Uma Análise de Emparelhamentos Estáveis em Grafos Bipartidos

Marcelo Brandalero

Orientado por Carlos Hoppen

Instituto de Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

marcelo.brandalero@inf.ufrgs.br

O problema dos casamentos estáveis

O problema de emparelhamentos estáveis em grafos bipartidos é também conhecido como o problema dos casamentos estáveis. A seguinte contextualização descreve o problema.

Problema. Considere um grupo de n homens e um grupo de n mulheres. Cada homem ordena as mulheres de acordo com suas preferências e cada mulher ordena os homens da mesma forma. Deseja-se determinar um conjunto de casamentos estáveis entre homens e mulheres. Um casamento é dito *instável* se existe homem e mulher não-casados entre si, mas que preferiam estar casados entre si a estar com seus parceiros atuais.

De certa forma, o problema se resume a formar pares (determinar um emparelhamento) entre os elementos de dois conjuntos. O emparelhamento é estável se nenhuma troca de par beneficiar os casais envolvidos.

Variações do problema dos casamentos estáveis

Casamentos estáveis - caso geral

Duas generalizações simples para o problema consistem em considerar o tamanho do grupo de homens diferente do grupo de mulheres e estabelecer restrições quanto aos casamentos que podem ser formados.

Problema dos colegas de quarto

Similar ao problema dos casamentos, exceto que todas as pessoas pertencem a um único grupo. Cada indivíduo ordena as demais pessoas de acordo com suas preferências individuais. Deseja-se formar pares de forma que nenhuma troca beneficie às pessoas que mudarem de dupla.

Problema das admissões em universidades

Também conhecido como o problema dos hospitais/residentes, esta variação consiste em permitir que uma mulher se case com mais de um homem.

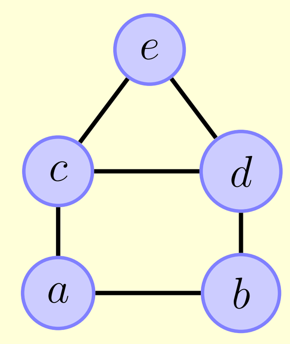
Para melhor exemplificar, considere um grupo de n estudantes que deseja ingressar em alguma das m universidades disponíveis. Cada estudante ordena as universidades segundo sua preferência e cada universidade ordena os estudantes de acordo com algum critério. Cada universidade pode admitir uma cota de q estudantes. O problema consiste em determinar quais estudantes são admitidos por quais universidades de forma que nenhuma troca deixe estudantes ou universidades mais satisfeitos.

Modelo matemático

São apresentadas a seguir algumas definições que servem para dar significado matemático ao problema que desejamos resolver.

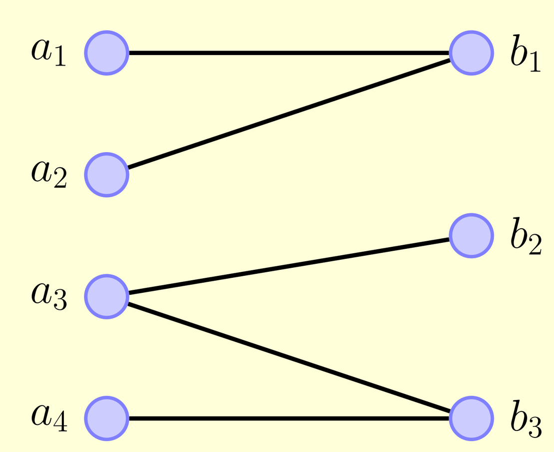
Definições

Grafo: Um grafo G é um par (V, E), onde V é um conjunto arbitrário, denominado *conjunto de vértices*, e E é um conjunto de pares não-ordenados de elementos de V, denominado *conjunto de arestas*. Um grafo pode ser representado graficamente por vértices unidos por arestas.



$$V = \{a, b, c, d, e\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$$

Grafo bipartido: Um grafo G é dito bipartido se seu conjunto de vértices é a união de dois conjuntos A e B, de forma que todas as suas arestas possuem uma das pontas em A e uma das pontas em B. Um grafo bipartido é *completo* se possui todas as arestas possíveis.



$$V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3\}$$
$$E = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_1\}, \{a_3, b_2\}, \{a_3, b_3\}, \{a_4, b_3\}\}$$

No exemplo acima, o grafo é bipartido, mas não é completo, pois não há aresta unindo os vértices a_2 e b_2, por exemplo.

Emparelhamento: Um emparelhamento M em um grafo G é um conjunto de arestas com a propriedade que nenhuma aresta encosta em um vértice em comum.

Emparelhamento Estável (em um grafo bipartido): Dado um emparelhamento em um grafo bipartido e relações de ordem totais, segundo as quais cada elemento de A ordena os elementos de B e cada elemento de B ordena os de A, o emparelhamento é estável se não existirem a em A e b em B tais que a e b não estão emparelhados, mas, segundo a ordem, preferiam estar emparelhados a estar com seus pares atuais.

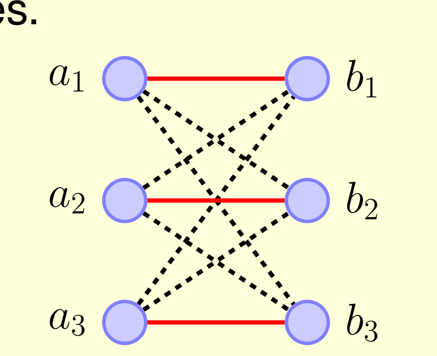
Representação do problema dos casamentos usando grafos

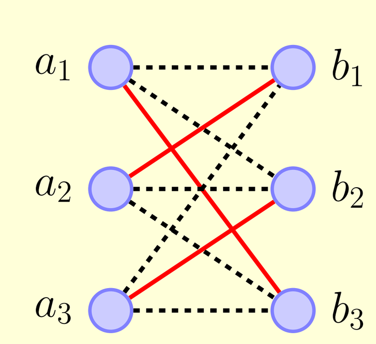
Podemos representar os conjuntos de homens e mulheres como vértices em um grafo bipartido. Um casamento possível entre duas pessoas é representado por uma aresta. Determinar um conjunto de casamentos estáveis resume-se então a determinar um emparelhamento estável nesse grafo.

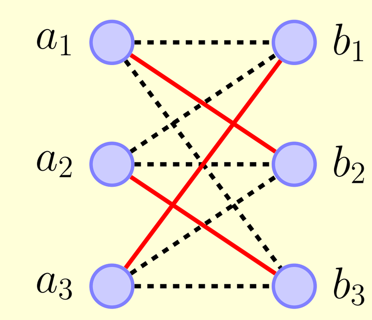
Por exemplo, no problema dos casamentos: se o grupo de homens é $\{a_1, a_2, a_3\}$ e o de mulheres $\{b_1, b_2, b_3\}$, a "matriz de preferências"

	b_1	b_2	b_3
a_1	$(1,3)$	$(2,2)$	$(3,1)$
a_2	$(3,1)$	$(1,3)$	$(2,2)$
a_3	$(2,2)$	$(3,1)$	$(1,3)$

fornece três emparelhamentos estáveis distintos, representados nos grafos a seguir com arestas vermelhas. Na matriz, o primeiro número do par fornece a ordenação das mulheres pelos homens; o segundo, a ordenação dos homens pelas mulheres.







Solução do problema dos casamentos estáveis

É possível mostrar que, se as ordens de preferência estiverem bem definidas (ou seja, se as relações de ordem forem totais), sempre é possível determinar um conjunto de casamentos estáveis.

A prova para esta afirmação fornece um procedimento para resolver o problema. O procedimento recebe o nome de Algoritmo de *Gale-Shapley* e pode ser resumido da seguinte forma.

Algoritmo 1: *Algoritmo de Gale-Shapley*

1: Inicialmente, cada homem propõe à sua mulher preferida.
2: Cada mulher escolhe a proposta que mais lhe agrada e rejeita os demais homens.
3: **Enquanto** houverem homens rejeitados **faça**
4: Cada homem rejeitado propõe à próxima mulher na sua ordem de preferências.
5: Cada mulher que receber uma proposta escolhe a que mais lhe agrada, dentre a aceita no passo anterior e as recebidas no passo atual. A mulher aceita o seu homem preferido e rejeita os demais.
6: **Fim Enquanto**

Ao final do procedimento, cada mulher que receber uma proposta terá aceito alguma delas, e obteremos, assim, um conjunto de casamentos estáveis. É importante notar que o critério da estabilidade não exige que todas as pessoas estejam casadas. Assim, o algoritmo acima pode ser adaptado para resolver as diversas variações do problema dos casamentos.

Otimalidade da solução

Uma solução é *ótima* (para os homens) se cada homem está tão satisfeito com seu par quanto estaria em algum outro casamento estável (sendo análoga a definição de otimalidade para as mulheres).

Pode-se mostrar que o algoritmo fornecido produz um emparelhamento estável ótimo para o conjunto de homens. Além disso, uma versão similar do algoritmo, com mulheres propondo aos homens, produziria um emparelhamento estável ótimo para as mulheres.

Conclusões

Diversos problemas do cotidiano, aparentemente distintos, podem ser modelados de forma semelhante utilizando teoria dos grafos. Usando um modelo matemático, determinamos um procedimento que resolve o problema mais simples, o dos casamentos, e vimos que ele pode ser adaptado para resolver os demais casos.

Referências

[1] Gale, D. e Shapley, L. S. College Admissions and the Stability of Marriage. *American Mathematical Monthly 69*, 9-14, 1962.

SIC UFRGS 2011. XXIII Salão de Iniciação Científica - UFRGS, 3 a 7 de outubro de 2011, Porto Alegre, Brasil.