Um problema sobre partições

Alessandro Bagatini [1]

Orientador: Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

1 – O que é uma Partição?

Uma partição de um inteiro n é, por definição, uma maneira de escrever n como soma de inteiros menores ou iguais a ele. Por exemplo, considere as partições do número inteiro 4:

4 = 1+1+1+1
4 = 1+1+2
4 = 1+3
4 = 2+2
4 = 4

Notação: escrevemos as partições da seguinte forma:

1111, 112, 13, 22, 4

Denotamos o número de partições de 4 por $p(4) = 5$

2 – O problema.

O seguinte problema é proposto no periódico American Mathematical Monthly, edição 116, sob o número 11464:

PROBLEMA 11464: Considere os dois seguintes casos:

Seja $a(n)$ o número de diferentes maneiras de dispor n bolas idênticas em uma sequência de urnas $U_1, U_2, U_3, \ldots$ de tal modo que U_1 receba pelo menos uma bola e, enquanto sobrarem bolas, cada urna receba, pelo menos, tantas bolas quanto todas as urnas anteriores combinadas.

Seja $b(n)$ o número de partições de n em potências de 2, sendo permitida a repetição de potências de 2, ou seja, $b(n)$ é a quantidade de maneiras de escrever $n = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \cdots + 2^{p_k}$, com $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_k$.

Prove que $a(n) = b(n)$

3 – Exemplo.

$a(8) = b(8)$, pois

$a(8) = 10$, cujas partições são:

1124, 116, 125, 134, 17, 224, 26, 35, 44, 8

$b(8) = 10$, cujas partições são: 11111111, 1111112, 111122, 11222, 11114, 1124, 2222, 224, 44, 8

4 – Observação.

A partição $a(n)$ pode ser entendida como um caso de empilhamento de caixas em que o peso que está em cima da caixa deve ser menor ou igual a ela, para que não a esmague. Equivalentemente, soma dos pesos das caixas que estão acima não deve sobrepor o peso da debaixo.

5 – A resolução do problema.

Seja $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_k$ um posicionamento de bolas nas primeiras k urnas, e μ_i representa o número de bolas na $i-$ésima urna. Temos:

$\mu_1 \ge 1$

$\mu_i \ge \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{i-1}, \ \forall i > 1$

e $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$

As partições em potências de dois são expressas da forma:

$n = \alpha_1 2^{k-1} + \alpha_2 2^{k-2} + \cdots + \alpha_k 2^0$, com α_i inteiros positivos.

O resultado:

PROPOSIÇÃO: Existe uma bijeção entre o conjunto das partições $a(n)$ de um inteiro n (vide definição de $a(n)$), e o conjunto das partições de n em potências de 2 (não necessariamente distintas), sendo a maior parte 2^{k-1}

6 – Comentários.

Podemos estender nosso resultado:

Ao invés de particionarmos em potências de 2, podemos generalizar para potências de um m inteiro ≥ 2.

$$n = \alpha_1 m^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} m^1 + \alpha_k m^0$$

$$\text{com } \alpha_1 \ge 1, \ \alpha_i \ge 0 \ \forall i$$

Chamamos uma partição m-*ária* de $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ de "não-colapsante"* se

$\mu_2 \ge (m-1)\mu_1$

$\mu_3 \ge (m-1)(\mu_1 + \mu_2)$

$\vdots$

$\mu_k \ge (m-1)(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{k-1})$

Generalização: O número de partições de n em potências de m é igual ao número de partições não-colapsantes de n.

*Traduzimos o termo "non-squashing partition" da bibliografia para "partições não-colapsantes".

7 – Referências.

[1] M. D. Hirschhorn and J. A. Sellers, *A different view of m-ary partitions*, Australasian Journal of Combinatorics 30 (2004), 193-196.

[2] Am. Math. Monthly vol. 116, N. 9, November 2009, Problem 11464, pag. 845.

1- e-mail: alebagatini@yahoo.com.br