Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Todo Inteiro é Soma de Quatro Quadrados

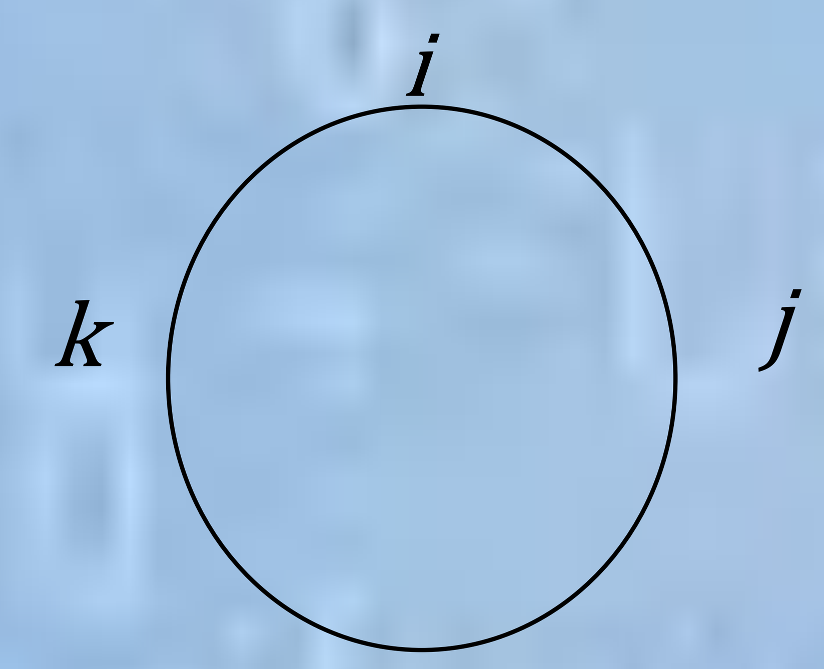
Guilherme Ferreira Monteiro
Orientadora: Dra Luisa Rodriguez Doering

O presente trabalho mostra uma aplicação da Teoria de Anéis Euclidianos à Teoria de Números. Mostraremos que todo número inteiro positivo pode ser escrito como uma soma de quatro quadrados.

Como todo número decompõe-se num produto de primos (Teorema Fundamental da Aritmética), e pela Identidade de Lagrange, que afirma que o produto de dois números que são soma de quatro quadrados é um número que é soma de quatro quadrados, basta mostrar que todo primo pode ser escrito como soma de quatro quadrados para obtermos o resultado desejado. Sabemos que o número primo *2* pode ser representado como $1^2+1^2+0^2+0^2$, uma soma de quatro quadrados. Dessa forma, reduzimos nosso problema a estudar somente os *números primos ímpares*.

A demonstração segue fazendo-se uso dos Quatérnios de Hurwitz que, a menos de comutatividade, é um anel Euclidiano. Também usamos o Teorema de Wedderburn que afirma que todo anel finito com divisão é corpo.

O que são os Quatérnios de Hurwitz?
Considere:



Com i, j,e k satisfazendo:

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1 \qquad ij=-ji=k$$
$$jk=-kj=i \qquad ki=-ik=j$$

O anel dos quatérnios inteiros de Hurwitz é dado por:

$$H=\{x_0\xi+x_1 i+x_2 j+x_3 k;\, x_0,x_1,x_2,x_3\in Z\}$$

onde

$$\xi=1/2(1+i+j+k)$$

Vejamos alguns exemplos:
$95=1^2+3^2+6^2+7^2$
$534=10^2+11^2+12^2+13^2$

Referência Bibliográfica: Hernstein, I. N . Tópicos de Álgebra