Autor: Thayner Gomes de Bona
Orientador: Rafael Rigão Souza

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

A fatoração em primos de k!

1 Introdução

A fatoração em primos de um número natural tem várias finalidades para o estudo da teoria dos números, como por exemplo as funções τ e σ. Apesar disso, fatorar números muito grandes em fatores primos ainda é um problema, exceto para certos tipos especiais, tais como os números do tipo k! (k fatorial).

2 Como se fatora um número k! em fatores primos?

Para descobrir o expoente de um número primo p na fatoração em primos de k!, basta fazermos a divisão euclidiana de k por p, p^2, p^3, etc. até uma potência p^n tal que esta seja a maior potência de p que é menor ou igual a k. Em seguida, somamos os quocientes de tais divisões. Para ilustrar este método, vamos fatorar 5!:

$$\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor = 2+1=3$$

$$\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lfloor \frac{5}{5} \right\rfloor = 1$$

Assim temos $5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.
Observe que:
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
realmente é a fatoração em primos de 5!

3 Objetivo

O objetivo deste trabalho não é lidar diretamente com a fatoração em primos de k!, mas sim demonstrar que o método utilizado ao lado sempre funciona. A princípio, este método já é conhecido e já foi demonstrado, porém sua demonstração usual é feita por contagem. Entretanto, neste trabalho apresentaremos uma forma elementar de fazer tal demonstração, usando como ferramentas principais apenas o Princípio da Indução e a divisão euclidiana.

4 Desenvolvimento

Primeiramente, iremos reescrever o método utilizado acima matematicamente:

$$\textit{Dado } k \in \mathbb{N}\textit{, a fatoração em primos de } k! \textit{ é:}$$
$$k! = p_1^{f(p_1,k)} \cdot p_2^{f(p_2,k)} \cdot p_3^{f(p_3,k)} \cdots p_r^{f(p_r,k)}$$
$$\textit{onde cada } p_i \textit{ é um número primo, e } f(p_i,k) = \left\lfloor \frac{k}{p_i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p_i^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p_i^3} \right\rfloor + \cdots$$

A partir daí, começamos a demonstração supondo k=2 como base de indução. Somente então passamos para a passagem de indução, onde será provado que se o teorema é válido para algum número natural, também é válido para o seu sucessor. Dessa forma, a validade do teorema para k=2 implicaria sua validade para k=3, assim como a validade para k=3 implicaria que o teorema é válido para k=4, e assim por diante.

5 Considerações Finais

A demonstração em questão, que é diferente da usada na literatura usual, pode ser entendida sem muitas dificuldades, pois não exige um conhecimento muito aprofundado de matemática.