XXIII Salão de Iniciação Científica/UFRGS

Subconjuntos de R² e dimensão fractal

Autora: Marília Luiza Matte

Orientador: Dr. Jaime Bruck Ripoll

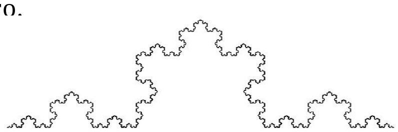
Introdução:

Este trabalho trata do problema da medição de subconjuntos de R^2. Os tradicionais conceitos de medida - área, comprimento e contagem - são inadequados para medir e distinguir pelo "tamanho" muitos subconjuntos do plano. Por isso, estudamos o conceito de medida de Hausdorff, que abrange as medidas fractais e inclui como casos particulares as medidas de contagem comprimento e área.

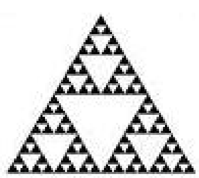
Exemplos:

Alguns casos interessantes de conjuntos que não podem ser adequadamente medidos a partir de contagem, comprimento ou área são a Curva de Koch (K) e o Triângulo de Sierpinsky (T).

Estes dois conjuntos possuem comprimento infinito e área zero.



Nível K_{10} da Curva de Koch



Nível T_4 do Triângulo de Sierpinsky

A sequência para a apresentação:

A partir de uma cobertura de quadrados C para um conjunto limitado X, podemos obter três números associados a ela:

$$C(C) = \sqrt{2}(l_1 + \ldots + l_n)$$

$$A(C) = l_1^2 + \ldots + l_n^2$$

$$N(C) = l_1^0 + \ldots + l_n^0 = n$$

utilizados, respectivamente, para estimar comprimento, área e número de elementos de X.

Na Teoria da Medida usam-se coberturas infinitas. Como nosso texto é dirigido a professores do EM, para facilitar a exposição trabalhamos apenas com coberturas finitas. Pode-se provar que tanto o teorema abaixo como as aplicações que estudamos continuam válidos nesta abordagem mais simplificada.

A partir de tais números, formalizamos a definição de *medida* α*-dimensional de X* ($M^{\alpha}(X)$), para $\alpha \in \{0,1,2\}$.

Prestando um pouco mais de atenção, o detalhe fundamental na diferenciação dos três números é o expoente α de cada l_i, que é 0, 1 ou 2. É o fato de os expoentes assumirem apenas estes valores que leva os conjuntos K e T a terem área zero e comprimento infinito.

Mas, será que não é possível permitir que os expoentes assumam valores diferentes de 0, 1 e 2?

Permitindo que o expoente α seja um número real não negativo qualquer, provamos o teorema abaixo e, com ele, conseguimos definir a dimensão de Hausdorff de um subconjunto qualquer do plano.

Determinamos, então, as dimensões de Hausdorff da Curva de Koch e do Triângulo de Sierpinsky e comparamos os "tamanhos" destes conjuntos, comprovando rigorosamente o fato que percebemos intuitivamente, a saber, de que o Triângulo de Sierpinsky ocupa uma porção maior do plano do que a Curva de Koch.

Um Teorema e a Dimensão de Hausdorff:

Seja $X \subset R^2$ *limitado. Então existe um número* $\alpha_0 \in [0,2]$ *tal que, dado* $\alpha \in [0,\infty)$ *tem-se:*

$$M^{\alpha}(X) = \begin{cases} \infty, \text{ se } \alpha < \alpha_0 \\ 0, \text{ se } \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

Esse número α_0 *é dito a dimensão de Hausdorff de X e denotado por* $\dim(X)$.

Referência: RIPOLL, Jaime. Notas de aula – Fundamentos C. Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS, 2010.