

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Respostas Dinâmicas em Sistemas Distribuídos
e Decomposição Forçada da Superfície Livre
para um Modelo Acoplado Oceano-Atmosfera**

por

Cristiano Rodrigues Garibotti

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen
Orientador

Porto Alegre, Setembro de 2004

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Cristiano Rodrigues Garibotti

Respostas Dinâmicas em Sistemas Distribuídos e Decomposição Forçada da Superfície Livre para um Modelo Acoplado Oceano-Atmosfera / Cristiano Rodrigues Garibotti.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2004.

155 p.: il.

Dissertação (Mestrado)—Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2004. Orientador: Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen

Área: Vibrações, Controle e Sinais

Palavras chave: Função de Green, Base Dinâmica, Problema Adjunto, Resposta Impulso, Modelo Geofísico, Sistemas Distribuídos

Respostas Dinâmicas em Sistemas Distribuídos e Decomposição Forçada da Superfície Livre para um Modelo Acoplado Oceano-Atmosfera

por

Cristiano Rodrigues Garibotti

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Concentração: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino - PPGMAT/UFRGS

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano - PPGMap/UFRGS

Prof^a. Dr^a. Teresa Tsukazan de Ruiz - PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, 5 de setembro de 2003

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Júlio Claeysen pela confiança, ensinamentos, incentivo e dedicação durante minha formação acadêmica e desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos Antônio e Sânzara pelas discussões, incentivo e alegria de todos os momentos.

Agradeço aos meus pais, Heron e Maria do Carmo, pelo carinho, apoio e confiança depositados. Também aos meus irmãos, pelo companheirismo e incentivo.

Agradeço aos professores do PPGMAP, pela colaboração em minha formação, em especial ao prof. Leandro Farina, pelas dicas e referências fundamentais na etapa final do trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que sempre estiveram ao meu lado, prestando apoio e fazendo críticas sempre que necessário.

Agradeço à Marlise, tão especial na minha vida, pela paciência, compreensão e apoio indispensáveis na conclusão deste trabalho.

Agradeço ao PPGMAP e ao CNPq, pela oportunidade e disponibilização dos recursos materiais, humanos e financeiros, sem dúvida imprescindíveis.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÕES EVOLUTIVAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO EM DOMÍNIO INFINITO	4
2.1 O Problema de Cauchy	5
2.2 A Condição de Hadamard-Petrowsky	11
2.2.1 O Problema Não Homogêneo, Princípio de Duhamel	17
3 PROBLEMAS EVOLUTIVOS EM DOMÍNIO LIMITADO	19
3.1 O Problema com Condições de Contorno Homogêneas	21
3.2 O Problema com Condições de Contorno Não Homogêneas	25
3.3 O Método Espectral no Cálculo da Função de Green Espacial	30
3.4 O Caso Unidimensional	32
3.4.1 A Base Dinâmica Fundamental	36
3.4.2 O Caso de Condições de Contorno Não Homogêneas	38

3.4.2.1	O Operador Adjunto	38
3.4.2.2	Exemplos	43
3.4.2.3	A Equação Operacional com Condições Não Homogêneas	48
3.4.3	Caso de Coeficientes de 2ª Ordem	50
4	CÁLCULO SIMBÓLICO DE RESPOSTAS FORÇADAS	53
4.1	Decomposição de Respostas Forçadas	53
4.2	A Resposta em Frequência e o Operador de Transferência	56
5	EQUAÇÕES DO TIPO PARABÓLICO	58
5.1	Domínio Unidimensional	58
5.1.1	O Problema de Cauchy na Reta	59
5.1.2	Domínio Limitado com Condições de Contorno Homogêneas	65
5.1.3	O Caso de Condições de Contorno Não-Homogêneas	72
5.2	Domínio Bidimensional	79
5.2.1	Equação do Calor em duas dimensões	79
6	EQUAÇÕES DO TIPO HIPERBÓLICO	83
6.1	Domínio Unidimensional	83
6.1.1	O Problema de Cauchy na Reta	84
6.1.1.1	A Equação de Klein-Gordon	86

6.1.1.2	Equação da Onda Amortecida com Convecção e Reação	91
6.1.2	Domínio Limitado com Condições de Contorno Homogêneas	96
6.1.2.1	Equação de Klein-Gordon	98
6.1.2.2	Equação da Onda Amortecida com Convecção e Reação	103
6.1.3	O Caso de Condições de Contorno Não Homogêneas	108
6.1.3.1	Equação de Klein-Gordon	109
6.1.3.2	Equação da Onda Amortecida com Convecção e Reação	114
6.2	Domínio Bidimensional	119
6.2.1	Equação do Telégrafo em Duas Dimensões	120
6.3	Domínio Tridimensional	123
6.3.1	Equação de Klein-Gordon em Três Dimensões	123
7	UM MODELO ACOPLADO OCEANO-ATMOSFERA	128
7.1	Equações Governantes	128
7.2	Equações de Águas-Rasas	131
7.3	Simulações	144
8	CONCLUSÕES	150
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	152

Lista de Figuras

Figura 5.1	Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$	61
Figura 5.2	Gráficos da resposta particular $u_p(x, t)$	62
Figura 5.3	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular. . .	63
Figura 5.4	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	64
Figura 5.5	Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$	68
Figura 5.6	Gráficos da resposta forçada $u_p(x, t)$	70
Figura 5.7	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular. . .	70
Figura 5.8	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	71
Figura 5.9	Soluções $u_h(t, x)$, $u_p(t, x)$, $u_{hp}(t, x)$, $u(t, x)$ para $t = 5$	72
Figura 5.10	Gráficos da resposta forçada $u_p(x, t)$	75
Figura 5.11	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular. . .	76
Figura 5.12	Gráficos dos termos de contorno.	77
Figura 5.13	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	78
Figura 5.14	Gráficos da resposta particular $u_p(t, x, y)$	81
Figura 5.15	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x, y)$, induzida pela particular. .	82
Figura 6.1	Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$	88
Figura 6.2	Gráficos da resposta particular $u_p(x, t)$	89
Figura 6.3	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular. . .	90

Figura 6.4	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	91
Figura 6.5	Gráficos da resposta particular $u_p(x, t)$	94
Figura 6.6	Gráficos da resposta livre induzida $u_{hp}(x, t)$	94
Figura 6.7	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	95
Figura 6.8	Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$	99
Figura 6.9	Gráficos da resposta forçada $u_p(x, t)$	101
Figura 6.10	Gráficos da resposta livre (u_{hp}) induzida pela particular.	101
Figura 6.11	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	102
Figura 6.12	Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$	104
Figura 6.13	Gráficos da resposta forçada $u_p(t, x)$	105
Figura 6.14	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular. . .	106
Figura 6.15	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	107
Figura 6.16	Gráficos da parte real da resposta particular $u_p(x, t)$	111
Figura 6.17	Gráficos da parte real da resposta livre (u_{hp}) induzida pela particular.	112
Figura 6.18	Gráficos da contribuição das condições de contorno $u_{cc}(t, x)$. .	113
Figura 6.19	Gráficos da parte real resposta total $u(t, x)$	114
Figura 6.20	Gráficos da resposta forçada $u_p(t, x)$	116
Figura 6.21	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular. . .	117
Figura 6.22	Gráficos da contribuição das condições de contorno não homogêneas u_{cc}	118

Figura 6.23	Gráficos da resposta total $u(t, x)$	119
Figura 6.24	Gráficos da resposta particular $u_p(t, x)$	122
Figura 6.25	Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular. . .	123
Figura 6.26	Gráfico da resposta $u_p(t, x, y, z)$, para $t = 1$ e x assumindo 5 valores diferentes no intervalo $[0, 1]$	126
Figura 6.27	Gráfico da resposta $u_p(t, x, y, z)$, para $t = 1$ e y, z assumindo 5 valores diferentes no intervalo $[0, 1]$	126
Figura 6.28	Gráficos da resposta $u_{hp}(t, x, y, z)$, para $t = 1$ e x, y, z assumindo 5 valores diferentes no intervalo $[0, 1]$	127
Figura 7.1	Geometria da superfície distribuída.	133
Figura 7.2	Direções (no hemisfério norte) do transporte de massa de Ekman nas camadas limites atmosférica e oceânica.	139
Figura 7.3	Ciclone sobre o oceano mostrando os ajustamentos devido ao transporte de Ekman.	141
Figura 7.4	Gráficos da resposta particular $\eta_p(t, x, y)$	147
Figura 7.5	Gráficos da resposta livre $\eta_{hp}(t, x, y)$ induzida pela particular. . .	148
Figura 7.6	Gráficos da resposta forçada $\eta(t, x, y) = \eta_p(t, x, y) + \eta_{hp}(t, x, y)$. . .	149

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Forma da função $\Lambda(t, x, \xi)$ para os tipos básicos de problemas de contorno não estacionários	29
Tabela 3.2	Forma das funções $\Lambda_1(t - \tau, x)$ e $\Lambda_2(t - \tau, x)$	52

Lista de Símbolos

A_j	operadores diferenciais espaciais
B	forma bilinear de Lagrange
$\delta(x)$	função delta de Dirac
$\eta(t, x, y)$	deslocamento da superfície livre
f	parâmetro de Coriolis
$\hat{f}(t, \omega)$	transformada de Fourier de $f(t, x)$
\mathcal{F}	operador transformada de Fourier, termo forçante na equação de Klein-Gordon
\mathcal{F}^{-1}	operador transformada inversa de Fourier
g	aceleração da gravidade
H	profundidade do oceano
$h(t, x)$	solução dinâmica ou função de Green de valor inicial
$H(s, x, \xi)$	função de Green espacial
$H^*(s, x, \xi)$	função de Green espacial do problema adjunto
I	operador identidade
$\mathbb{J}(u, h)(t, x)$	termo que carrega as condições de contorno não homogêneas
$J(u, h)$	uma curva em t com valores $\mathbb{J}(u, h)(t, x)$
\mathcal{L}	operador transformada de Lapalce
\mathcal{L}^{-1}	operador transformada inversa de Lapalce
\mathbb{L}	operador diferencial linear
\mathbb{L}^*	operador diferencial linear adjunto
$P(z)$	polinômio característico
ρ	densidade do ar
τ^x, τ^y	componentes do vetor de tensão

$u_{cc}(t, x)$	contribuição das condições de contorno não homogêneas
$u_h(t, x)$	resposta homogênea
$u_{hp}(t, x)$	resposta livre induzida pela particular
$u_p(t, x)$	resposta particular
(u_p, v_p)	velocidades induzidas pelo gradiente de pressão
(u_E, v_E)	velocidades de Ekman
(U_E, V_E)	transporte de volume de Ekman
$(\rho U_E, \rho V_E)$	transporte de massa de Ekman
$\ \cdot\ $	norma euclidiana

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a introdução e desenvolvimento de uma metodologia analítico-simbólica para a obtenção de respostas dinâmicas e forçadas (soluções homogêneas e não homogêneas) de sistemas distribuídos, em domínios ilimitados e limitados, através do uso da base dinâmica gerada a partir da resposta impulso.

Em domínios limitados, a resposta impulso foi formulada pelo método espectral. Foram considerados sistemas com condições de contorno homogêneas e não homogêneas.

Para sistemas de natureza estável, a resposta forçada é decomposta na soma de uma resposta particular e de uma resposta livre induzida pelos valores iniciais da resposta particular. As respostas particulares, para entradas oscilatórias no tempo, foram calculadas com o uso da função de Green espacial.

A teoria é desenvolvida de maneira geral permitindo que diferentes sistemas evolutivos de ordem arbitrária possam ser tratados sistematicamente de uma forma compacta e simples.

Realizou-se simulações simbólicas para a obtenção de respostas dinâmicas e respostas forçadas com equações do tipo parabólico e hiperbólico em 1D, 2D e 3D. O cálculo das respostas forçadas foi realizado com a determinação das respostas livres transientes em termos dos valores iniciais das respostas permanentes.

Foi simulada a decomposição da resposta forçada da superfície livre de um modelo acoplado oceano-atmosfera bidimensional, através da resolução de uma equação de Klein-Gordon 2D com termo não-homogêneo de natureza dinâmica, devido a tensão de cisalhamento na superfície do oceano pela ação do vento.

ABSTRACT

The objective of this work is the introduction and the development of an analytical-symbolic methodology for obtaining dynamic and forced responses of distributed systems, in unlimited and limited domains, through the use of the dynamic basis generated by the impulse response.

In limited domains, the impulse response was formulated with the spectral method. Systems were considered with homogeneous and nonhomogeneous boundary conditions.

For systems of stable nature, the forced response is decomposed into the sum of a particular response and a free response that is induced by the initial values of the particular response. The particular responses, for oscillatory time inputs, were calculated with the use of the spatial Green's function.

The theory is developed in a general way that allows that different arbitrary order evolution systems can be systematically treated in a compact and simple way.

Symbolic simulations were performed for obtaining dynamics responses and forced responses with equations of parabolic and hyperbolic type in 1D, 2D and 3D. The calculation of the forced responses were accomplished with the determination of the transient free responses in terms of the initial values of the permanent responses.

It was simulated the decomposition of the forced response of the free surface of a two-dimensional coupled model ocean-atmosphere, through the integration of a 2D Klein-Gordon equation with a nonhomogeneous terms of dynamic nature, due to the shear stress in the surface of the ocean by the action of the wind.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho são consideradas respostas dinâmicas e forçadas de sistemas distribuídos de natureza evolutiva. Eles são descritos por equações diferenciais parciais com variável espacial num domínio limitado ou ilimitado. Nos domínios limitados são consideradas condições de contorno homogêneas e não homogêneas. São abordados sistemas LTI (lineares e invariantes no tempo) do tipo

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} = f, \quad (1.1)$$

onde as variáveis $u = u(t, x)$ e $f = f(t, x)$ são funções que dependem do tempo t e do espaço x numa região Ω , e os coeficientes A_j são operadores espaciais, quer dizer, só contêm derivadas com respeito à variável espacial x . Estes operadores agem sob funções definidas espacialmente em domínios ilimitados ou limitados. Em domínios limitados, as funções $u(t, x)$ vêm a satisfazer condições de contorno. Na dinâmica e controle, são freqüentes entradas do tipo dinâmico

$$f = \sum_{j=0}^M B_j \frac{\partial^j p}{\partial t^j}, \quad (1.2)$$

onde $p(t, x)$ é uma determinada carga externa. Aqui os B_j são operadores espaciais. No estudo deste tipo de sistema, será enfatizado o uso da base dinâmica, gerada a partir da solução fundamental ou resposta impulso ou função de Green temporal do sistema.

Em sistemas de natureza estável, a resposta forçada pode ser, com auxílio da base dinâmica, caracterizada através de uma decomposição em que uma parte transiente é induzida pelos da valores iniciais da resposta permanente [2], [29]. Para entradas harmônicas no tempo em sistemas distribuídos definidos em domínios limitados, a resposta permanente pode ser calculada com o uso do operador de trans-

ferência ou função de Green espacial. O cálculo deste operador pode ser realizado através do método espectral, que requer do cálculo de autovalores e de autofunções. Com domínios espaciais unidimensionais, o operador de transferência pode ser calculado de maneira não-espectral com o uso de uma base dinâmica espacial [9].

Os métodos espectrais e não-espectrais, incluindo muitas técnicas numéricas, têm um aspecto em comum: absorver a variável tempo das equações que descrevem um sistema. Para uma formulação mais geral, o uso de métodos espectrais são mais restritivos do que os métodos operacionais. Estes últimos métodos incluem a transformada de Fourier em domínios ilimitados e a transformada de Laplace em domínios limitados. O método operacional permite obter uma equação transformada, chamada de *equação operacional*, em princípio, mais fácil de manipular.

No capítulo 2, apresenta-se um estudo de das equações evolutivas lineares invariantes no tempo (LTI) em um domínio ilimitado. Esse estudo é desenvolvido utilizando-se uma formulação direta através do método da transformada de Fourier em termos de uma resposta fundamental, denominada também de solução dinâmica do sistema. É também tratada a existência e unicidade das soluções, bem como a sua dependência contínua dos dados iniciais.

No capítulo 3, é feita uma abordagem de equações evolutivas em um domínio espacial limitado. Primeiramente, o problema é tratado para o caso geral (n-dimensões) através do método operacional onde são abordados separadamente os casos de condições de contorno homogêneas e não homogêneas. Logo após essa abordagem geral, o caso unidimensional é tratado detalhadamente onde é mostrado o cálculo não espectral da função de Green espacial com o uso da base dinâmica. O cálculo das condições de contorno adjuntas também é estudado para o caso unidimensional.

O capítulo 4 é reservado para detalhar a decomposição de respostas forçadas que são definidas através da integral de convolução da solução fundamental com o termo não homogêneo.

Nos capítulos 5 e 6 uma classe de problemas parabólicos e hiperbólicos é estudada detalhadamente para ilustrar a teoria desenvolvida nos capítulos subsequentes. Realiza-se simulações simbólicas para a obtenção de respostas dinâmicas e respostas forçadas em domínios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

No capítulo final, é apresentado um modelo geofísico de interação oceano-atmosfera acoplado. Este modelo é descrito por equações não-lineares de águas rasas. Considerando-se aproximações e transformações, deriva-se uma equação do tipo Klein-Gordon forçada para o deslocamento da superfície livre do oceano [17], [14], [25]. As forças externas consideradas são as variações na pressão atmosférica e tensões de cisalhamento na superfície do oceano devido a ação do vento. Simulações foram realizadas para obter a resposta forçada devido a tensões oscilatórias no tempo e no espaço.

2 EQUAÇÕES EVOLUTIVAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO EM DOMÍNIO INFINITO

As equações evolutivas lineares invariantes no tempo (LIT), isto é, em que a incógnita u e suas derivadas no tempo t , até uma certa ordem m , aparecem somente na primeira potência, e os coeficientes de u e suas derivadas dependem apenas das variáveis espaciais independentes x , y , z , constituem uma importante classe de equações, tanto pela sua rica teoria e praticidade quanto pelo sua frequência nas aplicações.

Nestas equações, três princípios norteiam seu estudo, igualmente válidos para o caso das equações diferenciais lineares, tanto ordinárias quanto parciais em tempo contínuo bem como finitas em tempo discreto. Eles são os princípios *da superposição*, *da decomposição* e *da representação*.

- **PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO:** Qualquer combinação linear de soluções de uma equação evolutiva linear homogênea é também uma solução dessa equação.
- **PRINCÍPIO DA DECOMPOSIÇÃO:** A solução de uma equação evolutiva linear não-homogênea pode ser decomposta na soma de uma solução homogênea e de uma solução não-homogênea particular.
- **PRINCÍPIO DA REPRESENTAÇÃO:** Existe uma solução fundamental que carrega toda a informação de uma equação evolutiva linear.

Este último, pode ser considerado como o mais importante do ponto de vista do estudo das equações evolutivas lineares, pois a resposta pode ser escrita como um tipo de combinação linear dessa solução (solução fundamental) e suas derivadas, atuando sobre os dados do problema. Os princípios da superposição

e da decomposição aplicam-se a qualquer problema que seja de natureza linear. O princípio da decomposição será importante para o tratamento de sistemas de equações diferenciais lineares e de equações diferenciais parciais.

2.1 O Problema de Cauchy

Neste trabalho, o nosso interesse será com as equações diferenciais parciais (EDP) lineares com coeficientes constantes no tempo. O caso de equações diferenciais ordinárias (EDO) e de equações em diferenças (EDF) tem sido considerado em detalhe em [5], [29] e [4].

O problema de Cauchy no espaço consiste em achar uma solução $u = u(t, x)$ do problema de valor inicial,

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x) \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_0^1(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}}(0, x) = u_0^{N-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.2)$$

Aqui, x denota a variável espacial em $1D$, (x, y) em $2D$ ou (x, y, z) em $3D$. Em geral, considera-se x como uma variável espacial que varia em todo o espaço d -dimensional. Os coeficientes A_j são operadores diferenciais espaciais lineares com coeficiente constantes, isto é, contendo somente derivadas com respeito a variável

espaçiais definidos por

$$\begin{aligned}
 A_j &= \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_{\alpha,j} D^\alpha & (2.3) \\
 D^\alpha &= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \\
 x &= (x_1, x_2, \dots, x_d) \\
 a_{\alpha,j} &= a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, j} = \text{constante} \\
 \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \\
 |\alpha| &= |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_d|
 \end{aligned}$$

As funções $a_\alpha(x)$ são assumidas com derivadas contínuas de qualquer ordem. O uso da transformada de Fourier com respeito a variável espacial

$$\hat{u}(t, \omega) = \mathcal{F}(u(t, x)) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \omega \rangle} u(t, x) dx,$$

onde $\langle x, \omega \rangle$ é o produto interno associado a norma euclídeana

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^d |x_k|^2}, \quad (2.4)$$

isto é,

$$\langle x, \omega \rangle = \sum_{k=1}^d x_k \omega_k,$$

permite obter uma fórmula de variação de parâmetros, cuja validade pode ser estabelecida para equações que satisfazem a condição de Hadamard-Petrowsky, definida na seção 2.2, e dados iniciais suficientemente regulares [33], [28], [10].

Utilizando em (2.1) a transformada de Fourier nas derivadas espaciais e notando que

$$\mathcal{F}(D^\alpha u(t, x)) = (i\omega)^\alpha \mathcal{F}(u(t, x))$$

e

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} u(t, x)\right) = \frac{\partial^j}{\partial t^j} \mathcal{F}(u(t, x))$$

onde

$$(i\omega)^\alpha = (i\omega_1)^{\alpha_1} (i\omega_2)^{\alpha_2} \cdots (i\omega_d)^{\alpha_d},$$

tem-se a equação diferencial linear ordinária

$$\sum_{j=0}^N \mathcal{A}_j(\omega) \frac{\partial^j \hat{u}}{\partial t^j}(t, \omega) = \hat{f}(t, \omega).$$

Aqui, \mathcal{A}_j é definido por

$$\mathcal{A}_j(\omega) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_{\alpha,j} (i\omega)^\alpha, \quad j = 0 : m,$$

e $\hat{f}(t, \omega)$ denota a transformada de Fourier da excitação $f(t, x)$. Aplicando-se a transformada de Fourier nas condições iniciais (2.2), decorre que

$$\hat{u}(0, \omega) = \hat{u}_0^0(\omega), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \omega) = \hat{u}_0^1(\omega), \quad \cdots, \quad \frac{\partial^{N-1} \hat{u}}{\partial t^{N-1}}(0, \omega) = \hat{u}_0^{N-1}(\omega).$$

Supondo-se que $\mathcal{A}_N(\omega) \neq 0$ para qualquer $\omega \in \mathbb{R}^d$ tem-se o problema inicial de valor inicial ordinário no domínio freqüência

$$\sum_{j=0}^N \mathcal{A}_j(\omega) \frac{\partial^j \hat{u}}{\partial t^j}(t, \omega) = \hat{f}(t, \omega) \tag{2.5}$$

$$\hat{u}(0, \omega) = \hat{u}_0^0(\omega), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \omega) = \hat{u}_0^1(\omega), \quad \cdots, \quad \frac{\partial^{N-1} \hat{u}}{\partial t^{N-1}}(0, \omega) = \hat{u}_0^{N-1}(\omega). \tag{2.6}$$

A solução deste problema de valor inicial (2.5) e (2.6), em termos da base fundamental ou dinâmica e dos valores iniciais, vem dada, no caso de coefi-

cientes a_α constantes, [27], [5], [4], [29] por

$$\widehat{u}(t, \omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{h}_j(t, \omega) \widehat{u}_0^j(\omega) + \int_0^t \widehat{h}(t - \tau, \omega) \widehat{f}(\tau, \omega) d\tau. \quad (2.7)$$

Aqui

$$\widehat{h}_j(t, \omega) = \sum_{i=0}^{N-j-1} \widehat{h}^{(i)}(t, \omega) \mathcal{A}_{j+1+i}(\omega) \quad \text{para } j = 0 : N - 1, \quad (2.8)$$

e

$$\widehat{h}_{(N-1)}(t, \omega) = \widehat{h}(t, \omega) \mathcal{A}_N$$

com $\widehat{h}(t, \omega)$ sendo a solução fundamental de (2.5), isto é, a solução do problema de valor inicial

$$\sum_{j=0}^N \mathcal{A}_j \frac{d^j \widehat{h}}{dt^j}(t, \omega) = 0 \quad (2.9)$$

$$\widehat{h}(0, \omega) = 0, \quad \frac{d\widehat{h}(0, \omega)}{dt} = 0 \quad \dots, \quad \frac{d^{N-2}\widehat{h}(0, \omega)}{dt^{N-2}} = 0, \quad \mathcal{A}_N \frac{d^{N-1}\widehat{h}(0, \omega)}{dt^{N-1}} = 1.$$

Tem-se que

$$(\widehat{h}, \widehat{h}', \dots, \widehat{h}^{(N-1)})$$

é uma base de soluções, pois o seu Wronskiano, calculado com o uso de valores iniciais de $\widehat{h}(t)$, é não nulo. Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \widehat{h}_0(t, \omega) & \widehat{h}_1(t, \omega) & \dots & \widehat{h}_{N-1}(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{h}(t, \omega) & \widehat{h}'(t, \omega) & \dots & \widehat{h}^{(m-1)}(t, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \dots & \mathcal{A}_m \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \dots & \mathcal{A}_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{A}_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Fourier

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(t, \omega)) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \omega \rangle} \widehat{u}(t, \omega) d\omega, \quad \widehat{u}(\omega) = \mathcal{F}(u(x)) \quad (2.11)$$

em (2.7) e com o uso da propriedade da derivação

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\phi}(\omega) \mathcal{A}_j) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_{\alpha, j} D^\alpha \phi(x) = A_j \phi(x) \quad (2.12)$$

e da propriedade da convolução

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\phi}(\omega) \widehat{\psi}(\omega)) = (2\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x - \xi) \psi(\xi) d\xi,$$

obtém-se a seguinte fórmula para a resposta dinâmica devido a a uma força externa e condições iniciais:

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^d} h_j(t, x - \xi) u_0^j(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (2.13)$$

onde

$$h(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{h}(t, \omega)), \quad (2.14)$$

$$h_j(t, x) = \sum_{i=0}^{N-j-1} \frac{\partial^i h}{\partial t^i}(t, x) A_{j+1+i} \quad \text{para } j = 0 : N - 1, \quad (2.15)$$

A solução $h(t, x)$, definida por 2.14, vem a ser a *solução fundamental* ou *solução dinâmica* ou, ainda, *função de Green temporal* do sistema (2.1), ou seja, $h(x, t)$ corresponde à solução do problema de valor inicial

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j h}{\partial t^j}(t, x) = 0 \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.16)$$

$$h(0, x) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(0, x) = 0 \cdots, \quad \frac{\partial^{N-2} h}{\partial t^{N-2}}(0, x) = 0, \quad A_N \frac{\partial^{N-1} h}{\partial t^{N-1}}(0, x) = I. \quad (2.17)$$

A última condição deve ser interpretada no sentido que I é o operador identidade quando atua-se sobre funções através de integração, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^d} A_N \frac{\partial^{N-1} h}{\partial t^{N-1}}(0, x - \xi) \phi(\xi) d\xi = \phi(x).$$

ou, simplesmente, de maneira prática

$$A_N \frac{\partial^{N-1} h}{\partial t^{N-1}}(0, x) = \delta(x),$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac.

Introduzindo o operador fundamental ou propagador principal

$$\mathbf{h}(t)\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(t, x - \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (2.18)$$

os operadores complementares ou propagadores secundários

$$\mathbf{h}_j(t)\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_j(t, x - \xi)\phi(\xi) \quad (2.19)$$

e a curva \mathbf{f} em t com os valores funcionais $\mathbf{f}(t) = f(t, x)$, a resposta dinâmica pode ser escrita na forma evolutiva compacta

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t)u^{(j)} + \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.} \quad (2.20)$$

Para condições iniciais nulas, tem-se a resposta forçada

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h(t - \tau, x - \xi)f(\tau, \xi)d\xi d\tau \quad (2.21)$$

OBSERVAÇÕES

- A validade da discussão acima para $t < 0$, dependerá da possibilidade de realizar a inversão para obter $\hat{u}(t, x)$, ainda no caso homogêneo $f(t, x) = 0$, ou (2.14).
- A fórmula de variação de parâmetros (2.13) ou (2.20) deve ser verificada com rigor para dados apropriados.

2.2 A Condição de Hadamard-Petrowsky

O problema de Cauchy-Hadamard consiste em determinar quando um problema de valor inicial (2.1)-(2.2) possui uma única solução que depende continuamente dos dados para $t \geq 0$ (problema ascendente) ou, para $t \leq 0$ (problema descendente).

A seguir, considera-se um espaço de funções onde a transformada de Fourier está bem definida para os dados e solução do problema. É neste espaço que o processo formal ou operacional da seção anterior pode ser rigorosamente justificado sob certas condições. As demonstrações das propriedades relativas a este espaço são omitidas e podem ser encontradas em [39], [34], [16] [33]. Considere-se o espaço de Schwartz formado pelas funções definidas em \mathbb{R}^d que possuem derivadas contínuas de qualquer ordem e que decaem rápido no infinito ¹ :

$$\mathcal{S} = \{\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty \text{ para } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}.$$

Para cada ϕ em \mathcal{S} , a transformada de Fourier $\hat{\phi} = \mathcal{F}(\phi)$ está bem definida e além disso, a própria transformada $\hat{\hat{\phi}}$ está em \mathcal{S} . Neste espaço, tem-se garantida a inversão:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\phi) = \phi, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(\hat{\phi}) = \hat{\phi} \text{ para } \phi, \hat{\phi} \in \mathcal{S}.$$

¹Este é um espaço vetorial que possui uma estrutura de espaço métrico completo do tipo Frechet [39], [28]. A topologia é gerada pelas semi-normas $\|\phi\|_{\alpha, \beta} = \sup_x |x^\alpha D^\beta \phi(x)|$.

Aqui \mathcal{F}^{-1} é definida segundo (2.11). A transformada de Fourier comporta-se muito bem diante de dilatações e translações.

$$\mathcal{F}(\phi(x-a)) = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \widehat{\phi} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{F}(\phi(\lambda x)) = |\lambda|^{-d} \widehat{\phi}(\xi/\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Denota-se por $C^k(I, \mathcal{S})$ o conjunto de funções $u(t, x)$ de classe C^k para t num intervalo I e $x \in \mathbb{R}^d$, tais que para cada $0 \leq j \leq k$, $t \in I$, as derivadas $\frac{\partial^j u}{\partial t^j}$ estão em \mathcal{S} . Defina-se $C^\infty(I, \mathcal{S}) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(I, \mathcal{S})$.

Se $u(t, x)$ é uma solução de (2.1), (2.2) em $C^\infty([0, \infty), \mathcal{S})$, então, $\widehat{u}(t, \omega) \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ satisfaz (2.5), (2.6). De

$$|\mathcal{A}_N(\omega)| \geq c, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d \text{ para algum } c > 0 \text{ fixo.} \quad (2.24)$$

e, de (2.7) tem-se

$$\widehat{u}(t, \omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{h}_j(t, \omega) \widehat{u}_0^{(j)}(\omega) + \int_0^t \widehat{h}(t-\tau, \omega) \widehat{f}(\tau, \omega) d\tau. \quad (2.25)$$

Se mostramos que o lado direito de (2.25) pertence a $C^\infty([0, \infty), \mathcal{S})$, então, a inversão da transformada de Fourier fornece uma solução u em $C^\infty([0, \infty), \mathcal{S})$. Como a fórmula acima para \widehat{u} depende essencialmente de \widehat{h} e suas derivadas (2.15), é suficiente obter uma estimativa para todas as derivadas de $\widehat{h}(t, \omega)$ de modo a garantir que seu produto com os dados transformados (que decaem rapidamente no infinito) estão no espaço \mathcal{S} .

Então, a solução fundamental \widehat{h} que satisfaz (2.9) pode ser obtida pela transformada de Laplace [36], [1], [13] como a integral de Cauchy [33]

$$\widehat{h}(t, \omega) = \frac{\mathcal{A}_N(\omega)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{st}}{P(s, \omega)} ds, \quad (2.26)$$

onde

$$P(s, \omega) = \sum_{j=0}^N \mathcal{A}_j(\omega) s^j = \sum_{j=0}^N \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_{\alpha, j} (i\omega)^\alpha s^j. \quad (2.27)$$

e Γ é um contorno que contém no seu interior todas as raízes do polinômio $P(s, \omega)$.

Uma estimativa sobre as raízes $s = s(\omega)$ da equação polinômial $P(s, \omega) = 0$ pode ser obtida como segue, no caso $m_j \leq N - j$. Utilizando a desigualdade entre normas:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} \{|x_k|\} \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \|x\|_\infty,$$

segue que existe uma constante positiva M tal que para cada $j = 0, 1, \dots, N$

$$|\mathcal{A}_j(\omega)| \leq M(1 + \|\omega\|)^{m_j}, \quad \omega \in \mathbb{R}^d. \quad (2.28)$$

Fazendo $P(s, \omega) = 0$ e isolando s^N

$$|\mathcal{A}_N(\omega)| |s|^N \leq \sum_{j=0}^{N-1} |\mathcal{A}_j(\omega)| |s|^j,$$

usando (2.28), tem-se

$$|\mathcal{A}_N(\omega)| |s|^N \leq M \sum_{j=0}^{N-1} (1 + \|\omega\|)^{m_j} |s|^j.$$

Dividindo por $(1 + \|\omega\|)^N$, temos

$$|\mathcal{A}_N(\omega)| \frac{|s|^N}{(1 + \|\omega\|)^N} \leq M \sum_{j=0}^{N-1} (1 + \|\omega\|)^{m_j} \frac{|s|^j}{(1 + \|\omega\|)^N},$$

rearranjando obtém-se

$$|\mathcal{A}_N(\omega)| \frac{|s|^N}{(1 + \|\omega\|)^N} \leq M \sum_{j=0}^{N-1} (1 + \|\omega\|)^{m_j - N + j} \frac{|s|^j}{(1 + \|\omega\|)^j}.$$

De (2.24) segue que existe uma constante M_1 tal que $\forall \omega \in \mathbb{R}^d$ podemos escrever

$$\frac{|s|^N}{(1 + \|\omega\|)^N} \leq M_1 \sum_{j=0}^{N-1} (1 + \|\omega\|)^{m_j - N + j} \frac{|s|^j}{(1 + \|\omega\|)^j},$$

Fazendo $\theta = |s|/(1 + \|\omega\|)$ e do fato que $m_j \leq N - j$ tem-se

$$\theta^N \leq M_1(1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{N-1}).$$

Isto implica que $\theta < 1$ ou $\theta^m \leq M_1 N \theta^{N-1}$ e, conseqüentemente, $|\theta| < M_1 N$. Assim, obtém-se a estimativa

$$|s| < (1 + M_1 N)(1 + \|\omega\|). \quad (2.29)$$

Para cada $k = 1, \dots, N$, considera-se o disco de centro na raiz s_k e de raio unitário. Seja Γ a fronteira da união desses discos. Segue que Γ possui comprimento não maior que $2\pi N$. Escreva-se,

$$P(s, \omega) = \prod_{k=1}^N (s - s_k),$$

de modo que

$$|P(s, \omega)| \geq 1 \text{ para } s \in \Gamma. \quad (2.30)$$

Da integral de Cauchy (2.26) e de (2.30), vem

$$|\widehat{h}(t, \omega)| \leq \frac{|\mathcal{A}_N(\omega)|}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{st}| ds = \frac{|\mathcal{A}_N(\omega)|}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{Re(s)t} ds. \quad (2.31)$$

Da hipótese (2.24) e do teorema de Seidenberg-Tarski [22], [33], segue que existem $c > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\mathcal{A}_N(\omega)| \geq c_N (1/(1 + \|\omega\|^2))^n, \text{ para todo } \omega \text{ em } \mathbb{R}^d. \quad (2.32)$$

Suponha-se que é válida a *condição de Hadamard-Petrowsky na evolução ascendente* $t > 0$ relativa as raízes $s = s_k(\omega)$, $k = 1 : N$ do polinômio $P(s, \omega)$ que é de grau N em s :

Existem c, p tais que se $P(s, \omega) = 0$ para $s \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}^d$, então

$$e^{Re(s)t} \leq c(1 + \|\omega\|^2)^{p/2}. \quad (2.33)$$

Equivalentemente, utilizando o teorema de Seidenberg-Tarski [33], [37] a condição (2.33) equivale a :

$$\text{existe } c_1 \text{ tal que } Re(s_k) \leq c_1, \quad k = 1 : N. \quad (2.34)$$

Como para cada s em Γ , existe um k tal que $|s - s_k| \geq 1$, segue da condição de Hadarmard-Petrowsky (2.34) que

$$Re(s) \leq 1 + Re(s_k) \leq (1 + c_1) \Rightarrow e^{Re(s)t} \leq e^{(1+c_1)t} = e^{ct}$$

Portanto,

$$|\widehat{h}(t, \omega)| \leq \frac{N}{c_N} (1 + \|\omega\|^2)^n e^{ct}. \quad (2.35)$$

As derivadas no tempo t de $\widehat{h}(t, \omega)$ podem ser estimadas como segue. Utilizando (2.29), tem-se

$$|s| \leq (1 + |s_k|) \leq (1 + (1 + M_1 N)(1 + \|\omega\|)), \quad s \in \Gamma. \omega \|\quad (2.36)$$

Assim,

$$\left| \frac{\partial^j \widehat{h}(t, \omega)}{\partial t^j} \right| = \left| \frac{\mathcal{A}_N(\omega)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{s^j e^{st}}{P(s, \omega)} ds \right| \leq \frac{N}{c_N} (1 + \|\omega\|^2)^n (2 + M_1 N)^j (1 + \|\omega\|)^j e^{ct}.$$

Podemos escolher uma constante K tal que para $0 \leq t \leq T$, $\omega \in \mathbb{R}^d$, tem-se

$$\left| \frac{\partial^j \widehat{h}(t, \omega)}{\partial t^j} \right| \leq K(1 + \|\omega\|^2)^{N+j}. \quad (2.37)$$

Como os dados iniciais foram escolhidos em \mathcal{S} , segue que os dados transformados $\widehat{u}_k(\omega) = \mathcal{F}(u_k(x))$ estão no mesmo espaço. Portanto podem ser escolhidas constantes C e $r > N + j$ de modo que tal que

$$\left| \frac{\partial^j \widehat{h}(t, \omega)}{\partial t^j} \widehat{u}_k(t, \omega) \right| \leq C(1 + \|\omega\|^2)^{N+j-r}.$$

Esta última estimativa garante a inversão de $\widehat{u}(t, \omega)$. Para as derivadas na variável frequência $\frac{\partial^\alpha \widehat{u}(t, \omega)}{\partial \omega^\alpha}$, obtém-se uma estimativa análoga (2.37) e portanto, do tipo acima [33]. Conclui-se da condição de Hadamard-Petrowsky que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ e $T > 0$, existe uma constante $c = c(\alpha, T)$ e $N = N(\alpha, T)$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{k+\alpha} \widehat{u}(t, \omega)}{\partial t^k \partial \omega^\alpha} \right| \leq c(1 + \|\omega\|^2)^n \quad (2.38)$$

em $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. Portanto, $\widehat{u}(t, \omega)$ está em $C([0, T], \mathcal{S})$. A inversa será solução do problema de Cauchy no mesmo espaço. A solução será única, uma vez que qualquer solução satisfaz (2.5) e esta equação possui solução única. Também, devido a dependência continua em (2.5) com respeito dos dados iniciais transformados.

Teorema 2.1. *Suponha-se que o coeficiente principal $\mathcal{A}_N(\omega) = \mathcal{A}_j(\omega) = \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_{\alpha,j}(i\omega)^\alpha \neq 0$, $m_j \leq N - j$, $0 \leq j \leq N - 1$ para qualquer $\omega \in \mathbb{R}^d$ e que a condição de Hadamard-Petrowsky (2.33) é válida para $t > 0$ no problema de Cauchy*

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x) \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.39)$$

$$u(0, x) = u_0^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_0^1(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}}(0, x) = u_0^{N-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.40)$$

Então, para qualquer $u_k(x) \in \mathcal{S}$, $k=0:m-1$, existe uma única solução $u \in C([0, \infty), \mathcal{S})$ do problema de Cauchy. Além disso, a solução depende continuamente nos dados iniciais em \mathcal{S} .

OBSERVAÇÕES

1. A condição de Hadamard-Petrowsky para evolução descendente ($t < 0$) é $Re(s) \geq c_1$, $s = s(\omega)$ raiz de $P(s, \omega) = 0$. Para equações evolutivas com tempo ascendente e descendente é $|Re(s)| \leq c_2$.
2. Em [16] com $d = 1$, um sistema é dito parabólico quando as raízes de $P(s, \omega) = 0$ satisfazem $Re(s) \leq -C|\omega|^h + C - 1$, $C > 0$, $h > 0$ ou seja, uma restrição no crescimento dos dados ao infinito, e é dito hiperbólico quando as raízes possuem crescimento linearmente limitado $Re(s) \leq a|\omega| + b$ para ω complexo, e $Re(s) \leq C$ para s real, ou seja, não existe restrição no crescimento dos dados ao infinito.
3. A condição de Garding para sistemas hiperbólicos supõe que $P(s, \omega)$ é um polinômio homogêneo ($m_j = m - j$) de grau m e que as raízes de $P(s, i\omega) = 0$ são limitadas para qualquer real ω [16] pp.128.
4. Se a condição de Hadamard-Petrowsky não é satisfeita, então pode não existir solução para uma grande classe de dados ou falhar a dependência contínua em relação aos dados [33].
5. Para o caso não homogêneo com dado f em $C([0, \infty), \mathbb{S})$, a solução do problema de Cauchy existe, dada pela convolução e é única.

2.2.1 O Problema Não Homogêneo, Princípio de Duhamel

Se o problema (2.1)-(2.2) com $f(t, x) = 0$ satisfaz a condição de Hadamard-Petrowsky para evolução ascendente, então podemos resolver também o problema

de valor inicial não homogêneo

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x) \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.41)$$

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}}(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.42)$$

Em muitos problemas práticos $f(t, x)$ representa uma fonte externa ou uma excitação enquanto que no caso homogêneo, $f(t, x) = 0$, o problema é de movimento livre.

Se u é uma solução de (2.41), (2.42) em $C^\infty([0, \infty), \mathcal{S})$, então $\hat{u}(t, \omega) \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ satisfaz a equação diferencial ordinária não homogênea

$$\sum_{j=0}^N \mathcal{A}_j(\omega) \frac{\partial^j \hat{u}}{\partial t^j}(t, \omega) = \hat{f}(t, \omega) \quad (2.43)$$

$$\hat{u}(0, \omega) = 0, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \omega) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} \hat{u}}{\partial t^{N-1}}(0, \omega) = 0, \quad (2.44)$$

que, por (2.7), tem como solução

$$\hat{u}(t, \omega) = \int_0^t \hat{h}(t - \tau, \omega) \hat{f}(\tau, \omega) d\tau, \quad (2.45)$$

onde $\hat{u} \in C^\infty([0, \infty), \mathcal{S})$.

Teorema 2.2. *Se a condição de Hadamard-Petrowsky para a evolução ascendente é satisfeita para o problema de Cauchy*

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x) \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}}(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

então existe uma única solução $u \in C^\infty([0, \infty), \mathcal{S})$ do problema de Cauchy e essa solução é dada por (2.13).

3 PROBLEMAS EVOLUTIVOS EM DOMÍNIO LIMITADO

Em um domínio espacial limitado ¹ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, juntamente com uma equação diferencial parcial são consideradas, além dos valores iniciais, condições adicionais da incógnita u na fronteira do domínio Ω , ou seja, nos pontos $x \in \partial\Omega$. De maneira geral, considere-se o problema de valor inicial com condições de contorno

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x) \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = u_0^i(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1^i(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}}(0, x) = u_{N-1}^i(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$B_1 u(t, x) = q_1(t), \quad B_2 u(t, x) = q_2(t), \quad \dots, \quad B_m u(t, x) = q_m(t), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Aqui os B_k denotam operadores de contorno. Por exemplo, do tipo Dirichlet $u(t, x) = g_1(t)$, Neumann $\frac{\partial u(t, x)}{\partial n} = g_2(t)$, Robbin $\frac{\partial u(t, x)}{\partial n} + ku(t, x) = g_3(t)$, $x \in \partial\Omega$, ou misto $u(t, x) = g_1(t)$, $x \in \partial\Omega_1$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial n} = g_2(t)$, $x \in \Omega_2$. Os coeficientes A_j são operadores diferenciais espaciais com coeficiente constantes do tipo (2.3), isto é contendo somente derivadas com respeito a variável espacial $A_j = \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_{\alpha, j} D^\alpha$.

Denota-se por $m = \max(m_1, \dots, m_m)$ a ordem espacial da equação.

Com o uso da transformada de Laplace, o parâmetro de tempo t é transformado de tal modo a resultar uma equação diferencial com respeito à variável espacial x . Para $U(s, x) = \mathcal{L}(u(t, x))$ e aplicando-se, em (3.1), a propriedade da transformada de Laplace das derivadas

$$\mathcal{L}(u^{(k)}) = s^k U(s, x) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} u^j(0, x),$$

¹Uma região aberta, conexa e limitada no espaço considerado, usualmente em \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 , ou, \mathbb{R}^3 . É assumido que a fronteira é regular, isto é, cada uma de suas partes é descrita por uma função diferenciável.

resulta a equação operacional

$$\sum_{j=0}^N s^j A_j U(s, x) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i + F(s, x). \quad (3.4)$$

Rearranjando-se a expressão anterior, obtém-se

$$\left(\sum_{k=0}^N s^k A_k \right) U(s, x) = R(s, x), \quad x \in \Omega, \quad (3.5)$$

onde

$$R(s, x) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i + F(s, x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-j-1} s^i A_{j+1+i} \right] u_0^j + F(s, x). \quad (3.6)$$

Aqui, $u_0^i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(0, x)$ denotam as condições iniciais da solução; $U(s, x)$ e $F(s, x)$ denotam as transformadas da solução $u(t, x)$ e da excitação $f(t, x)$, respectivamente. Aplicando-se a transformada de Laplace nas condições de contorno (3.3), decorre que

$$B_1 U(s, x) = Q_1(s), B_2 U(s, x) = Q_2(s), \dots, B_m(s, x) U(s, x) = Q_m(s), x \in \partial\Omega. \quad (3.7)$$

De maneira abreviada, tem-se a equação operacional

$$\begin{aligned} \mathbb{L}U(s, x) &= R(s, x), \quad x \in \Omega \\ B_1 U(s, x) &= Q_1(s), B_2 U(s, x) = Q_2(s), \dots, B_m(s, x) U(s, x) = Q_m(s), \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde

$$\mathbb{L} = \sum_{k=0}^N s^k A_k = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha(s, x) D^\alpha, \quad (3.9)$$

para certas funções $b_k = b_k(s, x)$ que são polinomiais em s .

3.1 O Problema com Condições de Contorno Homogêneas

Suponha-se que as condições de contorno sejam homogêneas ($q_k(t) = 0$) e que a solução do problema de contorno estacionário $\mathbb{L}U(s, x) = R(s, x)$, $x \in \Omega$, $B_k U(s, x) = Q_k(s)$, $x \in \partial\Omega$ seja obtida com auxílio de uma função de Green espacial, isto é

$$U(s, x) = \int_{\Omega} H(s, x, \xi) R(s, \xi) d\xi \quad (3.10)$$

onde $H(s, x, \xi)$ é a *função de Green espacial* do problema (3.8) e satisfaz

$$\mathbb{L}H(s, x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in \Omega, \quad (3.11)$$

$$B_1 H(s, x, \xi) = 0, \dots, B_m H(s, x, \xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.12)$$

Substituindo $R(s, x)$, dado em (3.6), na expressão (3.10) resulta que,

$$U(s, x) = \int_{\Omega} H(s, x, \xi) \left[\sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i(\xi) \right] d\xi + \int_{\Omega} H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi. \quad (3.13)$$

Definindo-se que

$$h(t, x, \xi) = \mathcal{L}^{-1}[H(s, x, \xi)] \quad (3.14)$$

e considerando a propriedade da função $h(t, x, \xi)$

$$\begin{aligned} h(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s H(s, x, \xi) &= 0 \\ \dot{h}(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 H(s, x, \xi) &= 0 \\ &\vdots &\vdots \\ h^{N-2}(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N-1} H(s, x, \xi) &= 0 \\ A_N h^{N-1}(0, x, \xi) &= A_N \lim_{s \rightarrow \infty} s^N H(s, x, \xi) &= \delta(x - \xi) \end{aligned} \quad (3.15)$$

no sentido que para $\phi(x)$ contínua

$$\int_{\Omega} A_N h^{N-1}(0, x, \xi) \phi(\xi) d\xi = \phi(x),$$

ou de maneira abreviada

$$A_N h^{N-1}(0, x, \xi) = \delta(x - \xi).$$

Deste modo

$$s^k H(s, x, \xi) = \mathcal{L}(h^k(t, x, \xi)), \quad k = 0 : N - 1, \quad (3.16)$$

aplicando a transformada inversa de Laplace em 3.13 e usando o fato de que a inversa do Laplaciano do produto é a convolução da inversa dos Laplacianos, a solução de (3.1) pode ser expressa por

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\Omega} h_j(t, x, \xi) u_0^j(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.17)$$

onde

$$h_j(t, x, \xi) = \sum_{i=0}^{N-j-1} \frac{\partial^i h(t, x, \xi)}{\partial t^i} A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N - 1. \quad (3.18)$$

Esta representação ilustra uma distribuição espacial da solução, a qual pode ser simplificada com a introdução da *solução dinâmica* ou *resposta impulso* ou, ainda, *operador de Green temporal* $\mathbf{h}(t)$ do sistema (3.1), definida através do operador integral

$$\mathbf{h}(t)\phi(x) = \int_{\Omega} h(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (3.19)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é a inversa da transformada de Laplace da função de Green $H(s, x, \xi)$ do problema de contorno definido pelas equações (3.7) e (3.8).

Com a introdução da solução dinâmica, a saída pode ser escrita na forma evolutiva

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) u^{(j)} + \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (3.20)$$

onde

$$\mathbf{h}_j(t) \phi(x) = \int_{\Omega} h_j(t, x - \xi) \phi(\xi) d\xi \quad (3.21)$$

são os operadores complementares ou propagadores secundários e \mathbf{f} é a curva em t com os valores funcionais $\mathbf{f}(t) = f(t, x)$. Como visto anteriormente para o caso de problemas em domínio ilimitado, tem-se a base dinâmica de operadores

$$\{\mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t), \dots, \mathbf{h}^{(N-1)}(t)\}, \quad (3.22)$$

ou a base dinâmica normalizada com o uso dos operadores secundários

$$\{\mathbf{h}_0(t), \mathbf{h}_1(t), \dots, \mathbf{h}_{N-1}(t)\}. \quad (3.23)$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}_0(t) & \mathbf{h}_1(t) & \dots & \mathbf{h}_{m-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(t) & \dot{\mathbf{h}}(t) & \dots & \mathbf{h}^{m-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_N \\ A_2 & A_3 & \dots & A_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{N-1} & A_N & 0 & \dots & 0 \\ A_N & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Para condições iniciais nulas, tem-se a resposta forçada

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\Omega} h(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.25)$$

ou, na forma compacta

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na solução dinâmica (3.19) obtém-se o *operador de transferência* $\mathbf{H}(s)$ atuando sobre funções de variável espacial

$$\mathbf{H}(s)\phi(x) = \int_{\Omega} H(s, x, \xi) \phi(\xi) d\xi, \quad (3.27)$$

que vem a ser o operador inverso do operador

$$\mathbb{L} = \sum_{j=0}^N s^j A_j, \quad (3.28)$$

definido sobre funções que satisfaçam as condições de contorno (3.7), ou seja,

$$\mathbb{L}\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbb{L} = \mathbf{I}. \quad (3.29)$$

Desta forma a relação (3.13), com condições iniciais nulas, pode ser escrita como

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{F}(s) \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{U}(s)$ e $\mathbf{F}(s)$ são funções com valores distribuídos espacialmente, isto é, $\mathbf{U}(s)(x) = U(s, x)$ e $\mathbf{F}(s)(x) = F(s, x)$.

A validade da fórmula de variação de parâmetros, acima obtida, certamente requer da existência da função de Green espacial $H(s, x, \xi)$ bem como justificar a realização da sua inversão pelo método da transformada de Laplace. A verificação deste processo não é tarefa fácil. A teoria dos semigrupos fortemente contínuos foi desenvolvida com este propósito [21], [31], [39], [11]. Porém, esta teoria é limitada ao caso $N = 1$ e eventuais reduções de equações de ordem superior para primeira ordem através da transformação de Hamilton-Kelvin ou matriz companheira.

Neste trabalho, uma boa parte das equações consideradas são do tipo clássico em que as funções de Green, na maioria das vezes, podem ser expandidas em série bilinear em termos de autofunções, ou seja, problemas de natureza simétrica.

3.2 O Problema com Condições de Contorno Não Homogêneas

No caso de condições de contorno não-homogêneas na equação operacional (3.8), é conveniente introduzir a equação operacional *adjunta* através do conceito de operador diferencial adjunto. Suponha-se que $\mathbb{L}u = \sum_{|\alpha| \leq m_j} a_\alpha(x) D^\alpha u$ atua sobre funções u que satisfazem as condições de contorno $B_k u = 0, k = 1 : m$. Define-se, com respeito ao produto interno

$$\langle y, z \rangle = \int_{\Omega} y(x) z(x) dx,$$

o operador adjunto

$$\mathbb{L}^* v = \sum_{|\alpha| \leq m_j} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) v)$$

atuando sobre funções v tais que na identidade de Lagrange-Green

$$\langle y, \mathbb{L}z \rangle = \langle \mathbb{L}^* y, z \rangle + \int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(y, z) d\sigma_x, \quad (3.31)$$

o termo integral com a forma bilinear \mathbf{B} se anula. Aqui \mathbf{B} é do tipo $n \cdot \mathbb{B}$, n um vetor normal exterior a fronteira $\partial\Omega$ e \mathbb{B} , sendo um vetor cujas componentes são formas bilineares em y, z . Este é o caso quando v satisfaz certas condições

$$B_1^* v = 0, B_2^* v = 0, \dots, B_m^* v = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (3.32)$$

chamadas de *condições de contorno adjuntas*, [24],[12].

Dado o problema operacional com condições de contorno não-homogêneas

$$\mathbb{L}U(s, x) = R(s, x), \quad (3.33)$$

$$B_k U(s, x) = Q_k(s), \quad k = 1 : m \quad (3.34)$$

e seja $H^*(s, x, \xi)$ a função de Green do operador adjunto \mathbb{L}^* , isto é

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^* H^*(s, x, \xi) &= \delta(x - \xi), \quad x, \xi \text{ em } \Omega \\ B_1^* H &= 0, B_2^* H = 0, \dots, B_m^* H = 0, \quad x \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.35)$$

As seguintes propriedades da função de Green adjunta serão de utilidade:

$$H^*(s, x, \xi) = H(s, \xi, x), \quad (3.36)$$

$$\mathbb{L}_\xi^* H^*(s, \xi, x) = \delta(\xi - x). \quad (3.37)$$

Se multiplicarmos (3.33) por $H^*(s, \xi, x)$ em ambos os lados e integrarmos com respeito a ξ , obtemos

$$\int_{\Omega} H^*(s, \xi, x) \mathbb{L}_\xi U(s, \xi) d\xi = \int_{\Omega} R(s, \xi) H^*(s, \xi, x) d\xi. \quad (3.38)$$

Usando a identidade de Lagrange-Green, obtém-se

$$\int_{\Omega} U(s, \xi) \mathbb{L}_\xi^* H^*(s, \xi, x) d\xi + \int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(U(s, \xi), H^*(s, \xi, x)) d\sigma(\xi) = \int_{\Omega} H^*(s, \xi, x) R(s, \xi) d\xi. \quad (3.39)$$

Como $\mathbb{L}_\xi^* H^*(s, \xi, x) = \delta(\xi - x)$, pela propriedade da função delta, decorre

$$U(s, x) = \int_{\Omega} H(s, x, \xi) R(s, \xi) d\xi - \int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(U(s, \xi), H(s, x, \xi)) d\sigma(\xi). \quad (3.40)$$

Substituindo $R(s, x)$, dado em (3.6) na expressão (3.40), resulta que

$$\begin{aligned}
 U(s, x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{N-j-1} [H(s, x, \xi) s^i A_{j+1+i} u_0^j(\xi)] d\xi \\
 &\quad - \int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(U(s, \xi), H(s, x, \xi)) d\sigma(\xi) + \int_{\Omega} H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Assim,

$$\boxed{u(t, x) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\Omega} h_j(t, x, \xi) u_0^j(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\Omega} h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi + \mathbb{J}(u, h)(t, x)} \tag{3.42}$$

onde

$$\boxed{\mathbb{J}(u, h)(t, x) = - \int_{\partial\Omega} \mathcal{L}^{(-1)} [\mathbf{B}(U(s, \xi), H(s, x, \xi))] d\sigma}$$

é o termo que carrega as condições de contorno não-homogêneas. De maneira compacta

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{h}^{j-1-i}(t) A_j u_0^i + \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{J}(u, h)}, \tag{3.43}$$

onde $\mathbf{J}(u, h)$ denota uma curva em t com valores $\mathbb{J}(u, h)(t, x)$ e \mathbf{f} é a curva em t com os valores funcionais $\mathbf{f}(t) = f(t, x)$.

OBSERVAÇÃO

Para as equações do tipo parabólico e hiperbólico

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + A_0 u &= f(t, x) \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial t} + A_0 u &= f(t, x)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_0 u &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha D^\alpha u + \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha D^\alpha u + cu \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \\
A_1 u &= \alpha u(t, x),
\end{aligned}$$

com a condição de existir $\sigma > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \sigma \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

consideram-se, além das condições iniciais, a condição de contorno:

$$Bu = c(x)u(t, x) + \sum_{i=1}^n a_i x \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} = g(t, x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.44)$$

Tem-se

$$J(u, h) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} g(\xi, \tau) \Lambda(t - \tau, x, \xi) d\partial\Omega_\xi d\tau. \quad (3.45)$$

A função $\Lambda(t, x, \xi)$ envolvida no integrando de (3.45) pode ser expressa via função de Green $h(t, x, \xi)$. As fórmulas correspondentes para $\Lambda(t, x, \xi)$ são dadas na tabela (3.1) para três tipos básicos de problemas de contorno [32].

Forma das condições de contorno	Função $\Lambda(x, \xi, t, \tau)$
$u = g(t, x)$ para $x \in \Omega$	$\Lambda(t, x, \xi) = -\frac{\partial h}{\partial M_y}(t, x, \xi)$
$\frac{\partial u}{\partial M_x} = g(t, x)$ para $x \in S$	$\Lambda(t, x, \xi) = h(t, x, \xi)$
$\frac{\partial u}{\partial M_x} + ku = g(t, x)$ para $x \in \Omega$	$\Lambda(t, x, \xi) = h(t, x, \xi)$

Tabela 3.1 Forma da função $\Lambda(t, x, \xi)$ para os tipos básicos de problemas de contorno não estacionários

Aqui,

$$\frac{\partial h}{\partial M_x} = \sum_{i,j}^n a_{ij} N_j \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial h}{\partial M_y} = \sum_{i,j}^n a_{ij} N_j \frac{\partial h}{\partial y_i} \quad (3.47)$$

onde $\mathbf{n} = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ é a normal unitária exterior a superfície $\partial\Omega$.

OBSERVAÇÃO 2

Se tomarmos $\partial\Omega_i$ ($i = 1, \dots, p$) sendo diferentes porções da superfície $\partial\Omega$ tal que $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^p \partial\Omega_i$ e tomando-se as condições de contorno sobre $\partial\Omega_i$,

$$u = g_i(x, t) \quad \text{para } x \in \partial\Omega_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

então

$$J(u, h) = \sum_{i=1}^p \int_0^t \int_{\partial\Omega_i} g_i(\xi, \tau) \Lambda_i(t - \tau, x, \xi) d\partial\Omega_\xi d\tau \quad (3.48)$$

3.3 O Método Espectral no Cálculo da Função de Green Espacial

A equação homogênea

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = 0 \quad (3.49)$$

possuirá soluções do tipo exponencial

$$u(t, x) = e^{\lambda t} v(x), \quad (3.50)$$

com v não identicamente nula, que satisfazem as condições de contorno homogêneas

$$B_1 u(t, x) = 0, \quad B_2 u(t, x) = 0, \quad \dots, \quad B_m u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

quando o problema de autovalor

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(\lambda)v &= \sum_{k=0}^N \lambda^k A_k v(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_{\lambda, \alpha}(\lambda, x) D^\alpha v(x) = 0, \\ B_1 v(x) &= 0, \quad B_2 v(x) = 0, \quad \dots, \quad B_m v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.51)$$

possuir uma solução não identicamente nula.

Suponha-se que os coeficientes do operador \mathbb{L} são reais. É fato conhecido que se \mathbb{L} for simétrico, ou seja,

$$\int_{\Omega} v(x) \mathbb{L}u(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \mathbb{L}v(x) dx,$$

então os autovalores serão reais e as autofunções correspondentes a diferentes autovalores vem a ser ortogonais. Supondo a existência de um conjunto discreto de autovalores e que as correspondentes autofunções são completas no espaço das funções contínuas, o principio da superposição pode ser utilizado para procurar obter a resposta dinâmica como uma expansão dessas soluções exponenciais. Em particular, utilizando o método de variação de parâmetros, a resposta forçada pode ser escrita na forma

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\Omega} h(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(t-\tau)} v_j(x) v_j(\xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau,$$

onde as autofunções $v_k(x)$ são normalizadas. Assim, tem-se a expansão em autofunções

$$h(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} v_j(x) v_j(\xi), \quad (3.52)$$

Decorre a expansão para a função de transferência

$$H(s, x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j(x) v_j(\xi)}{s - \lambda_j} \quad (3.53)$$

usando a transformada de Laplace.

Quando não existir simetria, podem ser consideradas as autofunções do operador adjunto uma vez que verifica-se bi-ortogonalidade: para autovalores diferentes, as correspondentes autofunções $u(x)$ do problema de autovalor original e $v(x)$ autofunção do problema de autovalor adjunto são ortogonais com respeito do produto interno usual de funções. Nesta situação, e com uma adequada indexação dos autovalores, tem-se

$$h(t, x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_k e^{\lambda_j t} u_j(x) v_j(\xi), \quad (3.54)$$

$$H(s, x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_k \frac{u_j(x) v_j(\xi)}{s - \lambda_j}. \quad (3.55)$$

Aqui os γ_k são constantes apropriadas para substituir a normalização existente do caso simétrico. Para maiores detalhes, nos referimos ao trabalho de Copetti [8] para o caso de sistemas de primeira e de segunda ordem.

3.4 O Caso Unidimensional

Para o caso unidimensional $d = 1$ uma justificativa rigorosa do método da transformada de Laplace para equações de primeira e de segunda ordem do tipo parabólico e hiperbólico, em que o coeficiente A_0 é um operador do tipo Sturm-Liouville, pode ser encontrada em [19],[20]. Uma discussão sobre a existência e cálculo da função de Green espacial pode ser encontrada em [27], [30], [9], [29], [3].

Os coeficientes A_j da equação 3.1 podem ser escritos como

$$A_j w(x) = \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x) \frac{d^k w}{dx^k}, \quad j = 0 : N. \quad (3.56)$$

O valor do parâmetro $m = \max(m_1, \dots, m_N)$ corresponde a ordem espacial da equação, isto é, ao valor máximo das derivadas que aparecem nestes coeficientes.

Como condições de contorno B_k , $k = 1 : m$, considera-se, de maneira genérica, combinações lineares de valores de u e suas derivadas nos pontos extremos do intervalo $\Omega = [0, L]$, isto é,

$$\begin{aligned} B_k u(t, x) = & \alpha_{0k} u(t, 0) + \alpha_{1k} \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + \dots + \alpha_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} u(t, 0)}{\partial x^{m-1}} + \\ & + \beta_{0k} u(t, L) + \beta_{1k} \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} + \dots + \beta_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} u(t, L)}{\partial x^{m-1}} \end{aligned}$$

Deste modo, a equação operacional (3.5) pode ser escrita

$$\begin{aligned} \mathbb{L}U(s, x) &= R(s, x) \\ B_1 U(s, x) &= 0, B_2 U(s, x) = 0, \dots B_m U(s, x) = 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde para certas funções $b_j(s, x)$

$$\mathbb{L} = \sum_{j=0}^m b_j(s, x) \frac{d^j}{dx^j}. \quad (3.58)$$

Matricialmente, as condições de contorno podem ser escritas na forma

$$\mathcal{B}\mathcal{U} = 0, \quad (3.59)$$

onde

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m-1,1} & \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{m-1,1} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m-1,2} & \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{m-1,2} \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{0m} & \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{m-1,m} & \beta_{01} & \beta_{1m} & \beta_{2m} & \cdots & \beta_{m-1,m} \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} U(s, 0) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(s, 0) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-1}}(s, 0) \\ U(s, L) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(s, L) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-1}}(s, L) \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

No que segue, será assumido que o posto da matriz \mathcal{B} é exatamente m .

A prova do seguinte resultado pode ser encontrada em [27].

Teorema 3.1. *Seja $\mathbb{L} = \sum_{j=0}^m b_j(x) \frac{d^j}{dx^j}$ com coeficientes $b_k(x)$ contínuos num intervalo $[0, L]$ e que o coeficiente $b_m(x)$ da derivada de ordem m é positivo nesse intervalo. Seja $\{h_k(x), k = 0 : m - 1\}$ uma base de soluções da equação homogênea $\mathbb{L}U=0$. Suponha-se que a matriz $\mathbb{B} = [B_i(h_{j-1})]$ de ordem $m \times m$ é não singular,*

isto é, $\lambda = 0$ não é autovalor do problema homogêneo $\mathbb{L}U = 0$, $B_k U = 0$, $k = 1 : m$.
Então, para cada $R(x)$ contínua o problema de contorno

$$\mathbb{L}U(x) = R(x) \quad (3.62)$$

$$B_1 U(s, x) = 0, B_2 U(s, x) = 0, \dots B_m U(s, x) = 0$$

possui solução única dada pela integral

$$U(x) = \int_0^L H(x, \xi) R(\xi) d\xi, \quad (3.63)$$

onde $H(x, \xi)$ é definida como sendo

$$H(x, \xi) = \frac{\mathcal{H}(x, \xi)}{\mathcal{D}(x, \xi)}. \quad (3.64)$$

Aqui

$$\mathcal{H}(x, \xi) = \det \begin{bmatrix} g(x, \xi) & h_0(x) & h_1(x) & \cdots & h_{m-1}(x) \\ B_1(g) & B_1(h_0) & B_1(h_1) & \cdots & B_1(h_{m-1}) \\ B_2(g) & B_2(h_0) & B_2(h_1) & \cdots & B_2(h_{m-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{m-1}(g) & B_{m-1}(h_0) & B_{m-1}(h_1) & \cdots & B_{m-1}(h_{m-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

onde

$$g(x, \xi) = \frac{\text{sign}(x - \xi) Q(x, \xi)}{2b_m(\xi) W(s, \xi)}, \quad (3.66)$$

$$Q(x, \xi) = (-1)^{m-1} \det \begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & \cdots & h_{m-1}(x) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \cdots & \dot{h}_{m-1}(\xi) \\ \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \cdots & \ddot{h}_{m-1}(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_0^{(m-1)}(\xi) & h_1^{(m-1)}(\xi) & \cdots & h_{m-1}^{(m-1)}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$W(s, \xi) = \det \begin{bmatrix} h_0(\xi) & h_1(\xi) & \cdots & h_{m-1}(\xi) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \cdots & \dot{h}_{m-1}(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_0^{(m-1)}(\xi) & h_1^{(m-1)}(\xi) & \cdots & h_{m-1}^{(m-1)}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

e

$$\mathcal{D}(x, \xi) = \det \begin{bmatrix} B_1(h_0) & B_1(h_1) & \cdots & B_1(h_{m-1}) \\ B_2(h_0) & B_2(h_1) & \cdots & B_2(h_{m-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_m(h_0) & B_m(h_1) & \cdots & B_m(h_{m-1}) \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Corolário 3.1. *A função de Green $H(x, \xi)$ é a única função contínua com a propriedade (3.63). Além disso, verifica*

- $H(x, \xi), \frac{\partial^k H}{\partial x^k}, k = 1 : m - 2$ são contínuas para x, ξ no intervalo $[0, L]$;
- $b_m(\xi) \left[\frac{\partial^k H}{\partial x^k}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial^k H}{\partial x^k}(\xi^-, \xi) \right] = 1$;
- Para cada ξ arbitrário e fixo $\mathbb{L}H(x, \xi) = 0$;
- H satisfaz as condições de contorno do problema: $B_k H = 0, k = 1 : m$.

De maneira abreviada

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Para cada } \xi \in [0, L], \mathbb{L}H(s, x, \xi) = \delta(x - \xi) \\ B_k H = 0, k = 1 : m. \end{array}} \quad (3.70)$$

OBSERVAÇÃO

Com o uso do teorema acima e do corolário, pode ser estudada a validade de $h(t, x, \xi)$ como função de Green temporal (3.14). Certamente, o estudo está sujeito ao comportamento assintótico de $H(s, x, \xi)$.

3.4.1 A Base Dinâmica Fundamental

Uma das bases de soluções $\{h_k(x), k = 0 : m - 1\}$ que usualmente mais simplifica o cálculo do determinante $\mathcal{D}(x, \xi)$ da matriz $\mathbb{B} = [B_i(h_{j-1})]$, é a *base fundamental ou dinâmica* gerada por uma *solução fundamental* ou *solução dinâmica* ou *resposta impulso* ou *função de Green de valor inicial* e suas derivadas [4], [27], [29]:

$$h_j(x) = h^{(m-j)}(x, a), \quad a \in [0, L], \quad j = 0 : m - 1, \quad (3.71)$$

onde a é fixo e $h(x, \xi)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbb{L}h(x, \xi) &= \sum_{j=0}^m b_j(x) \frac{\partial^j h(x, \xi)}{\partial x^j} = 0, \\ h(\xi, \xi) &= 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(\xi, \xi) = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{m-2} h}{\partial x^{m-2}}(\xi, \xi) = 0, \\ b_m(\xi) \frac{\partial^{m-1} h}{\partial x^{m-1}}(\xi, \xi) &= 1. \end{aligned} \quad (3.72)$$

No caso dos coeficientes serem constantes, a solução fundamental simplifica-se para $h_m(x) = h(x - a)$, em particular, com $a = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{L}h(x) &= \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j h(x)}{dx^j} = 0, \\ h(0) &= 0, \quad \dot{h}(0) = 0, \dots, \quad h^{(m-2)}(0) = 0, \quad b_m h^{(m-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $h(x)$ gera a base

$$\{h(x), h'(x), \dots, h^{(m-1)}(x)\}.$$

Introduzindo-se as funções

$$h_j(x) = \sum_{i=0}^{m-j-1} h^{(i)}(x)b_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : m-1, \quad (3.73)$$

as quais podem ser denotadas matricialmente por

$$\begin{pmatrix} h_0(x) & h_1(x) & \cdots & h_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) & \dot{h}(x) & \cdots & h^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_m \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ b_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

a solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbb{L}U(x) &= \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j U(x)}{dx^j} = r(x), \\ U(0) &= U_0^0, \dot{U}(0) = U_0^1, \dots, U^{(m-1)}(0) = U_0^{(m-1)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

escreve-se de maneira explícita em relação aos valores iniciais como

$$U(x) = \sum_{j=0}^{m-1} h_j(x)U_0^j + \int_0^x h(x-\xi)r(\xi)d\xi. \quad (3.76)$$

Pode ser verificado, por substituição direta, que $h(x)$ é dada pela integral de Cauchy

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\lambda x}}{P(\lambda)} d\lambda, \quad (3.77)$$

onde Γ é um contorno fechado no plano complexo que contém no seu interior as raízes do polinômio característico $P(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$. No caso que $P(z)$ possui m

raízes diferentes λ_k , $k = 1 : m$, obtém-se que

$$h(x) = \sum_{k=1}^m \frac{e^{\lambda_k x}}{P'(\lambda_k)}. \quad (3.78)$$

Para o caso de coeficientes não constantes, veja-se [27] e [9].

3.4.2 O Caso de Condições de Contorno Não Homogêneas

No caso de condições de contorno não-homogêneas na equação operacional (3.8), é conveniente introduzir a equação operacional *adjunta* através do conceito de operador diferencial adjunto.

3.4.2.1 O Operador Adjunto

Dada a expressão diferencial $\mathbb{L} = \sum_{k=0}^m b_k(s, x) D^k$, $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$, define-se a expressão diferencial adjunta:

$$\mathbb{L}^* z = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^{(k)}(b_k z), \quad D = \frac{d}{dx} \quad (3.79)$$

Com relação ao produto interno ²

$$\langle y, z \rangle = \int_0^L y(x) z(x) dx, \quad (3.80)$$

tem-se a identidade de Lagrange-Green [27]

$$\langle y, \mathbb{L}z \rangle = \langle \mathbb{L}^* y, z \rangle + \mathbf{B}(y, z)|_0^L \quad (3.81)$$

²No caso de funções com valores complexos, considera-se o produto interno complexo $\langle y, z \rangle = \int_0^L \bar{y}(x) z(x) dx$.

onde \mathbb{B} é a forma bilinear de contorno [7]

$$\mathbb{B}(y, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} D^{(k-j)} [b_k y] D^{(j-1)} z. \quad (3.82)$$

Com a inclusão dos valores de y , z no contorno, a expressão

$$\mathbb{B}(y, z) = \mathbb{B}(y, z) \Big|_0^L$$

pode ser escrita como uma forma bilinear de maneira matricial

$$\mathbb{B}(y, z) = \mathbf{z}^T \mathbb{P} \mathbf{y} \quad (3.83)$$

para uma certa matriz \mathbb{P} de ordem $2m \times 2m$ e onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ \vdots \\ y_0^{(m-1)} \\ y_L \\ y'_L \\ \vdots \\ y_L^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z'_0 \\ \vdots \\ z_0^{(m-1)} \\ z_L \\ z'_L \\ \vdots \\ z_L^{(m-1)} \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

com $y^{(k)}(s) = y_s^{(k)}$, $s = 0 : L$; $z^{(k)}(s) = z_s^{(k)}$, $s = 0 : L$ e \mathbb{P} é a matriz de ordem $2m \times 2m$. Veja-se [6], [7], [9], para a matriz \mathbb{P} em termos de suas componentes. Seja A uma matriz não-singular de ordem $2m \times 2m$ na qual as primeiras m linhas são os

coeficientes das condições de contorno $B_k y = 0$, $k = 1 : m$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m-1,1} & \beta_{01} & \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{m-1,1} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m-1,2} & \beta_{02} & \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{m-1,2} \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{0m} & \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{m-1,m} & \beta_{01} & \beta_{1m} & \beta_{2m} & \cdots & \beta_{m-1,m} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

Defina-se a matriz $A_* = A^{-T} \mathbb{P}^T$ de ordem $2m \times 2m$ e escreva-se na forma de componentes

$$A_* = \begin{bmatrix} \alpha_{01}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & \cdots & \alpha_{m-1,1}^* & \beta_{01}^* & \beta_{11}^* & \beta_{21}^* & \cdots & \beta_{m-1,1}^* \\ \alpha_{02}^* & \alpha_{12}^* & \alpha_{22}^* & \cdots & \alpha_{m-1,2}^* & \beta_{02}^* & \beta_{12}^* & \beta_{22}^* & \cdots & \beta_{m-1,2}^* \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{0m}^* & \alpha_{1m}^* & \alpha_{2m}^* & \cdots & \alpha_{m-1,m}^* & \beta_{01}^* & \beta_{1m}^* & \beta_{2m}^* & \cdots & \beta_{m-1,m}^* \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

Assim,

$$\mathbb{B}(y, z) = (A_*^T z)^T (Ay)$$

Introduzindo

$$A_k^* z = \begin{bmatrix} \alpha_{01}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & \cdots & \alpha_{m-1,1}^* & \beta_{01}^* & \beta_{11}^* & \beta_{21}^* & \cdots & \beta_{m-1,1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z'_0 \\ \vdots \\ z_0^{(m-1)} \\ z_L \\ z'_L \\ \vdots \\ z_L^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

$$k = 1 : 2m$$

e utilizando a definição de y , z tem-se

$$\mathbb{B}(y, z) = \begin{bmatrix} A_1^* z & A_1^* z & \cdots & A_{2m}^* z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 y \\ B_2 y \\ \vdots \\ B_{2m} y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2m} A_k^* z B_k y. \quad (3.88)$$

Para condições de contorno homogêneas

$$B_1 y = 0, B_2 y = 0, \dots, B_m y = 0, \quad (3.89)$$

segue

$$\mathbb{B}(y, z) = \begin{bmatrix} A_1^* z & A_2^* z & \cdots & A_{2m}^* z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_{m+1} y \\ \vdots \\ B_{2m} y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m A_{m+k}^* z B_{m+k} y. \quad (3.90)$$

Como as condições de contorno $B_{m+k}y$ são fictícias, isto é, não foram dadas, decorre que a forma bilinear \mathbb{B} anula-se ao escolher as seguintes *condições de contorno adjuntas*

$$\begin{aligned} B_1^*z &= A_{m+1}^*z = 0 \\ B_2^*z &= A_{m+2}^*z = 0 \\ &\vdots \\ B_m^*z &= A_m^*z = 0. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Observe-se que estas condições correspondem simplesmente as últimas linhas da matriz \mathbb{A}^* .

Dado o operador

$$\mathbb{L}y = \sum_{k=0}^m b_k D^k y, \text{ no espaço } \{ y \in C^{(m)}[0, L] \text{ tal que } B_1 y = 0, B_2 y = 0, \dots, B_m y = 0 \}$$

define-se seu *operador adjunto* como sendo o operador

$$\mathbb{L}^*z = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^{(k)}(b_k z), \text{ no espaço } \{ z \in C^{(m)}[0, L] \text{ tal que } B_1^*z = 0, B_2^*z = 0, \dots, B_m^*z = 0 \},$$

onde as condições de contorno B_k^*z foram definidas segundo o processo que leva a (3.91). Decorre que para \mathbb{L} e seu adjunto \mathbb{L}^* :

$$\langle y, \mathbb{L}z \rangle = \langle \mathbb{L}^*y, z \rangle. \tag{3.92}$$

Um operador \mathbb{L} é dito auto-adjunto quando coincide com seu adjunto:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}^* \tag{3.93}$$

isto é,

$$\sum_{k=0}^m b_k D^k y = \sum_{k=0}^m (-1)^k D^{(k)}(b_k y) \tag{3.94}$$

$$B_1 y = B_1^* y = 0, B_2 y = B_2^* y = 0, \dots, B_m y = B_m^* y = 0, \tag{3.95}$$

3.4.2.2 Exemplos

A seguir, encontram-se exemplos ilustrativos para obtenção das condições de contorno adjuntas. No segundo exemplo, o número de condições de contorno é menor do que a ordem da equação diferencial.

EXEMPLO 1

Considere-se o problema de determinar as condições de contorno adjuntas do seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}\theta'''(x) - 2\theta'(x) + \theta(x) &= f(x) \\ \theta(0) + \theta''(0) + 2\theta'(L) &= 0\end{aligned}\tag{3.96}$$

$$\theta(0) - 2\theta'(0) + \theta(L) + \theta''(L) = 0\tag{3.97}$$

$$\theta(0) + \theta'(0) - \theta''(0) + \theta(L) - 3\theta'(L) + \theta''(L) = 0\tag{3.98}$$

$$(3.99)$$

Aqui a ordem da equação é $m=3$ e tem-se 3 condições de contorno dadas. Da identidade de Lagrange-Green com $\mathbb{L} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1$, vem

$$\int_0^L v\mathbb{L}u dx = \int_0^L \mathbb{L}^*v u dx + \mathbf{B}(u, v)|_0^L$$

onde a forma bilinear \mathbf{B} , após integração por partes, é dada por

$$\mathbf{B}(u, v) = -2uv + u''v - u'v' + uv''.$$

Assim, na forma matricial

$$\mathbb{B}(u, v) = \mathbb{B}(u, v)|_0^L = \mathbf{v}^T \mathbb{P} \mathbf{u}$$

$$= \begin{bmatrix} v(0) & v'(0) & v''(0) & v(L) & v'(L) & v''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u''(0) \\ u(L) \\ u'(L) \\ u''(L) \end{bmatrix}$$

A primeira linha da matriz A é constituída pelos coeficientes da condição de contorno dada, e as seguintes linhas escolhidas de modo que a matriz A seja não singular.

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da relação

$$\mathbb{B}(u, v) = \mathbf{v}^T \mathbb{P} \mathbf{u} = \mathbf{v}^T (\mathbb{P} A^{-1}) A \mathbf{u} = \mathbf{v}^T A_*^T A \mathbf{u},$$

a matriz que fornecerá as condições de contorno adjuntas será

$$A_*^T = \mathbb{P} A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$B^*v = \mathbf{v}^T \mathbb{P}A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} v(0) & v'(0) & v''(0) & v(L) & v'(L) & v''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^*v = [3v(0) - v'(0), -2v(0) + 2v(L), v(L) + v'(L) - v''(L), 2v(0) - v'(L), \\ -5v(0) + v''(0) - 2v(L) + v'(L) + v''(L), -6v(0) - v'(0) + 4v(L) + 3v'(L) - 2v''(L), \\ -3v(L) + v''(L)]$$

Como as condições de contorno dadas correspondem as três primeiras componentes de

$$Bu = Au = \begin{bmatrix} u(0) + u''(0) + 2u'(L) \\ u(0) + u'(x) - u''(0) + u(L) - 3u'(L) + u'(L) = 0 \\ u(0) - 2u'(0) + u(L) + u''(L) \\ u(0) \\ u'(0) \\ u''(L) \end{bmatrix},$$

segue que as condições de contorno adjuntas são as três últimas componentes de B^*v .

$$B_1^*v = -5v(0) + v''(0) - 2v(L) + v'(L) + v''(L) = 0$$

$$B_2^*v = -6v(0) - v'(0) + 4v(L) + 3v'(L) - 2v''(L) = 0$$

$$B_3^*v = -3v(L) + v''(L) = 0$$

EXEMPLO 2

Considere-se o problema de determinar as condições de contorno adjuntas do seguinte problema de valor de contorno [8]:

$$\begin{aligned}\theta''(x) &= f(x) \\ \theta(0) + 2\theta'(L) &= 0.\end{aligned}\tag{3.100}$$

Aqui a ordem da equação é $m=2$, porém somente uma condição de contorno é dada.

Da identidade de Lagrange-Green com $\mathbb{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, vem

$$\int_0^L \mathbb{L}u dx = \int_0^L \mathbb{L}^*v u dx + \mathbb{B}(u, v)|_0^L$$

tem-se que a forma bilinear \mathbb{B} , após integração por partes, é dada por

$$\mathbb{B}(u, v) = (vu' - v'u),$$

a qual pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(u, v) &= \mathbf{v}^T \mathbb{P} \mathbf{u} = \mathbb{B}(u, v)|_0^L \\ &= \begin{bmatrix} v(0) & v'(0) & v(L) & v'(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u(L) \\ u'(L) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.101}$$

A primeira linha da matriz A é constituída pelos coeficientes da condição de contorno dada, e as seguintes linhas escolhidas de modo de que a matriz A seja não singular.

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da relação

$$\mathbb{B}(u, v) = \mathbf{v}^T \mathbb{P} \mathbf{u} = \mathbf{v}^T (\mathbb{P} A^{-1}) A \mathbf{u} = \mathbf{v}^T A_*^T A \mathbf{u}$$

A matriz que fornecerá as condições de contorno adjuntas é

$$A_*^T = \mathbb{P} A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{aligned} B^* v &= \mathbf{v}^T \mathbb{P} A^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} v(0) & v'(0) & v(L) & v'(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v'(0) & -v(0) & -\frac{1}{2}v'(L) & -2v'(0) + v(L) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como a condição de contorno original $u(0) + 2u'(0) = 0$, corresponde a primeira componente de

$$B u = A u = \begin{bmatrix} u(0) + 2u'(0) \\ u'(0) \\ 2u(L) \\ u'(L) \end{bmatrix},$$

segue que as condições de contorno adjuntas são

$$B_1^* v = -2v'(0) + v(L) = 0, \quad B_2^* v = v(L) = 0, \quad B_3^* v = v(0) = 0$$

Observe-se que existem $2m - r = 3$ condições de contorno adjuntas, para $r = 1$ condição de contorno dada. Também que, com a expansão do termo bilinear $(vu' - v'u)|_0^L$, obtido da integração por partes, nem sempre resulta simples identificar de maneira direta as condições de contorno adjuntas.

3.4.2.3 A Equação Operacional com Condições Não Homogêneas

Dado o problema operacional

$$\mathbb{L}U(s, x) = R(s, x), \quad (3.102)$$

$$B_k U(s, x) = Q_k(s), k = 1 : m, \quad (3.103)$$

onde $\mathbb{L}U$ é dado por (3.9). Denotaremos por $H^*(s, x, \xi)$ a função de Green do operador adjunto \mathbb{L}^* . Tem-se do corolário (3.1) que

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^* H^*(s, x, \xi) &= 0, \\ B_1^* H &= 0, B_2^* H = 0, \dots, B_m^* H = 0, \\ H^*, \frac{\partial^k H^*}{\partial x^k}, k &= 1 : m - 2 \text{ contínuas para } x, \xi \text{ no intervalo } [0, L], \\ b_m(\xi) \left[\frac{\partial^k H^*}{\partial x^k}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial^k H^*}{\partial x^k}(\xi^-, \xi) \right] &= 1. \end{aligned}$$

De maneira abreviada:

$$\mathbb{L}_x^* H^*(s, x, \xi) = \delta(x - \xi). \quad (3.104)$$

As seguintes propriedades da função de Green adjunta serão de utilidade:

$$H^*(s, x, \xi) = H(s, \xi, x), \quad (3.105)$$

$$\mathbb{L}_\xi^* H^*(s, \xi, x) = \delta(\xi - x) \quad (3.106)$$

Se multiplicarmos (3.102) por $H^*(s, \xi, x)$ em ambos os lados e integrarmos com respeito a ξ , obtemos

$$\int_0^L H^*(s, \xi, x) \mathbb{L}_\xi U(s, \xi) d\xi = \int_0^L H^*(s, \xi, x) R(s, \xi) d\xi \quad (3.107)$$

Usando a identidade de Green-Lagrange, obtemos

$$\int_0^L U(s, \xi) \mathbb{L}_\xi^* H^*(s, \xi, x) d\xi + \mathbf{B}(U(s, \xi), H^*(s, \xi, x)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=L} = \int_0^L H^*(s, \xi, x) R(s, \xi) d\xi.$$

Como $\mathbb{L}_\xi^* H^*(s, \xi, x) = \delta(\xi - x)$, pela propriedade da função delta, decorre

$$U(s, x) = \int_0^L H(s, x, \xi) R(s, \xi) d\xi - \mathbf{B}(U(s, \xi), H(s, x, \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=L}. \quad (3.108)$$

Substituindo $R(s, x)$, dado em (3.6), na expressão (3.108) resulta que,

$$\begin{aligned} U(s, x) &= \int_0^L H(s, x, \xi) \left[\sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i(\xi) \right] d\xi - \mathbf{B}(U(s, \xi), H(s, x, \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=L} \\ &\quad + \int_0^L H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Assim,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^L \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{j-1-i}(t, x, \xi) A_j u_0^i(\xi) \right) d\xi + \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi + \mathbb{J}(u(t, \xi), h(t, x, \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=L}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(u, h) &= -\mathcal{L}^{(-1)} [\mathbf{B}(U(s, \xi), H(s, x, \xi))] \\ &= -\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \mathcal{L}^{(-1)} [D^{(k-j)}(b_k(s, \xi) U(s, \xi)) D^{(j-1)} H(s, x, \xi)]. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade da convolução, tem-se

$$\mathbb{J}(u, H) = - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \int_0^t \frac{\partial^{(j-1)} h(t-\tau, x, \xi)}{\partial \xi^{(j-1)}} v_{k,j}(\tau, \xi) d\tau, \quad (3.111)$$

onde

$$v_{k,j}(t, x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\partial^{(k-j)} (b_k(s, \xi) U(s, \xi))}{\partial \xi^{(k-j)}} \right] \quad (3.112)$$

De maneira compacta

$$\boxed{u(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{j-1-i}(t) A_j u_0^i + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau + \mathbb{J}(u, h)}, \quad (3.113)$$

onde

$$\mathbb{J}(u, h) = \mathbb{J}(u(t, \xi), h(t, x, \xi)) \Big|_{\xi=0}^{\xi=L} \quad (3.114)$$

isto é,

$$\mathbb{J}(u, h) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \left[\int_0^t \frac{\partial^{(j-1)} h(t-\tau, x, 0)}{\partial \xi^{(j-1)}} v_{k,j}(\tau, 0) d\tau - \int_0^t \frac{\partial^{(j-1)} h(t-\tau, x, L)}{\partial \xi^{(j-1)}} v_{k,j}(\tau, L) d\tau \right]. \quad (3.115)$$

com $v(t, x)$ dado por (3.112). Para coeficientes $b_k(s, x)$ independentes da variável espacial, a função $v(t, x)$ simplifica-se para

$$v_{k,j}(t, x) = \mathcal{L}^{-1} \left[b_{s,k} \frac{\partial^{(k-j)} (U(s, \xi))}{\partial \xi^{(k-j)}} \right]. \quad (3.116)$$

3.4.3 Caso de Coeficientes de 2ª Ordem

Neste trabalho, consideram-se as equações de primeira e de segunda ordem do tipo parabólico e hiperbólico

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + A_0 u &= f(t, x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial u}{\partial t} + A_0 u &= f(t, x), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 u &= a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu \\ A_1 u &= \alpha u(t, x), \end{aligned}$$

com a, b, c, α constantes e $a < 0$; sujeitas as condições de contorno separadas:

$$\begin{aligned} \alpha_{01} u(t, 0) + \alpha_{11} \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} &= g_1(t), \\ \beta_{02} u(t, L) + \beta_{12} \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} &= g_2(t), \end{aligned} \tag{3.117}$$

onde o posto da matriz dos coeficientes $\alpha_{ij}, \beta_{i,j}$ é igual a 2. Tem-se as equações operacionais, ambas de segunda ordem e somente diferindo no coeficiente $b_0(s)$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial x^2} + b \frac{\partial U(s, x)}{\partial x} + (c + s)U(s, x) &= F(s, x) \\ a \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial x^2} + b \frac{\partial U(s, x)}{\partial x} + (c + s^2 + \alpha_1 s)U(s, x) &= F(s, x), \end{aligned}$$

respectivamente. Tem-se os coeficientes sujeitas as condições de contorno transformadas

$$\begin{aligned} \alpha_{01} U(s, 0) + \alpha_{11} \frac{\partial U(s, 0)}{\partial x} &= G_1(s) \\ \beta_{02} U(s, L) + \beta_{12} \frac{\partial U(s, L)}{\partial x} &= G_2(s). \end{aligned}$$

Para ambas equações, a forma bilinear $J(u, h)$ é dada por

$$\begin{aligned} J(u, h) &= - \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) v_{1,1}(\tau, \xi) d\tau + \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) v_{2,1}(\tau, \xi) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial h(t - \tau, x, \xi)}{\partial \xi} v_{2,2}(\tau, \xi) d\tau \Big|_{\xi=L}^{\xi=0}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} v_{1,1}(t, \xi) &= b\mathcal{L}^{-1} [U(s, \xi)] = bu(t, \xi) \\ v_{2,1}(t, \xi) &= a\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\partial U(s, \xi)}{\partial \xi} \right] = a \left[\frac{\partial u(t, \xi)}{\partial \xi} \right] \\ v_{2,2}(t, \xi) &= a\mathcal{L}^{-1} [U(s, \xi)] = au(t, \xi) \end{aligned}$$

A fórmula acima é simplificada para condições de contorno descritas na seguinte tabela. Para tanto, são utilizadas as condições de contorno de h e sua primeira derivada espacial. Tem-se

$$J(u, h) = - \int_0^t g_1(\tau) a \Lambda_1(t - \tau, x) d\tau + \int_0^t g_2(\tau) a \Lambda_2(t - \tau, x) d\tau. \quad (3.118)$$

Aqui, as funções $\Lambda_1(t, x)$ e $\Lambda_2(t, x)$ são expressas em termo da função de Green $h(t, x, \xi)$ e dadas na tabela (3.2) para diferentes tipos de problemas de contorno

Forma das condições de contorno	Função $\Lambda_m(t - \tau, x)$
$u = g_1(t)$ em $x = 0$ $u = g_2(t)$ em $x = L$	$\Lambda_1(t - \tau, x) = -\partial_y h(t - \tau, x, \xi) _{\xi=0}$ $\Lambda_2(t - \tau, x) = -\partial_y h(t - \tau, x, \xi) _{\xi=L}$
$\partial_x u = g_1(t)$ em $x = 0$ $\partial_x u = g_2(t)$ em $x = L$	$\Lambda_1(t - \tau, x) = -h(t - \tau, x, 0)$ $\Lambda_2(t - \tau, x) = h(t - \tau, x, L)$
$\alpha_{01}u + \alpha_{11}\partial_x u = g_1(t)$ em $x = 0$ $\beta_{02}u + \beta_{12}\partial_x u = g_2(t)$ em $x = L$	$\Lambda_1(t - \tau, x) = -h(t - \tau, x, 0)$ $\Lambda_2(t - \tau, x) = h(t - \tau, x, L)$
$u = g_1(t)$ em $x = 0$ $\partial_x u = g_2(t)$ em $x = L$	$\Lambda_1(t - \tau, x) = \partial_\xi h(t - \tau, x, \xi) _{\xi=0}$ $\Lambda_2(t - \tau, x) = h(t - \tau, x, L)$
$\partial_x u = g_1(t)$ em $x = 0$ $u = g_2(t)$ em $x = L$	$\Lambda_1(t - \tau, x) = -h(t - \tau, x, 0)$ $\Lambda_2(t - \tau, x) = -\partial_\xi h(t - \tau, x, \xi) _{\xi=L}$

Tabela 3.2 Forma das funções $\Lambda_1(t - \tau, x)$ e $\Lambda_2(t - \tau, x)$

4 CÁLCULO SIMBÓLICO DE RESPOSTAS FORÇADAS

Será considerada a extração de soluções homogêneas a partir de respostas forçadas definidas através da integral de convolução da solução fundamental com o termo não homogêneo. A resposta forçada é decomposta na soma de uma solução particular não-homogênea e de uma solução homogênea, que depende diretamente dos valores iniciais da solução particular, atuando esta última como uma retroalimentação no sistema. Esta decomposição resulta de interesse quando as forças externas são tais que uma solução particular é simples de obter. Em particular, quando as forças externas são exponenciais no tempo e sua amplitude dependente somente da variável espacial.

4.1 Decomposição de Respostas Forçadas

A solução da equação diferencial parcial de ordem N

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x), \quad (4.1)$$

com condições iniciais nulas

$$u(0, x) = 0, \quad \dot{u}(0, x) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} u}{\partial t^{N-1}}(0, x) = 0, \quad (4.2)$$

é chamada de resposta forçada em $t = 0$, sendo dada pela *integral de convolução*

$$u(t) = \int_0^t \left[\int_{\Omega} h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau. \quad (4.3)$$

A resposta impulso $h(t)$ foi definida em (3.19) através do operador integral

$$h(t)\phi(x) = \int_{\Omega} h(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (4.4)$$

onde $h(t, x, \xi)$ corresponde à *função de Green temporal*, isto é, à inversa da transformada de Laplace da função de Green espacial $H(s, x, \xi)$ do problema de contorno (3.7)-(3.8).

Com a introdução destes operadores a resposta forçada (4.5) pode ser escrita na forma usual

$$u(t) = \int_0^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau, \quad (4.5)$$

onde $u(t)$ para cada valor t é uma função que depende da variável espacial x e cujo valor é $u(t)(x) = u(t, x)$; analogamente para $f(t)$.

Para efeitos de decomposição no tempo, torna-se muito simples trabalhar com a forma evolutiva (4.5) e, após, escrever o resultado na forma usual.

A resposta forçada pode ser decomposta em uma resposta livre $u_h(t)$ e em uma resposta particular (*permanente*) $u_p(t)$, ou seja,

$$u(t) = \int_0^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau = u_h(t) + u_p(t), \quad (4.6)$$

onde $u_h(t)(x) = u_h(t, x)$ e $u_p(t)(x) = u_p(t, x)$.

Como $\{h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{N-1}(t)\}$ formam uma base de soluções da equação homogênea

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) = 0, \quad (4.7)$$

a integral (4.5) que corresponde a uma solução não homogênea pode ser escrita como

$$u(t) = \int_0^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau = \sum_{j=0}^{N-1} h^j(t)a_j + u_p(t), \quad (4.8)$$

sendo a_j funções da variável espacial a serem determinadas a partir das condições iniciais nulas de $u(t)$ em $t = 0$. Desta forma tem-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^j(0)a_j + u_p(0) \\ 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{j+1}(0)a_j + \dot{u}_p(0) \\ \vdots \\ 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{j+N-1}(0)a_j + u_p^{N-1}(0) \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Os valores $h^j(0)$ para $j \geq N + 1$ são determinados a partir da equação diferencial que é satisfeita por $h(t)$ com condições iniciais em $t = 0$.

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{N-1} = -A_N u_p(0) \\ a_{N-2} = -A_{N-1} u_p(0) - A_N \dot{u}_p(0) \\ a_{N-3} = -A_{N-2} u_p(0) - A_{N-1} \dot{u}_p(0) - A_N \ddot{u}_p(0) \\ \vdots \\ a_1 = -A_2 u_p(0) - A_3 \dot{u}_p(0) - \dots - A_N u_p^{N-2}(0) \\ a_0 = -A_1 u_p(0) - A_2 \dot{u}_p(0) - \dots - A_N u_p^{N-1}(0) \end{array} \right. \quad (4.10)$$

ou de maneira compacta

$$a_j = - \sum_{k=1}^{N-j} A_{k+j} u_p^{k-1}(0, x), \quad \text{para } j = 0 : N - 1. \quad (4.11)$$

A resposta livre introduzida pela convolução é então dada por

$$u_h(t) = - \sum_{j=0}^{N-1} h^j(t) \sum_{k=1}^{N-j} A_{k+j} u_p^{k-1}(0) = - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} h^{k-1}(t) A_{k+j} u_p^j(0), \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbf{h}^j(t)\phi(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial^j h}{\partial t^j}(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi. \quad (4.13)$$

No domínio original tem-se

$$u_h(t, x) = - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi) A_{k+j} u_p^j(0, \xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Resulta desta expressão que, sendo conhecidas as condições iniciais de uma solução não homogênea $u_p(t, x)$, a solução homogênea $u_h(t, x)$ fica determinada com o auxílio da resposta impulso funcional $\mathbf{h}(t)$.

Desta forma, o cálculo da resposta forçada fica reduzido a obtenção da resposta particular $u_p(t)$ e tem-se como expressão

$$\boxed{u(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) f(\tau) d\tau = u_p(t) - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} h^{k-1}(t) A_{k+j} u_p^j(0)} \quad , \quad (4.15)$$

a qual caracteriza uma decomposição da convolução.

4.2 A Resposta em Freqüência e o Operador de Transferência

Para termos não homogêneos do tipo

$$f(t, x) = e^{\lambda t} v(x), \quad (4.16)$$

podem ser procuradas soluções particulares não homogêneas do mesmo tipo. Substituindo

$$u = e^{\lambda t} w(x)$$

em (4.1) decorre a equação operacional

$$\left[\sum_{j=0}^N \lambda^j A_j \right] w(x) = v(x).$$

A solução é dada por

$$w(x) = \mathbb{H}(\lambda)v(x) = \int_{\Omega} H(\lambda, x, \xi)v(\xi)d\xi,$$

onde $H(\lambda, x, \xi)$ denota a função de Green espacial associada com a equação operacional acima.

Assim, podemos escrever a resposta forçada como

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \int_{\Omega} h(t - \tau, x, \xi)e^{\lambda\tau}v(\xi)d\xi d\tau \\ &= e^{\lambda t}\mathbb{H}(\lambda)v(x) - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1}h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi)A_{k+j}\lambda^j\mathbb{H}(\lambda)v(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Rearranjando obtém-se

$$u(t, x) = \int_{\Omega} \left[e^{\lambda t}H(\lambda, x, \xi)v(\xi) - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \frac{\partial^{k-1}h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi)A_{k+j}\lambda^j \int_{\Omega} H(\lambda, \xi, \eta)v(\eta)d\eta \right) \right] d\xi$$

Deve ser salientado que para $\lambda = i\omega$, tem-se que a solução particular é a resposta em freqüência, ou seja

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t \int_{\Omega} h(t - \tau, x, \xi)e^{i\omega\tau}v(\xi)d\xi d\tau \\ &= e^{\lambda t}\mathbb{H}(i\omega)v(x) - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1}h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi)A_{k+j}\lambda^j\mathbb{H}(i\omega)v(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Daí, concluí-se que, para entradas harmônicas, a resposta forçada vem a ser a resposta freqüência diminuída pelas contribuições das parcelas que compõem a resposta livre induzida através dos valores iniciais da resposta em freqüência no sistema.

5 EQUAÇÕES DO TIPO PARABÓLICO

Este capítulo aborda equações diferenciais parciais (EDP) lineares de primeira ordem no tempo. Essas equações são encontradas de maneira freqüente em várias aplicações tais como modelos cromatográficos, modelos hidráulicos, modelos de tráfego em estradas, modelos difusão-convecção, dentre outros.

5.1 Domínio Unidimensional

Nesta seção trataremos da equação linear de primeira ordem no tempo e de segunda ordem completa no espaço com coeficientes constantes (difusão-reação-advecção).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = f(t, x). \quad (5.1)$$

Esta equação apresenta-se em variados tipos de aplicações. Para $f(x, t) = 0$, esta equação descreve uma transferência de massa convectiva, variável, unidimensional, com reação de primeira ordem no volume químico num meio contínuo que se move com velocidade constante. Uma equação similar é usada para a análise da correspondência unidimensional de processos térmicos em um meio variável com variação no volume de calor proporcional a temperatura. Nesta seção, esta equação será estudada e resolvida utilizando-se os métodos descritos anteriormente. Isso será feito separadamente, para domínio infinito, finito com condições de contorno homogêneas e finito com condições de contorno não homogêneas.

5.1.1 O Problema de Cauchy na Reta

Conforme a teoria desenvolvida no capítulo (2), a solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = f(t, x), \quad (5.2)$$

com condição inicial $u = \phi(x)$ em $t=0$, em função da solução fundamental $h(t, x)$, é dada por

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) h(x - \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) h(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau. \quad (5.3)$$

Aqui, $h(t, x)$ satisfaz, para $t > \tau \geq 0$, a equação linear homogênea

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - b \frac{\partial h}{\partial x} - ch = 0, \quad (5.4)$$

com condição inicial da forma

$$h(t, x) = \delta(x - \xi) \quad \text{em } t = \tau. \quad (5.5)$$

Para esta equação $h(t, x)$ é da forma

$$h(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{\left[-\frac{(x+bt)^2}{4at} + ct\right]}. \quad (5.6)$$

Vimos que a solução forçada, ou seja, o segundo termo do segundo membro da equação (5.3) pode ser decomposta em

$$\begin{aligned} u_{per}(t, x) &= u_p(t, x) - u_{hp}(t, x) \\ &= u_p(t, x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi, t) u_p(0, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde $u_{hp}(t, x)$ é a resposta livre induzida pela resposta permanente $u_p(t, x)$. Logo a solução do problema pode ser escrita conforme

$$\boxed{u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) h(x - \xi, t) d\xi + u_p(t, x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi, t) u_p(0, \xi) d\xi} \quad (5.8)$$

Em particular, para entradas no sistema do tipo

$$f(t, x) = e^{\lambda t} r(x)$$

tem-se uma resposta da mesma forma

$$u_p(x, t) = e^{\lambda t} v(x), \quad (5.9)$$

onde $v(x)$ satisfaz equação não homogênea

$$\ddot{v}(x) + \gamma \dot{v}(x) + \delta v(x) = p(x) \quad (5.10)$$

com

$$\gamma = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{c - \lambda}{a} \quad e \quad p(x) = \frac{r(x)}{-a},$$

que tem como uma solução particular a resposta forçada

$$\int_0^x h(x - \tau) p(\tau) d\tau, \quad (5.11)$$

onde $h(x)$ satisfaz

$$\ddot{h}(x) + \gamma \dot{h}(x) + \delta h(x) = 0, \quad h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 1.$$

Exemplo:

Determinar a solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = e^{(\lambda t)} r(x) \quad (5.12)$$

com condição inicial da forma

$$u = \mathcal{H}(x + 2) - \mathcal{H}(x - 2) \quad \text{em} \quad t = 0, \quad (5.13)$$

onde $\mathcal{H}(x)$ é a função de Heaviside.

Considere os parâmetros $a = 1$, $b = -10$, $c = 1$, $\lambda = 0.1$ com $r(x) = \cos(x)$. A solução homogênea u_h é dada pelo primeiro termo do segundo membro da equação (5.8) com $\phi(x) = \mathcal{H}(x + 2) - \mathcal{H}(x - 2)$, ou seja,

$$\begin{aligned} u_h(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{H}(\xi + 2) - \mathcal{H}(\xi - 2)] h(x - \xi, t) d\xi \\ &= 0.5 \left[-\operatorname{erf} \left(0.5 \frac{-2 + x - 10t}{\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(0.5 \frac{2 + x - 10t}{t} \right) \right] e^{-0.5t}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde erf denota a função erro. A seguir tem-se os gráficos representado a solução homogênea do problema de valor inicial dado, para diversos valores de tempo.

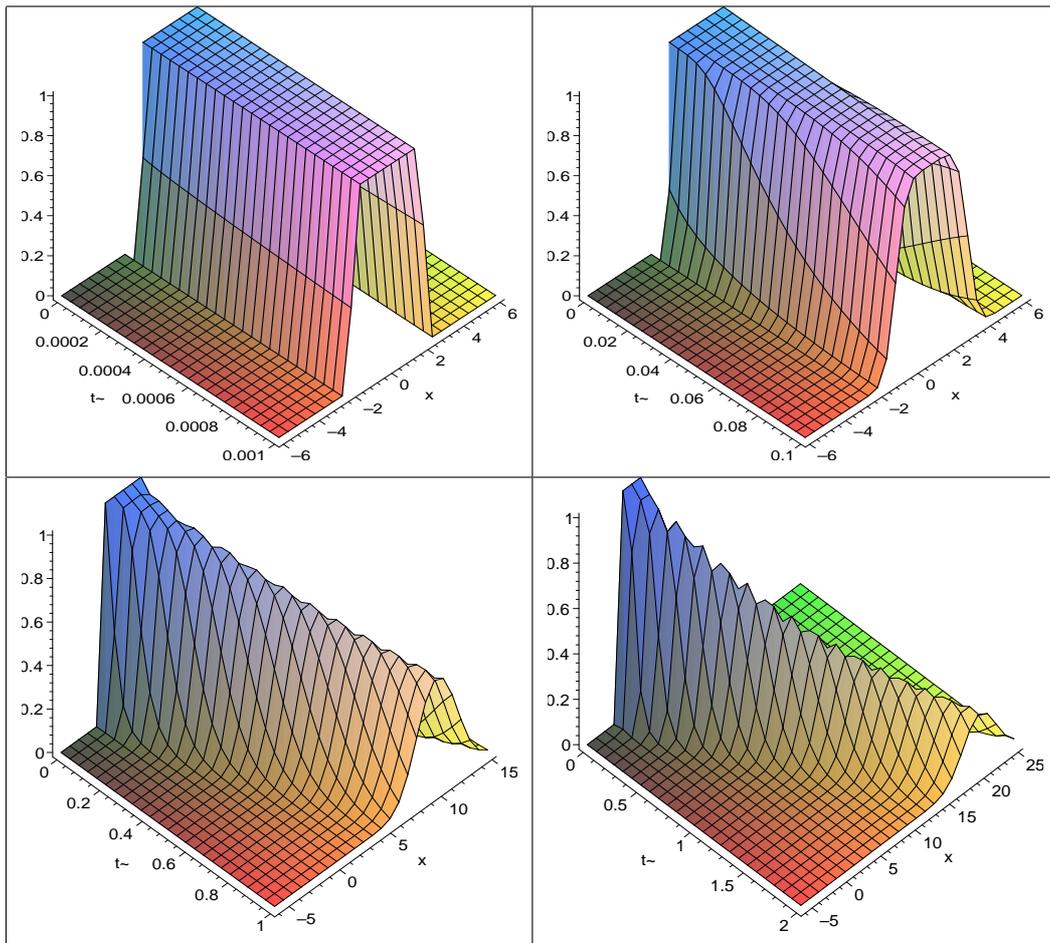


Figura 5.1 Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$.

A resposta particular é dada por $u_p(x, t) = e^{\lambda t}v(x)$, onde $v(x)$ satisfaz equação diferencial (5.10) com condições iniciais nulas. Executando-se os cálculos, obtém-se

$$u_p(x, t) = e^{0.1t}(0.005978477481\cos(x) + 0.09964129135\sen(x)) \quad (5.15)$$

mostrado para diversos valores de tempo na figura a seguir

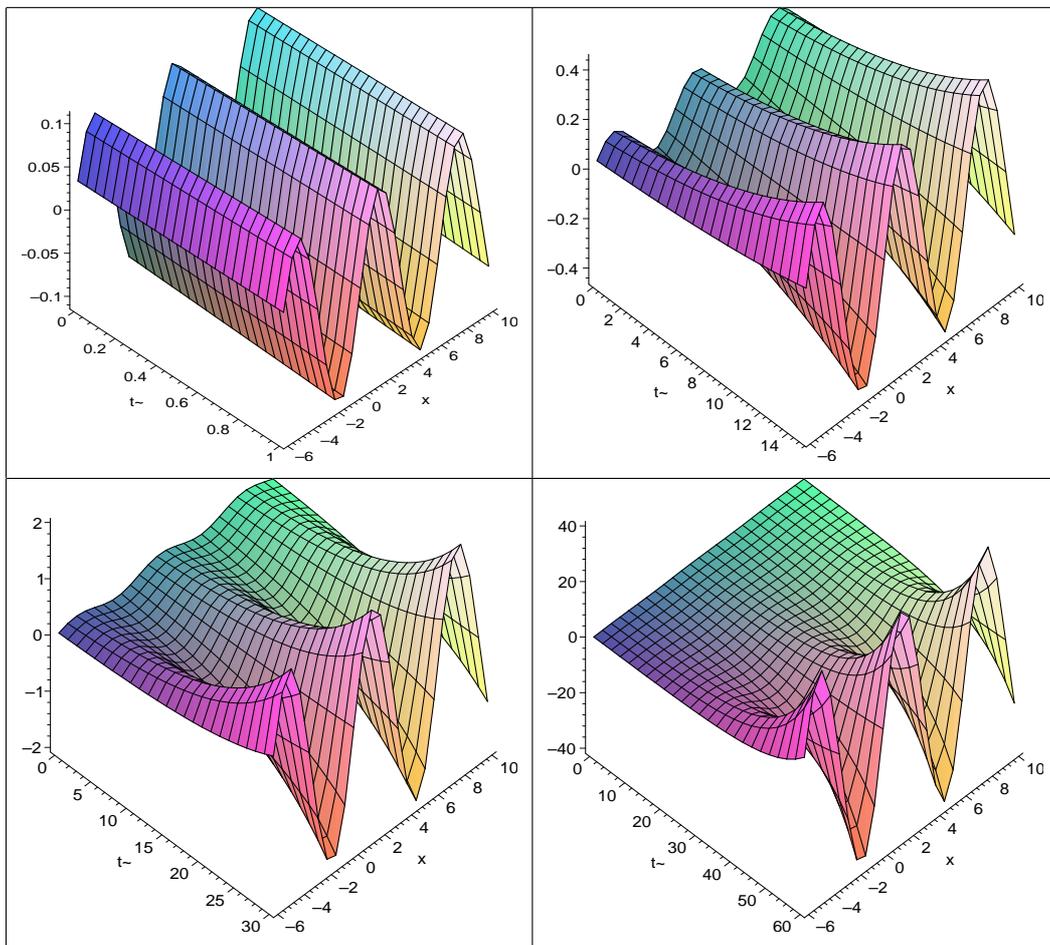


Figura 5.2 Gráficos da resposta particular $u_p(x, t)$.

Observa-se que a solução particular u_p aumenta com passar do tempo.

A resposta livre, u_{hp} , induzida pela particular é calculada através da integral

$$u_{hp} = - \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi, t) u_p(0, \xi) d\xi \quad (5.16)$$

que calculamos com o auxílio do Maple e obtemos os seguintes gráficos

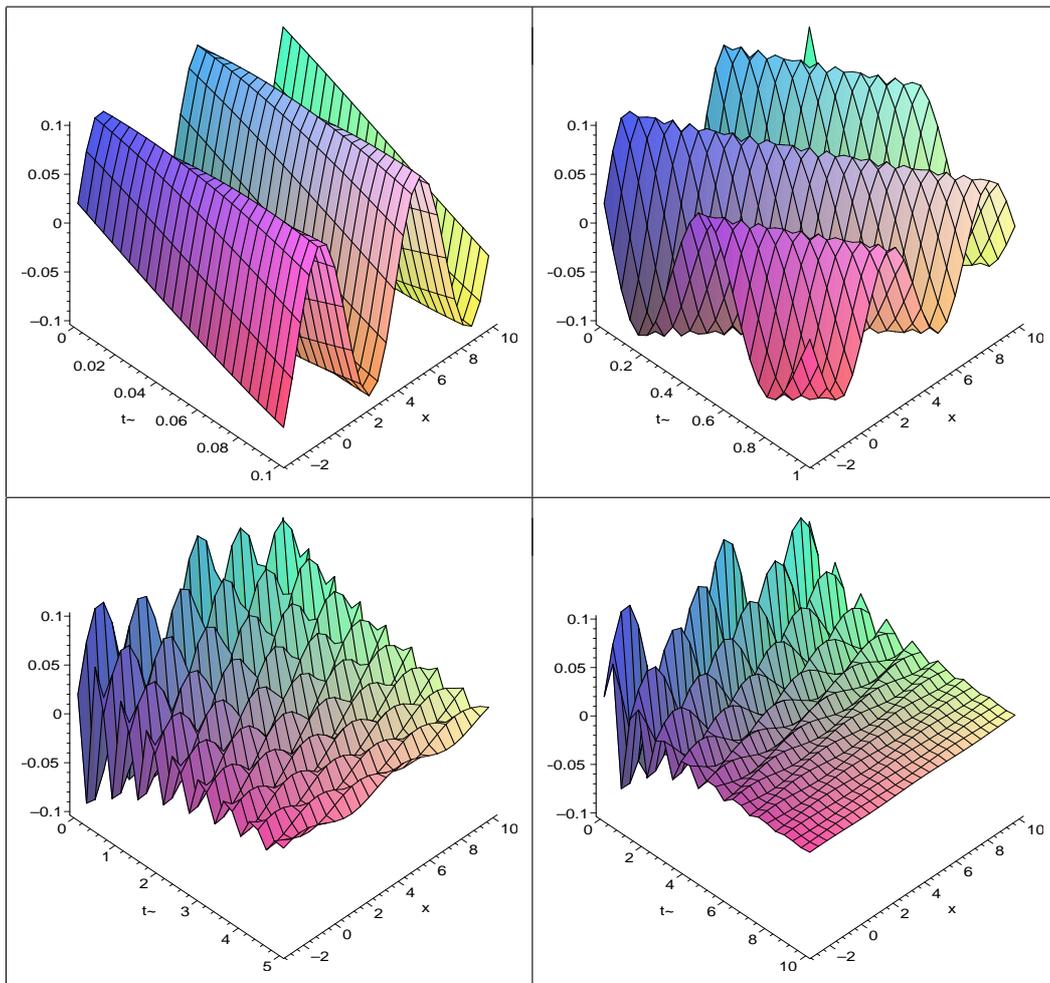


Figura 5.3 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular.

A solução total do problema é dada pela soma de todas as respostas anteriores, ou seja,

$$u(t, x) = u_h(t, x) + u_{hp}(t, x) + u_p(t, x). \quad (5.17)$$

Os gráficos da solução dinâmica $u(t, x)$ do problema (5.30)-(5.32) são dados na figura (6.15)

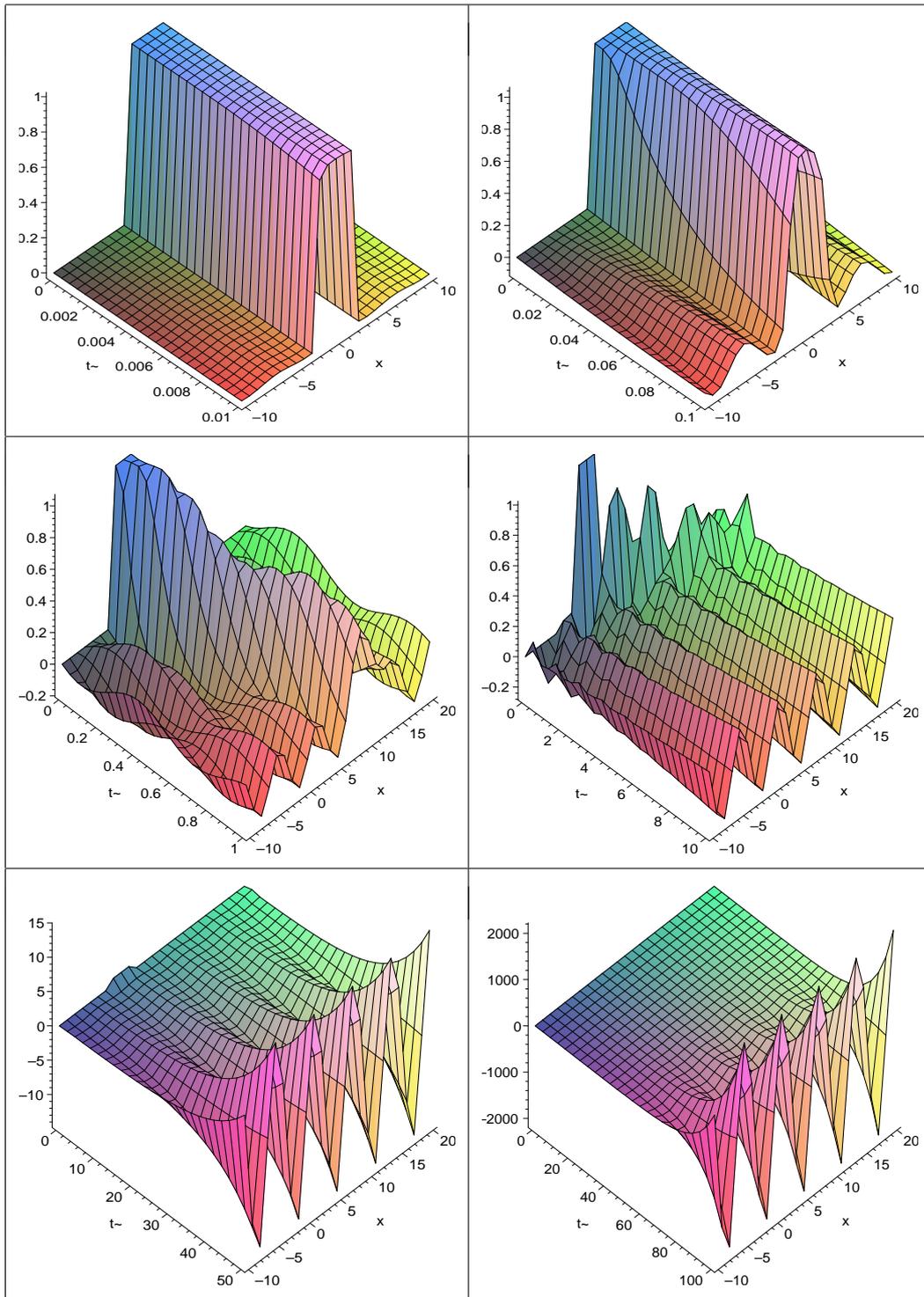


Figura 5.4 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

5.1.2 Domínio Limitado com Condições de Contorno Homogêneas

A equação (5.1) juntamente com as condições inicial, $u = \phi(x)$ em $t = 0$, e de contorno

$$\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{01} u = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad (5.18)$$

$$\beta_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{02} u = 0 \quad \text{em } x = l, \quad (5.19)$$

tem solução da forma

$$u(x, t) = \int_0^l \phi(\xi) h(t, x, \xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l f(\xi, \tau) h(t - \tau, x, \xi) d\xi d\tau \quad (5.20)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é a função de Green que satisfaz, para $t > \tau \geq 0$, a equação homogênea

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - b \frac{\partial h}{\partial x} - ch = 0 \quad (5.21)$$

com condição inicial não homogênea da forma

$$h = \delta(x - \xi) \quad \text{em } t = \tau \quad (5.22)$$

e condições de contorno homogêneas

$$\alpha_{11} \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha_{01} h = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad (5.23)$$

$$\alpha_{12} \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha_{02} h = 0 \quad \text{em } x = l. \quad (5.24)$$

Vimos que resposta forçada, ou seja, o segundo termo do lado direito da equação (5.20), pode ser decomposta em

$$\begin{aligned}
u_{per}(t, x) &= u_p(t, x) - u_{hp}(t, x) \\
&= u_p(t, x) - \int_0^l h(t, x, \xi) u_p(0, \xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

onde $u_{hp}(t, x)$ é a resposta livre induzida pela resposta particular $u_p(t, x)$.

Em particular, para entradas no sistema do tipo

$$f(t, x) = e^{\lambda t} r(x)$$

tem-se uma resposta da mesma forma

$$u_p(x, t) = e^{\lambda t} v(x) \tag{5.26}$$

onde $v(x)$ satisfaz o problema não homogêneo

$$\ddot{v}(x) + \gamma \dot{v}(x) + \delta v(x) = p(x) \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_{01} v &= 0 \quad \text{em } x = 0 \\
\beta_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_{02} v &= 0 \quad \text{em } x = l,
\end{aligned} \tag{5.28}$$

com

$$\gamma = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{c - \lambda}{a} \quad e \quad p(x) = \frac{r(x)}{-a},$$

que tem como uma solução particular a resposta forçada

$$\int_0^l g(x, \xi) p(\xi) d\xi \tag{5.29}$$

onde $g(x, \xi)$ é a função de Green que satisfaz

$$\ddot{g}(x, \xi) + \gamma \dot{g}(x, \xi) + \delta g(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

com condições de contorno homogêneas da forma (5.28).

Exemplo:

Determinar a solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = e^{(\lambda t)} r(x) \quad (5.30)$$

com condição inicial da forma

$$u = 10[\mathcal{H}(x - 0.25) - \mathcal{H}(x - 0.75)] \quad \text{em } t = 0, \quad (5.31)$$

onde $\mathcal{H}(x)$ é a função de Heaviside, e sujeita a condições de contorno

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{em } x &= 0 \\ u &= 0 & \text{em } x &= l. \end{aligned} \quad (5.32)$$

A solução homogênea, u_h , é dada pelo primeiro termo do lado direito da equação (5.20), ou seja,

$$u_h(x, t) = \int_0^l (\mathcal{H}(\xi - 0.25) - \mathcal{H}(\xi - 0.75)) h(t, x, \xi) d\xi, \quad (5.33)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é a função de Green espacial dada por

$$h(t, x, \xi) = \frac{2}{l} \exp \left[\frac{b(\xi - x)}{2a} + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) t \right] \sum_1^\infty \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) \sin \left(\frac{\pi n \xi}{l} \right) \exp \left(-\frac{a\pi^2 n^2}{l^2} t \right). \quad (5.34)$$

Considere os parâmetros $a = 0.1$, $b = 0.1$, $c = 1$, $l = 1$, $\lambda = 0.9$ com $r(x) = \cos(20x)x^2$.

Integrando-se essa equação com o auxílio do software Maple para 384 termos na função de Green, obtém-se a solução homogênea que é graficada a seguir, para diversos valores de tempo:

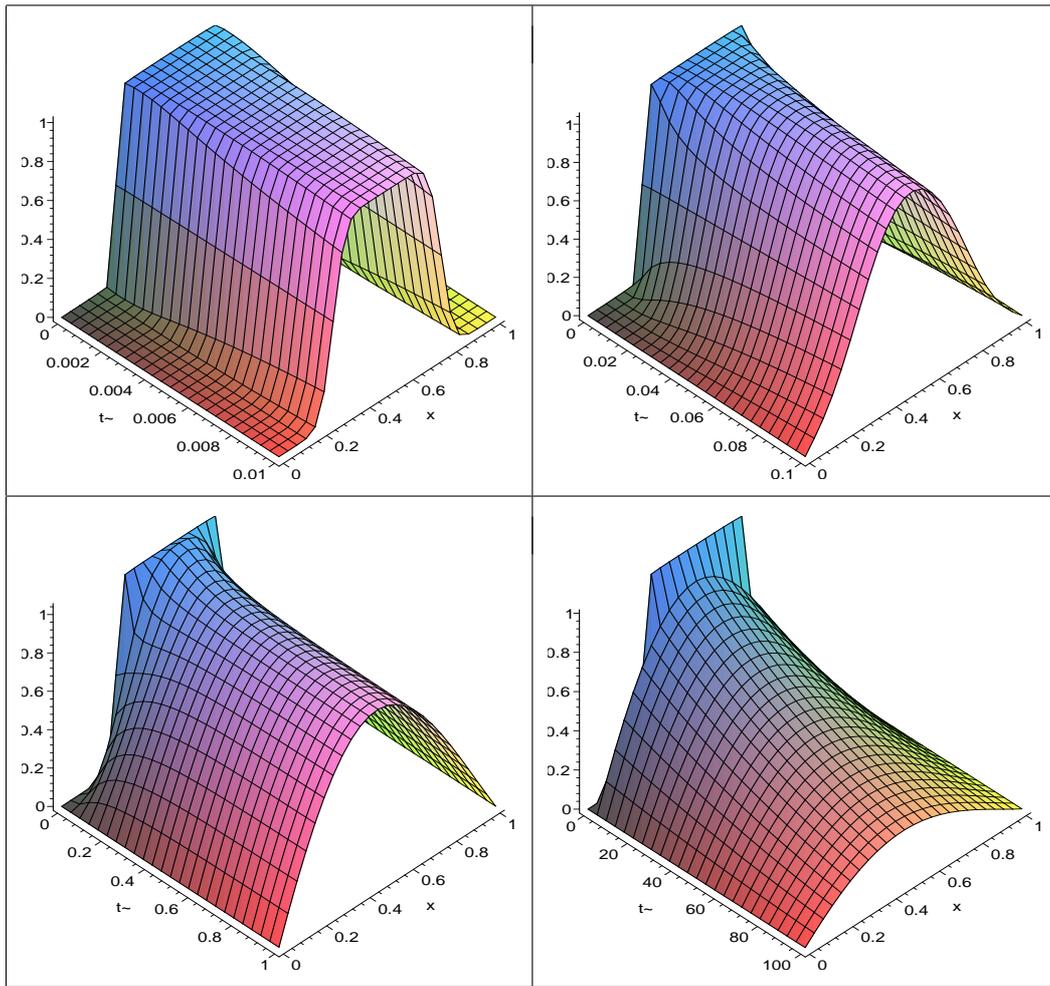


Figura 5.5 Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$.

Conforme visto anteriormente, a resposta forçada do problema (5.30)-(5.32), é dada pela integral de convolução, ou seja, o segundo termo do lado direito da equação (5.20)

$$\int_0^t \int_0^1 f(\xi, \tau) h(t - \tau, x, \xi) d\xi d\tau \quad (5.35)$$

que pode ser decomposta da forma

$$u_{per}(t, x) = u_p(t, x) - u_{hp}(t, x) = u_p(t, x) - \int_0^1 h(t, x, \xi) u_p(0, \xi) d\xi. \quad (5.36)$$

Para calcularmos $u_p(t, x)$ supomos uma resposta da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x) = e^{\lambda t}v(x)$, e substituímos na equação (5.30), resultando

$$\ddot{v}(x) + \dot{v}(x) + v(x) = p(x) \quad (5.37)$$

com condições de contorno homogêneas.

Sabemos que essa equação tem como solução

$$v(x) = \int_0^1 g(x, \xi)p(\xi)d\xi, \quad (5.38)$$

onde

$$g(x, \xi) = \begin{cases} -1.874 \operatorname{sen}(0.866x) [0.616 \operatorname{cos}(0.866\xi) \\ -0.524 \operatorname{sen}(0.866\xi)] e^{(-0.5x+0.5\xi)}, & x < \xi \\ 1.874 \operatorname{sen}(0.866\xi) [-0.616 \operatorname{cos}(0.866x) \\ +.524 \operatorname{sen}(0.866x)] e^{(-0.5x+0.5\xi)}, & \xi < x \end{cases} \quad (5.39)$$

e $p(x) = -\operatorname{cos}(20x)x^2$.

Os gráficos de $u_p(t, x) = e^{\lambda x}v(x)$ para diversos tempos podem ser vistos na figura (5.6), onde notamos o crescimento de u_p com o aumento do tempo.

Tendo-se obtido a solução particular, a resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela resposta particular é facilmente calculada pela fórmula

$$u_{hp}(t, x) = - \int_0^1 h(t, x, \xi)u_p(0, \xi)d\xi, \quad (5.40)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é dada por (5.34). Os gráficos de u_{hp} são apresentados na figura (5.7) para diferentes valores de t .

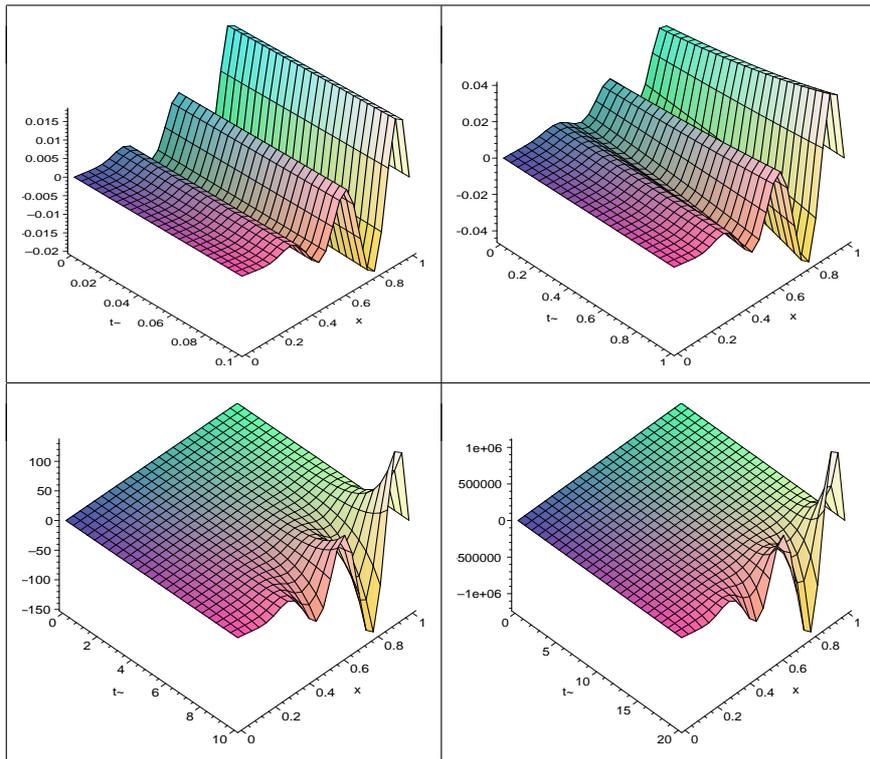


Figura 5.6 Gráficos da resposta forçada $u_p(x, t)$.

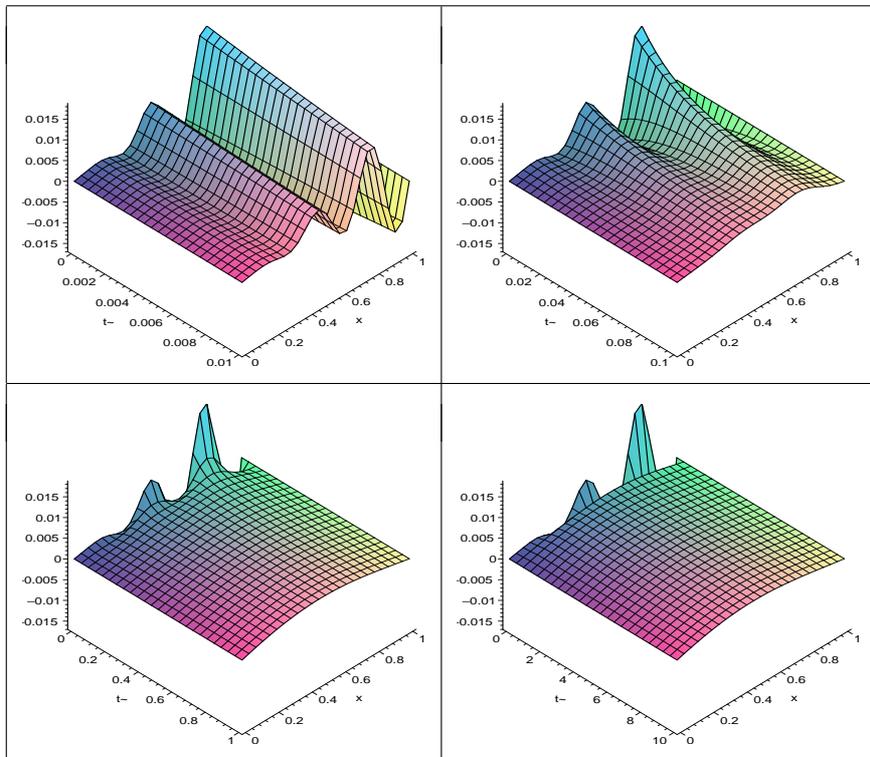


Figura 5.7 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular.

A solução total do problema é dada pela soma de todas as respostas anteriores, ou seja,

$$u(t, x) = u_h(t, x) + u_{hp}(t, x) + u_p(t, x). \tag{5.41}$$

Os gráficos da solução $u(t, x)$ do problema (5.30)-(5.32) são dados na figura (6.15)

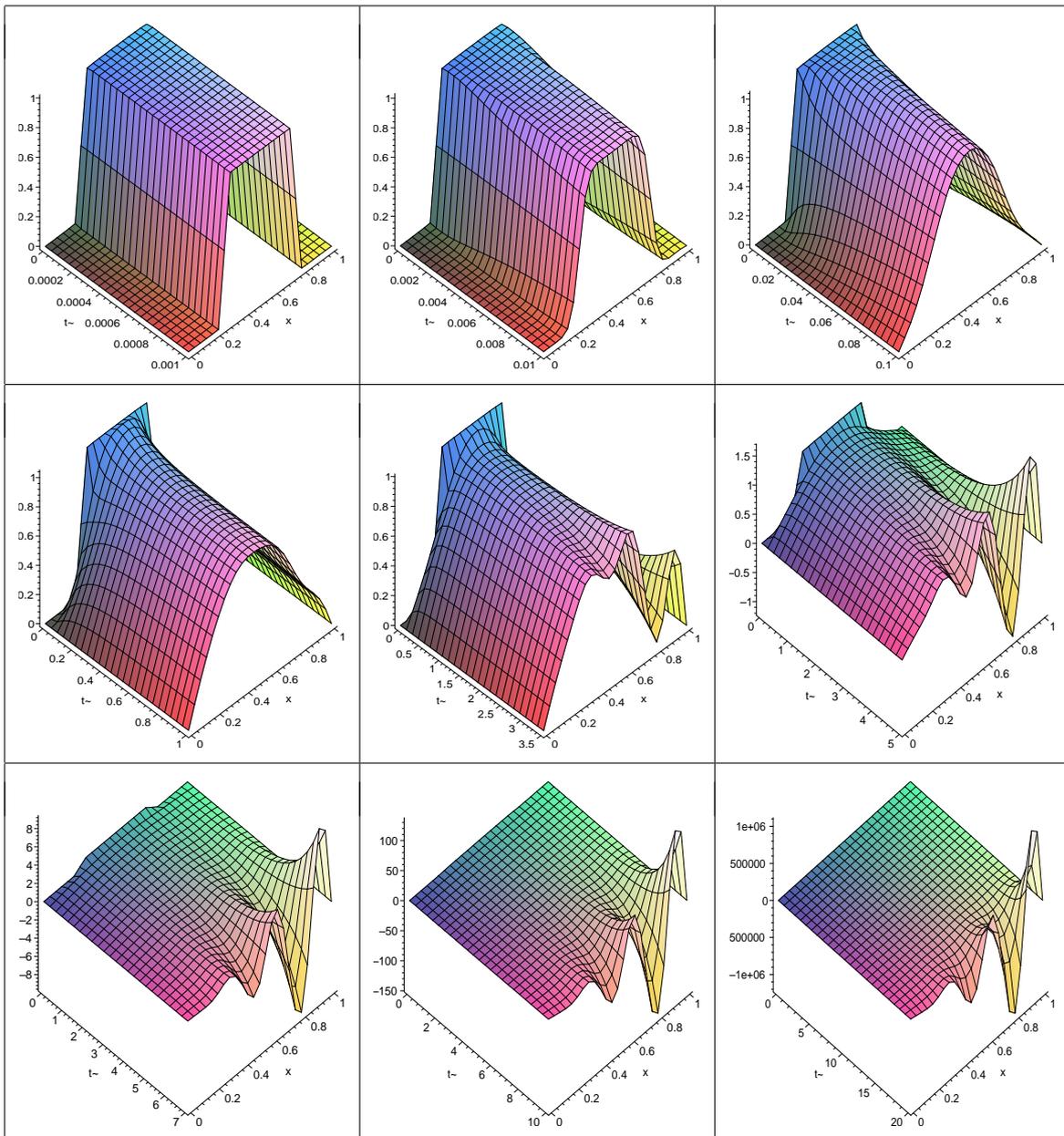


Figura 5.8 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

Observa-se que a solução $u(t, x)$ decai até um certo instante de tempo onde ela muda de comportamento e começa a aumentar. Isto demonstra o domínio da resposta homogênea, u_h , sobre a solução $u(t, x)$, para tempos pequenos. A partir desse instante a resposta permanente u_p começa a dominar o sistema, que atingirá o estado permanente com o passar o tempo. A resposta livre induzida (u_{hp}) pela resposta permanente exerce uma modesta influência sobre o sistema que não é notada em nosso exemplo. A seguir graficaremos as respostas separadamente para o tempo $t = 5$.

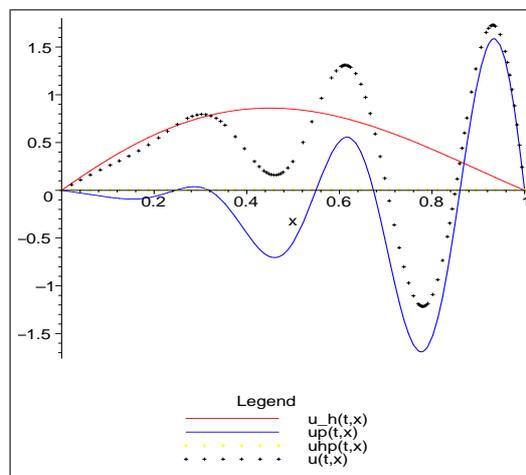


Figura 5.9 Soluções $u_h(t, x)$, $u_p(t, x)$, $u_{hp}(t, x)$, $u(t, x)$ para $t = 5$.

5.1.3 O Caso de Condições de Contorno Não-Homogêneas

Considere o problema de contorno não homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = f(t, x) \quad (5.42)$$

$$u = \phi(x) \quad \text{em } t = 0, \quad (5.43)$$

$$\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{01} u = g_1(t) \quad \text{em } x = 0, \quad (5.44)$$

$$\beta_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{02} u = g_2(t) \quad \text{em } x = l.$$

Sabe-se por (3.110) e (3.118) que a solução desse problema é dada por (5.20) acrescentando-se a contribuição das condições de contorno, ou seja, a solução é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \int_0^l \phi(\xi) h(t, x, \xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi \\
 &+ a \int_0^t g_1(\tau) \Lambda_1(t - \tau, x) d\tau - a \int_0^t g_2(\tau) \Lambda_2(t - \tau, x) d\tau,
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

onde $\Lambda_i(t - \tau, x)$ são as funções dadas na tabela (3.2). Aqui, $h(t, x, \xi)$ é a função de Green expressa pela equação (5.34) e que satisfaz, para $t > \tau \geq 0$, a equação homogênea

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - b \frac{\partial h}{\partial x} - ch = 0 \tag{5.46}$$

com condição inicial não homogênea da forma

$$h = \delta(x - \xi) \quad \text{em} \quad t = \tau \tag{5.47}$$

e condições de contorno homogêneas

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha_{01} h &= 0 \quad \text{em} \quad x = 0, \\
 \beta_{12} \frac{\partial h}{\partial x} + \beta_{02} h &= 0 \quad \text{em} \quad x = l.
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

A solução permanente (resposta forçada), ou seja, o segundo termo do lado direito da equação (5.45), pode ser decomposta em

$$\begin{aligned}
 u_{per}(t, x) &= u_p(t, x) - u_{hp}(t, x) \\
 &= u_p(t, x) - \int_0^l h(t, x, \xi) u_p(0, \xi) d\xi,
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

onde $u_{hp}(t, x)$ é a resposta livre induzida pela resposta permanente $u_p(t, x)$.

Exemplo:

Determinar a solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = e^{(\lambda t)} r(x) \quad (5.50)$$

com condição inicial da forma

$$u = \mathcal{H}(x - 0.25) - \mathcal{H}(x - 0.75) \quad \text{em } t = 0, \quad (5.51)$$

onde $\mathcal{H}(x)$ é a função de Heaviside, e sujeita a condições de contorno

$$\begin{aligned} u &= 5 \cos(10t), & \text{em } x &= 0 \\ u &= 5 \sin(10t) & \text{em } x &= 1. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Considere os parâmetros $a = 0.1$, $b = 0.1$, $c = 1$, $\lambda = 0.9$ com $r(x) = \cos(10x)$.

A solução homogênea, u_h , do problema é a mesma do exemplo anterior e está graficada na figura (5.5).

A resposta particular é calculada supondo-se uma solução da mesma forma entrada, ou seja, $u_p = e^{\lambda t} v(x)$. Substituindo-se u_p na equação (5.50) obtém-se o problema de contorno não homogêneo para $v(x)$

$$\ddot{v}(x) + \dot{v}(x) + v(x) = \cos(10x) \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} v &= 0 & \text{em } x &= 0 \\ v &= 0 & \text{em } x &= 1, \end{aligned} \quad (5.54)$$

que tem como solução

$$\int_0^1 g(x, \xi) \cos(10\xi) d\xi, \quad (5.55)$$

onde $g(x, \xi)$ é a função de Green que satisfaz

$$\ddot{g}(x, \xi) + \dot{g}(x, \xi) + g(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad g(0, \xi) = 0, \quad g(l, \xi) = 0$$

dada por

$$g(x, \xi) = \begin{cases} -1.874 \operatorname{sen}(0.866x) [0.616 \cos(0.866\xi) \\ -0.524 \operatorname{sen}(0.866\xi)] e^{(-0.5x+0.5\xi)}, & x < \xi \\ 1.874 \operatorname{sen}(0.866\xi) [-0.616 \cos(0.866x) \\ +0.524 \operatorname{sen}(0.866x)] e^{(-0.5x+0.5\xi)}, & \xi < x \end{cases} \quad (5.56)$$

Os gráficos de $u_p(t, x) = e^{\lambda t} v(x)$ para diversos tempos podem ser vistos na figura (5.10), onde notamos o crescimento de u_p com o aumento do tempo.

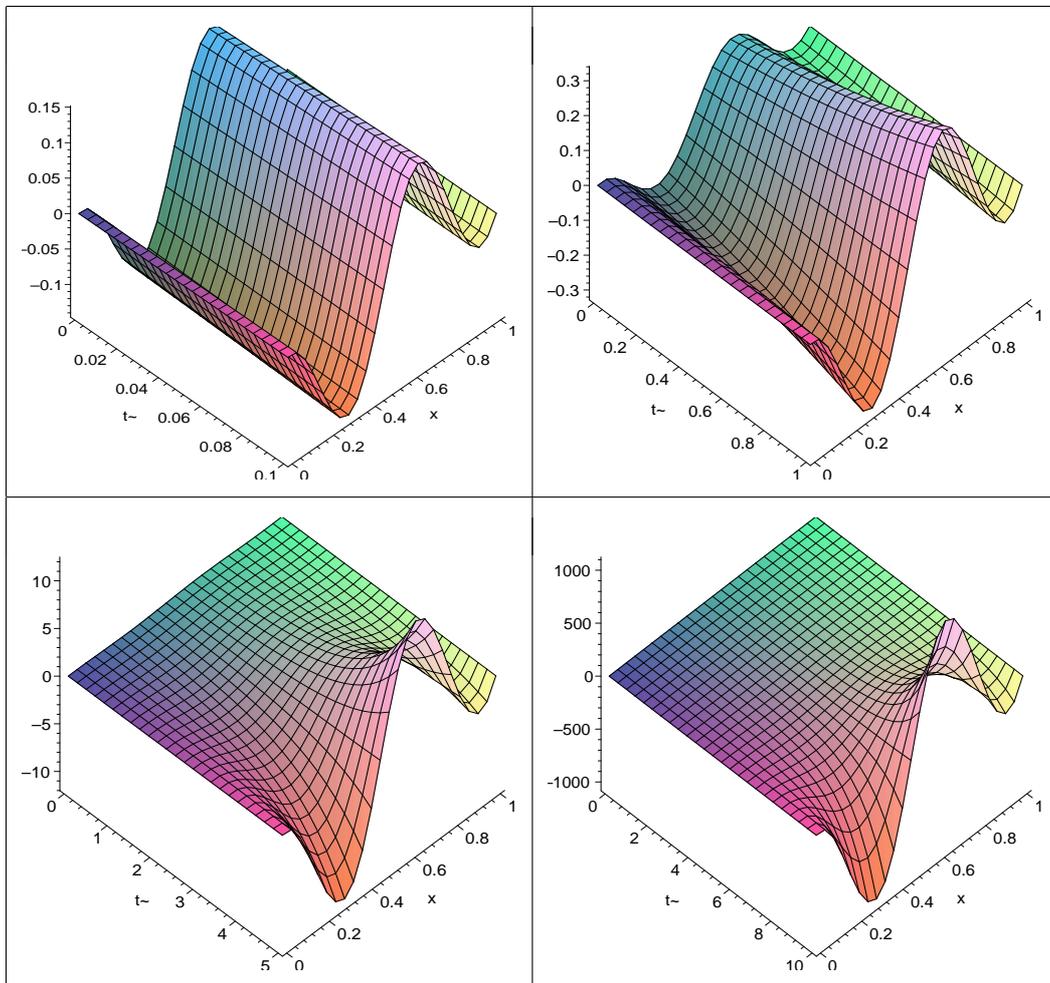


Figura 5.10 Gráficos da resposta forçada $u_p(x, t)$.

Tendo-se obtido a solução permanente, a resposta livre induzida pela resposta permanente, $u_{hp}(t, x)$, é facilmente calculada pela fórmula

$$u_{hp}(t, x) = - \int_0^1 h(t, x, \xi) u_p(0, \xi) d\xi, \quad (5.57)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é dada por (5.34). Os gráficos de u_{hp} são apresentados na figura (5.12) para diferentes valores de t . Aqui $h(t, x, \xi)$ foi truncada em $n = 384$.

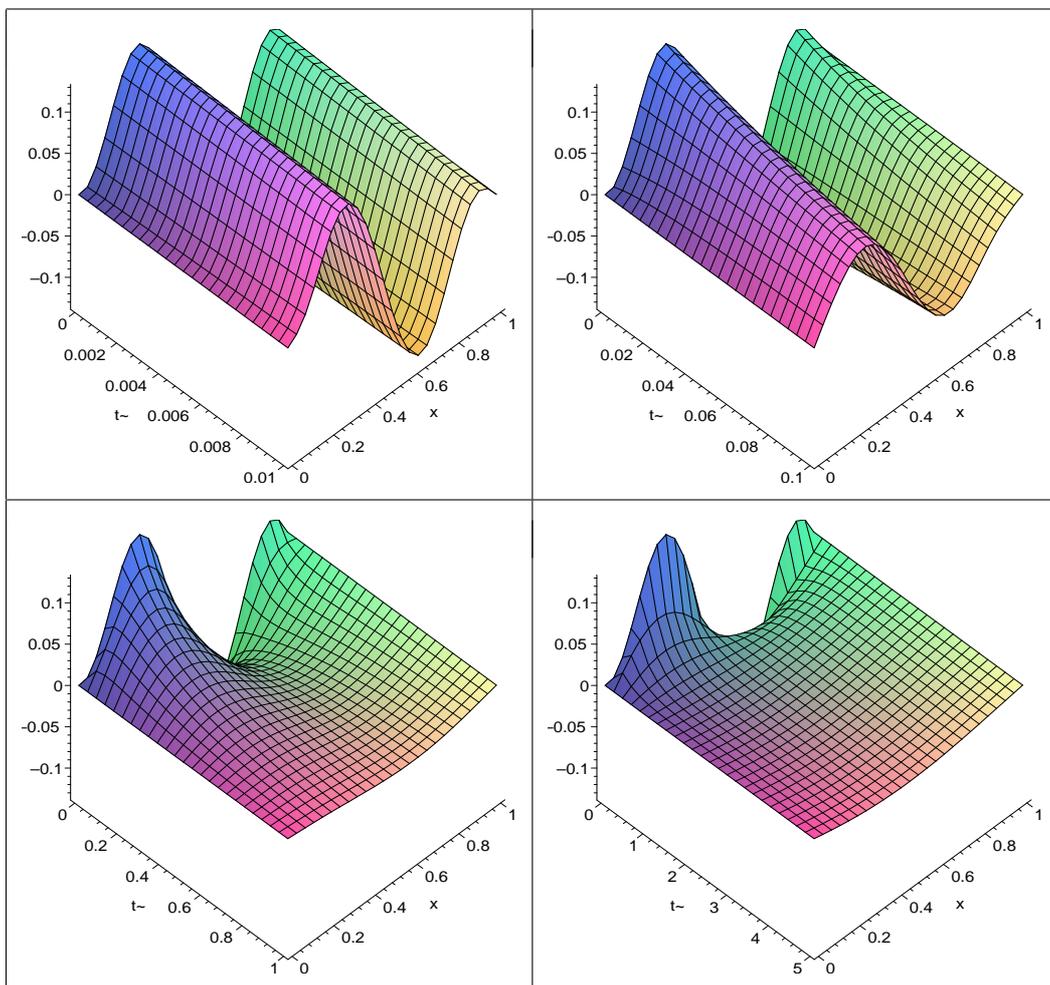


Figura 5.11 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular.

A contribuição das condições de contorno é dada por

$$u_{cc}(x,t) = +a \int_0^t 5\cos(10\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h(t-\tau, x, \xi) \right]_{\xi=0} d\tau - a \int_0^t 5\sin(10\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h(t-\tau, x, \xi) \right]_{\xi=l} d\tau \quad (5.58)$$

e pode ser observada para diferentes valores de tempo na figura a seguir

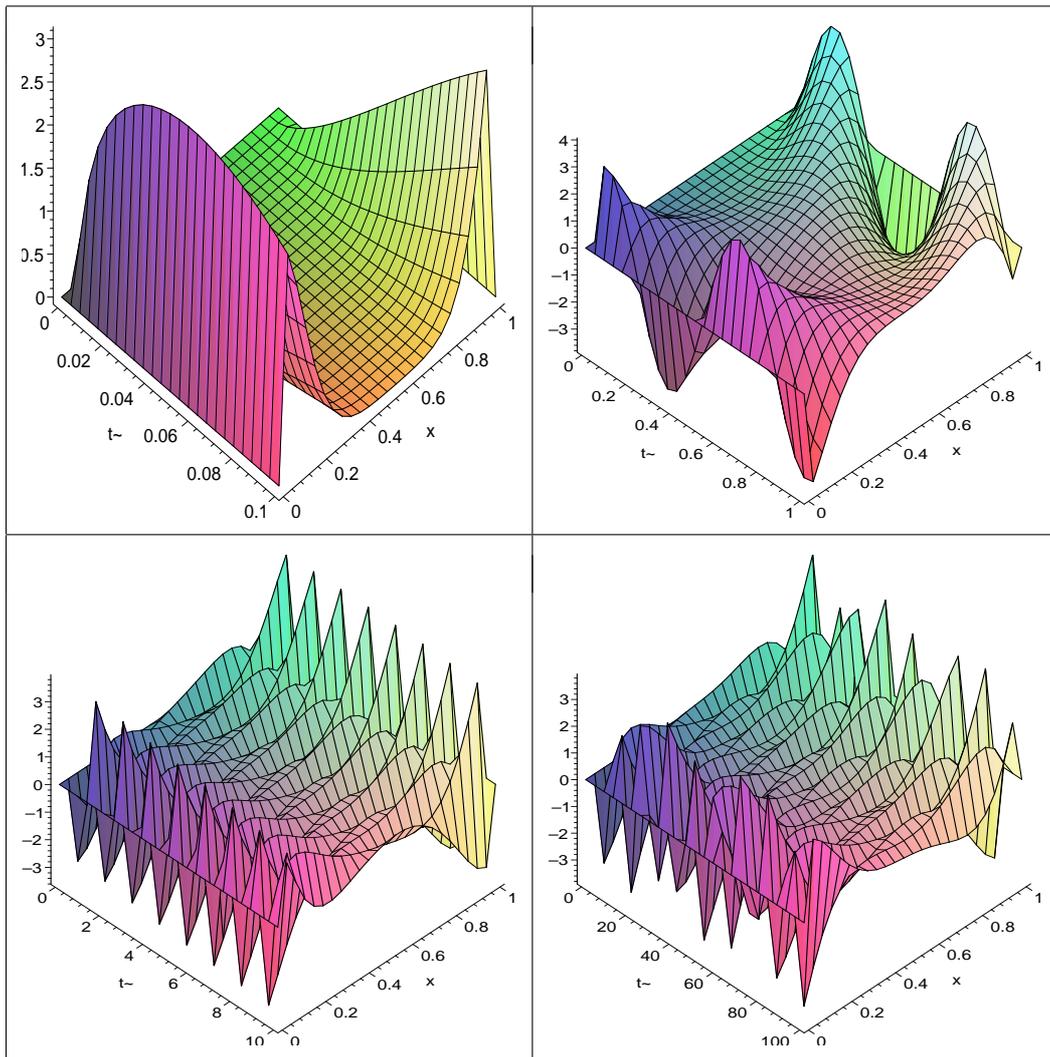


Figura 5.12 Gráficos dos termos de contorno.

A solução total do problema é dada pela soma de todas as respostas anteriores, ou seja,

$$u(t, x) = u_h(t, x) + u_{hp}(t, x) + u_p(t, x) + u_{cc}(t, x). \quad (5.59)$$

Os gráficos da solução $u(t, x)$ do problema (5.50)-(5.52) são dados na figura (5.13)

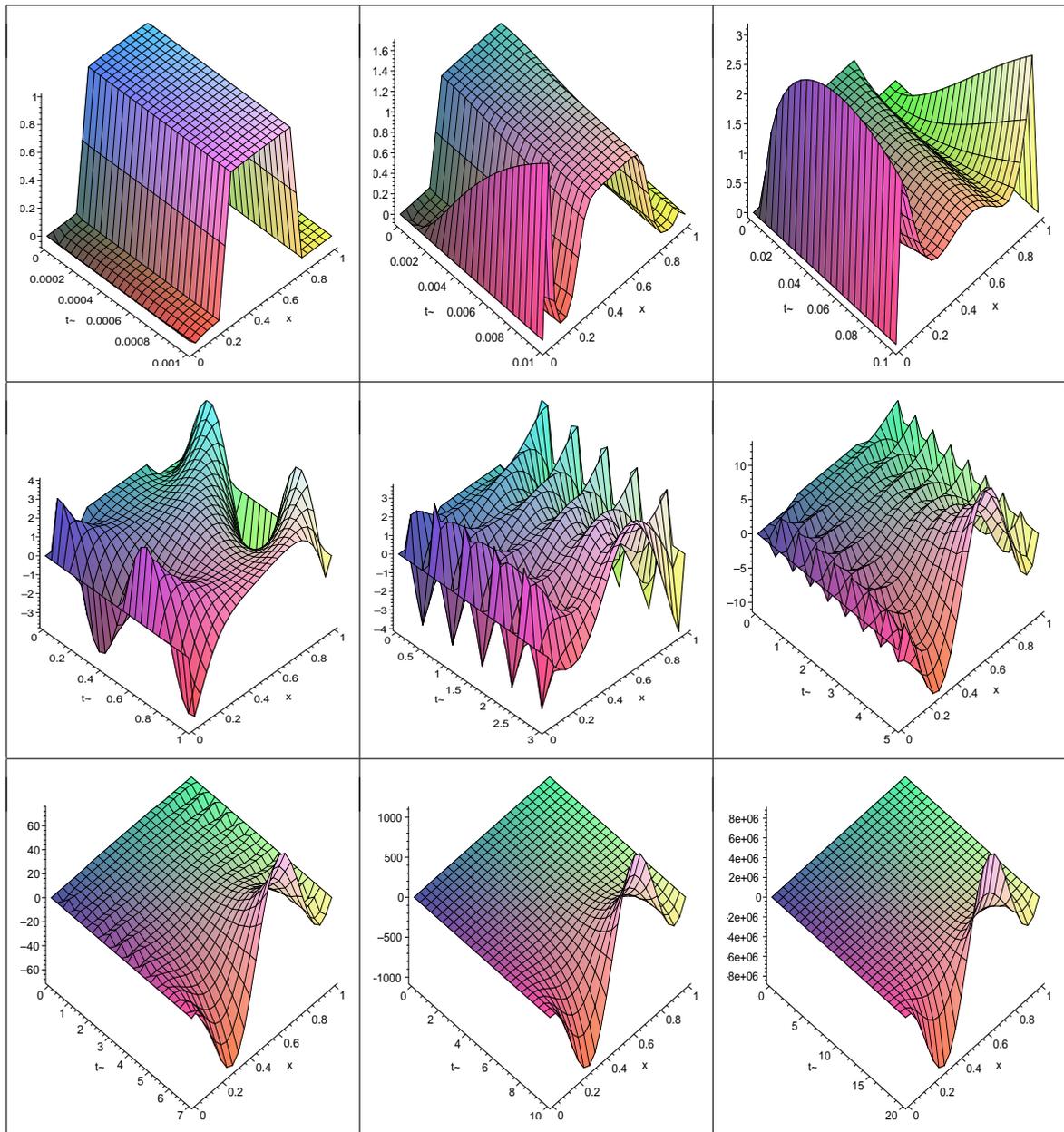


Figura 5.13 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

5.2 Domínio Bidimensional

Nesta seção, afim de ilustrar a decomposição de respostas forçadas para uma equação parabólica em duas dimensões, resolveremos a equação do calor em um domínio retangular $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$. Daremos importância apenas a resposta forçada assumindo assim, condições iniciais e de contorno homogêneas.

5.2.1 Equação do Calor em duas dimensões

Considere a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(t, x, y) \quad (5.60)$$

sujeita a condições iniciais homogêneas e condições de contorno de Dirichlet homogêneas da forma

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{em} \quad x = 0, l_1 \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad y = 0, l_2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

A solução dessa equação é dada por

$$u(t, x, y) = \int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(\tau, \xi, \zeta) h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta) d\zeta d\xi d\tau, \quad (5.62)$$

onde $h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green; para $t > \tau \geq 0$ ela satisfaz a equação homogênea

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - a \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (5.63)$$

com as condições iniciais semi homogêneas

$$\begin{aligned} h &= 0 \quad \text{em} \quad t = \tau, \\ \partial h &= \delta(x - \xi)\delta(y - \zeta) \quad \text{em} \quad t = \tau, \end{aligned} \quad (5.64)$$

e condições de contorno homogêneas.

Utilizando-se o método da decomposição de respostas forçadas podemos reescrever a solução como

$$u(t, x, y) = u_p(t, x, y) - \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} h(t, x - \xi, y - \zeta) u_p(0, \xi, \zeta) d\zeta d\xi, \quad (5.65)$$

onde função de Green $h(t, x, y, \xi, \zeta)$ é dada pela fórmula

$$h(t, x, y, \xi, \zeta) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l_1} \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{l_1} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{l_2} \operatorname{sen} \frac{m\pi \zeta}{l_2} \exp \left[-\pi^2 \left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} \right) at \right] \quad (5.66)$$

Em particular, para entradas da forma $f(t, x, y) = r(x, y)e^{\lambda t}$ supõe-se uma resposta particular $u_p(t, x, y)$ da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x, y) = v(x, y)e^{\lambda t}$ e, substituindo na equação (5.60) obtém-se o problema de contorno

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v(x, y) + \gamma v(x, y) = -p(x, y), \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad \text{em} \quad x = 0, l_1 \\ v &= 0 \quad \text{em} \quad y = 0, l_2. \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde $\gamma = \frac{\lambda}{-a}$ e $p(x, y) = \frac{r(x, y)}{a}$. Este problema tem como solução

$$v(x, y) = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p(\xi, \zeta) g(x, y, \xi, \zeta) d\zeta d\xi, \quad (5.69)$$

onde $g(x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green espacial que satisfaz

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \delta g = -\delta(x - \xi, y - \zeta), \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} g &= 0 \quad \text{em} \quad x = 0, l_1 \\ g &= 0 \quad \text{em} \quad y = 0, l_2, \end{aligned} \quad (5.71)$$

ou seja,

$$g(x, y, \xi, \zeta) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} p_n x \text{ sen} q_m y \text{ sen} p_n \xi \text{ sen} q_m \zeta}{p_n^2 + q_m^2 - \gamma}, \quad (5.72)$$

$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2} \quad (5.73)$$

Considere, agora, os parâmetros $a = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $f(t, x, y) = \cos(10x)\cos(y)e^{\lambda t}$, $\lambda = 0.1$. Os gráficos de $u_p(t, x, y)$ e $u_{hp}(t, x, y)$ são mostrados a seguir, para diferentes valores de t .

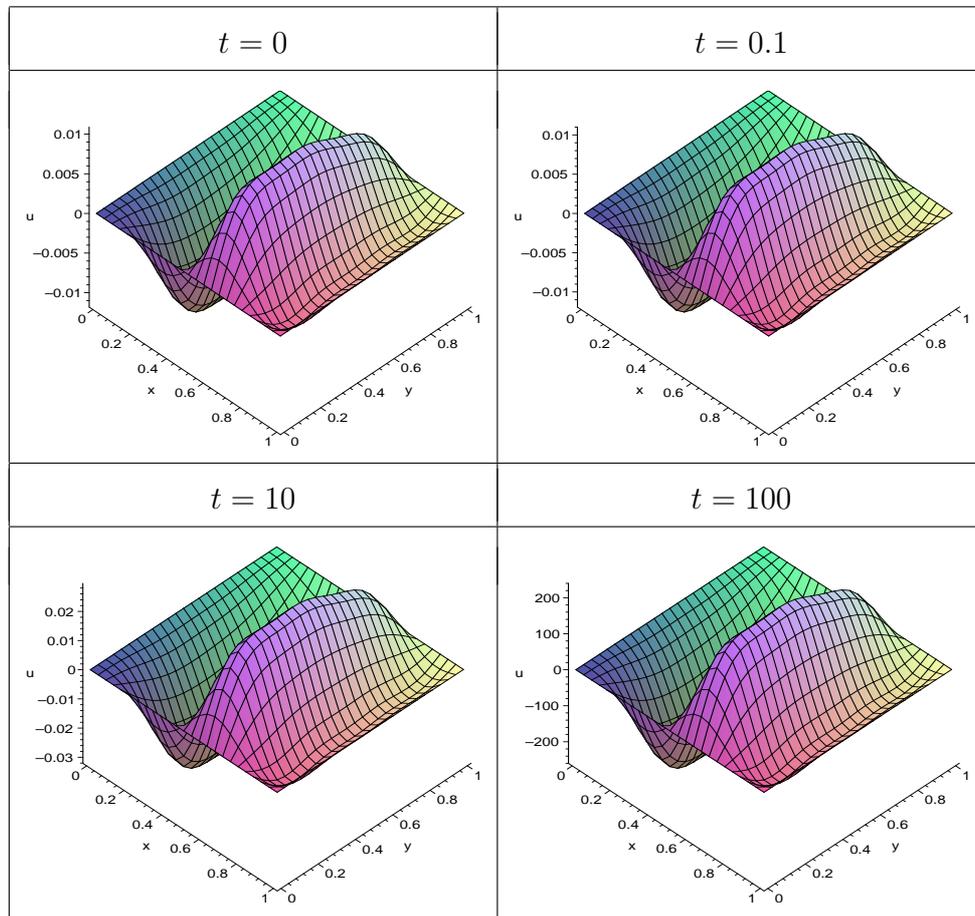


Figura 5.14 Gráficos da resposta particular $u_p(t, x, y)$.

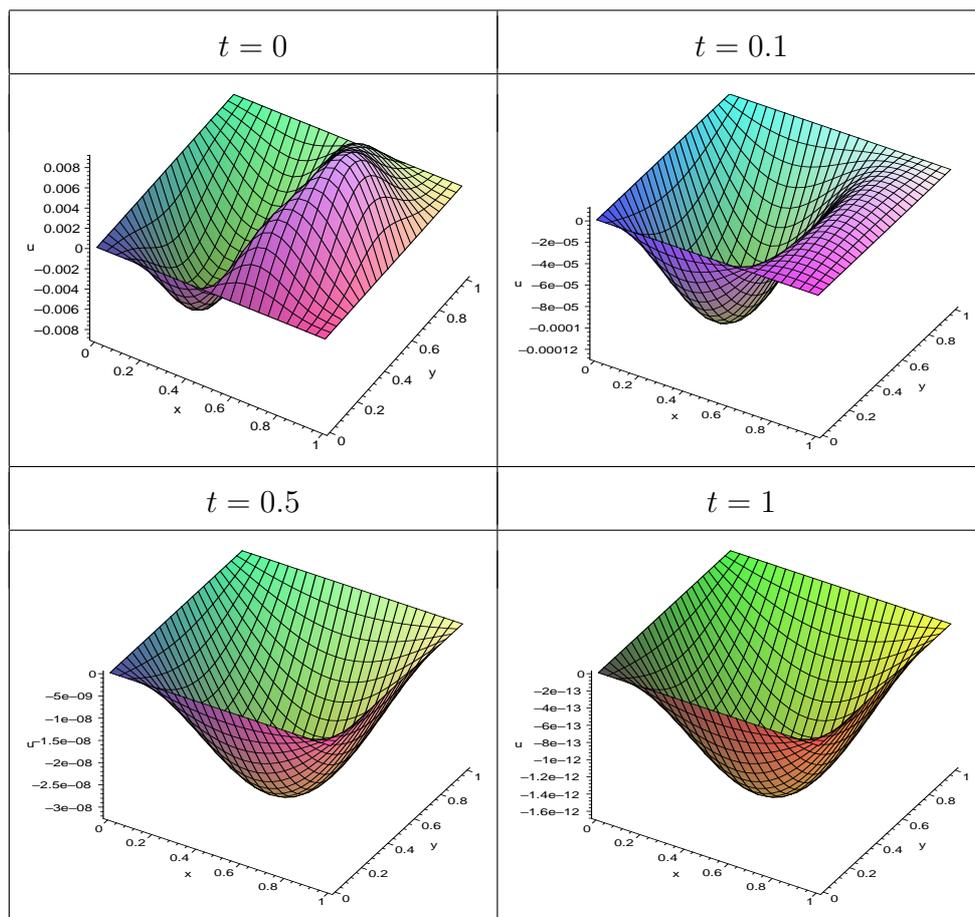


Figura 5.15 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x, y)$, induzida pela particular.

6 EQUAÇÕES DO TIPO HIPERBÓLICO

Neste capítulo serão abordadas equações diferenciais parciais de segunda ordem no tempo

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial u}{\partial t} + Cu = F \quad (6.1)$$

em que A representa uma constante não nula A e os coeficientes C , B são operadores lineares que somente incluem derivadas espaciais e cujos coeficientes são considerados constantes [3]. Assim, por exemplo

$$A\phi(x) = A\phi(x) \quad (6.2)$$

$$B\phi(x) = Q\phi'(x) + P\phi(x) + c \quad (6.3)$$

$$C\phi(x) = \begin{cases} E\phi''(x) + C\phi'(x) + B\phi(x), \\ E\phi^{(iv)}(x) + N\phi''(x) \end{cases} \quad (6.4)$$

As equações a seguir, encontradas em diversas aplicações práticas, são casos particulares das equações anteriores.

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - T u_{xx} &= f(t, x), \quad c^2 = T/\rho && \text{vibrações numa barra} \\ u_{tt} + \alpha u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) + bu &= f(t, x), && \text{telégrafo} \\ u_{tt} - a^2 u_{xx} + bu &= f(t, x), && \text{Klein-Gordon} \end{aligned}$$

6.1 Domínio Unidimensional

Nesta seção trataremos de equações diferenciais parciais lineares hiperbólicas com coeficientes constantes em um domínio unidimensional, ou seja, equações da forma (6.1) onde $u = u(t, x)$, $F = F(t, x)$ e B inclui somente derivadas em x .

6.1.1 O Problema de Cauchy na Reta

Considere a equação linear não homogênea do tipo hiperbólica com uma entrada arbitrária

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial u}{\partial t} - Cu = F(t, x), \quad (6.5)$$

onde

$$C = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0. \quad (6.6)$$

A solução do problema de Cauchy para a equação (6.64) com condição iniciais gerais

$$\begin{aligned} u &= \phi_0(x) & em & t = 0, \\ \partial_t u &= \phi_1(x) & em & t = 0, \end{aligned}$$

pode ser representada pela soma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\xi) \left[-\frac{\partial}{\partial t} h(x - \xi, t) \right] d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_1(\xi) + \phi_0(\xi)B] h(x - \xi, t) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) h(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde $h(x, t)$ é a solução fundamental do problema de Cauchy que satisfaz, para $t > 0$, a equação linear homogênea

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + B \frac{\partial h}{\partial t} - Ch = 0 \quad (6.8)$$

com condições iniciais semi-homogêneas da forma especial

$$\begin{aligned} h &= 0 & em & t = 0, \\ \partial_t h &= \delta(x - \xi) & em & t = 0. \end{aligned}$$

De acordo com a teoria desenvolvida anteriormente a solução forçada, ou seja, o terceiro termo do segundo membro da equação (6.64) pode ser decomposta

em

$$\begin{aligned}
 u_{per}(t, x) &= u_p(t, x) - u_{hp}(t, x) \\
 &= u_p(t, x) - \int_{-\infty}^{\infty} Bh(x - \xi, t)u_p(0, \xi)d\xi \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t}[h(x - \xi, t)]u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t}[u_p(0, \xi)]h(x - \xi, t) \right] d\xi.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

onde $u_{hp}(t, x)$ é a resposta livre induzida pela resposta permanente $u_p(t, x)$. Logo a solução do problema pode ser escrita conforme

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(\xi) \left[-\frac{\partial}{\partial t}h(x - \xi, t) \right] d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_1(\xi) + \phi_0(\xi)B] h(x - \xi, t)d\xi \\
 &\quad + u_p(t, x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi, t)Bu_p(0, \xi)d\xi \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t}[h(x - \xi, t)]u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t}[u_p(0, \xi)]h(x - \xi, t) \right] d\xi
 \end{aligned}$$

Em particular, considerando-se o operador C da forma completa e para entradas no sistema do tipo

$$f(t, x) = e^{\lambda t}r(x)$$

tem-se uma resposta da mesma forma

$$u_p(x, t) = e^{\lambda t}v(x) \tag{6.10}$$

onde $v(x)$ satisfaz a equação não homogênea

$$\ddot{v}(x) + \gamma\dot{v}(x) + \delta v(x) = p(x) \tag{6.11}$$

com

$$\gamma = \frac{b}{a^2}, \quad \delta = \frac{c - \lambda^2 - \lambda B}{a^2} \quad e \quad p(x) = \frac{r(x)}{-a^2},$$

que tem como uma solução particular a resposta forçada

$$\int_0^x h(x - \tau)p(\tau)d\tau \quad (6.12)$$

onde $h(x)$ satisfaz

$$\ddot{h}(x) + \gamma\dot{h}(x) + \delta h(x) = 0, \quad h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 1$$

6.1.1.1 A Equação de Klein-Gordon

A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + f(x, t) \quad (6.13)$$

é conhecida como a equação de Klein-Gordon. Ela aparece na mecânica quântica [26], bem como na redução da equação do telégrafo [38], [35].

A solução fundamental é dada por

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{\mathcal{H}(at - |x|)}{2a} J_0 \left(\frac{c}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2} \right) \quad \text{para } b = c^2 > 0 \\ h(x, t) &= \frac{\mathcal{H}(at - |x|)}{2a} I_0 \left(\frac{c}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2} \right) \quad \text{para } b = -c^2 > 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde $\mathcal{H}(z)$ é a função de Heaviside, $J_0(z)$ é a função de Bessel e $I_0(z)$ é a função de Bessel modificada.

Para as condições iniciais

$$\begin{aligned} u &= \cos(x) \quad \text{em } t = 0, \\ \partial_t u &= x \quad \text{em } t = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

e entrada $f(x, t) = e^{\lambda t} \cos(x)$, tem-se a resposta dinâmica

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi) \left[-\frac{\partial}{\partial t} h(x - \xi, t) \right] d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \xi h(x - \xi, t) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \tau} \cos(\xi) h(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (6.16)$$

que pode ser dividida em duas partes:

1) *Solução para $b = -c^2 < 0$:*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(x - at)] + \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1 \left(c\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a} \right)}{\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a^2}} \cos(\xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} I_0 \left(c\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a} \right) \xi d\xi \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0 \left(c\sqrt{(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2/a} \right) e^{\lambda \tau} \cos(\xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde $I_0(z)$ e $I_1(z)$ são as funções de Bessel modificadas de primeira espécie.

2) *Solução para $b = c^2 > 0$:*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\phi(x + at) + \phi(x - at)] - \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1 \left(c\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a} \right)}{\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a^2}} \cos(\xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} J_0 \left(c\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a} \right) \xi d\xi \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} J_0 \left(c\sqrt{(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2/a} \right) e^{\lambda \tau} \cos(\xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde $J_0(z)$ e $J_1(z)$ são as funções de Bessel de primeira espécie.

A seguir, considerou-se a equação de Klein-Gordon com $a = 1$, $b = 0.1$. Neste caso, segue que $b = 0.1 = c^2 > 0$, logo utilizaremos (6.18). Os três primeiros termos do segundo membro correspondem a solução homogênea do problema. Essa solução foi calculada para a função de Bessel com 10 termos e está graficada a seguir para diferentes valores de t .

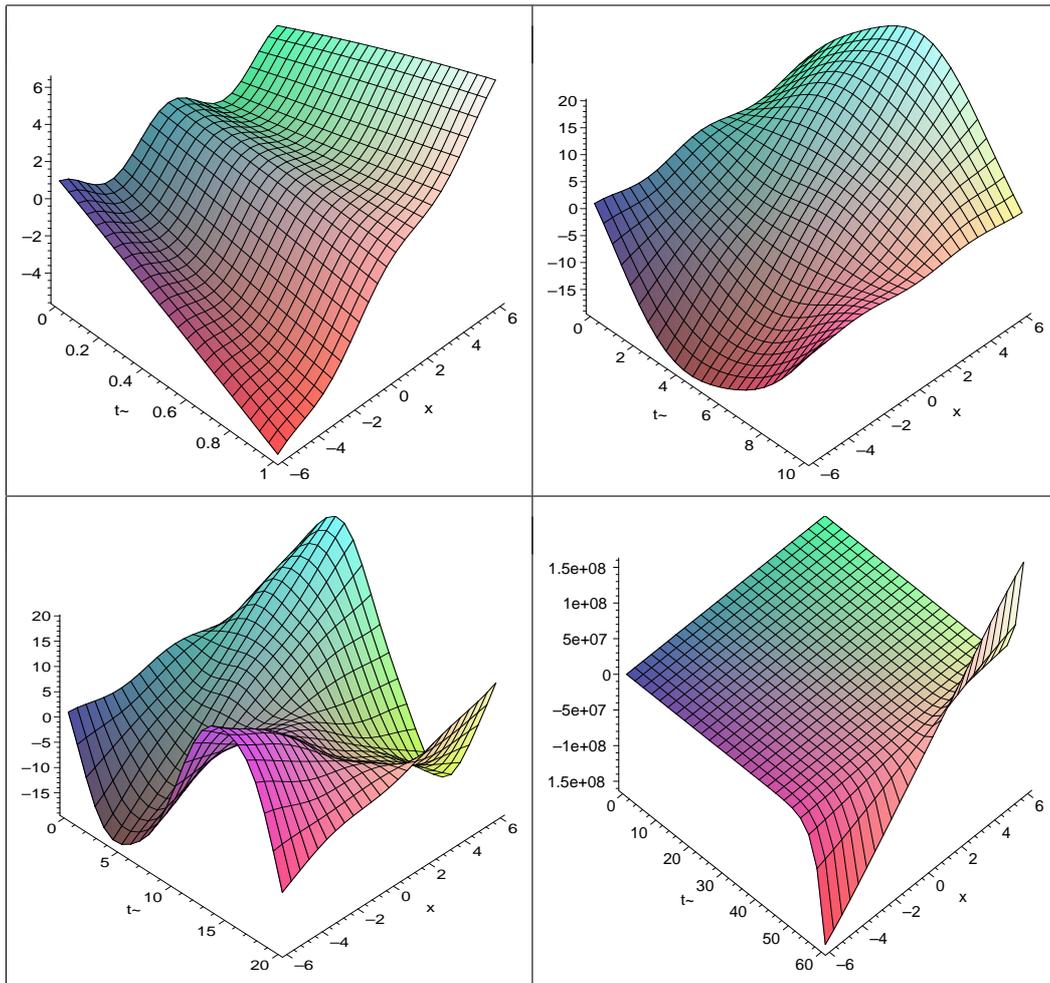


Figura 6.1 Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$.

A resposta particular u_p é dada por $u_p(x, t) = e^{\lambda t}v(x)$, onde $v(x)$ satisfaz equação diferencial

$$\ddot{v}(x) - 0.11v(x) = -\cos(x) \quad (6.19)$$

com condições iniciais nulas. Executando-se os cálculos, obtém-se

$$u_p(x, t) = e^{0.1t} \frac{100}{111} \cos(x) \quad (6.20)$$

mostrado para diversos valores de tempo na figura a seguir

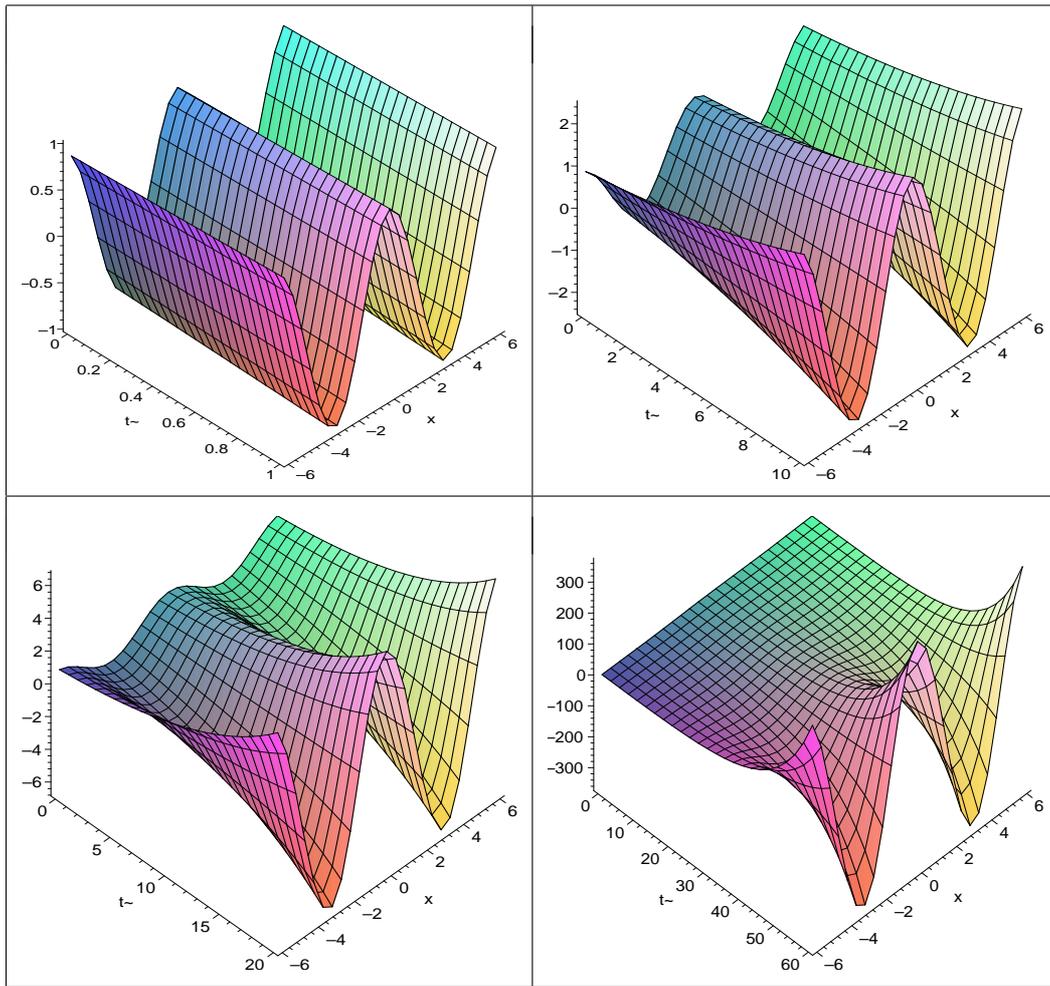


Figura 6.2 Gráficos da resposta particular $u_p(x, t)$.

Observe-se que a solução particular u_p aumenta com passar do tempo.

Como $B = 0$, resposta livre u_{hp} induzida pela permanente é calculada através da soma

$$u_{hp} = - \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t} J_0 \left(c\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a} \right) u_p(0, \xi) - \frac{\partial}{\partial t} u_p(0, \xi) J_0 \left(c\sqrt{t^2 - (x - \xi)^2/a} \right) \right] d\xi \quad (6.21)$$

que calculamos para a função de Bessel truncada em 10 termos e obtemos os seguintes gráficos

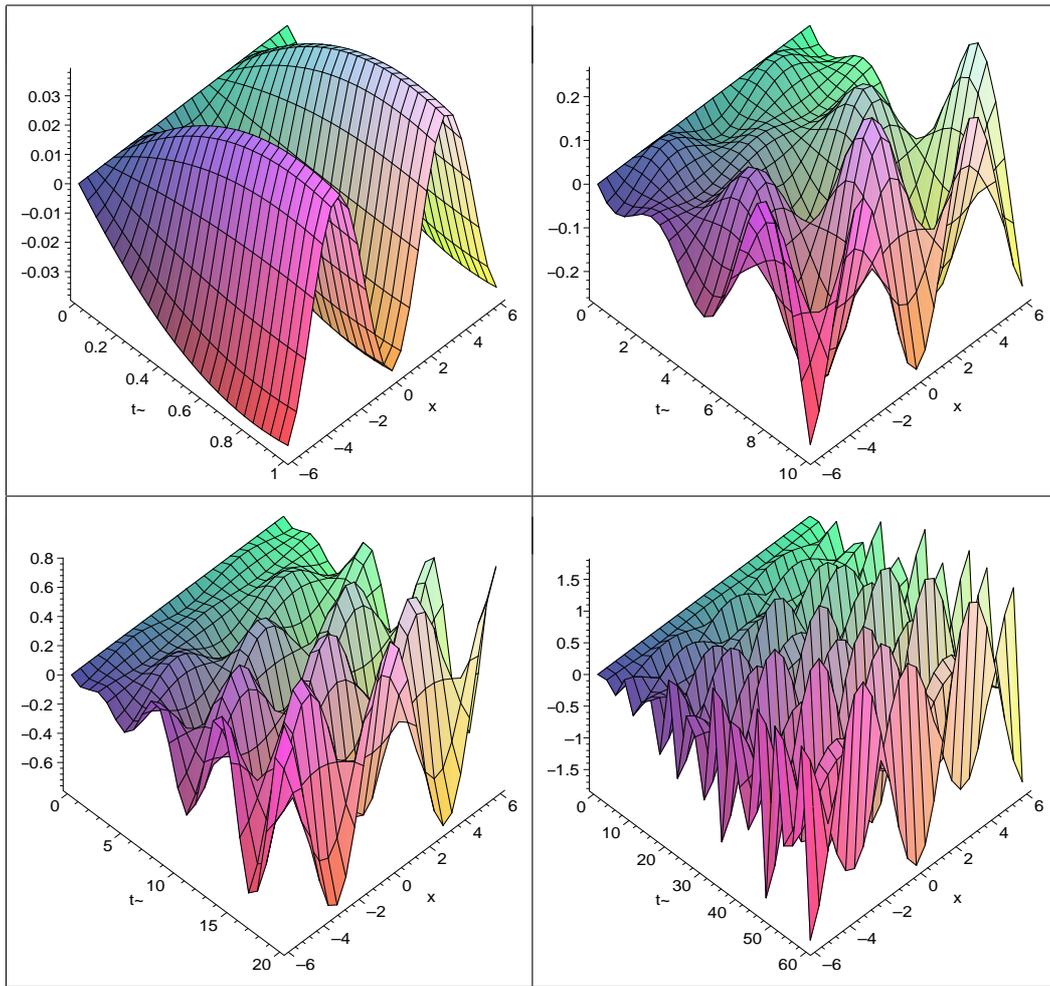


Figura 6.3 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular.

A solução total do problema é dada pela soma de todas as respostas anteriores, ou seja,

$$u(t, x) = u_h(t, x) + u_p(t, x) + u_{hp}(t, x). \quad (6.22)$$

Os resultados podem ser observados na figura (6.7) para diferentes valores de t . Comparando-se as figuras (6.1) e (6.7) nota-se a solução homogênea (u_h) é quem domina o sistema, pois com o passar do tempo solução total adquire a forma da solução homogênea.

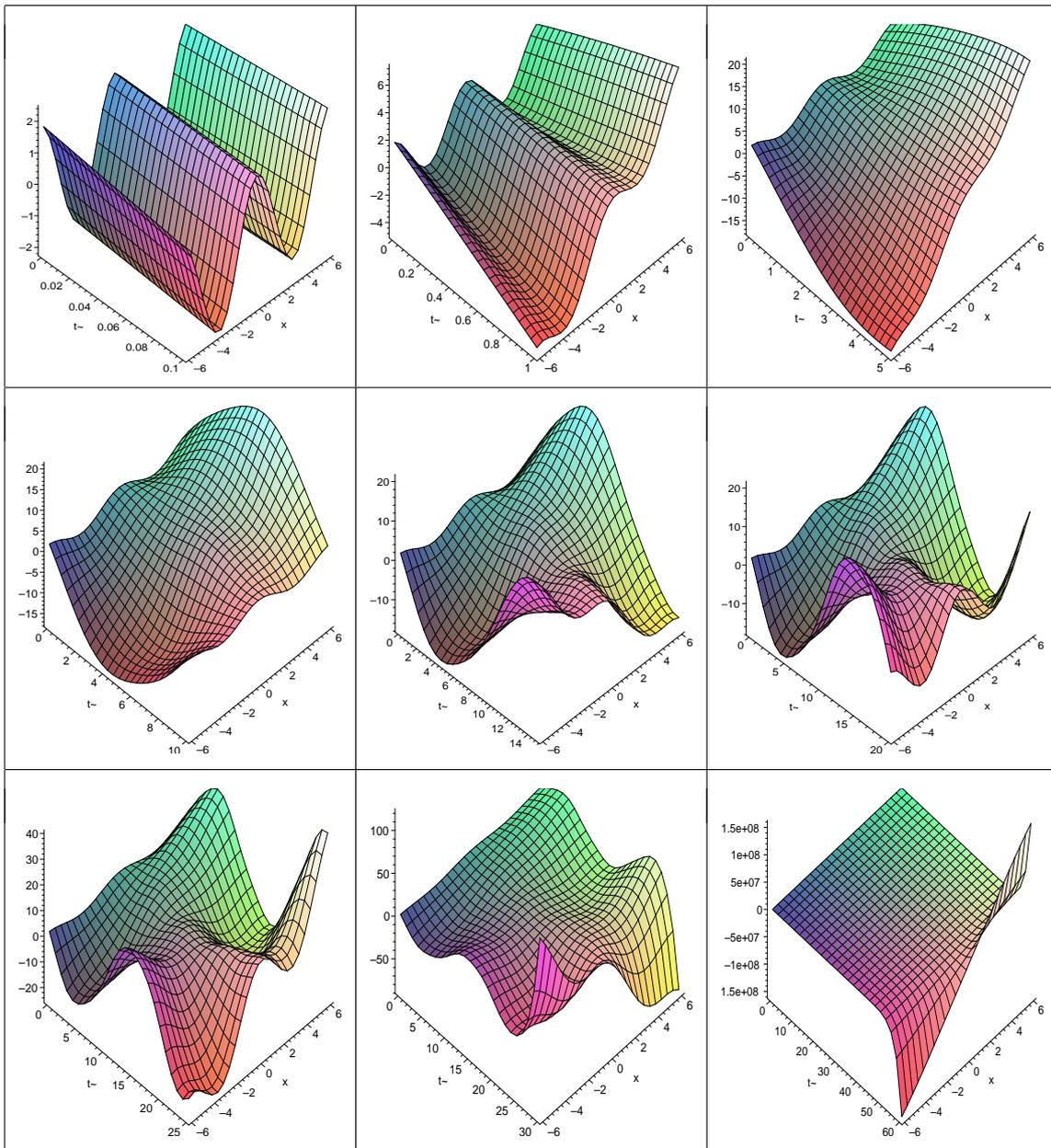


Figura 6.4 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

6.1.1.2 Equação da Onda Amortecida com Convecção e Reação

Com o seguinte tipo de equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(x, t) \quad (6.23)$$

encontram-se aplicações sobre o movimento de dejetos químicos ou poluentes que entram no sistema água-terra, os quais podem ser transportados longe da fonte de produção e afetando o meio ambiente [18].

A solução fundamental é dada por:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{1}{2a} \mathcal{H}(at - |x|) e^{\left(-\frac{bx}{2a^2} - \frac{kt}{2}\right)} I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \quad \text{se } c + \frac{k^2}{4} - \frac{b^2}{4a^2} = \sigma^2 > 0 \\ h(x, t) &= \frac{1}{2a} \mathcal{H}(at - |x|) e^{\left(-\frac{bx}{2a^2} - \frac{kt}{2}\right)} J_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \quad \text{se } c + \frac{k^2}{4} - \frac{b^2}{4a^2} = -\sigma^2 < 0 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{H}(z)$ é a função de Heaviside, $J_0(z)$ é a função de Bessel e $I_0(z)$ é a função de Bessel modificada.

Considerando-se as condições iniciais homogêneas

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{em } t = 0 \\ \partial_t u &= 0 \quad \text{em } t = 0 \end{aligned} \tag{6.24}$$

e uma entrada $f(t, x)$ tem-se a resposta forçada

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi d\tau \tag{6.25}$$

que pode ser escrita para

$$c + \frac{k^2}{4} - \frac{b^2}{4a^2} = \sigma^2 > 0:$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} e^{\left[\frac{b(x-\xi)}{2a^2} - \frac{k(t-tau)}{2}\right]} I_0 \left(\sigma \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2/a^2} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \tag{6.26}$$

$$c + \frac{k^2}{4} - \frac{b^2}{4a^2} = -\sigma^2 < 0:$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} e^{\left[\frac{b(x-\xi)}{2a^2} - \frac{k(t-tau)}{2}\right]} J_0 \left(\sigma \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2/a^2} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \tag{6.27}$$

Para os parâmetros $a = 1$, $b = 0.1$, $c = -0.1$, $k = 1$, $\lambda = 0.1$ e $f(t, x) = e^{\lambda t} 10(\cos(x) + \sin(5x))$, recaímos no caso $c + \frac{k^2}{4} - \frac{b^2}{4a^2} = \sigma^2 > 0$.

Para calcularmos essa resposta usa-se o método da decomposição da integral de convolução. Isso resulta em uma resposta particular, u_p , e uma resposta livre, u_{hp} , induzida pela resposta particular. Assim,

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= u_p(t, x) - u_{hp}(t, x) \\
 &= u_p(t, x) - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} e^{\left[\frac{b(x-\xi)}{2a^2} - \frac{t}{2}\right]} I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2} \right) u_p(0, \xi) d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{\left[\frac{b(x-\xi)}{2a^2} - \frac{t}{2}\right]} I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2} \right) \right] u_p(0, \xi) d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] e^{\left[\frac{b(x-\xi)}{2a^2} - \frac{t}{2}\right]} I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2} \right) d\xi.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Supondo uma solução para a equação diferencial (6.54) da forma $u = e^{\lambda t} v(x)$ e, substituindo-a na mesma, obtém-se a equação diferencial ordinária para $v(x)$ da forma

$$\ddot{v}(x) + 0.1 \dot{v}(x) - 0.21 v(x) = -10(\cos(x) + \sin(5x)) \tag{6.29}$$

com condições iniciais nulas. Executando-se os cálculos, obtém-se

$$u_p(t, x) = e^{0.1t} (8.2084 \cos(x) - 0.6784 \sin(x) + 0.0078 \cos(5x) + 0.3965 \sin(5x)) \tag{6.30}$$

que podemos visualizar na figura (6.5).

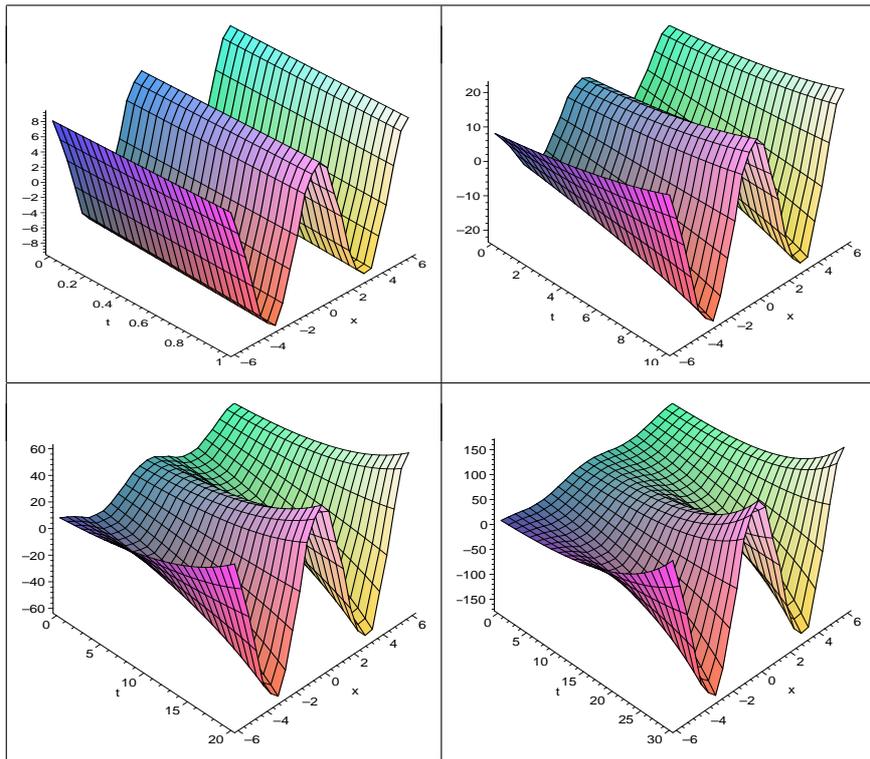


Figura 6.5 Gráficos da resposta particular $u_p(x, t)$.

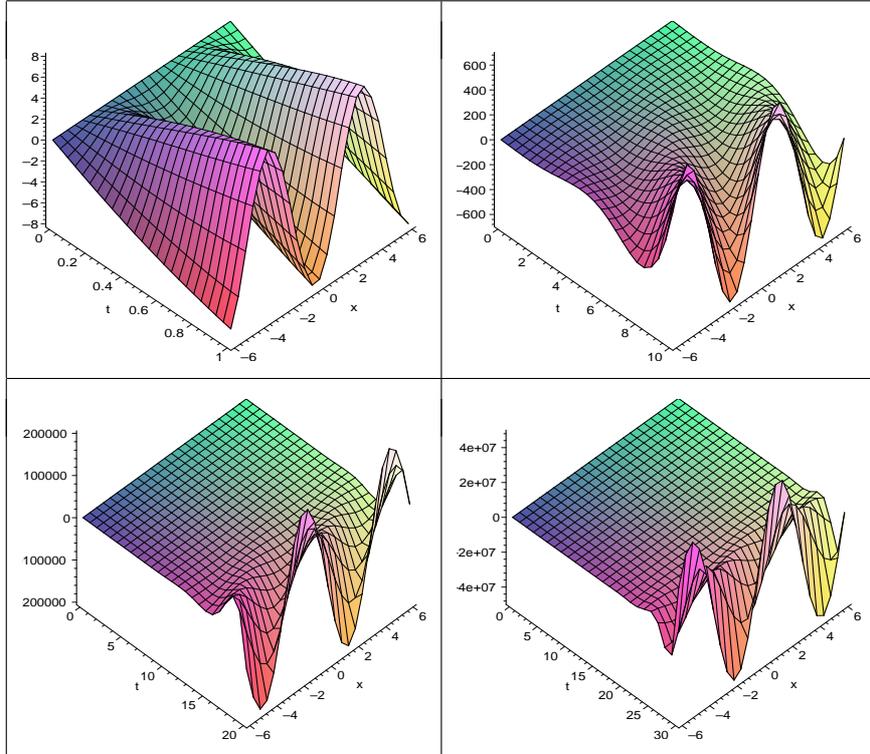


Figura 6.6 Gráficos da resposta livre induzida $u_{hp}(x, t)$.

A resposta livre u_{hp} , ou seja, os dois últimos termos da equação (6.28), fica determinada com o auxílio da resposta permanente $u_p(x, t)$. Calculou-se u_h para a função de Bessel truncada em 10 termos e pode ser visualizada, para diferentes valores de tempo, na figura (6.6), onde nota-se um grande crescimento da solução com o passar do tempo.

A solução forçada do problema (6.54) com os parâmetros dados fica definida por

$$u(t, x) = u_p(t, x) + u_h(t, x). \quad (6.31)$$

e é apresentada na figura a seguir.

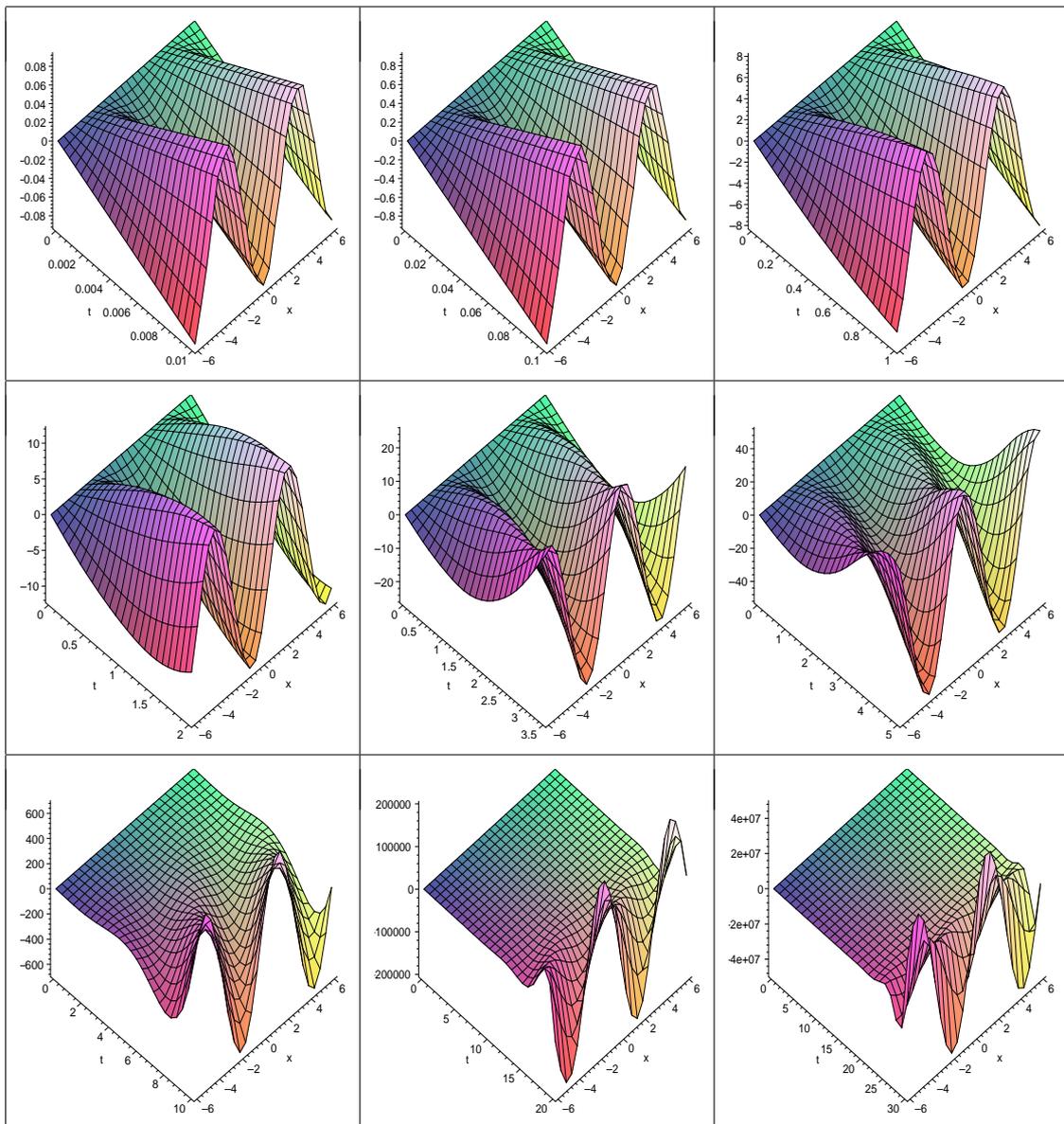


Figura 6.7 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

Nota-se que a solução é dominada pela resposta livre u_{hp} , pois depois de um certo tempo o gráfico de $u(t, x)$ toma a forma do gráfico da resposta livre.

6.1.2 Domínio Limitado com Condições de Contorno Homogêneas

Em geral uma equação linear unidimensional não homogênea do tipo hiperbólica com uma entrada arbitrária e coeficientes constantes é escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial u}{\partial t} - Cu = F(t, x) \quad (6.32)$$

onde o operador C foi definido anteriormente.

Considere o problema de contorno não estacionário para a equação (6.32) com condições iniciais

$$\begin{aligned} u &= \phi_0(x) \quad em \quad t = 0, \\ \partial_t u &= \phi_1(x) \quad em \quad t = 0, \end{aligned} \quad (6.33)$$

e condições de contorno homogêneas da forma arbitrária

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{01} u &= 0 \quad em \quad x = 0, \\ \beta_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{02} u &= 0 \quad em \quad x = L. \end{aligned} \quad (6.34)$$

A solução do problema (6.32), (6.33), (6.34) pode ser representada pela soma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^L \phi_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial t} h(t, x, \xi) \right] d\xi + \int_0^L [\phi_1(\xi) + \phi_0(\xi)B] h(t, x, \xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^L f(\xi, \tau) h(t - \tau, x, \xi) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (6.35)$$

Aqui, a função de Green $h(x, \xi, t)$ é determinada resolvendo-se a equação equação linear homogênea

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + B \frac{\partial h}{\partial t} - Ch = 0 \quad (6.36)$$

com condições iniciais semi-homogêneas da forma especial

$$\begin{aligned} h &= 0 & \text{em } t = 0, \\ \partial_t h &= \delta(x - \xi) & \text{em } t = 0, \end{aligned}$$

e as condições de contorno (6.34).

Utilizando o método da decomposição de respostas forçadas podemos reescrever a solução como

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^L \phi_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial t} h(t, x, \xi) \right] d\xi + \int_0^L [\phi_1(\xi) + \phi_0(\xi)B] h(t, x, \xi) d\xi \\ &+ u_p(t, x) - \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, \xi)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(t, x, \xi) \right] d\xi \\ &- \int_0^L h(t, x, \xi) B u_p(0, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (6.37)$$

Em particular, considerando-se o operador C da forma completa, ou seja,

$$C = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0 \quad (6.38)$$

e para entradas no sistema do tipo

$$f(t, x) = e^{\lambda t} r(x)$$

tem-se uma resposta da mesma forma

$$u_p(t, x) = e^{\lambda t} v(x) \quad (6.39)$$

onde $v(x)$ satisfaz o problema não homogêneo

$$\ddot{v}(x) + \gamma \dot{v}(x) + \delta v(x) = p(x) \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \frac{\partial g}{\partial x} + \alpha_{01} g &= 0 \quad \text{em } x = 0, \\ \beta_{12} \frac{\partial g}{\partial x} + \beta_{02} g &= 0 \quad \text{em } x = L. \end{aligned} \quad (6.41)$$

com

$$\gamma = \frac{b}{a^2}, \quad \delta = \frac{c - \lambda^2 - \lambda B}{a^2} \quad \text{e} \quad p(x) = \frac{r(x)}{-a^2},$$

que tem como uma solução particular a resposta forçada

$$\int_0^l g(x, \xi) p(\xi) d\xi, \quad (6.42)$$

onde $g(x, \xi)$ é a função de Green que satisfaz

$$\ddot{g}(x, \xi) + \gamma \dot{g}(x, \xi) + \delta g(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

e condições de contorno (6.41).

6.1.2.1 Equação de Klein-Gordon

Considere a equação de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + f(x, t) \quad (6.43)$$

sujeita a condições iniciais

$$\begin{aligned} u &= -\mathcal{H}(x - 0.75) + \mathcal{H}(x - 0.25) \quad \text{em } t = 0 \\ \partial_t u &= 3\cos(x) \quad \text{em } t = 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

e condições de contorno

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{em } x = 0 \\ u &= 0 \quad \text{em } x = l \end{aligned} \quad (6.45)$$

Se considerarmos uma entrada da forma $f(t, x) = 50e^{\lambda t} \cos(20x)$ tem-se a solução dinâmica dada por

$$\begin{aligned}
u(t, x) = & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l (-\mathcal{H}(\xi - 0.75) + \mathcal{H}(\xi - 0.25))h(t, x, \xi)d\xi \\
& + 3 \int_0^l \cos(\xi)h(t, x, \xi)d\xi \\
& + \int_0^t \int_0^l 50e^{\lambda\tau} \cos(20\xi)h(t - \tau, x, \xi)d\xi d\tau,
\end{aligned} \tag{6.46}$$

onde

$$h(t, x, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\lambda_n x) \text{sen}(\lambda_n \xi) \frac{\text{sen}\left(t\sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}\right)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2 + b}}, \tag{6.47}$$

$$\lambda_n = \pi n.$$

A resposta homogênea é dada pelos dois primeiros termos do segundo membro da equação (6.46). Calculando-se para a função de Green com 284 termos e utilizando-se os parâmetros $a = 1$, $b = 0.1$, $l = 1$ $\lambda = 1.03i$, $i = \sqrt{-1}$ obtém-se os seguintes gráficos

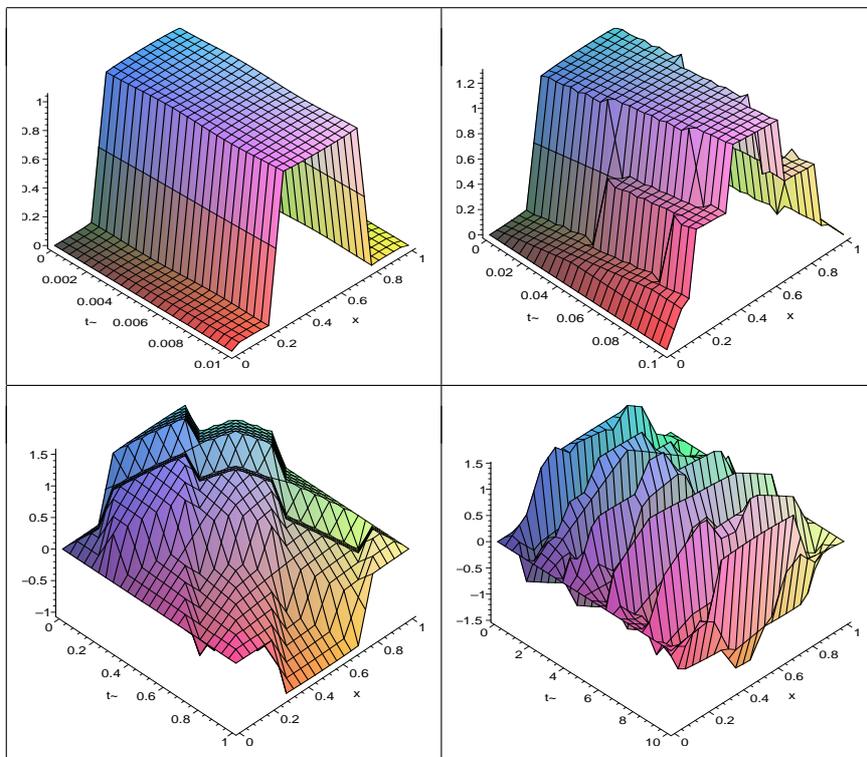


Figura 6.8 Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$.

Decompondo-se a resposta forçada, ou seja, o terceiro termo da equação(6.46) em uma resposta livre (u_{hp}) e uma resposta permanente (u_p), tem-se a soma

$$u_p(t, x) - \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, \xi)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(t, x, \xi) \right] d\xi \quad (6.48)$$

Para calcularmos $u_p(t, x)$ supomos uma resposta da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x) = e^{\lambda t} v(x)$, e substituímos na equação (7.66), resultando

$$\ddot{v}(x) + 0.9609v(x) = -50\cos(20x) \quad (6.49)$$

com condições de contorno homogêneas.

Sabemos que essa equação tem como solução

$$v(x) = \int_0^l g(x, \xi) p(\xi) d\xi, \quad (6.50)$$

onde

$$g(x, \xi) = \begin{cases} -0.593 e^{(0.980x-0.980\xi)} - 0.0836 e^{(-0.980x+0.980\xi)} \\ +0.593 e^{(-0.980x-0.980\xi)} + 0.0836 e^{(0.980x+0.980\xi)}, & x < \xi \\ -0.0836 e^{(0.980x-0.980\xi)} - 0.593 e^{(-0.980x+0.980\xi)} \\ +0.593 e^{(-0.980x-0.980\xi)} + 0.0836 e^{(0.980x+0.980\xi)}, & \xi < x \end{cases} \quad (6.51)$$

Os gráficos da parte real de $u_p(t, x) = e^{\lambda x}(v)(x)$ para diversos tempos podem ser vistos na figura (6.9).

Tendo-se obtido a solução permanente, a resposta livre induzida pela resposta permanente, $u_{ph}(t, x)$, é facilmente calculada pela fórmula

$$u_{hp}(t, x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, \xi)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(t, x, \xi) \right] d\xi \quad (6.52)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é dada por (6.47). Os gráficos da parte real de u_{hp} são apresentados na figura (6.10) para diferentes valores de t .

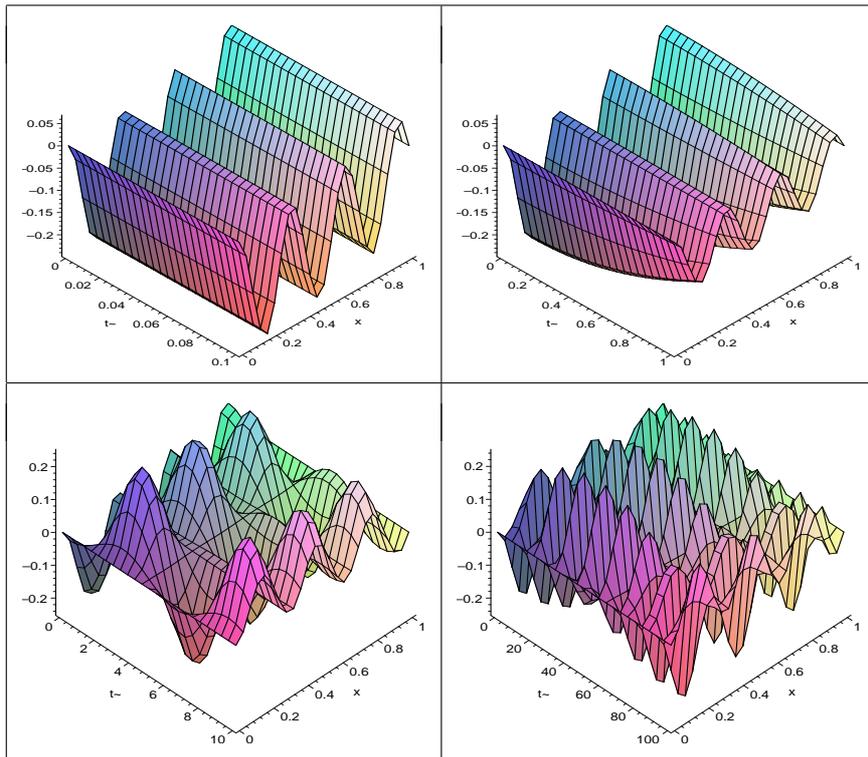


Figura 6.9 Gráficos da resposta forçada $u_p(x, t)$.

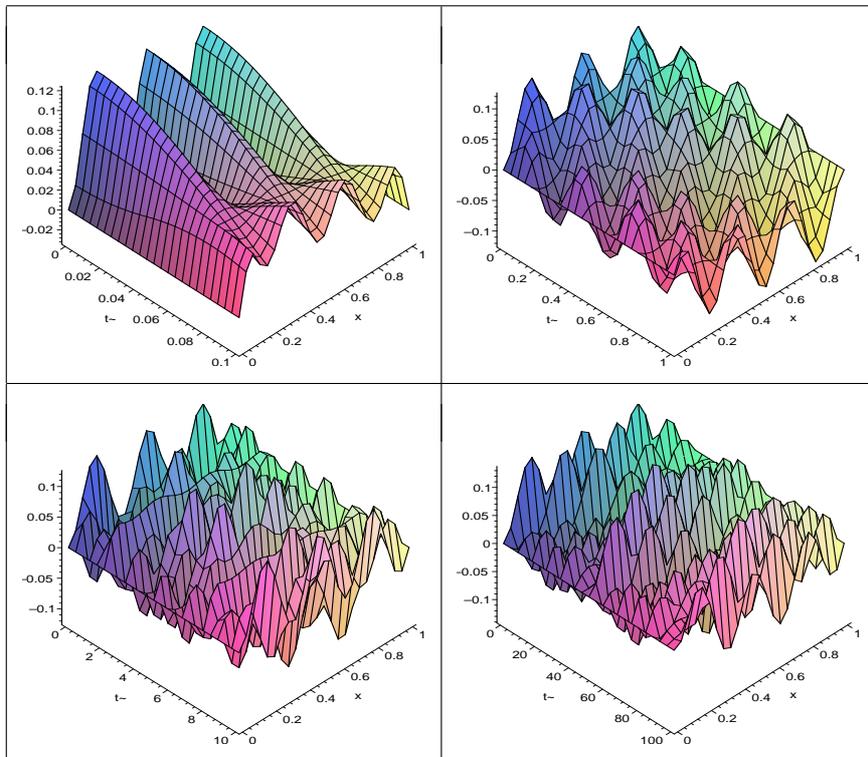


Figura 6.10 Gráficos da resposta livre (u_{hp}) induzida pela particular.

A resposta $u(t, x)$ é dada pela soma das três parcelas anteriores, ou seja,

$$u(t, x) = u_h + u_p + u_{hp}. \quad (6.53)$$

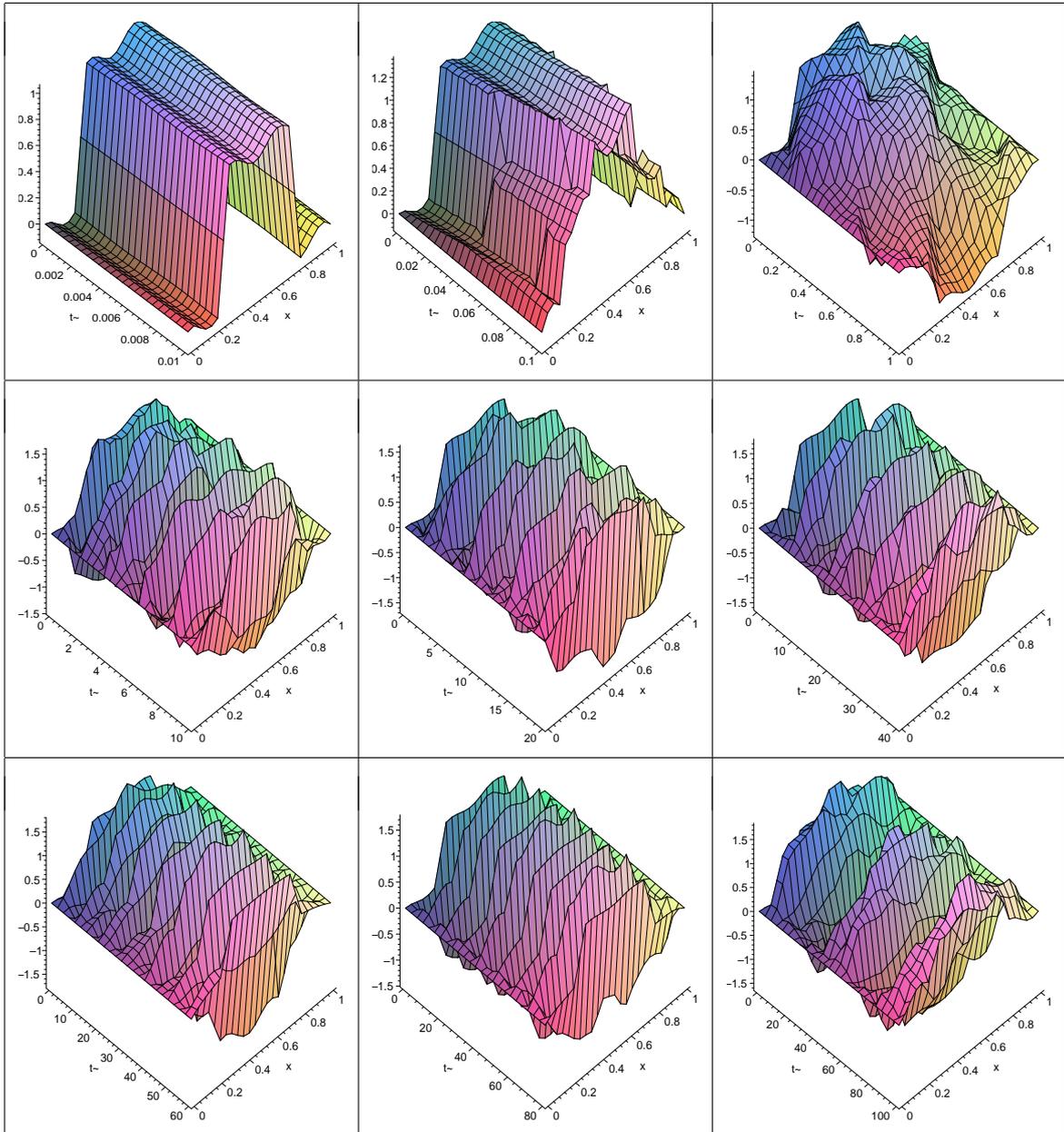


Figura 6.11 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

6.1.2.2 Equação da Onda Amortecida com Convecção e Reação

Considere a equação hiperbólica de forma completa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(t, x) \quad (6.54)$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} u &= x^2 & \text{em } t = 0 \\ \partial_t u &= 3\cos(4x) & \text{em } t = 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

e condições de contorno

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{em } x = 0, \\ u &= 0 & \text{em } x = l. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Para uma entrada da forma $f(t, x) = 50e^{\lambda t} \text{sen}(10x)x^2$ tem-se como solução dinâmica

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l x^2 h(t, x, \xi) d\xi \\ &+ 3 \int_0^l [\cos(4\xi) + \xi^2] h(t, x, \xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^l 50e^{\lambda\tau} \text{sen}(10\xi) \xi^2 h(t - \tau, x, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (6.57)$$

onde

$$\begin{aligned} h(x, \xi, t) &= \frac{2}{l} e^{\left[\frac{b(\xi-x)}{2a^2} - \frac{kt}{2}\right]} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \frac{\text{sen}(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}}, \\ \lambda_n &= \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l} + \frac{b^2}{4a^2} - c - \frac{k^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Considerando-se os parâmetros $a = 1$, $b = 1$, $c = 1.11$, $k = 1$, $\lambda = 0.1$, $l = 1$ e fazendo-se $n = 1..284$ em $h(x, \xi, t)$ a solução homogênea do problema é dada na figura a seguir

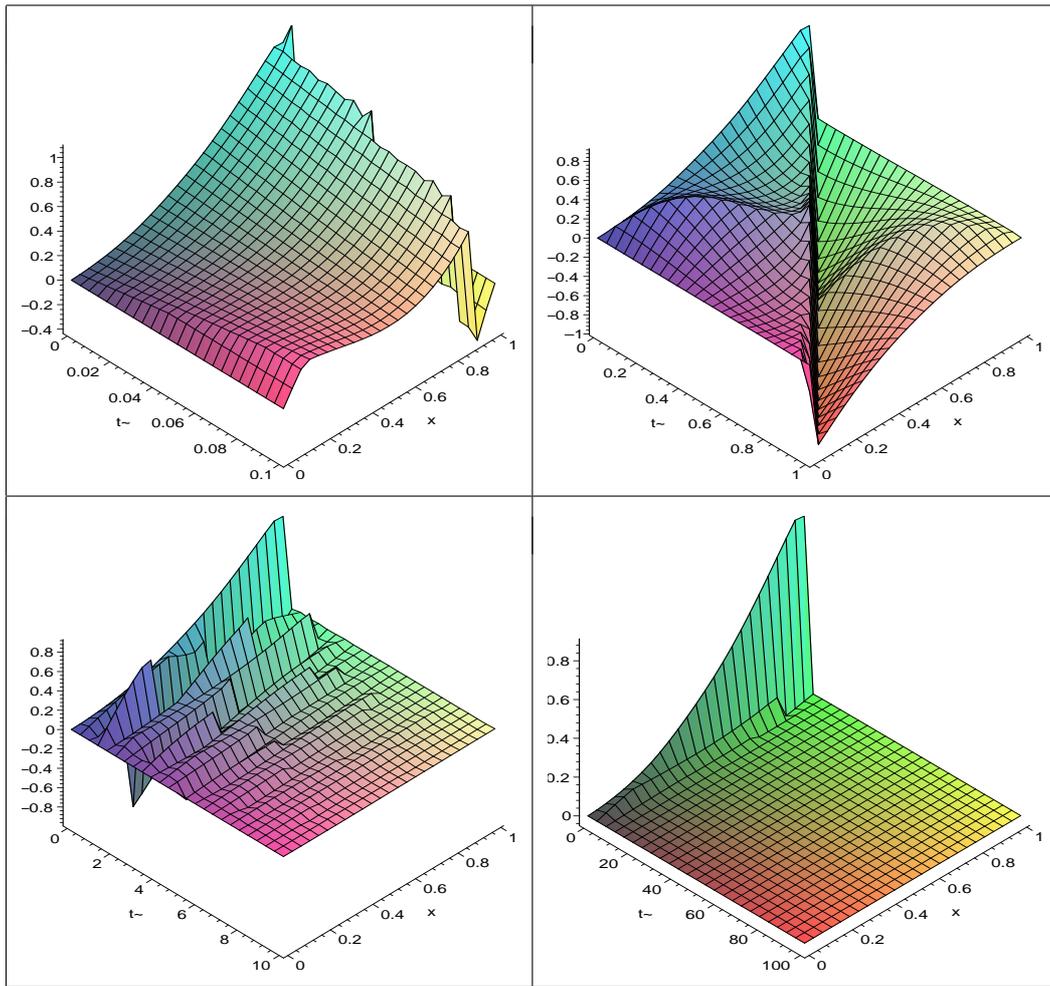


Figura 6.12 Gráficos da resposta homogênea $u_h(x, t)$.

Supondo-se uma resposta da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x) = e^{\lambda t}v(x)$ e substituindo na equação resulta

$$\ddot{v}(x) + \dot{v}(x) + v(x) = -50\text{sen}(10x)x^2 \quad (6.59)$$

que tem como solução

$$v(x) = \int_0^1 g(x, \xi)p(\xi)d\xi, \quad (6.60)$$

onde $g(x, \xi)$ é a função de Green dada pela expressão (5.39). Os gráficos de $u_p(t, x) = e^{\lambda x}(v)(x)$ para diversos tempos podem ser vistos na figura (6.13), onde notamos o crescimento de u_p com o aumento do tempo.

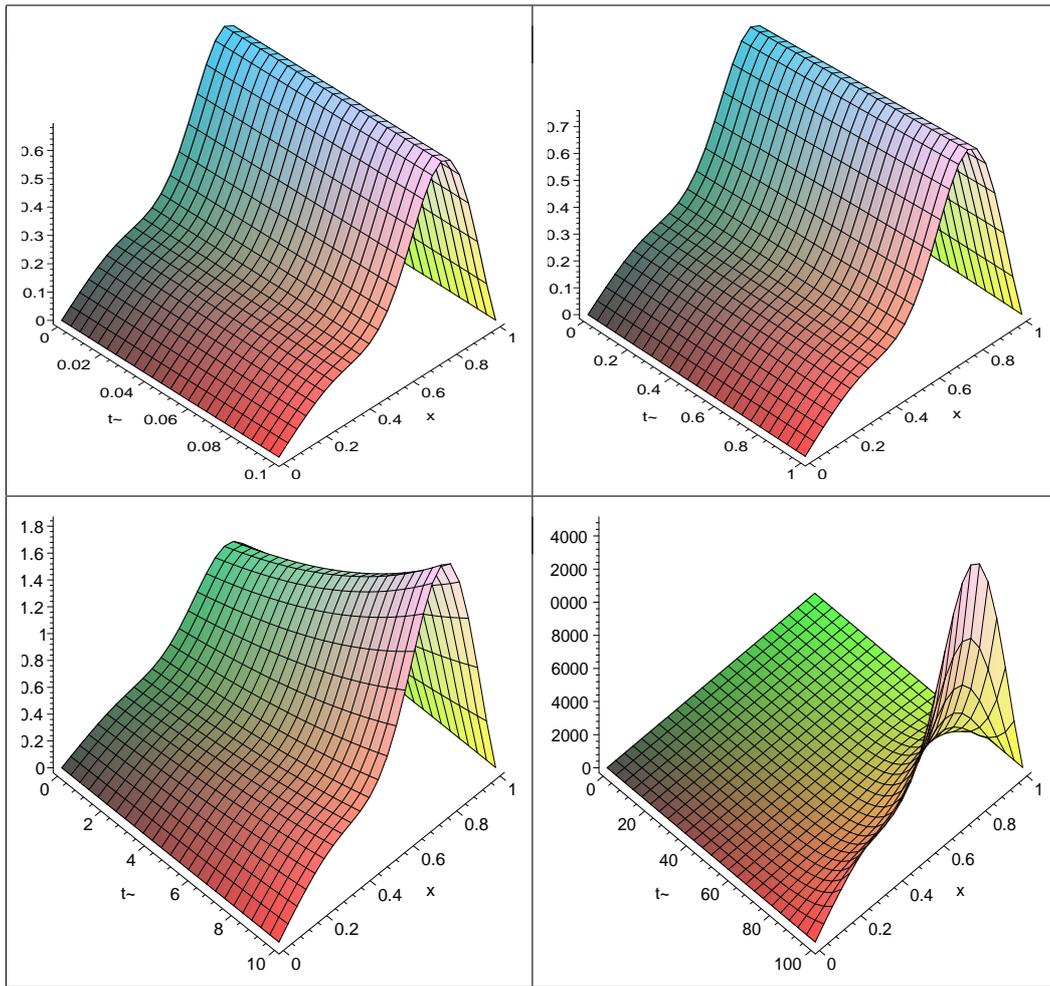


Figura 6.13 Gráficos da resposta forçada $u_p(t, x)$.

Tendo-se obtido a solução permanente, a resposta livre induzida pela resposta permanente, $u_{hp}(t, x)$, é facilmente calculada pela fórmula

$$\begin{aligned}
 u_{hp}(t, x) &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(x, \xi, t)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(x, \xi, t) \right] d\xi \\
 &\quad - \int_0^1 h(x, \xi, t) u_p(0, \xi) d\xi,
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

onde $h(t, x, \xi)$ é dada por (6.47). Os gráficos de u_{hp} são apresentados na figura (6.21) para diferentes valores de t .

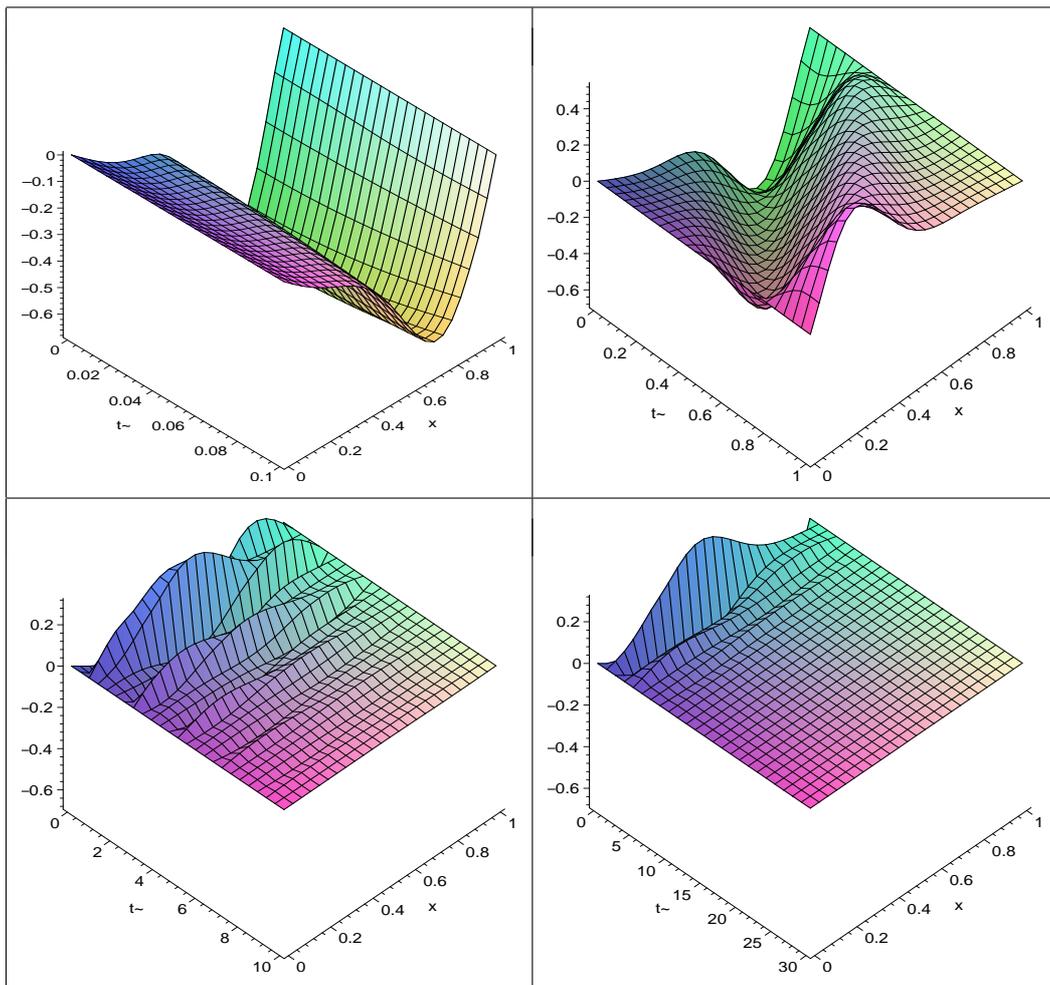


Figura 6.14 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular.

Somando-se as três parcelas anteriores tem-se a resposta total $u(x, t)$, que é mostrada a seguir.

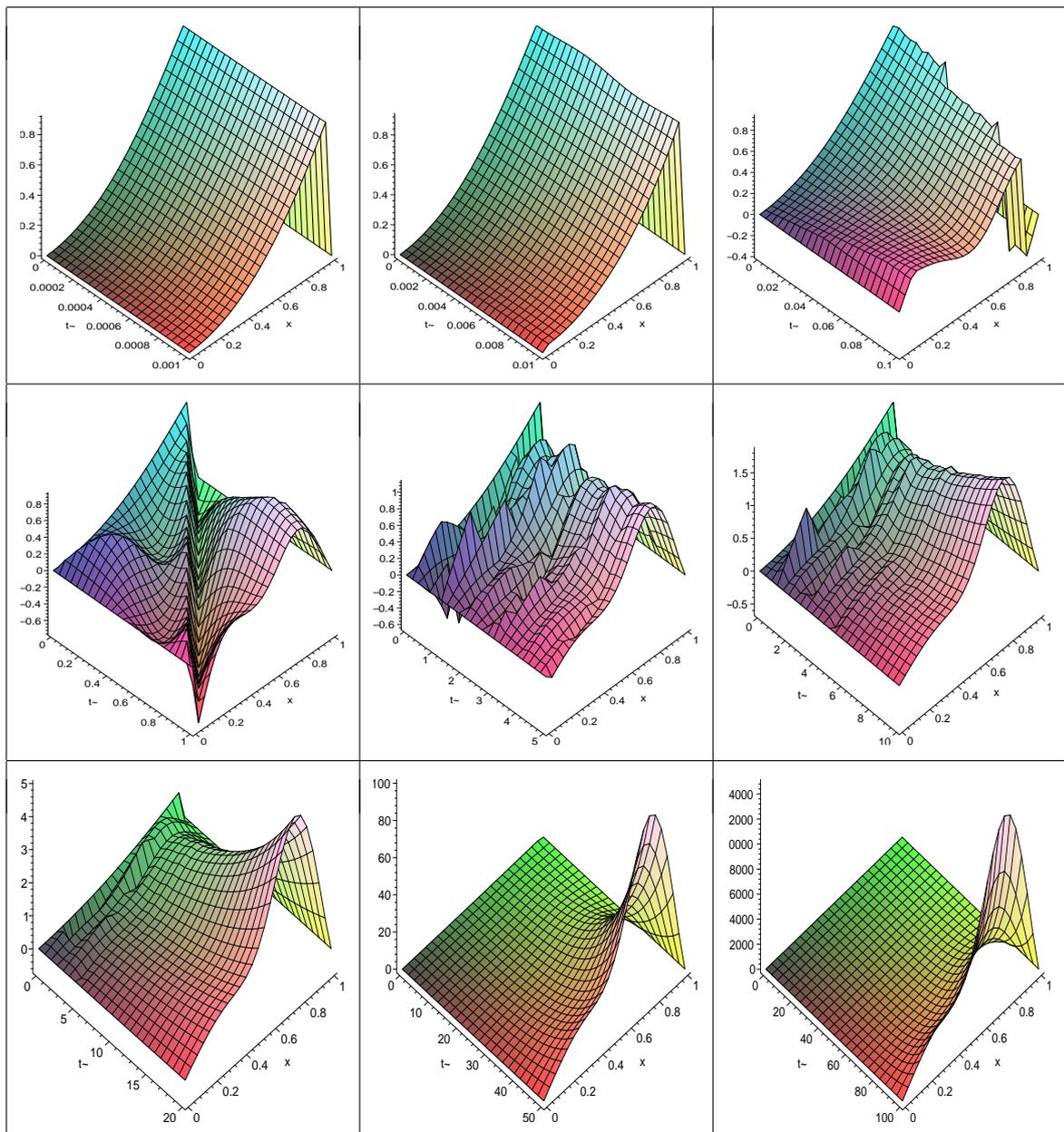


Figura 6.15 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

6.1.3 O Caso de Condições de Contorno Não Homogêneas

Trataremos do problema da seção anterior com condições de contorno não homogêneas, ou seja, o problema (6.32)-(6.33) e condições de contorno

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{01} u &= g_1(t) \quad \text{em } x = 0, \\ \beta_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{02} u &= g_2(t) \quad \text{em } x = L. \end{aligned} \quad (6.62)$$

A solução do problema pode ser representada pela soma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^L \phi_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial t} h(t, x, \xi) \right] d\xi + \int_0^L [\phi_1(\xi) + \phi_0(\xi)B] h(t, x, \xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^L f(\xi, \tau) h(t - \tau, x, \xi) d\xi d\tau \\ &+ a \int_0^t g_1(\tau) \Lambda_1(t - \tau, x) d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) \Lambda_2(t - \tau, x) d\tau, \end{aligned} \quad (6.63)$$

onde $\Lambda_i(t, \tau, x)$ é dado na tabela (3.2). Aqui, a função de Green $h(x, \xi, t)$ é determinada resolvendo-se a equação equação linear homogênea

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + B \frac{\partial h}{\partial t} - Ch = 0 \quad (6.64)$$

com condições iniciais semi-homogêneas da forma especial

$$\begin{aligned} h &= 0 \quad \text{em } t = 0, \\ \partial_t h &= \delta(x - \xi) \quad \text{em } t = 0, \end{aligned}$$

e as condições de contorno (6.62) com $g_1(t) = 0$ e $g_2(t) = 0$.

Utilizando o método da decomposição de respostas forçadas podemos reescrever a solução como

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \int_0^L \phi_0(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial t} h(t, x, \xi) \right] d\xi + \int_0^L [\phi_1(\xi) + \phi_0(\xi)B] h(t, x, \xi) d\xi \\
 &+ u_p(t, x) - \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, \xi)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(t, x, \xi) \right] d\xi \\
 &- \int_0^L h(t, x, \xi) B u_p(0, \xi) d\xi \\
 &+ a \int_0^t g_1(\tau) \Lambda_1(t, \tau, x) d\tau + a \int_0^t g_2(\tau) \Lambda_2(t, \tau, x) d\tau,
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

Em particular, considerando-se o operador C da forma completa, ou seja,

$$C = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0 \tag{6.66}$$

e para entradas no sistema do tipo

$$f(t, x) = e^{\lambda t} r(x)$$

a resposta permanente $u_p(t, x)$ é calculada conforme a seção 6.1.2.

6.1.3.1 Equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + f(x, t) \tag{6.67}$$

sujeita a condições iniciais homogêneas e condições de contorno

$$\begin{aligned} u &= \text{sen}(t) \quad \text{em } x = 0 \\ u &= 2\cos(5t) \quad \text{em } x = l \end{aligned} \quad (6.68)$$

se submetida a uma entrada da forma $f(t, x) = 50e^{\lambda t} \cos(0.06x)$ tem a solução expressa por

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t \int_0^l 50e^{\lambda\tau} \cos(0.06\xi) h(t - \tau, x, \xi) d\xi d\tau \\ &+ \int_0^t \text{sen}(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h(t - \tau, x, \xi) \right]_{\xi=0} d\tau - \int_0^t 2\cos(5\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h(t - \tau, x, \xi) \right]_{\xi=l} d\tau, \end{aligned} \quad (6.69)$$

onde a função de Green $h(t, x, \xi)$

$$h(t, x, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\lambda_n x) \text{sen}(\lambda_n \xi) \frac{\text{sen} \left(t \sqrt{a^2 \lambda_n^2 + b} \right)}{\sqrt{a^2 \lambda_n^2 + b}}, \quad (6.70)$$

$$\lambda_n = \pi n.$$

Fazendo-se $a = 1$, $b = 0.1$, $l = 1$, $\lambda = 1.03$ e $i = \sqrt{-1}$ e decompondo-se a resposta forçada, ou seja, o primeiro termo do segundo membro da equação (6.69), em uma resposta livre (u_{hp}) e uma resposta particular (u_p), tem-se a soma

$$u_p(t, x) - \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, \xi)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(t, x, \xi) \right] d\xi \quad (6.71)$$

Para calcularmos $u_p(t, x)$ supomos uma resposta da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x) = e^{\lambda t} v(x)$, e substituímos na equação (7.66), resultando

$$\ddot{v}(x) - 0.9609v(x) = -50\cos(0.06x) \quad (6.72)$$

com condições de contorno homogêneas.

Sabemos que essa equação tem como solução

$$v(x) = \int_0^l g(x, \xi) p(\xi) d\xi, \quad (6.73)$$

onde

$$g(x, \xi) = \begin{cases} 1.18 \sin(0.98x) (-0.864 \cos(0.98\xi) + 0.579 \sin(0.98\xi)), & x < \xi \\ 1.18 \sin(0.98\xi) (-0.864 \cos(0.98x) + 0.579 \sin(0.98x)), & \xi < x \end{cases} \quad (6.74)$$

Os gráficos de da parte real de $u_p(t, x) = e^{\lambda x} v(x)$ para diversos tempos podem ser vistos na figura (6.16).

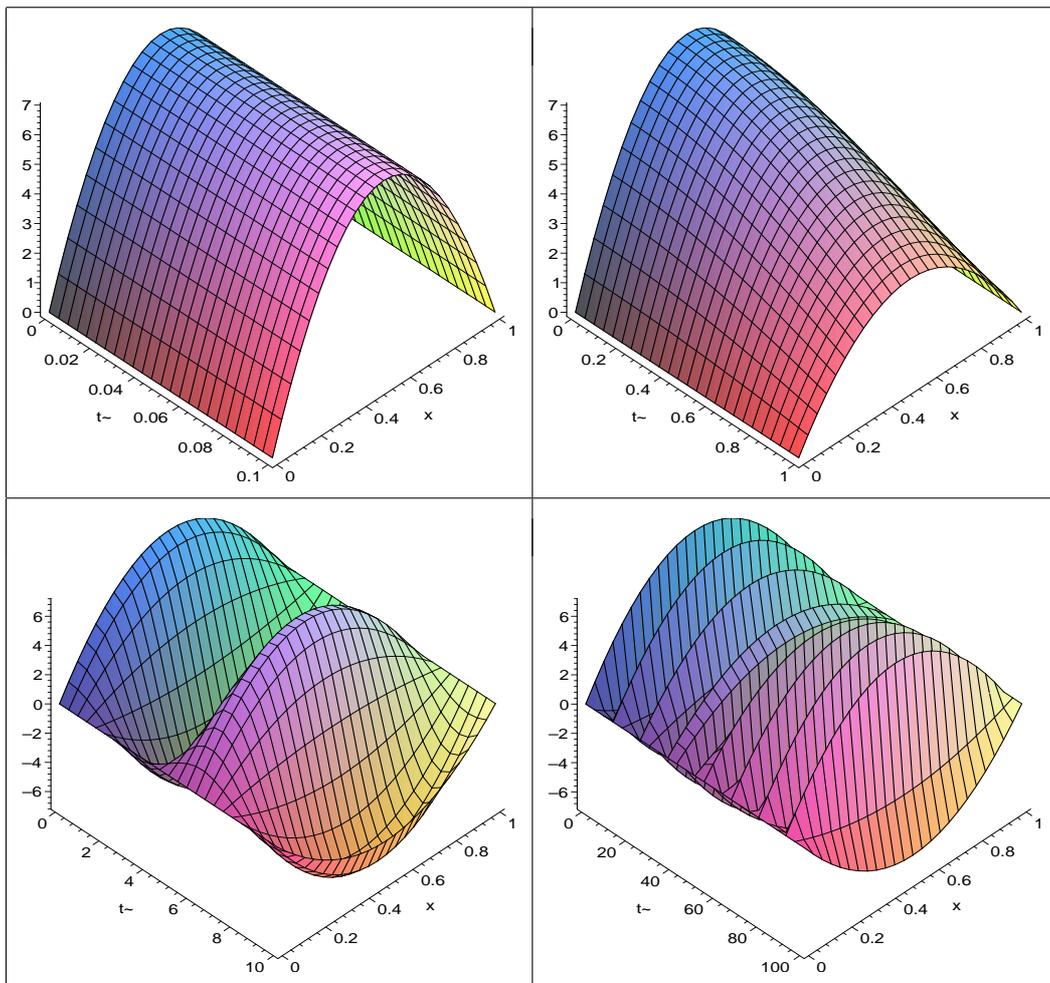


Figura 6.16 Gráficos da parte real da resposta particular $u_p(x, t)$.

Tendo-se obtido a solução permanente, a resposta livre induzida pela reposta permanente, $u_{hp}(t, x)$, é facilmente calculada pela fórmula

$$u_{hp}(t, x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, \xi)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(t, x, \xi) \right] d\xi, \quad (6.75)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é dada por (6.70). Os gráficos da parte real de u_{hp} são apresentados na figura (6.17) para diferentes valores de t .

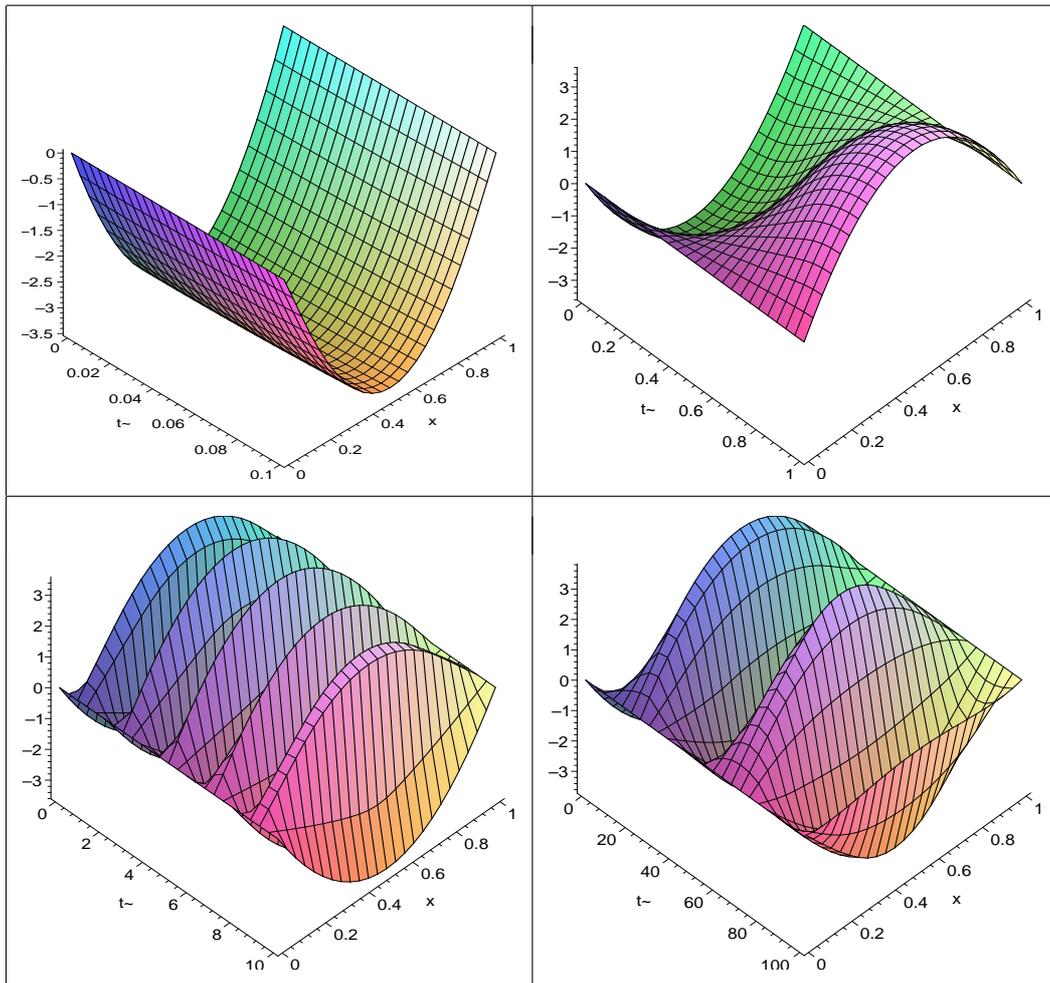


Figura 6.17 Gráficos da parte real da resposta livre (u_{hp}) induzida pela particular.

A contribuição das condições de contorno não homogêneas, $u_{cc}(t, x)$, é dada pelos dois últimos termos do segundo membro da equação (6.69) e mostrada na figura para uma função de Green espacial $h(t, x, \xi)$ truncada em 384 termos. (6.18).

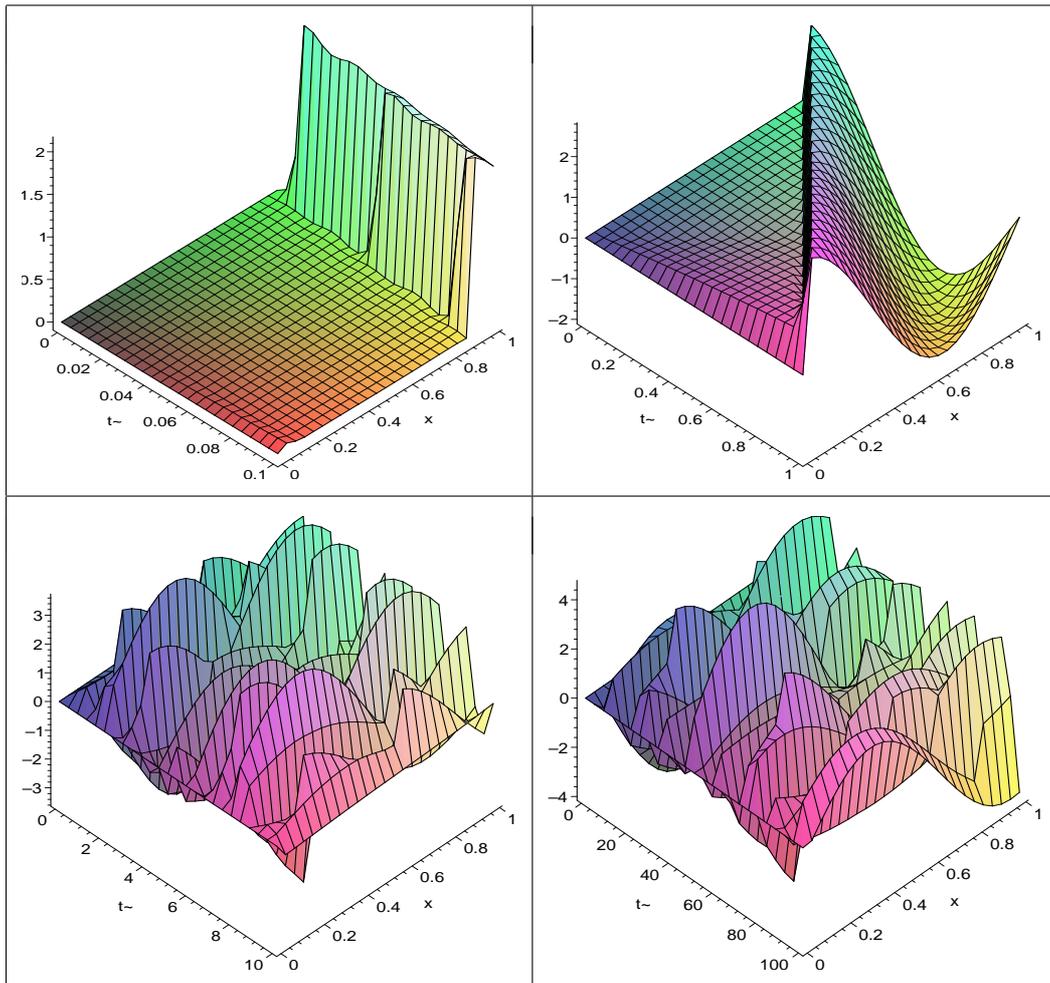


Figura 6.18 Gráficos da contribuição das condições de contorno $u_{cc}(t, x)$

A resposta $u(t, x)$ é dada pela soma das três parcelas anteriores, ou seja,

$$u(t, x) = u_p + u_{hp} + u_{cc}, \quad (6.76)$$

e os gráficos da parte real são dados na figura (6.19) a seguir

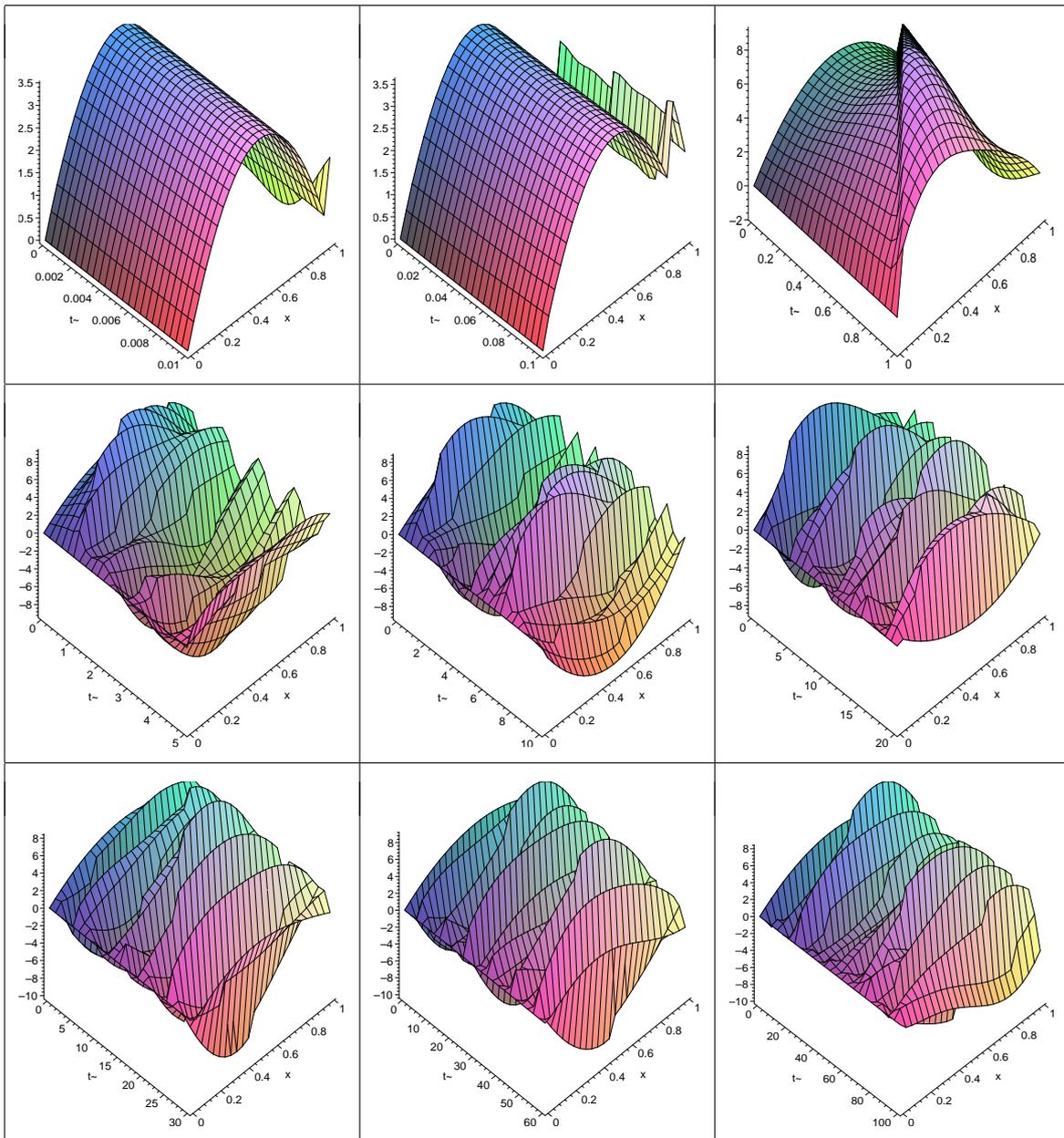


Figura 6.19 Gráficos da parte real resposta total $u(t, x)$.

6.1.3.2 Equação da Onda Amortecida com Convecção e Reação

Considere a equação hiperbólica de forma completa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(t, x) \quad (6.77)$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} u &= x^2 & \text{em } t = 0 \\ \partial_t u &= 3\cos(4x) & \text{em } t = 0 \end{aligned} \quad (6.78)$$

e condições de contorno

$$\begin{aligned} u &= 5\sin(10t) & \text{em } x = 0, \\ u &= 5 & \text{em } x = l. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Para uma entrada $f(t, x) = 5e^{\lambda t}\cos(10x)x^2$, tem-se a solução dinâmica

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l x^2 h(t, x, \xi) d\xi + 3 \int_0^l [\cos(4\xi) + \xi^2] h(t, x, \xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^l 5e^{\lambda\tau} \cos(10\xi) \xi^2 h(t - \tau, x, \xi) d\xi d\tau \\ &+ \int_0^t 5\sin(10\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h(t - \tau, x, \xi) \right]_{\xi=0} d\tau - \int_0^t 5 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} h(t - \tau, x, \xi) \right]_{\xi=l} d\tau, \end{aligned} \quad (6.80)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é a função de Green dada por

$$h(x, \xi, t) = \frac{2}{l} e^{\left[\frac{b(\xi-x)}{2a^2} - \frac{kt}{2}\right]} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \frac{\operatorname{sen}(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad (6.81)$$

$$\lambda_n = \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l} + \frac{b^2}{4a^2} - c - \frac{k^2}{4}.$$

Considerando-se os parâmetros $a = 1$, $b = 1$, $c = 1.11$, $k = 1$, $l = 1$, $\lambda = 0.1$ e fazendo-se $n = 1..284$ em $h(x, \xi, t)$, a solução homogênea do problema é a mesma da seção 6.1.2.2 e está dada pela figura 6.12.

Supondo-se uma resposta da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x) = e^{\lambda t}v(x)$ e substituindo na equação (6.77) resulta

$$\ddot{v}(x) + \dot{v}(x) + v(x) = -5\cos(10x)x^2 \quad (6.82)$$

que tem como solução

$$v(x) = \int_0^1 g(x, \xi) p(\xi) d\xi, \quad (6.83)$$

onde $g(x, \xi)$ é a função de Green dada pela expressão (5.56). Os gráficos de $u_p(t, x) = e^{\lambda x}(v)(x)$ para diversos tempos podem ser vistos na figura (6.13), onde notamos o crescimento de u_p com o aumento do tempo.

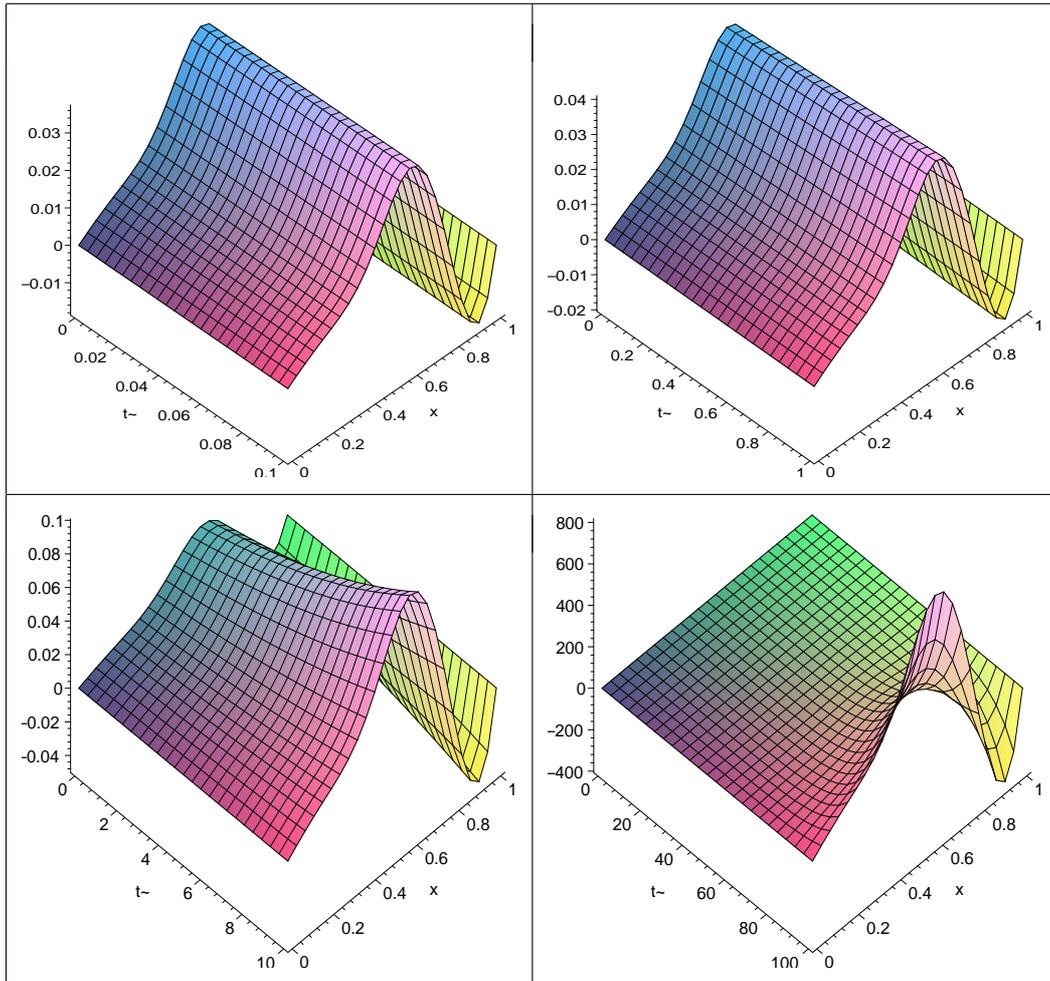


Figura 6.20 Gráficos da resposta forçada $u_p(t, x)$.

Tendo-se obtido a solução particular, a resposta livre induzida pela resposta particular, $u_{hp}(t, x)$, é facilmente calculada pela fórmula

$$u_{hp}(t, x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} [h(x, \xi, t)] u_p(0, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(x, \xi, t) \right] d\xi - \int_0^1 h(x, \xi, t) u_p(0, \xi) d\xi \quad (6.84)$$

onde $h(t, x, \xi)$ é dada por (6.47). Os gráficos de u_{hp} são apresentados na figura (6.21) para diferentes valores de t e a função de Green truncada em 284 termos.

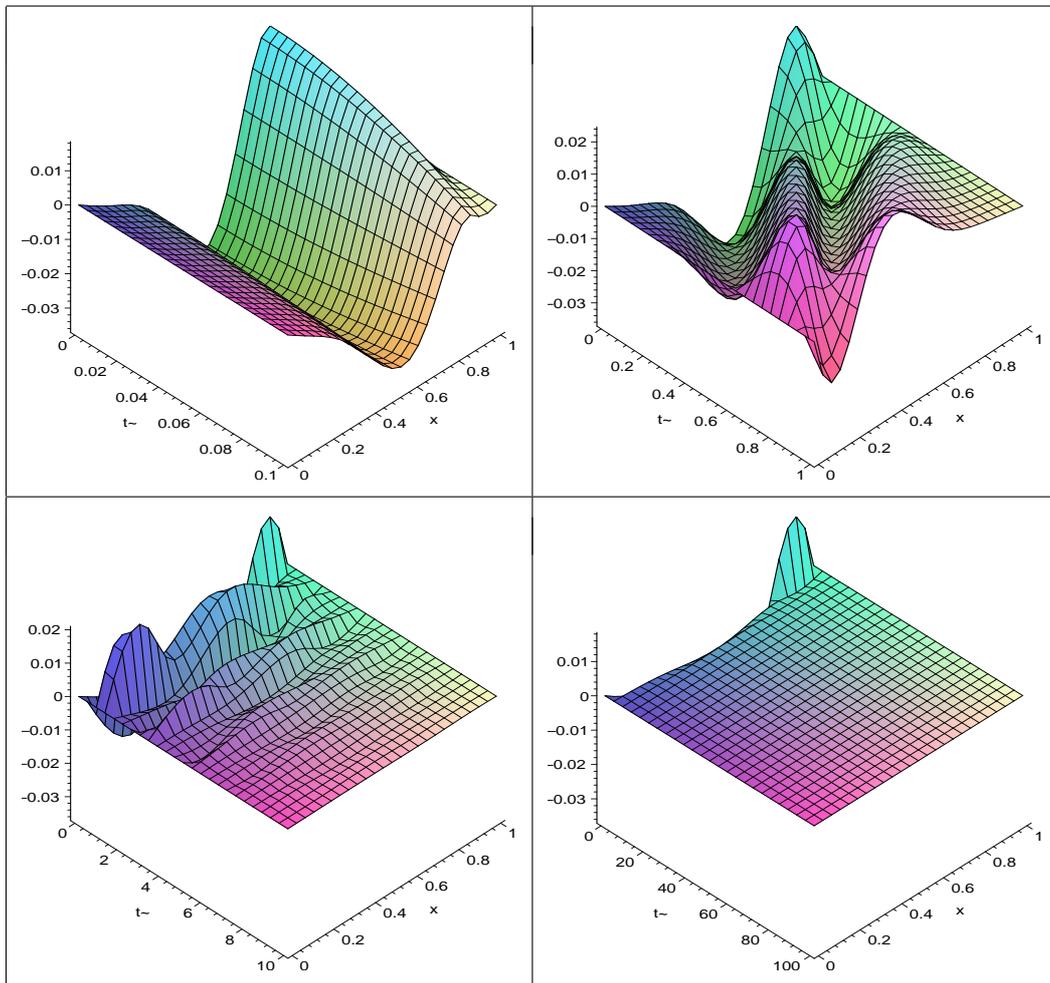


Figura 6.21 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular.

A contribuição das condições de contorno não homogêneas, u_{cc} , é carregada pelos dois últimos termos da equação (6.80) é mostrada para diferentes valores de t na figura (6.22). Aqui a função de Green foi truncada em 284 termos.

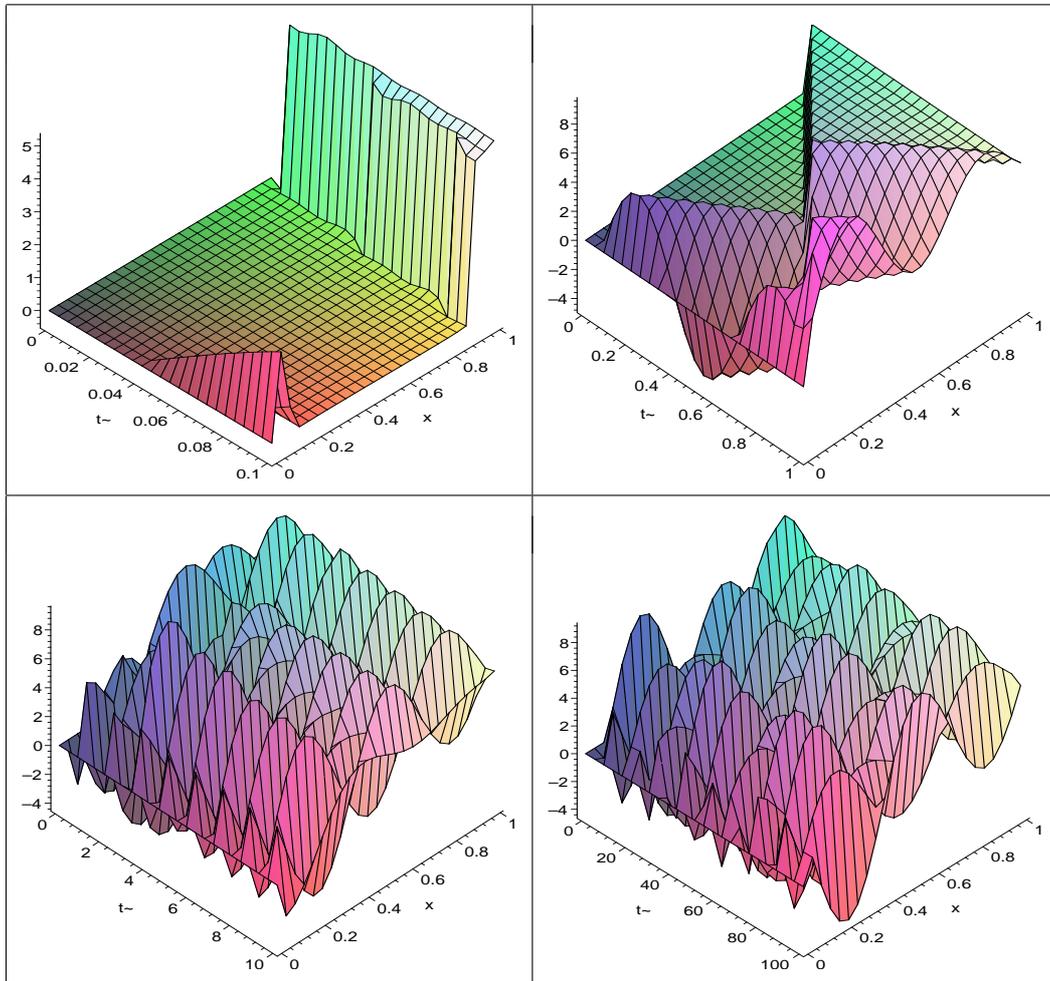


Figura 6.22 Gráficos da contribuição das condições de contorno não homogêneas

$$u_{cc}.$$

Somando-se as três parcelas anteriores tem-se a resposta total $u(x, t)$, que é mostrada a seguir.

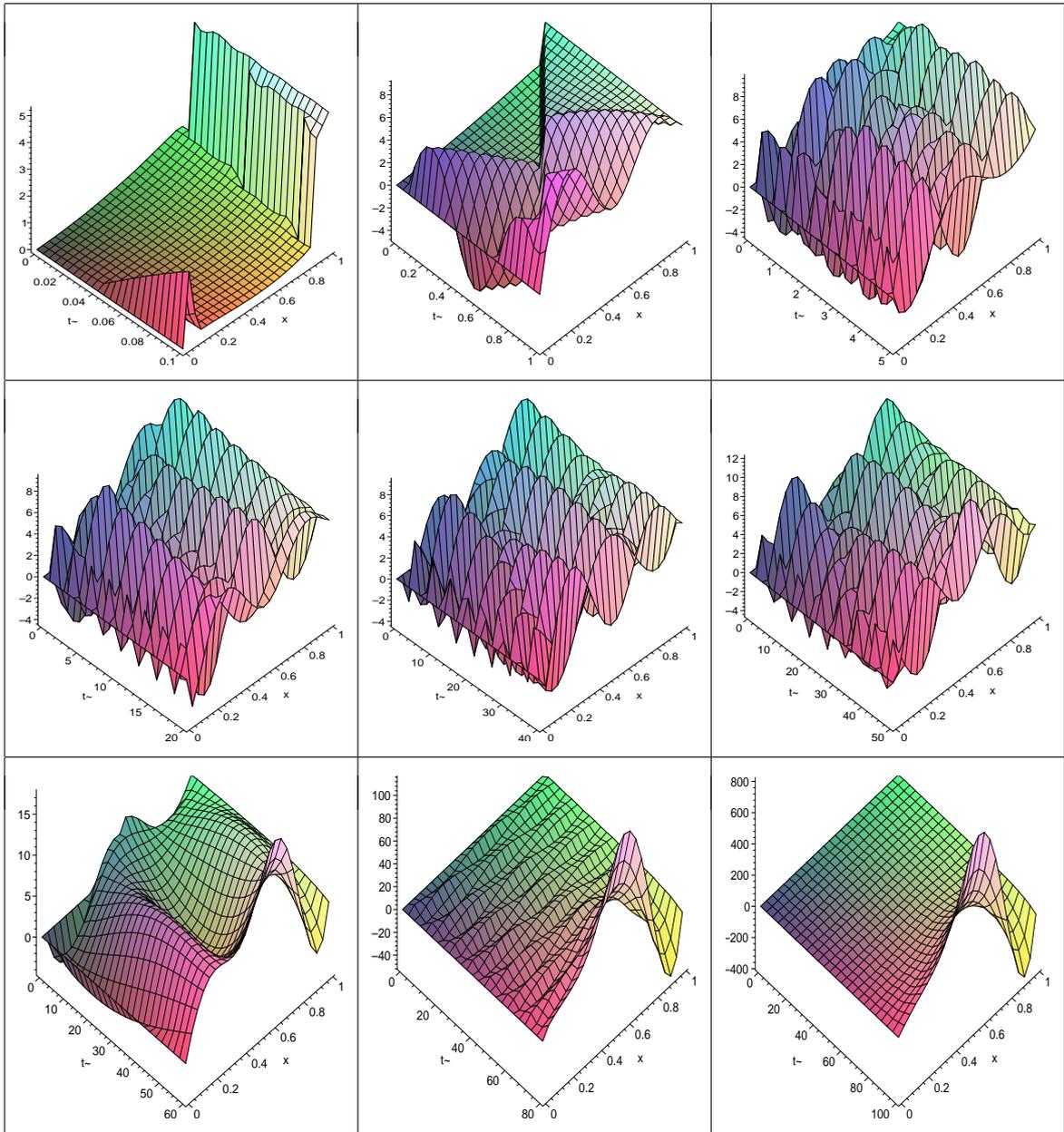


Figura 6.23 Gráficos da resposta total $u(t, x)$.

6.2 Domínio Bidimensional

Nesta seção faremos uma simulação para a equação do telégrafo não homogênea com condições iniciais e de contorno homogêneas em um domínio retangular $0 \leq l_1$, $0 \leq l_2$. Aqui, nosso interesse é apenas, ilustrar a decomposição da

resposta forçada para um problema parabólico bidimensional. Os resultados gráficos serão apresentados somente para a resposta particular e a resposta livre induzida pela particular.

6.2.1 Equação do Telégrafo em Duas Dimensões

Considere a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + bu = f(t, x, y) \quad (6.85)$$

num domínio retangular, sujeita a condições iniciais homogêneas e condições de contorno de Dirichlet homogêneas da forma

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{em } x = 0, l_1 \\ u &= 0 \quad \text{em } y = 0, l_2 \end{aligned} \quad (6.86)$$

A solução desse problema é dada pela resposta forçada

$$u(t, x, y) = \int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(\tau, \xi, \zeta) h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta) d\zeta d\xi d\tau, \quad (6.87)$$

onde $h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green; para $t > \tau \geq 0$ ela satisfaz a equação homogênea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + bu = 0 \quad (6.88)$$

com as condições iniciais semi homogêneas

$$\begin{aligned} h &= 0 \quad \text{em } t = \tau, \\ \partial h &= \delta(x - \xi, y - \zeta) \quad \text{em } t = \tau, \end{aligned} \quad (6.89)$$

e condições de contorno de Dirichlet homogêneas.

Utilizando-se o método da decomposição de respostas forçadas podemos reescrever a solução como

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y) = & u_p(t, x, y) - \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, \xi, y, \zeta)] u_p(0, \xi, \zeta) d\zeta d\xi \\
 & - \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi)] h(t, x, \xi, y, \zeta) d\zeta d\xi \\
 & - \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} kh(t, x, \xi, \zeta) u_p(0, \xi, \zeta) d\zeta d\xi
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

onde função de Green $h(t, x, y, \xi, \zeta)$ é dada pela fórmula

$$h(t, x, y, \xi, \zeta) = \frac{4}{l_1 l_2} \exp\left(-\frac{1}{2}kt\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\sigma_{nm}t)}{\sigma_{nm}} \text{sen}(p_n x) \text{sen}(q_m y) \text{sen}(p_n \xi) \text{sen}(q_m \zeta), \tag{6.91}$$

$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \sigma_{nm} = \sqrt{a^2 p_n^2 + a^2 q_m^2 + b - \frac{1}{4}k^2} \tag{6.92}$$

Em particular, para entradas da forma $f(t, x, y) = r(x, y)e^{\lambda t}$ supõe-se uma resposta particular $u_p(t, x, y)$ da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x, y) = v(x, y)e^{\lambda t}$ e, substituindo na equação (6.85) obtém-se o problema de contorno

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v(x, y) + \gamma v(x, y) = -p(x, y), \tag{6.93}$$

$$v(x, y) = 0 \quad \text{em } x = 0, l_1 \tag{6.94}$$

$$v(x, y) = 0 \quad \text{em } y = 0, l_2$$

onde $\gamma = \frac{\lambda^2 + k\lambda + b}{-a^2}$ e $p(x, y) = \frac{\text{sen}(x - y)}{a^2}$. Este problema tem como solução

$$v(x, y) = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p(\xi, \zeta) g(x, y, \xi, \zeta) d\zeta d\xi \tag{6.95}$$

onde $g(x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green espacial dada por (5.72) que satisfaz

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \gamma g = -\delta(x - \xi)\delta(y - \zeta), \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} g &= 0 \quad \text{em } x = 0, l_1 \\ g &= 0 \quad \text{em } y = 0, l_2. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Considere, agora, os parâmetros $a = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $f(t, x, y) = \text{sen}(x - y)e^{\lambda t}$, $\lambda = 0.1i$, $i = \sqrt{-1}$. Os gráficos de $u_p(t, x, y)$ e $u_{hp}(t, x, y)$ são mostrados a seguir para diferentes valores de t .

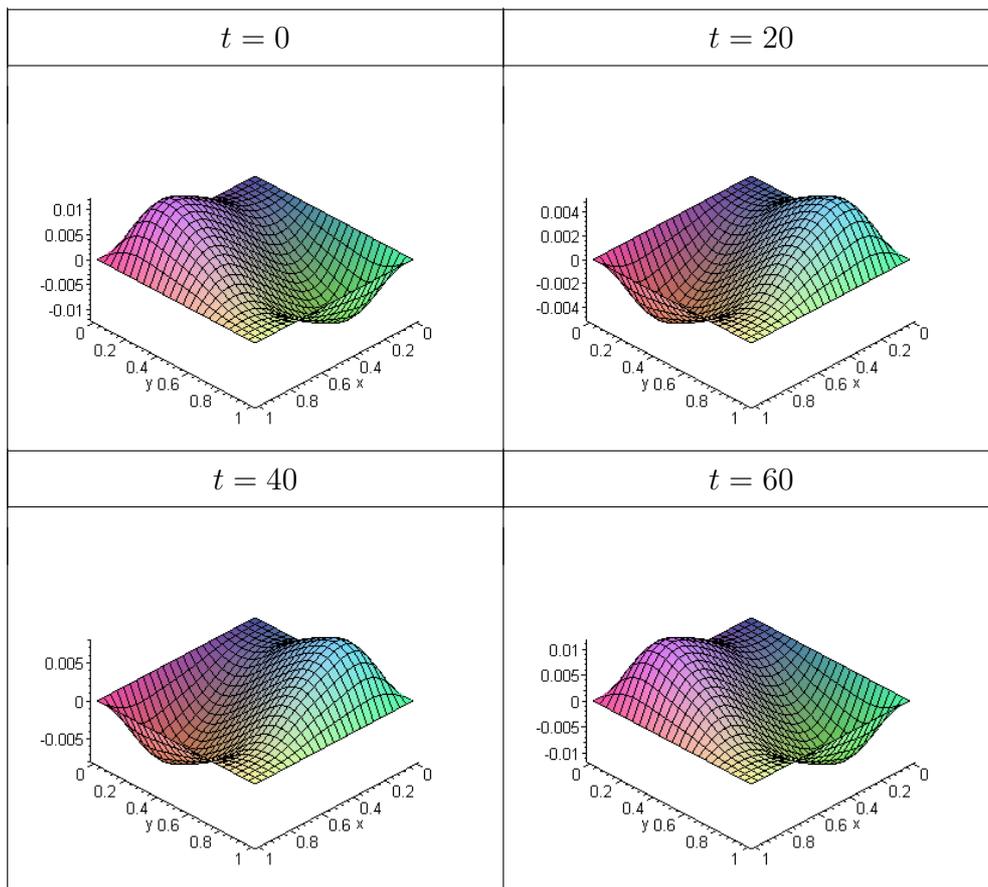


Figura 6.24 Gráficos da resposta particular $u_p(t, x)$.

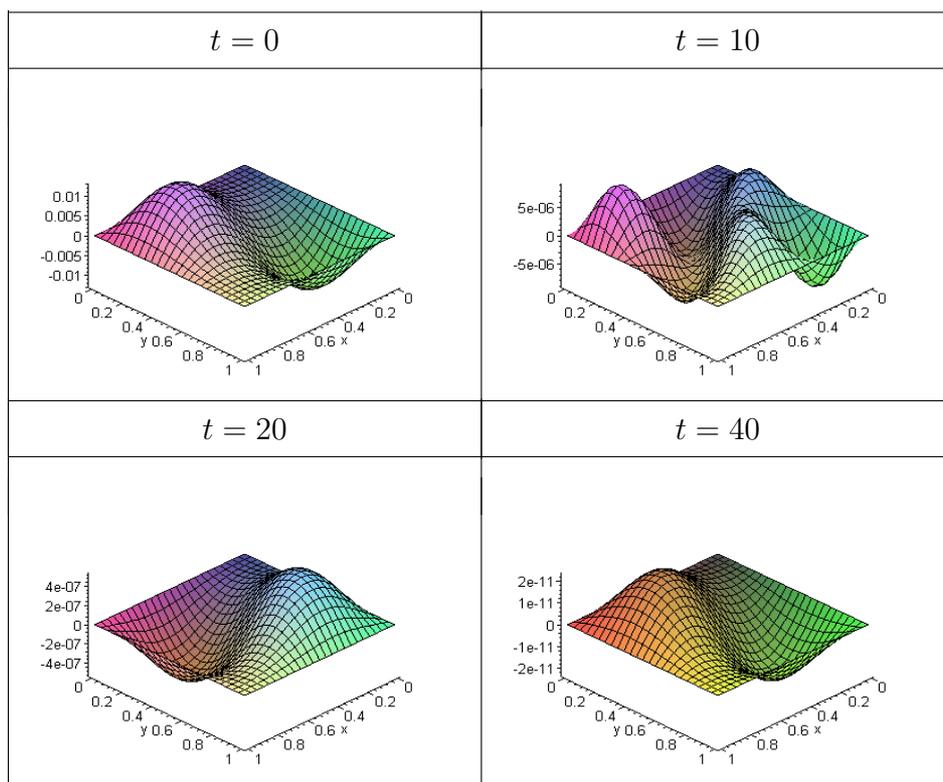


Figura 6.25 Gráficos da resposta livre, $u_{hp}(t, x)$, induzida pela particular.

6.3 Domínio Tridimensional

Para ilustrar a decomposição de respostas forçadas em três dimensões espaciais, faremos a simulação da equação de Klein-Gordon para um domínio limitado por um paralelepípedo retangular. Os resultados são de difícil visualização gráfica, pois são volumes sólidos.

6.3.1 Equação de Klein-Gordon em Três Dimensões

Considere a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + bu = f(t, x, y, z) \quad (6.98)$$

num paralelepípedo retangular, sujeita a condições iniciais homogêneas e condições de contorno de Dirichlet homogêneas da forma

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{em } x = 0, l_1 \\ u &= 0 \quad \text{em } y = 0, l_2 \\ u &= 0 \quad \text{em } z = 0, l_3 \end{aligned} \quad (6.99)$$

A solução dessa equação é dada por

$$u(t, x, y, z) = \int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} f(\tau, \xi, \zeta, \varsigma) h(t - \tau, x, y, z, \xi, \zeta, \varsigma) d\varsigma d\zeta d\xi d\tau, \quad (6.100)$$

onde $h(t - \tau, x, y, z, \xi, \zeta, \varsigma)$ é a função de Green; para $t > \tau \geq 0$ ela satisfaz a equação homogênea

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) + bu = f(t, x, y, z) \quad (6.101)$$

com as condições iniciais semi homogêneas

$$\begin{aligned} h &= 0 && \text{em } t = \tau, \\ \partial h &= \delta(x - \xi)\delta(y - \zeta)\delta(z - \varsigma) && \text{em } t = \tau, \end{aligned} \quad (6.102)$$

e condições de contorno de Dirichlet homogêneas.

Utilizando-se o método da decomposição de respostas forçadas podemos reescrever a solução como

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= u_p(t, x, y, z) - \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} \frac{\partial}{\partial t} [h(t, x, y, \xi, \zeta, \varsigma)] u_p(0, \xi, \zeta, \varsigma) d\varsigma d\zeta d\xi \\ &\quad - \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} \frac{\partial}{\partial t} [u_p(0, \xi, \zeta, \varsigma)] h(t, x, y, \xi, \zeta, \varsigma) d\varsigma d\zeta d\xi \end{aligned} \quad (6.103)$$

onde função de Green $h(t, x, y, \xi, \zeta)$ é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} h(t, x, y, z, \xi, \zeta, \varsigma) &= \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(t\sqrt{\sigma_{nmk}})}{\sigma_{nmk}} \text{sen}(\alpha_n x) \text{sen}(\beta_m y) \text{sen}(\varepsilon_k z) \\ &\quad \times \text{sen}(\alpha_n \xi) \text{sen}(\beta_m \zeta) \text{sen}(\varepsilon_k \varsigma), \end{aligned} \quad (6.104)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad \beta_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad \varepsilon_k = \frac{\pi k}{l_3}, \quad \sigma_{nmk} = a^2(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \varepsilon_k^2) + b.$$

Em particular, para entradas da forma $f(t, x, y, z) = r(x, y, z)e^{\lambda t}$ supõe-se uma resposta particular $u_p(t, x, y, z)$ da mesma forma da entrada, ou seja, $u_p(t, x, y, z) = v(x, y, z)e^{\lambda t}$ e, substituindo na equação (6.98) obtém-se o problema de contorno

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}v(x, y, z) + \gamma v(x, y, z) = -p(x, y), \quad (6.105)$$

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad \text{em} \quad x = 0, l_1, \\ v &= 0 \quad \text{em} \quad y = 0, l_2, \\ v &= 0 \quad \text{em} \quad z = 0, l_3, \end{aligned} \quad (6.106)$$

onde $\gamma = \frac{\lambda^2 + b}{-a^2}$ e $p(x, y, z) = \frac{r(x, y, z)}{a^2}$. Este problema tem como solução

$$v(x, y, z) = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} p(\xi, \zeta, \varsigma) g(x, y, z, \xi, \zeta, \varsigma) d\varsigma d\zeta d\xi \quad (6.107)$$

onde $g(x, y, z, \xi, \zeta, \varsigma)$ é a função de Green espacial dada por

$$g(x, y, \xi, \zeta) = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen} p_n x \text{ sen} q_m y \text{ sen} s_k z \text{ sen} p_n \xi \text{ sen} q_m \zeta \text{ sen} s_k \varsigma}{p_n^2 + q_m^2 + s_k^2 - \gamma}, \quad (6.108)$$

$$p_n = \frac{\pi n}{l_1}, \quad q_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad s_k = \frac{\pi k}{l_3}. \quad (6.109)$$

e que satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \gamma g = -\delta(x - \xi)\delta(y - \zeta)\delta(z - \varsigma), \quad (6.110)$$

sujeita a condições de contorno (6.106).

Considere, agora, os parâmetros $a = 1$, $b = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $l_3 = 1$, $f(t, x, y, z) = \cos(x + y + z)e^{\lambda t}$, $\lambda = -0.1$. Para a visualização dos resultados fixamos $t = 1$ graficamos em uma mesma figura $u(t, x, y, z)$ variando-se apenas uma das variáveis espaciais. Por exemplo, para a resposta particular $u_p(t, x, y, z)$, tem-se, variando-se x

$$\begin{aligned} &u_p(1, 0, y, z) \quad u_p(1, 0.5, y, z) \quad u_p(1, 1, y, z) \\ &u_p(1, 0.25, y, z) \quad u_p(1, 0.75, y, z) \end{aligned} \quad (6.111)$$

que é mostrado na figura à seguir

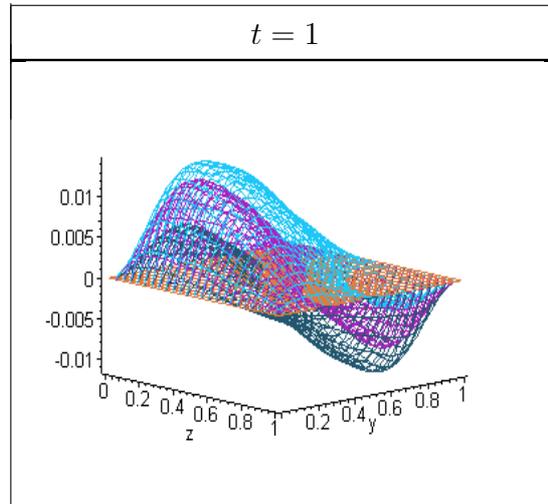


Figura 6.26 Gráfico da resposta $u_p(t, x, y, z)$, para $t = 1$ e x assumindo 5 valores diferentes no intervalo $[0, 1]$.

A seguir, faz-se o mesmo para y e z .

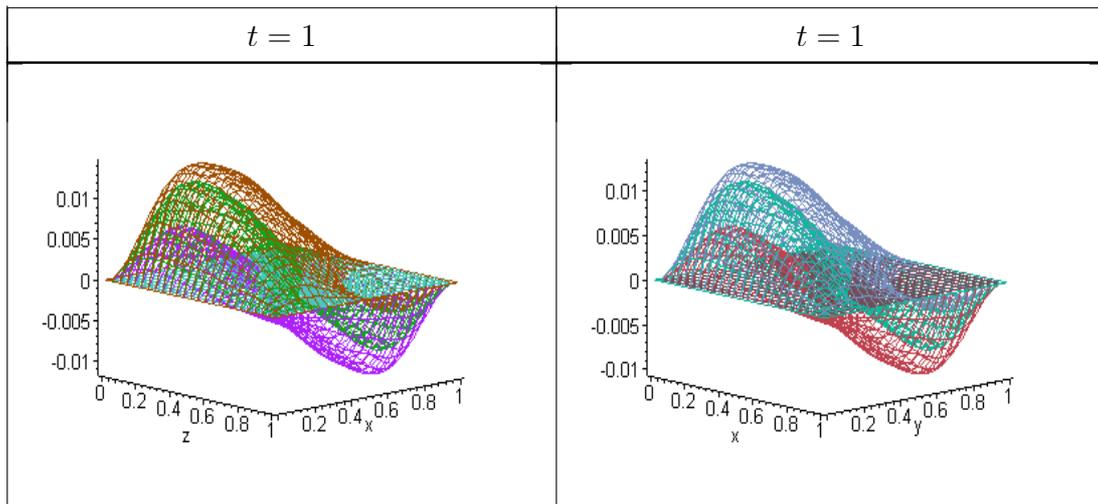


Figura 6.27 Gráfico da resposta $u_p(t, x, y, z)$, para $t = 1$ e y, z assumindo 5 valores diferentes no intervalo $[0, 1]$.

Para a resposta livre induzida pela particular, $u_{hp}(t, x, y, z)$, obtiveram-se os seguintes resultados para $t = 1$

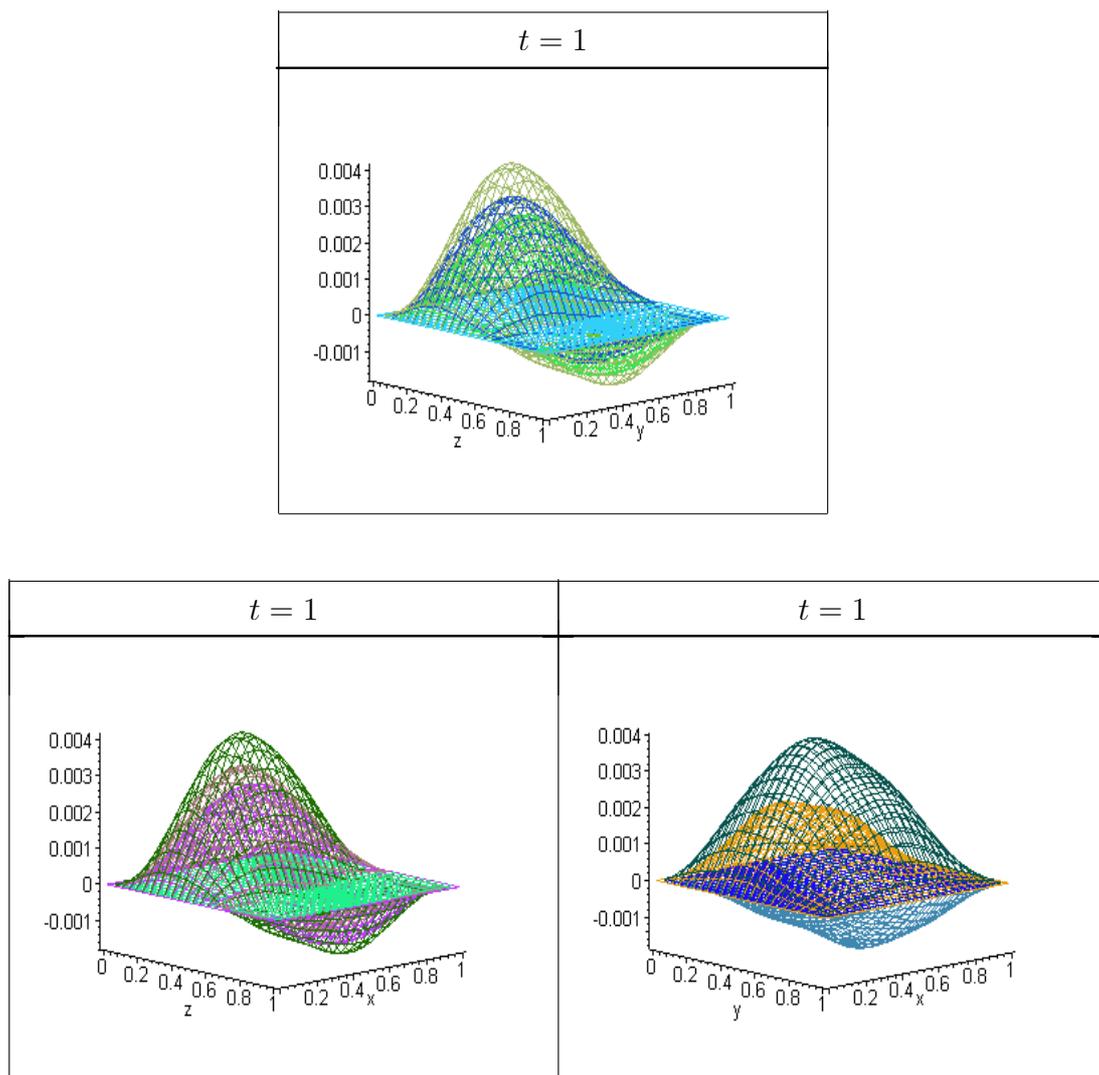


Figura 6.28 Gráficos da resposta $u_{hp}(t, x, y, z)$, para $t = 1$ e x, y, z assumindo 5 valores diferentes no intervalo $[0, 1]$.

7 UM MODELO ACOPLADO OCEANO-ATMOSFERA

Neste capítulo a técnica da decomposição de respostas forçadas será utilizada para resolver um problema geofísico de interação oceano-atmosfera [17], [23], [25], [15]. O modelo é descrito por equações não lineares de águas rasas que serão reduzidas a uma equação do tipo Klein-Gordon bidimensional com um termo forçante representando a tensão de cisalhamento devido a ação do vento na superfície do oceano, e, também, as variações na pressão atmosférica.

7.1 Equações Governantes

As equações que governam as mudanças das propriedades da atmosfera e do oceano são a equação da conservação da massa

$$\rho^{-1}D\rho/Dt + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (7.1)$$

a equação do momento

$$D\mathbf{u}/Dt + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\rho^{-1}\nabla p - \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{u}; \quad (7.2)$$

a equação da energia

$$\rho T c_p(p_r, \theta) \theta^{-1} D\theta/Dt = \nabla \cdot (k\nabla T - \mathbf{F}^{rad}) + Q_H; \quad (7.3)$$

e a equação de estado

$$\rho = \rho(p, s, \theta), \quad (7.4)$$

onde

$$D/Dt = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.5)$$

é a derivada material.

Aqui, $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ é a velocidade do fluido, ρ é densidade do fluido, p é a pressão em um ponto do fluido, \mathbf{g} é o vetor gravidade, ν é a viscosidade cinética, T é a temperatura, c_p é o calor específico a pressão constante, θ é o potencial de temperatura, k é a condutividade térmica, \mathbf{F}^{rad} é a densidade do fluxo radiativo de energia e Q_H é o termo de calor interno.

Para escoamentos isentrópicos (ausência de efeitos viscosos e difusivos) a equação da conservação da massa é inalterada, entretanto, a equação do momento (7.2) toma a forma

$$D\mathbf{u}/Dt + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\rho^{-1}\nabla p - \mathbf{g}; \quad (7.6)$$

Para escoamentos incompressíveis, nos quais as mudanças na densidade são desprezíveis, tem-se que o campo de velocidades é não divergente ou solenoidal, ou seja,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7.7)$$

Esta é uma boa aproximação quando se cumprem as seguintes condições:

- (i) A velocidade da partícula é pequena comparada com a velocidade do som;
- (ii) A velocidade de fase (ou comprimento de onda dividido pelo período) das perturbações é pequena comparada com c_s (velocidade do som).
- (iii) A escala vertical do movimento é pequena comparada com *escala de altura* H_s (definida como um valor médio de $\rho/|d\rho/dz|$).

A última condição é automaticamente satisfeita no oceano, pois H_s é por volta de 40 vezes a profundidade, mas não é verdade para alguns movimentos atmosféricos.

Para computar mudanças na estrutura da atmosfera e do oceano, é necessário saber não só as equações governantes mas também condições apropriadas

para aplicar nas fronteiras. Considerando-se um fluido inviscido e não-difusivo, as condições apropriadas para três tipos de contorno são dadas a seguir:

- (a) *Contorno Sólido Fixo*. Nenhum fluido passa através da fronteira, isto é, a componente da densidade do fluxo de massa $\mathbf{F} = \rho\mathbf{u}$ normal ao contorno deve tender a zero, ou seja,

$$u_n = 0, \quad (7.8)$$

onde u_n é a componente normal da velocidade.

- (b) *Contorno Material* (tal como uma superfície livre ou uma interface entre dois fluidos). Por definição nenhuma partícula do fluido cruza essa fronteira, portanto uma partícula sobre a fronteira permanecerá sobre a fronteira. Assim se

$$G(x, y, z, t) = 0 \quad (7.9)$$

é a equação da superfície na fronteira, G sempre será zero para uma partícula material sobre essa superfície, e portanto

$$DG/Dt = 0 \quad (7.10)$$

sobre a fronteira ¹. A equação (7.8) é, de fato, um caso especial para o qual G é independente de t . Com isso, (7.10) resulta

$$\mathbf{u} \cdot \nabla G = 0, \quad (7.11)$$

que é equivalente a (7.8) desde que ∇G seja perpendicular à fronteira.

¹Esta condição se deve a Lagrange (1781)

Outra condição requerida para a fronteira não sólida é que a pressão deve ser a mesma sobre ambos os lados da fronteira, em outras palavras, a pressão deve ser contínua através da fronteira. Se o índice 1 se refere ao valor da pressão em um lado e o índice 2 ao valor da pressão sobre o outro, então

$$p_1 = p_2. \quad (7.12)$$

- (c) *Uma Fronteira Interna.* Às vezes o fluido é dividido em regiões separadas para facilitar o cálculo e a fronteira entre as regiões estando imersas fluido. Condições apropriadas devem ser aplicadas na fronteira interna para conectar as soluções sobre os dois lados. Uma condição para a continuidade da pressão, a qual é requerida para o balanço das forças sobre o contorno, é dada pela relação (7.12). As condições restantes são a continuidade das densidades de fluxo normal $\rho u_n, \rho q u_n, \rho s u_n, \rho \theta u_n$.

7.2 Equações de Águas-Rasas

A ênfase deste trabalho é sobre movimentos com escala horizontal suficientemente grande comparada com a escala vertical. Isto garante a validade da aproximação hidrostática.

Para movimentos de grande escala no oceano e na atmosfera, os termos dominantes na equação do movimento (7.6) são a aceleração da gravidade \mathbf{g} e a componente vertical do gradiente de pressão. Em outras palavras, nenhum dos outros termos de aceleração em (7.6) aproxima a aceleração da gravidade. Na atmosfera, por exemplo, os ventos são da ordem de 10ms^{-1} e a aceleração de Coriolis gira em torno de 10^{-3}ms^{-2} , isto é, menos que a aceleração da gravidade por um fator de 10.000. Logo, é desejável definir uma perturbação na pressão e uma perturbação na

densidade como partida para uma solução em equilíbrio

$$p = p_0(z), \quad \rho = \rho_0(z) \quad (7.13)$$

que satisfaz a equação da hidrostática

$$dp_0/dz = -g\rho_0(z). \quad (7.14)$$

As perturbações na pressão p' e na densidade ρ' são definidas por

$$p = p_0(z) + p', \quad \rho = \rho_0(z) + \rho', \quad (7.15)$$

portanto a equação do momento (7.6) fica

$$\rho(D\mathbf{u}/Dt + 2\Omega \times \mathbf{u}) = -\nabla p' - \rho' \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}), \quad (7.16)$$

onde μ é a viscosidade do fluido. Para o caso especial de um fluido homogêneo, isto é, de densidade uniforme, ρ' é zero.

O estado de equilíbrio considerado aqui é de um fluido de densidade uniforme ρ_c que se encontra em repouso e que tem uma profundidade constante H . Um bom exemplo seria um tanque com um fundo plano. Para ser capaz de dar uma precisa descrição do movimento que ocorre quando o sistema é perturbado (por exemplo, jogando-se uma pedra), um sistema de coordenadas é requerido. Um sistema conveniente seria o sistema cartesiano (x, y, z) escolhido com o eixo z apontando verticalmente para cima. A superfície livre é localizada em $z = 0$ e o fundo em $z = -H$. No estado de equilíbrio a velocidade é zero e a pressão fica determinada pela equação hidrostática (7.14). A pressão no equilíbrio $p_0(z)$ neste caso é dada por

$$p_0(z) = -g\rho_c z \quad (7.17)$$

onde ρ é a densidade em loco, isto é, ρ_c no fluido e zero acima e g é a aceleração devida à gravidade. (Se existe algum fluido na região $z > 0$, assume-se que ele tem densidade desprezível.) Suponha agora que o equilíbrio é levemente perturbado. Assume-se que as perturbações são suficientemente pequenas para produtos de perturbações serem desprezíveis se comparados com as próprias perturbações. Suponha que (u, v, w) são os componentes da velocidade correspondendo às coordenadas (x, y, z) e que a posição perturbada da superfície livre (ver figura(7.1)) é dada por

$$z = \eta(x, y, t). \quad (7.18)$$

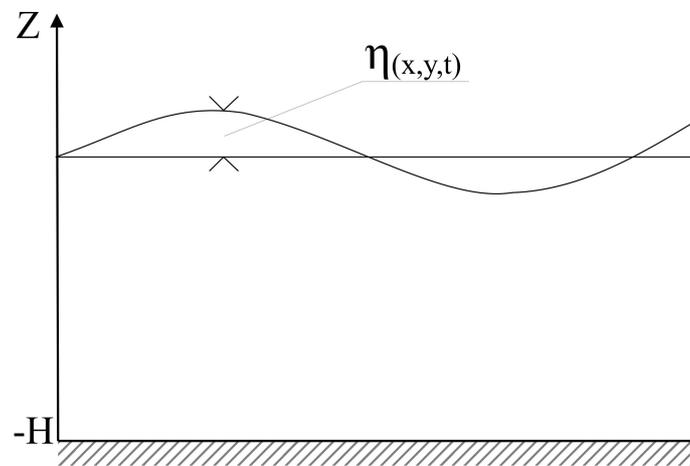


Figura 7.1 Geometria da superfície distribuída.

Para este problema, é conveniente definir a perturbação da pressão por

$$p = -g\rho z + p', \quad (7.19)$$

onde ρ é a densidade em loco. (Isto difere da definição (7.15) somente na região infinitesimal entre a posição perturbada e a posição não perturbada da superfície livre .)

A condição de que a pressão deve tender a zero na superfície livre fornece

$$p = p_0 + p' = 0, \quad \text{ou} \quad p' = g\rho\eta \quad \text{em} \quad z = \eta. \quad (7.20)$$

O sistema atmosfera-oceano é dirigido pela radiação solar, a qual tende a tornar os trópicos mais quentes que os pólos e assim induzir o movimento. Isso é importante para entender a resposta da atmosfera e do oceano para várias espécies de forças, por exemplo, aquelas resultantes do aquecimento e do resfriamento e aquelas devido a ação de ventos e variações de pressão na superfície do oceano. Este trabalho tratará da ação de uma tensão horizontal na superfície do oceano causada pelo vento e variações de pressão.

Variações na pressão atmosférica p_a na superfície $z = \eta$ podem fazer o mar se mover. Acrescentando-se uma perturbação na pressão atmosférica, (7.20) resulta

$$p' = \rho g \eta + p'_a, \quad (7.21)$$

onde p'_a é uma perturbação na pressão atmosférica. Esta equação pode também ser escrita como

$$p' = \rho g \eta', \quad (7.22)$$

onde

$$\eta' = \eta - \eta_a \quad (7.23)$$

é chamado de *nível do mar ajustado* e η_a é dado por

$$\eta_a = -p'_a / \rho g. \quad (7.24)$$

η_a é chamado de elevação da superfície de um *barômetro inverso* desde que seja igual a *depressão* que será registrada por um barômetro de água, isto sendo aproximadamente 1cm por milibar de mudança na pressão.

Mudanças na pressão atmosférica produzem no oceano gradientes de pressão horizontais independentes da profundidade que, em um oceano de profundidade uniforme, produzem correntes independentes da profundidade. Para um

oceano homogêneo raso, as equações do momento resultam

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g\frac{\partial\eta'}{\partial x} \equiv -g\frac{\partial}{\partial x}(\eta - \eta_a), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g\frac{\partial\eta'}{\partial y} \equiv -g\frac{\partial}{\partial y}(\eta - \eta_a),\end{aligned}\tag{7.25}$$

onde f é o parâmetro de Coriolis definido por

$$f = 2\Omega\text{sen}\varphi,\tag{7.26}$$

com Ω sendo a velocidade angular da terra e φ a latitude.

Sendo a densidade do fluido constante, a equação da continuidade (7.1) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.\tag{7.27}$$

A condição que deve ser satisfeita no fundo, onde $z = -H$ é a condição de um contorno sólido (7.8), isto é,

$$w = 0 \quad \text{em} \quad z = -H.\tag{7.28}$$

A condição de que uma partícula na superfície livre $z = \eta$ deverá permanecer nela é, neste caso

$$\frac{D}{Dt}(z - \eta) = 0,\tag{7.29}$$

isto é,

$$w = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y},\tag{7.30}$$

a qual, para pequenas perturbações, reduz-se a

$$w = \partial\eta/\partial t \quad \text{em} \quad z = \eta\tag{7.31}$$

Integrando-se a equação (7.27) com respeito à profundidade usando-se as condições de contorno (7.28) e (7.31) encontra-se

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(H + \eta)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(H + \eta)v] = 0. \quad (7.32)$$

Se o movimento produzido pelas diferenças de pressão é suficientemente pequeno para as equações lineares serem aplicadas, então (7.25) e (7.32) reduzem-se a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta'}{\partial y} \quad (7.33)$$

e

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv) = \frac{\partial \eta_a}{\partial t}, \quad (7.34)$$

onde H é a profundidade do oceano. (A discussão a partir deste ponto será restrita ao caso linear.)

Quando o vento sopra sobre a superfície da Terra uma tensão é exercida sobre a superfície, seja ela a terra ou o mar. Essa tensão representa uma força retardadora de importância considerável para a atmosfera e uma força motriz de grande importância para o oceano.

A tensão horizontal (τ^x, τ^y) na superfície da terra é um vetor horizontal representando a força por unidade de área exercida entre a superfície e a camada vizinha de ar ou água. Para incorporar o efeito de tensões horizontais nas equações do movimento, é útil imaginar o oceano ou a atmosfera divididos em um conjunto de finas camadas horizontais, como se fosse um pedaço de madeira compensada, mas com cada camada livre para se mover. Se uma tensão (τ^x, τ^y) é exercida no topo de uma camada, ela tenderá a se mover exercendo uma tensão na camada imediatamente abaixo. Se a camada tem uma espessura δz a tensão sobre a camada abaixo será aproximadamente

$$(\tau^x - \delta z \partial \tau^x / \partial z, \tau^y - \delta z \partial \tau^y / \partial z).$$

Uma tensão igual e oposta será exercida sobre a base da camada original. Assim, a força líquida por unidade de área sobre tal camada será a diferença entre a tensão sobre o topo e o fundo, representada por

$$(\partial\tau^x/\partial z, \partial\tau^y/\partial z)\delta z.$$

Multiplicando-se pela área $\delta x\delta y$ e dividindo-se pela massa $\rho\delta x\delta y\delta z$ de uma camada, segue que a força por unidade de massa devida a tensões horizontais é

$$\rho^{-1}(\partial\tau^x/\partial z, \partial\tau^y/\partial z).$$

Incluindo-se estas forças nas equações do momento linearizadas, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^x}{\partial z}, \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^y}{\partial z},$$

Daqui, pode ser visto que existem duas forças tendendo a acelerar o fluido: aquela devida ao gradiente de pressão horizontal e aquela devida ao gradiente de tensão vertical. As velocidades devidas a estas duas forças podem ser consideradas separadamente. A parte (u_p, v_p) das velocidades induzidas pelo gradiente de pressão satisfazem

$$\partial u_p/\partial t - fv_p = -\rho^{-1}\partial p'/\partial x, \quad \partial v_p/\partial t + fu_p = -\rho^{-1}\partial p'/\partial y, \quad (7.36)$$

e no caso do escoamento tornando-se de velocidade geostrófica. A parte (u_E, v_E) estimulada pela tensão está confinada à camada na qual a tensão age e será chamada de *velocidade de Ekman*². A camada na qual a tensão age é freqüentemente referida

²Devido ao trabalho pioneiro (1905) de V. W. Ekman sobre o problema da camada limite

como *camada de Ekman*. As velocidades de Ekman satisfazem

$$\partial u_E / \partial t - f v_E = -\rho^{-1} \partial \tau^x / \partial z, \quad \partial v_E / \partial t + f u_E = -\rho^{-1} \partial \tau^y / \partial z, \quad (7.37)$$

Assim a velocidade (u, v) que aparece em (7.35) pode ser expressa como a soma

$$u = u_p + u_E, \quad v = v_p + v_E \quad (7.38)$$

Agora a tensão é zero fora da camada de fronteira (ou camada de Ekman), assim a integração de (7.37) com respeito a z através das camadas fornece

$$\rho(\partial U_E / \partial t - f V_E) = -\tau^{xs}, \quad \rho(\partial V_E / \partial t + f U_E) = -\tau^{ys}, \quad (7.39)$$

para a fronteira inferior. Nesta equação (τ^{xs}, τ^{ys}) é o valor da tensão na fronteira e o vetor

$$(U_E, V_E) = \int (u_E, v_E) dz = \int (u - u_p, v - v_p) dz \quad (7.40)$$

é o volume de transporte (relativo ao escoamento conduzido pela pressão) da camada de contorno. A quantidade (U_E, V_E) é chamada de *volume de transporte de Ekman* da camada de contorno, ou simplesmente de Transporte de Ekman, e $(\rho U_E, \rho V_E)$ é chamada de *transporte de massa de Ekman*.

O sinal do termo de tensão da integral de (7.37) depende se a superfície limite está acima ou abaixo da camada. O resultado (7.39) é válido para a camada limite do fundo do oceano. Para a camada limite na superfície do oceano, entretanto, os sinais são inversos e a integral de (7.37) é igual a

$$\rho(\partial U_E / \partial t - f V_E) = \tau^{xs}, \quad \rho(\partial V_E / \partial t + f U_E) = \tau^{ys}, \quad (7.41)$$

Supondo que a tensão agindo na superfície do oceano é também a tensão agindo na base da atmosfera e adicionando-se (7.39) e (7.41) observa-se que o transporte de massa de Ekman da atmosfera e do oceano é zero, (assumindo-se que a soma é

zero em algum tempo inicial). O mesmo não é verdade para o volume de transporte devido a grande diferença entre as densidades do ar e da água.

Na atmosfera, o transporte de Ekman está dirigido para a esquerda (direita) em relação a tensão superficial provocada pelo vento no hemisfério norte (sul). No oceano, o transporte de Ekman tem direção oposta, ou seja, está dirigido para a direita (esquerda) em relação a tensão superficial no hemisfério norte (sul). A figura (7.2) mostra as direções (para o hemisfério norte) dos fluxos de Ekman relativos a tensão superficial.

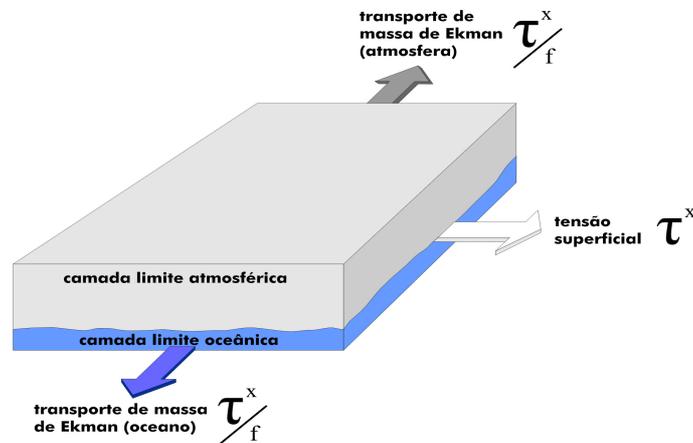


Figura 7.2 Direções (no hemisfério norte) do transporte de massa de Ekman nas camadas limites atmosférica e oceânica.

A tensão sobre a superfície da Terra, bem como o transporte de Ekman, varia de lugar para lugar. Isso leva à convergência de massa em alguns lugares e, em consequência disto, ocorre a expulsão de fluido da camada limite. Em outros lugares o transporte de Ekman é horizontalmente divergente, isto é, massa está sendo perdida através dos lados de uma dada área. Assim, o fluido deve ser sugado verticalmente para o interior da camada limite para tomar o lugar daquele perdido pelos lados. Este efeito é chamado de bombeamento de Ekman (*Ekman pumping*).

A magnitude da velocidade vertical w_E fora da camada limite que resulta da convergência ou da divergência do transporte de Ekman pode ser obtida pela integração da equação da continuidade. Desprezando-se variações na densidade, tem-se

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0,$$

e integrando-se com respeito a z através da camada usando-se a condição $w = 0$ no limite obtém-se

$$\partial U_E / \partial x + \partial V_E / \partial y - w_e = 0, \quad (7.42)$$

para fronteira superior. Para o caso estacionário, combinado com (7.41) obtém-se

$$\rho w_E = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau^{ys}}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau^{xs}}{f} \right). \quad (7.43)$$

Para a fronteira inferior, o sinal negativo da equação (7.43) torna-se positivo e combinando com a equação (7.39) obtém-se a equação (7.43) novamente. Usualmente o vento varia muito mais rápido do que f , assim (7.43) fornece uma expressão aproximada para w_E , chamada de velocidade de bombeamento de Ekman (*Ekman pumping velocity*),

$$\rho w_E = f^{-1} (\partial \tau^{ys} / \partial x - \partial \tau^{xs} / \partial y). \quad (7.44)$$

Assim a velocidade de bombeamento de Ekman é aproximadamente $(\rho f)^{-1}$ vezes o rotacional da tensão do vento (se o vento é estacionário ou varia lentamente em relação a escala de tempo inercial f^{-1}). Ela tem o mesmo sinal na atmosfera e no oceano. Para ilustrar isto, se um ciclone está situado sobre o oceano (ver figura(7.3)), então o transporte de Ekman na camada limite atmosférica é direcionado para a baixa pressão no centro do ciclone. Conseqüentemente, a velocidade de bombeamento de Ekman fora da camada limite produz um movimento ascendente (o qual tende a produzir nuvens). No oceano, o transporte de Ekman é dirigido para fora do centro do ciclone, e assim produz em baixo, uma velocidade de bombeamento para cima.

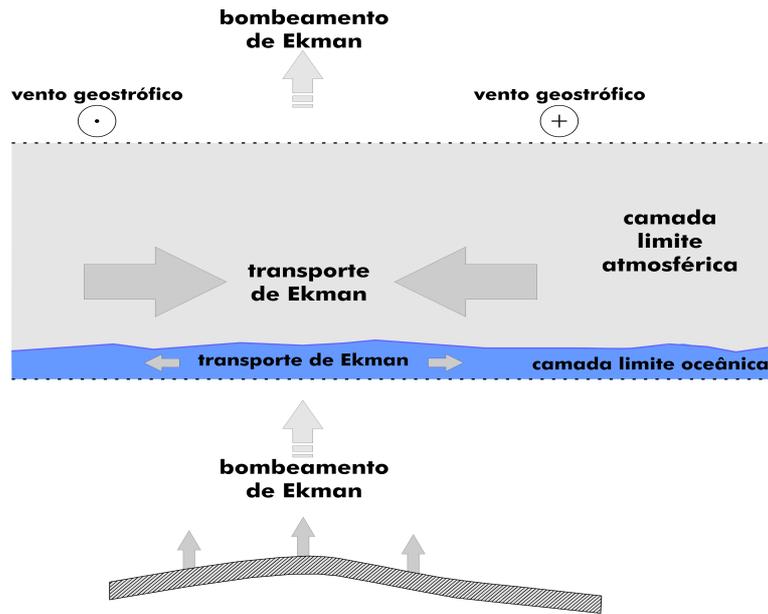


Figura 7.3 Ciclone sobre o oceano mostrando os ajustes devido ao transporte de Ekman.

Para pequenas perturbações pode-se definir um *deslocamento de Ekman* η_E como

$$w_E = \partial \eta_E / \partial t. \quad (7.45)$$

A equação (7.44) é válida somente para condições estacionárias, ou quando as variações no tempo são suficientemente lentas. Entretanto, não é difícil calcular o resultado quando as variações no tempo são incluídas. Se f é tomado como constante, a eliminação de U_E e V_E em (7.41) resulta

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (U_E, V_E) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial t} + f \tau^{ys}, \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial t} - f \tau^{xs} \right) \quad (7.46)$$

para a fronteira superior. Aplicando-se (7.42) obtém-se para a velocidade de bombeamento de Ekman w_E

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w_E = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial y} \right) + \frac{f}{\rho} \left(\frac{\partial \tau^{ys}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{xs}}{\partial y} \right), \quad (7.47)$$

e a mesma fórmula aplica-se para a fronteira inferior. Além do termo forçante que é proporcional ao rotacional da tensão do vento, há também um termo proporcional a divergência da tensão na superfície.

A equação da resposta barotrópica de um oceano para a força do vento é obtida realizando-se uma média vertical na equação do momento (7.35). Neste caso, para um oceano homogêneo, no qual o gradiente de pressão é proporcional à inclinação da superfície e independente da profundidade, a equação fica

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\tau^{xs})/\rho H, \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + (\tau^{ys})/\rho H,$$

onde (u, v) denota a corrente média vertical, (τ^{xs}, τ^{ys}) denota a tensão na superfície imposta pelo vento.

Agora subdivide-se a velocidade (u, v) em uma velocidade de Ekman, a qual é localmente determinada em cada posição horizontal, e uma velocidade devida a pressão (u_p, v_p) . Para uma camada rasa homogênea, o gradiente de pressão é independente da profundidade e assim, (u_p, v_p) é independente da profundidade. A equação (7.38), quando expressa em termos de velocidades médias, fica

$$u = u_p + U_E/H, \quad v = v_p + V_E/H, \quad (7.49)$$

onde

$$\partial u_p/\partial t - fv_p = -g\partial\eta/\partial x. \quad \partial v_p/\partial t + fu_p = -g\partial\eta/\partial y. \quad (7.50)$$

A equação da continuidade fica

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu_p) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv_p) = -w_E. \quad (7.51)$$

O termo forçante neste caso é proveniente da velocidade de bombeamento de Ekman w_E , definida por (7.42), e que pode ser calculada por (7.47). Juntando-se os efeitos da pressão e do vento tem-se as equações

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} - f v_p = -g \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} + f u_p = -g \frac{\partial \eta'}{\partial y}, \quad (7.53)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H u_p) + \frac{\partial}{\partial y}(H v_p) = -\frac{\partial \eta^F}{\partial t}, \quad (7.54)$$

onde

$$\eta^F = \eta_a + \eta_E \quad (7.55)$$

e η_E é deslocamento vertical de Ekman definido por (7.45).

As equações (7.52), (7.53) e (7.54) podem ser reduzidas a uma equação para η' . Primeiro tomamos o rotacional das equações do momento ($\partial/\partial y$ de (7.52) menos $\partial/\partial x$ de (7.53)) e usamos (7.54) para substituir para a divergência. Para um oceano de profundidade constante, o resultado é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial y} - \frac{f \eta'}{H} - \frac{f \eta^F}{H} \right) = 0, \quad (7.56)$$

e integrando com respeito ao tempo obtém-se

$$\frac{\partial v_p}{\partial x} - \frac{\partial u_p}{\partial y} - \frac{f \eta'}{H} - \frac{f \eta^F}{H} = \text{valor inicial}, \quad (7.57)$$

onde o valor inicial será suposto igual a zero.

A equação para η' é obtida tomando-se o divergente das equações do momento ($\partial/\partial x$ de (7.52) mais $\partial/\partial y$ de (7.53)), substituindo para a divergência da

velocidade (7.54) e para a vorticidade (7.57). O resultado pode ser escrito como

$$\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y^2} - \frac{1}{gH} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta' = \mathcal{F}, \quad (7.58)$$

onde

$$\mathcal{F} = \frac{1}{gH} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta^F, \quad (7.59)$$

e por (7.47) e (7.63), \mathcal{F} é dado por

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{1}{gH} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial \eta_a}{\partial t} + \frac{1}{\rho g H} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial y} \right) + \frac{f}{\rho g H} \left(\frac{\partial \tau^{ys}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{xs}}{\partial y} \right). \quad (7.60)$$

7.3 Simulações

Nas simulações as variações de pressão serão desconsideradas logo, rearranjando os termos da equação (7.58) e desconsiderando as variações de pressão tem-se

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + A \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + B \eta = -gH\mathcal{F}, \quad (7.61)$$

onde

$$\mathcal{F} = \frac{1}{gH} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta^F, \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{1}{\rho g H} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tau^{xs}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{ys}}{\partial y} \right) + \frac{f}{\rho g H} \left(\frac{\partial \tau^{ys}}{\partial x} - \frac{\partial \tau^{xs}}{\partial y} \right), \quad (7.63)$$

$$A = -gH \text{ e } B = \frac{1}{gH} f^2. \quad (7.64)$$

Os seguintes valores para os parâmetros foram considerados: $\rho = 1035 \text{kgm}^{-3}$, $H = 200 \text{m}$, $f = 10^{-4} \text{s}^{-1}$, $g = 9.81 \text{m/s}^2$.

Considerando-se condições iniciais nulas e condições de contorno de Dirichlet homogêneas podemos escrever a solução da equação (7.66), para um domínio

retangular, $0 \leq x \leq l_1$ $0 \leq y \leq l_1$ como

$$\eta(t, x, y) = -gH \int_0^t \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \mathcal{F}(\tau, \xi, \zeta) h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta) d\zeta d\xi d\tau, \quad (7.65)$$

onde $h(t - \tau, x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green; para $t > \tau \geq 0$ ela satisfaz a equação homogênea

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + A \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + Bh = 0, \quad (7.66)$$

com as condições iniciais semi homogêneas

$$\begin{aligned} h &= 0 && \text{em } t = \tau, \\ \partial h &= \delta(x - \xi)\delta(y - \zeta) && \text{em } t = \tau, \end{aligned} \quad (7.67)$$

e condições de contorno homogêneas e é dada por

$$h(t, x, y, \xi, \zeta) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\lambda_{nm} t)}{\lambda_{nm}} \text{sen}(p_n x) \text{sen}(q_m y) \text{sen}(p_n \xi) \text{sen}(q_m \zeta), \quad (7.68)$$

$$p_n = \frac{n\pi}{l_1}, \quad q_m = \frac{m\pi}{l_2}, \quad \lambda_{nm} = \sqrt{A p_n^2 + A q_m^2 + B}$$

Utilizando-se o método da decomposição de respostas forçadas podemos reescrever a solução como

$$\begin{aligned} \eta(t, x, y) &= \eta_p(t, x, y) + gH \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\partial}{\partial t} [h(t, x - \xi, y - \zeta)] \eta_p(0, \xi, \zeta) d\zeta d\xi \\ &\quad + gH \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\partial}{\partial t} [\eta_p(0, \xi)] h(t, x - \xi, y - \zeta) d\zeta d\xi \end{aligned} \quad (7.69)$$

Considerando uma tensão devido a ação do vento da forma

$$\tau^{xs} = \tau_1 \cos(\omega_1 x) \cos(\omega_2 y) e^{i\omega t}, \quad \tau^{ys} = 0. \quad (7.70)$$

onde $\tau_1 = 0.1$, $\omega = \frac{2\pi}{86400}$, $L = 10^8 m$, $D = 4 \cdot 10^6 m$. Substituindo (7.70) na equação (7.63) e efetuando-se as contas obtém-se

$$\mathcal{F} = \frac{-\tau_1 [\sin(\omega_1 x) \omega_1 \cos(\omega_2 y) \omega + i f \cos(\omega_1 x) \sin(\omega_2 y) \omega_2] e^{i\omega t}}{\rho g H \omega} = r(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.71)$$

Supondo-se uma resposta da mesma forma da entrada, ou seja,

$$\eta_p(t, x, y) = v(x, y) e^{i\omega t}, \quad (7.72)$$

e substituindo na equação (7.66) obtém-se o problema de contorno não homogêneo para $v(x, y)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) + \gamma v(x, y) = p(x, y), \quad (7.73)$$

$$v = 0 \quad \text{em} \quad x = 0, l_1 \quad (7.74)$$

$$v = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, l_2,$$

onde $\gamma = \frac{\lambda^2 + B}{A^2}$ e $p(x, y) = \frac{r(x, y)}{A^2}$. A solução desse problema é dada por

$$v(x, y) = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} p(\xi, \zeta) g(x, y, \xi, \zeta) d\zeta d\xi, \quad (7.75)$$

onde $g(x, y, \xi, \zeta)$ é a função de Green espacial dada por (5.72) e (5.73).

Os gráficos de $\eta_p(t, x, y)$ são mostrados na figura (7.4) para um tempo $t = 86400s$. A parte imaginária foi multiplicada por um fator de escala (10^{13}) para uma melhor visualização.

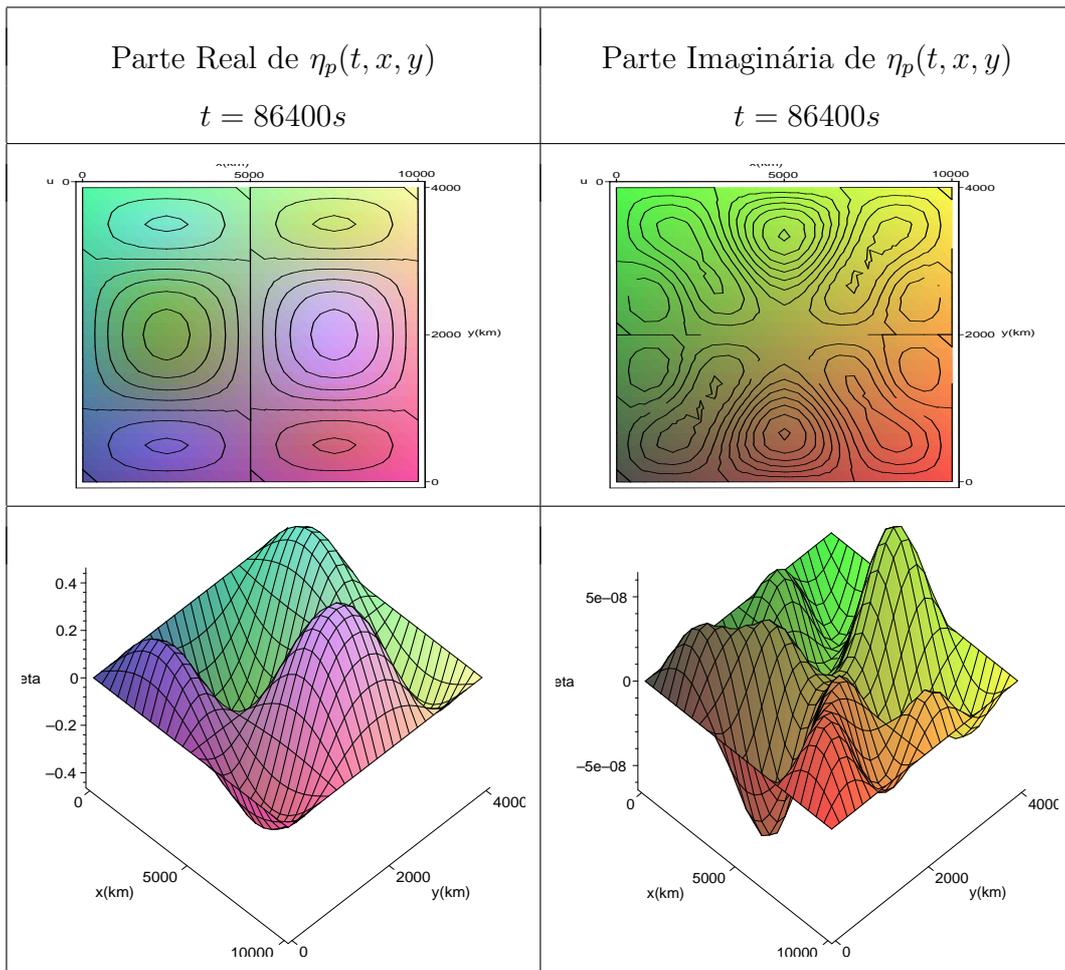


Figura 7.4 Gráficos da resposta particular $\eta_p(t, x, y)$.

Tendo-se calculado a resposta particular $\eta_p(t, x, y)$, a resposta livre induzida pela homogênea $\eta_p(t, x, y)$ é calculada pelos dois últimos termos da equação (7.69). A parte real e a parte imaginária são graficadas separadamente na figura a seguir no instante de tempo $t = 86400s$.

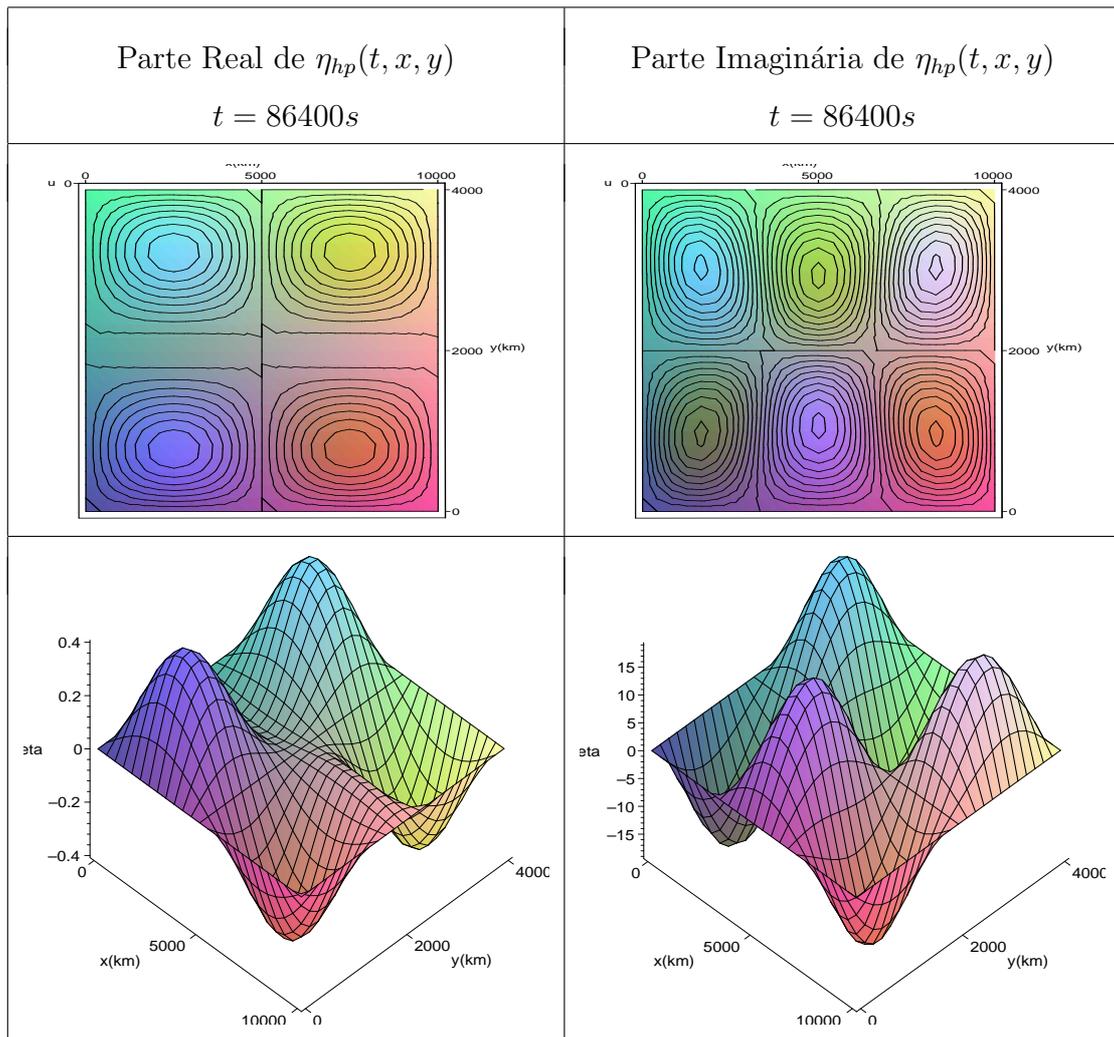


Figura 7.5 Gráficos da resposta livre $\eta_{hp}(t, x, y)$ induzida pela particular.

A resposta total $\eta(t, x, y)$ é dada pela soma das duas soluções anteriores e sua parte real e imaginária são mostradas na figura a seguir.

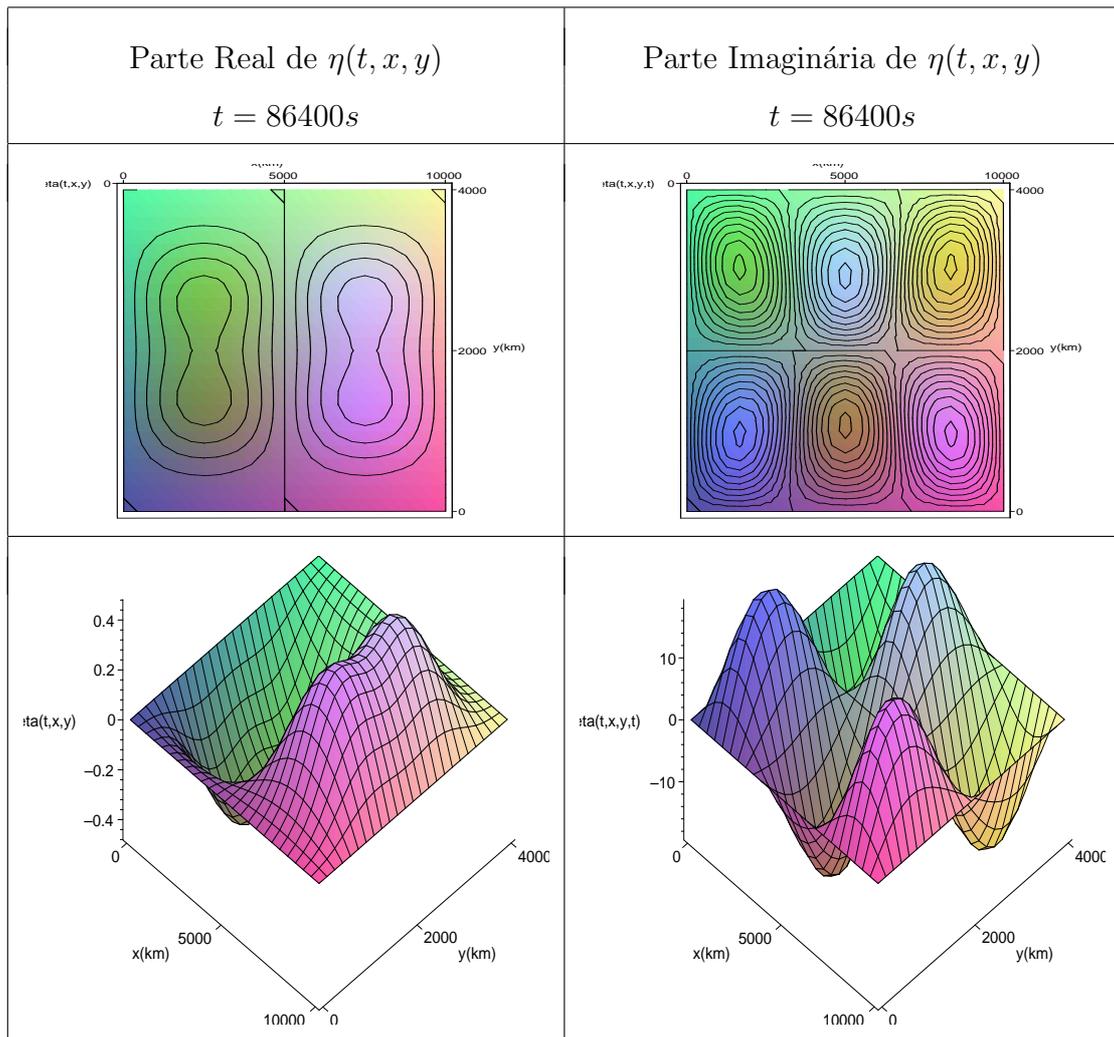


Figura 7.6 Gráficos da resposta forçada $\eta(t, x, y) = \eta_p(t, x, y) + \eta_{hp}(t, x, y)$.

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se uma metodologia para a abordagem de sistemas distribuídos em termos da resposta impulso. Uma vantagem desta metodologia é que diferentes sistemas evolutivos e de ordem arbitrária podem ser tratados sistematicamente numa forma compacta, simples e conveniente para simulação e tratamento de dados.

Foi obtida uma formulação de variação de parâmetros em termos da resposta impulso. Em domínios limitados, esta formulação permitiu representar a solução de um sistema distribuído de forma compacta como sendo a soma de quatro parcelas: uma resposta livre ou transiente (*solução homogênea*), uma resposta particular (*solução não-homogênea particular*), uma resposta livre induzida pelos valores iniciais da resposta particular, e as contribuições das condições de contorno não homogêneas. Isso permite computar e estudar separadamente a influência de cada parcela na resposta final. Não é fácil de se encontrar na literatura uma formulação objetiva para o desenvolvimento de uma teoria de existência, unicidade e dependência contínua (*bem colocado*) que englobe as quatro parcelas de maneira simultânea. Isto é de interesse para o estudo de sistemas fracamente não-lineares.

O uso da decomposição da resposta forçada em termos da soma de uma resposta particular e de uma resposta livre induzida pelos valores iniciais da resposta particular foi fundamental na integração simbólica. Também, permitiu avaliar a influência no sistema, da retroalimentação causada pela resposta permanente. Simulações foram consideradas de maneira detalhada afim de demonstrar a aplicação prática da teoria desenvolvida.

Um modelo de interação oceano-atmosfera foi considerado de maneira detalhada. A decomposição da resposta forçada nos permitiu calcular de maneira simbólica o deslocamento da superfície oceano para entradas oscilatórias. Isso foi

calculado para o caso bidimensional, o que demonstra a abrangência do método utilizado, ressaltando que uma solução simbólica não foi encontrada na literatura para o caso de um forçante envolvendo funções trigonométricas a duas variáveis espaciais.

Como trabalhos futuros pode-se citar a expansão da teoria para o caso de equações fracamente não-lineares. Na área geofísica a intenção é empregar essa formulação no estudo de um modelo completo de águas rasas sem a redução para a equação de Klein-Gordon, o que nos permitiria calcular as componentes da velocidade e do deslocamento da superfície separadamente para o modelo. A incorporação da topografia no fundo do oceano também pode ser considerada, levando ao estudo de um sistema não linear.

Referências Bibliográficas

- [1] CARSLAW, H. S., AND JAEGER, J. C. *Operational Methods in Applied Mathematics*, 2nd ed. Oxford University, Oxford, 1941.
- [2] CLAEYSSSEN, J., FERREIRA, I. M., AND COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Appl. Numer. Math.* (2003).
- [3] CLAEYSSSEN, J. C., AND MORAES, I. F. A resposta dinâmica em modelos evolutivos e estacionários. In *Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática* (Belo Horizonte, 2002).
- [4] CLAEYSSSEN, J. C. R., CANAHUALPA, G., AND JUNG, C. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics* 30, 1 (1999), 65–78.
- [5] CLAEYSSSEN, J. C. R., MORAES, I. F., AND CANAHUALPA, G., Eds. *Convolution with Weighting, Impulse, Transient and Permanent Responses* (Boston, 2001), SIAM Meeting in Control, Signals and Linear Algebra.
- [6] CODDINGTON, E. A., AND LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. MacGraw-Hill, New York, 1955.
- [7] COLE, R. H. *The Theory of Ordinary Differential Equations*. Appleton-Century-Crofts, New York, 1968.
- [8] COPPETI, R. D. *Sistemas Concentrados e Distribuídos através da Análise Modal Adjunta*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 2002.
- [9] COSTA, S. N. J. Problemas de contorno de ordem superior e cálculo da função de green. Master's thesis, UFRGS/PPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [10] DAUTRAY, R., AND LIONS, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer, 1991.

- [11] DUNFORD, N. *Linear Operators*. Interscience, New York, 1958-71.
- [12] FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart, Winston, 1969.
- [13] GALLICCHIO, E. Soluções dinâmicas, desacoplamento e aproximação em equações diferenciais de ordem superior. Master's thesis, UFRGS, Porto Alegre, 1987.
- [14] GARIBOTTI, C. R., CLAEYSSSEN, J. C. R., AND COSTA, S. N. J. Decomposição de respostas forçadas em sistemas distribuídos. *Anais do DINCON 03 - Série Arquimedes 2* (2003).
- [15] GARIBOTTI, C. R., CLAEYSSSEN, J. C. R., COSTA, S. N. J., AND TSUKASAN, T. Computing forced response with the dynamical basis. In *VIII Workshop on Partial Differential Equations* (2003).
- [16] GEL'FAND, I. M., AND SHILOV, G. E. *Generalized Functions Theory of Differential Equations*, vol. 3. Academic Press, New York, 1967.
- [17] GILL, A. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, New York, 1982.
- [18] GUENTHER, R. B., AND LEE, J. W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Dover, New York, 1996.
- [19] HELLWIG, G. *Partial Differential Equations*. Blaisdell Pub., 1965.
- [20] HELLWIG, G. *Differential operators of mathematical physics. An introduction*. Addison-Wesley, 1967.
- [21] HILLE, E. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley, London, 1969.
- [22] HORMANDER, L. *Linear Partial Differential Operators*, 3rd ed. Springer-Verlag, New York, 1969.

- [23] KRAUSS, W. *Dyanamics of the Homogeneous and the Quasihomogeneous Ocean*, vol. I. Gebrüder Borntraeger, Berlin, 1973.
- [24] LANCZOS, C. *Linear Differential Operators*. Dover, 1980.
- [25] LEBLOND, P. H., AND MYSAK, L. A. *Waves in the Ocean*. Elsevier, Amsterdam, 1978.
- [26] MESSIAH, A. *Quantun Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [27] MILLER, K. S. *Linear Differential Equations in the Real Domain*. Routledge, London, 1963.
- [28] MIZOHATA, S. *The Theory of Partial Differential Equations*. Cambridge University, London, 1973.
- [29] MORAES, I. F. *Uma Metodologia Unificada no Domínio Tempo para Sistemas Concentrados, Discretos e Distribuídos*. PhD thesis, UFRGS/Promec, Porto Alegre, 2002.
- [30] NAIMARK, M. A. *Linear Differential Operators*. Frederick Ungar Pub., New York, 1967. pt. 1. Elementary theory of linear differential operators.
- [31] PHILLIPS, H. B. *Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1945.
- [32] POLYANIN, A. D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman & Hall/CRC, New York, 2002.
- [33] RAUCH, J. *Partial Differential Equations*, vol. 128. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [34] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hil, Singapore, 1986.
- [35] STRAUSS, W. *Partial Differential Equations, An Introduction*. John Wiley & Sons, New York, 1992.

- [36] TITCHMARSH, E. C. *Eigenfunctions Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*, vol. 2. Oxford University Press, London, 1958.
- [37] TRÈVES, F. *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*. Gordon and Breach, New York, 1966.
- [38] WEBSTER, A. G. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 2nd ed. Dover, New York, 1955.
- [39] YOSIDA, K. *Functional Analysis*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1966.