

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um estudo dos processos estocásticos caóticos obtidos através da interação da transformação introduzida por Sakai e Tokumaru (1980), dada por $T_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $a \in (0, 1)$ é uma constante. O processo estocástico é obtido através da interação da transformação $T_a(\cdot)$, produzindo o sinal, mais um ruído aditivo. Este ruído é considerado branco e Gaussiano de tal forma que as variáveis aleatórias ξ_t , são tais que $\xi_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

2. OBJETIVO

O objetivo neste trabalho é estimar os parâmetros a e σ_ξ^2 . Para isso, utilizamos séries temporais advindas do processo estocástico caótico.

3. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS CAÓTICOS

O método de estimação utilizado é o de máxima verossimilhança construído com a aproximação sugerida por Whittle (1951). A função densidade espectral do processo é estimada através das funções periodograma e periodograma suavizado, onde a última função produz um estimador consistente.

Sakai e Tokumaru (1980) introduziram o seguinte modelo de séries temporais caóticas. Considere a transformação $T_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$T_a(x) = \begin{cases} x/a, & \text{se } 0 \leq x < a \\ (1-x)/(1-a), & \text{se } a \leq x < 1 \end{cases},$$

onde $a \in (0, 1)$ é uma constante.

Consideramos o processo estocástico

$$Z_t = X_t + \xi_t = T_a(X_{t-1}) + \xi_t, \text{ para } t \in \mathbb{Z}.$$

Obtemos uma série temporal d e tamanho n para diferentes valores dos parâmetros a e σ_ξ^2 .

4. ESTIMAÇÃO

Considerando o caso com ruído branco Gaussiano queremos estimar os parâmetros a e σ_ξ^2 . Podemos, então, obter a função densidade espectral do processo Z_t , para $t \in \mathbb{Z}$, associada ao processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada por:

$$f_Z(\lambda) = \frac{2a(1-a)}{[1 - 2(2a-1)\cos(\lambda) + (2a-1)^2]} + \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}, \text{ para } \lambda \in (-\pi, \pi).$$

Apresentamos dois estimadores da série temporal $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$:

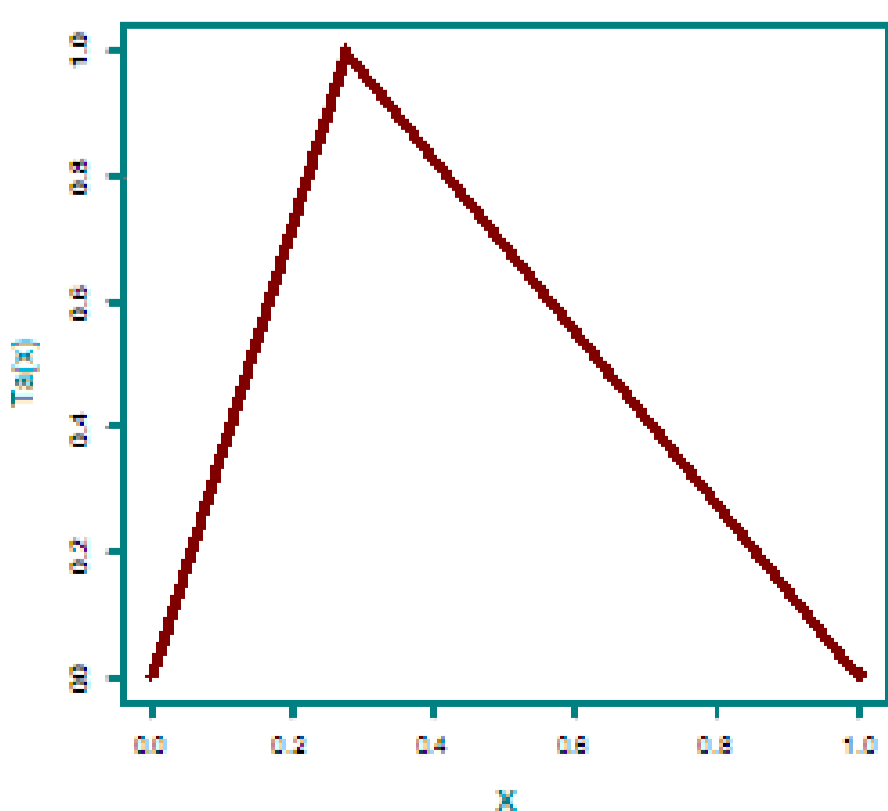
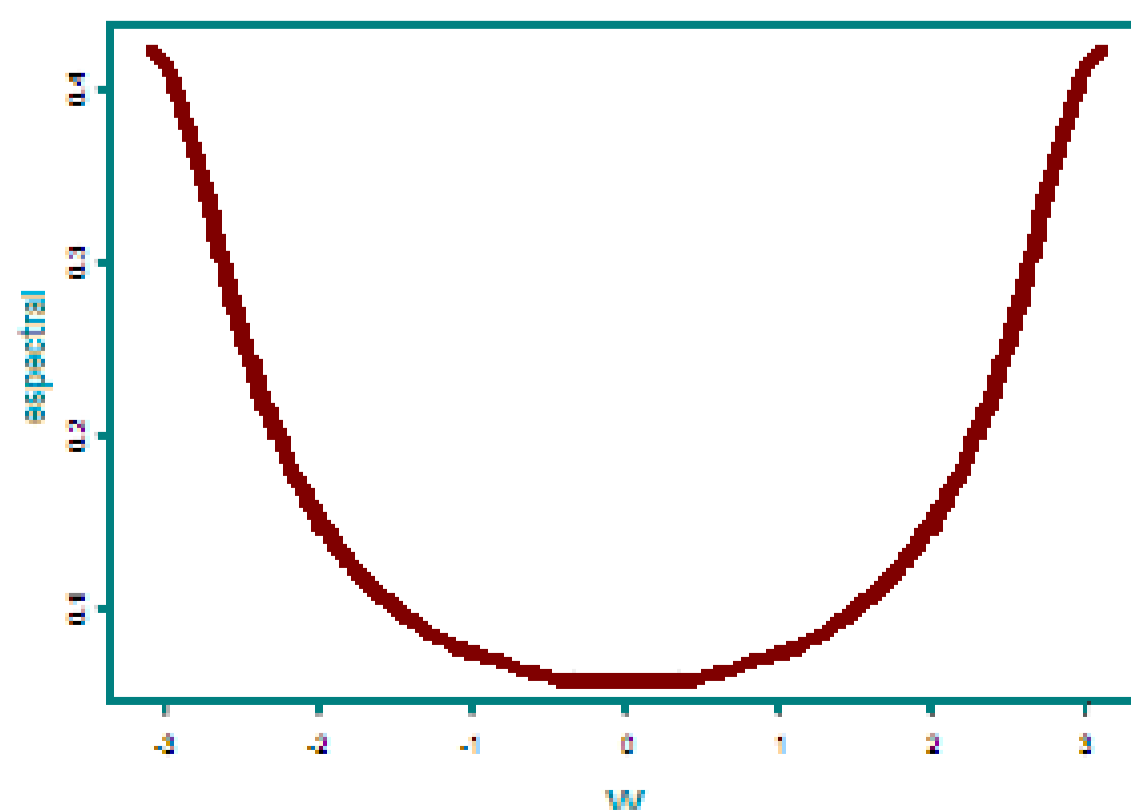


Gráfico das transformações $T_a(\cdot)$
com $a = 0,273$



Função $f_Z(\cdot)$
com $\sigma_\xi^2 = 0,1$

➤ **Periodograma:** estimador não-viciado, porém, inconsistente para a função densidade espectral $f_Z(\cdot)$, definido por

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{y}_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{y}_X(k) \cos(\omega_j k) \right], \omega_j \in (0, \pi);$$

➤ **Periodograma Suavizado:** estimador não-viciado e consistente para $f_Z(\cdot)$, definida por:

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m} \lambda \left(\frac{k}{m} \right) \hat{y}_X(k) \cos(\omega_j k), \text{ para } \omega_j = \frac{2\pi j}{n},$$

onde $\hat{y}_X(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral de $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, ω_j para $j=0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ são as frequências de Fourier, e $m = n^\beta$ para $0 \leq \beta \leq 1$ e $\lambda(\cdot)$ é a janela de Bartlett.

6. ESTIMADOR DO TIPO WHITTLE

O estimador de máxima verossimilhança pode ser obtido através da aproximação (ver Beran, 1994, página 116):

$$\mathcal{L}_n(\eta) = 2 \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left[\ln(f_Z(\omega_j; \eta)) \frac{2\pi}{n} + \frac{I_n(\omega_j)}{f_Z(\omega_j; \eta)} \frac{2\pi}{n} \right],$$

onde ω_j são as frequências de Fourier e η é o vetor dos parâmetros; aqui $\eta = (a; \sigma_\xi^2)$. O estimador \hat{a} é obtido através da minimização de $\mathcal{L}_n(\eta)$, isto é,

$$\hat{a} = \min_{\eta} \mathcal{L}_n(\eta).$$

Para obter o estimador de σ_ξ , calculamos

$$Q(\hat{\eta}) = \sum_{j=1}^{m^*} \frac{I_n(\omega_j)}{f_Z(\omega_j; \hat{\eta})},$$

onde $I_n(\cdot)$ é a função **periodograma** ou **periodograma suavizado**, $f_Z(\cdot; \hat{\eta}) \equiv f_Z(\cdot)$ a função densidade espectral, com os valores \hat{a} e $\hat{\sigma}_\xi$, e $m^* = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ é o maior inteiro de $\frac{n-1}{2}$.

Para obter o valor do estimador de σ_ξ , isto é, o desvio padrão do ruído branco Gaussiano, usamos a aproximação sugerida por Graf (1983) dada por:

$$\hat{\sigma}_\xi = \sqrt{2\pi \hat{\theta}_1} = \sqrt{\frac{2}{n} Q(\hat{\eta})}$$

7. CONCLUSÃO

Apresentamos simulações de Monte Carlo para a obtenção dos estimadores aqui propostos, para diferentes valores dos parâmetros a e σ_ξ , e para diferentes valores do *signal-to-noise ratio* (snr), sugerido no artigo Lopes e Lopes (1998). O desempenho destes estimadores é analisado por meio de seus vícios, desvios padrões e erros quadráticos médios para diferentes tamanhos de séries temporais e diferentes números de replicações.

REFERÊNCIAS:

- Beran, J. (1994). *Statistics for long-memory processes*. Konstanz, Alemanha.
- Fox, R. e M.Taqqu (1986). "Large-sample properties of parameter estimates for stongly dependent sationary Gaussian time series". *The Annals of Statistics*, Vol. 14, pp. 517-532.
- Graf (1983).
- Lopes, A. e S.R.C. Lopes (1998). "Parametric Estimation and Spectral Analysis of Piecewise Linear Maps of the Interval". *Advances on Applied Probability*, Vol. 30, pp. 757-776.
- Olbermann, B.P. (2003). "Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação". *Tese de Doutorado*, Programa de Pós-Graduação e Matemática, IM, UFRGS, Porto Alegre.
- Olbermann, B.P. (1998). "Estimação do Parâmetro de Diferenciação em Series Temporais Não Estacionarias com Características de Longa Dependência". *Dissertação de Mestrado*. Instituto de Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- Sakai e Tokumaru (1980)
- Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. Hafner, New York.