UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

Adilson Nunes - adilsonnunesd12@gmail.com

Andréa Konrath – andreack@gmail.com

ESTUDO DE PROBLEMA DE FLUXO EM REDES COM CUSTO MÍNIMO

RESUMO

Uma rede é definida como um conjunto ordenado de nós e arcos juntamente com uma ou mais funções, que atribuem números aos arcos e/ou aos nós. Os denominados modelos em rede permitem a solução de importantes problemas reais e são de extraordinária aplicação prática. Esses modelos permitem o aperfeiçoamento de conhecidas e tradicionais técnicas, de modo a alcançarem uma enorme eficiência no seu processo de resolução. Neste contexto o trabalho tem como objetivo o estudo de propriedades matemáticas que levam a obter um algoritmo especializado para encontrar a inversa da matriz de incidência de árvores, operando diretamente no grafo.

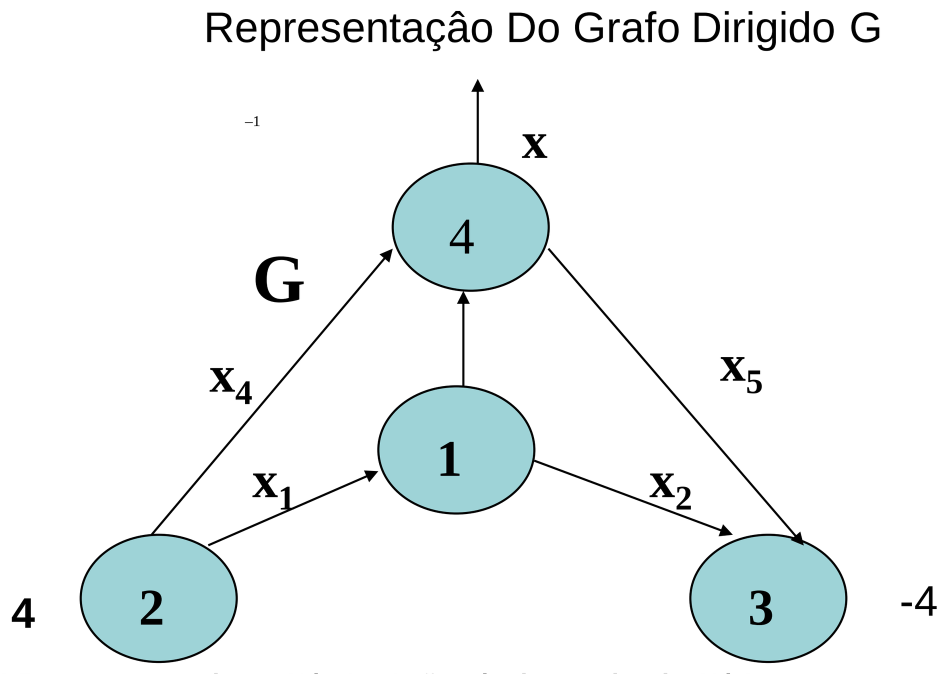
INTRODUÇÃO

Modelos de rede são extremamente importantes, tanto do ponto de vista teórico como computacional. Eles são estruturas relativamente simples de entender e possuem propriedades que são modeláveis de maneira relativamente fácil.

Os modelos de rede abrangem análise dos Problemas de Transporte, de Designação, de Caminho Mais Curto e de Fluxo Máximo, que são casos especiais do Problema de Fluxo de Custo Mínimo, que é um Problema de Programação Linear. Nossa proposta de trabalho é mostrar propriedades matemáticas que levam a encontrar a inversa de uma matriz de incidência sem recorrer a forma matricial para um problema de custo de fluxo mínimo.

PROBLEMA DE FLUXO EM REDE:

Representação Do Grafo Dirigido G



Nó 2 Representa a origem, Nós 1 e 4 são nós de transbordo, Nó 3 representa o nó de destino

Função objetivo do problema

Min Z = $2x_1+3x_2+x_3+4x_4+3x_5$

Restrições do problema

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_4=4 \\ -x_2-x_5=-4 \\ -x_1-x_4+x_5=0 \end{cases}$$

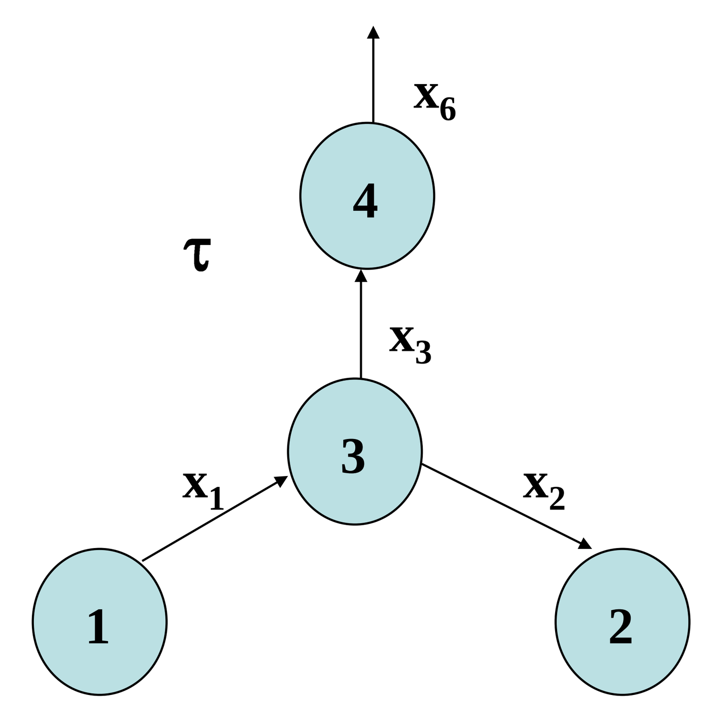
A matriz de incidência para G é:

$$[A]= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A matriz enraizada de G é:

$$[A_0 X_6]= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ÁRVORE ROTULADA DE G



$$[B]= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

TEOREMA

Se *B* é a matriz básica triangular que representa τ então B^{-1} é uma matriz triangular

LEMA 1

Se *B* é uma matriz de incidência associada a uma árvore enraizada τ, então os elementos da matriz inversa B^{-1} podem ser obtidos a partir da inspeção no grafo

A INVERSA ATRAVÉS DA INSPEÇÃO NO GRAFO

• Rotulação da árvore de forma que ela se torne uma matriz triangular.

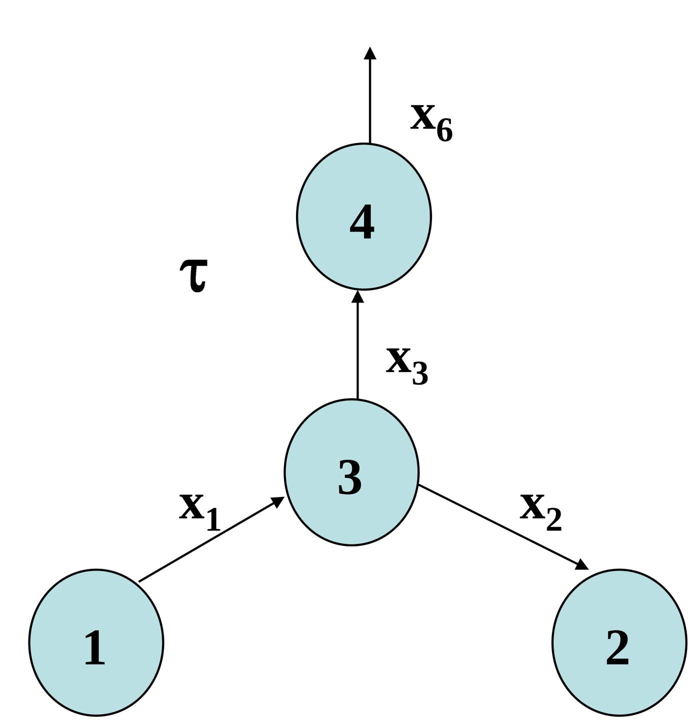
• Para cada arco de índice *j* = 1,...,*n* tem-se uma seqüência ordenada *P* de nós. A seqüência *P* começa com o nó de índice *i* = *j* e termina com o nó raiz de índice *n*. Para cada seqüência *P* tem-se:
P = (1,...,*n*), *P* = (2,...,*n*), ..., *P* = (*n*)

• Por inspeção no grafo, percorrer cada caminho *Pj* determinando a seqüência de valores (+1) e (-1). Os sinais (+) e (-) dependem da orientação das arestas no caminho *Pj.*

• Inicializa-se a matriz B^{-1} como uma matriz nula

• Aloca-se os valores da seqüência *Pj* aos elementos da coluna de B^{-1} a seguinte forma:

$$P_1=(a_{1,1},\ldots,a_{n,1}),\ P_2=(a_{2,2},\ldots,a_{n,2}),\ P_3=(a_{3,3}\ldots,a_{n,3}),\ldots,\quad P_n=(a_{n,n})$$



$$[B^{-1}]= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos** (3a edição). EditoraEdgard Blucher Ltda.,2003

CAMPELLO, R. E. e MACULAN, N. **Algoritmos e Heurísticas: Desenvolvimento e Avaliação de Performance.** Editora da UFF. Niterói, 1994.

CHRISTOFIDES, N. Graph Theory: **An Algorithimic Approach**, Academic Press, London, 1975.

COLIN, E. C. **Pesquisa Operacional**, LTC, Rio de Janeiro, 2007

CORMEM, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. e Stein, C. **Algoritmos: Teoria e Prática**. Editora Campus, 2001.

GONDRAN, M. and MINOUX, **M. Graphs and Algorithms**, John Wiley and Sons, 1984.

KNUTH, D.E. **The Art of Computer Programming**. Addison-Wesley. vol.1 e vol.3, 1996.

MARINS, F.A.S.; SENNE, E.L.F.; DARBY-DOWMAN, K.; MACHADO, A.F.; PERIN, C. **Algorithms for Network Piecewise-Linear Programs: A Comparative Study**. European Journal of Operational Research , 97:183-199, 1997.

JACOBS, David Pokrass ; MACHADO, C. M. S. ; PEREIRA, E. C. ; TREVISAN, V. . **Computing the Inverse of a Tree's Incidence Matrix**. Congressus Numerantium, v. 189, p. 169-176, 2009.