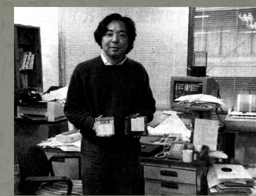
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Identidades em arco-tangente para o número π



Autor: Bruno Baltazar

Orientadora:Leonardo Prange Bonorino

A época do Renascimento Europeu trouxe, na altura devida, um novo mundo matemático. Entre os primeiros efeitos deste renascer está a necessidade de encontrar uma fórmula para o *π*. Descobriu-se então a definição não geométrica de *π* e do papel "não geométrico" deste valor. Assim se chegou à descoberta das representações de *π* por séries infinitas. Um dos primeiros foi Wallis (1616-1703) com a fórmula,

$$\pi = 2\,x\left(\frac{2}{1}x\frac{2}{3}x\frac{4}{3}x\frac{4}{5}x\frac{6}{5}x\ldots\right)$$

Uma outra fórmula que é por vezes atribuída a Leibniz (1646-1716), mas que parece ter sido primeiro descoberta por James Gregory (1638-1675) é

$$\pi = 4\,x\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\right)$$

A série de Gregory converge lentamente, de tal forma que se pretendermos obter quatro casas decimais corretas temos que ter cerca de 10000 termos da série. Esta fórmula é mais apropriada para o cálculo computacional do que para o cálculo humano. Contudo Gregory também demonstrou um resultado mais geral,

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad -1 \le x \le 1$$

então usando o fato seguinte

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

conclui-se que

$$\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x\left(1 - \frac{1}{(3.3)} + \frac{1}{(5.3.3)} - \frac{1}{(7.3.3.3)} + \ldots\right)$$

a qual converge mais rapidamente, pois para se obter quatro casas decimais corretas necessitamos apenas de nove termos da série.

Em 1706, John Machin introduziu uma variação da série de Gregory com um aumento significativo da convergência. Ele conseguiu calcular o *π* com 100 casas decimais. A fórmula de Machin é uma das que ainda hoje é usada, pelos programas de computadores, para calcular os dígitos do *π* . A fórmula encontrada por Machin é dada por,

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Um inglês chamado Shanks, usou a fórmula de Machin para calcular *π* até às 707 casas decimais, das quais só 527 estavam corretas, publicando o resultado do seu trabalho em 1873.

Em 1949 um computador foi usado para calcular *π* até às 2000 casas decimais. Em 1961 conseguiu-se através de computação a aproximação de *π* através de 100 265 casas decimais, mais tarde em 1967 aproximou-se até às 500 000 casas decimais. Recentemente, David Bailey, Peter Borwein e Simon Plouffe contabilizaram 10 bilhões de casas decimais para *π*, usando uma fórmula que dá cada casa decimal do *π* individualmente, para cada n escolhido.

A abordagem de Machin se mantém atual, apesar de vários outros métodos terem sido desenvolvidos para obter boas aproximações de *π*. Em 2002, Kanada obteve uma aproximação de *π* com mais de 1 trilhão de casas corretas, a partir das igualdades envolvendo arco-tangente

$$\frac{\pi}{4} = 44.\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{57}\right) + 7.\operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 12.\operatorname{arctg}\frac{1}{682} + 24.\operatorname{arctg}\frac{1}{12943}$$

e

$$\frac{\pi}{4} = 12.\operatorname{arctg}\frac{1}{49} + 32.\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5.\operatorname{arctg}\frac{1}{239} + 12.\operatorname{arctg}\frac{1}{110443}$$

No presente trabalho, estudamos como essas identidades podem ser descobertas e provadas. Estudando a ligação dessas identidades de tipo arco-tangente para *π* com o anel Z[i] dos inteiros gaussianos.

Referências

- J. S. Calcut, Gaussian integers and arctangent identities for *π*. Am. Math. Monthly 116 (2009), pp. 513 – 530.
- J. Guillera, History of the formulas and algorithms for *π*. Arxiv: 0807.0872v1 [math. HO] 5 Jul 2008.