



# Análise de Sensibilidade de Problema de Fluxos em Redes com Custo Mínimo.

Orientadora:  
Profª. Drª. Elaine Corrêa Pereira  
Universidade Federal do Rio Grande  
Instituto de Matemática, Estatística e Física

Acadêmica:  
Daniela dos S. de Oliveira  
Universidade Federal do Rio Grande  
Instituto de Matemática, Estatística e Física

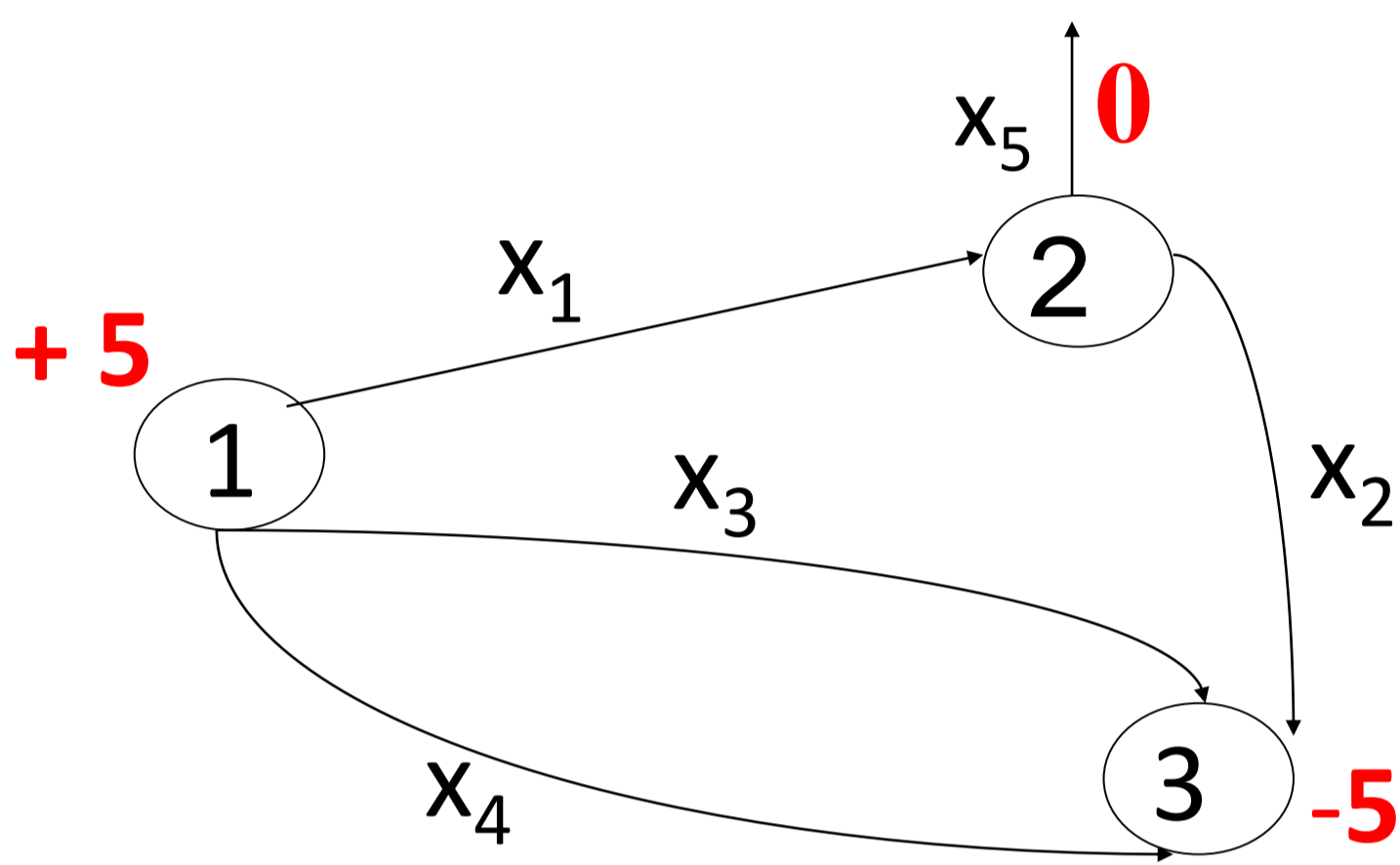
Colaboradora:  
Profª. Drª. Cátia M.S. Machado  
Universidade Federal do Rio Grande  
Instituto de Matemática, Estatística e Física

## 1. Resumo

Em Programação Linear, os parâmetros (dados de entrada) do modelo podem mudar dentro de certos limites sem provocar alteração na solução ótima. Isso é denominado análise de sensibilidade. De modo geral, os parâmetros em modelos de programação linear não são exatos. Com análise de sensibilidade podemos averiguar o impacto dessa incerteza sobre a qualidade da solução ótima. Para resolver o exemplo que será mostrado, usaremos o "solver" do Excel.

## 2. Introdução

Os chamados problemas de fluxo abordam o processo de otimização da distribuição de produtos originados em pontos de oferta e consumidos em pontos de demanda dentro de uma rede de interligações possíveis.



## 3. Formulação Matemática do Problema

Definimos uma rede como um conjunto de nós conectados por arcos. A notação para descrever uma rede é (N,A), na qual N é o conjunto de nós e A é o conjunto de arcos. A rede acima é descrita como:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

### 3.1 Restrições de Capacidade dos Arcos

Todos os arcos da rede são capacitados. Dessa forma, as restrições de limite de fluxo serão escritas como segue:

$$\begin{array}{llll} \text{Arco } x_1 & \text{Arco } x_2 & \text{Arco } x_3 & \text{Arco } x_4 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 & 0 \leq x_2 \leq 2; & 0 \leq x_3 \leq 4; & 0 \leq x_4 \leq 10 \end{array}$$

### 3.2 Restrições de Equilíbrio de Fluxo em cada Nó

Os nós da rede, com exceção dos nós fonte e sumidouro, são conservativos em relação ao fluxo, ou seja, o fluxo que chega ao nó é igual ao fluxo que deixa o nó. A equação geral de equilíbrio de fluxo é:

$$\{\text{Fluxo que chega ao nó } i\} = \{\text{Fluxo que sai do nó } i\}$$

Representando o fluxo que atravessa o arco  $(i, j) \in E$  pela variável  $x_{ij}$ , podemos escrever as equações de equilíbrio de fluxo da seguinte forma:

$$\sum_{(k,i) \in E} x_{ki} = \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}$$

$$\text{Equilíbrio do nó 1: } x_1 + x_3 + x_4 = 5$$

$$\text{Equilíbrio do nó 2: } -x_1 + x_2 + x_5 = 0$$

$$\text{Equilíbrio do nó 3: } -x_2 - x_3 - x_4 = -5$$

### 3.3 Função Objetivo

No processo de otimização dos fluxos em uma rede podemos dizer que dois objetivos são muito comuns: maximizar o fluxo total que passa pela rede ou minimizar o custo de um certo fluxo. Nosso exemplo é de minimização.

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4$$

## 4. Solução ótima do problema:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	AX	B				
2	Nó 1	1	0	1	1	0	5	5				
3	Nó 2	-1	1	0	0	1	0	0				
4	Nó 3	0	-1	-1	-1	0	-5	-5				
5	Lucro	1	1	3	10	0						
6	Cap. Min	0	0	0	0	0						
7	Cap. Max	4	2	4	10	0						
8	Fluxo	2	2	3	0	0						
9	Min.											13

## 5. Relatório de Sensibilidade

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade											
2	Células ajustáveis											
3			Final	Reduzido	Objetivo	Permissível	Permissível					
4	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Acréscimo	Decréscimo					
5	\$B\$8	Fluxo x1	2	0	1	1	1E+30					
6	\$C\$8	Fluxo x2	2	-1	1	1	1E+30					
7	\$D\$8	Fluxo x3	3	0	3	7	1					
8	\$E\$8	Fluxo x4	0	7	10	1E+30	7					
9	\$F\$8	Fluxo x5	0	0	0	1E+30	1E+30					

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
14	Restrições											
15			Final	Sombra	Restrição	Permissível	Permissível					
16	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Acréscimo	Decréscimo					
17	\$G\$2	Nó 1 AX	5	1	5	0	0					
18	\$G\$3	Nó 2 AX	0	0	0	0	0					
19	\$G\$4	Nó 3 AX	-5	-2	-5	0	0					

## 6. Considerações Finais

A análise de sensibilidade pode ser descrita como uma técnica que permite de forma controlada conduzir experimentos e investigações com o uso de um modelo de simulação.

Este problema simples de ser resolvido, nos permite saber como tomar uma decisão.

A tomada de decisão nos permite analisar o fluxo que é permitido passar em cada arco e o quanto podemos aumentá-lo (ou diminuí-lo) para que ele continue constante.

E ainda:

As restrições são de igualdade, logo não podem sofrer alterações (acréscimos ou decréscimos), pois não estariam sendo satisfeitas.