CONSTRUINDO GRAFOS DE RAMANUJAN

Bolsista: Jonas Szutkoski Orientador: Vilmar Trevisan

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Introdução

Seja $G = G(V, E)$ um grafo finito, onde V denota o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas. Para um dado subconjunto F de V, denotamos por ∂F, e chamaremos *fronteira de F*, o conjunto das arestas que ligam F a $V - F$. De posse da noção de fronteira de um subconjunto de vértices, define-se a *constante de expansão* $h(G)$ do grafo G por:

$$h(G) = \inf\left\{\frac{|\partial F|}{\min\{|F|, |V - F|\}} : F \subseteq V, 0 < |F| < \infty\right\}.$$

Tal constante é um análogo da constante isoperimétrica definida em variedades riemannianas compactas. Se olharmos o grafo G como uma rede transmitindo informações, $h(G)$ nos diz o quão boa essa rede é, no sentido de que, quanto maior $h(G)$, melhor as informações se propagam em G.

Assim, estamos interessados em construir uma família $Z = X_m(V_m, E_m)$, de grafos conexos, finitos e k-regulares (ie, todo vértice está ligado a exatamente k outros vértices) para a qual existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que $h(X_m) \geq \epsilon$ para todo grafo X_m na família Z. Uma família de grafos que cumpre essa propriedade, e que $|V_m| \to \infty$ quando $m \to \infty$, é chamada de *família de grafos expansores*. Famílias de grafos expansores surgem em problemas da ciência da computação, na construção de redes com boa conectividade e com baixo número de ligações entre os vértices.

Se A_m é a matriz de adjacência do grafo X_m (ie, $a_{i,j} = 1$ se o vértice i é adjacente ao vértice j e 0, caso contrário) e $\mu(X_m)$ é o maior autovalor da matriz A_m, diferente de k e -k, então pode-se provar que

$$\frac{k - \mu(X_m)}{2} \leq h(X_m) \leq \sqrt{2k(k - \mu(X_m))}.$$

Desse modo, podemos reescrever nosso problema e tentar construir uma família de grafos $Z = X_m(V_m, E_m)$, conexos, finitos e k-regulares, que maximize $k - \mu(X_m)$. Ora, a única variável nessa diferença é $\mu(X_m)$ e numa família de grafos conexos, finitos e k-regulares, vale:

$$\lim_{m\to\infty} \inf \mu(X_m) \geq 2\sqrt{k-1}$$

Assim, se tomarmos $|\mu(X_m)| \leq 2\sqrt{k-1}$, obteremos o maior valor possível para $k - \mu(X_m)$ e portanto, um bom valor para a constante ϵ. Este resultado motiva a seguinte definição:

Definição (Grafos de Ramanujan)

Um grafo finito, conexo e k-regular G é um grafo de Ramanujan se todo autovalor μ da matriz de adjacência de G, diferente de k e -k, satisfaz:

$$|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}$$

Objetivo

O objetivo é construir uma família de grafos de Ramanujan. O fato desses grafos serem de Ramanujan nos garante um ótimo valor para a constante isoperimétrica do ponto de vista do espectro.

Construção

Passaremos agora para a construção desses grafos. Mas... Como construir um grafo? Um grafo é definido por 2 conjuntos; um conjunto, não vazio, de vértices e um conjunto de arestas, que pode ser entendido como um conjunto de pares da forma (v_i, v_j) onde v_i, v_j pertencem a V. Para o conjunto de vértices vamos tomar um corpo finito $\mathbb{F}_q$ e definir $V = \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$.

Agora, passamos para o conjunto das arestas. A idéia aqui é criar funções $s : \mathbb{F}_q \cup \{\infty\} \to \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ e dizer que o vértice $x \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ é adjacente ao vértice $s(x) \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$. Para tanto, vamos fazer um passeio pelo mundo dos quatérnios. O conjunto do quatérnios sobre um anel A é definido por $\mathbb{H}(A) = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k / a_0, a_1, a_2, a_3 \in A\}$ onde i, j, k satisfazem $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$. Para cada elemento $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, define-se a norma de α como $N(\alpha) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Fixado um primo p, tal que $q > 2\sqrt{p}$, estamos interessados naqueles quatérnios α tais que $N(\alpha) = p$. Chamaremos esse conjunto de S_p. Descartando elementos associados e utilizando alguns resultados da teoria dos números, é possível mostrar que $|S_p| = p + 1$.

O próximo passo é passar congruência modulo q nesses elementos. Em seguida, definimos o isomorfismo $\psi_q : \mathbb{H}(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q)$ por:

$$\psi_q(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 x + a_3 y & -a_1 y + a_2 + a_3 x \\ -a_1 y - a_2 + a_3 x & a_0 - a_1 x - a_3 y \end{pmatrix}$$

Onde x e y são tais que $x^2 + y^2 = -1$ em $\mathbb{F}_q$. E por fim, para cada matriz da forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, associamos a transformação $\Phi_A : \mathbb{F}_q \cup \{\infty\} \to \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ onde

$$\Phi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Chamaremos o conjunto dessas funções de $S_{p,q}$. E assim, se dissermos que o vértice x é adjacente à $s(x)$ para todo $s \in S_{p,q}$ teremos construído um grafo, que chamaremos de $Z^{p,q}$, que é (p+1)-regular, finito e conexo. Além disso, pode-se provar que esse grafo é um grafo de Ramanujan.

A família é construída fazendo-se variar o primo q (responsável pelo número de vértices) no conjunto dos números primos, mantendo-se fixo o primo p.

Resumindo e exemplificando: Vamos construir o grafo $Z^{5,13}$. Vamos considerar $\mathbb{F}_q$ como sendo o corpo $\mathbb{Z}_{13}$. Temos:

$$S_5 = \{1 + 2i, 1 + 2j, 1 + 2k, 1 - 2i, 1 - 2j, 1 - 2k\}$$

Em seguida, passamos congruência módulo 13, de modo que agora esses elementos pertencem à $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_{13})$. Fixados $x = 3$ e $y = 4$, e aplicando ψ_{13} temos as seguintes matrizes:

$$\left\{\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

onde cada uma dessas matrizes vai gerar uma função pela transformação Φ. Aplicando cada uma dessas funções aos elementos de $\mathbb{Z}_{13} \cup \{\infty\}$, obteremos as relações de adjacência entre os vértices, obtendo o grafo:

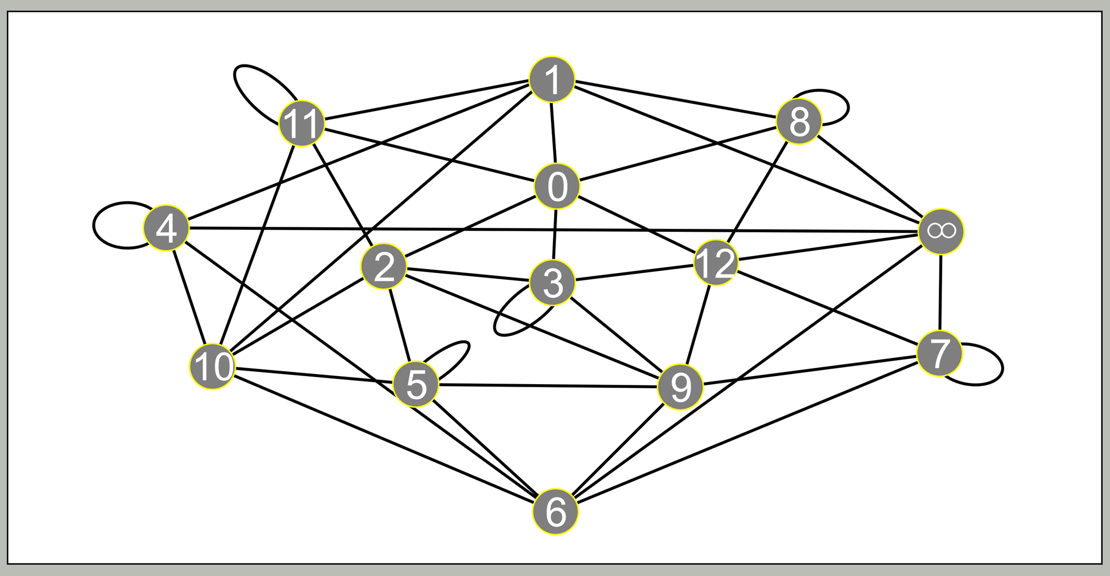

Figure: Grafo $Z^{5,13}$