Emparelhamentos em Grafos Bipartidos: Uma Introdução

Cássio Baissvenger Pazinatto

Orientador: Vilmar Trevisan

Introdução

Existem diversos problemas que podem ser resolvidos através de emparelhamentos em grafos bipartidos, como, por exemplo, o problema do "representante", onde existe um conjunto de pessoas e um conjunto de clubes (ou órgãos) onde quer-se encontrar um representante para cada clube que já não represente outro. Neste trabalho serão discutidas questões sobre a existência desses emparelhamentos, que podem ser respondidas através do *Teorema de Hall*, assim como uma forma de encontrá-los.

Conceitos Básicos

Um grafo é uma estrutura algébrica $G = (V; A)$, onde V é o conjunto de vértices e A é um conjunto de pares não ordenados $\{u, w\} \in V^2$, com $u \neq w$, chamado de conjunto de arestas.

Uma maneira usual de representar um grafo é simbolizando seus vértices com *pontos* e suas arestas através de *segmentos de retas* unindo os vértices que as compõem.

Dizemos que um grafo é um *grafo bipartido* quando $V = U \cup W$, com $U \cap W = \emptyset$, e toda aresta é do tipo $\{u, w\}$, com $u \in U$ e $w \in W$.

Definição (Emparelhamento)**.** Duas arestas de um grafo G são ditas adjacentes se possuem uma ponta em comum. Um emparelhamento num grafo é um conjunto de arestas duas a duas não-adjacentes.

- Um emparelhamento M é dito máximo se $|M| \geq |N|$ para todo emparelhamento N.
- Dizemos que um emparelhamento M satura um vértice v se alguma aresta de M possui v como uma de suas pontas.

Emparelhamentos pequenos podem ser encontrados facilmente. O problema é a busca por emparelhamentos máximos, o que nem sempre é uma tarefa simples. Esta questão que será resolvida a seguir.

Definição (Vizinhança)**.** Dado um conjunto X de vértices de um grafo, a vizinhança desse conjunto X - denotado por $\Gamma_G(X)$ - é o conjunto de todos os vértices que estão conectados, através de arestas, com vértices do conjunto X.

Definição (Caminho Alternado)**.** Sejam G um grafo bipartido e M qualquer emparelhamento em G. Um caminho $P = v_1, v_2, ..., v_m$ é chamado de *caminho alternado* relativo à M quando $v_i, v_{i+1} \in M$ se e somente se $v_{i+1}, v_{i+2} \notin M$, para $1 \leq i \leq m-2$. Quando um caminho alternado inicia em um vértice não saturado e termina em outro vértice não saturado, dizemos que o caminho alternado é um *caminho aumentador*.

Exemplo. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $W = \{w_1, w_2\}$, $A = \{\{u_1, w_1\}\{u_1, w_2\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_1\}, \{u_3, w_2\}\}$, $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_3, w_2\}\}$.

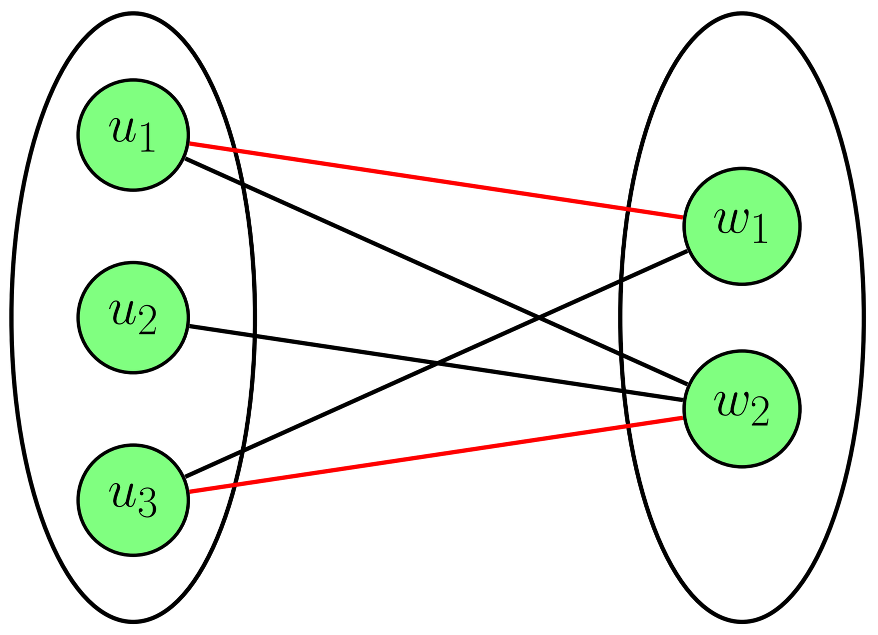

Figura 1: Grafo bipartido com emparelhamento (em vermelho).

Podemos notar, no exemplo, que $\Gamma(\{u_1, u_2\}) = W$. Além disso, temos um exemplo de um caminho alternado: $P = u_2, w_2, u_3, w_1, u_1$.

Principais Teoremas

Um teorema importante que nos permite afirmar sobre a existência de um emparelhamento que satura um dos lados de um grafo bipartido é o teorema demonstrado por Philip Hall, conhecido como "Teorema do Casamento".

Teorema (Hall, 1935)**.** Seja G (U, W)-bipartido e M um emparelhamento.

$$\forall X \subseteq U, |\Gamma(X)| \geq |X| \iff \exists M \text{ que satura } U.$$

Apesar do teorema de Hall nos fornecer uma condição suficiente e necessária para a existência de um emparelhamento em um grafo bipartido, ele não nos afirma nada para o caso de falha de sua condição. Para suprir esta falta, o teorema de Hall pode ser enunciado em sua forma generalizada.

Teorema (Hall Generalizado)**.** Seja G um grafo bipartido com bipartição (U, W). Existe um emparelhamento M de cardinalidade $|M| \geq |U| - d$ se e somente se $\forall X \subseteq U, |\Gamma(X)| \geq |X| - d.$

O teorema a seguir, demonstrado por Claude Berge, visa relacionar um emparelhamento máximo com caminhos aumentadores.

Teorema (Berge, 1957)**.** Um emparelhamento M de um grafo G é um emparelhamento máximo se e somente se G não possuir caminhos aumentadores com relação à M.

Ideia do Algoritmo

Dado um grafo G, bipartido, e tendo garantida, através do *Teorema de Hall*, a existência de um emparelhamento M, o mesmo pode ser encontrado de maneira algorítmica.

Encontra-se no grafo G qualquer emparelhamento. Verifica-se a existência de vértices não saturados no lado onde quer-se saturar o grafo. Caso não existam, o emparelhamento é máximo. Caso existam, para cada um deles, tenta-se construir um caminho aumentador através de caminhos alternados. Se for possível, aumenta-se o grafo e inicia-se novamente o processo partindo dos vértices ainda não saturados. Não sendo possível, o emparelhamento será máximo.

Uma vez que estamos interessados em grafos finitos, o algoritmo irá terminar, visto que cada vez que um caminho aumentador é encontrado, o número de vértices não saturados diminui. A partir do momento em que o algoritmo não conseguir encontrar novos caminhos aumentadores, teremos, pelo *Teorema de Berge*, um emparelhamento máximo.

Considerações Finais

É possível caracterizar situações como encontrar representantes distintos dentro de grupos cuja intersecção é não vazia ou dividir tarefas em uma empresa através de emparelhamentos em grafos bipartidos. Também é possível garantir a existência destes emparelhamentos através do *Teorema de Hall* e encontrá-los de maneira algorítmica. As limitações destas soluções encontradas são claras, não existe como definir prioridades ou preferências para as arestas estarem ou não no emparelhamento, entretanto elas são o ponto de partida para métodos mais avançados que podem cuidar desse tipo de problema.

Referências

[1] DIESTEL, Reinhard. *Graph Theory.* Springer: New York, 2005. [VERSÃO ELETRÔNICA]

[2] FEOFILOFF, Paulo; KOHAYAKAWA, Yoshiharu; WAKABAYASHI, Yoshiko. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos.* `http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/texto/TeoriaDosGrafos.pdf`, 2011.

[3] LOVÁSZ, László; PLUMMER, Michael D. *Matching Theory.* Annals of Discrete Mathematics, volume 29. North-Holland, 1986.

cassio.pazinatto@ufrgs.br