Fusão de Triangulações Independente de Conectividade

Luiz Fernando Scheidegger

Orientador: Prof. Dr. João Luiz Dihl Comba

Introdução:

Neste trabalho, apresentamos um método capaz de:

(1) Gerenciar a conectividade de malhas de triângulos e tetraedros implicitamente, sem estruturas de dados auxiliares

(2) Unir duas ou mais malhas de triângulos ou tetraedros de forma robusta, resolvendo um programa linear (LP). Para tal, fazemos uso de Triangulações Regulares, que são uma generalização direta das Triangulações de Delaunay, associando pesos para cada vértice da malha.

Triangulações de Delaunay e Regulares

Uma triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos em n dimensões pode ser definida como a projeção em n dimensões do conjunto de faces de normal negativa da envoltória convexa dos seguintes pontos em n+1 dimensões:

$$v^* = (v_{x_0}, v_{x_1}, \ldots, v_{x_{n-1}}, {v_{x_0}}^2 + {v_{x_1}}^2 + \ldots + {v_{x_{n-1}}}^2)$$

onde v é um ponto do conjunto original.

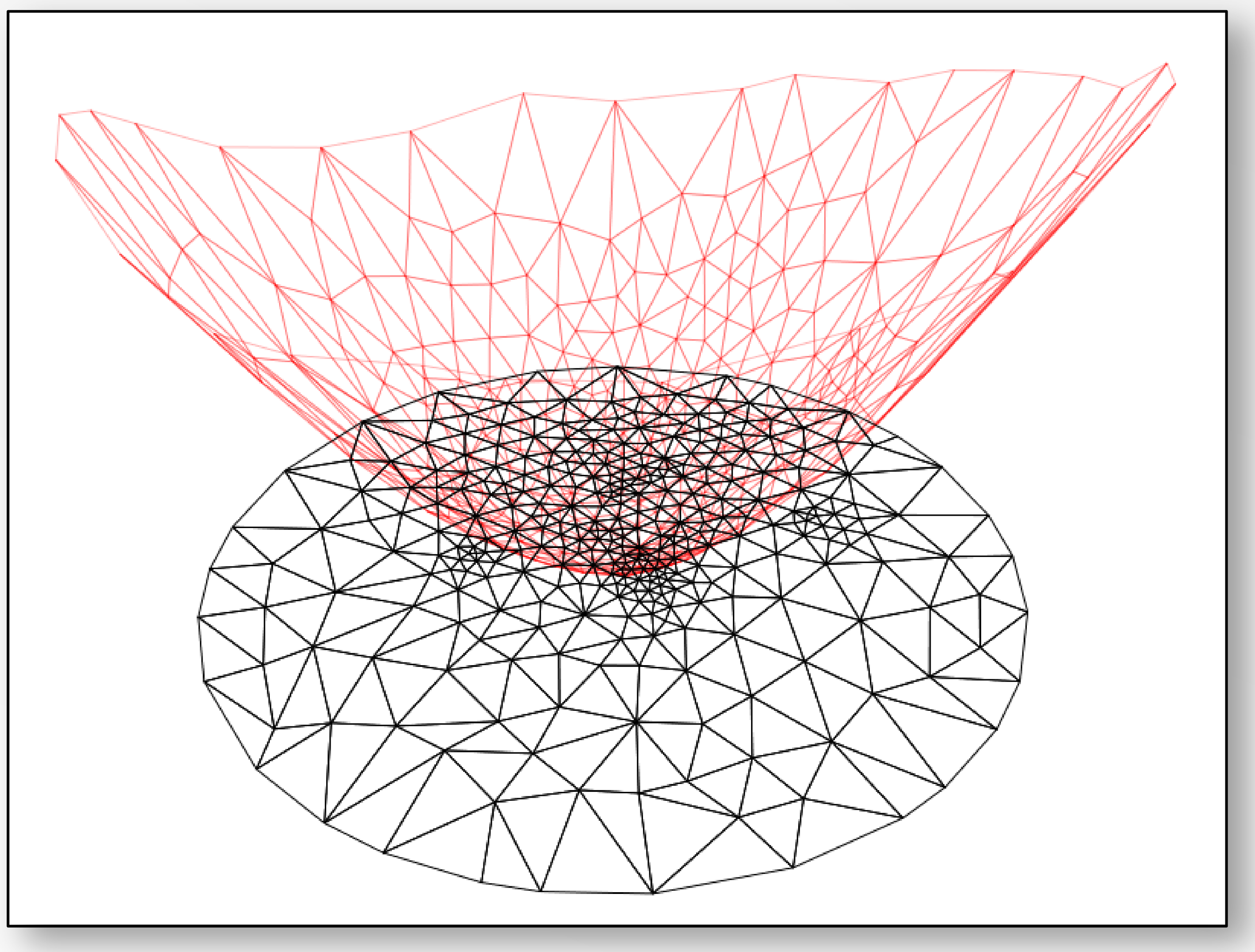
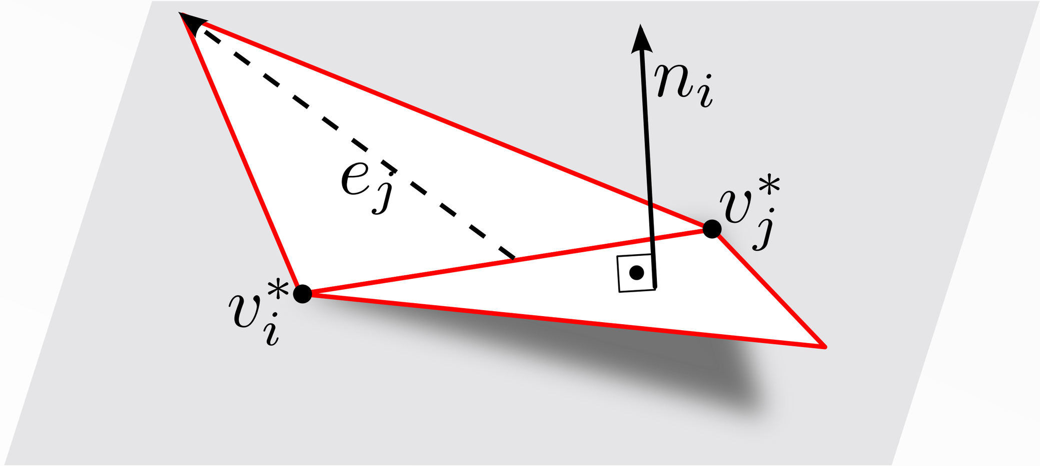


Figura 1: Triangulação de Delaunay (em preto) com sua envoltória convexa em n+1 dimensões (em vermelho)

Uma malha de Triângulos é chamada Delaunay se ela for igual à Triangulação de Delaunay de seus pontos. Caso contrário, podemos adicionar pesos aos vértices da envoltória convexa, para forçar que eles apareçam na triangulação final. Essa generalização chama-se Triangulação Regular:

$$v^* = (v_{x_0}, v_{x_1}, \ldots, v_{x_{n-1}}, {v_{x_0}}^2 + {v_{x_1}}^2 + \ldots + {v_{x_{n-1}}}^2 - w)$$

onde w é um número real. Para uma aresta aparecer na triangulação ela deve ser localmente convexa, ou seja, o ângulo entre a normal de uma das faces e um vetor tangente qualquer na outra face deve ser menor que 90 graus:



$$\langle e_j, n_i \rangle > 0$$

Figura 2: A aresta entre vi e vj aparecerá na triangulação somente se estaa desigualdade for satisfeita, ou seja, se ela for localmente convexa

Solução utilizando Simplex:

Para determinar todos os pesos w, formulamos um programa linear com variáveis para os pesos e os ângulos das arestas. Encontrando a solução ótima desse programa utilizando Simplex, encontraremos um conjunto de pesos que representa uma triangulação como uma Triangulação Regular. Esta técnica se aplica tanto em 2D quanto em 3D (com tetraedros).

Fusão de Malhas de Triângulos e Tetraedros:

Podemos usar nosso método para construir uma envoltória convexa de um conjunto de pontos proveniente de duas malhas separadas. Dessa forma, o resultado final será uma terceira malha formada pela união da conectividade das duas malhas iniciais.

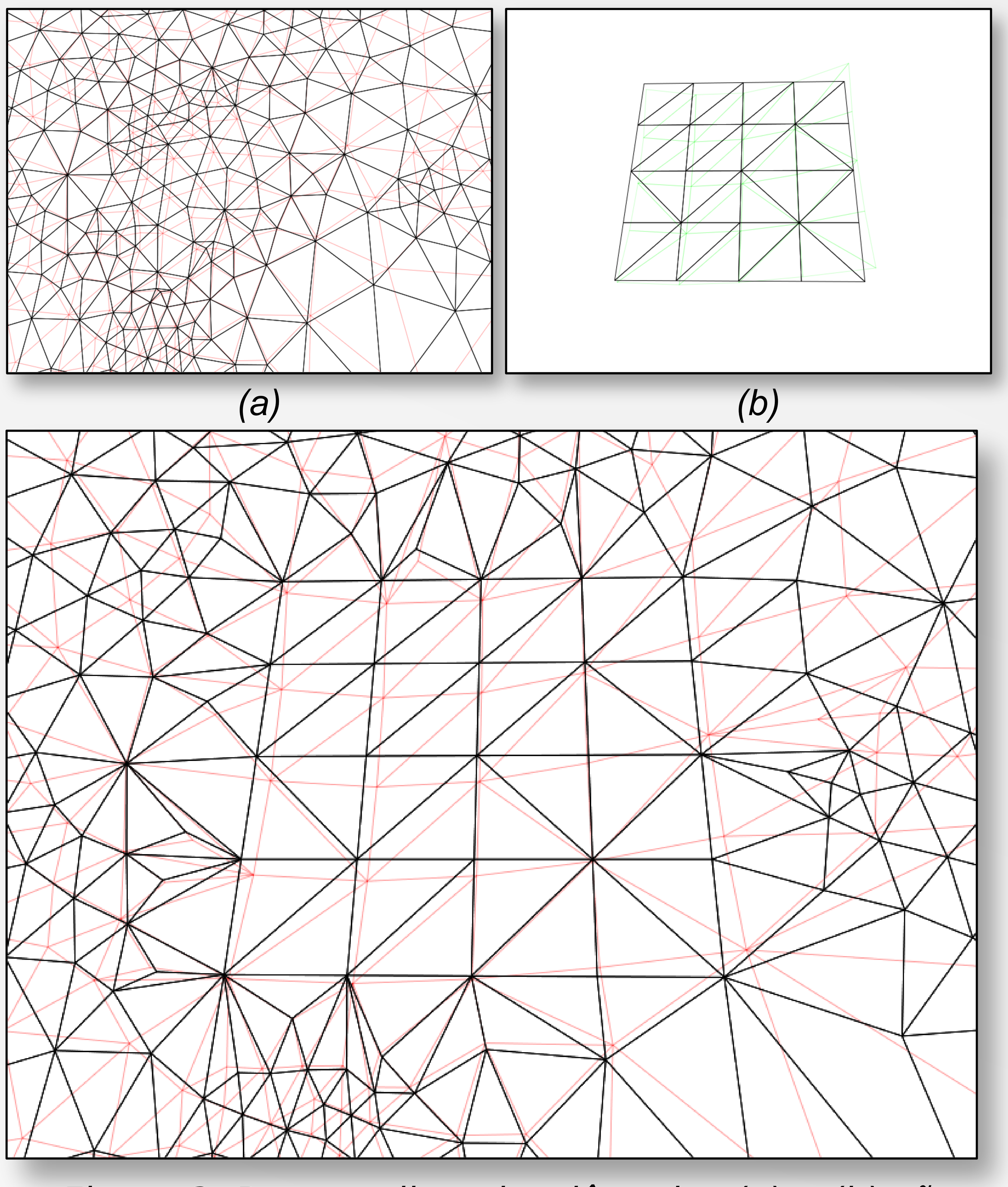


Figura 3: Duas malhas de triângulos (a) e (b) são unidas automaticamente utilizando nosso método. A conectividade da malha resultante é automaticamente mantida

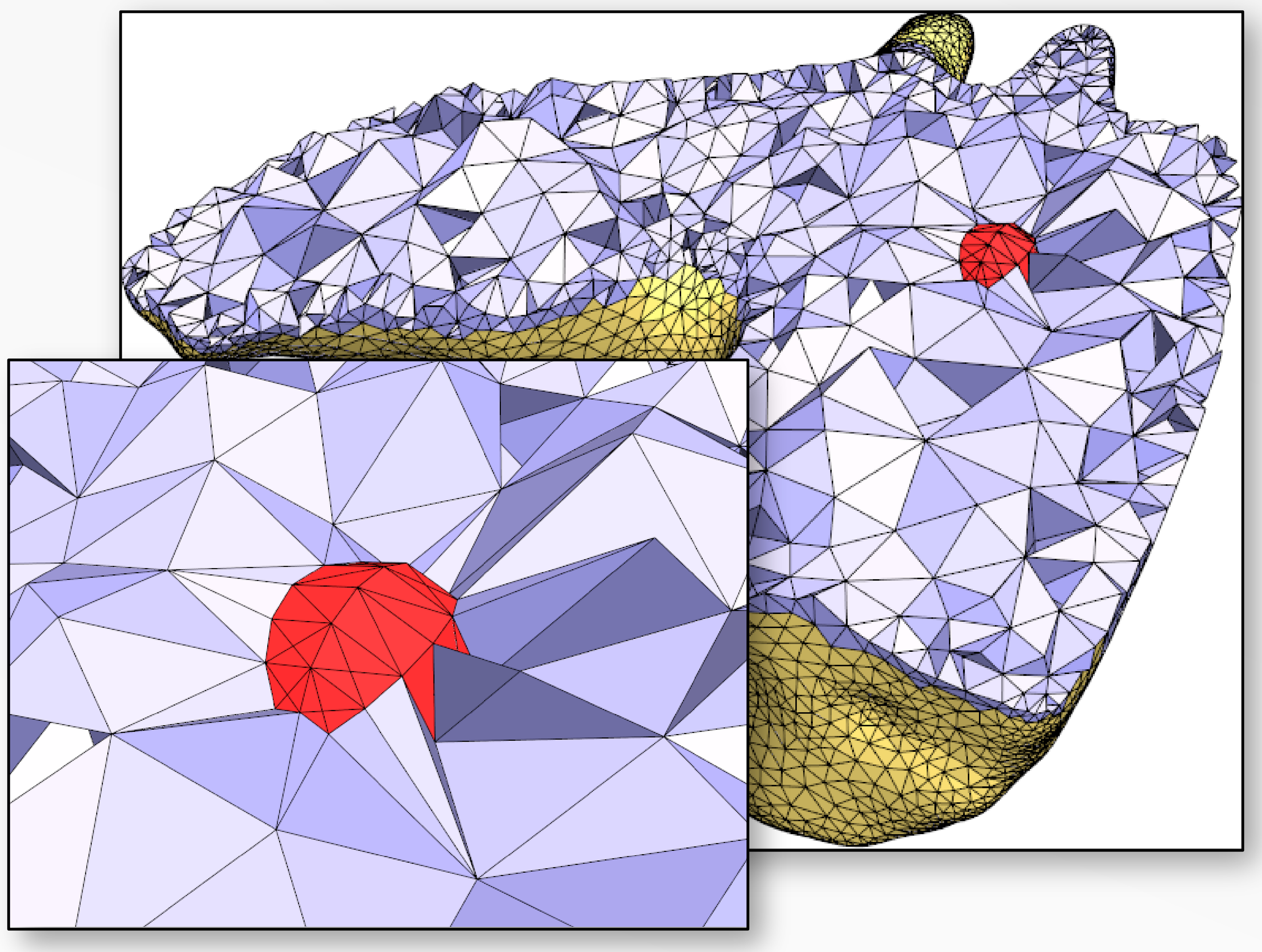


Figura 4: Nossa técnica permite unir malhas simpliciais em n-dimensões, inclusive malhas de tetraedros. Neste exemplo, uma sonda esférica é inserida em uma discretização de porção da Aorta.

Contato:
Luiz Scheidegger: lfscheidegger@inf.ufrgs.br
João Comba: comba@inf.ufrgs.br