RESOLVENDO SUDOKUS UTILIZANDO BASES DE GRÖBNER

Bolsista: Jonas Szutkoski Orientador: Vilmar Trevisan

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

1 - Bases de Gröbner

Neste pôster, vamos mostrar como a teoria de Bases de Gröbner pode ser aplicada para resolver sudokus.

Vamos começar dando uma brevíssima introdução à teoria de Bases de Gröbner e mostrando, brevemente e sem detalhes, como essa teoria ajuda a resolver sistemas polinomiais multivariados. Em seguida, veremos como encontrar colorações para grafos resolvendo sistemas polinomiais multivariados e, por fim, transformaremos o sudoku num grafo e, a partir daí, encontraremos uma 9-coloração para esse grafo. Feito isso, é só associar números de 1 a 9 às 9 cores e pronto! Teremos uma solução para o sudoku.

Considere $\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios em n indeterminadas sobre um corpo $\mathbb{F}$ e considere I um ideal em $\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. O Teorema da Base de Hilbert diz que existe um número finito de polinômios, digamos $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, que geram I, ou seja, $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$.

A definição de Base de Gröbner está centrada no fato de que alguns conjuntos de geradores são mais especiais do que outros, no seguinte sentido: quando generalizamos o algoritmo da divisão de polinômios em uma variável para polinômios em várias variáveis, perdemos a unicidade do resto. Uma Base de Gröbner para um ideal I é simplesmente um conjunto de geradores de I para o qual o resto da divisão de um polinômio qualquer por esse conjunto de geradores é único.

Vamos ver agora como podemos resolver sistemas polinomiais usando Bases de Gröbner. Considere o sistema polinomial abaixo:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0; \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Bases de Gröbner

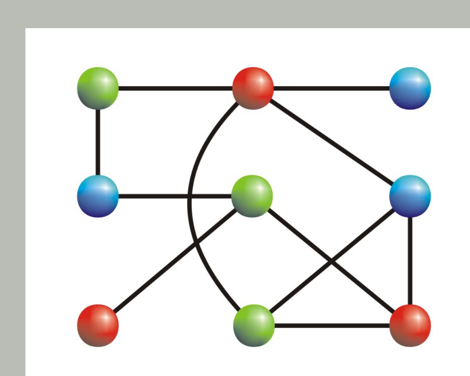
Considere o ideal gerado pelos polinômios $f_i's$ e calcule uma Base de Gröbner para esse ideal. Digamos, $\{g_1, \ldots, g_m\}$. Como ambos $g_j's$ e $f_i's$ geram o mesmo ideal, é fácil de ver que as soluções para o sistema original são as mesmas do sistema abaixo:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0; \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0; \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Sob certas hipóteses, é possível provar que podemos ordenar os polinômios $g_1, g_2, \ldots, g_m$ de tal maneira que g_1 possua apenas a variável x_1; g_2 possua apenas as variáveis x_1 e x_2; e assim por diante, até g_n. Assim, com o uso de Bases de Gröbner, o problema de resolver um sistema polinomial em n variáveis reduz-se ao problema de encontrar raízes de polinômios em uma variável.

2 - Coloração de Grafos

Uma coloração para um grafo significa atribuir cores aos vértices de tal modo que vértices adjacentes não possuam a mesma cor.



Exemplo de coloração usando apenas 3 cores.

É possível encontrar uma coloração para um grafo resolvendo um sistema polinomial. Vejamos como: chamaremos os vértices de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e suponha que temos k cores, representadas por $1, 2, ..., k$, para colorir o grafo.

Coloração de Grafos

A equação polinomial

$$(x_i - 1)(x_i - 2)\ldots(x_i - k) = 0, \;\; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

diz que o vértice x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, possui um dos valores $1, 2, \ldots, k$. Subtraindo as equações acima para x_i e x_j, podemos isolar $x_i - x_j$, obtendo

$$(x_i - x_j)P(x_i, x_j) = 0,$$

onde $P(x_i, x_j)$ é um polinômio em x_i e x_j. Portanto, se x_i e x_j são adjacentes, então $(x_i - x_j) \neq 0$, ou seja, $P(x_i, x_j) = 0$.

Logo, para encontrar uma coloração para o grafo, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} (x_i - 1)(x_i - 2)\ldots(x_i - k) = 0, \text{ para } i \in \{1, 2, ..., n\} \\ P(x_i, x_j) = 0, \text{ para todos os vértices } x_i \text{ e } x_j \text{ adjacentes.} \end{cases}$$

3 - Sudokus

Vamos agora resolver sudokus através de coloração de grafos. Para tanto, precisamos, de algum modo, ver o sudoku como um grafo. Eis o que faremos:

- Cada quadradinho do sudoku será um vértice do nosso grafo.
- Dois vértices serão adjacentes se os respectivos quadradinhos não podem ter o mesmo valor.

Por exemplo, o vértice correspondente ao primeiro quadradinho da primeira linha e primeira coluna é adjacente à todos os outros vértices correspondentes aos quadradinhos da primeira linha, primeira coluna e do quadrado 3x3 à que pertence, pois nenhum deles pode ter o mesmo valor que o primeiro quadradinho.

Dessa maneira, resolver o sudoku é equivalente à encontrar uma coloração de 9 cores para o grafo criado.

O sistema polinomial gerado por esse grafo possui 891 equações.

Sudokus

Se o sudoku possuir apenas uma solução, todos os polinômios na Base de Gröbner possuem a forma $x_i - k$, onde $k \in \{1, 2, ..., 9\}$, dizendo que o vértice/quadradinho i possui a cor/número k. Vejamos um exemplo. Considere o sudoku:

9								8
5			2		8		6	
		3	7	1				9
				7	3		5	
2								4
	5			6				
8				2	7	3		
	4		3		9			1
7								2

Calculando a Base de Gröbner, obtemos $\{x_1 - 9, x_2 - 2, x_3 - 6, x_4 - 5, \ldots, x_{78} - 1, x_{79} - 6, x_{80} - 9, x_{81} - 2\}$.

Quase todos os polinômios acima são da forma $x_i - k$, exceto para x_{40}, x_{43}, x_{49} e x_{52}, que são $x_{52}^2 - 10x_{52} + 9$, $x_{40} - x_{52}$, $x_{43} + x_{52} - 10$ e $x_{49} + x_{52} - 10$.

O primeiro desses polinômio nos dá 2 possíveis valores para x_{52}. Os outros polinômios nos dão os valores de x_{40}, x_{43} e x_{49} a partir de x_{52}. Assim, as soluções são:

9	2	6	5	3	4	7	1	8
5	7	1	2	9	8	4	6	3
4	8	3	7	1	6	5	2	9
1	9	8	4	7	3	2	5	6
2	6	7	9	8	5	1	3	4
3	5	4	1	6	2	9	8	7
8	1	9	6	2	7	3	4	5
6	4	2	3	5	9	8	7	1
7	3	5	8	4	1	6	9	2

9	2	6	5	3	4	7	1	8
5	7	1	2	9	8	4	6	3
4	8	3	7	1	6	5	2	9
1	9	8	4	7	3	2	5	6
2	6	7	1	8	5	9	3	4
3	5	4	9	6	2	1	8	7
8	1	9	6	2	7	3	4	5
6	4	2	3	5	9	8	7	1
7	3	5	8	4	1	6	9	2

Este sudoku possui apenas 2 soluções. Quanto mais soluções o sudoku tiver, mais "complicados" ficam os polinômios na Base de Gröbner, dificultando a visualização das soluções.