

# APROXIMAÇÕES ESTABILIZADAS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS CONVECTADOS SUPERIORES DE MAXWELL-B E OLDROYD-B

Crissiane Alves Ancines

Orientador: Sérgio Frey

Departamento de Engenharia Mecânica - UFRGS

Apoio: CNPq



## 1. INTRODUÇÃO

A viscoelasticidade é um comportamento reológico que apresentam comportamento tanto viscoso como elásticos quando se deformam. Materiais com esse comportamento são utilizados nas indústrias com ampla utilização, como plásticos, tintas ou fluidos de perfuração na indústria do petróleo. Algumas borrachas, silicone e argilas também apresentam este comportamento de grande importância na indústria. Neste presente trabalho foi feita uma aproximação por um método de Galerkin mínimos-quadrados de escoamentos lentos de fluidos viscoplásticos Maxwell-B e Oldroyd-B. A geometria estudada foi um canal plano bi- dimensional no qual suas paredes são fixas.

## 2. OBJETIVO

Tirando proveito do fato do método GLS permanecer estável mesmo empregando-se elementos finitos de igual ordem, as malhas investigadas empregaram interpolações bi-lineares Lagrangianas para os campos de tensão-extra, velocidade e pressão. Quanto ao modelo viscoelástico empregado foram testados tanto o modelo de Maxwell-B como o modelo de Oldroyd-B, visando uma comparação de sua performance e convergência.

## 3. MODELAGEM MECÂNICA

Combinando as equações de balanço de massa e de momento com a equação constitutiva, utilizando-se a função de viscosidade regularizada, assumindo regime estacionário e escoamento incompressível e, incorporando condições de contorno, o modelo mecânico pode ser colocado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \rho \mathbf{b} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{em } \Gamma_g \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_g && \text{em } \Gamma_g \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_g && \text{em } \Gamma_g \\ [\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}] \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{em } \Gamma_h \end{aligned}$$

Para o modelo de Maxwell-B:  $\boldsymbol{\tau} + \lambda \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta_p \mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0$

onde o vetor velocidade é dado por  $\mathbf{u}$ , a pressão hidrostática dada por  $p$  e o tensor de tensão extra dado por  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\lambda$  é o tempo de relaxação do fluido,  $\eta_p$  é a viscosidade polimérica,  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação,  $\mathbf{b}$  é a força de corpo por unidade de massa,  $\mathbf{t}_h$  é o vetor tensão,  $\mathbf{u}_g$  e  $\boldsymbol{\tau}_g$  são as condições de contorno de velocidade e tensão extra impostas, respectivamente. Além disso,  $\dot{\boldsymbol{\tau}}$  é a derivada convectada superior de  $\boldsymbol{\tau}$ .

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \nabla \mathbf{u}^T$$

Para Oldroyd-B, que corresponde à situação em que um polímero elástico com viscosidade  $\mu_1$  é dissolvida em um solvente viscoso de viscosidade de  $\mu_2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \\ \boldsymbol{\tau}_1 + \lambda \dot{\boldsymbol{\tau}}_1 &= 2 \mu_1 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= 2 \mu_2 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \\ \mu_1 + \mu_2 &= \mu \end{aligned}$$

## 5. RESULTADOS

O problema de escoamento de fluidos viscoelásticos lentos teve seu domínio computacional discretizado empregando-se duas malhas distintas: a primeira malha (A) considerou o canal completo, usado para aproximar o escoamento de Maxwell-B, enquanto a malha (B) considerou apenas metade do canal por razões de economia de memória computacional, utilizada para aproximar o escoamento de Oldroyd-B.

As condições de contorno de velocidade e tensão-extra são as seguintes:

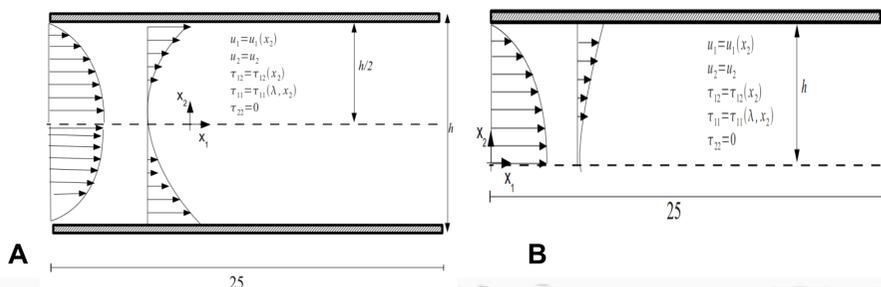
(1) Perfis de velocidade e tensão totalmente desenvolvido na entrada do canal:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,5(Q/h)(1 - (x_2^2/h^2)); & u_2 &= 0 \\ \tau_{11} &= 2\lambda\mu_p(-3x_2/h^2)^2; & \tau_{12} &= \mu_p(-3x_2/h^2); & \tau_{22} &= 0 \end{aligned}$$

(2) Condição de não deslizamento e impermeabilidade nas paredes do canal;

(3) Condições de simetria no centro do canal -  $\tau_{12} = \partial_{x_2} u_1 = u_2 = 0$

(4) Condição de saída de tração livre -  $[\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}] \mathbf{n} = \mathbf{t}_h$



No que diz respeito ao número de elementos, a malha (A) contém 1000 elementos bilineares Q1/Q1/Q1 e com número de nós igual a 1111. Já para a malha B contém 10000 elementos e com número de nós igual a 10521.

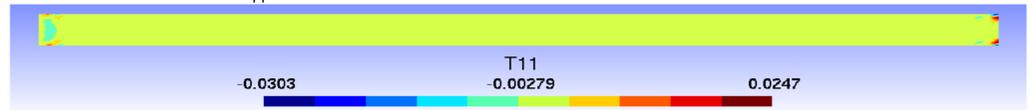
Para medir a viscoelasticidade do material é utilizado o número de Weissenberg ( $Wi$ ), o qual é definido pela relação do tempo de relaxação do fluido com o tempo característico do escoamento,

$$Wi = \frac{\lambda u_c}{L_c} = \frac{\text{tempo de relaxação}}{\text{tempo característico do processo}}$$

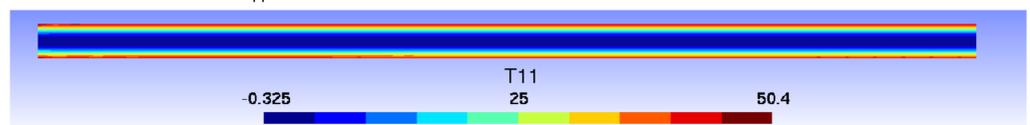
### Maxwell-B:

Os resultados foram obtidos para a análise de como o grau de elasticidade do fluido afeta os campos de tensão-extra. O número de Weissenberg foi investigado na faixa entre 0 e 1,4.

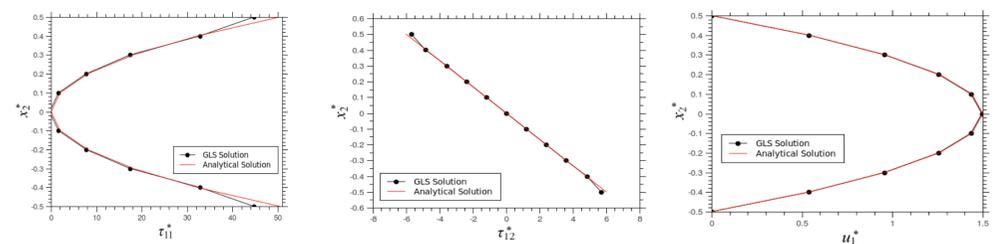
$Wi = 0.0$ ; para  $\tau_{11}^*$ :



$Wi = 1.4$ ; para  $\tau_{11}^*$ :



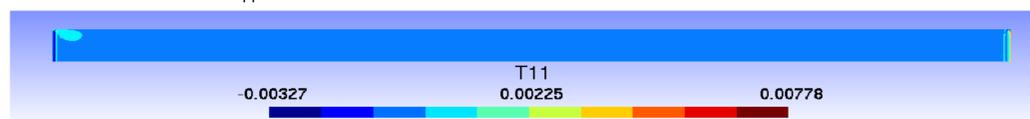
Abaixo foram plotados os gráficos de  $\tau_{11}^*$ ,  $\tau_{12}^*$  e  $u_1^*$  contra suas soluções analíticas para  $Wi=1,4$  e  $x_1^*=15$ .



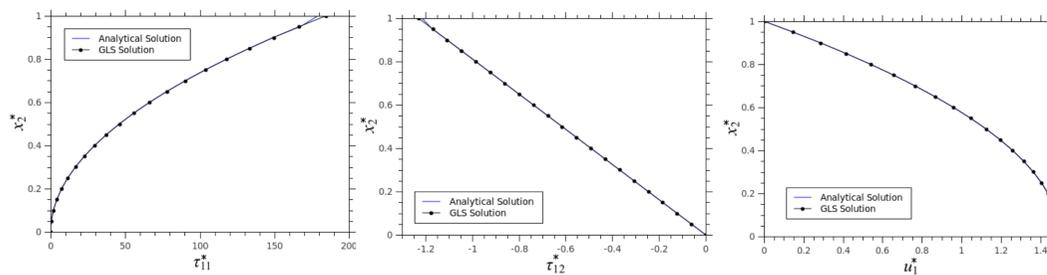
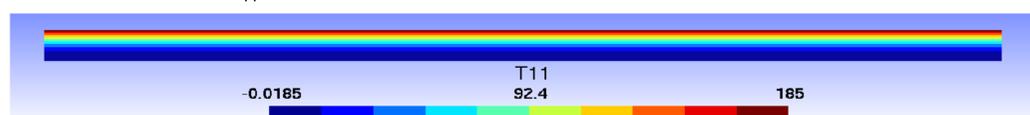
### Oldroyd-B:

O mesmo foi feito para o fluido de Oldroyd-B.

$Wi = 0.0$ ; para  $\tau_{11}^*$ :



$Wi = 0.0$ ; para  $\tau_{11}^*$ :



## 6. CONCLUSÕES

Para o primeiro modelo, com uma malha mais grosseira, conseguimos avançar no número de Weissenberg apenas até  $Wi=1,4$ , já para o fluido Oldroyd-B, utilizando uma malha bem mais refinada, obtivemos convergência para escoamentos sujeitos a altos números de Weissenberg ( $Wi=25$ ) – fato este que comprova as boas condições de estabilidade do esquema numérico proposto.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bird, R. B., Armstrong, R.C., Hassager, O. 1987. Dynamics of polymeric liquids.
- Frey, S., Fonseca, C., Zinani, F. e Naccache, M. F., 2010. Galerkin least-squares approximations for upperconvected Maxwell fluid flows.
- Marek Behr, Dhruv Arora, Oscar Coronado-Matutti e Matteo Pasquali, 2004. Stabilized finite element methods of gls type for oldroyd-b viscoelastic fluid
- Behr, M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993. Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows. Comput. Meth ods Appl. Mech. Eng. 104, 31-48.