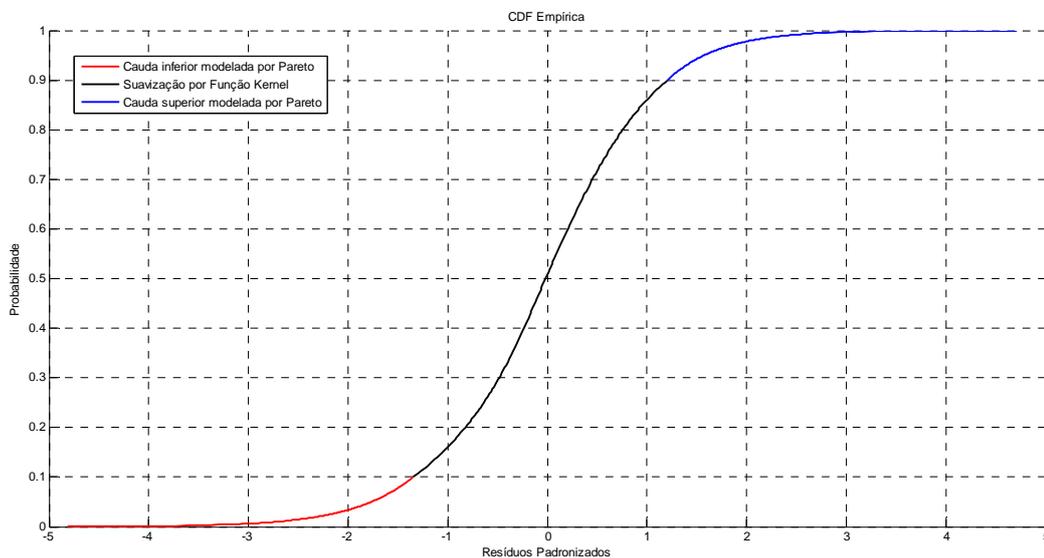
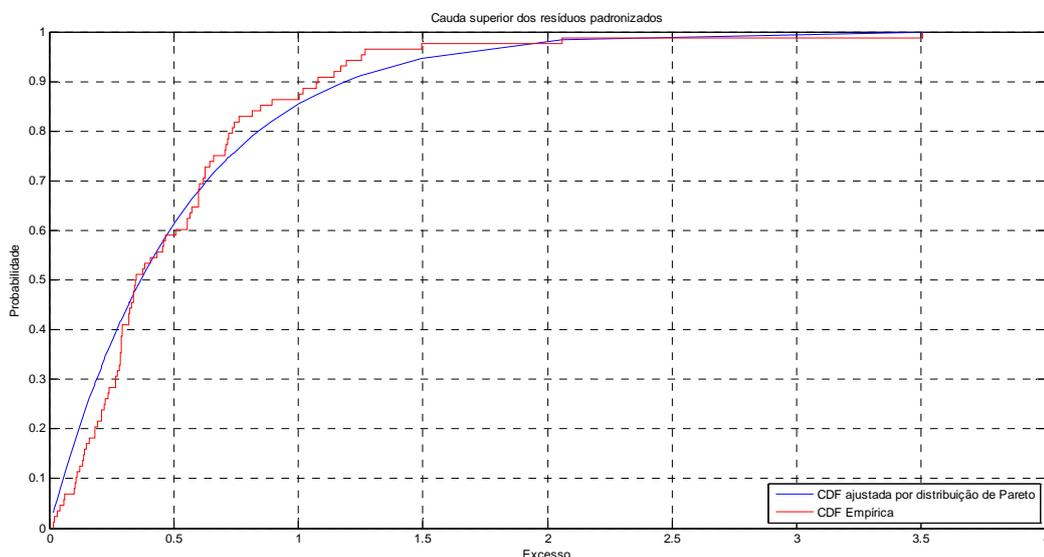


Figura 12 - Função de probabilidade cumulativa para série PETR4

<sup>57</sup> Função de suavização kernel gaussiana é um modelo não paramétrica para ajuste dos dados empíricos a uma função conhecida.

<sup>58</sup> A função densidade de probabilidade para uma distribuição de Pareto generalizada possui a forma  $y = f(x|k, \sigma, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \left(1 + k \frac{(x-\theta)}{\sigma}\right)^{-1-\frac{1}{k}}$

O gráfico representativo da comparação entre a distribuição de Pareto utilizada e a distribuição empírica é apresentada abaixo para a série PETR4.



**Figura 13 - Ajuste das caudas por distribuição de Pareto**

Após simulação dos erros padronizados através de modelagem não-paramétrica, deve-se escolher uma estrutura de dependência entre as marginais. Nesta pesquisa foi utilizado o algoritmo de estimação por máxima verossimilhança, discutido na sessão de metodologia. Como o objetivo é verificar qual cópula melhor se ajusta para o cálculo do VaR, este passo consiste de quatro estimações para a mesmo modelo de volatilidade estimado : Cópulas *t*, *Clayton*, *Frank* e *Gumbel*.

A carteira teórica necessária para simulação da dependência será composta de pesos iguais para os quatros ativos, sendo que os custos transacionais de rebalanceamento serão considerados muito pequenos em comparação com o valor da carteira, de tal forma que pode-se relaxar esta restrição. A distribuição simulada está representada na figura 14 para a família *t*. O resultado das estimações e a comparação no cálculo do VaR estão dispostos na tabela 14.

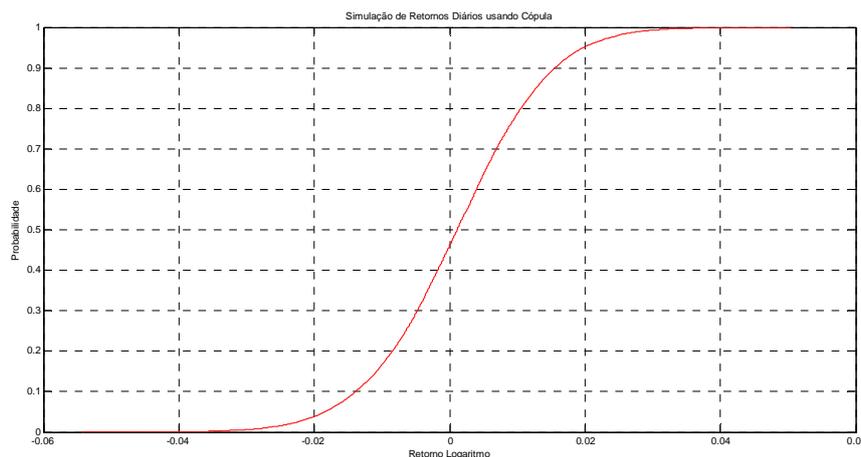


Figura 14 - Simulação de retornos diários com cópula t

Modelo de volatilidade: GARCH (1,1)				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1.4813%	-1.3105%	-1.4730%	-1.2775%
VaR 95%	-1.9279%	-1.8566%	-1.9855%	-1.7920%
VaR 99%	-2.8169%	-2.9317%	-3.0949%	-2.8901%
Máxima perda	6.1267%	7.0178%	7.6769%	6.2401%
Máximo Ganho	4.5879%	5.0547%	5.2434%	5.9421%

Tabela 14 - Resultados calculados para o VaR utilizando GARCH(1,1)

Os resultados evidenciam que as cópulas da família *Frank* tendem a prever uma perda maior para intervalos de confiança mais extremos, indicando que possui uma cauda mais espessa. Todas as previsões apresentadas evidenciam a característica assimétrica da distribuição, indicando que, na média, as perdas são maiores que os ganhos em módulo.

O teste de Kupiec para verificação da hipótese nula de que o modelo adotado é adequado encontra-se na tabela abaixo.

Modelo de volatilidade GARCH(1,1)					
	Cópulas	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	<b>78</b>	115	<b>80</b>	105
	% do número total	<b>7.43%</b>	10.95%	<b>7.62%</b>	10.00%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	<b>34</b>	50	<b>36</b>	55
	% do número total	<b>3.71%</b>	4.76%	<b>4.00%</b>	5.24%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	<b>2</b>	10	<b>4</b>	10
	% do número total	<b>1.14%</b>	0.95%	<b>0.67%</b>	0.95%
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			

Tabela 15 - Teste de Kupiec para os modelos GARCH(1,1) estimados usando *Back Testing*

Pode-se observar que o cálculo do VaR provocou a não aceitação da hipótese nula para os modelos de cópulas t e Frank, indicando que os modelos podem ser excessivamente alocativos. Nos demais níveis de confiança, todos os modelos são aceitos.

#### 6.4.2 Estimação de cópulas com modelos EWMA

Utilizando o mesmo procedimento descrito na sessão anterior, serão utilizados os resíduos das séries modeladas por EWMA para geração das distribuições marginais e posterior simulação da cópula escolhida para cálculo do VaR. Os resultados estimados utilizando este modelo de volatilidade bem como o resultado do teste de Kupiec são apresentados nas tabelas abaixo.

Modelo de volatilidade : EWMA				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,4321%	-1,1160%	-1,4886%	-1,2665%
VaR 95%	-1,8952%	-1,7157%	-1,9770%	-1,7978%
VaR 99%	-2,7978%	-2,7827%	-3,1171%	-2,9234%
Máxima perda	5,7950%	5,2654%	5,8868%	6,0573%
Máximo Ganho	4,9917%	6,3289%	5,9983%	6,9234%

Tabela 16 - Cálculo do VaR para o modelo EWMA

Modelo de volatilidade EWMA					
	Cópulas	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	<b>130</b>	<b>75</b>	<b>81</b>	91
	% do número total	<b>10,95%</b>	<b>7,14%</b>	<b>10,48%</b>	8,67%
	Kupiec (Região de aceitação)		84 < N < 123		
5%	Número de violações	<b>71</b>	<b>34</b>	<b>28</b>	42
	% do número total	<b>2,86%</b>	<b>4,76%</b>	<b>2,67%</b>	4,00%
	Kupiec (Região de aceitação)		38 < N < 67		
1%	Número de violações	<b>23</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	14
	% do número total	<b>2,19%</b>	<b>2,67%</b>	<b>0,57%</b>	1,33%
	Kupiec (Região de aceitação)		5 < N < 18		

Tabela 17 - Resultado do teste de Kupiec para modelos EWMA

Conforme evidenciado nas tabelas acima, o *Back Testing* mostrou rejeição do modelo VaR para as cópulas *Clayton*; rejeição das cópulas t e rejeição da cópula *Frank* para todos os níveis de significância pesquisados. Comparando com o modelo GARCH (1,1) estimado anteriormente, os resultados apresentados sugerem que o EWMA é menos eficiente no que tange ao cálculo de *Value at Risk*. Isso ocorre provavelmente porque o modelo é mais rígido que o GARCH na medida em que fixa-se um valor de 94% para o decaimento da volatilidade, conforme recomendação da Basileia III.

### 6.4.3 Estimação de cópulas com modelos HAR

Na sessão sobre estimação do modelo HAR, foi apresentada a divisão do método em três grupos: volatilidade sem correção de microestrutura; volatilidade com correção de microestrutura utilizando frequência ótima estimada e volatilidade com correção de microestrutura utilizando intervalos fixos de tempo. Portanto, esta sessão subdivide-se de acordo com cada grupo estimado.

#### 6.4.3.1 Estimação de cópulas com modelos HAR sem a correção do problema de microestrutura de dados

O procedimento para geração das cópulas e cálculo do *Value at Risk* é o mesmo apresentado para os modelos EWMA e GARCH(1,1), sendo que o vetor de entrada para simulação da dependência caudal é o resíduo padronizado do modelo de volatilidade estimado para cada uma das séries denotadas por :  $ALL^1, ALL^2, ALL^5, ALL^{15}$  e  $ALL^{30}$ . O resultado das estimações das cópulas com cálculo do VaR são apresentados nas tabelas 18 e 19.

Modelo de volatilidade : HAR ALL <sup>1</sup>				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,3365%	-1,1460%	-1,5281%	-1,2702%
VaR 95%	-1,7743%	-1,7774%	-2,0545%	-1,8198%
VaR 99%	-2,6364%	-2,9543%	-3,1593%	-2,9775%
Máxima perda	5,2935%	6,8129%	6,4994%	6,5760%
Máximo Ganho	4,9826%	5,8219%	6,3000%	6,5402%
Modelo de volatilidade : HAR ALL <sup>2</sup>				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,4647%	-1,2390%	-1,6042%	-1,3482%
VaR 95%	-1,9259%	-1,8833%	-2,1634%	-1,9396%
VaR 99%	-2,8436%	-3,0967%	-3,3575%	-3,1668%
Máxima perda	5,6503%	6,7666%	6,8699%	7,0285%
Máximo Ganho	5,2781%	6,4638%	6,1309%	6,4549%

Tabela 18 - Cópulas estimadas para modelos HAR ALL<sup>1</sup> e HAR ALL<sup>2</sup> sem a correção de erro de microestrutura

Modelo de volatilidade : HAR ALL <sup>5</sup>				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,2949%	-1,1739%	-1,5722%	-1,3465%
VaR 95%	-1,7656%	-1,8157%	-2,1379%	-1,9073%
VaR 99%	-2,6553%	-3,0482%	-3,3378%	-3,1119%
Máxima perda	5,5075%	7,1146%	7,2160%	7,0530%
Máximo Ganho	5,2019%	7,0239%	6,0844%	6,3060%
Modelo de volatilidade : HAR ALL <sup>15</sup>				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,3500%	-1,1155%	-1,4991%	-1,2381%
VaR 95%	-1,7906%	-1,7490%	-2,0086%	-1,7799%
VaR 99%	-2,6228%	-2,8671%	-3,1682%	-2,9446%
Máxima perda	5,1975%	6,8148%	6,4321%	6,4344%
Máximo Ganho	4,9761%	5,5898%	6,0007%	6,2159%
Modelo de volatilidade : HAR ALL <sup>30</sup>				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,3641%	-1,1089%	-1,4800%	-1,2817%
VaR 95%	-1,8045%	-1,7074%	-1,9986%	-1,7992%
VaR 99%	-2,6721%	-2,8128%	-3,1148%	-2,9133%
Máxima perda	5,3760%	6,5298%	7,4419%	6,1486%
Máximo Ganho	5,0252%	5,5180%	5,2829%	6,0253%

Tabela 19 - Cópulas estimadas para modelos HAR ALL<sup>5</sup>, HAR ALL<sup>15</sup> e HAR ALL<sup>30</sup> sem a correção de erro de microestrutura

Os resultados apresentados evidenciam que o modelo HAR ALL<sup>2</sup> foi o que apresentou maiores valores com relação ao *Value at Risk* (VaR) para todas as famílias de cópulas e para os intervalos de confiança pesquisados. O teste de Kupiec para estes modelos são apresentados nas tabelas 20 e 21.

Modelo de volatilidade HAR ALL <sup>1</sup>					
	Cópulas	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	121	86	<b>82</b>	<b>133</b>
	% do número total	11,52%	8,19%	<b>8,10%</b>	<b>12,48%</b>
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	42	40	<b>29</b>	<b>74</b>
	% do número total	4,00%	3,81%	<b>4,29%</b>	<b>4,10%</b>
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	12	9	<b>2</b>	<b>22</b>
	% do número total	1,14%	0,86%	<b>0,19%</b>	<b>0,67%</b>
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			

Modelo de volatilidade HAR ALL <sup>2</sup>					
	Cópias	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	100	85	<b>81</b>	<b>91</b>
	% do número total	9,52%	8,10%	<b>8,00%</b>	<b>8,67%</b>
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	46	42	<b>35</b>	<b>71</b>
	% do número total	4,38%	4,00%	<b>4,86%</b>	<b>4,57%</b>
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	9	7	<b>0</b>	<b>21</b>
	% do número total	0,86%	0,67%	<b>0,00%</b>	<b>0,29%</b>
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			

Tabela 20 - Testes de Kupiec para os modelos HAR ALL<sup>1</sup> e HAR ALL<sup>2</sup>

Modelo de volatilidade HAR ALL <sup>5</sup>					
	Cópias	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	111	91	87	105
	% do número total	10,57%	8,67%	8,29%	10,00%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	55	51	60	54
	% do número total	5,24%	4,86%	5,71%	5,14%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	17	14	5	7
	% do número total	1,62%	1,33%	0,48%	0,67%
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			

Modelo de volatilidade HAR ALL <sup>15</sup>					
	Cópias	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	101	97	93	117
	% do número total	9,62%	9,24%	8,86%	11,14%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	47	56	40	43
	% do número total	4,48%	5,33%	3,81%	4,10%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	15	12	7	10
	% do número total	1,43%	1,14%	0,67%	0,95%
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			

Modelo de volatilidade HAR ALL <sup>30</sup>					
	Cópias	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	97	101	110	120
	% do número total	9,24%	9,62%	10,48%	11,43%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	49	54	41	47
	% do número total	4,67%	5,14%	3,90%	4,48%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			

		Número de violações	13	14	9	8
1%	% do número total	1,24%	1,33%	0,86%	0,76%	
Kupiec (Região de aceitação)			5 < N < 18			

Tabela 21 - Testes de Kupiec para os modelos HAR ALL<sup>5</sup>, HAR ALL<sup>15</sup> e HAR ALL<sup>30</sup>

As tabelas referentes ao teste de Kupiec indicam que frequências mais altas sem a correção do erro de microestrutura tendem a superestimar o cálculo do VaR, indicando um viés alocativo alto. A partir da frequência de 5 minutos, observa-se que todos os modelos são aceitos nos níveis de significância adotados.

#### 6.4.3.2 Estimação de cópulas com modelos HAR utilizando frequência ótima estimada

A estimação da frequência ótima para as séries de dados indicou a utilização de 7 minutos para todos os ativos. Com o modelo estimado, utilizaram-se os resíduos para geração das distribuições marginais e posteriormente a rotina do algoritmo descrito na sessão de ANEXOS. Os resultados encontram-se nas tabelas abaixo.

Modelo de volatilidade : OPT				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,3770%	-1,1438%	-1,5480%	-1,2787%
VaR 95%	-1,8204%	-1,7723%	-2,0585%	-1,8407%
VaR 99%	-2,6790%	-2,9519%	-3,2325%	-3,0144%
Máxima perda	5,5057%	7,0784%	6,3340%	6,7989%
Máximo Ganho	5,0724%	5,4940%	6,0461%	6,0274%

Tabela 22 - Cópulas estimadas para o modelo OPT utilizando frequência ótima

Modelo de volatilidade OPT					
Cópulas		t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	87	94	105	116
	% do número total	8,29%	8,95%	10,00%	11,05%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	41	52	43	44
	% do número total	3,90%	4,95%	4,10%	4,19%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	15	14	10	7
	% do número total	1,43%	1,33%	0,95%	0,67%
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			

Tabela 23 - Teste de Kupiec para o modelo OPT

Percebe-se das tabelas acima que todos os modelos foram aceitos para os níveis de significância pesquisados, indicando boa aderência do modelo de frequência ótima aos dados. Além disso, a cópula *Gumbel* indica boa aderência a caudas extremas, pois o número de violações a 1% foi menor dentre as famílias estimadas do que a 10%. Nas cópulas t ocorre o

contrário, pois o número de violações aumenta proporcionalmente no intervalo à medida em que o intervalo de confiança aumenta.

#### 6.4.3.3 Estimação de cópulas com modelos HAR utilizando correção de erro de microestrutura com utilização de frequências fixas

As séries estimadas utilizando HAR com correção de erro de microestrutura foram denotadas por  $HLL^1$ ,  $HLL^2$  e  $HLL^5$ , para as frequências de 1, 2 e 5 minutos respectivamente. O procedimento para estimação de cópulas é o mesmo descrito nas sessões anteriores, onde o que altera no algoritmo é a matriz de entrada de dados que neste caso corresponde aos resíduos destes modelos estimados. Os resultados são apresentados na tabela 24.

Modelo de volatilidade : HAR $HLL^1$				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,1961%	-1,0921%	-1,4837%	-1,2228%
VaR 95%	-1,5949%	-1,6861%	-1,9948%	-1,7630%
VaR 99%	-2,3897%	-2,8154%	-3,1094%	-2,9126%
Máxima perda	4,5703%	6,4609%	6,1177%	6,5068%
Máximo Ganho	4,3736%	5,1710%	5,7316%	5,7173%
Modelo de volatilidade : HAR $HLL^2$				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,2958%	-1,1243%	-1,4967%	-1,2887%
VaR 95%	-1,7124%	-1,7503%	-2,0072%	-1,8274%
VaR 99%	-2,5316%	-2,8528%	-3,2025%	-2,9884%
Máxima perda	4,9005%	6,4370%	7,5151%	7,0275%
Máximo Ganho	4,7696%	5,7458%	6,3252%	6,4748%
Modelo de volatilidade : HAR $HLL^5$				
	t	Clayton	Frank	Gumbel
VaR 90%	-1,0916%	-0,9581%	-1,0714%	-1,0178%
VaR 95%	-1,4811%	-1,5525%	-1,5814%	-1,7256%
VaR 99%	-2,2593%	-2,6052%	-2,6796%	-2,8997%
Máxima perda	5,4982%	6,6085%	6,2494%	6,9876%
Máximo Ganho	4,5565%	5,2731%	5,9116%	6,0175%

Tabela 24 - Cópulas estimadas para os modelos HAR com correção de microestrutura em intervalos fixos de tempo

As cópulas estimadas para os modelos  $HLL^1$ ,  $HLL^2$  e  $HLL^5$  evidenciam o caráter assimétrico de todas as distribuições: o valor da perda em módulo é maior que o valor do ganho. Além disso, os modelos  $HLL^2$  indicam uma maior tendência a valores mais extremos para o *Value at Risk*. Entretanto, pode-se afirmar algo apenas após utilização do teste de Kupiec que é apresentado na tabela 25.

Modelo de volatilidade HAR HLL <sup>1</sup>					
	Cópuas	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	<b>117</b>	<b>134</b>	109	115
	% do número total	<b>11,14%</b>	<b>12,76%</b>	10,38%	10,95%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	<b>60</b>	<b>69</b>	62	57
	% do número total	<b>5,71%</b>	<b>6,57%</b>	5,90%	5,43%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	<b>19</b>	<b>13</b>	15	9
	% do número total	<b>1,81%</b>	<b>1,24%</b>	1,43%	0,86%
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			
Modelo de volatilidade HAR HLL <sup>2</sup>					
	Cópuas	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	105	119	89	93
	% do número total	10,00%	11,33%	8,48%	8,86%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	52	61	48	53
	% do número total	4,95%	5,81%	4,57%	5,05%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	14	12	8	7
	% do número total	1,33%	1,14%	0,76%	0,67%
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			
Modelo de volatilidade HAR HLL <sup>5</sup>					
	Cópuas	t	Clayton	Frank	Gumbel
10%	Número de violações	97	112	85	89
	% do número total	9,24%	10,67%	8,10%	8,48%
	Kupiec (Região de aceitação)	84 < N < 123			
5%	Número de violações	49	44	52	58
	% do número total	4,67%	4,19%	4,95%	5,52%
	Kupiec (Região de aceitação)	38 < N < 67			
1%	Número de violações	15	14	11	9
	% do número total	1,43%	1,33%	1,05%	0,86%
	Kupiec (Região de aceitação)	5 < N < 18			

Tabela 25 - Teste de Kupiec para os modelos *HLL*<sup>1</sup>, *HLL*<sup>2</sup> e *HLL*<sup>5</sup>

O teste de Kupiec para os modelos com correção de erro de microestrutura utilizando intervalos fixos de tempo indicou a rejeição dos modelos de *Value at Risk* para as cópuas *Clayton* e *t* para todos os níveis de significância adotados. Para os demais intervalos, todos os modelos são estatisticamente significantes. O resultado corrobora com o teste do modelo HAR de 1 minuto sem correção de microestrutura que também apresentou não aceitação da hipótese nula.

## 7 Conclusão

O estudo da variância para determinação do nível de risco tem fundamental importância na literatura de finanças, pois é uma variável importante para diversas teorias na área de apreçamento de ativos e *Value at Risk*. Neste sentido, observa-se um número considerável de pesquisas atualmente que possuem como objetivo buscar uma estimativa mais eficiente para o parâmetro não observável. Desde a década de 80, inúmeros modelos de volatilidade vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de prever adequadamente o nível de risco para o período seguinte. Soma-se a essa discussão, a regulamentação bancária promovida pelo *Bank for International Settlements* no que se refere à alocação de capital mínimo por partes dos Bancos, principalmente a adoção de modelos internos de gerenciamento de Risco.

Neste cenário que combina pesquisa de eficientes modelos de previsão de volatilidade com rígida supervisão bancária, esta tese apresenta os resultados do uso de modelos de volatilidade realizada, conhecidos como HAR, para geração de dependência caudal através do uso de Cópulas. A amostra desta pesquisa consistiu na utilização dos quatro ativos mais líquidos do índice Ibovespa durante o período de 03 de março de 2006 à 30 de abril de 2010, de forma a minimizar o problema de risco de liquidez, gerando 1026 dados diários e 430.921 dados para a frequência mais alta de 1 minuto.

Em uma primeira etapa, a pesquisa consistiu na estimação dos modelos de volatilidade, sendo que para o HAR aplicou-se a técnica de frequência ótima de Bandi e Russel (2005), obtendo como resultado um intervalo de 7 minutos em média para os quatro ativos pesquisados. Uma outra medida para a correção do problema de microestrutura é a utilização do filtro de Hansen, Large e Lunde (2006), com utilização dos intervalos de 1, 2 e 5 minutos. Esse número de combinações gerou 44 modelos de volatilidade para cada série de dados, sendo que para os quatro ativos eles foram reagrupados de acordo com o modelo gerado, gerando 11 possíveis combinações para uma carteira composta por pesos iguais dos ativos. Em uma segunda etapa, as cópulas foram estimadas utilizando estas 11 combinações, cada qual com a geração de quatro diferentes estruturas de dependência: cópulas *t*, *Frank*, *Gumbel* e *Clayton*.

Após geração das cópulas, a próxima etapa consistiu de cálculo do *Value at Risk* aos níveis de 90%, 95% e 99% e utilização do teste de Kupiec para validação da hipótese nula de que os modelos são adequados. Os resultados encontrados foram:

- i) Os 44 modelos de volatilidade estimados foram aderentes aos dados, uma vez que os resíduos não apresentaram presença de heterocedasticidade;
- ii) A comparação entre cópulas empíricas e estimadas para os onze grupos de modelos foi satisfatória e apresentou ruídos brancos como resíduos, indicando que a estimação foi satisfatória;
- iii) A escolha da distribuição de Pareto generalizada para modelagem das caudas mostrou-se satisfatória pelo mesmo motivo apresentado acima;
- iv) O modelo para cálculo do *Value at Risk* para cada um dos grupos e das cópulas estimadas evidenciou que o modelo GARCH(1,1) é excessivamente alocativo para cópulas *t* e *Frank*; o modelo EWMA apresentou-se como estatisticamente significativo somente para a cópula do tipo *Gumbel*; o modelo HAR sem correção de erro de microestrutura apresentou modelos não adequados para as frequências de 1 e 2 minutos; o modelo HAR com utilização de frequência ótima apresentou-se como significativo para todas as cópulas estimadas; e, por fim, o modelo HAR com correção de erro de microestrutura para intervalos fixos não apresentou aderência somente para a frequência de 1 minuto.

De acordo com Lutz, Macêdo e Portugal (2011), o cálculo do *Value at Risk* (*VaR*) utilizando modelos de volatilidade paramétricos (GARCH e EWMA) e modelos com volatilidade realizada (HAR) não apresentou evidências de que o último fosse superior ao primeiro. Pelos resultados encontrados nesta tese, percebe-se que os modelos HAR com utilização de cópulas foram superiores aos modelos GARCH e EWMA com intervalos de tempo maiores que 5 minutos, não sofrendo influência da correção de erro de microestrutura. Além disso, a utilização da frequência ótima com uso de cópulas apresentou resultado aderente à hipótese nula. Esta possível contradição entre os resultados pode ser explicada pelos argumentos de que a carteira nesta pesquisa é diversificada e no artigo a carteira era composta por 100% de um ativo somente; nesta pesquisa faz-se uso de estruturas temporais que permitem mudança de correlação ao longo do tempo através de cópulas e no primeiro utilizou-se matriz linear de covariância.

A utilização de diferentes estruturas de dependência caudal não indicou uma superioridade de uma família em relação à outra; apenas ficou evidenciada a aceitação da hipótese nula de que o modelo para cálculo do *Value at Risk* é aceito para a grande maioria dos modelos estudados.

Como sugestão de pesquisas futuras, pode-se estender este estudo para outros ativos que possuam elevada liquidez; análise de estrutura de dependência caudal utilizando diferentes mercados e janelas de tempo e ainda modelos que utilizem dinâmica de volatilidade diferente das analisadas nesta tese.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A. and Zhang, L. (2009), Ultra high frequency volatility estimation with dependent microstructure noise. *Journal of Econometrics*, forthcoming.

Alexander, Carol (2001) “Modelos de Mercados”. Editora Saraiva.

Andersen, T. and T. Bollerslev (1998), Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, 39(4): 885- 906.

Andersen, T.G., T. Bollerslev, Diebold, F.X. and Eben, H. (2001), The distribution of realized stock return volatility, *Journal of Financial Economics*, 61, 43 – 76.

Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X. and Labys, P. (2003), Modeling and forecasting realized volatility, *Econometrica*, 71, 529 – 626.

Andrade, S.C.; Tabak, B. M. (2001), Is it Worth Tracking Dollar/Real Implied Volatility? Banco Central do Brasil, Working Papers Series, n. 15, p. 1-25.

Ané, T. and C. Kharoubi, 2003. Dependence structure and risk measure. *Journal of Business* 76, 411-438.

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath (1999): “Coherent measures of risk,” *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.

Bandi, F.M. and Russell, J.R. (2006a), Volatility, in J.R. Birge and V. Linetsky (eds.), *Handbook of Financial Engineering*, Elsevier, to appear.

Bandi, F.M. and Russell, J.R. (2006b), Separating market microstructure noise from volatility, *Journal of Financial Economics*, 79, 655 – 692.

Bandi, F.M. and Russell, J.R. (2006c), Comment on Hansen and Lunde, *Journal of Business and Economic Statistics*, 24, 167 – 173.

Bandi, F.M. and Russell, J.R. (2006d), Market microstructure noise, integrated variance estimators, and the accuracy of asymptotic approximations, unpublished paper, Graduate School of Business, University of Chicago.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R. Lunde, A. and Shephard, N. (2006a), Designing realised kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise, unpublished manuscript, Stanford University.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R. Lunde, A. and Shephard, N. (2006b), Subsampling realised kernels, unpublished manuscript, Stanford University.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R. Lunde, A. and Shephard, N. (2008a), Designing Realized Kernels to Measure the ex post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise, *Econometrica*, Econometric Society, vol. 76(6), pages 1481-1536, November.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R. Lunde, A. and Shephard, N. (2008b), Multivariate realised kernels: consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and nonsynchronous trading. Unpublished paper: Oxford-Man Institute, University of Oxford

Barndorff-Nielsen, O. and N. Shephard (2002), Econometric Analysis of Realised Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 64(2): 253-280.

Black, F. (1976), Studies in stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, 177-181.

Bollerslev, T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31.

Bollerslev, T., Chou R. Y., and Kroner K. F. (1992), ARCH modeling in Finance, *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.

Bordignon, S e Raggi, D. (2010), Long memory and nonlinearities in realized volatility: a Markov switching approach. Università' Degli Studi di Bologna, Dipartimento di Scienze Economiche. Quaderni - Working Papers DSE N° 6942010, <http://www2.dse.unibo.it/wp/694.pdf>. (20/09/2010)

Campbell, J. Y., A. W. Lo, and A. MacKinlay (1997): *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton.

Carvalho, M. R. C., Freire, M. A, Medeiros, M. C. and Souza, L. R. (2006), *Modeling and Forecast the Volatility of Brazilian Asset Returns: A Realized Variance Approach*. Textos para discussão 530, Department of Economics PUC-Rio (Brazil).

Chang, C-L., and McAleer, M. (2010), *Aggregation, Heterogeneous Autoregression and Volatility of Daily International Tourist Arrivals and Exchange Rates*. Department of Economics and Finance University Canterbury. Working paper. 2010 <http://www.econ.canterbury.ac.nz/RePEc/cbt/econwp/1002.pdf> (20/09/2010)

Cherubini, U., Luciano, E., 2001. Value-at-risk trade-off and capital allocation with copulas. *Economic Notes* 30(2), 2001.

Christoffersen, P. (1998), *Evaluating Interval Forecasts*. *International Economic Review*, Issue 39, pp. 841-862.

Corsi, F., (2004), *A Simple Long Memory Model of Realized Volatility*. Universidade de Lugano e Swiss Finance Institute. Working paper. 2004 [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=626064](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=626064) (20 de setembro de 2010)

Corsi, F., (2009), *A Simple approximate Long Memory Model of Realized Volatility* “. *Journal of Finance Econometrics*, vol. 7, Issue 2, pp. 174-196, 2009.

Corsi, F., Pirino, D. and Reno, R. (2009), *Volatility Forecasting: The Jumps Do Matter*, Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series gd08-036, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University

Corsi, F. and Audrino, F. (2008), *Realized Covariance Tick-by-Tick in Presence of Rounded Time Stamps and General Microstructure Effects*, University of St. Gallen Department of Economics working paper series 2008 2008-04, Department of Economics, University of St. Gallen

Chung, H.; Huang, C-T.; and Tseng. C.-H. (2008), *Modeling and Forecasting of Realized Volatility Based on High-Frequency Data: Evidence from Taiwan*. *International Research Journal of Finance and Economics*. *International Research Journal of Finance and Economics*. ISSN 1450-2887. Issue 22 <http://www.eurojournals.com/finance.htm>

Deheuvels P., La fonction de dependance empirique et ses proprietes. Un test non parametrique d'indépendance, Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sci., 5 Ser. 65 (1979) 274–292.

Deheuvels P., A Kolmogorov–Smirnov type test for independence and multivariate samples, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. Tome XXVI, (2) (1981a) 213–226.

Deheuvels P., A nonparametric test of independence, Publications de l'ISUP 26, 1981b, pp. 29–50.

Dias, A., and Embrechts, P. (2003). Dynamic copula models for multivariate high frequency data in finance. Working Paper, ETH Zurich: Department of Mathematics.

Dhaene, J., and M. J. Goovaerts (1996): “Dependency of risks and stop-loss order,” ASTIN Bulletin, 26(2), 201–212.

Diebold, Francis X (2007) “Elements of Forecasting”, 4<sup>a</sup> edição, Thomson South Western.

Ebens, H. (1999), Realized stock index volatility, Working Paper No. 420. Department of Economics, Johns Hopkins University, Baltimore.

Embrechts, P., M. Alexander, and D. Straumann (1999): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. Working paper.

Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (1997): Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin.

Fama, Eugene (1970) “Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work”, Journal of Finance, Maio de 1970, pág. 383-417.

Fang, K.-T., S. Kotz, and K.-W. Ng (1987): Symmetric Multivariate and Related Distributions. Chapman & Hall, London.

Fermanian, J. D. (2005): “Goodness-of-fit tests for copulas”. Journal of Multivariate Analysis, 95, 119-152.

Fréchet, M. (1957): “Les tableaux de corrélation dont les marges sont données,” Annales del'Université de Lyon, Sciences Mathématiques et Astronomie, Série A, 4, 13–31.

Galambos, J. (1987): *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. Kreiger Publishing Co., Melbourne, FL.

Genest C., Ghoudi K., Rivest C., A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika* 82 (1995) 543–552.

Giot, P. and Laurent, S. 2004. Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models, *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, vol. 11(3), pages 379-398, June.

Giot, P. and Laurent, S., 2001. Value-at-risk for long and short trading positions," CORE Discussion Papers 2001022, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE)

Hamerle, A., Rosch, D., Misspecified Copulas in Credit Risk Models: How Good is Gaussian ?, *Journal of Risk* 8(1), 2005, 41-58.

Hansen, P.R., Large, J., and Lunde, A., (2006), Moving average-based estimators of integrated variance, *Econometric Reviews*, to appear.

Hansen, P.R. and Lunde, A., (2006), Realized Variance and Market Microstructure Noise. (with discussion). *Journal of Business and Economic Statistics*, 24(2): 127-218.

Hansen, P.R. and Lunde, A., (2001). "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?," Working Papers 2001-04, Brown University, Department of Economics.

Harris, L. (1990), Estimation of stock variance and serial covariance from discrete observations, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 291 – 306.

Höfdding, W. (1940): "Massstabinvariante Korrelationstheorie," *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5, 181–233.

Hull, John (2008) "Options, Futures, and Other Derivatives", 7a. Ed., Prentice Hall.

Hutchinson, T. P., and C. D. Lai (1990): *Continuous Bivariate Distributions, Emphasizing Applications*. Rumsby Scientific Publishing, Adelaide.

Joag-dev, K. (1984): "Measures of Dependence," in *Handbook of Statistics*, ed. by P. R. Krishnaiah, vol. 4, pp. 79–88. North–Holland/Elsevier, New York.

Joe, H. (1997): *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.

Jorion, Philippe. *Value at Risk- The New Benchmark for Managing Financial Risk* 3a. Edition. McGraw-Hill. New York: 2007.

J.P. Morgan (1996) "RiskMetrics – Technical Document", 4a. Ed., NY.

Kendall, M., and A. Stuart (1979): *Handbook of Statistics*. Griffin & Company, London.

Kruse, R. (2006), Can Realized Volatility Improve the Accuracy of Value-at-Risk Forecasts? <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.172.8176&rep=rep1&type=pdf> (10/04/2011)

McAleer, M. and Medeiros, M.C. (2008), A multiple regime smooth transition Heterogeneous Autoregressive model for long memory and asymmetries, *Journal of Econometrics*, Elsevier, vol. 147(1), pages 104-119, November.

Merton, R. C. (1980), On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation, *Journal of Financial Economics* 8, 323-61.

Miller, D. J., Liu, W. H., 2006. Improved estimation of portfolio value-at-risk under copula models with mixed marginals. *Journal of Futures Markets* 26(10), 997-1018.

Newey, W.K. and West, K.D., (1987), A simple positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica*, 55, 703 – 708.

Owen, J., and Rabinovitch, R. 1983. "On the class of elliptical distributions and their applications to the theory of portfolio choice", *Journal of Finance* 38, 745-752.

Patton, A. (2003a). *Modelling asymmetric exchange rate dependence*. Working paper, University of California, San Diego.

Resnick, S. I. (1987): *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer, New York.

Ruppert, David (2006) “*Statistics and Finance: An Introduction*”, Springer.

Scharth, M. and Medeiros, M. C., (2009), Asymmetric effects and long memory in the volatility of Dow Jones stocks, *International Journal of Forecasting*, Elsevier, vol. 25(2), pages 304-327.

Schweizer, B., and A. Sklar (1983): *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland/Elsevier, New York.

Shi J., Louis T., Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data, *Biometrics* 51 (1995) 1384–1399.

Sibuya, M. (1961): “Bivariate extreme statistics,” *Annals of Mathematical Statistics*, 11, 195–210.

Spearman, C. "The proof and measurement of association between two things" *American Journal of Psychology*, 15 (1904) pp. 72–101.

Wang, S. (1997): “Aggregation of correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms,” Preprint Casualty Actuarial Society (CAS).

## ANEXO A – Tabelas de resultados

Modelo 1 passo a frente						Modelo 2 passo a frente					
Modelo	C	LRV(-1)	LRV5(-1)	LRV22(-1)	R <sup>2</sup> Ajustado	C	LRV(-2)	LRV5(-2)	LRV22(-2)	R <sup>2</sup> Ajustado	
		-0.384637	0.297192	0.41166	0.208212	0.594554	-0.507228	0.239175	0.398513	0.252155	0.542397
ALL 1		0.0014	0.0000	0.0000	0.0001		0.0011	0.0000	0.0000	0.0001	
		-0.397539	0.29268	0.398263	0.224334	0.577828	-0.523745	0.22472	0.392755	0.27006	0.524502
ALL 2		0.0014	0.0000	0.0000	0.0000		0.0012	0.0000	0.0000	0.0001	
		-0.419269	0.259518	0.391264	0.261562	0.545263	-0.543601	0.1931	0.381718	0.310513	0.49547
ALL 5		0.0013	0.0000	0.0000	0.0000		0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.462461	0.17481	0.403673	0.327579	0.491801	-0.563734	0.154242	0.377465	0.352402	0.461117
ALL 15		0.0011	0.0002	0.0000	0.0000		0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	
		-0.51521	0.137403	0.350238	0.410411	0.436418	-0.606771	0.108205	0.34293	0.427351	0.412463
ALL 30		0.0010	0.0016	0.0000	0.0000		0.0010	0.0044	0.0001	0.0000	
		-0.378359	0.297192	0.41166	0.208212	0.594554	-0.49889	0.239175	0.398513	0.252155	0.542397
HLL 1		0.0014	0.0000	0.0000	0.0001		0.0011	0.0000	0.0000	0.0001	
		-0.391848	0.29268	0.398263	0.224334	0.577828	-0.51619	0.22472	0.392755	0.27006	0.524502
HLL 2		0.0014	0.0000	0.0000	0.0000		0.0011	0.0000	0.0000	0.0001	
		-0.414895	0.259518	0.391264	0.261562	0.545263	-0.537879	0.1931	0.381718	0.310513	0.49547
HLL 5		0.0013	0.0000	0.0000	0.0000		0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.42721	0.26407	0.38083	0.26631	0.541502	-0.559491	0.170783	0.388135	0.323892	0.486749
OPT		0.0009	0.0000	0.0000	0.0000		0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	
Modelo 5 passo a frente						Modelo 10 passo a frente					
C		LRV(-5)	LRV5(-5)	LRV22(-5)	R <sup>2</sup> Ajustado	C	LRV(-10)	LRV5(-10)	LRV22(-10)	R <sup>2</sup> Ajustado	
		-0.779876	0.183779	0.336615	0.308219	0.451606	-1.121311	0.120169	0.353799	0.277347	0.366305
ALL 1		0.0004	0.0001	0.0003	0.0005		0.0000	0.0199	0.0069	0.0139	
		-0.79687	0.168458	0.333439	0.324815	0.436916	-1.131658	0.133651	0.339468	0.278231	0.359465
ALL 2		0.0004	0.0003	0.0004	0.0003		0.0000	0.0062	0.0057	0.0116	
		-0.80558	0.139127	0.307338	0.38112	0.414202	-1.104255	0.122165	0.335171	0.303348	0.353297
ALL 5		0.0005	0.0021	0.0011	0.0000		0.0000	0.0127	0.0058	0.0052	
		-0.821889	0.06215	0.366655	0.399347	0.390351	-1.096353	0.083244	0.363505	0.320409	0.339232
ALL 15		0.0004	0.1521	0.0001	0.0000		0.0000	0.0605	0.0016	0.0015	
		-0.832755	0.027997	0.393129	0.408644	0.36515	-1.101762	0.044853	0.412436	0.312965	0.320821
ALL 30		0.0004	0.5043	0.0000	0.0000		0.0000	0.2971	0.0002	0.0026	
		-0.766903	0.183779	0.336615	0.308219	0.451606	-1.102488	0.120169	0.353799	0.277347	0.366305
HLL 1		0.0004	0.0001	0.0003	0.0005		0.0000	0.0199	0.0069	0.0139	
		-0.78523	0.168458	0.333439	0.324815	0.436916	-1.114956	0.133651	0.339468	0.278231	0.359465
HLL 2		0.0004	0.0003	0.0004	0.0003		0.0000	0.0062	0.0057	0.0116	
		-0.796976	0.139127	0.307338	0.38112	0.414202	-1.092313	0.122165	0.335171	0.303348	0.353297
HLL 5		0.0005	0.0021	0.0011	0.0000		0.0000	0.0127	0.0058	0.0052	
		-0.812071	0.116981	0.34256	0.367688	0.413988	-1.10204	0.10620	0.35808	0.29818	0.354713
OPT		0.0003	0.0131	0.0003	0.0000		0.0000	0.0267	0.0029	0.0049	

Tabela 26 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para GGBR4

Modelo 1 passo a frente						Modelo 2 passo a frente					
Modelo	C	LRV(-1)	LRV5(-1)	LRV22(-1 R <sup>2</sup> ajust		C	LRV(-2)	LRV5(-2)	LRV22(-2 R <sup>2</sup> ajust		
		-0.37174	0.278343	0.457708	0.18828	0.654206	-0.46038	0.315876	0.343905	0.245669	0.617902
ALL 1		0.0021	0.0000	0.0000	0.0001		0.0024	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.38127	0.275752	0.448913	0.198714	0.638968	-0.47558	0.307935	0.333927	0.261626	0.600439
ALL 2		0.0019	0.0000	0.0000	0.0000		0.0021	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.4184	0.254511	0.439023	0.223606	0.607899	-0.51874	0.267927	0.3496	0.27864	0.569908
ALL 5		0.0010	0.0000	0.0000	0.0000		0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.44954	0.210278	0.41737	0.285538	0.551974	-0.55457	0.212339	0.349621	0.329477	0.517591
ALL 15		0.0008	0.0000	0.0000	0.0000		0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.48148	0.213697	0.348318	0.346919	0.507152	-0.59032	0.176332	0.321058	0.3895	0.471782
ALL 30		0.0009	0.0000	0.0000	0.0000		0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.36843	0.278343	0.457708	0.18828	0.654206	-0.45625	0.315876	0.343905	0.245669	0.617902
HLL 1		0.0021	0.0000	0.0000	0.0001		0.0024	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.37881	0.275752	0.448913	0.198714	0.638968	-0.47248	0.307935	0.333927	0.261626	0.600439
HLL 2		0.0018	0.0000	0.0000	0.0000		0.0021	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.41835	0.254511	0.439023	0.223606	0.607899	-0.51868	0.267927	0.3496	0.27864	0.569908
HLL 5		0.0010	0.0000	0.0000	0.0000		0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.41935	0.217668	0.484365	0.215563	0.599783	-0.51012	0.26424	0.368123	0.266143	0.568131
OPT		0.0010	0.0000	0.0000	0.0000		0.0012	0.0000	0.0000	0.0000	
		Modelo 5 passo a frente					Modelo 10 passo a frente				
	C	LRV(-5)	LRV5(-5)	LRV22(-5 R <sup>2</sup> ajust		C	LRV(-10)	LRV5(-10)	LRV22(-1 R <sup>2</sup> ajust		
		-0.73113	0.198767	0.284973	0.364687	0.512371	-1.02652	0.175914	0.263093	0.34623	0.43491
ALL 1		0.0013	0.0000	0.0036	0.0000		0.0001	0.0016	0.0618	0.0016	
		-0.74813	0.19498	0.277426	0.374225	0.498158	-1.0559	0.171907	0.248541	0.360738	0.41996
ALL 2		0.0012	0.0000	0.0042	0.0000		0.0001	0.0015	0.0638	0.0008	
		-0.77862	0.176872	0.289252	0.376204	0.479892	-1.07667	0.157491	0.281765	0.340036	0.410289
ALL 5		0.0007	0.0001	0.0022	0.0000		0.0001	0.0020	0.0258	0.0008	
		-0.81298	0.120634	0.334457	0.383182	0.442227	-1.09468	0.146878	0.308629	0.32311	0.38655
ALL 15		0.0005	0.0038	0.0003	0.0000		0.0000	0.0017	0.0095	0.0012	
		-0.83398	0.074046	0.316192	0.447177	0.406263	-1.10681	0.11026	0.277352	0.39199	0.3559
ALL 30		0.0007	0.0730	0.0016	0.0000		0.0001	0.0152	0.0161	0.0001	
		-0.72451	0.198767	0.284973	0.364687	0.512371	-1.01714	0.175914	0.263093	0.34623	0.43491
HLL 1		0.0013	0.0000	0.0036	0.0000		0.0001	0.0016	0.0618	0.0016	
		-0.7432	0.19498	0.277426	0.374225	0.498158	-1.04886	0.171907	0.248541	0.360738	0.41996
HLL 2		0.0012	0.0000	0.0042	0.0000		0.0001	0.0015	0.0638	0.0008	
		-0.77852	0.176872	0.289252	0.376204	0.479892	-1.07652	0.157491	0.281765	0.340036	0.410289
HLL 5		0.0007	0.0001	0.0022	0.0000		0.0001	0.0020	0.0258	0.0008	
		-0.77603	0.175756	0.295762	0.371986	0.475377	-1.07259	0.162316	0.242316	0.376498	0.402558
OPT		0.0008	0.0000	0.0011	0.0000		0.0001	0.0012	0.0577	0.0002	

Tabela 27 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para PETR4

Modelo 1 passo a frente					Modelo 2 passo a frente						
Modelo	C	LRV(-1)	LRV5(-1)	LRV22(-1)	R <sup>2</sup> Ajustado	C	LRV(-2)	LRV5(-2)	LRV22(-2)	R <sup>2</sup> Ajustado	
		-0.402577	0.264354	0.431007	0.217529	0.569846	-0.521304	0.187258	0.456384	0.242792	0.523302
ALL 1		0.0020	0.0000	0.0000	0.0001		0.0017	0.0000	0.0000	0.0003	
		-0.424564	0.25447	0.426473	0.228328	0.551182	-0.546851	0.167603	0.46778	0.246953	0.505437
ALL 2		0.0014	0.0000	0.0000	0.0000		0.0012	0.0001	0.0000	0.0002	
		-0.457356	0.2499	0.36996	0.284232	0.515512	-0.583379	0.174379	0.396166	0.3061	0.471265
ALL 5		0.0014	0.0000	0.0000	0.0000		0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.514868	0.168903	0.3694	0.356772	0.452546	-0.620747	0.105753	0.407966	0.358712	0.423473
ALL 15		0.0006	0.0000	0.0000	0.0000		0.0005	0.0093	0.0000	0.0000	
		-0.594758	0.13433	0.345594	0.401012	0.398724	-0.695171	0.083046	0.373327	0.403257	0.374819
ALL 30		0.0003	0.0002	0.0000	0.0000		0.0003	0.0273	0.0000	0.0000	
		-0.393617	0.264354	0.431007	0.217529	0.569846	-0.509622	0.187258	0.456384	0.242792	0.523302
HLL 1		0.0020	0.0000	0.0000	0.0001		0.0017	0.0000	0.0000	0.0003	
		-0.415645	0.25447	0.426473	0.228328	0.551182	-0.535284	0.167603	0.46778	0.246953	0.505437
HLL 2		0.0014	0.0000	0.0000	0.0000		0.0012	0.0001	0.0000	0.0002	
		-0.451719	0.2499	0.36996	0.284232	0.515512	-0.576129	0.174379	0.396166	0.3061	0.471265
HLL 5		0.0013	0.0000	0.0000	0.0000		0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	
		-0.470285	0.255338	0.335822	0.310873	0.501558	-0.605447	0.145245	0.400396	0.327303	0.45444
OPT		0.0010	0.0000	0.0000	0.0000		0.0007	0.0007	0.0000	0.0000	
Modelo 5 passo a frente					Modelo 10 passo a frente						
Modelo	C	LRV(-5)	LRV5(-5)	LRV22(-5)	R <sup>2</sup> Ajustado	C	LRV(-10)	LRV5(-10)	LRV22(-10)	R <sup>2</sup> Ajustado	
		-0.780004	0.101008	0.475178	0.252117	0.446166	-1.132336	0.114182	0.428378	0.205835	0.365692
ALL 1		0.0009	0.0171	0.0000	0.0046		0.0000	0.0169	0.0016	0.0571	
		-0.808109	0.104431	0.463013	0.256665	0.430961	-1.166474	0.100699	0.447992	0.194861	0.354355
ALL 2		0.0006	0.0126	0.0000	0.0036		0.0000	0.0297	0.0005	0.0693	
		-0.851557	0.06225	0.447128	0.308445	0.399883	-1.184319	0.103478	0.420212	0.219639	0.337839
ALL 5		0.0005	0.1599	0.0000	0.0008		0.0000	0.0175	0.0010	0.0445	
		-0.857019	0.024523	0.462791	0.334075	0.372689	-1.183174	0.071552	0.442823	0.234841	0.31729
ALL 15		0.0003	0.5426	0.0000	0.0002		0.0000	0.0717	0.0003	0.0279	
		-0.939196	0.018741	0.415782	0.372798	0.329211	-1.263065	0.08131	0.44191	0.212354	0.288462
ALL 30		0.0001	0.6418	0.0000	0.0001		0.0000	0.0373	0.0001	0.0327	
		-0.762342	0.101008	0.475178	0.252117	0.446166	-1.106454	0.114182	0.428378	0.205835	0.365692
HLL 1		0.0009	0.0171	0.0000	0.0046		0.0000	0.0169	0.0016	0.0571	
		-0.790818	0.104431	0.463013	0.256665	0.430961	-1.141264	0.100699	0.447992	0.194861	0.354355
HLL 2		0.0006	0.0126	0.0000	0.0036		0.0000	0.0297	0.0005	0.0693	
		-0.840849	0.06225	0.447128	0.308445	0.399883	-1.169232	0.103478	0.420212	0.219639	0.337839
HLL 5		0.0005	0.1599	0.0000	0.0008		0.0000	0.0175	0.0010	0.0445	
		-0.853622	0.04918	0.446468	0.323087	0.392877	-1.177901	0.080285	0.49858	0.167376	0.343747
OPT		0.0004	0.2485	0.0000	0.0002		0.0000	0.0534	0.0001	0.1014	

Tabela 28 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para USIM5

Modelo 1 passo a frente						Modelo 2 passos a frente				
Modelo	C	$\theta_d$	$\theta_w$	$\theta_m$	R <sup>2</sup> Ajustado	C	$\theta_d$	$\theta_w$	$\theta_m$	R <sup>2</sup> Ajustado
	-0.40951	0.213393	0.483422	0.220613	0.576513	-0.510267	0.154805	0.50889	0.232517	0.542111
ALL 1	0.0016	0.0000	0.0000	0.0001		0.0017	0.0001	0.0000	0.0003	
	-0.399859	0.219567	0.480586	0.220063	0.576321	-0.500574	0.175007	0.475388	0.248707	0.539454
ALL 2	0.0016	0.0000	0.0000	0.0001		0.0017	0.0000	0.0000	0.0001	
	-0.432561	0.248168	0.420835	0.245621	0.547856	-0.54952	0.192492	0.40671	0.291182	0.503529
ALL 5	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000		0.0012	0.0000	0.0000	0.0000	
	-0.472079	0.224215	0.385063	0.299552	0.489059	-0.595328	0.168357	0.356606	0.358679	0.444502
ALL 15	0.0017	0.0000	0.0000	0.0000		0.0018	0.0000	0.0000	0.0000	
	-0.492079	0.184556	0.371474	0.351552	0.446392	-0.60133	0.131072	0.35143	0.403052	0.410359
ALL 30	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000		0.0017	0.0013	0.0000	0.0000	
	-0.405925	0.213393	0.483422	0.220613	0.576513	-0.505761	0.154805	0.50889	0.232517	0.542111
HLL 1	0.0016	0.0000	0.0000	0.0001		0.0017	0.0001	0.0000	0.0003	
	-0.395512	0.219567	0.480586	0.220063	0.576321	-0.495076	0.175007	0.475388	0.248707	0.539454
HLL 2	0.0016	0.0000	0.0000	0.0001		0.0017	0.0000	0.0000	0.0001	
	-0.428209	0.248168	0.420835	0.245621	0.547856	-0.543932	0.192492	0.40671	0.291182	0.503529
HLL 5	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000		0.0012	0.0000	0.0000	0.0000	
	-0.439718	0.232306	0.440943	0.240253	0.541651	-0.555113	0.184233	0.417269	0.288093	0.498315
OPT	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000		0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	
	Modelo 5 passos a frente					Modelo 10 passos a frente				
Modelo	C	$\theta_d$	$\theta_w$	$\theta_m$	R <sup>2</sup> Ajustado	C	$\theta_d$	$\theta_w$	$\theta_m$	R <sup>2</sup> Ajustado
	-0.73327	0.1674	0.389974	0.290805	0.472847	-1.085754	0.160994	0.368113	0.242888	0.390832
ALL 1	0.0010	0.0001	0.0000	0.0006		0.0000	0.0005	0.0062	0.0335	
	-0.728088	0.185355	0.346209	0.318777	0.468571	-1.067543	0.170207	0.322085	0.285119	0.388026
ALL 2	0.0010	0.0000	0.0001	0.0002		0.0000	0.0002	0.0144	0.0116	
	-0.786856	0.159063	0.336367	0.344678	0.434323	-1.13367	0.150157	0.331637	0.284054	0.361842
ALL 5	0.0007	0.0003	0.0002	0.0000		0.0000	0.0008	0.0094	0.0085	
	-0.842227	0.105579	0.322748	0.403736	0.37972	-1.179428	0.155791	0.262446	0.341593	0.320391
ALL 15	0.0009	0.0220	0.0008	0.0000		0.0000	0.0002	0.0294	0.0011	
	-0.835009	0.088601	0.291468	0.456947	0.353492	-1.173302	0.143501	0.296872	0.323981	0.30744
ALL 30	0.0009	0.0350	0.0030	0.0000		0.0000	0.0003	0.0115	0.0026	
	-0.726678	0.1674	0.389974	0.290805	0.472847	-1.075855	0.160994	0.368113	0.242888	0.390832
HLL 1	0.0010	0.0001	0.0000	0.0006		0.0000	0.0005	0.0062	0.0335	
	-0.719934	0.185355	0.346209	0.318777	0.468571	-1.055415	0.170207	0.322085	0.285119	0.388026
HLL 2	0.0010	0.0000	0.0001	0.0002		0.0000	0.0002	0.0144	0.0116	
	-0.778706	0.159063	0.336367	0.344678	0.434323	-1.121734	0.150157	0.331637	0.284054	0.361842
HLL 5	0.0007	0.0003	0.0002	0.0000		0.0000	0.0008	0.0094	0.0085	
	-0.804413	0.168902	0.3186	0.349086	0.427773	-1.15092	0.153438	0.329416	0.279676	0.356851
OPT	0.0005	0.0001	0.0005	0.0000		0.0000	0.0008	0.0094	0.0091	

Tabela 29 - Coeficientes estimados dos modelos HARs para VALE5

ANEXO B – Programação (Código fonte) em MATLAB para estimação dos modelos e cálculo do *Value at Risk*

```

    % Carregamento dos dados

petr4 = ret2price(petr4);
plot(petr4)
usim5 = ret2price(usim5);
ggbr4 = ret2price(ggbr4);
vale5 = ret2price(vale5);
Data = [petr4,usim5,vale5,ggbr4];

    % Gráfico de preços normalizado

plot(ret2price(price2ret(Data)))
set(gca, 'XTick', [1 300 600 983])
set(gca, 'XTickLabel',{'Março 2006', 'Julho 2007', 'Novembro 2008', 'Abril 2010'})
ylabel('Preços normalizados')
title ('Preços diários de fechamento')
legend('petr4','usim5','vale5','ggbr4')
returns = price2ret(Data);
T      = size(returns,1);
index = 1;

figure
plot(returns(:,index)), ylabel('Retornos'), title('Retornos Logaritmo Diário')
>> plot(price2ret(petr4))
>> figure
>> nIndices = size(Data,2); % número de ativos

% escolha da família de volatilidade

```

```

spec(1:nIndices) = garchset('Distribution' , 'T' , 'Display', 'off', ...
    'VarianceModel', 'GJR', 'P', 1, 'Q', 1, 'R', 1);

% vetor de resíduos
residuals = NaN(T, nIndices); % preallocate storage
sigmas = NaN(T, nIndices);

% especificação dos modelos de volatilidade
for i = 1:nIndices
    [spec(i) , errors, LLF, ...
        residuals(:,i), sigmas(:,i)] = garchfit(spec(i), returns(:,i));
end

figure, subplot(2,1,1)
plot( residuals(:,index))
ylabel('Resíduos'), title ('Resíduos Filtrados')

subplot(2,1,2)
plot( sigmas(:,index))
ylabel('Volatilidade')
title ('Desvio Padrão Condicional Modelado')

>> figure, subplot(2,1,1)
plot( residuals(:,index))

ylabel('Resíduos do modelo'), title ('Resíduos Filtrados')

subplot(2,1,2)
plot( sigmas(:,index))

```

```

ylabel('Volatilidade')
title ('Desvio Padrão Condicional Filtrado')
% Erros normalizados
>> residuals = residuals ./ sigmas;
>> figure
autocorr(residuals(:,index))
title('ACF dos Resíduos Padronizados')

figure
autocorr(residuals(:,index).^2)
title(' ACF dos Resíduos Padronizados ao quadrado')
nPoints = 200; % número de pontos da função kernel
tailFraction = 0.1; % Fração dos resíduos alocados em cada cauda

OBJ = cell(nIndices,1); % Distribuição de Pareto

for i = 1:nIndices
    OBJ{i} = paretotails(residuals(:,i), tailFraction, 1 - tailFraction, 'kernel');
end
>> figure, hold('on'), grid('on')

minProbability = OBJ{index}.cdf((min(residuals(:,index))));
maxProbability = OBJ{index}.cdf((max(residuals(:,index))));

pLowerTail = linspace(minProbability , tailFraction , 200); % sample lower tail
pUpperTail = linspace(1 - tailFraction, maxProbability , 200); % sample upper tail
pInterior = linspace(tailFraction , 1 - tailFraction, 200); % sample interior

```

```

plot(OBJ{index}.icdf(pLowerTail), pLowerTail, 'red' , 'LineWidth', 2)
plot(OBJ{index}.icdf(pInterior) , pInterior , 'black', 'LineWidth', 2)
plot(OBJ{index}.icdf(pUpperTail), pUpperTail, 'blue' , 'LineWidth', 2)

xlabel('Standardized Residual'), ylabel('Probability'), title('Empirical CDF')
legend( {'Pareto Lower Tail' 'Kernel Smoothed Interior' ...
        'Pareto Upper Tail'}, 'Location', 'NorthWest')

>> figure

[P,Q] = OBJ{index}.boundary; % probabilidades cumulativas
y = sort(residuals(residuals(:,index) > Q(2), index) - Q(2)); % excessos
plot(y, (OBJ{index}.cdf(y + Q(2)) - P(2))/P(1))

[F,x] = ecdf(y); % CDF empírica
hold('on'); stairs(x, F, 'r'); grid('on')

legend('CDF ajustada por distribuição de Pareto ','CDF Empírica','Location','SouthEast');
xlabel('Excesso'); ylabel('Probabilidade');
title('Cauda superior dos resíduos padronizados')

>> U = zeros(size(residuals));

for i = 1:nIndices
    U(:,i) = OBJ{i}.cdf(residuals(:,i)); % Transformação de marginais em uniformes
end

[R, DoF] = copulafit('t', U, 'Method', 'ApproximateML'); % Ajuste da cópula
s = RandStream.getGlobalStream(); reset(s)

```

```

nTrials = 20000;                % número de simulações
horizon = 1;                    % horizonte de previsão do VaR

Z = zeros(horizon, nTrials, nIndices);    % Resíduos padronizados
U = copularnd('t', R, DoF, horizon * nTrials); % Simulação da Cópula

for j = 1:nIndices
    Z(:,j) = reshape(OBJ{j}.icdf(U(:,j)), horizon, nTrials);
end
>> preResidual = residuals(end,:) .* sigmas(end,:);
preSigma = sigmas(end,:);
preReturn = returns(end,:);

simulatedReturns = zeros(horizon, nTrials, nIndices);

for i = 1:nIndices
    [~, ~, simulatedReturns(:,i)] = ...
        garchsim(spec(i), horizon, nTrials, Z(:,i), ...
            [], [], preResidual(i), preSigma(i), ...
            preReturn(i));
end
>> simulatedReturns = permute(simulatedReturns, [1 3 2]);
>> cumulativeReturns = zeros(nTrials, 1);
weights = repmat(1/nIndices, nIndices, 1); % tamanho de cada ativo

for i = 1:nTrials
    cumulativeReturns(i) = sum(log(1 + (exp(simulatedReturns(:,i)) - 1) * weights));
end

```

```
end

VaR = 100 * quantile(cumulativeReturns, [0.10 0.05 0.01]);

disp(' ')

fprintf(' Degrees of Freedom: %8.4f\n\n', DoF);
fprintf('Maximum Simulated Loss: %8.4f%s\n' , -100*min(cumulativeReturns), '%')
fprintf('Maximum Simulated Gain: %8.4f%s\n\n' , 100*max(cumulativeReturns), '%')
fprintf(' Simulated 90%% VaR: %8.4f%s\n' , VaR(1), '%')
fprintf(' Simulated 95%% VaR: %8.4f%s\n' , VaR(2), '%')
fprintf(' Simulated 99%% VaR: %8.4f%s\n\n' , VaR(3), '%')

figure

h = cdfplot(cumulativeReturns);

set(h, 'Color', 'Red');

xlabel('Retorno Logaritmo')

ylabel('Probabilidade')

title ('Simulação de Retornos Diários usando Cópula')
```