

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica

por

Leticia Tonetto

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen
Orientador

Profa. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz
Co-orientadora

Porto Alegre, 20 de dezembro de 2011.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Tonetto, Leticia

Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica / Leticia Tonetto.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2011.

150 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2011.

Orientador: Ruiz Claeysen, Julio César; Co-orientadora: Tsukazan de Ruiz, Teresa

Dissertação: Matemática Aplicada

Modelo de Timoshenko, modelo de Euler-Bernoulli, vigas segmentadas, base dinâmica, AFM, materiais piezoelétricos.

Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica

por

Leticia Tonetto

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle, Sistemas e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Co-orientadora: Profa. Dra. Teresa Tsukazan de Ruiz

Banca examinadora:

Profa. Dra. Rosemaira Dalcin Copetti
Departamento de Matemática/UFSM

Prof. Dr. Leonardo Dagnino Chiwiacowsky
PIPCA/Unisinos

Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
20 de dezembro de 2011.

Prof. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e saúde. Pelas pessoas e oportunidades que tem sempre colocado em meu caminho.

Aos meus pais Clóvis e Geneci pela vida, amor e apoio em todos os momentos. Principalmente a minha mãe pela força e coragem. A madrinha Bea pela motivação, incentivo e presença nas horas difíceis.

Ao Professor Julio Claeysen pela dedicação, confiança, ensinamentos, e incentivo durante o desenvolvimento desse trabalho, bem como acesso a seus trabalhos de pesquisa.

Aos amigos de perto e de longe e, aos colegas de graduação e pós-graduação por compartilhar momentos de alegria e de dificuldades.

Aos professores da UFSM e PPGMap/UFRGS pela colaboração em minha formação.

A UFRGS, PPGMap, CAPES e CNPq pela oportunidade e disponibilização de recursos.

Sumário

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xv
1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA VIBRAÇÃO DE VIGAS .	4
2.1 Modelo de Euler-Bernoulli	7
2.1.1 Um modelo de viga Euler-Bernoulli sujeita a dispositivos intermediários e no contorno	8
2.1.1.1 O princípio estendido de Hamilton	9
2.1.1.2 Derivação da equação governante e condições de contorno não-clássicas	10
2.1.1.3 Condições de contorno clássicas	19
2.2 Modelo de Timoshenko	21
2.2.1 Derivação das equações	21
2.2.2 Condições de contorno não-clássicas	24
2.2.3 Sistema desacoplado	25
2.3 Resumo comparativo	26
3 MICROVIGAS EM MICROSCOPIA DE FORÇA ATÔMICA .	28
3.1 Microscópios de Força Atômica	28
3.1.1 Princípios básicos de operação	29
3.1.2 Modos de operação	32

3.1.3	Modelagem matemática para AFM	33
3.2	Microvigas e materiais piezoelétricos em AFM	34
3.2.1	Modelagem matemática	37
3.2.1.1	Modelo 1 - Viga de Salehi-Khojin [6]	38
3.2.1.2	Modelo 2 - Viga de Jih-Lian <i>et al.</i> [23]	41
4	VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM VIGAS SEGMENTADAS	50
4.1	Vigas segmentadas utilizando o modelo de Euler-Bernoulli	51
4.1.1	Análise modal	54
4.1.1.1	Base de soluções	55
4.1.1.2	Formulação do sistema $U_c = 0$	55
4.1.1.3	Solução fundamental	57
4.2	Vigas segmentadas utilizando o modelo de Timoshenko	59
4.2.1	Formulação matricial	60
4.2.2	Análise modal	63
4.2.2.1	Base de soluções	63
4.2.2.2	Formulação do sistema $U_c = 0$	66
4.2.2.3	Solução fundamental	66
4.3	Ortogonalidade de modos em vigas segmentadas	68
4.4	Vigas bi e trissegmentadas	73
4.4.1	Viga bissegmentada	73
4.4.2	Vigas trissegmentadas	81
4.4.2.1	Viga trissegmentada com massa atarrachada	81
4.4.2.2	Viga trissegmentada fixa-livre	86
4.5	Vigas fixa-livre em AFM	91
4.5.1	Vigas bissegmentadas	91

4.5.1.1	Viga piezocerâmica/silício	91
4.5.1.2	Modelo 2 - Viga de Jih-Lian <i>et al.</i> da seção 3.2.1.2	97
4.5.2	Viga trissegmentada	102
4.5.2.1	Viga de Salehi-Khojin da seção 3.2.1.1	102
5	VIBRAÇÕES FORÇADAS EM VIGAS SEGMENTADAS . . .	107
5.1	A resposta impulso em vigas uniformes	108
5.1.1	A resposta frequência	109
5.2	Vigas bissegmentadas forçadas	110
5.2.1	Resposta forçada via método espectral	114
5.3	Simulações para vibrações forçadas em vigas com materiais piezoelétricos	116
5.3.1	O modelo de Timoshenko forçado para a viga bissegmentada piezocerâmica/silício	116
5.3.1.1	Amplitude espacial constante e posição variável	117
5.3.1.2	Amplitude espacial constante e frequências de entrada diferentes para cada segmento	119
5.3.1.3	Força concentrada com posição variável	120
5.3.1.4	Amplitude espacial como um pulso retangular	121
5.3.2	O modelo de Euler-Bernoulli forçado para a viga trissegmentada de Salehi-Khojin	123
6	CONCLUSÕES	137
APÊNDICE A	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS PIEZOELÉTRICOS	139
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	143

Lista de Figuras

Figura 2.1	Eixo neutral	8
Figura 2.2	Viga com dispositivos	10
Figura 2.3	Condições de contorno não-clássicas modelo de Euler-Bernoulli	18
Figura 2.4	Relação entre ângulos para o modelo de Timoshenko	22
Figura 2.5	Viga de Timoshenko com dispositivos	24
Figura 3.1	Representação esquemática de componentes do AFM	29
Figura 3.2	Modos de operação em AFM	32
Figura 3.3	Condições de contorno não-clássicas para AFM	34
Figura 3.4	(a) Efeito piezoelétrico inverso [2] (b) Pilha de discos piezoelétricos [52]	35
Figura 3.5	Configuração de <i>cantilevers</i> para AFM, figura extraída de [6]	37
Figura 3.6	Configuração da viga bissegmentada com camadas piezoelétricas, figura extraída de [23]	37
Figura 3.7	Representação da viga de Salehi-Khojin [6]	38
Figura 3.8	(a)Variação da largura (b)Variação da espessura	38
Figura 3.9	Representação da viga de Jih-Lian <i>et al.</i> [23]	42
Figura 4.1	Viga N-segmentada	50
Figura 4.2	(a)Função de Heaviside (b)Pulso retangular	69
Figura 4.3	Viga bissegmentada com seção retangular, figura extraída de [63]	74
Figura 4.4	Modos de vibração EBT/TBT - viga bissegmentada livre-livre de Stanton e Mann	79
Figura 4.5	Sexto e sétimo modos de vibração EBT/TBT - viga bissegmentada livre-livre de Stanton e Mann	80
Figura 4.6	Viga trisegmentada com seção transversal circular, figura extraída de [63]	81

Figura 4.7	Modos de vibração EBT/TBT - viga trissegmentada de Stanton e Mann	86
Figura 4.8	Viga fixa-livre trissegmentada	87
Figura 4.9	Modos de vibração - viga trissegmentada variando espessura central /EBT	90
Figura 4.10	Modos de vibração - viga trissegmentada variando espessura central /TBT	91
Figura 4.11	Representação viga bissegmentada	91
Figura 4.12	Modos de vibração TBT variando ponto de descontinuidade - viga piezo/silício	95
Figura 4.13	Modos de vibração TBT variando a espessura - viga piezo/silício	96
Figura 4.14	Viga EBT bissegmentada fixa sem e com dispositivo massa-mola	101
Figura 4.15	Viga EBT fixa-livre excluindo massa ou mola	102
Figura 4.16	Seis primeiros modos de vibração da viga de Salehi-Khojin	106
Figura 5.1	Viga bissegmentada piezocerâmica-silício	117

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Condições de contorno clássicas e não-clássicas	7
Tabela 2.2	Condições de contorno e intermediárias não-clássicas para o modelo de Euler-Bernoulli	17
Tabela 2.3	Condições de contorno clássicas para a viga de Euler-Bernoulli .	20
Tabela 2.4	Condições de contorno clássicas para a viga de Timoshenko . .	23
Tabela 2.5	Comparativo das equações e hipóteses dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko	27
Tabela 4.1	Parâmetros para a viga bissegmentada de Stanton [63]	74
Tabela 4.2	Frequências naturais de vibração - presente trabalho e [63] . . .	80
Tabela 4.3	Parâmetros para a viga trisegmentada de Stanton [63]	82
Tabela 4.4	Frequências naturais de vibração: LL - viga livre-livre; LLM - viga livre-livre com massa anexada	85
Tabela 4.5	Parâmetros para a viga de Salehi-Khojin [6]	87
Tabela 4.6	Parâmetros para o modelo de Timoshenko	87
Tabela 4.7	Configurações variando espessura central	88
Tabela 4.8	Frequências naturais - configurações 1,2,3	89
Tabela 4.9	Parâmetros da <i>cantilever</i> em AFM para modelo de Euler-Bernoulli e de Timoshenko	92
Tabela 4.10	Parâmetros da <i>cantilever</i> em AFM para o modelo de Timoshenko	92
Tabela 4.11	Parâmetros da viga bissegmentada piezocerâmica-silício	92
Tabela 4.12	Frequências naturais obtidas variando o ponto x_1	94
Tabela 4.13	Frequências naturais obtidas variando a espessura	94
Tabela 4.14	Parâmetros para a viga bissegmentada de Jih-Lian <i>et al.</i> [23] . .	100
Tabela 4.15	Comparativo das frequências naturais para diferentes configurações	100
Tabela 4.16	Parâmetros para a viga trisegmentada de Salehi-Khojin [6] . .	103

Tabela 4.17	Frequências naturais de vibração para a viga de Salehi-Khojin - experimental [6] e presente trabalho	105
Tabela 5.1	Resposta forçada $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$, na segunda coluna $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ com t fixo (1A-TBT, 1B-TBT)	125
Tabela 5.2	Compara $u(t, x)$, tempo fixo (1A-TBT, 1B-TBT)	126
Tabela 5.3	Compara $u(t, x)$ com x fixo (1A-TBT, 1B-TBT)	127
Tabela 5.4	Resposta forçada $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$, forçante do tipo amplitude constante com frequência de entrada diferente para cada segmento (1C-TBT), na segunda coluna $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ com t fixo	128
Tabela 5.5	Resposta forçada $u(t, x)$ com x fixo (1C-TBT)	129
Tabela 5.6	Resposta forçada $u(t, x)$, na segunda coluna $u(t, x)$ com t fixo (2A-TBT, 2B-TBT, 2C-TBT)	130
Tabela 5.7	Compara $u(t, x)$ com x fixo (2A-TBT, 2B-TBT e 2C-TBT)	131
Tabela 5.8	Resposta forçada $u(t, x)$, na segunda coluna $u(t, x)$ com t fixo (3A-TBT, 3B-TBT e 3C-TBT)	132
Tabela 5.9	Compara $u(t, x)$ com x fixo (3A-TBT, 3B-TBT e 3C-TBT)	133
Tabela 5.10	Resposta forçada $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$, frequência de entrada $\omega = 2,5 \times 10^3 rad/s$ (3A-TBT, 3B-TBT), na segunda coluna $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ com t fixo para o caso 3A-TBT e $u(t, x)$ com t fixo para o caso 3B-TBT	134
Tabela 5.11	Resposta forçada $u(t, x)$, x fixo, frequência de entrada $\omega = 2,5 \times 10^3 rad/s$ (3A-TBT, 3B-TBT e 3C-TBT)	135
Tabela 5.12	Resposta forçada Modelo 1 - viga de Salehi-Khojin	136
Tabela 5.13	Resposta forçada para a viga de Salehi-Khojin com tempo fixo	136

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da Seção Transversal
E	Módulo de Young
G	Módulo de Cisalhamento
$f(t, x)$	Força Transversal Distribuída
$h(t, x, \xi)$	Função de Green de Valor Inicial
$\mathbf{h}(t, x, \xi)$	Função de Green Matricial
I	Momento de Inércia
J	Funcional de Energia
L	Comprimento da Viga
D	Deslocamento
S	Inclinação ou Giro
M	Momento
V	Cisalhamento
T	Energia Cinética
U	Energia Potencial
W	Trabalho
$v(t, x)$	Deslocamento Transversal
λ	Autovalor
κ	Fator de Forma

ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Densidade
$\phi(t, x)$	Rotação
ω_j	j-ésima Frequência Natural
w	Largura da Viga
t_b, t_p	Espessura da Viga, Espessura da Camada
$V_{cc}, v(t)$	Tensão Elétrica
$h_{31}, d_{31}, \beta_{33}$	Constantes Piezoelétricas
D_{33}	Deslocamento Elétrico
E_3	Campo Elétrico

RESUMO

É realizado um estudo da dinâmica de vigas segmentadas aplicáveis em microscopia de força atômica (AFM), utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e uma metodologia introduzida na literatura para vigas segmentadas do tipo Euler-Bernoulli e de vigas uniformes do tipo Timoshenko com uso da resposta impulso distribuída e de respostas fundamentais concentradas. Um estudo da análise modal é realizado com modelos de vigas que incluem materiais piezoelétricos de uso em microscopia de força atômica. São assumidas condições de compatibilidade referentes ao deslocamento, rotação, momento fletor e cisalhamento nos pontos de descontinuidade. É observado que as frequências e os modos de vibração da viga segmentada são sensíveis às descontinuidades nos materiais e na geometria. Na obtenção de respostas forçadas, o método de Galerkin é utilizado para aproximar a resposta impulso distribuída com o uso de autofunções que satisfazem a propriedade dos modos normais. Apresentam-se resultados referentes a vigas bi e trissegmentadas, considerando parâmetros numéricos de teste e usados para vigas em AFM com materiais piezoelétricos. Os resultados modais obtidos neste trabalho são próximos daqueles encontrados na literatura. Vibrações forçadas foram obtidas considerando forçantes do tipo harmônico no tempo e com amplitude espacial dos tipos constante, concentrado e pulso.

ABSTRACT

This work studies the dynamics of multispan beams used in atomic force microscopy (AFM), considering the models of Euler-Bernoulli and Timoshenko, and applying the methodology introduced in the literature for Euler-Bernoulli segmented beams and uniform Timoshenko beams with the use of distributed impulse responses and concentrated fundamental responses. A study of modal analysis is performed with models of segmented beams, including piezoelectric materials of use in atomic force microscopy. We considered compatibility conditions with respect to the displacement, slope, flexure moment and shear at the points of discontinuity. It is observed that the frequencies and vibrating modes of the segmented beam are sensitive to material and geometric discontinuities. For obtaining forced responses, the Galerkin method is used to approximate the distributed impulse response with eigenfunctions that satisfy the normal mode property. We present results for the bi and tri segmented beams considering numerical testing and those employed for beams in AFM with piezoelectric materials. The modal results obtained in this work are close to those found in the literature. Forced responses were obtained by considering harmonic excitations with spatial amplitude for constant, localized and pulse types.

1 INTRODUÇÃO

A análise de vibrações de estruturas do tipo viga é de grande importância devido às diversas aplicações em ciência e tecnologia. Recentemente, tem-se utilizado microvigas no desenvolvimento de microscópios de força atômica (AFM - *Atomic Force Microscopy*), para a obtenção de imagens topográficas de superfícies em escalas nanométricas.

Devido a sua versatilidade, destacam-se quatro principais aplicações nas quais a microscopia de força atômica é utilizada: 1) Como ferramenta de imagem para determinar a estrutura de materiais microscópicos ou para observar o comportamento de moléculas biológicas, 2) Em nanolitografia para depositar ou retirar materiais dentro de/de uma superfície, 3) Em sensores para detecção de moléculas específicas no ar e em soluções, e 4) Em espectroscopia de força para retirar moléculas aderidas a uma superfície e investigar sua estrutura e função biológica.

Nos trabalhos de Hsu *et al.*[29] e Claeysen [32], são analisadas as vibrações de vigas aplicáveis a AFMs considerando o modelo de Timoshenko com seção transversal uniforme. Novas gerações de vigas nanomecânicas têm sido desenvolvidas para AFM com a inclusão de materiais inteligentes, tais como materiais piezoelétricos, acoplados à microviga e com o papel de sensores e/ou atuadores. A modelagem usual utilizando formulações com vigas uniformes desconsidera que a inclusão de seções ou camadas com outros materiais introduza descontinuidade nas propriedades dos materiais entre segmentos vizinhos. Na modelagem específica para vigas segmentadas, devem ser assumidas condições de compatibilidade, tais como a continuidade no deslocamento e rotação da viga, e equilíbrio do momento e cisalhamento, nos pontos entre cada dois segmentos.

Salehi-Khojin [6] e Jih-Lian *et al.*[23] propõe modelagens distintas para vigas do tipo Euler-Bernoulli com camadas piezoelétricas e aplicáveis a AFM. Am-

bos consideram que um dos segmentos da microviga é parcialmente coberto por um material piezoelétrico. A microviga é fixa numa extremidade e livre ou sujeita a algum dispositivo dissipador na outra extremidade. Com menos frequência aparecem na literatura trabalhos que considerem o modelo de Timoshenko para vigas segmentadas [66] e [75], e na obtenção de respostas forçadas.

Neste trabalho é aplicada às vigas segmentadas, a metodologia desenvolvida para a análise modal e vibrações forçadas com vigas do tipo Euler-Bernoulli [36], [37], [38], [60], [73] e com vigas uniformes do tipo Timoshenko [32], [40], [61]. Esta metodologia utiliza uma formulação matricial com o uso de respostas fundamentais distribuídas e concentradas. Simulações foram realizadas com vigas segmentadas livre-livre, fixa-livre, fixa-livre para AFM, com camada piezoelétrica e sujeitas a dispositivos no extremo livre da viga, através do *software* matemático simbólico Maple.

Os resultados obtidos no presente trabalho, frequências e modos de vibração, são próximos dos apresentados analiticamente ou experimentalmente por Stanton e Mann [63], Salehi-Khojin [6] e Jih-Lian *et al.* [23]. Vibrações forçadas foram obtidas para excitações temporais harmônicas com amplitude espacial uniforme, localizadas e segmentadas. Observou-se a dependência das respostas e frequências com relação a variações de parâmetros físicos e geométricos.

Diante desse contexto, o objetivo principal do trabalho aqui proposto é a utilização da metodologia desenvolvida para vigas uniformes de Euler-Bernoulli e Timoshenko e segmentadas do tipo Euler-Bernoulli, descrita nos trabalhos de Claeysen e Soder [38]; Tsukazan [73]; Claeysen e Costa [40]; Claeysen *et al.*[60]; Reys [61] e Claeysen [32], estendendo-a para o caso de vigas segmentadas do tipo Timoshenko, a fim de determinar modos e frequências naturais de vibração em vigas segmentadas e utilizar o método de Galerkin para obter vibrações forçadas com vigas segmentadas do tipo Euler-Bernoulli e do tipo Timoshenko de uso em AFM.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2 são obtidos os modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e condições de contorno clássicas e não-clássicas, via abordagem hamiltoniana e newtoniana. No Capítulo 3 são abordados dois modelos de vigas acoplando materiais piezoelétricos de uso em AFMs. No Capítulo 4, é apresentada a análise modal de vigas segmentadas dos tipos Euler-Bernoulli e Timoshenko, com ênfase em vigas bi e trisegmentadas. No Capítulo 5, vibrações forçadas são consideradas para o caso de vigas bissegmentadas fixa-livre de uso em AFM. Respostas forçadas são determinadas com o método de Galerkin para forçantes harmônicos com variadas amplitudes espaciais. Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do presente trabalho.

2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA VIBRAÇÃO DE VIGAS

Vigas são estruturas elásticas, podendo ser consideradas sólidos tridimensionais. Modelos matemáticos unidimensionais para vigas planas são formulados com base em teorias de vigas. Atualmente existe um variado número de teorias utilizadas para representar a cinemática da deformação de uma viga [65], [69].

Todas essas teorias envolvem alguma forma de aproximação que descreve o comportamento das seções transversais em termos de quantidades avaliadas na direção longitudinal que possui maior comprimento. Neste trabalho serão consideradas somente vigas retas prismáticas: a direção longitudinal é uma linha reta e as seções transversais são uniformes.

Em cada teoria, a descrição cartesiana (x, y, z) para uma viga é tal que o eixo x é tomado na direção longitudinal do comprimento da viga (passa através do centróide de cada seção transversal) e os eixos y e z são tomados na direção dos eixos dos momentos principais de inércia, ou seja, nas direções da largura e da espessura(altura), respectivamente. A origem das coordenadas é escolhida como sendo no extremo esquerdo da viga. Na teoria das vigas planas, todas as forças externas(cargas aplicadas) e geometria são tais que os deslocamentos (U_1, U_2, U_3) através dos eixos (x, y, z) são somente funções das coordenadas x e z , ou seja, as deformações acontecem no plano xz e dependem do tempo t . Por isso, se assume que o deslocamento U_2 é identicamente nulo. As vigas são usualmente sujeitas a forças (cargas) dispostas verticalmente, o que resultará em esforços de cisalhamento e flexão. Quando cargas não verticais são aplicadas a estrutura, surgirão forças axiais direcionadas ao longo do eixo do elemento. Vigas normalmente são barras retas e prismáticas, tendo a mesma seção transversal ao longo do seu comprimento, o que ocasiona maior resistência ao cisalhamento e à flexão.

Considera-se, nos principais modelos que descrevem a deflexão de vigas, os seguintes campos de deslocamentos [69]

$$U_1(t, x, z) = -z \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \psi(z) \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \phi(t, x) \right) \quad (2.1)$$

$$U_2(t, x, z) = 0 \quad (2.2)$$

$$U_3(t, x, z) = u(t, x) \quad (2.3)$$

onde u e ϕ são o deslocamento transversal e deslocamento angular da viga, respectivamente, e $\psi(z)$ é uma função de forma relacionada à rotação da seção transversal da viga. Entre os mais conhecidos modelos de vigas estão os de Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko [65]. As hipóteses básicas nestes modelos são as seguintes:

- Direção axial consideravelmente maior que as outras duas;
- Material elástico linear (*Hookeano*);
- Efeito de Poisson é desconsiderado [16];
- A seção transversal é simétrica de modo tal que os eixos neutro e central coincidam;
- O ângulo de rotação é pequeno e hipóteses para pequenos ângulos podem ser assumidas.

Os modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko são os mais utilizados nas aplicações que envolvem vigas retas prismáticas. Tem-se para esses modelos os seguintes fatores de forma

$$\begin{aligned} \text{Euler - Bernoulli (EBT)} : \quad & \psi(z) = 0, \\ \text{Timoshenko (TBT)} : \quad & \psi(z) = z, \end{aligned} \quad (2.4)$$

resultando os campo de deslocamentos:

Para o modelo de Euler-Bernoulli

$$U_1(t, x, z) = -z \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$U_2(t, x, z) = 0, \quad (2.6)$$

$$U_3(t, x, z) = u(t, x). \quad (2.7)$$

E para o modelo de Timoshenko

$$U_1(t, x, z) = z\phi(t, x), \quad (2.8)$$

$$U_2(t, x, z) = 0, \quad (2.9)$$

$$U_3(t, x, z) = u(t, x). \quad (2.10)$$

Observa-se que o primeiro termo em U_1 dado em (2.1) corresponde ao deslocamento axial de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli e o segundo termo é o deslocamento devido ao cisalhamento transversal. O modelo de Timoshenko constitui uma correção de primeira ordem da teoria clássica de Euler-Bernoulli para vigas finas. Outros tipos de vigas que envolvem correções de maior ordem e efeitos de escala são considerados em [31], [51], [76], [77].

Em uma forma geral, as equações do movimento para as várias teorias de vigas podem ser obtidas através de uma formulação newtoniana ou variacional, que envolve energia potencial, devido a relações deformação-deslocamento, e a energia cinética devido à inércia.

Uma das características principais da teoria de vigas é o fato de considerar sua interação com o meio externo, mecanismos ou dispositivos vinculados as suas extremidades ou de forma intermediária, sendo manifestada através de condições de contorno ou forças concentradas, distribuídas ou localizadas. Em geral, as condições de contorno são classificadas como clássicas (fixa, livre, apoiada, deslizante, e combinações dessas) e não-clássicas (dispositivos anexados aos extremos ou parte inter-


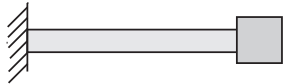
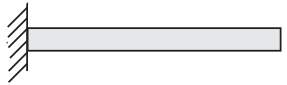
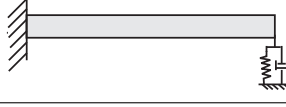

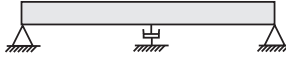
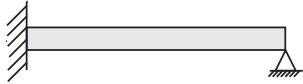
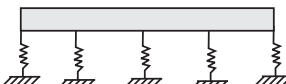
Condições de contorno	
Clássicas	Não-Clássicas
Fixa-Fixa 	Fixa-Livre com massa 
Fixa-Livre 	Fixa-Livre com dispositivos 
Apoiada-Apoiada 	Apoiada-Apoiada com dispositivo 
Fixa-Apoiada 	Livre-Livre com dispositivos 

Tabela 2.1: Condições de contorno clássicas e não-clássicas

mediária). Exemplos de condições de contorno clássicas e não-clássicas são apresentados na Tabela 2.1.

2.1 Modelo de Euler-Bernoulli

Na teoria das vigas Euler-Bernoulli, a hipótese fundamental é que as seções transversais permanecem planas e normais ao eixo longitudinal deformado. De acordo com a Figura 2.1, quando a viga é deformada, algumas fibras vão comprimir e outras esticar. Entre o topo e a parte inferior da viga existirá uma superfície de fibras que manterão seu comprimento. Essas irão compor a chamada superfície neutra. Escolhem-se coordenadas tal que o plano xu seja o plano longitudinal (axial) de simetria da viga. Esse plano e a superfície interceptam-se em uma curva chamada eixo neutral da viga.

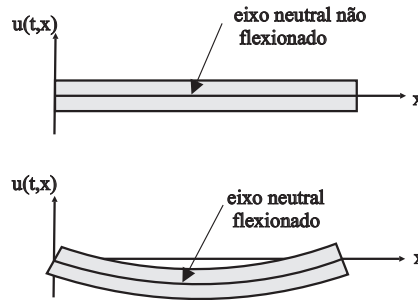


Figura 2.1: Eixo neutro

O efeito das forças transversais de cisalhamento sobre deformações na viga é desprezado. Também não são considerados efeitos de inércia rotatória. Devido às seções transversais permanecerem perpendiculares ao eixo neutro, e o ângulo de rotação ou giro ser pequeno, este pode ser aproximado pela inclinação da curva elástica $\frac{\partial u}{\partial x}$ do eixo neutro. Fisicamente, se $u(t, x)$ representa a flexão ou deslocamento transversal, então, a primeira derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ se relaciona com o ângulo de rotação θ ou inclinação por $\frac{\partial u}{\partial x} = \tan(\theta) \cong \theta$ o giro ou inclinação, a segunda derivada $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ é o momento fletor $M(t, x) = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e a terceira derivada $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ a força de cisalhamento $V(t, x) = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, sendo E o módulo de Young e I o momento de inércia.

Detalhes sobre as derivações do modelo de Euler-Bernoulli podem ser encontradas em livros-texto, tais como [11], [46], [72], [64], [71].

2.1.1 Um modelo de viga Euler-Bernoulli sujeita a dispositivos intermediários e no contorno

Considera-se o caso de uma viga de Euler-Bernoulli que está sujeita a dispositivos elásticos, inerciais e dissipativos, de acordo com a Figura 2.2, nas extremidades e parte intermediária da viga. A equação do movimento será obtida através de uma abordagem variacional com a energia mecânica do sistema [9], [62].

Esta metodologia permite obter expressões para as condições de contorno e de compatibilidade devido à inclusão de dispositivos intermediários.

2.1.1.1 O princípio estendido de Hamilton

A equação do movimento de uma viga do tipo Euler-Bernoulli sujeita a condições nos extremos ou dispositivos intermediários pode ser obtida através de uma abordagem variacional, que envolve a energia mecânica do sistema [9], [62]. Essa metodologia é bastante geral e permite obter expressões para as condições de contorno e de compatibilidade ao incluir dispositivos intermediários.

Considera-se T como sendo a energia cinética do sistema e W o trabalho realizado pelas forças que agem sobre o mesmo. A energia potencial do sistema é introduzida quando o trabalho é escrito na forma

$$W = W_c + W_{nc}, \quad (2.11)$$

onde W_c é o trabalho devido a ação de forças conservativas f_c , e W_{nc} é o trabalho devido a forças não-conservativas f_{nc} . O trabalho conservativo W_c corresponde a energia potencial U do sistema. O princípio estendido de Hamilton [21], [46], [64] estabelece que o funcional ou ação

$$J(u) = \int_{t_a}^{t_b} (T + W) dt = \int_{t_a}^{t_b} (T - U + W_{nc}) dt, \quad (2.12)$$

quando avaliado entre duas configurações possíveis do sistema nos tempos t_a e t_b , resulta ser estacionária se $u = u(t, x)$ corresponde ao movimento real do sistema, isto é, a derivada de Gateaux é nula na configuração que corresponde ao movimento real do sistema, então

$$\delta J(u, v) = \frac{\partial J(u)}{\partial \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} = 0. \quad (2.13)$$

Aqui $v(t, x)$ é uma perturbação admissível: $v(t_a, x) = v(t_b, x) = 0$. A expressão $\mathcal{L} = T - U$ é denominada Lagrangeano do sistema.

2.1.1.2 Derivação da equação governante e condições de contorno não-clássicas

Obtém-se a seguir a equação do movimento de uma viga de Euler-Bernoulli que incorpora condições de contorno não-clássicas bem como dispositivos intermediários. Tipos particulares foram considerados por Balachandran [9] e Grossi e Albalbarracín [62]. Utiliza-se uma abordagem variacional do princípio estendido de Hamilton. Este tipo de viga está sujeita a dispositivos elásticos, inerciais e dissipativos, de acordo com a Figura 2.2 , nas extremidades e num ponto intermediário da viga.

A metodologia variacional permite obter expressões para as condições de contorno e de compatibilidade devido a dispositivos intermediários.

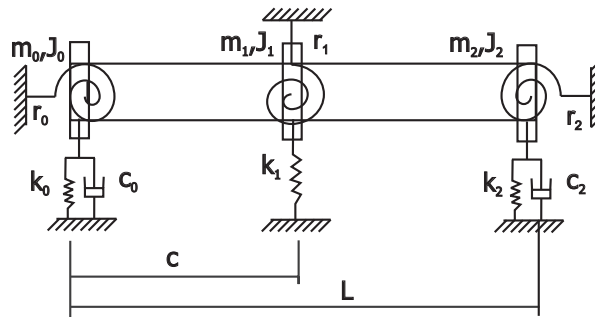


Figura 2.2: Viga com dispositivos

Os dispositivos são classificados da seguinte forma

Elásticos

Em $x = 0$, mola translacional com constante de mola k_0 ;

Em $x = c$, mola translacional com constante de mola k_1 ;

Em $x = L$, mola translacional com constante de mola k_2 ;

Em $x = 0$, mola rotacional com constante de mola r_0 ;

Em $x = c$, mola rotacional com constante de mola r_1 ;

Em $x = L$, mola rotacional com constante de mola r_2 .

Inerciais

Em $x = 0$, massa concentrada m_0 com momento de inércia J_0 ;

Em $x = c$, massa concentrada m_1 com momento de inércia J_1 ;

Em $x = L$, massa concentrada m_2 com momento de inércia J_2 .

Dissipativos

Em $x = 0$, amortecedor com coeficiente de amortecimento c_0 ;

Em $x = L$, amortecedor com coeficiente de amortecimento c_2 .

De acordo com [30], a energia cinética total do sistema é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 m_i \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 J_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t, x_i) \right)^2 \quad (2.14)$$

sendo $x_0 = 0$ e $x_2 = L$ a posição dos extremos da viga e $x_1 = c$ a posição intermediária. Aqui m_i é uma massa concentrada com momento de inércia J_i , ρ é a densidade da viga e A a área da seção transversal. O trabalho conservativo é dado pela energia potencial total devido a flexão e dispositivos elásticos

$$W_c = U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_i) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 k_i (u(t, x_i))^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 r_i \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_i) \right)^2 \quad (2.15)$$

com as constantes elásticas k_i das molas translacionais e r_i das molas rotacionais. O trabalho não-conservativo, devido aos elementos dissipativos e força externa é dado por

$$W_{nc} = \int_0^L f(t, x)u(t, x)dx - c_0 \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0)u(t, 0) - c_2 \frac{\partial u}{\partial t}(t, L)u(t, L) \quad (2.16)$$

onde c_0 e c_2 são constantes associadas à dissipação de energia.

Substituindo a energia cinética (2.14), a energia potencial (2.15) e o trabalho não-conservativo (2.16) no funcional de energia (2.12), segue

$$\begin{aligned}
J(u) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right)^2 + f(t, x)u(t, x) \right] dx dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} m_0 \left(\frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} J_0 \left(\frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x \partial t} \right)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} r_0 \left(\frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} \right)^2 dt + \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} k_0 (u(t, 0))^2 dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} m_1 \left(\frac{\partial u(t, c)}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} J_1 \left(\frac{\partial^2 u(t, c)}{\partial x \partial t} \right)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} r_1 \left(\frac{\partial u(t, c)}{\partial x} \right)^2 dt + \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} k_1 (u(t, c))^2 dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} m_2 \left(\frac{\partial u(t, L)}{\partial t} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} J_2 \left(\frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial x \partial t} \right)^2 dt - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} r_2 \left(\frac{\partial u(t, L)}{\partial x} \right)^2 dt + \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} k_2 (u(t, L))^2 dt + \\
& - \int_{t_a}^{t_b} c_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} u(t, 0) dt - \int_{t_a}^{t_b} c_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial t} u(t, L) dt.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Introduzindo uma perturbação admissível $v(t, x)$ tal que $v(t_a, x) = v(t_b, x) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta J(u, v) &= \left. \frac{\partial J(u + \epsilon v)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \\
&= \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[\rho A \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - EI \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + f(t, x)v(t, x) \right] dx dt + \\
&+ \int_{t_a}^{t_b} m_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} \frac{\partial v(t, 0)}{\partial t} dt + \int_{t_a}^{t_b} J_0 \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 v(t, 0)}{\partial x \partial t} dt - \int_{t_a}^{t_b} r_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} \frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} dt + \\
&- \int_{t_a}^{t_b} k_0 u(t, 0)v(t, 0) dt + \\
&+ \int_{t_a}^{t_b} m_1 \frac{\partial u(c, t)}{\partial t} \frac{\partial v(c, t)}{\partial t} dt + \int_{t_a}^{t_b} J_1 \frac{\partial^2 u(c, t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 v(c, t)}{\partial x \partial t} dt - \int_{t_a}^{t_b} r_1 \frac{\partial u(c, t)}{\partial x} \frac{\partial v(c, t)}{\partial x} dt + \\
&- \int_{t_a}^{t_b} k_1 u(c, t)v(c, t) dt + \\
&+ \int_{t_a}^{t_b} m_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial t} \frac{\partial v(t, L)}{\partial t} dt + \int_{t_a}^{t_b} J_2 \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 v(t, 0)}{\partial x \partial t} dt - \int_{t_a}^{t_b} r_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} \frac{\partial v(t, L)}{\partial x} dt + \\
&- \int_{t_a}^{t_b} k_2 u(t, L)v(t, L) dt + \\
&- \int_{t_a}^{t_b} c_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} v(t, 0) dt - \int_{t_a}^{t_b} c_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial t} v(L, t) dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

A fim de obter a equação do movimento, $\delta J(u, v)$ é escrita como uma expressão integral linear com respeito à perturbação v , para a qual se aplicam lemas fundamentais do cálculo das variações e decorrem as equações de Euler-Lagrange e condições nos extremos e ponto intermediário [27], [45], [74]. Na derivação da equação de Euler-Lagrange é assumido que as funções u e v são regulares para que se possa, quando conveniente, integrar por partes e trocar a ordem da integração.

Integrando-se por partes com respeito a t o primeiro, quarto e quinto termo de (2.18), e supondo

$$v_x(t_a, x) = v_x(t_b, x) = 0, \quad (2.19)$$

tem-se

$$\int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} dx dt = - \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} v(t, x) dx dt, \quad (2.20)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} dt = - \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} v(t, x) dt, \quad (2.21)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x \partial t} dt = - \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} dt. \quad (2.22)$$

Devido a presença de dispositivos intermediários que poderiam afetar as grandezas obtidas como derivadas do deslocamento (*giro* = u_x , *momentofletor* = EIu_{xx} , *cisalhamento* = EIu_{xxx}), é conveniente que a integração espacial seja dividida no ponto intermediário c

$$\int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dt = \int_{t_a}^{t_b} \int_0^c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dt + \int_{t_a}^{t_b} \int_c^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dt. \quad (2.23)$$

Integrando-se por partes duas vezes com respeito a x decorre

$$\int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dt = \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} v dx dt + B(u, v) \Big|_0^{c^-} + B(u, v) \Big|_{c^+}^L, \quad (2.24)$$

onde

$$B(u, v) = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} v \right) dt, \quad (2.25)$$

deve ser calculada com valores limites de u e v pela esquerda $c = c^-$ e pela direita $c = c^+$. Assumindo que o deslocamento e o giro são contínuos no ponto intermediário c , ou seja,

$$u(t, c^-) = u(t, c^+) = u(t, c), \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u(t, c^-)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, c^+)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, c)}{\partial x},$$

e resulta

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x^2} dx dt &= \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} v dx dt + \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial x^2} \frac{\partial v(t, L)}{\partial x} + \right. \\ &- \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} \frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(t, c^-)}{\partial x^2} \frac{\partial v(t, c)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(t, c^+)}{\partial x^3} v(t, c) - \frac{\partial^3 u(t, c^-)}{\partial x^3} v(t, c) + \\ &\left. + \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x^3} v(t, 0) - \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x^3} v(t, L) \right) dt. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Tem-se então na equação variacional

$$\begin{aligned} \delta J(u, v) &= - \int_{t_a}^{t_b} \int_0^c \left(\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} - f(t, x) \right) v(t, x) dx dt + \\ &- \int_{t_a}^{t_b} \int_c^L \left(\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} - f(t, x) \right) v(t, x) dx dt + \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(-r_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + EI \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} - J_0 \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x \partial t^2} \right) \frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} dt + \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(-k_0 u(t, 0) - EI \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x^3} - m_0 \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial t^2} - c_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} \right) v(t, 0) dt + \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(-r_1 \frac{\partial u(t, c)}{\partial x} - EI \frac{\partial^2 u(t, c^-)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^2 u(t, c^+)}{\partial x^2} - J_1 \frac{\partial^3 u(t, c)}{\partial x \partial t^2} \right) \frac{\partial v(t, c)}{\partial x} dt + \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(-k_1 u(t, c) + EI \frac{\partial^3 u(t, c^-)}{\partial x^3} - EI \frac{\partial^3 u(t, c^+)}{\partial x^3} - m_1 \frac{\partial^2 u(t, c)}{\partial t^2} \right) v(t, c) dt + \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(-r_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} - EI \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x \partial t^2} \right) \frac{\partial v(t, L)}{\partial x} dt + \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(-k_2 u(t, L) + EI \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x^3} - m_2 \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial t^2} - c_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial t} \right) v(t, L) dt = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

e para uma perturbação v tal que junto com sua primeira derivada espacial se anule em $x = 0$, $x = c$ e $x = L$, decorre do Lema Fundamental do Cálculo das Variações, ou Lema de du Bois-Reymond [17], [27], [45], [74] a equação do movimento

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x). \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29) em (2.28), segue

$$\begin{aligned} \delta J(u, v) = & \int_{t_a}^{t_b} \left(-r_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + EI \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} - J_0 \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x \partial t^2} \right) \frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} dt + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \left(-k_0 u(t, 0) - EI \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x^3} - m_0 \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial t^2} - c_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} \right) v(t, 0) dt + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \left(-r_1 \frac{\partial u(t, c)}{\partial x} - EI \frac{\partial^2 u(t, c^-)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^2 u(t, c^+)}{\partial x^2} - J_1 \frac{\partial^3 u(t, c)}{\partial x \partial t^2} \right) \frac{\partial v(t, c)}{\partial x} dt + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \left(-k_1 u(t, c) + EI \frac{\partial^3 u(t, c^-)}{\partial x^3} - EI \frac{\partial^3 u(t, c^+)}{\partial x^3} - m_1 \frac{\partial^2 u(t, c)}{\partial t^2} \right) v(t, c) dt + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \left(-r_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} - EI \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x \partial t^2} \right) \frac{\partial v(t, L)}{\partial x} dt + \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \left(-k_2 u(t, L) + EI \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x^3} - m_2 \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial t^2} - c_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial t} \right) v(t, L) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

E decorrem as condições naturais de contorno e de compatibilidade no ponto intermediário

$$\begin{aligned}
EI \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} &= r_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + J_0 \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x \partial t^2}, \\
-EI \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x^3} &= k_0 u(t, 0) + m_0 \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial t^2} + c_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t}, \\
EI \left(-\frac{\partial^2 u(t, c^-)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, c^+)}{\partial x^2} \right) &= r_1 \frac{\partial u(t, c)}{\partial x} + J_1 \frac{\partial^3 u(t, c)}{\partial x \partial t^2} dt, \\
EI \left(\frac{\partial^3 u(t, c^-)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u(t, c^+)}{\partial x^3} \right) &= k_1 u(t, c) + m_1 \frac{\partial^2 u(t, c)}{\partial t^2}, \\
EI \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial x^2} &= -r_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} - J_2 \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x \partial t^2}, \\
EI \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x^3} &= k_2 u(t, L) + m_2 \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Na Tabela 2.3 expressam-se tais condições de maneira equivalente.

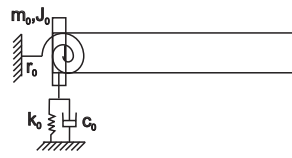
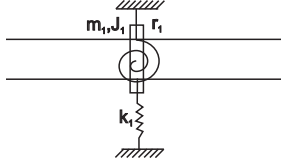
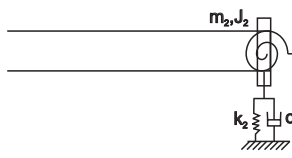
Em $x = 0$	Em $x = c$	Em $x = L$
 $ \begin{aligned} EI \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} &= r_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} \\ &+ J_0 \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x \partial t^2} \\ -EI \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x^3} &= k_0 u(t, 0) \\ &+ m_0 \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial t^2} + c_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} \end{aligned} $	 $ \begin{aligned} EI \left(-\frac{\partial^2 u(t, c^-)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, c^+)}{\partial x^2} \right) \\ = r_1 \frac{\partial u(t, c)}{\partial x} + J_1 \frac{\partial^3 u(t, c)}{\partial x \partial t^2} \\ EI \left(\frac{\partial^3 u(t, c^-)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u(t, c^+)}{\partial x^3} \right) \\ = k_1 u(t, c) + m_1 \frac{\partial^2 u(t, c)}{\partial t^2} \end{aligned} $	 $ \begin{aligned} EI \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial x^2} &= -r_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial x} \\ &- J_2 \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x \partial t^2} \\ EI \frac{\partial^3 u(t, L)}{\partial x^3} &= k_2 u(t, L) \\ &+ m_2 \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial u(t, L)}{\partial t} \end{aligned} $

Tabela 2.2: Condições de contorno e intermediárias não-clássicas para o modelo de Euler-Bernoulli

E de forma geral, para as condições de contorno, na Figura 2.3 e equações em (2.32)

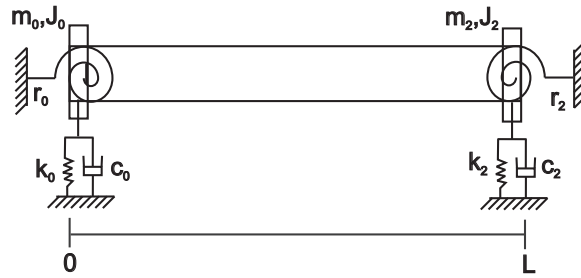


Figura 2.3: Condições de contorno não-clássicas modelo de Euler-Bernoulli

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \left(r_i \frac{\partial u}{\partial x} + J_i \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right)$$

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = b \left(t_i u + c_i \frac{\partial u}{\partial t} + m_i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \quad (2.32)$$

$$i = 0, \quad a = +1, \quad b = -1, \quad \text{em } x = 0,$$

$$i = 2, \quad a = -1, \quad b = 1, \quad \text{em } x = L.$$

OBSERVAÇÕES

1— Nos desenvolvimentos requeridos pela aplicação das técnicas do Cálculo Variacional, foi assumido o uso do espaço funcional $D = \{u : u(\cdot, x) \in C^2[t_a, t_b], u(t, \cdot) \in C^1[O, L] \cap \hat{C}^4[O, L]\}$. Isso significa que u é continuamente diferenciável em t no mínimo até ordem dois, e é continuamente diferenciável em x até ordem um. Ou seja, tem-se a continuidade do deslocamento e inclinação no ponto intermediário.

Sendo $\hat{C}^4[O, L]$ o conjunto das funções com derivadas contínuas até ordem quatro, tal que existe apenas um ponto c no qual se garante a existência das derivadas laterais até quarta ordem, ou seja, existem $\frac{\partial u}{\partial x}(t, c^-)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, c^+)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, c^-)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, c^+)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, c^-)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, c^+)$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, c^-)$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, c^+)$.

As direções/perturbações v de u admissíveis serão aquelas em que dada $u \in D$, $u + \epsilon v \in D$, para ϵ suficientemente pequeno. Então v é admissível de $u \in D$ se $v \in D_0$ onde $D_0 = \{v : v(x, \cdot) \in C^2[t_a, t_b], u(\cdot, t) \in C^1[0, L] \cap \hat{C}^4[0, L], v(t_a, x) = v(t_b, x) = 0 \forall x \in (0, L)\}$.

2– Os sinais das condições de contorno estão de acordo com Balachandran [9], Grossi e Albalbarracín [62] e Ginsberg [30]. Aparecem na literatura outras formas, cuja convenção de sinais utilizada altera as expressões dadas em (2.32), é o caso de Rao, no livro-texto [70].

2.1.1.3 Condições de contorno clássicas

Observa-se que para uma viga sem dispositivos anexados nos extremos ou em pontos intermediários, (2.28) torna-se

$$\begin{aligned} \delta J(u, v) = & - \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left(\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} - f(t, x) \right) v(t, x) dx dt + \\ & + B(u, v) \Big|_0^L = 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

com

$$B(u, v) = -EI \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + EI \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x^3} v(t, x). \quad (2.34)$$

Decorre, então, do Lema Fundamental do Cálculo Variacional a equação diferencial parcial de movimento

$$\rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x), \quad \forall t, \forall x \in (0, L), \quad (2.35)$$

ao impor a condição $B(u, v) \Big|_0^L = 0$. Em particular, devem ser satisfeitas as seguintes condições

$$(a) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0^L = 0 \quad (b) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} v \Big|_0^L = 0 \quad (2.36)$$

cujas quatro combinações possíveis para as extremidades $x = 0$ e $x = L$ são denotadas condições de contorno clássicas e descritas na Tabela 2.3.

Em relação à essas condições de contorno, fisicamente $u = D(t, x)$ representa o deslocamento, a primeira derivada $\frac{\partial u}{\partial x} = S(t, x)$ o giro ou inclinação, a segunda derivada $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ o momento fletor $M(t, x) = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e a terceira derivada $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ a força de cisalhamento $V(t, x) = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

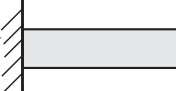
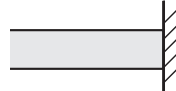
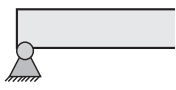
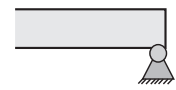




Fixa	
	
$u(t, 0) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0$	$u(t, L) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$
$D(t, x) = 0$ e $S(t, x) = 0$, $x = 0$ e/ou $x = L$	
Apoiada	
	
$u(t, 0) = 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0$	$u(t, L) = 0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, L) = 0$
$D(t, x) = 0$ e $M(t, x) = 0$, $x = 0$ e/ou $x = L$	
Livre	
	
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0$ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, L) = 0$ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, L) = 0$
$M(t, x) = 0$ e $V(t, x) = 0$, $x = 0$ e/ou $x = L$	
Deslizante	
	
$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0$ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, L) = 0$
$S(t, x) = 0$ e $V(t, x) = 0$, $x = 0$ e/ou $x = L$	

Tabela 2.3: Condições de contorno clássicas para a viga de Euler-Bernoulli

2.2 Modelo de Timoshenko

O comportamento vibracional fundamental de vigas longas e finas, ou esbeltas usando a teoria clássica de Euler-Bernoulli pode levar ou a uma significativa sobre-previsão das frequências naturais de vigas curtas ou vibrações com altos modos. Assim a teoria de Euler-Bernoulli se torna inadequada para vigas curtas, vigas em que os modos altos sejam excitados, bem como em vigas feitas de material sensível à tensão de cisalhamento [5], [48].

Timoshenko propôs uma teoria para vibrações transversais de vigas adicionando os efeitos de distorção de cisalhamento e inércia rotatória ao modelo de Euler-Bernoulli. Isso é importante, pois nos casos em que as dimensões da seção transversal não são tão pequenas quando comparadas com o comprimento da viga (vigas não esbeltas ou *thick beams*), é necessário considerar tais efeitos. Outra hipótese que sofre alteração é a que afirma que os planos perpendiculares ao eixo neutral mantém sua forma e permanecem perpendiculares após a deformação. A hipótese será que manterão sua forma, mas não necessariamente permanecerão perpendiculares ao eixo neutral [48].

2.2.1 Derivação das equações

Analogamente ao modelo de Euler-Bernoulli, a dedução das equações desse modelo pode ser feita através de uma abordagem hamiltoniana [20], [67], ou utilizando o equilíbrio de forças e momentos [12], [30], [70]. Sendo que na segunda maneira deve-se observar a convenção de sinais adotada.

Utilizando-se o diagrama de forças atuando em um elemento da viga dado em [30] e a relação entre os ângulos, de acordo com a Figura 2.4, considere-se no modelo de Timoshenko γ o ângulo da deformação por cisalhamento, tomado

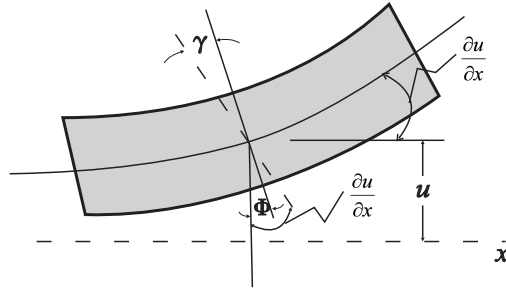


Figura 2.4: Relação entre ângulos para o modelo de Timoshenko

como nulo na teoria de Euler-Bernoulli. Têm-se a seguinte relação entre os ângulos

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial x} - \phi, \quad (2.37)$$

sendo $\frac{\partial u}{\partial x}$ a inclinação do eixo elástico ou ângulo total de rotação e ϕ o ângulo de rotação da seção transversal devido ao momento fletor.

De acordo com Ginsberg [30] faz-se o somatório de forças agindo na direção z , $\sum F_z = (\rho A dx)\ddot{u}$, e o somatório de momentos $\sum M_G = (\rho I dx)\ddot{\phi}$ em relação ao centro de massa G .

Utilizam-se as seguintes relações elásticas da teoria de vigas [20], [30]

$$V(t, x) = \kappa GA \gamma = \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right), \quad (2.38)$$

que relaciona a força de cisalhamento $V(t, x)$ com a rotação angular do eixo elástico γ , G o módulo de cisalhamento expresso por $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, sendo ν o coeficiente de Poisson, A a área da seção transversal e κ é um coeficiente de correção dependente da forma da seção transversal chamado coeficiente de cisalhamento de Timoshenko. A segunda equação elástica é

$$M(t, x) = EI \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2.39)$$

onde a relação do momento é expressa em termos do ângulo ϕ e da rigidez flexural EI .

Obtém-se as equações

$$(a) \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right) = f(t, x),$$

$$(b) \rho I \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} - \kappa GA \left[\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \phi(t, x) \right] = g(t, x),$$
(2.40)

onde $f(t, x)$ e $g(t, x)$ representam a carga transversal distribuída e o momento, respectivamente.

As condições de contorno são similares as do modelo de Euler-Bernoulli, e envolvem derivadas de $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$. Fisicamente u representa o deslocamento, ϕ o ângulo de rotação devido ao momento fletor, $M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x}$ o momento fletor e $V = \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right)$ o cisalhamento.

Seguem, na Tabela 2.4, as condições de contorno clássicas, cujas combinações totalizam as quatro condições de contorno, duas para cada extremidade, necessárias para cálculo da solução das equações (2.40).

Extremidade Fixa	$u = 0 \quad \phi = 0$
Extremidade Apoiada	$u = 0 \quad EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
Extremidade Livre	$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right) = 0$
Extremidade Deslizante	$\phi = 0 \quad \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right) = 0$

Tabela 2.4: Condições de contorno clássicas para a viga de Timoshenko

Observa-se que nas condições de contorno clássicas em cada extremidade é especificado ou o deslocamento u ou o cisalhamento V e, ou a rotação ϕ ou o momento fletor M [30].

2.2.2 Condições de contorno não-clássicas

Considera-se o sistema representado pela Figura 2.5.

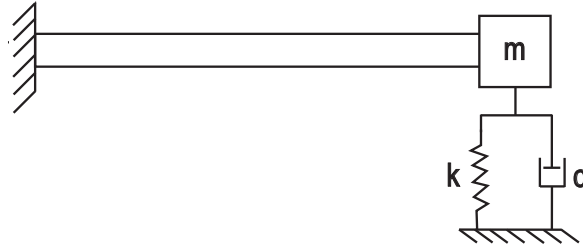


Figura 2.5: Viga de Timoshenko com dispositivos

O sistema consiste de um bloco de massa m com lado de dimensão b , uma mola de rigidez k e um amortecedor com coeficiente de amortecimento c . A extremidade direita está fixa, o que significa que o deslocamento e a rotação da seção transversal são nulos. Ou seja, em $x = 0$ tem-se

$$u(t, 0) = \phi(t, 0) = 0. \quad (2.41)$$

Quando um bloco é anexado na extremidade, as forças internas ali são exercidas pelo bloco. As condições de contorno nessas situações podem ser obtidas isolando o bloco em um diagrama de corpo livre. Em tal diagrama, deve ser considerada a convenção de sinais para valores positivos das forças internas. Além disso, o caso mais simples corresponde a modelar o bloco como uma partícula, de modo que o seu deslocamento seja equivalente ao deslocamento da viga [30].

Considera-se que ϕ em $x = L$ é a rotação da seção transversal, e será também a rotação do bloco. E em $x = L$ aproxima-se o deslocamento vertical do bloco por

$$u_G(t, L) = u(t, L) + \frac{b}{2}\phi(t, L). \quad (2.42)$$

O equilíbrio vertical de forças, utilizando a convenção de sinais de [30] é dado por

$$\sum F_x = -V - ku_G - c\dot{u}_G = m\ddot{u}_G. \quad (2.43)$$

O momento de inércia do cubo sobre seu centro de massa é $I_G = (1/6)mb^2$ e segue a equação do equilíbrio de momentos

$$\sum M_G = -M + V\frac{b}{2} = \frac{1}{6}mb^2\ddot{\phi}. \quad (2.44)$$

De (2.43) e (2.44) seguem as condições de contorno em $x = L$

$$\left[\kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right) + k \left(u + \frac{b}{2} \phi \right) + c \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{b}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \right] (t, L) = 0,$$

$$\left[EI \frac{\partial \phi}{\partial x} - \kappa GA \frac{b}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right) + \frac{1}{6} mb^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] (t, L) = 0. \quad (2.45)$$

Nota-se que, diferentemente das condições de contorno do caso clássico da teoria de Euler-Bernoulli, essas condições de contorno envolvem as variáveis deslocamento e inclinação e suas derivadas de primeira ordem, e na teoria clássica aparecem derivadas até terceira ordem.

Se o cubo é pequeno, tal que $b/2$ é próximo de zero e pode ser negligenciado, tem-se

$$\kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right) (t, L) = -ku(t, L) - c \frac{\partial u}{\partial t} (t, L) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (t, L), \quad (2.46)$$

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} (t, L) = 0.$$

2.2.3 Sistema desacoplado

As equações (2.40) podem ser manipuladas a fim de se obter um sistema matricial de quarta ordem desacoplado, ou seja, uma equação evolutiva para

o deslocamento $u(t, x)$ ou para o giro $\phi(t, x)$. Isso pode ser feito por derivação ou utilização da identidade de Cramer [67].

Obtém-se o sistema desacoplado de equações diferenciais parciais de quarta ordem

$$\frac{\rho^2}{E\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \left[\frac{\rho A}{EI} - \left(\frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f_1, \quad (2.47)$$

$$\frac{\rho^2}{E\kappa G} \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} + \left[\frac{\rho A}{EI} - \left(\frac{\rho}{\kappa G} + \frac{\rho}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = f_2,$$

com

$$f_1 = \frac{\rho}{E\kappa GA} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{EI} f - \frac{1}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{EI} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (2.48)$$

$$f_2 = \frac{1}{EI} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\rho}{\kappa GEI} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - \frac{1}{EI} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

Na literatura o modelo da viga linear de Timoshenko é, em geral, desacoplado. Porém, de certa forma, as condições de contorno acoplam o sistema. Somente para poucos casos, o caso linear é completamente desacoplável [30], [32].

2.3 Resumo comparativo

A fim de comparar os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko considera-se $g(t, x) = 0$ e resolve-se (2.40)(a) para $\frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa GA} \left(f - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \quad (2.49)$$

Diferencia-se (2.40)(b) com respeito a x e utilizando a equação (2.49) segue a equação do movimento para vibração forçada, segundo o modelo de Timoshenko, escrita na seguinte forma a fim de ilustrar os efeitos considerados

$$\begin{aligned}
& \underbrace{EI \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - f(t, x)}_{(I)} - \underbrace{\rho I \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t^2}}_{(II)} + \underbrace{\frac{EI}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(t, x) - \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \right)}_{(III)} + \\
& - \underbrace{\frac{\rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(f(t, x) - \rho A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \right)}_{(IV)} = 0,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

(I) Teoria de Euler-Bernoulli,

(II) Inércia rotacional principal,

(III) Deformação de cisalhamento principal,

(IV) Inércia rotacional e deformação de cisalhamento combinados.

A Tabela 2.5 sintetiza as características principais dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, apresentadas nesse capítulo.

Euler-Bernoulli	Timoshenko
Equações	
$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = f(t, x)$	$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = f(t, x)$ $\rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right) = g(t, x)$
Hipóteses	
Desconsidera efeitos de inércia rotatória e deformação por cisalhamento.	Considera tais efeitos.
O comprimento da seção transversal deve ser maior que as outras duas dimensões.	Aplica-se a vigas não esbeltas.
Planos perpendiculares ao eixo neutral permanecem planos e perpendiculares após a deformação.	Planos mantém a forma mas, não necessariamente permanecem perpendiculares ao eixo neutral.
Material linear elástico (obedece à lei de Hooke), homogêneo e isotrópico.	
O ângulo de rotação pequeno tal que hipóteses para pequenos ângulos possam ser assumidas.	

Tabela 2.5: Comparativo das equações e hipóteses dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko

3 MICROVIGAS EM MICROSCOPIA DE FORÇA ATÔMICA

3.1 Microscópios de Força Atômica

Técnicas de criação de imagens de superfícies em nanoescala estão em crescente demanda para desenvolvimento das ciências de um modo geral nas últimas décadas. O interesse pelo mundo atômico possibilitou a criação de instrumentos usados no estudo das propriedades de superfícies de materiais nessa escala, é o caso dos microscópios de varredura por sonda (*Scanning Probe Microscopes* - SPMs) [23]. Os SPMs são grupos de instrumentos compostos basicamente de uma sonda sensora, em forma de ponteira anexada a uma microviga, com a qual varrem a superfície de uma amostra e geram imagens dessa [15], [18], [52].

Os microscópios de varredura por tunelamento (*Scanning Tunneling Microscope*-STM) antecederam todos os SPMs e foram inventados em meados de 1980 por Gerd Binnig e Heinrich Rohrer, com a limitação da necessidade de condutividade da amostra [15], [44]. Em 1986, Gerd Binnig, Calvin Quate e Christoph Gerber [19] superaram essa limitação propondo o AFM, sendo que os princípios básicos desse levaram à criação de outros microscópios de varredura por sonda, tais como microscópio de força magnética (*magnetic force microscope* - MFM), força de imersão (*dipping force microscope* - DFM), força de fricção (*friction force microscope* - FFM), força eletrostática (*electrostatic force microscope* - EFM), entre outros [15].

Essas técnicas e seus instrumentos continuam em amplo desenvolvimento devido à importância, principalmente em nanociência e nanotecnologia. Especificamente em relação ao AFM, citam-se algumas aplicações [14]:

- No estudo de superfícies de metais e semicondutores, através do qual pode-se observar a geometria da estrutura atômica, bem como a estrutura eletrônica das superfícies;
- No estudo da estrutura superficial de materiais biológicos, dentre eles: ácidos nucleicos (RNA e DNA), proteínas, membranas celulares e células;
- Mais atualmente, na nanomanipulação de materiais e litografia.

3.1.1 Princípios básicos de operação

De modo geral, as técnicas de operação SPM são baseadas na interação de uma ponta muito fina, denominada sonda, com a superfície da amostra através de fenômenos físicos, um sistema de posicionamento da amostra conduzido por exemplo pela ação de cerâmicas piezoelétricas, circuitos de retroalimentação (*feedbacks*) para controle da posição vertical da ponta e um computador para executar comandos de operação, armazenar dados e os converter em imagens por meio de *softwares* apropriados [18], [44].

Em relação a AFM, seu funcionamento pode ser representado esquematicamente de acordo com a Figura 3.1, cujos componentes principais são [55]

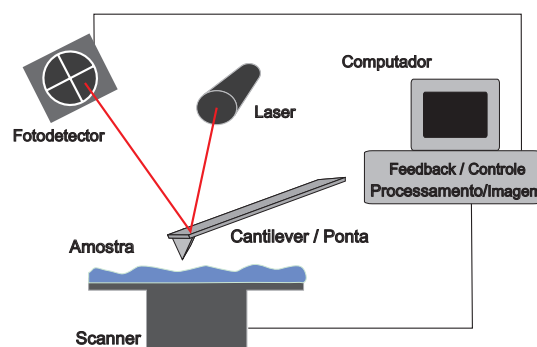


Figura 3.1: Representação esquemática de componentes do AFM

1-Amostra

É a superfície a ser scaneada. Uma das vantagens do AFM é que não requer que a amostra seja condutora. Os tipos de materiais para amostra podem ser metais como semicondutores, amostras biológicas, etc. Além do vácuo, o AFM pode operar no ar ou em meio líquido.

2- *Microcantilever*

Microviga fixa em uma extremidade e livre na outra, com dimensões e forma dependentes das aplicações para as quais se destina, em geral retangular ou em formato de V. As dimensões são reduzidas, sendo a espessura de alguns micrômetros, largura de algumas dezenas de micrômetros e comprimento de dezenas a centenas de micrômetros. Normalmente fabricadas de silício (Si) ou nitreto de silício (Si_3N_4).

3- Ponteira

Uma ponta extremamente fina anexada na extremidade livre da *microcantilever*. A mais comumente utilizada em AFM é em formato piramidal e base quadrangular de nitreto de silício. Tal ponta, denotada sonda, varre a superfície a uma certa proximidade, determinada pelo modo de operação escolhido. A interação entre a ponta e a superfície causa deflexão da microviga. As deflexões da *cantilever* são usualmente medidas de três maneiras: detecção por corrente de tunelamento, detecção por capacitância e detecção óptica [18].

4- *Scanner e Feedback*

O *scanner* move a sonda sobre a amostra (ou a amostra sob a sonda) nas direções horizontal e vertical. Geralmente se utilizam materiais piezoelétricos (*piezotubes* ou pilhas de cerâmicas piezoelétricas) caracterizados pelas mudanças nas suas dimensões com a aplicação de uma tensão elétrica.

Quando a ponta entra em contato direto com a superfície, a ponta e/ou a superfície podem ser danificadas, reduzindo a capacidade de produzir imagens. Superfícies macias (por exemplo em amostras biológicas) podem ser facilmente danificadas. Em quase todos os modos de operação, a fim de proteger amostra e ponta, um *feedback* (mecanismo de controle por retroalimentação) é conectado ao sensor de deformação e tenta manter a interação ponta-amostra constante, controlando a distância e força entre elas. Ou a deflexão da *cantilever* (no modo estático) ou a oscilação de amplitude (em modo dinâmico) é monitorada pelo *feedback*, que tenta mantê-los em um valor de referência padrão, ajustando a altura z da sonda [55].

No esquema da Figura 3.1 considera-se a detecção óptica composta pelo *laser* e fotodetector. Nesse caso a deflexão vertical da *cantilever* é determinada pela diferença na intensidade da luz medida pelos setores superiores e inferiores do fotodetector.

5- *Laser*

Participa da detecção óptica do deslocamento da *cantilever*. Seu feixe *laser* emitido incide sobre a viga e é refletido da viga a um fotodetector.

6- Fotodetector

Responsável pelo monitoramento da deflexão da *cantilever*. Tipicamente, é constituído por quatro quadrantes que identificam o movimento vertical ou torsional lateral da *cantilever* de acordo com a localização do *laser* refletido.

7- Computador

Permite a interação do usuário com o AFM. Responsável pela entrada de dados referentes ao deslocamento e deflexão da *cantilever*, processamento (*softwares* específicos convertem os dados em imagens 3D) e saída de dados (retroalimentação do sistema e imagens).

3.1.2 Modos de operação

Os modos de varredura ou de operação se referem fundamentalmente à distância mantida entre a sonda (ponteira) e a amostra no momento da varredura, e às formas de movimentar a ponteira sobre a superfície a ser estudada. Esses modos de operação são usualmente classificados em **modo contato**, **modo intermitente** (*tapping mode*) e **modo não-contato**.

No modo de contato, a ponta e a amostra se encontram muito próximas durante a varredura. A ponta toca a amostra através de uma camada de fluido adsorvido na superfície da amostra e o detector monitora a mudança na deflexão da *cantilever* [55]. No modo *tapping* a *cantilever* oscila em ou ligeiramente abaixo da sua frequência de ressonância. A ponta toca levemente (*taps*) a superfície da amostra durante a varredura. Em não-contato a *cantilever* oscila perto da superfície da amostra, sem tocá-la. A oscilação é ligeiramente acima da frequência de ressonância [55].

A Figura 3.2 ilustra os modos de operação. A operação na região repulsiva se denomina contato e a deflexão da *cantilever* é na direção oposta à da amostra. Quando o aparelho é operado na região atrativa, o método é dito não-contato. Nesta região, a *cantilever* se enverga na direção da amostra [18]. Outra

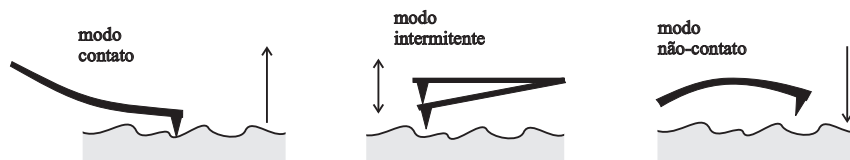


Figura 3.2: Modos de operação em AFM

classificação utilizada, [15], [22], [55], distingue os modos de operação do AFM em **modos estáticos**, também chamados modos de contato e uma variedade de **modos**

dinâmicos: não contato, *tapping* ou semi-contato, acústico, piezo, eletrostático, etc, nos quais a microviga está em vibração.

Observa-se que o conteúdo apresentado nessa seção tem caráter introdutório, mais detalhes podem ser encontrados em [15], [19], [22], [42], [54].

3.1.3 Modelagem matemática para AFM

Dois diferentes fenômenos são de fundamental relevância na descrição de AFM: as forças de interações ponta-amostra e a vibração da *cantilever*. Segundo Jalili e Laxminarayana [54] a microviga empregada no AFM é a componente mais importante, sendo seu efeito determinante para a eficiência da operação. Assim, a análise de sua dinâmica e controle é essencial a fim de melhorar a *performance* do AFM.

O AFM pode ser matematicamente modelado como uma microviga descrita pelo modelo de Euler-Bernoulli ou pelo modelo de Timoshenko com uma ponta localizada na, ou próxima à extremidade livre [32]. A interação da ponta com a amostra tem sido usualmente modelada estando sujeita a forças elásticas restauradoras provenientes do contato ponta-amostra. Em particular, utilizando o modelo de Timoshenko e incluindo os efeitos de molas e amortecedores [29], [32], têm-se as condições de contorno na extremidade direita da viga

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k_L h^2 \phi - c_L h^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} - m c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{x=L}, \quad (3.1)$$

$$\kappa GA \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \phi \right) = -k_N u - c_N \frac{\partial u}{\partial t} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=L},$$

quando considera-se que a ponta está sob o efeito de molas, normal k_N e lateral k_L , e amortecimento viscoso c_N e c_L , e sendo m , c , h , a massa da ponteira, a distância da borda da viga ao centróide da ponteira, e a altura da ponteira, respectivamente, de acordo com a Figura 3.3.

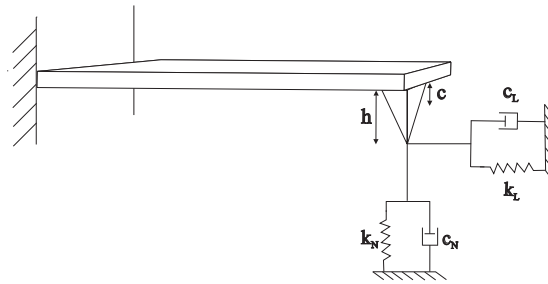


Figura 3.3: Condições de contorno não-clássicas para AFM

Descrições mais complexas das forças amostra-ponta incluem superfície não-linear e forças de contato na extremidade $x = L$, entre outros efeitos.

3.2 Microvigas e materiais piezoelétricos em AFM

O controle de sistemas dinâmicos pode ser feito utilizando as propriedades físicas de sensores e atuadores. Quando estruturas acoplam combinações de sensores e atuadores de forma avançada elas são designadas estruturas inteligentes. Entre os materiais empregados em sistemas estruturais inteligentes se incluem os piezoelétricos. Embora o efeito piezoelétrico tenha sido descoberto a relativamente bastante tempo, em 1880 por Pierre e Jacques Curie, a incorporação dos materiais piezoelétricos em sistemas inteligentes pode ser considerada nova e sob intensa investigação, tanto matemática quanto implementacionalmente [25].

Segundo [56], o uso de materiais piezoelétricos como atuadores e/ou sensores tem gerado interesse em muitos campos, devido a versatilidade e eficiência em transformarem energia mecânica em energia elétrica e vice-versa. Vários modelos de vigas acoplando esses materiais têm sido propostos [6], [10], [23], [25], [56], [66], [75], [79], entre outros.

Os materiais piezoelétricos se caracterizam por sua deformação na presença de um campo elétrico (efeito piezoelétrico inverso) e por gerar deslocamento elétrico quando submetidos a uma deformação mecânica (efeito piezoelétrico direto) [2]. Os sensores e atuadores piezoelétricos são criados basicamente pela polarização de um substrato apropriado através da aplicação de um largo campo elétrico sob altas temperaturas. Entre os materiais que apresentam a propriedade da piezoelectricidade citam-se os cristais tais como quartzo e niobato de lítio ($LiNbO_3$), semicondutores tais como óxido de zinco (ZnO) e nitreto de alumínio (AlN), cerâmicas tais como titanato de bário e PZT (titanato zirconato de chumbo), alguns polímeros, compósitos e os filmes plásticos PVDF (fluorido de polivinilideno).

A Figura 3.4(a) descreve o efeito piezoelétrico inverso: em um bastão de cerâmica piezoelétrica polarizado no comprimento, um campo elétrico aplicado em concordância com o campo utilizado na polarização faz com que ele se alongue, e um campo com polaridade invertida, faz com que ele se contraia [2].

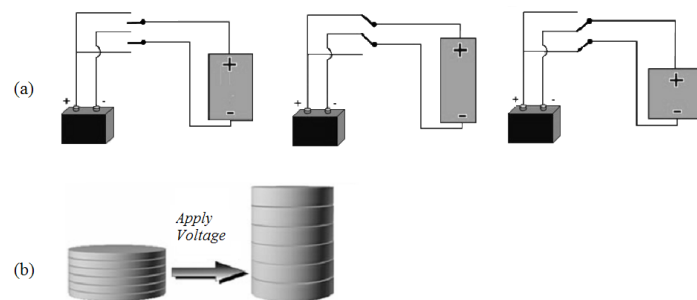


Figura 3.4: (a) Efeito piezoelétrico inverso [2] (b) Pilha de discos piezoelétricos [52]

O *scanner* do AFM geralmente se compõe de uma pilha de discos piezoelétricos, como ilustrado na Figura 3.4(b). A aplicação de uma tensão elétrica no topo e parte inferior desta pilha causa a expansão integral da pilha. A quantidade de expansão depende da tensão elétrica aplicada, do piezomaterial e do número de discos [52].

Tem sido amplamente investigada a tecnologia para o controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis na qual se utiliza elementos piezelétricos como atuadores e/ou sensores distribuídos ao longo da estrutura, cita-se [8], [50], [57]. Segundo [68] o acoplamento eletromecânico de materiais piezoelétricos permite a estrutura agir como sensor quando operando no efeito direto, e como atuador quando operando no efeito inverso, o que torna os materiais piezoelétricos versáteis soluções em muitas aplicações.

Em [6] se analisam as vibrações de uma nova geração de vigas para AFM, denotadas comercialmente por *Active Probes*, cuja configuração diferenciada as permite agir como atuador, sensor ou atuador-sensor, simultaneamente. Quando utilizadas como atuador oferecem vantagens em relação aos *piezotubes* convencionais dos AFMs. Quando usadas como sensor são consideradas uma alternativa para substituir o sistema de detecção *laser* que apresenta algumas desvantagens relacionadas ao alinhamento *laser* em ambiente líquido, custo e espaço requerido para operação [7]. Em [79] também é destacado o uso das microvigas piezoelétricas como sensores, afirmando que as microvigas sensoras (*microcantilevers-based sensors - MCSs*) são uma nova abordagem para descrever e medir sinais físicos, químicos e biológicos em níveis nanométricos. Sua exploração como dispositivos sensores tem dado origem a um novo tipo de microsensors que são extremamente sensíveis em medições. A detecção piezoresistiva (*piezoresistive detection*) é uma atraente alternativa de um esquema de leitura para abordagem óptica. Ela elimina o uso de *lasers* ópticos, evitando os problemas associados com a detecção óptica e facilitando sua manipulação e utilização.

A Figura 3.5 descreve a configuração considerada em [6] e [7]. A microviga é feita de silício e parcialmente coberta por uma camada piezoelétrica de óxido de zinco. O corpo da viga é mais largo devido à camada piezoelétrica e a zona final é mais estreita a fim de melhorar as medidas de deflexão na ponta.

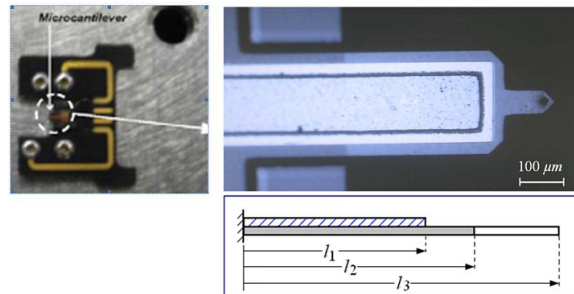


Figura 3.5: Configuração de *cantilevers* para AFM, figura extraída de [6]

Outro modelo é estudado em [23] no qual se considera uma viga *cantilever* segmentada, cujo primeiro segmento é composto por duas camadas piezoelétricas formando uma viga do tipo sanduíche, sendo que a camada central de Níquel se prolonga no restante do comprimento. Tais camadas piezoelétricas são utilizadas como atuadores, destacados pela acurácia e rapidez no controle de deslocamentos micrométricos. A Figura 3.6 representa tal microviga.

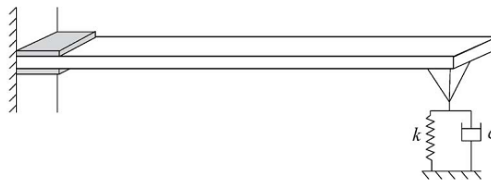


Figura 3.6: Configuração da viga bissegmentada com camadas piezoelétricas, figura extraída de [23]

3.2.1 Modelagem matemática

Destacam-se nesse trabalho duas modelagens distintas para vigas que incluem camadas piezoelétricas e aplicáveis a AFMs como sensores e/ou atuadores. A primeira é baseada na metodologia proposta por Salehi-Khojin [6] e será denotada *Modelo 1*, a segunda desenvolvida por Jih-Lian *et al.* em [23], será denotada *Modelo 2*. Ambas assumem as hipóteses previstas pela teoria de vigas Euler-Bernoulli.

3.2.1.1 Modelo 1 - Viga de Salehi-Khojin [6]

Considera-se uma viga trissegmentada, com condições de contorno do tipo fixa-livre, de largura e espessura variável. O primeiro segmento é parcialmente coberto por uma camada piezoelétrica na superfície superior, no segundo a camada piezoelétrica termina e no terceiro, a fim de aumentar a sensibilidade na ponta, a viga se torna bem mais estreita [6], como é representado na Figura 3.7. A Figura 3.8 mostra as variações da largura e da espessura em relação ao comprimento da viga.

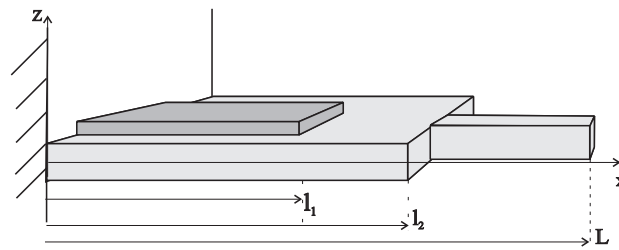


Figura 3.7: Representação da viga de Salehi-Khojin [6]

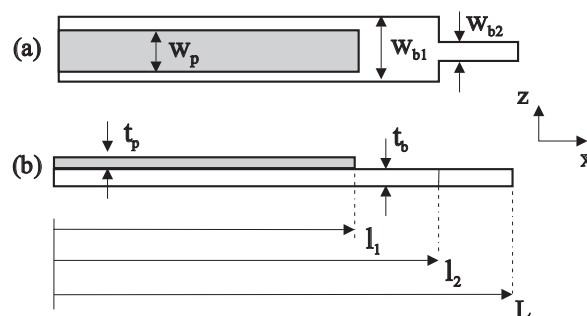


Figura 3.8: (a)Variação da largura (b)Variação da espessura

Tem-se, das hipóteses do modelo de Euler-Bernoulli, que a única componente não nula do tensor deformação é na direção x e pode ser expressa por [50]

$$\varepsilon_x = \begin{cases} -(z - z_n) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, & \text{para } x \leq l_1; \\ -z \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, & \text{para } x > l_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Sendo z_n a superfície neutral na parte compósita (viga/camada piezoelétrica), correspondente ao primeiro segmento, medida ao longo do eixo z a partir de $z = 0$, e dada por

$$z_n = \frac{1}{2} \frac{E_p t_p w_p (t_p + t_b)}{E_p t_p w_p + E_b t_b w_{b1}}, \quad (3.3)$$

onde E_b e E_p são o módulo de Young da viga e da camada piezoelétrica, respectivamente. Caso não houvesse camada piezoelétrica a superfície neutral coincidiria com o centro geométrico da viga ($z = 0$). Se a largura da camada e da viga for a mesma então z_n é dada por [50], [79]

$$z_n = \frac{1}{2} \frac{E_p t_p (t_p + t_b)}{E_p t_p + E_b t_b}. \quad (3.4)$$

Das relações constitutivas piezoelétricas, tem-se que a tensão no primeiro segmento $0 < x < l_1$ será descrita por (equivalente a relação A.5 - Apêndice A)

$$\sigma_x^p = E_p \varepsilon_x - E_p d_{31} E_3, \quad (3.5)$$

onde E_3 é o campo elétrico expresso por $E_3 = \frac{v(t)}{t_p}$, sendo $v(t)$ a tensão elétrica aplicada. Então

$$\sigma_x^p = E_p \varepsilon_x - E_p d_{31} \frac{v(t)}{t_p}, \quad (3.6)$$

com ε_x dada em (3.2). A tensão no segundo e terceiro segmentos, $l_1 < x < L$, é dada da forma clássica

$$\sigma_x^b = E_b \varepsilon_x = -E_b z \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}. \quad (3.7)$$

Tem-se então

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_x^p = -E_p \left[(z - z_n) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \right] - E_p d_{31} \frac{v(t)}{t_p}, & \text{para } l \leq l_1; \\ \sigma_x^b = -E_b z \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, & \text{para } l_1 < x < L. \end{cases} \quad (3.8)$$

De acordo com [7] a expressão (3.6) pode ser dividida em uma parte passiva e outra ativa. O termo passivo é o primeiro do lado direito e é tratado como energia interna da camada, o segundo termo, o termo ativo é a fonte de excitação eletromecânica, considerada energia externa. Calcula-se o momento induzido pela camada piezoelétrica considerando apenas a parte ativa de (3.6), ou seja,

$$(\sigma_x^p)_a = -E_p d_{31} \frac{v(t)}{t_p},$$

$$\begin{aligned} M_p(t, x) &= - \int_{A_p} (\sigma_x^p) z dA = - \int_{A_p} (\sigma_x^p)_a z dA = \\ &= \int_0^{w_p} \int_{\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2} + t_p} E_p d_{31} \frac{v(t)}{t_p} z dz dy = \frac{1}{2} w_p E_p d_{31} (t_b + t_p) v(t), \quad 0 < x < l_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$M_p(t, x)$ pode ser estendido para o comprimento inteiro da viga, utilizando uma função do tipo Heaviside

$$\begin{aligned} M_p(t, x) &= \frac{1}{2} w_p E_p d_{31} (t_b + t_p) v(t) S(x) = M_{p0}(t) S(x), \quad 0 < x < L, \\ M_{p0}(t) &= \frac{1}{2} w_p E_p d_{31} (t_b + t_p) v(t), \\ S(x) &= 1 - Heaviside(x - l_1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dessa forma o problema se reduz a análise das vibrações de uma viga segmentada sob a ação de um momento externo concentrado, aplicado no final da camada piezoelétrica. Decorre então a equação governante para as vibrações transversais da viga

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right) + c(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_p(t, x)}{\partial x^2}. \quad (3.11)$$

Os parâmetros utilizados variam de acordo com os segmentos considerados

$$I(x) = \begin{cases} I_1 = I_p + I_{b1} = (I_{pp} + I_{pb}) + I_{b1}, & 0 \leq x \leq l_1; \\ I_2 = I_{b1}, & l_1 < x \leq l_2; \\ I_3 = I_{b2}, & l_2 < x \leq L. \end{cases} \quad (3.12)$$

$$I_p = \int_A (z - z_n)^2 dA = I_{pp} + I_{pb};$$

$$I_{pp} = \left(\frac{1}{3}t_p^3 + \frac{1}{2}t_b t_p^2 + \frac{1}{4}t_b^2 t_p\right)w_p - z_n(t_p^2 + t_b t_p)w_p;$$

$$I_{pb} = z_n^2 t_b w_{b1};$$

$$I_{b1} = \int_A z^2 dA = \int_0^{w_{b1}} \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} z^2 dz dy = \frac{w_{b1} t_b^3}{12};$$

$$I_{b2} = \int_A z^2 dA = \int_0^{w_{b2}} \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} z^2 dz dy = \frac{w_{b2} t_b^3}{12}.$$

$$E(x)I(x) = \begin{cases} (EI)_1 = E_p I_{pp} + E_b I_{pb} + E_b I_{b1}, & 0 \leq x \leq l_1; \\ (EI)_2 = E_b I_{b1}, & l_1 < x \leq l_2; \\ (EI)_3 = E_b I_{b2}, & l_2 < x \leq L. \end{cases} \quad (3.13)$$

$$m(x) = \begin{cases} m_1 = \rho_p w_p t_p + \rho_b w_{b1} t_b, & 0 < x \leq l_1; \\ m_2 = \rho_b w_{b1} t_b, & l_1 < x \leq l_2; \\ m_3 = \rho_b w_{b2} t_b, & l_2 < x \leq L. \end{cases} \quad (3.14)$$

E o amortecimento $c(x)$ é considerado constante em toda a viga.

As frequências e modos de vibração para a equação (3.11) com condições de contorno do tipo viga fixa-livre, no caso de vibrações livres e não-amortecidas ($c(x) = 0$), são obtidos no Capítulo 4 na seção 4.5.2.1. A análise das vibrações forçadas será feita na seção 5.3.2 utilizando os modos obtidos em 4.5.2.1.

3.2.1.2 Modelo 2 - Viga de Jih-Lian et al. [23]

Este modelo é baseado na configuração proposta por Jih-Lian et al. [23] e considerando a viga representada na Figura 3.9.

A viga é dividida em dois segmentos, sendo o primeiro $0 < x < l_p$ composto por três camadas, e no segundo $l_p < x < l_b$ tem-se o prolongamento da parte intermediária do primeiro segmento. Os subíndices p e b se referem às camadas

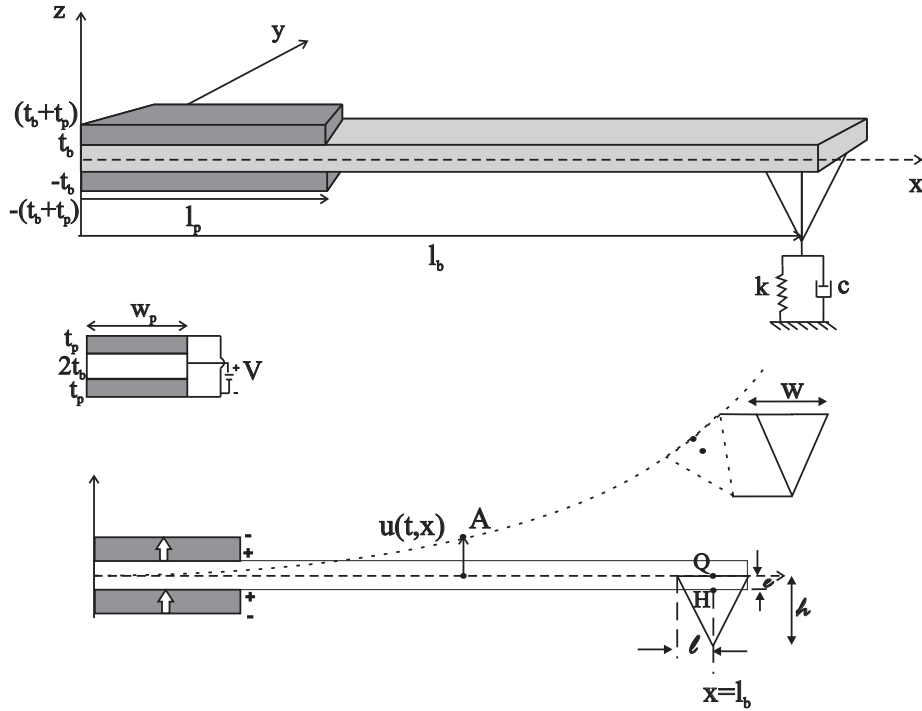


Figura 3.9: Representação da viga de Jih-Lian *et al.* [23]

piezoelétricas e a viga, respectivamente. A viga tem comprimento l_b , largura w_b e espessura $2t_b$. A ponteira em formato piramidal de base retangular tem massa m , altura h , comprimento $2l$ e largura w . Os coeficientes k e c representam a rigidez da mola e o amortecimento. A distância entre os pontos H e Q é e . As direções das setas largas, sobre as camadas piezoelétricas, representam as direções da polarização das camadas piezoelétricas.

Os deslocamentos neutrais-axiais de um ponto arbitrário de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli são dados por

$$U_1(t, x, z) = -zu_x(t, x), \quad U_2(t, x, z) = 0, \quad U_3(t, x, z) = u(t, x). \quad (3.15)$$

Os símbolos U_1 e U_3 representam o deslocamento na direção x e na direção z , respectivamente, e $u(t, x)$ é o deslocamento transversal.

O vetor posição de um ponto arbitrário A , após deformação, é dado por

$$R_A(t, x, z) = [x - zu_x(t, x)]\mathbf{i} + [z + u(t, x)]\mathbf{k}. \quad (3.16)$$

O vetor posição do ponto H , centro de massa da ponteira, após deformação é dado por

$$R_H(t, x, z) = [l_b + l]\mathbf{i} + [z + u(t, l_b) + lu_x(t, l_b) - e]\mathbf{k}. \quad (3.17)$$

A energia cinética total será dada pela soma

$$T = T_p + T_b + T_m, \quad (3.18)$$

onde T_p é a energia cinética proveniente das duas camadas piezoelétricas (superior e inferior), ou seja, $T_p = T_{p(\text{upper})} + T_{p(\text{lower})}$; T_b é a energia cinética da viga e T_m a energia cinética da ponteira.

Calcula-se

$$\begin{aligned} T_{p(\text{upper})} &= \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p \left(\frac{d}{dt} R_A \cdot \frac{d}{dt} R_A \right) dV_p = \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p u_t^2(t, x) dV_p = \\ &= \int_0^{l_p} \int_0^{w_p} \int_{t_b}^{t_b+t_p} \rho_p u_t^2(t, x) dz dy dx, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde utilizou-se o fato que

$$\left(\frac{d}{dt} R_A \cdot \frac{d}{dt} R_A \right) = (x_t - z_t u_x - z u_{xt})^2 + (z_t + u_t)^2 = u_t^2,$$

pois x e z não dependem da variável t e a energia cinética rotatória $\frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p z^2 u_{xt}^2(t, x) dV_p$ é negligenciada no modelo de Euler-Bernoulli.

Além disso,

$$\int_0^{w_p} \int_{t_b}^{t_b+t_p} dz dy = t_p w_p = A_p. \text{ Então}$$

$$T_{p(\text{upper})} = \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \rho_p A_p u_t^2(t, x) dx. \quad (3.20)$$

De maneira análoga obtém-se

$$T_{p(lower)} = \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \rho_p A_p u_t^2(t, x) dx. \quad (3.21)$$

Decorre que

$$T_p = T_{p(upper)} + T_{p(lower)} = \int_0^{l_p} \rho_p A_p u_t^2(t, x) dx. \quad (3.22)$$

De modo similar calcula-se a energia cinética T_b da viga

$$T_b = \frac{1}{2} \int_{V_b} \rho_b \left(\frac{d}{dt} R_A \cdot \frac{d}{dt} R_A \right) dV_p = \frac{1}{2} \int_{V_b} \rho_b (u_t)^2 dV_b = \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \int_0^{w_b} \int_{-t_b}^{t_b} \rho_b (u_t)^2 dz dy dx,$$

sendo $\int_0^{w_b} \int_{-t_b}^{t_b} dz dy = 2t_b w_b = A_b$. Com fins de simplificação considera-se $A_b = 2A_b^*$, $A_b^* = t_b w_b$. Então

$$T_b = \int_0^{l_b} \rho_b A_b^* u_t^2(t, x) dx. \quad (3.24)$$

E a energia cinética T_m da massa é

$$T_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} R_H \cdot \frac{d}{dt} R_H \right) = \frac{1}{2} m (u_t(t, l_b) + l u_{xt}(t, l_b))^2. \quad (3.25)$$

Então a energia cinética total é dada por

$$T = \int_0^{l_p} \rho A u_t^2(t, x) dx + \int_0^{l_b} \rho_b A_b^* u_t^2(t, x) dx + \frac{1}{2} m (u_t(t, l_b) + l u_{xt}(t, l_b))^2 \quad (3.26)$$

sendo $\rho A = \rho_p A_p + \rho_b A_b^*$, $A_p = t_p w_p$, $A_b^* = t_b w_b$.

Para vigas segundo as hipóteses do modelo de Euler-Bernoulli o tensor das deformações terá componentes nulas, com exceção da componente

$$\varepsilon_x^b = \varepsilon_x^p = -z u_x. \quad (3.27)$$

Diferente do *Modelo 1* da seção anterior, nesse caso $z_n = 0$ na parte piezoelétrica, pois a superfície neutra coincide com o eixo x devido a simetria da viga também na parte compósita.

De acordo com [23], se consideram as equações constitutivas para as camadas piezoelétricas relacionando tensão e campo elétrico na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^p \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & -h_{31} \\ -h_{31} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^p \\ D_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

equivalente a equação A.7 descrita no Apêndice A, sendo E_p o módulo de Young relativo ao material piezoelétrico, h_{31} é uma constante piezoelétrica, β_{33} é a constante dielétrica, σ_x^p é a tensão na camada piezoelétrica, E_3 o campo elétrico, ε_x^p é a deformação mecânica da camada piezoelétrica e D_{33} o deslocamento elétrico.

Assume-se que as camadas estão em conexão paralela, ou seja, a direção da polarização é a mesma para ambas as camadas, mas o sinal do campo elétrico é oposto [68]. Então expressa-se, para a camada superior

$$\begin{aligned} \sigma_x^p &= E_p \varepsilon_x^p - h_{31} D_{33}, \\ E_{3(\text{upper})} &= -h_{31} \varepsilon_x^p + \beta_{33} D_{33}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

e para a camada inferior

$$\begin{aligned} \sigma_x^p &= E_p \varepsilon_x^p + h_{31} D_{33}, \\ E_{3(\text{lower})} &= -h_{31} \varepsilon_x^p - \beta_{33} D_{33}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para o segundo segmento $l_p < x \leq l_b$, sem efeitos piezoelétricos, a tensão é expressa como

$$\sigma_x^b = E_b \varepsilon_x^b. \quad (3.31)$$

A energia potencial será dada pela soma das energias potenciais das camadas, da viga e da mola

$$U = U_p + U_b + U_k, \quad (3.32)$$

onde $U_p = U_{p(\text{upper})} + U_{p(\text{lower})}$ é a soma da energia potencial relativa às camadas piezoelétricas superior e inferior.

Calcula-se $U_{p(upper)}$

$$U_{p(upper)} = \frac{1}{2} \int_{V_p} (\sigma_x^p \varepsilon_{xx}^p + D_{33} E_{3upper}) dV_p,$$

com

$$\begin{aligned} \sigma_x^p \varepsilon_x^p &= E_p z^2 u_{xx}^2(t, x) + h_{31} D_{33} z u_{xx}(t, x), \\ D_{33} E_{3(upper)} &= h_{31} D_{33} z u_{xx}(t, x) + \beta_{33} D_{33}^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

e obtém-se

$$\begin{aligned} U_{p(upper)} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_p} E_p I_{p(upper)} u_{xx}^2(t, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{l_p} h_{31} D_{33} A_p u_{xx}(t, x) (t_p + 2t_b) dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \beta_{33} D_{33}^2 A_p dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para $U_{p(lower)}$ se considera o deslocamento elétrico D_{33} com sinal oposto,

$$U_{p(lower)} = \frac{1}{2} \int_{V_p} (\sigma_{xx}^p \varepsilon_{xx}^p - D_{33} E_{3upper}) dV_p,$$

com

$$\begin{aligned} \sigma_x^p \varepsilon_x^p &= E_p z^2 u_{xx}^2(t, x) - h_{31} D_{33} z u_{xx}(t, x), \\ D_{33} E_{3(upper)} &= h_{31} D_{33} z u_{xx}(t, x) - \beta_{33} D_{33}^2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

e obtém-se

$$\begin{aligned} U_{p(lower)} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_p} E_p I_{p(lower)} u_{xx}^2(t, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{l_p} h_{31} D_{33} A_p u_{xx}(t, x) (t_p + 2t_b) dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_p} \beta_{33} D_{33}^2 A_p dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Considerando a soma

$$\begin{aligned} U_p &= U_{p(upper)} + U_{p(lower)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_p} E_p (I_{p(upper)} + I_{p(lower)}) u_{xx}^2(x, t) dx + \\ &+ \int_0^{l_p} h_{31} D_{33} A_p u_{xx}(x, t) (t_p + 2t_b) dx + \int_0^{l_p} \beta_{33} D_{33}^2 A_p dx \end{aligned} \quad (3.37)$$

Utilizando o fato de que $I_p = I_{p(lower)} = I_{p(upper)} = \int_{A_p} z^2 dA_p$, decorre

$$\begin{aligned} U_p &= \int_0^{l_p} E_p I_p u_{xx}^2(t, x) dx + \int_0^{l_p} h_{31} D_{33} A_p u_{xx}(t, x) (t_p + 2t_b) dx + \\ &+ \int_0^{l_p} \beta_{33} D_{33}^2 A_p dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Agora calcula-se U_b

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{V_b} \sigma_{xx}^b \varepsilon_{xx}^b dV_b = \int_0^{l_b} \int_0^{w_b} \int_{-t_b}^{t_b} E_b z^2 v_{xx}^2(t, x) dz dy dx, \quad (3.39)$$

sendo $\int_0^{w_b} \int_{-t_b}^{t_b} z^2 dz dy = I_b$.

Por simplificação considera-se $I_b = 2I_b^*$. Então

$$U_b = \int_0^{l_b} E_b I_b^* u_{xx}^2(t, x) dx = \int_0^{l_p} E_b I_b^* u_{xx}^2(t, x) dx + \int_{l_p}^{l_b} E_b I_b^* u_{xx}^2(t, x) dx. \quad (3.40)$$

A energia potencial da mola será

$$U_k = \frac{1}{2} k (R_H \cdot R_H) = \frac{1}{2} k [u(t, l_b) + l u_x(t, l_b)]^2. \quad (3.41)$$

Logo a energia potencial total é dada por

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{l_p} EI u_{xx}^2(t, x) dx + \int_0^{l_p} h_{31} D_{33} A_p u_{xx}(t, x) (t_p + 2t_b) dx + \\ &+ \int_0^{l_p} \beta_{33} D_{33}^2 A_p dx + \int_{l_p}^{l_b} E_b I_b^* u_{xx}^2(t, x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} k [u(t, l_b) + l u_x(t, l_b)]^2, \end{aligned} \quad (3.42)$$

sendo $EI = E_p I_p + E_b I_b^*$.

O trabalho virtual será realizado pela tensão elétrica V_{cc} , amortecimento c e força normal f agindo na ponteira

$$W = \int_0^{l_p} 2V_{cc} w_p D_{33}(t, x) dx + f - c [u_t(t, l_b) + l u_{xt}(t, l_b)] [u(t, l_b) + l u_x(t, l_b)]. \quad (3.43)$$

Faz-se uso do Princípio de Hamilton estendido, dado por [46]

$$\int_{t_a}^{t_b} [\delta(T - U + W_{nc})] dt = 0. \quad (3.44)$$

Calculam-se, de modo análogo ao feito no Capítulo 2 (seção 2.1.1.1), δT , δU e δW_{nc} . Para tanto são consideradas perturbações v_1 e v_2 , de $u(t, x)$ e $D_{33}(t, x)$,

respectivamente, de modo que $v_1(t_a, x) = v_1(t_b, x) = 0$ e $v_2(t_a, x) = v_2(t_b, x) = 0$.

Tem-se

$$\begin{aligned}\delta T &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(u+\epsilon v_1) - T(u)}{\epsilon}, \\ \delta U &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(u+\epsilon v_1, D_{33}+\epsilon v_2) - U(u, D_{33})}{\epsilon}, \\ \delta W &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(u+\epsilon v_1, D_{33}+\epsilon v_2) - W(u, D_{33})}{\epsilon}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Calcula-se δT , δU e δW_{nc} e substituí-se em (3.44). Seguindo os mesmos passos descritos em 2.1.1.1, que incluem basicamente integração por partes, escolhas arbitrárias para as perturbações v_1 e v_2 e o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, é possível obter as equações governantes para cada região da viga

$$\begin{aligned}\rho_i A_i u_{itt} + E_i I_i u_{ixxx} &= 0, \\ i = 1 \text{ para } 0 < x < l_p, \\ i = 2 \text{ para } l_p < x < l_b; \\ -(t_p + 2t_b) A_p h_{31} u_{1xx} + 2V_{cc} w_p - 2A_p \beta_{33} D_{33} &= 0, \text{ para } 0 < x < l_p;\end{aligned}\tag{3.46}$$

sendo

$$\begin{aligned}\rho_1 A_1 &= 2\rho_p A_p + \rho_b A_b, \quad \rho_2 A_2 = \rho_b A_b, \\ E_1 I_1 &= 2E_p I_p + E_b I_b, \quad E_2 I_2 = E_b I_b, \\ A_p &= t_p w_p, \quad A_b = 2t_b w_b, \\ I_p &= \int_0^{w_p} \int_{t_b}^{t_p+t_b} z^2 dz dy, \quad I_b = \int_0^{w_b} \int_{-t_b}^{t_b} z^2 dz dy.\end{aligned}$$

E com as respectivas condições de contorno

Em $x = 0$

$$u_1(t, 0) = 0, \quad u_{1x}(t, 0) = 0.$$

Em $x = l_b$

$$\begin{aligned} E_b I_b u_{2xxx}(t, l_b) &= m[u_{2tt}(t, l_b) + l u_{2xtt}(t, l_b)] + \\ &+ c[u_t(t, l_b) + l u_{xt}(t, l_b)] + k[u_2(t, l_b) + l u_{2x}(t, l_b)] - f, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} E_b I_b u_{2xx}(t, l_b) &= -ml[u_{2tt}(t, l_b) + l u_{2xtt}(t, l_b)] + \\ &- cl[u_t(t, l_b) + l u_{xt}(t, l_b)] - kl[u_2(t, l_b) + l u_{2x}(t, l_b)] + fl. \end{aligned}$$

Condições de continuidade em $x = l_p$

$$\begin{aligned} u_1(t, l_p^-) &= u_2(t, l_p^+), \\ u_{1x}(t, l_p^-) &= u_{2x}(t, l_p^+). \end{aligned} \quad (3.48)$$

E por fim, condições de equilíbrio ou transição em $x = l_p$

$$\begin{aligned} E_2 I_2 u_{2xxx}(t, l_p^+) &= E_1 I_1 u_{1xxx}(t, l_p^-), \\ E_2 I_2 u_{2xx}(t, l_p^+) - \left[E_1 I_1 - \frac{h_{31}^2 A_p (t_p + 2t_b)^2}{2\beta_{33}} \right] u_{1xx}(t, l_p^-) &= m_v, \end{aligned} \quad (3.49)$$

sendo $m_v = (t_p + 2t_b) h_{31} \frac{V_{cc} w_p}{\beta_{33}}$ o momento fletor induzido pela tensão elétrica externa V_{cc} .

No Capítulo 4 (seção 4.5.1.2) são obtidas as frequências e modos de vibração quando desconsiderando o amortecimento c , a força f e o momento induzido m_v .

4 VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM VIGAS SEGMENTADAS

Uma viga de seção transversal não-uniforme pode ser aproximada como um conjunto de segmentos de vigas uniformes, sendo que para cada um desses segmentos se considera separadamente a equação do modelo elástico em uso. Objetiva-se nesse capítulo dar continuidade à metodologia para vigas Euler-Bernoulli segmentadas [60], [73] e para vigas uniformes descritas pelo modelo de Timoshenko [32], [40], [41], considerando vibrações numa viga de comprimento L composta por N segmentos, ou $N - 1$ saltos de descontinuidade, de acordo com a Figura 4.1, utilizando o modelo de Timoshenko.

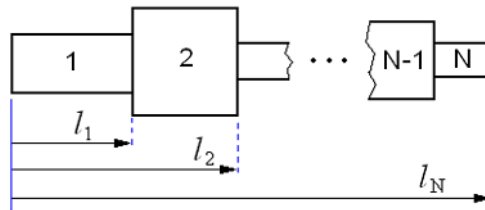


Figura 4.1: Viga N-segmentada

Em vigas segmentadas, além das condições de contorno, serão necessárias condições de compatibilidade nos pontos de mudança da seção transversal: continuidade para o deslocamento e giro, e de equilíbrio para o momento e cisalhamento devido a massas intermediárias, forças conservativas ou não conservativas [13], [26], [28], [43], [63], [78].

Nas próximas seções, tal procedimento é descrito de forma geral para vigas N-segmentadas do tipo Euler-Bernoulli e é formulada uma extensão para o estudo de vibrações modais em vigas segmentadas utilizando o modelo de Timoshenko. Devido à variedade de dispositivos anexados às extremidades e nos pontos

intermediários, as condições de contorno e de compatibilidade são consideradas de forma geral. Os casos de vigas bi e trissegmentadas são descritos em detalhe.

4.1 Vigas segmentadas utilizando o modelo de Euler-Bernoulli

Considera-se uma viga N -segmentada, de acordo com a Figura 4.1. A equação que descreve o deslocamento transversal $u_j(t, x)$ no j -ésimo segmento $[x_{j-1}, x_j]$, com $j = 1, \dots, N$ e $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L$, de acordo com o modelo de Euler-Bernoulli para vibrações transversais livres

$$m_j \frac{\partial^2 u_j(t, x)}{\partial t^2} + k_j \frac{\partial^4 u_j(t, x)}{\partial x^4} = 0, \quad (4.1)$$

sendo $m_j = \rho_j A_j$ a massa por unidade de comprimento da viga, e $k_j = E_j I_j$ sua rigidez flexural.

As condições de contorno para a equação (4.1) podem ser escritas de maneira geral como

$$\begin{aligned} A_{11}u_1(t, 0) + B_{11}u'_1(t, 0) + C_{11}u''_1(0, t) + D_{11}u'''_1(t, 0) &= 0, \\ A_{12}u_1(t, 0) + B_{12}u'_1(t, 0) + C_{12}u''_1(0, t) + D_{12}u'''_1(t, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} A_{21}u_N(t, L) + B_{21}u'_N(t, L) + C_{21}u''_N(L, t) + D_{21}u'''_N(t, L) &= 0, \\ A_{22}u_N(t, L) + B_{22}u'_N(t, L) + C_{22}u''_N(L, t) + D_{22}u'''_N(t, L) &= 0. \end{aligned}$$

Em uma formulação compacta

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_0(t, x) &= 0, \\ \mathbf{B}_L \mathbf{u}_L(t, x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_1(t, 0) \\ u'_1(t, 0) \\ u''_1(t, 0) \\ u'''_1(t, 0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_L = \begin{bmatrix} u_N(t, L) \\ u'_N(t, L) \\ u''_N(t, L) \\ u'''_N(t, L) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Nos pontos x_i , $i = 1, 2, \dots, N - 1$, localizados entre dois segmentos consecutivos, devem ser consideradas condições de continuidade referentes ao deslocamento, giro, momento fletor e cisalhamento. De modo geral

$$\begin{aligned} & E_{11}^{(i)} u_i(t, x_i) + F_{11}^{(i)} u'_i(t, x_i) + G_{11}^{(i)} u''_i(t, x_i) + H_{11}^{(i)} u'''_i(t, x_i) \\ &= E_{12}^{(i)} u_{i+1}(x_i, t) + F_{12}^{(i)} u'_{i+1}(x_i, t) + G_{12}^{(i)} u''_{i+1}(x_i, t) + H_{12}^{(i)} u'''_{i+1}(x_i, t), \\ & E_{21}^{(i)} u_i(t, x_i) + F_{21}^{(i)} u'_i(t, x_i) + G_{21}^{(i)} u''_i(t, x_i) + H_{21}^{(i)} u'''_i(t, x_i) \\ &= E_{22}^{(i)} u_{i+1}(t, x_i) + F_{22}^{(i)} u'_{i+1}(t, x_i) + G_{22}^{(i)} u''_{i+1}(t, x_i) + H_{22}^{(i)} u'''_{i+1}(t, x_i), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & E_{31}^{(i)} u_i(t, x_i) + F_{31}^{(i)} u'_i(t, x_i) + G_{31}^{(i)} u''_i(t, x_i) + H_{31}^{(i)} u'''_i(t, x_i) \\ &= E_{32}^{(i)} u_{i+1}(t, x_i) + F_{32}^{(i)} u'_{i+1}(t, x_i) + G_{32}^{(i)} u''_{i+1}(t, x_i) + H_{32}^{(i)} u'''_{i+1}(t, x_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E_{41}^{(i)} u_i(t, x_i) + F_{41}^{(i)} u'_i(t, x_i) + G_{41}^{(i)} u''_i(t, x_i) + H_{41}^{(i)} u'''_i(t, x_i) \\ &= E_{42}^{(i)} u_{i+1}(t, x_i) + F_{42}^{(i)} u'_{i+1}(t, x_i) + G_{42}^{(i)} u''_{i+1}(t, x_i) + H_{42}^{(i)} u'''_{i+1}(t, x_i). \end{aligned}$$

E de forma compacta

$$\mathcal{C}_{1,i} \mathbf{u}_i(t, x_i) = \mathcal{C}_{2,i} \mathbf{u}_{i+1}(t, x_i), \quad (4.7)$$

com

$$\mathcal{C}_{1,i} = \begin{pmatrix} E_{11}^{(i)} & F_{11}^{(i)} & G_{11}^{(i)} & H_{11}^{(i)} \\ E_{21}^{(i)} & F_{21}^{(i)} & G_{21}^{(i)} & H_{21}^{(i)} \\ E_{31}^{(i)} & F_{31}^{(i)} & G_{31}^{(i)} & H_{31}^{(i)} \\ E_{41}^{(i)} & F_{41}^{(i)} & G_{41}^{(i)} & H_{41}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,i} = \begin{pmatrix} E_{12}^{(i)} & F_{12}^{(i)} & G_{12}^{(i)} & H_{12}^{(i)} \\ E_{22}^{(i)} & F_{22}^{(i)} & G_{22}^{(i)} & H_{22}^{(i)} \\ E_{32}^{(i)} & F_{32}^{(i)} & G_{32}^{(i)} & H_{32}^{(i)} \\ E_{42}^{(i)} & F_{42}^{(i)} & G_{42}^{(i)} & H_{42}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.8)$$

e

$$\mathbf{u}_j(t, x) = \begin{bmatrix} u_j(t, x) \\ u'_j(t, x) \\ u''_j(t, x) \\ u'''_j(t, x) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.9)$$

Por exemplo, quando não houverem nem dispositivos e nem suportes intermediários entre os segmentos, as condições de continuidade para x_i , serão dadas, para $i = 1, 2, \dots, N - 1$, por

I- Deslocamento

$$u_i(t, x_i) = u_{i+1}(t, x_i).$$

II- Giro

$$u'_i(t, x_i) = u'_{i+1}(t, x_i).$$

III- Momento Fletor

$$u''_i(t, x_i) = \alpha_i u''_{i+1}(t, x_i), \quad \alpha_i = \frac{E_{i+1}I_{i+1}}{E_i I_i}.$$

IV- Cisalhamento

$$u'''_i(t, x_i) = \alpha_i u'''_{i+1}(t, x_i), \quad \alpha_i = \frac{E_{i+1}I_{i+1}}{E_i I_i}.$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i(t, x_i) \\ u'_i(t, x_i) \\ u''_i(t, x_i) \\ u'''_i(t, x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1}(t, x_i) \\ u'_{i+1}(t, x_i) \\ u''_{i+1}(t, x_i) \\ u'''_{i+1}(t, x_i) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Nesse caso

$$\mathcal{C}_{1,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (4.11)$$

4.1.1 Análise modal

Para determinar soluções do tipo modal supõe-se

$$u_j(t, x) = e^{\lambda t} X_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.12)$$

em que λ é o parâmetro associado à frequência e $X_j(x)$ são os modos de vibração em cada segmento da viga, substituindo (4.12) em (4.1), obtém-se

$$\begin{aligned} X_j^{(iv)}(x) - \varepsilon_j^4 X_j(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ \varepsilon_j^4 &= -\frac{m_j \lambda^2}{k_j}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

sujeito a condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 \mathbb{X}_1(0) &= 0, \\ \mathbf{B}_L \mathbb{X}_N(L) &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

com \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_L dadas em (4.4) com

$$\mathbb{X}_j(x) = \begin{pmatrix} X_j(x) \\ X_j'(x) \\ X_j''(x) \\ X_j'''(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.15)$$

e condições de compatibilidade nos pontos de descontinuidade da seção transversal

$$\mathcal{C}_{1,i} \mathbb{X}_i(x_i) = \mathcal{C}_{2,i} \mathbb{X}_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (4.16)$$

com $\mathcal{C}_{1,i}$ e $\mathcal{C}_{2,i}$ dadas, de forma geral, em (4.8).

4.1.1.1 Base de soluções

Uma base de soluções para a equação (4.13) será composta por quatro elementos. Para cada segmento $j = 1, 2, \dots, N$ introduz-se uma base de soluções $\Psi_j(x)$ da forma

$$\Psi_j(x) = [\psi_{j1}(x), \psi_{j2}(x), \psi_{j3}(x), \psi_{j4}(x)]. \quad (4.17)$$

Daí expressam-se as soluções $X_j(x)$ como

$$\begin{aligned} X_1(x) &= c_{11}\psi_{11} + c_{12}\psi_{12} + c_{13}\psi_{13} + c_{14}\psi_{14}, \\ X_2(x) &= c_{21}\psi_{21} + c_{22}\psi_{22} + c_{23}\psi_{23} + c_{24}\psi_{24}, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ X_N(x) &= c_{N1}\psi_{N1} + c_{N2}\psi_{N2} + c_{N3}\psi_{N3} + c_{N4}\psi_{N4}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Então os modos de vibração $X(x)$ são expressos por

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ X_2(x), & x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_N(x), & x_{N-1} < x \leq x_N = L \end{cases} . \quad (4.19)$$

4.1.1.2 Formulação do sistema $Uc = 0$

Aplicando (4.18) nas condições de contorno e de continuidade obtém-se o sistema matricial $Uc = 0$, onde $U = \mathbf{B}\Phi$, $c = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{14} \dots \ c_{N1} \ c_{N2} \ c_{N3} \ c_{N4}]_{4N \times 1}^T$ [60], [73]. A matriz \mathbf{B} carrega os coeficientes associados com as condições de contorno e continuidade

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} [B_0]_{2 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & [\mathcal{C}\mathcal{C}]_{4(N-1) \times 8(N-1)} & & & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \cdots \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & [B_L]_{2 \times 4} \end{bmatrix}_{4N \times 8N}, \quad (4.20)$$

sua parte central se refere às condições de compatibilidade

$$\mathcal{C}\mathcal{C} = \begin{bmatrix} [\mathcal{C}_{1,1}]_{4 \times 4} & [\mathcal{C}_{2,1}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,2}]_{4 \times 4} & [\mathcal{C}_{2,2}]_{4 \times 4} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,N-1}]_{4 \times 4} & [\mathcal{C}_{2,N-1}]_{4 \times 4} \end{bmatrix}_{4(N-1) \times 8(N-1)}. \quad (4.21)$$

A matriz Φ carrega os valores da base de soluções nas extremidades e pontos de descontinuidades

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \Phi_1(x_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(x_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(x_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \Phi_N(x_{N-1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Phi_N(L) \end{bmatrix}_{8N \times 4N}, \quad (4.22)$$

com

$$\Phi_j(x) = \begin{bmatrix} \psi_{j1}(x) & \psi_{j2}(x) & \psi_{j3}(x) & \psi_{j4}(x) \\ \psi'_{j1}(x) & \psi'_{j2}(x) & \psi'_{j3}(x) & \psi'_{j4}(x) \\ \psi''_{j1}(x) & \psi''_{j2}(x) & \psi''_{j3}(x) & \psi''_{j4}(x) \\ \psi'''_{j1}(x) & \psi'''_{j2}(x) & \psi'''_{j3}(x) & \psi'''_{j4}(x) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Tem-se então

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{4N \times 4N} \mathbf{c}_{4N \times 1} &= \mathbf{0}_{4N \times 1}, \\ \mathbf{U}_{4N \times 4N} &= \mathbf{B}_{4N \times 8N} \mathbf{\Phi}_{8N \times 4N}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nos casos específicos as matrizes \mathbf{B} e $\mathbf{\Phi}$ serão melhor visualizadas.

O sistema $\mathbf{U}c = 0$ possui soluções não-nulas de c quando $\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{U}) = 0$, denotada equação característica, cujas soluções são os autovalores associados as autofunções $X(x)$.

4.1.1.3 Solução fundamental

Deve-se escolher elementos para a base de soluções de cada segmento. A fim de tornar a matriz \mathbf{U} mais esparsa, é conveniente escolher a solução fundamental e suas derivadas, bem como translações delas. Com tal propósito, tem sido introduzido o uso da solução fundamental como sendo a solução $h_j(x)$ do problema de valor inicial [35], [38]

$$\begin{cases} h_j^{(iv)}(x) - \varepsilon_j^4 h_j(x) = 0, \\ \varepsilon_j^4 = -\frac{\rho_j A_j}{E_j I_j} \lambda^2, \\ h_j(0) = 0, h'_j(0) = 0, h''_j(0) = 0, h'''_j(0) = 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

onde o sub-índice j indica que se tem uma solução fundamental associada a cada segmento $j = 1, 2, \dots, N$. As bases de soluções, para cada segmento, serão

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= [h_1(x - a_1), h'_1(x - a_1), h''_1(x - a_1), h'''_1(x - a_1)], \\ \Psi_2(x) &= [h_2(x - a_2), h'_2(x - a_2), h''_2(x - a_2), h'''_2(x - a_2)], \\ &\vdots \\ \Psi_N(x) &= [h_N(x - a_N), h'_N(x - a_N), h''_N(x - a_N), h'''_N(x - a_N)]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sendo que os termos a_j se referem a translações convenientes para a base de soluções em cada segmento.

A solução do PVI (4.25) é dada por

$$h_j(x) = \frac{\sinh(\varepsilon_j x) - \sin(\varepsilon_j x)}{2\varepsilon_j^3}. \quad (4.27)$$

Então os modos, para cada segmento, são expressos de acordo com (4.19)

$$\begin{aligned} X_1(x) &= h_1(x)c_{11} + h'_1(x)c_{12} + h''_1(x)c_{13} + h'''_1(x)c_{14}, \\ X_2(x) &= h_2(x - x_1)c_{21} + h'_2(x - x_1)c_{22} + h''_2(x - x_1)c_{23} + h'''_2(x - x_1)c_{24}, \\ &\quad \vdots \\ X_N(x) &= h_N(x - x_{N-1})c_{N1} + h'_N(x - x_{N-1})c_{N2} + h''_N(x - x_{N-1})c_{N3} + h'''_N(x - x_{N-1})c_{N4}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

com $a_1 = 0$, $a_2 = x_1, \dots, a_N = x_{N-1}$. E as matrizes Φ_j podem ser reescritas como

$$\Phi_j(x) = \begin{bmatrix} h_j(x - a_j) & h'_j(x - a_j) & h''_j(x - a_j) & h'''_j(x - a_j) \\ h'_j(x - a_j) & h''_j(x - a_j) & h'''_j(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) \\ h''_j(x - a_j) & h'''_j(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) & h_j^{(v)}(x - a_j) \\ h'''_j(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) & h_j^{(v)}(x - a_j) & h_j^{(vi)}(x - a_j) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Além de tornar Φ mais esparsa, a escolha da base dinâmica e translações convenientes dela, possibilita a redução imediata do sistema linear $Uc = 0$ para determinadas condições de contorno do problema. Alguns coeficientes do vetor c podem ser facilmente obtidos. Por exemplo, para o caso de uma viga fixa em $x = 0$, com $a_1 = 0$, tem-se que as condições $X_1(0) = 0$ e $X'_1(0) = 0$ implicam em $c_{13} = c_{14} = 0$.

4.2 Vigas segmentadas utilizando o modelo de Timoshenko

De acordo com o modelo de Timoshenko, as vibrações livres de uma viga N -segmentada de comprimento L (Figura 4.1) são descritas pelas equações

$$\rho_j A_j \frac{\partial^2 u_j(t, x)}{\partial t^2} - \kappa_j G_j A_j \left(\frac{\partial^2 u_j(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_j(t, x)}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.30)$$

$$\rho_j I_j \frac{\partial^2 \phi_j(t, x)}{\partial t^2} - E_j I_j \frac{\partial^2 \phi_j(t, x)}{\partial x^2} - \kappa_j G_j A_j \left(\frac{\partial u_j(t, x)}{\partial x} - \phi_j(t, x) \right) = 0.$$

Sendo $u_j(t, x)$ e $\phi_j(t, x)$ o deslocamento e giro, respectivamente, no j -ésimo segmento $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, N$. Para a determinação do deslocamento transversal e giro, se consideram condições de contorno de forma geral

$$A_{11} u_1(t, 0) + A_{12} \phi_1(t, 0) + J_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) + J_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (4.31)$$

$$A_{21} u_1(t, 0) + A_{22} \phi_1(t, 0) + J_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) + J_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(t, 0) = 0;$$

$$F_{11} u_N(t, 0) + F_{12} \phi_N(t, 0) + Q_{11} \frac{\partial u_N}{\partial x}(t, 0) + Q_{12} \frac{\partial \phi_N}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (4.32)$$

$$F_{21} u_N(t, 0) + F_{22} \phi_N(t, 0) + Q_{21} \frac{\partial u_N}{\partial x}(t, 0) + Q_{22} \frac{\partial \phi_N}{\partial x}(t, 0) = 0.$$

E condições de continuidade, referentes ao deslocamento, giro, momento fletor e cisalhamento nos pontos x_i nos quais houverem mudança na seção transversal. De

modo geral têm-se para $i = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned}
& E_{11}^{(i)} u_i(t, x_i) + F_{11}^{(i)} \phi_i(t, x_i) + G_{11}^{(i)} u'_i(t, x_i) + H_{11}^{(i)} \phi'_i(t, x_i) \\
& \quad = E_{12}^{(i)} u_{i+1}(x_i, t) + F_{12}^{(i)} \phi_{i+1}(t, x_i) + G_{12}^{(i)} u'_{i+1}(t, x_i) + H_{12}^{(i)} \phi'_{i+1}(t, x_i), \\
& E_{21}^{(i)} u_i(t, x_i, t) + F_{21}^{(i)} \phi_i(t, x_i) + G_{21}^{(i)} u'_i(t, x_i) + H_{21}^{(i)} \phi'_i(t, x_i) \\
& \quad = E_{22}^{(i)} u_{i+1}(x_i, t) + F_{22}^{(i)} \phi_{i+1}(t, x_i) + G_{22}^{(i)} u'_{i+1}(x_i, t) + H_{22}^{(i)} \phi'_{i+1}(t, x_i), \\
& E_{31}^{(i)} u_i(x_i, t) + F_{31}^{(i)} \phi_i(t, x_i) + G_{31}^{(i)} u'_i(x_i, t) + H_{31}^{(i)} \phi'_i(t, x_i) \\
& \quad = E_{32}^{(i)} u_{i+1}(x_i, t) + F_{32}^{(i)} \phi_{i+1}(t, x_i) + G_{32}^{(i)} u'_{i+1}(t, x_i) + H_{32}^{(i)} \phi'_{i+1}(t, x_i), \\
& E_{41}^{(i)} u_i(x_i, t) + F_{41}^{(i)} \phi_i(t, x_i) + G_{41}^{(i)} u'_i(t, x_i) + H_{41}^{(i)} \phi'_i(t, x_i) \\
& \quad = E_{42}^{(i)} u_{i+1}(x_i, t) + F_{42}^{(i)} \phi_{i+1}(t, x_i) + G_{42}^{(i)} u'_{i+1}(t, x_i) + H_{42}^{(i)} \phi'_{i+1}(t, x_i).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

4.2.1 Formulação matricial

O sistema (4.30) pode ser representado matricialmente como

$$M_j \ddot{v}_j + K_j v_j = 0, \tag{4.34}$$

onde os pontos representam diferenciação com relação a variável t e

$$v_j = \begin{pmatrix} u_j(t, x) \\ \phi_j(t, x) \end{pmatrix}, \quad M_j = \begin{pmatrix} \rho_j A_j & 0 \\ 0 & \rho_j I_j \end{pmatrix},$$

$$K_j = B_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} + N_j \frac{\partial}{\partial x} + D_j,$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} -\kappa_j G_j A_j & 0 \\ 0 & -E_j I_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa_j G_j A_j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_j = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_j G_j A_j \\ -\kappa_j G_j A_j & 0 \end{pmatrix}.$$

As condições de contorno podem ser escritas matricialmente

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1(t, 0) + \mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{v}_N(t, L) + \mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{v}_N}{\partial x}(t, L) = 0, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{11} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{11} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

E as condições de compatibilidade, de modo geral

$$\mathcal{C}_{1,i}\mathbf{W}_i(t, x_i) = \mathcal{C}_{2,i}\mathbf{W}_{i+1}(t, x_i), \quad (4.38)$$

sendo

$$\mathcal{C}_{1,i} = \begin{pmatrix} E_{11}^{(i)} & F_{11}^{(i)} & G_{11}^{(i)} & H_{11}^{(i)} \\ E_{21}^{(i)} & F_{21}^{(i)} & G_{21}^{(i)} & H_{21}^{(i)} \\ E_{31}^{(i)} & F_{31}^{(i)} & G_{31}^{(i)} & H_{31}^{(i)} \\ E_{41}^{(i)} & F_{41}^{(i)} & G_{41}^{(i)} & H_{41}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,i} = \begin{pmatrix} E_{12}^{(i)} & F_{12}^{(i)} & G_{12}^{(i)} & H_{12}^{(i)} \\ E_{22}^{(i)} & F_{22}^{(i)} & G_{22}^{(i)} & H_{22}^{(i)} \\ E_{32}^{(i)} & F_{32}^{(i)} & G_{32}^{(i)} & H_{32}^{(i)} \\ E_{42}^{(i)} & F_{42}^{(i)} & G_{42}^{(i)} & H_{42}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

e

$$\mathbf{W}_j(t, x) = \begin{pmatrix} u_j(t, x) \\ \phi_j(t, x) \\ u'_j(t, x) \\ \phi'_j(t, x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.40)$$

Por exemplo, quando não houverem nem suportes e nem dispositivos intermediários tem-se, para $i = 1, \dots, N - 1$

I- Deslocamento

$$u_i(t, x_i) = u_{i+1}(t, x_i).$$

II- Giro

$$\phi_i(t, x_i) = \phi_{i+1}(t, x_i).$$

III- Momento Fletor

$$\phi'_i(t, x_i) = \alpha_i \phi'_{i+1}(t, x_i), \quad \alpha_i = \frac{E_{i+1}I_{i+1}}{E_i I_i}.$$

IV- Cisalhamento

$$u'_i(t, x_i) - \phi_i(t, x_i) = \beta_i u'_{i+1}(t, x_i) - \beta_{i+1} \phi_{i+1}(t, x_i), \quad \beta_i = \frac{\kappa_{i+1} G_{i+1} A_{i+1}}{\kappa_i G_i A_i}.$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i(t, x_i) \\ \phi_i(t, x_i) \\ u'_i(t, x_i) \\ \phi'_i(t, x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i \\ 0 & -\beta_i & \beta_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1}(t, x_i) \\ \phi_{i+1}(t, x_i) \\ u'_{i+1}(t, x_i) \\ \phi'_{i+1}(t, x_i) \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Identificam-se nesse caso

$$\mathcal{C}_{1,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i \\ 0 & -\beta_i & \beta_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

4.2.2 Análise modal

Para o modelo de Timoshenko, quando se substituem as soluções do tipo modal, supõe-se

$$\mathbf{v}_j(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{X}_j(x), \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.43)$$

com

$$\mathbf{X}_j(x) = \begin{pmatrix} W_j(x) \\ \varphi_j(x) \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

em (4.34), para $j = 1, \dots, N$ e obtém-se

$$(\lambda^2 \mathbf{M}_j) \mathbf{X}_j(x) + \mathbf{K}_j \mathbf{X}_j(x) = 0, \quad (4.45)$$

ou na forma diferencial

$$\mathbf{B}_j \mathbf{X}_j'' + \mathbf{N}_j \mathbf{X}_j' + (\lambda^2 \mathbf{M}_j + \mathbf{D}_j) \mathbf{X}_j = 0. \quad (4.46)$$

As condições de contorno obtidas de (4.35) e (4.36), podem ser escritas matricialmente na forma

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_1(0) + \mathbf{J} \mathbf{X}'_1(0) = 0, \quad (4.47)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{X}_N(L) + \mathbf{Q} \mathbf{X}'_N(L) = 0,$$

e as condições de continuidade obtidas de (4.38)

$$\mathcal{C}_{1,i} \mathbb{X}_i(x_i) = \mathcal{C}_{2,i} \mathbb{X}_{i+1}(x_i), \quad \mathbb{X}_j(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_j(x) \\ \mathbf{X}'_j(x) \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

com $\mathbf{X}_j(x)$ dados em (4.44).

4.2.2.1 Base de soluções

A equação modal (4.46) com as condições de contorno e continuidade formam um problema de autovalor. Tal equação é um sistema de segunda ordem com

duas variáveis independentes, $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$, portanto possui uma base composta por quatro soluções linearmente independentes, duas para cada uma das variáveis,

$$\Psi_j(x) = [\psi_{j1}(x), \psi_{j2}(x), \psi_{j3}(x), \psi_{j4}(x)], \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.49)$$

sendo

$$\psi_{jk}(x) = \begin{pmatrix} \eta_{jk}(x) \\ \zeta_{jk}(x) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (4.50)$$

Então para cada segmento j tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \left[\begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \zeta_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{12} \\ \zeta_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{13} \\ \zeta_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{14} \\ \zeta_{14} \end{pmatrix} \right], \\ \Psi_2(x) &= \left[\begin{pmatrix} \eta_{21} \\ \zeta_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{11} \\ \zeta_{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{22} \\ \zeta_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{23} \\ \zeta_{23} \end{pmatrix} \right], \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \Psi_N(x) &= \left[\begin{pmatrix} \eta_{N1} \\ \zeta_{N1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{N2} \\ \zeta_{N2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{N3} \\ \zeta_{N3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_{N4} \\ \zeta_{N4} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

E as soluções $\mathbf{X}_j(x)$ são expressas, de modo similar ao modelo de Euler-Bernoulli com a diferença de se tratarem, agora, de grandezas vetoriais, como

$$\mathbf{X}(x) = \begin{cases} \mathbf{X}_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ \mathbf{X}_2(x), & x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{X}_N(x), & x_{N-1} < x \leq x_N = L \end{cases} \quad (4.52)$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1(x) &= \begin{pmatrix} W_1(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix} = c_{11}\psi_{11} + c_{12}\psi_{12} + c_{13}\psi_{13} + c_{14}\psi_{14}, \\
\mathbf{X}_2(x) &= \begin{pmatrix} W_2(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = c_{21}\psi_{21} + c_{22}\psi_{22} + c_{23}\psi_{23} + c_{24}\psi_{24}, \\
&\vdots \\
\mathbf{X}_N(x) &= \begin{pmatrix} W_N(x) \\ \varphi_N(x) \end{pmatrix} = c_{N1}\psi_{N1} + c_{N2}\psi_{N2} + c_{N3}\psi_{N3} + c_{N4}\psi_{N4}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Ou de forma agrupada para $j = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_j(x) &= \psi_{j1}c_{j1} + \psi_{j2}c_{j2} + \psi_{j3}c_{j3} + \psi_{j4}c_{j4} \\
&= \mathbf{\Phi}_{j1}(x)\mathbf{c}_{j1} + \mathbf{\Phi}_{j2}(x)\mathbf{c}_{j2}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

sendo

$$\mathbf{\Phi}_{j1} = [\psi_{j1}, \psi_{j2}] = \begin{pmatrix} \eta_{j1}(x) & \eta_{j2}(x) \\ \zeta_{j1}(x) & \zeta_{j2}(x) \end{pmatrix}, \tag{4.55}$$

$$\mathbf{\Phi}_{j2} = [\psi_{j3}, \psi_{j4}] = \begin{pmatrix} \eta_{j3}(x) & \eta_{j4}(x) \\ \zeta_{j3}(x) & \zeta_{j4}(x) \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

$$\mathbf{c}_{j1} = \begin{pmatrix} c_{j1} \\ c_{j2} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{c}_{j2} = \begin{pmatrix} c_{j3} \\ c_{j4} \end{pmatrix}.$$

E se redefine (4.51) como

$$\begin{aligned}
\Psi_1(x) &= [\mathbf{\Phi}_{11}(x), \mathbf{\Phi}_{12}(x)], \\
\Psi_2(x) &= [\mathbf{\Phi}_{21}(x), \mathbf{\Phi}_{22}(x)], \\
&\vdots \\
\Psi_N(x) &= [\mathbf{\Phi}_{N1}(x), \mathbf{\Phi}_{N2}(x)].
\end{aligned} \tag{4.57}$$

4.2.2.2 Formulação do sistema $Uc = 0$

De forma análoga a realizada para o modelo de Euler-Bernoulli, substitui-se $\mathbf{X}_1(x), \mathbf{X}_2(x), \dots, \mathbf{X}_N(x)$ nas condições de contorno e de compatibilidade, e obtém-se um sistema matricial do tipo

$$Uc = 0, \quad U_{4N \times 4N} = \mathbf{B}_{4N \times 8N} \Phi_{8N \times 4N}. \quad (4.58)$$

$$c = [\mathbf{c}_{11} \ \mathbf{c}_{12} \ \mathbf{c}_{21} \ \mathbf{c}_{22} \dots \mathbf{c}_{N1} \ \mathbf{c}_{N2}]_{4N \times 1}^T.$$

Para soluções não-nulas de c , cujas componentes são vetores 2×1 , tem-se a equação característica $\Delta(\lambda) = \det(U) = 0$, cujas raízes fornecem os autovalores λ e as frequências de vibração.

4.2.2.3 Solução fundamental

Escolhe-se a base fundamental para cada segmento, já considerando translações convenientes, de forma análoga ao modelo de Euler-Bernoulli, ou seja,

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= [\mathbf{h}_1(x), \mathbf{h}'_1(x)], \\ \Psi_2(x) &= [\mathbf{h}_2(x - x_1), \mathbf{h}'_2(x - x_1)], \\ &\vdots \\ \Psi_N(x) &= [\mathbf{h}_N(x - x_{N-1}), \mathbf{h}'_N(x - x_{N-1})], \end{aligned} \quad (4.59)$$

sendo que $\mathbf{h}_j(x)$ é a solução matricial de ordem 2×2 do problema de valor inicial

$$\begin{cases} B_j \mathbf{h}_j''(x) + N_j \mathbf{h}_j'(x) + (\lambda^2 M_j + D_j) \mathbf{h}_j(x) = 0, & j = 1, \dots, N \\ B_j \mathbf{h}_j'(0) = I, \quad \mathbf{h}_j(0) = 0. \end{cases} \quad (4.60)$$

As respostas fundamentais $\mathbf{h}_j(x)$ podem ser determinadas analiticamente resolvendo três equações características dos tipos algébrica, diferencial e em diferenças [34], [35], [40], [41], [61]. Para isto, obtém-se o polinômio característico

$$P_j(s) = \det[s^2 B_j + s N_j + \lambda^2 M_j + D_j] = \sum_{k=0}^4 (b_j)_k s^{4-k} \quad (4.61)$$

e a solução $d_j(x)$ do problema de valor inicial

$$\sum_{k=0}^4 (b_j)_k d_j^{(4-k)}(x) = 0, \quad (4.62)$$

$$d_j(0) = d_j'(0) = d_j''(0) = 0, \quad (b_j)_0 d_j'''(0) = 1.$$

A partir do problema matricial de valor inicial em diferenças

$$\begin{cases} B_j(\mathbf{h}_j)_{k+2} + N_j(\mathbf{h}_j)_{k+1} + (\lambda^2 M_j + D_j)(\mathbf{h}_j)_k = 0, \\ (\mathbf{h}_j)_0 = 0, \quad B_j(\mathbf{h}_j)_1 = I, \end{cases} \quad (4.63)$$

obtém-se as matrizes $(\mathbf{h}_j)_k$, $k = 0, \dots, 3$. E então

$$\mathbf{h}_j(x) = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=0}^{k-1} (b_j)_i d_j^{(k-1-i)}(\mathbf{h}_j)_{4-k} \quad (4.64)$$

ou

$$\mathbf{h}_j(x) = \begin{pmatrix} a_j d_j(x) + b_j d_j''(x) & -s_j d_j(x) \\ s_j d_j(x) & r_j d_j(x) - s_j d_j''(x) \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

com

$$a_j = \kappa_j G_j A_j + \lambda^2 \rho_j I_j, \quad b_j = -E_j I_j, \quad (4.66)$$

$$r_j = \lambda^2 \rho_j A_j, \quad s_j = \kappa_j G_j A_j.$$

E os modos dados em (4.52), para cada segmento, são expressos da forma

$$\mathbf{X}(x) = \begin{cases} \mathbf{X}_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ \mathbf{X}_2(x), & x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{X}_N(x), & x_{N-1} < x \leq x_N = L \end{cases} \quad (4.67)$$

serão

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1(x) &= \mathbf{h}_1(x)\mathbf{c}_{11} + \mathbf{h}'_1(x)\mathbf{c}_{12}, \\
\mathbf{X}_2(x) &= \mathbf{h}_2(x - x_1)\mathbf{c}_{21} + \mathbf{h}'_2(x - x_1)\mathbf{c}_{22}, \\
&\vdots \\
\mathbf{X}_N(x) &= \mathbf{h}_N(x - x_{N-1})\mathbf{c}_{N1} + \mathbf{h}'_N(x - x_{N-1})\mathbf{c}_{N2}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

4.3 Ortogonalidade de modos em vigas segmentadas

A seguir, será estabelecida a ortogonalidade dos modos dos modelos de Euler-Bernoulli e de Timoshenko para vigas segmentadas. Por simplicidade a discussão será restrita ao caso de vigas bissegmentadas, mas pode ser estendida para outros casos seguindo os mesmos passos.

As equações de Euler-Bernoulli e Timoshenko que governam a dinâmica das vigas bissegmentadas podem ser escritas de maneira compacta

$$M\ddot{v}(t, x) + K v(t, x) = 0, \tag{4.69}$$

com

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

$$v(t, x) = \begin{pmatrix} \Pi_1(x)v_1(t, x) \\ \Pi_2(x)v_2(t, x) \end{pmatrix},$$

e sendo $\Pi_1(x) = \Pi(x, 0, x_1)$, $\Pi_2(x) = \Pi(x, x_1, L)$ definidas em termos do pulso retangular

$$\Pi(x, a, b) = Heaviside(x - a) - Heaviside(x - b), \quad a < b \tag{4.71}$$

representado na Figura 4.2.

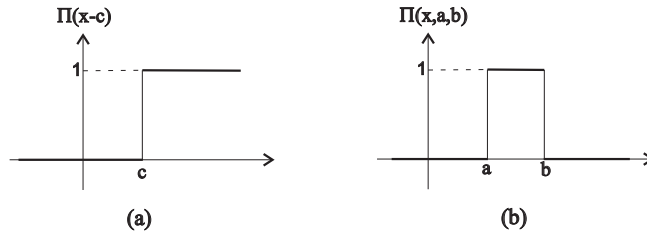


Figura 4.2: (a)Função de Heaviside (b)Pulso retangular

Em (4.70), para o modelo de Euler-Bernoulli, tem-se

$$\begin{aligned} M_1 &= \rho_1 A_1, & K_1 &= E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4}, & \mathbf{v}_1(t, x) &= u_1(t, x), \\ M_2 &= \rho_2 A_2, & K_2 &= E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}, & \mathbf{v}_2(t, x) &= u_2(t, x). \end{aligned} \quad (4.72)$$

E para o modelo de Timoshenko

$$M_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_1 I_1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} -\kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa_1 G_1 A_1 \frac{\partial}{\partial x} & -E_1 I_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa_1 G_1 A_1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 A_2 & 0 \\ 0 & \rho_2 I_2 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -\kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa_2 G_2 A_2 \frac{\partial}{\partial x} & -E_2 I_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa_2 G_2 A_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ \phi_1(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(t, x) = \begin{pmatrix} u_2(t, x) \\ \phi_2(t, x) \end{pmatrix}.$$

Assim, os modos $X(x)$, obtidos através das soluções exponenciais $\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} X(x)$ onde

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 \leq x \leq x_1 \\ X_2(x), & x_1 < x \leq L \end{cases} \quad (4.73)$$

podem ser escritos na forma matricial

$$X(x) = \begin{pmatrix} \Pi_1(x)X_1(x) \\ \Pi_2(x)X_2(x) \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Para o modelo de Euler-Bernoulli, $X_1(x)$ e $X_2(x)$ são escalares, porém para o modelo de Timoshenko tem-se que

$$X_1(x) = \begin{pmatrix} W_1(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}, \quad X_2(x) = \begin{pmatrix} W_2(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

são vetores 2×1 . E $X(x)$ é escrito matricialmente como

$$X(x) = \begin{pmatrix} \Pi_1(x)W_1(x) \\ \Pi_1(x)\varphi_1(x) \\ \Pi_2(x)W_2(x) \\ \Pi_2(x)\varphi_2(x) \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

para o modelo de Timoshenko.

Assim, substitui-se $v(t, x) = e^{\lambda t}X(x)$ em (5.1) e decorre a equação modal

$$\mathbf{K}X(x) + \lambda^2\mathbf{M}X(x) = 0. \quad (4.77)$$

É estabelecido a seguir que os autovalores no caso de vigas bissegmentadas do tipo Euler-Bernoulli com condições de contorno e de continuidade clássicas são imaginários puros, ou seja, tem-se nesses casos somente frequências naturais de vibração. Também se verifica que, sendo $X^{(r)}$ e $X^{(s)}$ autofunções correspondentes a frequências naturais distintas $\lambda_r = i\omega_r$ e $\lambda_s = i\omega_s$, respectivamente, então elas serão ortogonais.

Seja $X^*(x) = \overline{X}(x)^T$. Multiplicando por $X^*(x)$ a esquerda de (4.77), e integrando entre 0 e L , vem

$$\lambda^2 = -\frac{\int_0^L X^*(x)\mathbf{K}X(x)dx}{\int_0^L X^*(x)\mathbf{M}X(x)dx} = \quad (4.78)$$

$$= -\frac{\int_0^{x_1} X_1^*(x)\mathbf{K}_1X_1(x)dx + \int_{x_1}^L X_2^*(x)\mathbf{K}_2X_2(x)dx}{\int_0^{x_1} X_1^*(x)\mathbf{M}_1X_1(x)dx + \int_{x_1}^L X_2^*(x)\mathbf{M}_2X_2(x)dx}. \quad (4.79)$$

No caso do modelo Euler-Bernoulli, tem-se

$$\lambda^2 = -\frac{\int_0^{x_1} E_1I_1\overline{X}_1(x)X_1^{(iv)}(x)dx + \int_{x_1}^L E_2I_2\overline{X}_2(x)X_2^{(iv)}(x)dx}{\int_0^{x_1} \rho_1A_1|X_1(x)|^2dx + \int_{x_1}^L \rho_2A_2|X_2(x)|^2dx}. \quad (4.80)$$

Integrando por partes duas vezes o numerador, segue que

$$\lambda^2 = -\frac{\int_0^{x_1} E_1I_1|X_1''(x)|^2dx + \int_{x_1}^L E_2I_2|X_2''(x)|^2dx + E_1I_1B(X_1, X_1)\Big|_0^{x_1} + E_2I_2B(X_2, X_2)\Big|_{x_1}^L}{\int_0^{x_1} \rho_1A_1|X_1(x)|^2dx + \int_{x_1}^L \rho_2A_2|X_2(x)|^2dx}$$

sendo

$$B(V, U) = \overline{V}U''' - \overline{V}'U''. \quad (4.81)$$

Observa-se que os dois últimos termos do numerador se anulam para as condições de contorno e de compatibilidade mencionadas. Assim, o autovalor λ deve ser um número puramente imaginário $i\omega$, com ω denotado frequência natural.

A equação modal (4.77) se converte em

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})X = 0 \quad (4.82)$$

e as autofunções serão reais visto que \mathbf{K} e \mathbf{M} são matrizes reais.

Supõe-se que W , U são autofunções correspondentes aos autovalores $\lambda = i\omega$ e $\lambda = i\gamma$ distintos, respectivamente, ou seja

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})W = 0, \quad (4.83)$$

$$(\mathbf{K} - \gamma^2\mathbf{M})U = 0. \quad (4.84)$$

Para as condições de contorno e compatibilidade, mencionadas, se verifica que

$$\int_0^L U^T \mathbf{K} W dx = \int_0^L W^T \mathbf{K} U dx, \quad (4.85)$$

$$\int_0^L U^T \mathbf{M} W dx = \int_0^L W^T \mathbf{M} U dx,$$

e decorre

$$(\omega^2 - \gamma^2) \int_0^L U^T \mathbf{M} W dx = 0. \quad (4.86)$$

Consequentemente, *as autofunções correspondentes a autovalores distintos são ortogonais com respeito a M*. Tem-se também que

$$\int_0^L U^T \mathbf{K} W dx = 0. \quad (4.87)$$

Para uma viga uniforme de Timoshenko, a ortogonalidade tem sido considerada em situações em que as condições de contorno são de tipo clássico [61]. No caso de uma viga bissegmentada de Timoshenko, serão seguidos os mesmos passos da viga bissegmentada do tipo Euler-Bernoulli. Primeiramente, será verificada a natureza dos autovalores que originam as frequências naturais.

De (4.78), segue que o denominador

$$\int_0^{x_1} X_1^*(x) \mathbf{M}_1 X_1(x) dx + \int_{x_1}^L X_2^*(x) \mathbf{M}_2 X_2(x) dx = \int_0^{x_1} (\rho_1 A_1 |W_1|^2 + \rho_1 I_1 |\varphi_1|^2) dx + \int_{x_1}^L (\rho_2 A_2 |W_2|^2 + \rho_2 I_2 |\varphi_2|^2) dx$$

é positivo. O numerador pode ser integrado por partes resultando

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} X_1^*(x) \mathbf{K}_1 X_1(x) dx + \int_{x_1}^L X_2^*(x) \mathbf{K}_2 X_2(x) dx = \\ & = \int_0^{x_1} \left[\kappa_1 G_1 A_1 \left(|W_1'|^2 + |\varphi_1|^2 - \overline{W}_1' \varphi_1 + W_1 \overline{\varphi}_1' \right) + E_1 I_1 |\varphi_1'|^2 \right] dx + \\ & + \int_{x_1}^L \left[\kappa_2 G_2 A_2 \left(|W_2'|^2 + |\varphi_2|^2 - \overline{W}_2' \varphi_2 + W_2 \overline{\varphi}_2' \right) + E_2 I_2 |\varphi_2'|^2 \right] dx + \\ & - B(X, X) \end{aligned} \quad (4.88)$$

onde

$$\begin{aligned} B(X, X) = & \kappa_1 G_1 A_1 \overline{W}_1' (W_1' - \varphi_1) + \kappa_1 G_1 A_1 W_1 \overline{\varphi}_1 + E_1 I_1 \overline{\varphi}_1 \varphi_1' \Big|_0^{x_1} + \\ & + \kappa_2 G_2 A_2 \left(\overline{W}_2' - \varphi_2 \right) + \kappa_2 G_2 A_2 W_2 \overline{\varphi}_2 + E_2 I_2 \overline{\varphi}_2 \varphi_2' \Big|_{x_1}^L. \end{aligned} \quad (4.89)$$

O termo $B(X, X)$ se anula para combinações de condições de contorno clássicas e condições de compatibilidade sem incluir dispositivos intermediários. Assim, o autovalor λ deve ser um número puramente imaginário $i\omega$, onde ω é referido frequência natural.

A verificação da ortogonalidade dos modos é análoga a realizada com a viga bissegmentada de Euler-Bernoulli.

4.4 Vigas bi e trissegmentadas

A seguir, será considerado o trabalho analítico e experimental de Stanton e Mann [63] com vigas bissegmentadas e trissegmentadas do tipo Euler-Bernoulli. Seus resultados serão comparados com os obtidos no presente trabalho utilizando vigas do tipo Euler-Bernoulli e vigas do tipo Timoshenko. Comparam-se também os resultados obtidos através do método proposto no presente trabalho e os analiticamente obtidos por Salehi-Khojin [6] referentes a uma viga fixa-livre trissegmentada, para a qual se considera a variação da espessura do segmento intermediário.

Na seção 4.5 são apresentados resultados referentes a modelagem de vibrações livres em vigas para AFM. São considerados os modelos introduzidos no capítulo anterior, baseados em Salehi-Khojin [6] e Jih-Lian *et al.* [23]. Além desses, se considera um modelo de viga bissegmentada constituída de piezocerâmica no primeiro segmento e silício no segundo.

4.4.1 Viga bissegmentada

Considera-se a viga bissegmentada feita de alumínio com condições de contorno do tipo livre-livre, de acordo com a configuração proposta por Stanton e Mann [63], representada pela Figura 4.3.

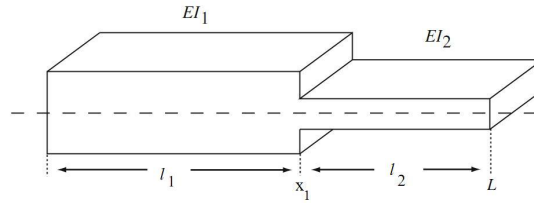


Figura 4.3: Viga bissegmentada com seção retangular, figura extraída de [63]

Utilizam-se os parâmetros descritos na Tabela 4.1. Cabe ressaltar que Stanton e Mann [63] se baseiam no método de Euler-Bernoulli, portanto o módulo de cisalhamento G e fator de forma κ , parâmetros específicos do modelo de Timoshenko, não sendo fornecidos foram estimados. Utilizou-se o valor de $\kappa = 5/6$ referente a seção transversal retangular. Calcula-se o módulo de cisalhamento da forma $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \cong 27GPa$, sendo ν o coeficiente de Poisson tabelado por material, no caso do alumínio 0,33.

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Comprimento l_1	0,254	m
Comprimento l_2	0,140	m
Largura w	0,02545	m
Espessura t_1	0,01905	m
Espessura t_2	0,00549	m
Densidade ρ	2830	Kg/m^3
Módulo de Young E	71,7	GPa
Momento de Inércia I_1	$1,4633 \times 10^{-8}$	m^4
Momento de Inércia I_2	$3,502 \times 10^{-10}$	m^4

Tabela 4.1: Parâmetros para a viga bissegmentada de Stanton [63]

Considera-se, primeiramente o modelo de Euler-Bernoulli (4.1) com condições de contorno do tipo livre-livre dadas por

Em $x = 0$	Em $x = L$
$E_1 I_1 u_1''(t, 0) = 0$	$E_2 I_2 u_2''(t, L) = 0$
$E_1 I_1 u_1'''(t, 0) = 0$	$E_2 I_2 u_2'''(t, L) = 0$

As condições de compatibilidade no ponto $x_1 = l_1$ sem a inclusão de dispositivos intermediários foram descritas matricialmente em (5.21) com $i = 1$.

Ao supor soluções exponenciais se obtém o problema de autovalor descrito em (4.13) com $j = 1, 2$. Com condições de contorno

$$\begin{array}{c|c} \text{Em } x = 0 & \text{Em } x = L \\ \hline X_1''(0) = 0 & X_2''(L) = 0 \\ X_1'''(0) = 0 & X_2'''(L) = 0 \end{array}$$

e condições de compatibilidade em $x_1 = l_1$ escritas matricialmente como

$$\mathcal{C}_{1,1}\mathbb{X}_1(x_1) = \mathcal{C}_{2,1}\mathbb{X}_2(x_1), \quad \mathbb{X}_j(x) = \begin{pmatrix} X_j(x) \\ X_j'(x) \\ X_j''(x) \\ X_j'''(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (4.90)$$

sendo $\mathcal{C}_{1,1}$ e $\mathcal{C}_{2,1}$ definidas em (4.11) com $i = 1$, para o caso bissegmentado sem dispositivos no ponto de descontinuidade.

As soluções são dadas de acordo com (4.28) para $N = 2$. Tem-se para cada segmento

$$\begin{aligned} X_1(x) &= h_1(x)c_{11} + h_1'(x)c_{12} + h_1''(x)c_{13} + h_1'''(x)c_{14}, \\ X_2(x) &= h_2(x-L)c_{21} + h_2'(x-L)c_{22} + h_2''(x-L)c_{23} + h_2'''(x-L)c_{24}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Substituindo (4.91) nas condições de contorno e de continuidade obtém-se o sistema $Uc = 0$, sendo $U = \mathbf{B}\Phi$.

A matriz \mathbf{B} é construída baseada em três conjuntos de equações. As primeiras duas linhas e as últimas duas linhas representam as condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente, e a parte central da matriz descreve as condições

de compatibilidade no ponto $x_1 = l_1$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 16} \quad (4.92)$$

com $\alpha_1 = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}$.

A matriz Φ se compõe dos elementos da base de soluções

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \mathbf{0} \\ \Phi_1(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_1) \\ \mathbf{0} & \Phi_2(L) \end{bmatrix}_{16 \times 8} \quad (4.93)$$

com

$$\Phi_j(x) = \begin{bmatrix} h_j(x - a_j) & h'_j(x - a_j) & h''_j(x - a_j) & h'''_j(x - a_j) \\ h'_j(x - a_j) & h''_j(x - a_j) & h'''_j(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) \\ h''_j(x - a_j) & h'''_j(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) & h_j^{(v)}(x - a_j) \\ h'''_j(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) & h_j^{(v)}(x - a_j) & h_j^{(vi)}(x - a_j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = L.$$

(4.94)

Agora, para o modelo de Timoshenko (4.30), as condições de contorno do tipo fixa-livre são dadas por

Em $x = 0$	Em $x = L$
$E_1 I_1 \phi_1'(t, 0) = 0$	$E_2 I_2 \phi_2'(t, L) = 0$
$\kappa_1 G_1 A_1 [u_1'(t, 0) - \phi_1(t, 0)] = 0$	$\kappa_2 G_2 A_2 [u_2'(t, L) - \phi_2(t, L)] = 0$

As condições de compatibilidade no ponto $x_1 = l_1$, sem a inclusão de dispositivos intermediários foram descritas matricialmente em (4.41) com $i = 1$ e $x_1 = l_1$.

Ao supor soluções exponenciais se obtém o problema de autovalor descrito em (4.45) com $j = 1, 2$, cujas condições de contorno se tornam

Em $x = 0$	Em $x = L$
$\varphi_1'(0) = 0$	$\varphi_2'(L) = 0$
$[W_1'(0) - \varphi_1(0)] = 0$	$[W_2'(L) - \varphi_2(L)] = 0$

E na forma matricial com $N = 2$, em (4.35)-(4.37) tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.95)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As condições de compatibilidade em $x_1 = l_1$, para o caso sem incluir dispositivos no ponto de descontinuidade, foram descritas em (4.42), sendo $N=2$ e $i = 1$ para o caso bissegmentado.

As soluções para cada segmento são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(x) &= \mathbf{h}_1(x)\mathbf{c}_{11} + \mathbf{h}'_1(x)\mathbf{c}_{12}, \\ \mathbf{X}_2(x) &= \mathbf{h}_2(x - L)\mathbf{c}_{21} + \mathbf{h}'_2(x - L)\mathbf{c}_{22}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Observa-se que \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 são matrizes 2×2 e os coeficientes \mathbf{c} são vetores 2×1 .

Substituindo (4.96) nas condições de contorno e continuidade obtém-se o sistema $Uc = 0$, sendo $U = \mathbf{B}\Phi$.

Constrói-se as matrizes \mathbf{B} e Φ de forma análoga ao modelo de Euler-Bernoulli

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2 \times 2} & \mathbf{J}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,1}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,1}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{2 \times 2} & \mathbf{Q}_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{8 \times 16}$$

e na sua forma expandida

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \beta & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 16} \quad (4.97)$$

A matriz Φ se compõe dos elementos da base de soluções

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \mathbf{0} \\ \Phi_1(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_1) \\ \mathbf{0} & \Phi_2(L) \end{bmatrix}_{16 \times 8} \quad (4.98)$$

com

$$\Phi_j(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(x - a_j) & \mathbf{h}'_j(x - a_j) \\ \mathbf{h}'_1(x - a_j) & \mathbf{h}''_1(x - a_j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \quad (4.99)$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = L.$$

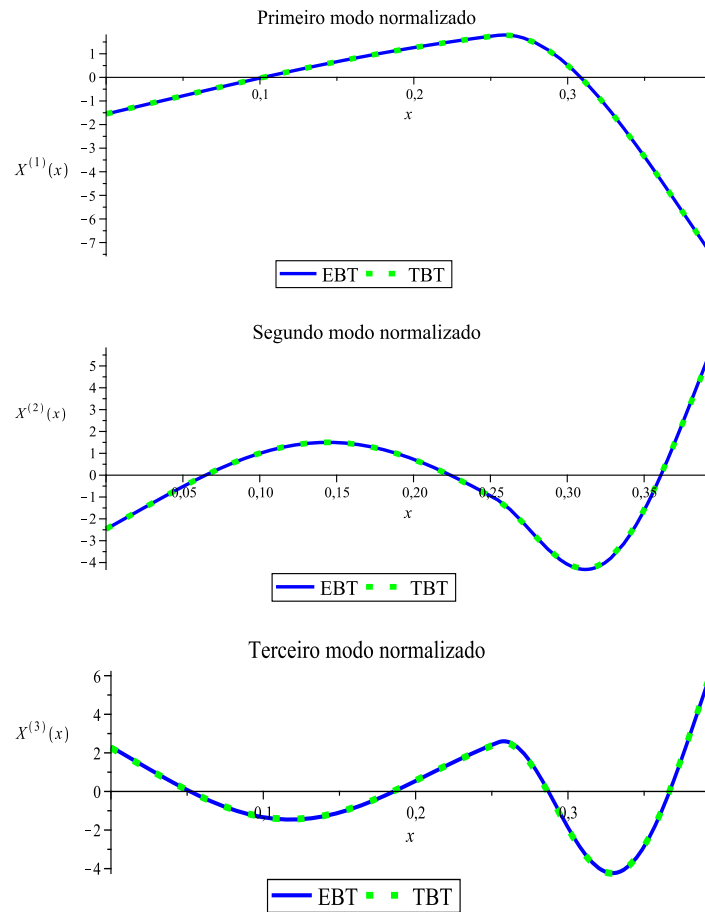


Figura 4.4: Modos de vibração EBT/TBT - viga bissegmentada livre-livre de Stanton e Mann

Comentários

A Tabela 4.2 descreve as frequências naturais de vibração obtidas pela referência [63], teórica e experimentalmente, e compara-as com as obtidas utilizando a metodologia descrita no presente trabalho para a viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli (EBT) e segundo a teoria de Timoshenko (TBT).

Na Figura 4.4 são apresentados os três primeiros modos de vibração associados às respectivas frequências descritas na Tabela 4.2. Nos gráficos apresentados, tem-se que $X^{(r)}(x)$, para o modelo de Timoshenko, corresponde a componente

Viga Livre-Livre	1ª Freq. (Hz)	2ª Freq. (Hz)	3ª Freq. (Hz)
EBT(Teórica [63])	292	1181	1804
EBT(Experimental [63])	286-291	1159-1165	1759-1771
EBT(Presente trabalho)	292,42	1181,28	1804,01
TBT(Presente trabalho)	291,77	1167,89	1775,94

Tabela 4.2: Frequências naturais de vibração - presente trabalho e [63]

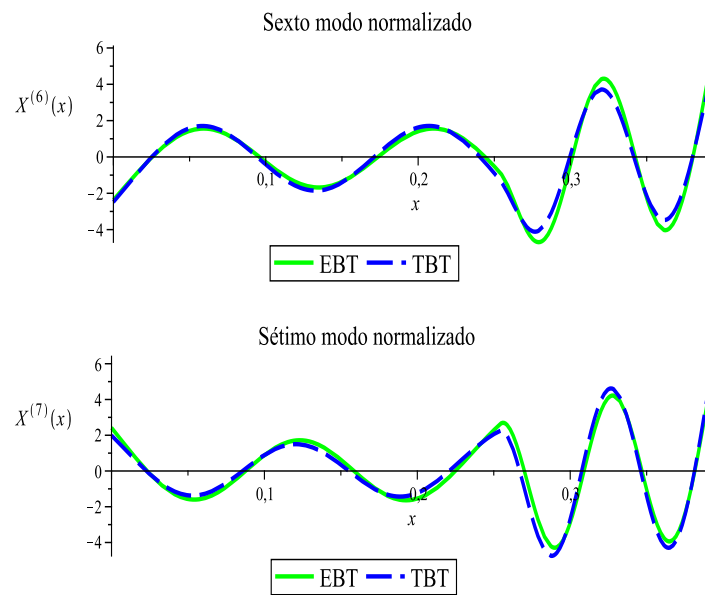


Figura 4.5: Sexto e sétimo modos de vibração EBT/TBT - viga bissegmentada livre-livre de Stanton e Mann

referente ao deslocamento transversal $u(t, x)$, dada por $W^{(r)}(x)$ e definida por partes de acordo com os segmentos da viga.

Os dados obtidos no presente trabalho concordam com os experimentais e numéricos de Stanton e Mann [63]. Observa-se que as frequências naturais referentes ao modelo de Timoshenko estão mais próximas das obtidas experimentalmente em [63]. Em relação aos modos, os três primeiros, descritos na Figura 4.4, utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko coincidem graficamente. Verificou-se que a diferença gráfica entre os modos obtidos utilizando EBT ou TBT se acentua para os modos mais altos (Figura 4.5).

4.4.2 Vigas trissegmentadas

4.4.2.1 Viga trissegmentada com massa atarrachada

Considera-se uma viga com seção transversal circular e condições de contorno do tipo livre-livre. A configuração é proposta por Stanton e Mann [63] e ilustrada na Figura 4.6. Na extremidade $x = L$ é anexado um atuador, sua massa é incluída na condição de contorno dessa extremidade.

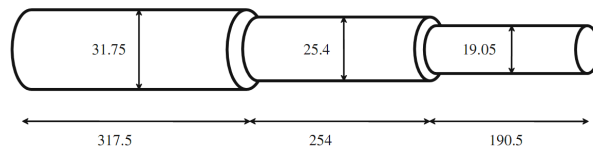


Figura 4.6: Viga trissegmentada com seção transversal circular, figura extraída de [63]

Descrevem-se na Tabela 4.3 os parâmetros utilizados, referentes ao modelo de Euler-Bernoulli.

O momento de inércia para uma viga de seção transversal circular é estimado sendo $I = \frac{\pi R^2}{4}$, sendo R o raio da seção transversal equivalente a $\frac{t}{2}$, em que t é o diâmetro da seção transversal. O fator de forma para a seção circular é aproximadamente $\kappa = \frac{6}{7}$. Utilizou-se $G_1 = G_2 = G_3 = 27,48\text{GPa}$. As condições de contorno do tipo viga livre-livre com massa anexada na extremidade direita são descritas pelas seguintes equações para o modelo de Euler-Bernoulli

Em $x = 0$	Em $x = L$
$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, 0) = 0$	$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}(t, L) = 0$
$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}(t, 0) = 0$	$E_3 I_3 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t, L) = M_t \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(t, L)$

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Comprimento l_1	0,3175	m
Comprimento l_2	0,254	m
Comprimento l_3	0,1905	m
Diâmetro t_1	0,03175	m
Diâmetro t_2	0,0254	m
Diâmetro t_3	0,01905	m
Densidade ρ	2800	Kg/m^3
Módulo de Young E	73,1	GPa
Massa anexada M_t	0,018	Kg

Tabela 4.3: Parâmetros para a viga trissegmentada de Stanton [63]

E para o modelo de Timoshenko

Em $x = 0$
$E_1 I_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(t, 0) = 0$
$\kappa_1 G_1 A_1 [\frac{\partial u_1}{\partial x}(t, 0) - \phi_1(t, 0)] = 0$
Em $x = L$
$E_3 I_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x}(t, L) = 0$
$\kappa_3 G_3 A_3 [\frac{\partial u_3}{\partial x}(t, L) - \phi_3(t, L)] = -M_t \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(t, L)$

Analogamente ao caso bissegmentado, se expressam os modos para cada segmento para o modelo de Euler-Bernoulli

$$\begin{aligned}
X_1(x) &= h_1(x)c_{11} + h_1'(x)c_{12} + h_1''(x)c_{13} + h_1'''(x)c_{14}, \\
X_2(x) &= h_2(x - l_1)c_{21} + h_2'(x - l_1)c_{22} + h_2''(x - l_1)c_{23} + h_2'''(x - l_1)c_{24}, \\
X_3(x) &= h_3(x - l_2)c_{31} + h_3'(x - l_2)c_{32} + h_3''(x - l_2)c_{33} + h_3'''(x - l_2)c_{34}.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

A matriz \mathbf{B} será composta nas duas primeiras e duas últimas linhas pelas informações sobre as condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente. A parte intermediária se refere às condições de compatibilidade nos pontos $x = l_1$ e $x = l_2$. Tem-se então

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_0]_{2 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,1}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,1}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,2}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,2}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{B}_L]_{2 \times 4} \end{bmatrix}_{12 \times 24} \quad (4.101)$$

sendo

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{M_t \lambda^2}{E_3 I_3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

A parte central da matriz \mathbf{B} se refere às condições de compatibilidade, em $x_1 = l_1$ e $x_2 = l_1 + l_2$, sem a inclusão de dispositivos intermediários, sendo expressas através das matrizes

$$\mathcal{C}_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

$$\mathcal{C}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3 I_3}{E_2 I_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_3 I_3}{E_2 I_2} \end{bmatrix}. \quad (4.104)$$

E a matriz Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi_1(l_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_3(l_2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_3(L) \end{bmatrix}_{24 \times 12}, \quad (4.105)$$

com

$$\Phi_j(x) = \begin{bmatrix} h_j(x - a_j) & h_j'(x - a_j) & h_j''(x - a_j) & h_j'''(x - a_j) \\ h_j'(x - a_j) & h_j''(x - a_j) & h_j'''(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) \\ h_j''(x - a_j) & h_j'''(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) & h_j^{(v)}(x - a_j) \\ h_j'''(x - a_j) & h_j^{(iv)}(x - a_j) & h_j^{(v)}(x - a_j) & h_j^{(vi)}(x - a_j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = l_2, \quad a_3 = L.$$

(4.106)

E para o modelo de Timoshenko, as soluções são dadas da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(x) &= \mathbf{h}_1(x)\mathbf{c}_{11} + \mathbf{h}_1'(x)\mathbf{c}_{12}, \\ \mathbf{X}_2(x) &= \mathbf{h}_2(x - l_1)\mathbf{c}_{21} + \mathbf{h}_2'(x - l_1)\mathbf{c}_{22}, \\ \mathbf{X}_3(x) &= \mathbf{h}_3(x - l_2)\mathbf{c}_{31} + \mathbf{h}_3'(x - l_2)\mathbf{c}_{32}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

E a matriz \mathbf{B} é dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2 \times 2} & \mathbf{J}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,1}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,1}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,2}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,2}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{2 \times 2} & \mathbf{Q}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (4.108)$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.109)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{M_t \lambda^2}{\kappa_3 G_3 A_3} & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

e $\mathcal{C}_{1,1}$, $\mathcal{C}_{2,1}$, $\mathcal{C}_{1,2}$ e $\mathcal{C}_{2,2}$ expressas como em (4.42), com $i = 1, 2$.

E a matriz Φ é da forma

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi_1(l_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_3(l_2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_3(L) \end{bmatrix}_{24 \times 12} \quad (4.111)$$

com

$$\Phi_j(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_j(x - a_j) & \mathbf{h}'_j(x - a_j) \\ \mathbf{h}'_j(x - a_j) & \mathbf{h}''_j(x - a_j) \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.112)$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = l_2, \quad a_3 = L.$$

A inclusão de uma massa atarrachada como um atuador modifica as condições de contorno e se espera uma diminuição da magnitude das frequências.

A Tabela 4.4 apresenta os valores obtidos pela referência, matemática e experimentalmente. Comparam-se a utilização dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko incluindo e não incluindo a massa na extremidade direita.

	1ª Freq. (Hz)	2ª Freq. (Hz)	3ª Freq. (Hz)	4ª Freq. (Hz)
Experimental [63]	212,2	547,3	1064,0	1748,2
Teórico EBT [63]	212,4	551,9	1077,6	1791,82
EBT LL	214,12	556,62	1083,63	1803,20
EBT LLM	212,38	551,95	1077,65	1791,82
TBT LL	213,41	551,73	1065,05	1752,20
TBT LLM	211,68	547,16	1059,29	1741,59

Tabela 4.4: Frequências naturais de vibração: LL - viga livre-livre; LLM - viga livre-livre com massa anexada

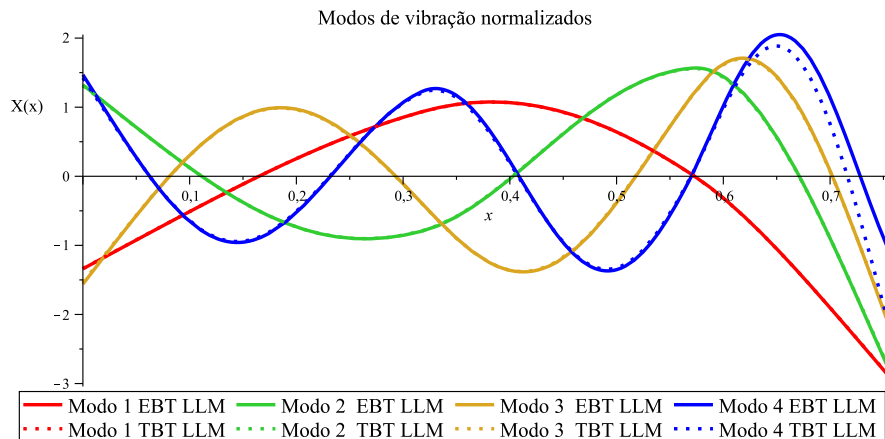


Figura 4.7: Modos de vibração EBT/TBT - viga trissegmentada de Stanton e Mann

Comentários

Novamente, utilizando o modelo de Euler-Bernoulli obtém-se valores bem próximos das frequências da referência que também se baseia nesse modelo. E as frequências referentes ao modelo de Timoshenko mais próximas das frequências experimentais de [63]. Observa-se que os modos de vibração para o modelo de Timoshenko têm duas componentes, assim como para a viga anterior, por fins comparativos com o modelo de Euler-Bernoulli, os resultados se referem à componente $W(x)$, definida por partes de acordo com os segmentos da viga.

Constata-se também que as frequências TBT tem menor magnitude que as referentes a EBT. E como era esperado, a inclusão de massa diminui a magnitude das frequências. Em relação aos modos, se verifica pela Figura 4.7 que a partir do quarto modo a diferença entre os modelos se torna graficamente mais evidente.

4.4.2.2 Viga trissegmentada fixa-livre

Considera-se a viga trissegmentada, com extremidades do tipo fixa-livre, descrita na Figura 4.8 e utilizando os parâmetros da Tabela 4.5. A configuração de viga e parâmetros é proposta por Salehi-Khojin [6].

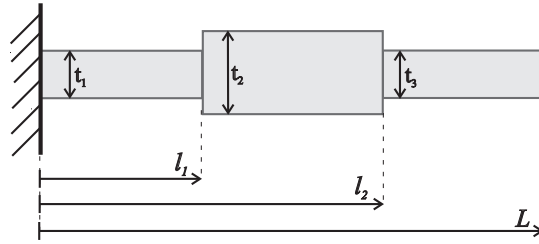


Figura 4.8: Viga fixa-livre trissegmentada

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Comprimento l_1	0,1	m
Comprimento l_2	0,2	m
Comprimento L	0,3	m
Largura w	0,01	m
Densidade ρ	7800	Kg/m^3
Módulo de Young E	200	GPa

Tabela 4.5: Parâmetros para a viga de Salehi-Khojin [6]

Os parâmetros específicos para o modelo de Timoshenko foram estimados, de modo análogo aos casos anteriores, visto que Salehi-Khojin [6] determina frequências naturais e modos de vibração baseando-se no modelo de Euler-Bernoulli.

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Módulo de cisalhamento $G_1 = G_2$	75	GPa
Fator de forma κ	5/6	

Tabela 4.6: Parâmetros para o modelo de Timoshenko

Apresentam-se resultados de acordo com as configurações descritas na Tabela 4.7, variando a espessura do segmento intermediário da viga.

Considera-se primeiramente o modelo de Euler-Bernoulli. Supondo soluções do tipo $u(t, x) = e^{\lambda t} X_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, obtém-se o problema de autovalor

$$X_j(x)^{(iv)} - \varepsilon_j^4 X_j(x) = 0, \quad \varepsilon_j^4 = -\frac{\rho_j A_j}{E_j I_j} \lambda^2, \quad (4.113)$$

	Configuração 1	Configuração 2	Configuração 3
Espessura t_1 (m)	0,001	0,001	0,001
Espessura t_2 (m)	0,001	0,002	0,003
Espessura t_3 (m)	0,001	0,001	0,001

Tabela 4.7: Configurações variando espessura central

com condições de contorno referentes ao caso fixa-livre e compatibilidade sobre o deslocamento, inclinação, momento fletor e cisalhamento nos pontos $x_1 = l_1$ e $x_2 = l_2$.

As soluções serão da forma

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 \leq x \leq x_1 \\ X_2(x), & x_1 < x \leq x_2 \\ X_3(x), & x_2 < x \leq L \end{cases} \quad (4.114)$$

com

$$\begin{aligned} X_1(x) &= c_{11}h_1(x) + c_{12}h_1'(x) + c_{13}h_1''(x) + c_{14}h_1'''(x), \\ X_2(x) &= c_{21}h_2(x - l_2) + c_{22}h_2'(x - l_2) + c_{23}h_2''(x - l_2) + c_{24}h_2'''(x - l_2), \\ X_3(x) &= c_{31}h_3(x - L) + c_{32}h_3'(x - L) + c_{33}h_3''(x - L) + c_{34}h_3'''(x - L), \end{aligned} \quad (4.115)$$

que substituídas nas condições de contorno e compatibilidade irão gerar o sistema $Uc = 0$, com $U = \mathbf{B}\Phi$. A formulação em blocos para o sistema é análoga a apresentada na seção anterior (4.101)-(4.106), com exceção das matrizes \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_L referentes às condições de contorno do tipo viga fixa-livre e, dadas por

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.116)$$

A matriz U é de ordem 12×12 , mas considerando inicialmente as condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ obtém-se que $c_{13} = c_{14} = 0$ e $c_{31} = c_{32} = 0$ e U se reduz a ordem 8×8 .

A formulação utilizando o modelo de Timoshenko é análoga a apresentada na seção anterior, sendo modificados os parâmetros e as condições de contorno

		Frequências Naturais (rad/s)			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Config. 1	Referência [6]	57,1	357,9	1002,1	1963,7
	Eule-Bernoulli	57,10	357,88	1002,07	1963,66
	Timoshenko	57,10	357,85	1001,92	1963,12
Config. 2	Referência [6]	56,4	459,5	1052,1	2642,6
	Eule-Bernoulli	56,44	459,48	1052,07	2642,56
	Timoshenko	56,44	459,43	1051,86	2641,29
Config. 3	Referência [6]	52,5	459,3	1005,5	3070,2
	Eule-Bernoulli	52,47	459,32	1005,54	3070,21
	Timoshenko	52,47	459,25	1005,24	3068,34

Tabela 4.8: Frequências naturais - configurações 1,2,3

antes livre-com massa e agora sendo do tipo viga fixa-livre. Nesse caso, em (4.108) tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.117)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz \mathbf{U} é de ordem 12×12 , mas considerando inicialmente as condições de contorno em $x = 0$ obtém-se que $c_{13} = c_{14} = 0$ e \mathbf{U} se reduz a ordem 8×8 .

Comentários

Apresentou-se resultados referentes a três configurações variando a espessura do segmento intermediário da viga trisegmentada. A Tabela 4.8 descreve as quatro primeiras frequências naturais obtidas para cada uma das configurações. A tabela demonstra a concordância entre os resultados apresentados em [6] e os obtidos no presente trabalho com o uso dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

As frequências e modos de vibração são próximas aos obtidos, utilizando o modelo de Euler-Bernoulli, pela referência [6]. Verifica-se, dos resultados das

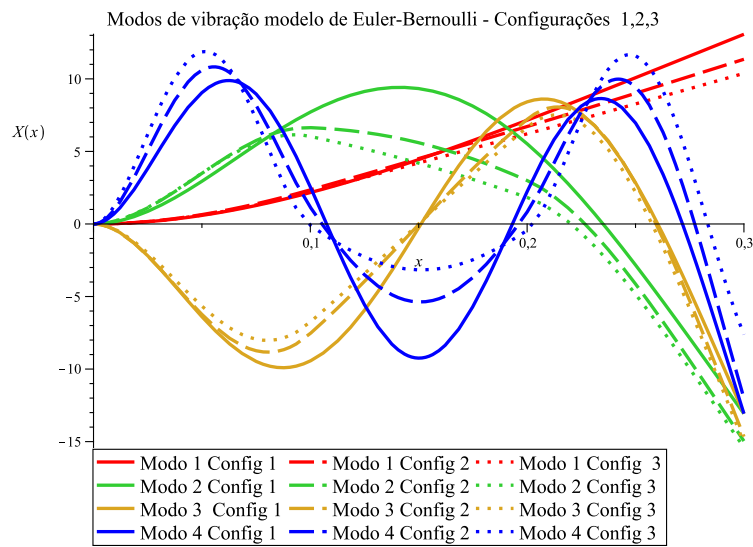


Figura 4.9: Modos de vibração - viga trissegmentada variando espessura central /EBT

configurações 2 e 3, significativas alterações em relação à configuração 1 em que a viga é uniforme. Novamente, considerou-se apenas a componente $W(x)$ no caso dos modos de vibração referentes ao modelo de Timoshenko.

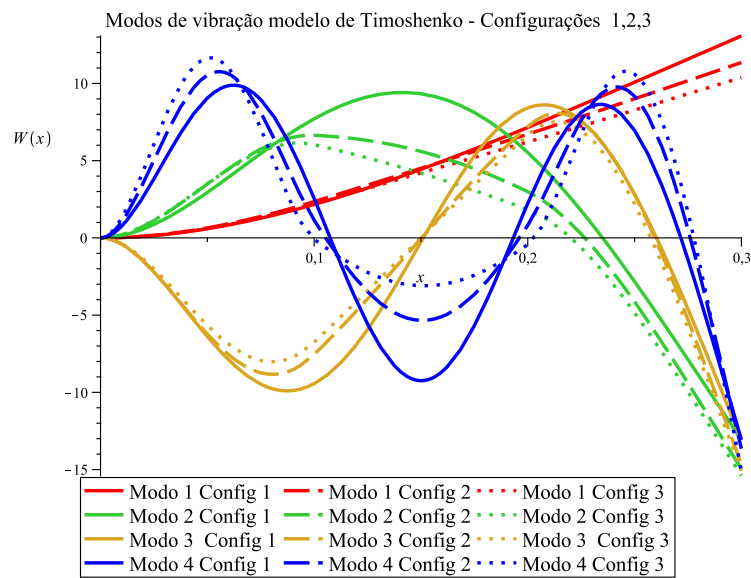


Figura 4.10: Modos de vibração - viga trissegmentada variando espessura central /TBT

4.5 Vigas fixa-livre em AFM

4.5.1 Vigas bissegmentadas

4.5.1.1 Viga piezocerâmica/silício

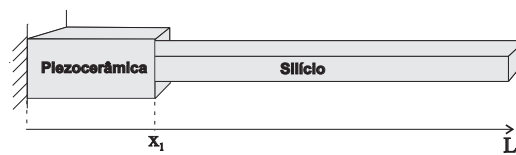


Figura 4.11: Representação viga bissegmentada

Para uma viga uniforme feita de silício são descritos nas Tabelas 4.9 e 4.10 dados obtidos na literatura referentes à microscopia de força atômica [10], [29], [47].

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Comprimento L	300×10^{-6}	m
Largura w	50×10^{-6}	m
Espessura t	3×10^{-6}	m
Área	$t \cdot w$	m^2
Densidade ρ	2330	Kg/m^3
Módulo de Young E	170	GPa
Momento de Inércia I	$\frac{w \cdot t^3}{12}$	m^4

Tabela 4.9: Parâmetros da *cantilever* em AFM para modelo de Euler-Bernoulli e de Timoshenko

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Módulo de cisalhamento G	66,4	GPa
Fator de forma κ	5/6	–

Tabela 4.10: Parâmetros da *cantilever* em AFM para o modelo de Timoshenko

A fim de aplicar a metodologia proposta nas seções iniciais deste capítulo e utilizar o modelo Timoshenko, se considera de maneira simplificada que a microviga *cantilever* é composta por dois segmentos, sendo o primeiro feito de piezocerâmica e o segundo de silício de acordo com a representação dada na Figura 4.11. Na Tabela 4.11 listam-se os parâmetros para os dois modelos EBT e TBT referentes às propriedades do primeiro e segundo segmento.

1º Segmento Piezocerâmica	2º Segmento Silício
$E_1 = 62(GPa)$	$E_2 = 170(GPa)$
$\rho_1 = 7800(kg/m^3)$	$\rho_2 = 2330(kg/m^3)$
$G_1 = 23,6(GPa)$	$G_2 = 66,4(GPa)$
$w_1 = 50 \times 10^{-6}(m)$	$w_2 = 50 \times 10^{-6}(m)$
$A_1 = t_1 w_1(m^2)$	$A_2 = t_2 w_2(m^2)$
$I_1 = \frac{w_1 t_1^3}{12}(m^4)$	$I_2 = \frac{w_2 t_2^3}{12}(m^4)$
$\kappa = 5/6$	$\kappa = 5/6$

Tabela 4.11: Parâmetros da viga bissegmentada piezocerâmica-silício

Analisa-se dois casos, no primeiro a posição do salto de descontinuidade é variada e no segundo a espessura do primeiro segmento da viga, referente a piezocerâmica, é variada.

CASO 1: *Variando a posição do salto de descontinuidade*

Considera-se a viga bissegmentada descrita anteriormente, com primeiro segmento de piezocerâmica e o segundo de silício, com espessura do primeiro segmento $t_1 = 6 \times 10^{-6} m$ e espessura do segundo segmento $t_2 = 3 \times 10^{-6} m$.

Configuração 1A - Viga Homogênea (inteiramente de silício);

Configuração 1B - Descontinuidade em $x_1 = L/4$;

Configuração 1C - Descontinuidade em $x_1 = L/2$;

Configuração 1D - Descontinuidade em $x_1 = 3L/5$.

Apresentam-se as frequências naturais obtidas com essas configurações na Tabela 4.12 e os modos de vibração são comparados na Figura 4.12.

CASO 2: *Variando espessura do primeiro segmento*

Considera-se a viga bissegmentada descrita anteriormente, com primeiro segmento de piezocerâmica e o segundo de silício, sendo a mudança de seção transversal em $x_1 = \frac{L}{4}$. Varia-se as espessuras dos segmentos de acordo com as configurações

Configuração 2A: $t_1 = 3 \times 10^{-6}$ $t_2 = 3 \times 10^{-6}$;

Configuração 2B: $t_1 = 5 \times 10^{-6}$ $t_2 = 3 \times 10^{-6}$;

Configuração 2C: $t_1 = 6 \times 10^{-6}$ $t_2 = 3 \times 10^{-6}$;

Configuração 2D: $t_1 = 7 \times 10^{-6}$ $t_2 = 3 \times 10^{-6}$.

Os resultados são apresentados na Tabela 4.13 e na Figura 4.13.

Config.	Frequências Naturais					
	Modelo	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1A	EBT	$2,8899 \times 10^5$	$1,8110 \times 10^6$	$5,0710 \times 10^6$	$9,9372 \times 10^6$	$1,6427 \times 10^7$
	TBT	$2,8896 \times 10^5$	$1,8100 \times 10^6$	$5,0644 \times 10^6$	$9,9132 \times 10^6$	$1,6363 \times 10^7$
1B	EBT	$3,9172 \times 10^5$	$2,0036 \times 10^6$	$4,3961 \times 10^6$	$8,8206 \times 10^6$	$1,5233 \times 10^7$
	TBT	$3,9033 \times 10^5$	$1,9929 \times 10^6$	$4,3669 \times 10^6$	$8,7585 \times 10^6$	$1,5033 \times 10^7$
1C	EBT	$4,2328 \times 10^5$	$1,4300 \times 10^6$	$4,3047 \times 10^6$	$7,7406 \times 10^6$	$1,3464 \times 10^7$
	TBT	$4,2002 \times 10^5$	$1,4220 \times 10^6$	$4,2610 \times 10^6$	$7,6598 \times 10^6$	$1,3196 \times 10^7$
1D	EBT	$3,8052 \times 10^5$	$1,5096 \times 10^6$	$3,8474 \times 10^6$	$8,0548 \times 10^6$	$1,2354 \times 10^7$
	TBT	$3,7735 \times 10^5$	$1,4993 \times 10^6$	$3,8081 \times 10^6$	$7,9412 \times 10^6$	$1,2154 \times 10^7$

Tabela 4.12: Frequências naturais obtidas variando o ponto x_1

Config.	Frequências Naturais					
	Modelo	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2A	EBT	$1,9472 \times 10^5$	$1,4597 \times 10^6$	$3,4020 \times 10^6$	$7,1602 \times 10^6$	$1,2011 \times 10^7$
	TBT	$1,9336 \times 10^5$	$1,4539 \times 10^6$	$3,3824 \times 10^6$	$7,1258 \times 10^6$	$1,1892 \times 10^7$
2B	EBT	$3,4177 \times 10^5$	$1,8144 \times 10^6$	$4,1831 \times 10^6$	$8,3648 \times 10^6$	$1,4293 \times 10^7$
	TBT	$3,4016 \times 10^5$	$1,8060 \times 10^6$	$4,1573 \times 10^6$	$8,3066 \times 10^6$	$1,4127 \times 10^7$
2C	EBT	$3,9172 \times 10^5$	$2,0036 \times 10^6$	$4,3961 \times 10^6$	$8,8206 \times 10^6$	$1,5233 \times 10^7$
	TBT	$3,9031 \times 10^5$	$1,9929 \times 10^6$	$4,3669 \times 10^6$	$8,7585 \times 10^6$	$1,5033 \times 10^7$
2D	EBT	$4,2682 \times 10^5$	$2,1998 \times 10^6$	$4,5791 \times 10^6$	$9,1241 \times 10^6$	$1,6060 \times 10^7$
	TBT	$4,2566 \times 10^5$	$2,1870 \times 10^6$	$4,5441 \times 10^6$	$9,0617 \times 10^6$	$1,5847 \times 10^7$

Tabela 4.13: Frequências naturais obtidas variando a espessura

Comentários

São apresentados resultados referentes às frequências naturais de vibração para cada configuração na Tabela 4.12 para variação do ponto de mudança da seção transversal e, na Tabela 4.13 para a variação da espessura do primeiro segmento. As componente $W(x)$ dos respectivos modos de vibração, associados a tais frequências, considerando o modelo de Timoshenko, são apresentados nas Figuras 4.12 e 4.13. Os modos de vibração considerando o modelo de Euler-Bernoulli foram omitidos por apresentarem comportamento similar aos do modelo de Timoshenko para baixas frequências.

Como era esperado, as diferentes configurações, modificando a espessura do primeiro segmento e posicionamento do ponto de mudança da seção transversal, alteram de forma significativa as frequências e modos de vibração. Como já constatado anteriormente, as frequências obtidas utilizando o modelo de Timoshenko tem menor magnitude em relação às obtidas com o modelo de Euler-Bernoulli, tal resultado indica, de acordo com [78], que os efeitos de cisalhamento e inércia rotatória, considerados no modelo de Timoshenko, levam à redução dos valores das frequências naturais. Os modos de vibração apresentam o mesmo comportamento gráfico para ambos os modelos, Euler-Bernoulli e Timoshenko, e diferentes configurações.

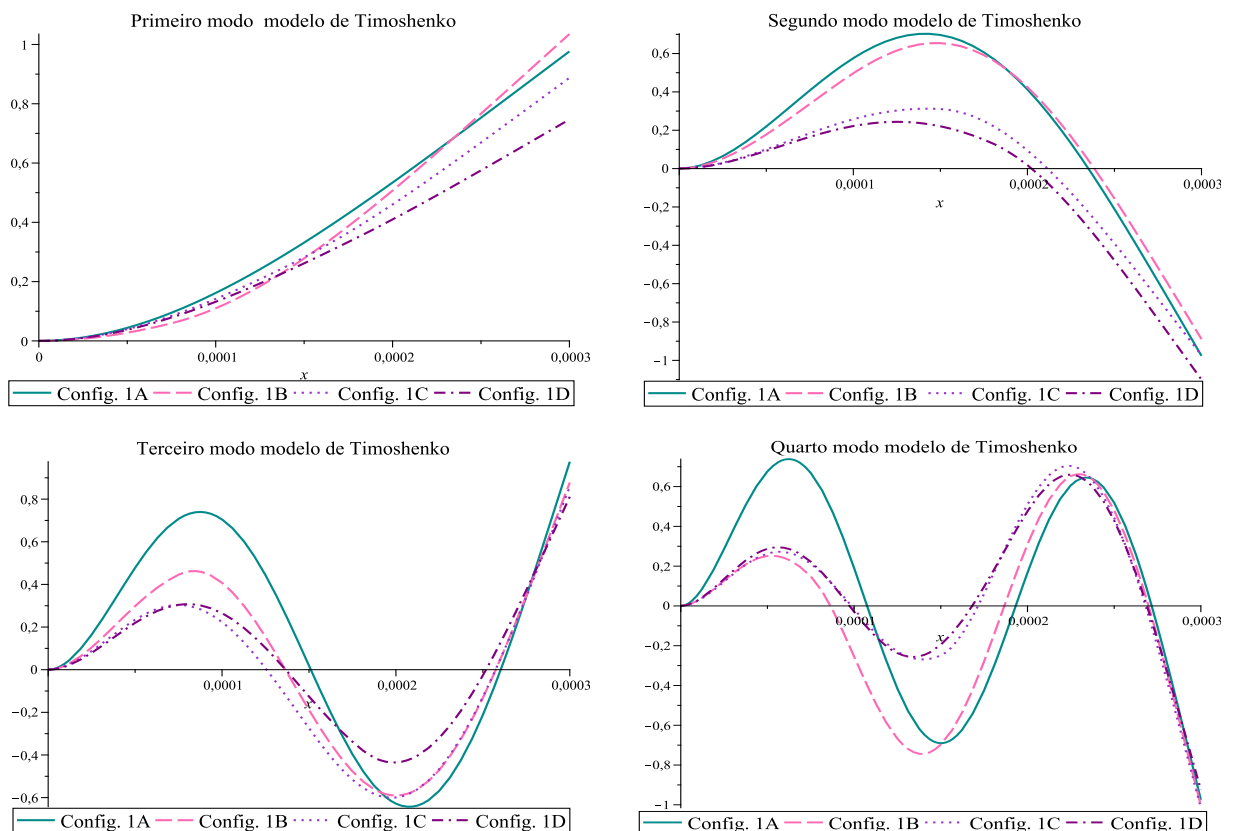


Figura 4.12: Modos de vibração TBT variando ponto de descontinuidade - viga piezo/silício

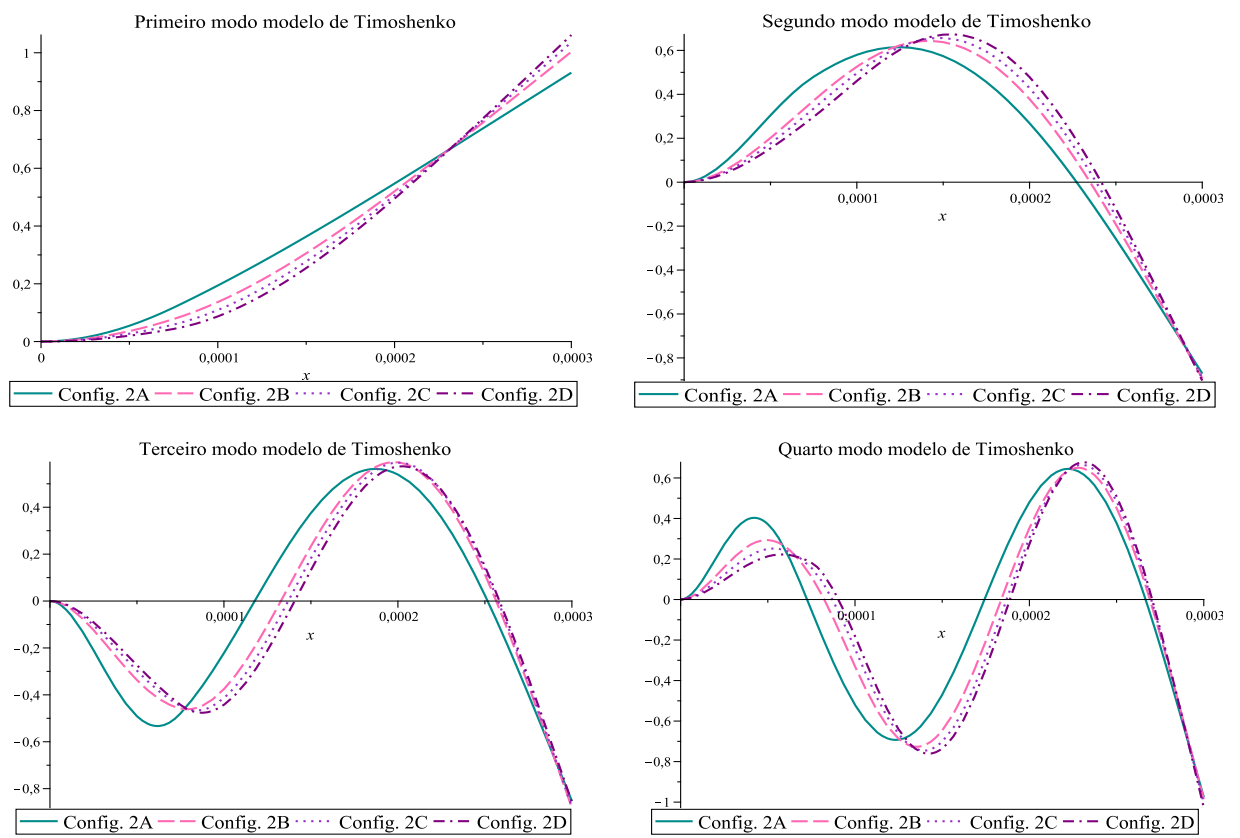


Figura 4.13: Modos de vibração TBT variando a espessura - viga piezo/silício

4.5.1.2 Modelo 2 - Viga de Jih-Lian et al. da seção 3.2.1.2

Considera-se as equações descritas em (3.46) para cada região da viga

$$\begin{aligned} \rho_j A_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(t, x) + E_j I_j \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} &= 0, \\ j = 1 \text{ para } 0 < x < l_p, \text{ e,} \\ j = 2 \text{ para } l_p < x < l_b, \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\rho_1 A_1 = 2\rho_p A_p + \rho_b A_b, \quad E_1 I_1 = 2E_p I_p + E_b I_b,$$

$$\rho_2 A_2 = \rho_b A_b, \quad E_2 I_2 = E_b I_b,$$

$$A_p = t_p w_p, \quad A_b = 2t_b w_b,$$

$$I_p = \int_0^{w_p} \int_{t_b}^{t_p+t_b} z^2 dz dy, \quad I_b = \int_0^{w_b} \int_{-t_b}^{t_b} z^2 dz dy.$$

Com as seguintes condições de contorno

Em $x = 0$

$$u_1(t, 0) = 0, \quad u_{1x}(t, 0) = 0,$$

Em $x = l_b$

$$\begin{aligned} E_b I_b u_{2xx}(t, l_b) &= -ml[u_{2tt}(t, l_b) + lu_{2xtt}(t, l_b)] + \\ &\quad -cl[u_t(t, l_b) + lu_{xt}(t, l_b)] - kl[u_2(t, l_b) + lu_{2x}(t, l_b)] + fl, \\ E_b I_b u_{2xxx}(t, l_b) &= m[u_{2tt}(t, l_b) + lu_{2xtt}(t, l_b)] + \\ &\quad + c[u_t(t, l_b) + lu_{xt}(t, l_b)] + k[u_2(t, l_b) + lu_{2x}(t, l_b)] - f. \end{aligned} \quad (4.119)$$

E condições de continuidade e transição em $x = l_p$

$$u_1(t, l_p) = u_2(t, l_p),$$

$$u_{1x}(t, l_p) = u_{2x}(t, l_p),$$

$$-\left[\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} - \frac{h_{31}^2 A_p (t_p + 2t_b)^2}{2E_2 I_2 \beta_{33}} \right] u_{1xx}(t, l_p) + u_{2xx}(t, l_p) = m_v,$$

$$u_{1xxx}(t, l_p) = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} u_{2xxx}(t, l_p),$$

(4.120)

onde $m_v = (t_p + 2t_b)h_{31} \frac{V_{cc}w_p}{\beta_{33}}$ é o momento fletor induzido pela tensão elétrica externa V_{cc} .

Supõe-se que as soluções são do tipo $u_j(t, x) = e^{\lambda t} X_j(x)$, $j = 1, 2$, que substituídas em (4.119) geram o seguinte problema de autovalor

$$X_j(x)^{(iv)} - \beta_j^4 X_j(x) = 0, \quad 0 < x < l_b, \quad \beta_j^4 = -\frac{\rho_j A_j}{E_j I_j} \lambda^2. \quad (4.121)$$

Com as condições de contorno, continuidade e equilíbrio

$$X_1(0) = 0,$$

$$X_1'(0) = 0,$$

$$X_1(l_p) = X_2(l_p),$$

$$X_1'(l_p) = X_2'(l_p),$$

$$\gamma X_1''(l_p) + X_2''(l_p) = m_v, \quad \gamma = -\left[\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} - \frac{h_{31}^2 A_p (t_p + 2t_b)^2}{2\beta_{33} E_2 I_2} \right], \quad (4.122)$$

$$X_1'''(l_p) - \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} X_2'''(l_p) = 0,$$

$$l\mathcal{A}X_2(l_b) + l^2\mathcal{A}X_2'(l_b) + E_2 I_2 X_2''(l_b) - fl = 0,$$

$$-\mathcal{A}X_2(l_b) - l\mathcal{A}X_2'(l_b) + E_2 I_2 X_2''(l_b) + f = 0,$$

com $\mathcal{A} = (m\lambda^2 + c\lambda + k)$.

Resolve-se (4.121) supondo $c = 0$, $m_v = 0$ e $f = 0$. Da metodologia apresentada nas seções anteriores, as soluções serão definidas da forma

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 \leq x < l_p \\ X_2(x), & l_p < x \leq l_b \end{cases} \quad (4.123)$$

com

$$X_1(x) = c_{11}h_1(x) + c_{12}h_1'(x) + c_{13}h_1''(x) + c_{14}h_1'''(x), \quad (4.124)$$

$$X_2(x) = c_{21}h_2(x - L) + c_{22}h_2'(x - L) + c_{23}h_2''(x - L) + c_{24}h_2'''(x - L).$$

Substituindo (4.124) nas condições de contorno e continuidade se obtém o sistema $Uc = 0$, sendo $U = \mathbf{B}\Phi$.

$$\mathbf{c} = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{14} \ c_{21} \ c_{22} \ c_{23} \ c_{24}]^T,$$

$\mathbf{B}_{8 \times 16}$, $\Phi_{16 \times 8}$, e então \mathbf{U} será de ordem 8×8 .

Ao considerar inicialmente as condições de contorno em $x = 0$, obtém-se que $c_{13} = c_{14} = 0$. Então \mathbf{U} se reduz para ordem 6×6 . Tem-se a seguinte formulação em blocos com as reduções já mencionadas

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} [\mathcal{C}_{1,1}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,1}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{B}_L]_{2 \times 4} \end{bmatrix}, \quad (4.125)$$

sendo

$$\mathcal{C}_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{2,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \end{bmatrix}, \quad (4.126)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} l\mathcal{A} & l^2 \mathcal{A}L & E_2 I_2 & 0 \\ -\mathcal{A} & -l\mathcal{A} & 0 & E_2 I_2 \end{bmatrix}, \quad (4.127)$$

e a matriz Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(l_p) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_p) \\ \mathbf{0} & \Phi_2(l_b) \end{bmatrix}_{12 \times 6}, \quad (4.128)$$

com

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) & h_1'(x) \\ h_1''(x) & h_1'''(x) \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(x) = \begin{bmatrix} h_2(x-l_b) & h_2'(x-l_b) & h_2''(x-l_b) & h_2'''(x-l_b) \\ h_2^{(iv)}(x-l_b) & h_2^{(v)}(x-l_b) & h_2^{(vi)}(x-l_b) & h_2^{(vii)}(x-l_b) \end{bmatrix}.$$

Para soluções não-nulas de \mathbf{c} , se obtém a equação característica $\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{U}) = 0$, cujas soluções são as frequências associadas aos modos de vibração $X(x)$.

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Módulo de Young E_p	63	GPa
Módulo de Young E_b	12,21	GPa
Densidade ρ_p	7600	Kg/m^3
Densidade ρ_b	7500	Kg/m^3
h_{31}	$7,182 \times 10^8$	N/C
β_{33}	$6,369 \times 10^6$	Vm/C
Comprimento l_p	8,00	mm
Comprimento l_b	69,94	mm
Largura w	3,45	mm
Espessura t_p	0,5	mm
Espessura t_b	0,5	mm

Tabela 4.14: Parâmetros para a viga bissegmentada de Jih-Lian *et al.*[23]

Com exceção do parâmetro l , relativo ao comprimento da ponteira piramidal anexada na extremidade direita da viga, os demais são fornecidos em [23] e listados na Tabela 4.14.

Compara-se na Tabela 4.15 as três primeiras frequências obtidas considerando ou não a massa e a mola. Nas Figuras 4.14 e 4.15 comparam-se os modos normalizados para tais configurações.

Freq. (Hz)	$m = 0,0001Kg$ $k = 171,6N/m$ [23]	$m = 0,0001Kg$ $k = 171,6N/m$	$m = 0,0001Kg$ $k = 0$	$m = 0$ $k = 171,6N/m$	$m = 0$ $k = 0$
ω_1	110	106,65	48,92	117,38	55,76
ω_2	250	319,73	304,00	378,25	352,35
ω_3	650	853,07	848,61	1006,03	994,08

Tabela 4.15: Comparativo das frequências naturais para diferentes configurações

Comentários

Observa-se que a inclusão de massa provoca uma diminuição na magnitude das frequências, e a inclusão da mola tem efeito inverso, aumentando a magnitude das frequências. Essas são as conclusões principais obtidas em [23] analisando o problema adimensional. Os modos também são alterados pela inclusão desses dispositivos (Figuras 4.14 e 4.15).

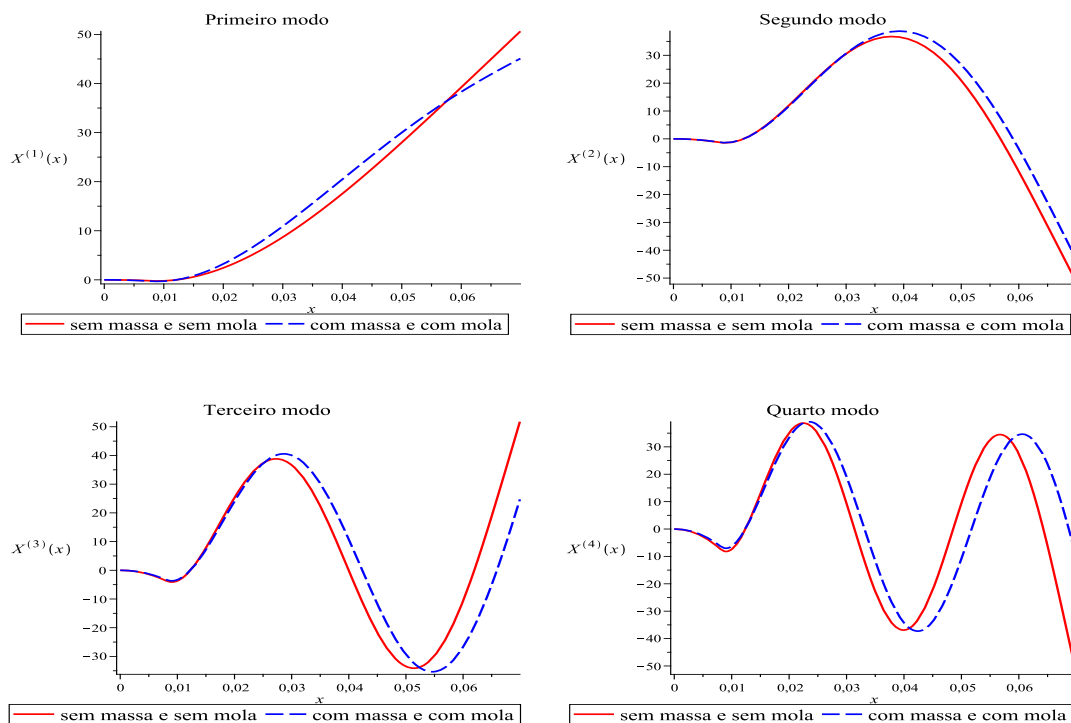


Figura 4.14: Viga EBT bissegmentada fixa sem e com dispositivo massa-mola

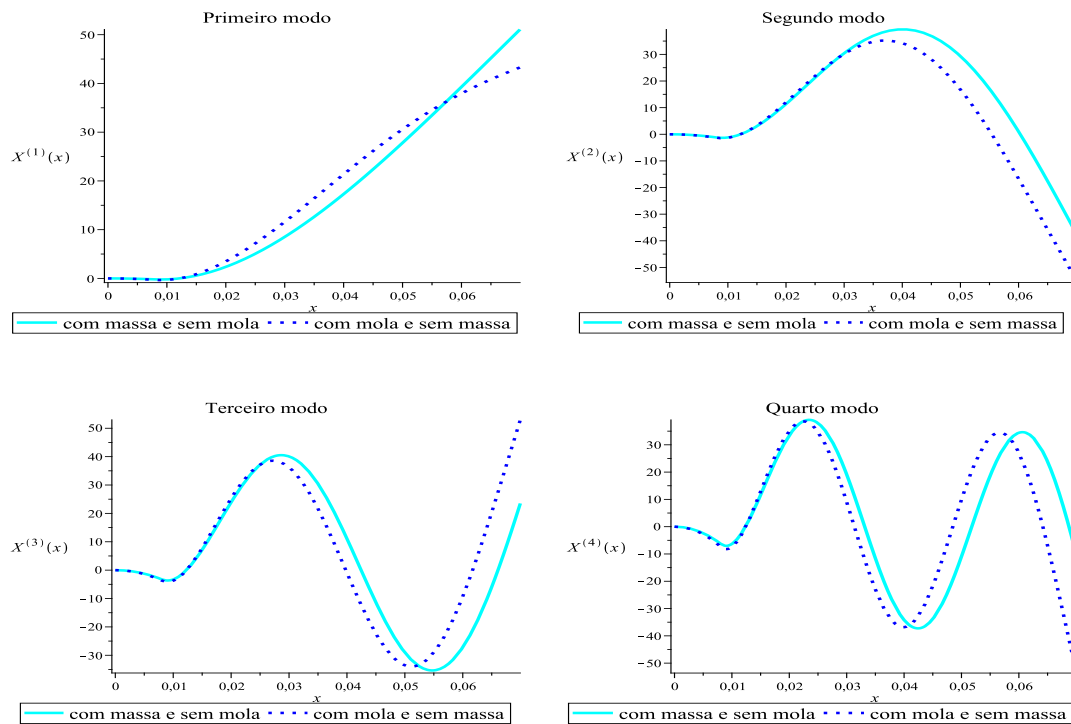


Figura 4.15: Viga EBT fixa-livre excluindo massa ou mola

4.5.2 Viga trissegmentada

4.5.2.1 Viga de Salehi-Khojin da seção 3.2.1.1

Para análise das vibrações livres considera-se a equação (3.11) que descreve o modelo, desprezando o amortecimento $c(x)$ e o momento $M_p(t, x)$. Tem-se então

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.129)$$

A variação dos parâmetros conforme os segmentos da viga foi descrita em (3.12)-(3.14). Utilizam-se os valores fornecidos em [6] e descritos na Tabela 4.16.

Parâmetro	Valor Numérico	Unidade
Comprimento L	486	μm
Comprimento L_1	325	μm
Comprimento L_2	360	μm
Módulo de Young E_b	105	GPa
Módulo de Young E_p	104	GPa
Densidade ρ_b	2330	Kg/m^3
Densidade ρ_p	6390	Kg/m^3
Largura w_{b1}	250	μm
Largura w_{b2}	55	μm
Largura w_p	130	μm
Espessura t_b	4	μm
Espessura t_p	4	μm

Tabela 4.16: Parâmetros para a viga trisegmentada de Salehi-Khojin [6]

Supondo soluções do tipo $u(t, x) = e^{\lambda t} X_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, obtém-se o problema de autovalor

$$X_j(x)^{(iv)} - \varepsilon_j^4 X_j(x) = 0, \quad \varepsilon_j^4 = -\frac{\rho_j A_j}{E_j I_j} \lambda^2, \quad (4.130)$$

com condições de contorno referentes ao caso fixa-livre e continuidade sobre o deslocamento, inclinação, momento fletor e cisalhamento nos pontos $x_1 = l_1$ e $x_2 = l_2$.

As soluções serão da forma

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 \leq x \leq l_1 \\ X_2(x), & l_1 < x \leq l_2 \\ X_3(x), & l_2 < x \leq L \end{cases} \quad (4.131)$$

com

$$\begin{aligned} X_1(x) &= c_{11} h_1(x) + c_{12} h_1'(x) + c_{13} h_1''(x) + c_{14} h_1'''(x), \\ X_2(x) &= c_{21} h_2(x - l_2) + c_{22} h_2'(x - l_2) + c_{23} h_2''(x - l_2) + c_{24} h_2'''(x - l_2), \\ X_3(x) &= c_{31} h_3(x - L) + c_{32} h_3'(x - L) + c_{33} h_3''(x - L) + c_{34} h_3'''(x - L). \end{aligned} \quad (4.132)$$

Para o caso viga fixa-livre do modelo de Euler-Bernoulli as condições de contorno em $x = 0$ ($X_1(0) = 0$ e $X_1'(0) = 0$) implicam $c_{13} = c_{14} = 0$, e a condição

livre em $x = L$ ($X_3''(L) = 0$ e $X_3'''(L) = 0$), juntamente com a escolha conveniente da base transladada no terceiro segmento, implicam $c_{31} = c_{32} = 0$. Tem-se então

$$\begin{aligned} X_1(x) &= c_{11}h_1(x) + c_{12}h_1'(x), \\ X_2(x) &= c_{21}h_2(x - l_2) + c_{22}h_2'(x - l_2) + c_{23}h_2''(x - l_2) + c_{24}h_2'''(x - l_2), \\ X_3(x) &= c_{33}h_3''(x - L) + c_{34}h_3'''(x - L), \end{aligned} \quad (4.133)$$

que substituídas nas condições de contorno e continuidade irão gerar o sistema $Uc = 0$, com $U = \mathbf{B}\Phi$. Utilizando a formulação em blocos com as reduções mencionadas

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} [\mathcal{C}_{1,1}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,1}]_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathcal{C}_{1,2}]_{4 \times 4} & -[\mathcal{C}_{2,2}]_{4 \times 4} \end{bmatrix}_{8 \times 16} \quad (4.134)$$

com $\mathcal{C}_{1,1}$, $\mathcal{C}_{2,1}$, $\mathcal{C}_{1,2}$ e $\mathcal{C}_{2,2}$ dadas como em (4.103) e (4.104).

A matriz Φ também se reduz, sendo

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(x_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2(x_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_3(x_2) \end{bmatrix}_{16 \times 8}, \quad (4.135)$$

com

$$\Phi_1(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) & h_1'(x) \\ h_1'(x) & h_1''(x) \\ h_1''(x) & h_1'''(x) \\ h_1'''(x) & h_1^{(iv)}(x) \end{bmatrix}, \quad \Phi_3(x) = \begin{bmatrix} h_3''(x - L) & h_3'''(x - L) \\ h_3'''(x - L) & h_2^{(iv)}(x - L) \\ h_3^{(iv)}(x - L) & h_3^{(v)}(x - L) \\ h_3^{(v)}(x - L) & h_3^{(vi)}(x - L) \end{bmatrix}, \quad (4.136)$$

e $\Phi_2(x)$ dada da forma usual descrita em (4.106) para $j=2$.

A matriz U seria de ordem 12×12 , mas considerando inicialmente as condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ se obteve $c_{13} = c_{14} = 0$ e $c_{31} = c_{32} = 0$ e U tornou-se de ordem 8×8 . As frequências são obtidas da equação característica $\Delta(\lambda) = \det(U) = 0$ e descritas na Tabela 4.17.

Freq. (KHz)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Experimental [6]	52,3	203,0	382,5	–	–	–
Presente trabalho	47,3	202,7	376,9	860,6	1370,2	1924,4

Tabela 4.17: Frequências naturais de vibração para a viga de Salehi-Khojin - experimental [6] e presente trabalho

Comentários

As seis primeiras frequências naturais são descritas na Tabela 4.17. As três primeiras são comparadas de maneira satisfatória com as obtidas experimentalmente e apresentadas por Salehi-Khojin [6], [7]. Os seis primeiros modos de vibração associados às suas respectivas frequências são descritos na Figura 4.16, sendo que utilizam-se cores e estilos de linha para cada uma das partes do modo de vibração, de acordo com os segmentos da viga: linha tracejada azul refere-se ao primeiro segmento, linha vermelha sólida ao segundo segmento e linha pontilhada roxa ao terceiro segmento.

A escala de medida das amplitudes dos modos é coerente com o problema, sendo que a maior sensibilidade da ponta da viga é observada pela maior amplitude obtida em x correspondente a extremidade final da viga.

Os modos serão utilizados na seção 5.3.2 na aproximação da resposta forçada.

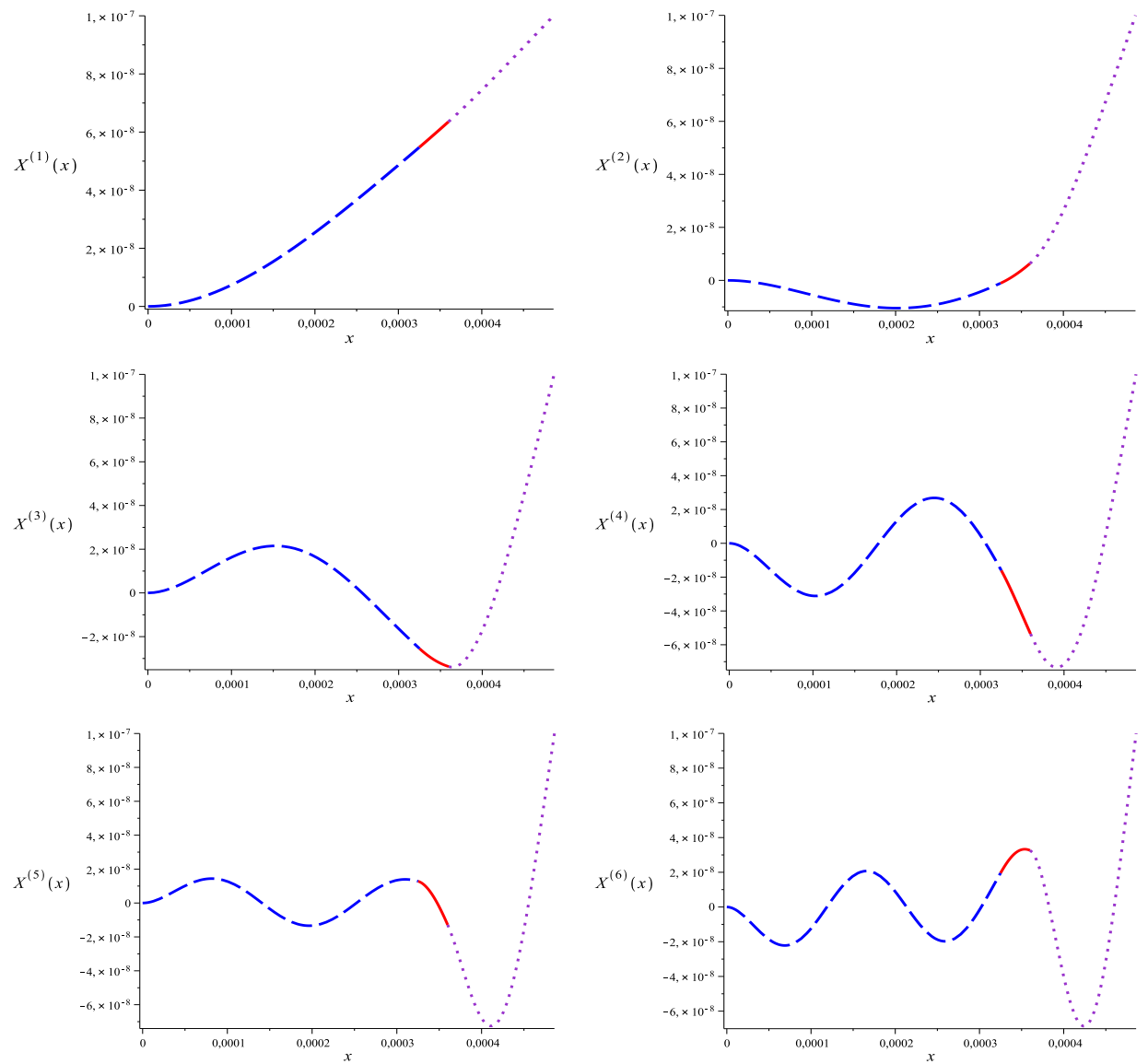


Figura 4.16: Seis primeiros modos de vibração da viga de Salehi-Khojin

5 VIBRAÇÕES FORÇADAS EM VIGAS SEGMENTADAS

As equações de Euler-Bernoulli e Timoshenko que governam a dinâmica de uma viga forçada uniforme, podem ser dadas na forma matricial compacta

$$M\ddot{\mathbf{v}}(t, x) + K\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{F}, 0 < x < L, t > 0, \quad (5.1)$$

onde para a teoria de Euler-Bernoulli tem-se que

$$M = \rho A, \quad K = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$\mathbf{v}(t, x) = u(t, x)$ é o deslocamento transversal e \mathbf{F} é a carga transversal distribuída. No modelo de Timoshenko, tem-se os coeficientes matriciais

$$M = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{pmatrix},$$

sendo as componentes u, ϕ, f, g de

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ \phi(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t, x) = \begin{pmatrix} f(t, x) \\ g(t, x) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

os deslocamentos transversal e rotacional, a carga transversal e o momento, respectivamente.

A resposta dinâmica do sistema (5.1) tem sido determinada em termos da resposta impulso ou função de Green de valor inicial $h(t, x, \xi)$ e calculada com o uso do método de Galerkin [1], [24], [32], [36], [39], [41], [58].

Neste capítulo, serão consideradas vibrações forçadas em vigas segmentadas usando os resultados existentes para vigas uniformes. Pela sua importância em microscopia de força atômica e por simplicidade, será desenvolvido o caso para

vigas bissegmentadas. No final do capítulo a abordagem é estendida para o caso da viga trisegmentada de Salehi-Khojin (*Modelo 1* da seção 3.2.1.1) cujas frequências e modos foram determinados na seção 4.5.2.1.

5.1 A resposta impulso em vigas uniformes

A resposta impulso de (5.1) é obtida do problema de valor inicial com condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t, x, \xi) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t, x, \xi) &= \mathbf{0}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < \xi < L, \quad t > 0, \\ \mathbf{h}(0, x, \xi) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}\mathbf{h}_t(0, x, \xi) = \delta(x - \xi)\mathbf{I}, \\ \mathbf{A}\mathbf{h}(t, 0, \xi) + \mathbf{J}\mathbf{h}_x(t, 0, \xi) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}\mathbf{h}(t, L, \xi) + \mathbf{Q}\mathbf{h}_x(t, L, \xi) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde, para o modelo de Euler-Bernoulli \mathbf{I} é a unidade e para o modelo de Timoshenko \mathbf{I} denota a matriz identidade 2×2 . Resulta que $\mathbf{h}(t - \tau, x, \xi)$ atua como um fator integrante no método da equação adjunta de Lagrange para o problema não-homogêneo de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t, x) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t, x) &= \mathbf{F}(t, x), \quad 0 < x < L, \quad 0 < \xi < L, \quad t > 0, \\ \mathbf{v}(0, x) &= \mathbf{v}_o(x), \quad \mathbf{v}_t(0, x) = \mathbf{v}_1(x), \\ \mathbf{A}\mathbf{v}(t, 0) + \mathbf{J}\mathbf{v}_x(t, 0) &= \mathbf{f}_1(t), \\ \mathbf{F}\mathbf{v}(t, L) + \mathbf{Q}\mathbf{v}_x(t, L) &= \mathbf{f}_2(t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Multiplicando (5.3) por $\mathbf{h}(t - \tau, x, \xi)$ e integrando por partes, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) &= \int_0^t \left[\int_0^L (\mathbf{h}_t(\tau, x, \xi)\mathbf{M}\mathbf{v}_o(\xi) + \mathbf{h}(\tau, x, \xi)\mathbf{M}\mathbf{v}_1(\xi)) d\xi \right] d\tau \\ &+ \int_0^t \left[\int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi)\mathbf{f}(\tau, \xi)d\xi \right] d\tau + J(\mathbf{v}, \mathbf{h}) \Big|_0^L \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde J é um termo que contém efeitos da resposta impulso com valores de \mathbf{v} nos pontos extremos da viga. Para uma viga com condições de contorno homogêneas o termo J se anula.

Pode-se observar que a resposta forçada, corresponde a condições iniciais nulas em (5.4), envolve a convolução da resposta impulso matricial com forçantes.

Na prática, quando é calculada a integral de convolução para a resposta forçada, tem-se $\mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}_h(t, x) + \mathbf{v}_p(t, x)$ onde $\mathbf{v}_h(t, x)$ é uma vibração livre introduzida pelo sistema e cujos valores iniciais são desconhecidos a priori. Resulta que estes valores são fornecidos pela resposta permanente $\mathbf{v}_p(t, x)$ que pode ser determinada por outros meios [33], [35], [36].

5.1.1 A resposta frequência

A transformada de Laplace de $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ com respeito ao tempo t é denotada por $\mathbf{H}(s, x, \xi)$ e referida como resposta transferência matricial. $\mathbf{H}(s, x, \xi)$ satisfaz

$$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{H}(s, x, \xi) = \delta(x - \xi)\mathbf{I}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < \xi < L, \quad (5.5)$$

$$A\mathbf{H}(s, 0, \xi) + J\mathbf{H}_x(s, 0, \xi) = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

$$F\mathbf{H}(s, L, \xi) + Q\mathbf{H}_x(s, L, \xi) = \mathbf{0}.$$

Por exemplo, forçantes harmônicos do tipo

$$f(t, x) = e^{i\omega t}v(x), \quad (5.7)$$

fornecem respostas harmônicas

$$\mathbf{v}_p(t, x) = e^{i\omega t}\mathbf{H}(i\omega)v(x), \quad (5.8)$$

onde

$$\mathbf{H}(i\omega)v(x) = \int_0^L \mathbf{H}(i\omega, x, \xi)v(\xi)d\xi. \quad (5.9)$$

Em particular, para uma força concentrada no ponto $x = a$

$$f(t, x) = e^{i\omega t}v(x)\delta(x - a), \quad (5.10)$$

resulta

$$\mathbf{v}_p(t, x) = e^{i\omega t}\mathbf{H}(i\omega, x, a)v(a). \quad (5.11)$$

5.2 Vigas bissegmentadas forçadas

Considera-se o modelo forçado para uma viga segmentada

$$M\ddot{v}(t, x) + Kv(t, x) = F, 0 < x < L, t > 0, \quad (5.12)$$

onde os coeficientes e variáveis do sistema foram definidos no Capítulo 4 em (4.70). Os modos de vibração, autofunções obtidas do problema de autovalor associado a (5.1), quando se supõe soluções exponenciais, para uma viga bissegmentada são expressos por

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x), & 0 \leq x \leq x_1 \\ X_2(x), & x_1 < x \leq L \end{cases} \quad (5.13)$$

ou escritos de maneira conveniente

$$X(x) = \begin{pmatrix} \Pi_1(x)X_1(x) \\ \Pi_2(x)X_2(x) \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

ou, simplesmente, quando não houver ambiguidade, na forma matricial simples

$$X(x) = \begin{pmatrix} X_1(x) \\ X_2(x) \end{pmatrix}.$$

No modelo de Euler-Bernoulli, $X_1(x)$ e $X_2(x)$ são escalares, porém para o para o modelo de Timoshenko tem-se que

$$X_1(x) = \begin{pmatrix} W_1(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}, \quad X_2(x) = \begin{pmatrix} W_2(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

são vetores 2×1 .

Consideram-se no sistema forçado (5.12), as condições iniciais

$$v(0, x) = \begin{pmatrix} v_1(0, x) \\ v_2(0, x) \end{pmatrix} = v^0(x), \quad v_t(0, x) = \begin{pmatrix} (v_1)_t(0, x) \\ (v_2)_t(0, x) \end{pmatrix} = v^1(x). \quad (5.16)$$

Observa-se que, para uma viga bissegmentada, $\mathbf{v}^0(x)$ e $\mathbf{v}^1(x)$ são vetores 2×1 no caso do modelo de Euler-Bernoulli e 4×1 no modelo de Timoshenko, com condições de contorno para o modelo de Euler-Bernoulli descritas em (4.3)

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{u}_0(t, 0) = 0, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{B}_L \mathbf{u}_L(t, L) = 0,$$

e para o modelo de Timoshenko

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_1(t, 0) + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{v}_2(t, L) + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x}(t, L) = 0. \quad (5.19)$$

As condições de compatibilidade no ponto intermediário x_1 foram dadas de modo geral, para o modelo de Euler-Bernoulli em (4.7)

$$\mathcal{C}_{1,1} \mathbf{u}(t, x_1^-) = \mathcal{C}_{2,1} \mathbf{u}(t, x_1^+), \quad (5.20)$$

com as matrizes $\mathcal{C}_{1,1}$ e $\mathcal{C}_{2,1}$ definidas em (4.8) de modo a ter

- continuidade no deslocamento e giro em x_1 ,
- equilíbrio no momento e no cisalhamento em x_1 .

Em particular, para uma viga do tipo fixa-livre segundo o modelo de Euler-Bernoulli, tem-se que as condições de contorno

Em $x = 0$	Em $x = L$
$\mathbf{v}_1(t, 0) = u_1(t, 0) = 0$	$\mathbf{v}_2''(t, L) = u_2''(t, L) = 0$
$\mathbf{v}_1'(t, 0) = u_1'(t, 0) = 0$	$\mathbf{v}_2'''(t, L) = u_2'''(t, L) = 0$

e as condições de compatibilidade quando não houverem nem suporte e nem dispositivos intermediários foram dadas em (4.11)

I- Deslocamento

$$u_1(t, x_1) = u_2(t, x_1).$$

II- Giro

$$u'_1(t, x_1) = u'_2(t, x_1).$$

III- Momento Fletor

$$u''_1(t, x_1) = \alpha_1 u''_2(t, x_1), \quad \alpha_1 = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}.$$

IV- Cisalhamento

$$u'''_1(t, x_1) = \alpha_1 u'''_2(t, x_1).$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t, x_1) \\ u'_1(t, x_1) \\ u''_1(t, x_1) \\ u'''_1(t, x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2(t, x_1) \\ u'_2(t, x_1) \\ u''_2(t, x_1) \\ u'''_2(t, x_1) \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Tem-se similarmente, para uma viga fixa-livre segundo o modelo de Timoshenko, as seguintes condições de contorno

$$\mathbf{A}v(t, 0) + \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{F}v_2(t, L) + \mathbf{Q} \frac{\partial v_2}{\partial x}(t, L) = 0, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As condições de compatibilidade, quando não houverem nem suporte e nem dispositivos intermediários, foram dadas em (4.42)

I- Deslocamento

$$u_1(t, x_1) = u_2(t, x_1).$$

II- Giro

$$\phi_1(t, x_1) = \phi_2(t, x_1).$$

III- Momento Fletor

$$\phi'_1(t, x_1) = \alpha_1 \phi'_2(t, x_1), \quad \alpha_1 = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}.$$

IV- Cisalhamento

$$u'_1(t, x_1) - \phi_1(t, x_1) = \beta_1 u'_2(t, x_1) - \beta_1 \phi_2(t, x_1), \quad \beta_1 = \frac{\kappa_2 G_2 A_2}{\kappa_1 G_1 A_1}.$$

E de forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t, x_1) \\ \phi_1(t, x_1) \\ u'_1(t, x_1) \\ \phi'_1(t, x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -\beta_1 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2(t, x_1) \\ \phi_2(t, x_1) \\ u'_2(t, x_1) \\ \phi'_2(t, x_1) \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

5.2.1 Resposta forçada via método espectral

A resposta impulso para uma viga bissegmentada fixa-livre pode ser representada espectralmente supondo que os modos de vibração

$$\{X^{(1)}(x), X^{(2)}(x), \dots, X^{(n)}(x), \dots\}$$

formam um conjunto ortogonal completo de autofunções [49], [53]. Escreve-se a resposta dinâmica como

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X^{(n)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{Q}(t), \quad (5.25)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T(t) &= \left[q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t) \quad \dots \right]^T, \\ \mathbf{X}(x) &= \left[X^{(1)}(x) \quad X^{(2)}(x) \quad \dots \quad X^{(n)}(x) \quad \dots \right], \end{aligned} \quad (5.26)$$

e os $q_n(t)$ são coeficientes temporais a serem determinados. Substituindo (5.25) em (5.1), multiplicando pela esquerda por $\mathbf{X}^T(x)$ e integrando entre 0 e L , segue

$$\left(\int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} dx \right) \ddot{\mathbf{Q}}(t) + \left(\int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} dx \right) \mathbf{Q}(t) = \int_0^L \mathbf{X}^T(x) \mathbf{F}(x) dx. \quad (5.27)$$

Assumindo que os modos estão normalizados com respeito a \mathbf{M} e utilizando o fato que para cada modo $\mathbf{K} X^{(j)}(x) = \omega_j^2 \mathbf{M} X^{(j)}(x)$, decorre

$$\ddot{\mathbf{Q}}(t) + \Omega^2 \mathbf{Q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5.28)$$

onde

$$\mathbf{f}(t) = \int_0^L \mathbf{X}^T(x) \mathbf{F}(x) dx$$

e

$$\Omega^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2, \dots)$$

é a matriz espectral. A equação anterior está desacoplada e fornece a solução geral

$$\mathbf{Q}(t) = h'(t) \mathbf{Q}(0) + h(t) \mathbf{Q}'(0) + \int_0^t h(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (5.29)$$

com

$$h(t) = \text{diag} \left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}, \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}, \dots, \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}, \dots \right) \quad (5.30)$$

e

$$\mathbf{Q}(0) = \int_0^L \mathbf{X}^T(\xi) \mathbf{M} \mathbf{v}(0, \xi) d\xi, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{Q}'(0) = \int_0^L \mathbf{X}^T(\xi) \mathbf{M} \mathbf{v}'(0, \xi) d\xi, \quad (5.32)$$

onde ' denota derivação com relação a variável t .

Substituindo $\mathbf{Q}(t)$ em (5.25), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) &= \int_0^L \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(t, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{v}(0, \xi) d\xi + \int_0^L \mathbf{h}(t, x, \xi) \mathbf{M} \mathbf{v}'(0, \xi) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(t, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (5.33)$$

onde no contexto das vigas segmentadas, considera-se a *função de Green* de valor inicial ou resposta impulso do sistema, definida por partes

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t, x, \xi), & 0 \leq x \leq x_1 \\ \mathbf{h}_2(t, x, \xi), & x_1 < x \leq L \end{cases} \quad (5.34)$$

com

$$\mathbf{h}_1(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_1^{(n)}(x) (X_1^{(n)}(\xi))^T \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{h}_2(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_2^{(n)}(x) (X_2^{(n)}(\xi))^T \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}. \quad (5.36)$$

Assim, a resposta forçada correspondente a condições iniciais nulas, pode ser escrita

$$\mathbf{v}(t, x) = \int_0^t \left[\int_0^{x_1} \mathbf{h}_1(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}_1(\tau, \xi) d\xi + \int_{x_1}^L \mathbf{h}_2(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}_2(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau. \quad (5.37)$$

Para efeitos de cálculo, a resposta impulso pode ser aproximada pelo método de Galerkin usando um número finito de modos [20], [32].

5.3 Simulações para vibrações forçadas em vigas com materiais piezoelétricos

Nesta seção serão consideradas para vibrações forçadas de vigas bissegmentadas, forçantes harmônicos no tempo

$$F(t, x) = e^{i\omega t}v(x), \quad (5.38)$$

e de amplitude $v(x)$. As amplitudes espaciais serão escolhidas como sendo dos tipos básicos seguintes:

CASO 1 $v(x) = Fo$ (constante),

CASO 2 $v(x) = Fo\delta(x - a)$ (força concentrada),

CASO 3 $v(x) = Fo(Heaviside(x - a) - Heaviside(x - b))$ (pulso).

Observa-se que para vigas bissegmentadas do tipo Euler-Bernoulli, Fo é um vetor 2×1 e para vigas bissegmentadas do tipo Timoshenko, Fo é um vetor 4×1 .

Apresenta-se também o caso forçado da viga trissegmentada, utilizando o modelo de Euler-Bernoulli, introduzido na seção 3.2.1.1 e cujos modos e frequências foram determinados na seção 4.5.2.1. Nesse caso, $F(t, x) = \frac{\partial^2 M_p(t, x)}{\partial x^2}$, sendo $M_p(t, x)$ o momento induzido pela camada piezoelétrica no primeiro segmento e, estendido a toda a viga através de uma função de Heaviside.

5.3.1 O modelo de Timoshenko forçado para a viga bissegmentada piezocerâmica/silício

Considera-se a viga introduzida na seção 4.5.1.1, composta por dois segmentos, um de piezocerâmica e outro de silício.

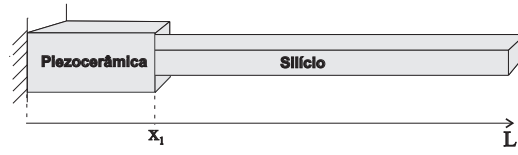


Figura 5.1: Viga bissegmentada piezocerâmica-silício

Toma-se a espessura do primeiro segmento $t_1 = 6 \times 10^{-6}m$, e a espessura do segundo segmento $t_2 = 3 \times 10^{-6}m$, com $x_1 = \frac{L}{4}$ (Config 1B/ Config 2C da seção 4.5.1.1). Para a determinação das respostas forçadas serão utilizados os modos de vibração obtidos na seção 4.5.1.1 para tal configuração.

5.3.1.1 Amplitude espacial constante e posição variável

Comparam-se os casos em que uma forçante de amplitude espacial constante atua apenas no primeiro segmento com o caso em que sua atuação se estende a toda viga. Assim, para uma viga do tipo Euler-Bernoulli, tem-se, as forçantes

$$\begin{array}{cc}
 \text{Caso 1A-EBT} & \text{Caso 1B-EBT} \\
 F = e^{i\tilde{\omega}_5 t} \begin{cases} 0,01, & 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ 0,00, & \frac{L}{4} < x \leq L \end{cases} & , \quad F = e^{i\tilde{\omega}_5 t} \begin{cases} 0,01, & 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ 0,01, & \frac{L}{4} < x \leq L \end{cases} , \quad (5.39)
 \end{array}$$

onde $\tilde{\omega}_5 = 1,5033 \times 10^7 rad/s$, corresponde à quinta frequência obtida nas configurações 1B e 2C da seção 4.5.1.1. Para uma viga do tipo Timoshenko, desconsiderando

o momento externo $g(t, x)$, as forçantes são

$$\begin{array}{c}
 \text{Caso 1A-TBT} \\
 \mathbf{F} = e^{i\tilde{\omega}_5 t} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,00 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix}, \frac{L}{4} < x \leq L \end{array} \right.
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{c}
 \text{Caso 1B-TBT} \\
 \mathbf{F} = e^{i\tilde{\omega}_5 t} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,00 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix}, \frac{L}{4} < x \leq L \end{array} \right.
 \end{array}
 .$$

(5.40)

Comentários

Os resultados se referem à parte real dos termos forçantes e são apresentados graficamente no final da seção, nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

Na Tabela 5.1 as respostas forçadas $\mathbf{v}(t, x)$, formadas pelas componentes deslocamento transversal $u(t, x)$ e deslocamento angular $\phi(t, x)$, para ambas situações, 1A-TBT e 1B-TBT, com x variando de 0 a L metros e t de 0 a 1 segundo. Na segunda coluna da tabela, gráficos fixando valores para a variável t e mantendo x de 0 a L . O comportamento gráfico apresentado se refere ao quinto modo de vibração correspondente a quinta frequência natural de vibração, cujo valor foi utilizado como frequência da forçante de entrada.

Na Tabela 5.2 são comparados ambos os casos, 1A-TBT e 1B-TBT, fixando a variável t e considerando primeiramente a frequência de entrada correspondente à quarta frequência natural de vibração e após à quinta frequência natural.

E na Tabela 5.3 são consideradas posições fixas da variável x ($x = 10^{-20}$, $x = 5L/8$, $x = L/8$, $x = L/4$, $x = L/2$ e $x = L$) com o tempo t de 0 a 5×10^{-6} segundos, de modo comparativo entre as configurações 1A-TBT e 1B-TBT.

5.3.1.2 *Amplitude espacial constante e frequências de entrada diferentes para cada segmento*

Nesse caso considera-se valores correspondentes à quarta e quinta frequência natural de vibração como frequências de entrada para cada um dos segmentos, respectivamente.

Caso 1C-TBT

$$F = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0,01e^{i\tilde{\omega}_4 t} \\ 0,00 \end{pmatrix}, & 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \begin{pmatrix} 0,01e^{i\tilde{\omega}_5 t} \\ 0,01 \end{pmatrix}, & \frac{L}{4} < x \leq L \end{cases}, \quad (5.41)$$

onde $\tilde{\omega}_4 = 8,7585 \times 10^6 \text{rad/s}$, $\tilde{\omega}_5 = 1,5033 \times 10^7 \text{rad/s}$.

Comentários

Resultados gráficos se referem a parte real dos termos forçantes e são apresentados no final da seção nas Tabelas 5.4 e 5.5 Na Tabela 5.4 gráficos para as componentes da resposta forçada $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ com x variando de 0 a L metros e t de 0 a 1 segundo. Na segunda coluna da tabela, gráficos fixando valores para a variável t e mantendo x de 0 a L . O comportamento gráfico apresentado se refere ao quarto e quinto modo de vibração correspondente às respectivas frequências naturais de vibração, cujos valores foram utilizados como frequências do termo forçante.

Na Tabela 5.5 são consideradas posições fixas da variável x ($x = 10^{-20}$, $x = 5L/8$, $x = L/8$, $x = L/4$, $x = L/2$ e $x = L$) com o tempo t de 0 a 5×10^{-6} segundos.

5.3.1.3 Força concentrada com posição variável

Neste caso, é assumido que a forçante anterior está localizada num ponto a da viga, no primeiro segmento $0 < a \leq x_1$, e/ou no segundo segmento $x_1 < a \leq L$. Para uma viga do tipo Euler-Bernoulli, tem-se

$$\mathbf{F} = e^{i\tilde{\omega}_4 t} \delta(x - a) \begin{cases} 0, 01, & 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ 0, 01, & \frac{L}{4} < x \leq L \end{cases}, \quad (5.42)$$

Para a viga do tipo Timoshenko, sem considerar momento externo, as forçantes são

$$\mathbf{F} = e^{i\tilde{\omega}_4 t} \delta(x - a) \begin{cases} \begin{pmatrix} 0, 01 \\ 0, 00 \end{pmatrix}, & 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \begin{pmatrix} 0, 01 \\ 0, 00 \end{pmatrix}, & \frac{L}{4} < x \leq L \end{cases} \quad (5.43)$$

, onde $\tilde{\omega}_4 = 8,7585 \times 10^6 \text{ rad/s}$ corresponde à quarta frequência obtida nas configurações 1B e 2C da seção 4.5.1.1.

Comparam-se três casos:

Caso 2A-TBT: Forçante apenas no primeiro segmento ($a = \frac{L}{8}$),

Caso 2B-TBT: Forçante apenas no segundo segmento ($a = \frac{5L}{8}$),

Caso 2C-TBT: ($a = \frac{L}{8}$ e $a = \frac{5L}{8}$).

Comentários

Resultados gráficos são apresentados nas Tabelas 5.6 e 5.7 e referem-se à parte real dos termos forçantes. Na Tabela 5.6 a componente $u(t, x)$ para os três

casos (2A, 2B e 2C), sendo que na segunda coluna da tabela são apresentadas as componentes ao considerar a variável t com valores fixos.

Na Tabela 5.7, são apresentados, de maneira comparativa, para valores fixos de x , as configurações 2A-TBT (força concentrada somente no primeiro segmento), 2B-TBT (força concentrada somente no segundo segmento) e 2C-TBT (força concentrada em ambos segmentos). Verifica-se que o deslocamento transversal $u(t, x)$ tem maior amplitude no caso 2B-TBT, em todas as posições x consideradas na nessa tabela.

5.3.1.4 Amplitude espacial como um pulso retangular

No caso de indentação ou nanolitografia, é de interesse utilizar o AFM como um nanodispositivo que permite fazer sulcos sobre placas de materiais. Nesta situação, é útil observar o comportamento da microviga quando a amplitude espacial é um pulso retangular. De maneira genérica, para a viga segmentada do tipo Timoshenko, tem-se as forçantes

Para pulso no início da viga

Caso 3A-TBT

$$F = e^{i\tilde{\omega}_4 t} \Pi(x, 0, \frac{L}{8}) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,00 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \begin{pmatrix} 0,00 \\ 0,00 \end{pmatrix}, \frac{L}{4} < x \leq L \end{array} \right. \quad (5.44)$$

Para pulso no final da viga

Caso 3B-TBT

$$F = e^{i\widetilde{\omega}_4 t} \Pi(x, \frac{7L}{8}, L) \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0,00 \\ 0,00 \end{array} \right), 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \left(\begin{array}{c} 0,01 \\ 0,00 \end{array} \right), \frac{L}{4} < x \leq L \end{array} \right. \quad (5.45)$$

Juntando os dois casos anteriores

Caso 3C-TBT

$$F = e^{i\widetilde{\omega}_4 t} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0,01\Pi(x, 0, \frac{L}{8}) \\ 0,00 \end{array} \right), 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \\ \left(\begin{array}{c} 0,01\Pi(x, \frac{7L}{8}, L) \\ 0,00 \end{array} \right), \frac{L}{4} < x \leq L \end{array} \right. \quad (5.46)$$

Observa-se que $\Pi(x, a, b)$ descreve um pulso retangular e foi definida em 4.71.

Comentários

Os resultados gráficos se referem a parte real dos termos forçantes e podem ser visualizados nas Tabelas 5.8 e 5.9. Na primeira coluna da Tabela 5.8 apresenta-se a componente $u(t, x)$ da resposta forçada para as três diferentes configurações variando o posicionamento do pulso retangular: 3A-TBT (pulso somente no início da viga), 3B-TBT (pulso somente no final da viga) e 3C-TBT (pulso no início e final da viga). Na segunda coluna considera-se a componente $u(t, x)$ com

valores fixos para a variável t . Novamente observa-se que o quinto modo de vibração foi ativado pela frequência de entrada corresponder à quinta frequência natural de vibração.

Na Tabela 5.9 compara-se a componente $u(t, x)$ das três configurações, considerando valores fixos para a variável x ($x = 10^{-20}$, $x = L/8$, $x = L/4$, $x = L/2$, $x = 5L/8$ e $x = L$) com t de 0 a 3×10^{-6} segundos.

Nas Tabelas 5.10 e 5.11 são apresentados resultados considerando a frequência de entrada $\tilde{\omega} = 2,5 \times 10^3 \text{ rad/s}$, a qual não coincide com frequências naturais da configuração da viga utilizada. Na Tabela 5.10 as componentes $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ para o caso 3A-TBT e componente $u(t, x)$ para o caso 3B-TBT, o caso 3C-TBT é omitido devido a similariedade com o caso 3B-TBT. Na segunda coluna, $u(t, x)$ para valores fixos da variável t , e x de 0 a L . Na Tabela 5.11 comparam-se as componentes $u(t, x)$ das configurações 3A-TBT, 3B-TBT e 3C-TBT para valores fixos da variável x . Os casos 3B-TBT e 3C-TBT coincidem graficamente para os valores de x considerados.

5.3.2 O modelo de Euler-Bernoulli forçado para a viga trissegmentada de Salehi-Khojin

Os modos de vibração para o caso livre e não amortecido foram obtidos na seção 4.5.2.1 e podem ser normalizados com relação a \mathbf{M} de maneira que

$$\left[\int_0^{l_1} \rho_1 A_1 (X_1(x))^2 dx + \int_{l_1}^{l_2} \rho_2 A_2 (X_2(x))^2 dx + \int_{l_2}^L \rho_3 A_3 (X_3(x))^2 dx \right]^{1/2} = 1. \quad (5.47)$$

Estendendo a metodologia apresentada nas seções anteriores desse capítulo, a solução de (3.11) é aproximada por

$$u(t, x) \simeq \sum_{j=1}^n q_j(t) X^{(j)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{Q}(t), \quad (5.48)$$

sendo $X^{(j)}(x)$ os modos normalizados do problema homogêneo satisfazendo as condições de contorno, e $q_j(t)$ são coeficientes temporais a serem determinados. Foram utilizados, na aproximação (5.48) os cinco primeiros modos de vibração normalizados, logo $n = 5$.

Para condições iniciais nulas a resposta forçada é dada por

$$u(t, x) = \int_0^t \left[\int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau \quad (5.49)$$

$$\text{onde } F(t, x) = \frac{\partial^2 M_p(t, x)}{\partial x^2},$$

$$M_p(t, x) = M_{po}(t) [1 - Heaviside(x - l_1)],$$

$$M_{po}(t) = \frac{1}{2} w_p E_p d_{31} (t_b + t_p) v(t),$$

$$\frac{\partial^2 M_p(t, x)}{\partial x^2} = -M_{po}(t) \delta'(x - l_1).$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t [-M_{po}(\tau) \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \delta'(\xi - l_1) d\xi] d\tau \\ &= \int_0^t M_{po}(\tau) \mathbf{h}'(t - \tau, x, l_1) d\tau. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Comentários

Nas simulações, foram utilizadas aproximações para a derivada da função delta. Os parâmetros utilizados foram os fornecidos por [6], com exceção da tensão elétrica $v(t)$ e constante piezoelétrica h_{31} que tiveram seus valores estimados de acordo com a literatura correspondente [4]. Resultados gráficos referentes a resposta forçada são apresentados nas Tabelas 5.12 e 5.13. A amplitude obtida é coerente com a escala nanométrica em questão.

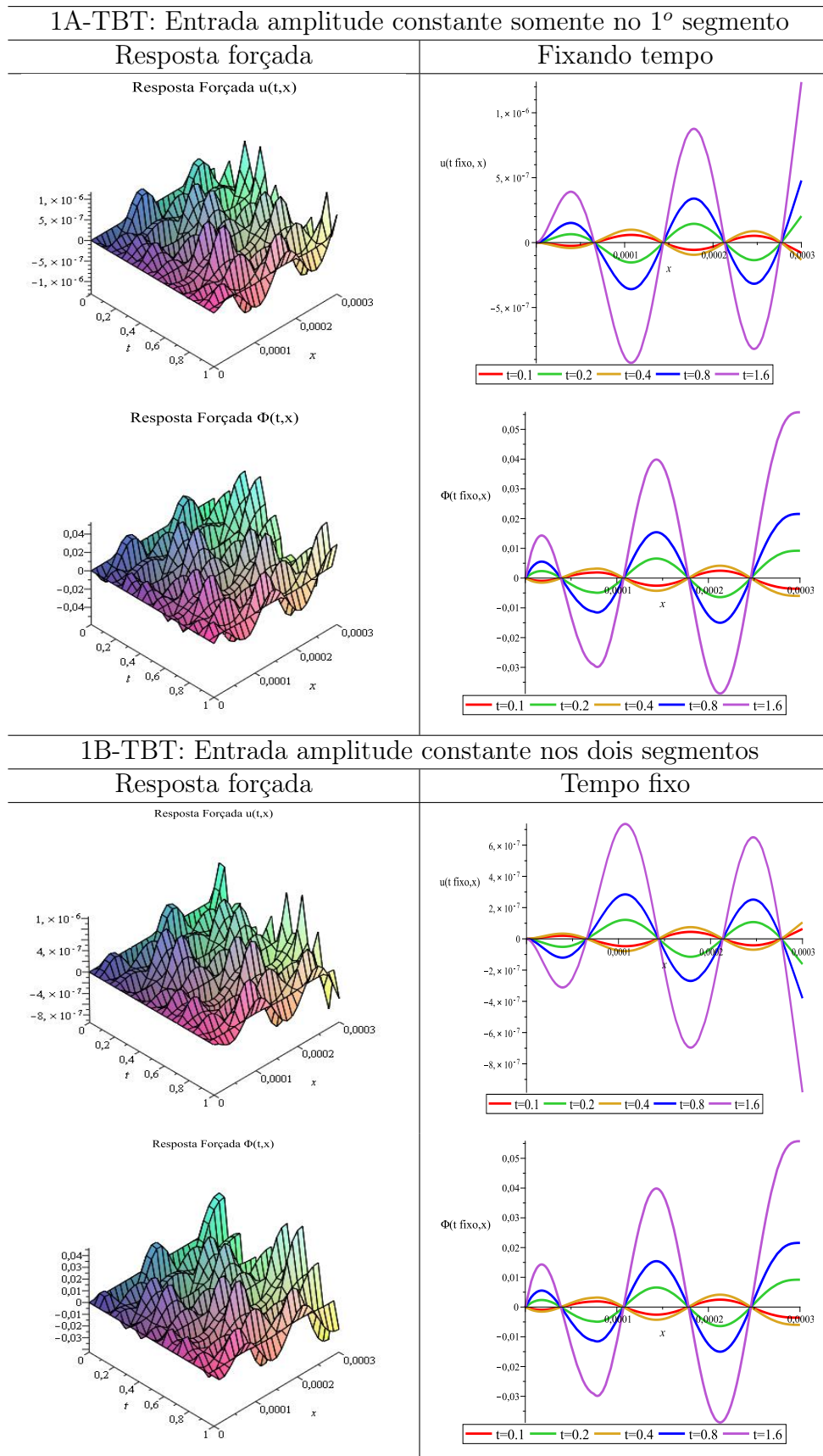
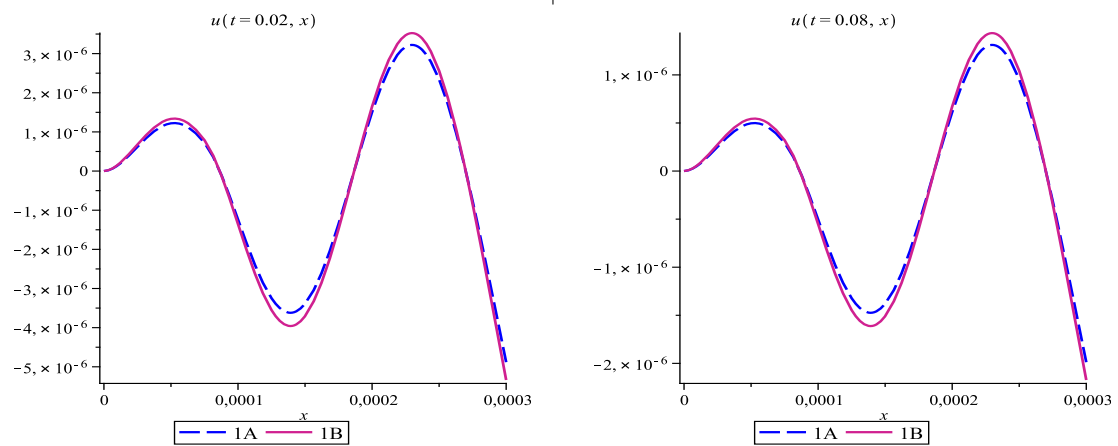


Tabela 5.1: Resposta forçada $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$, na segunda coluna $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ com t fixo (1A-TBT, 1B-TBT)

 Compara 1A/1B-TBT com frequência de entrada $\tilde{\omega}_4$



 Compara 1A/1B -TBT com frequência de entrada $\tilde{\omega}_5$

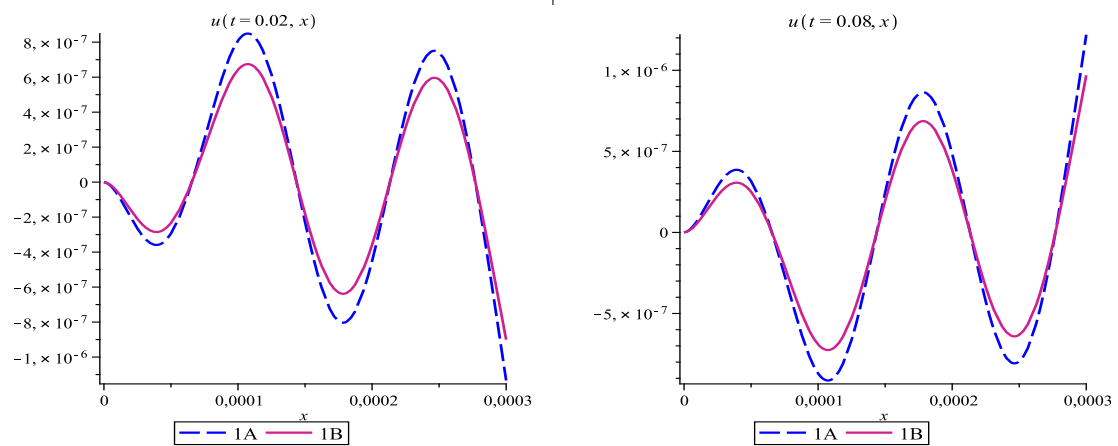


 Tabela 5.2: Compara $u(t, x)$, tempo fixo (1A-TBT, 1B-TBT)

Compara 1A/1B -TBT com frequência de entrada $\tilde{\omega}_5$

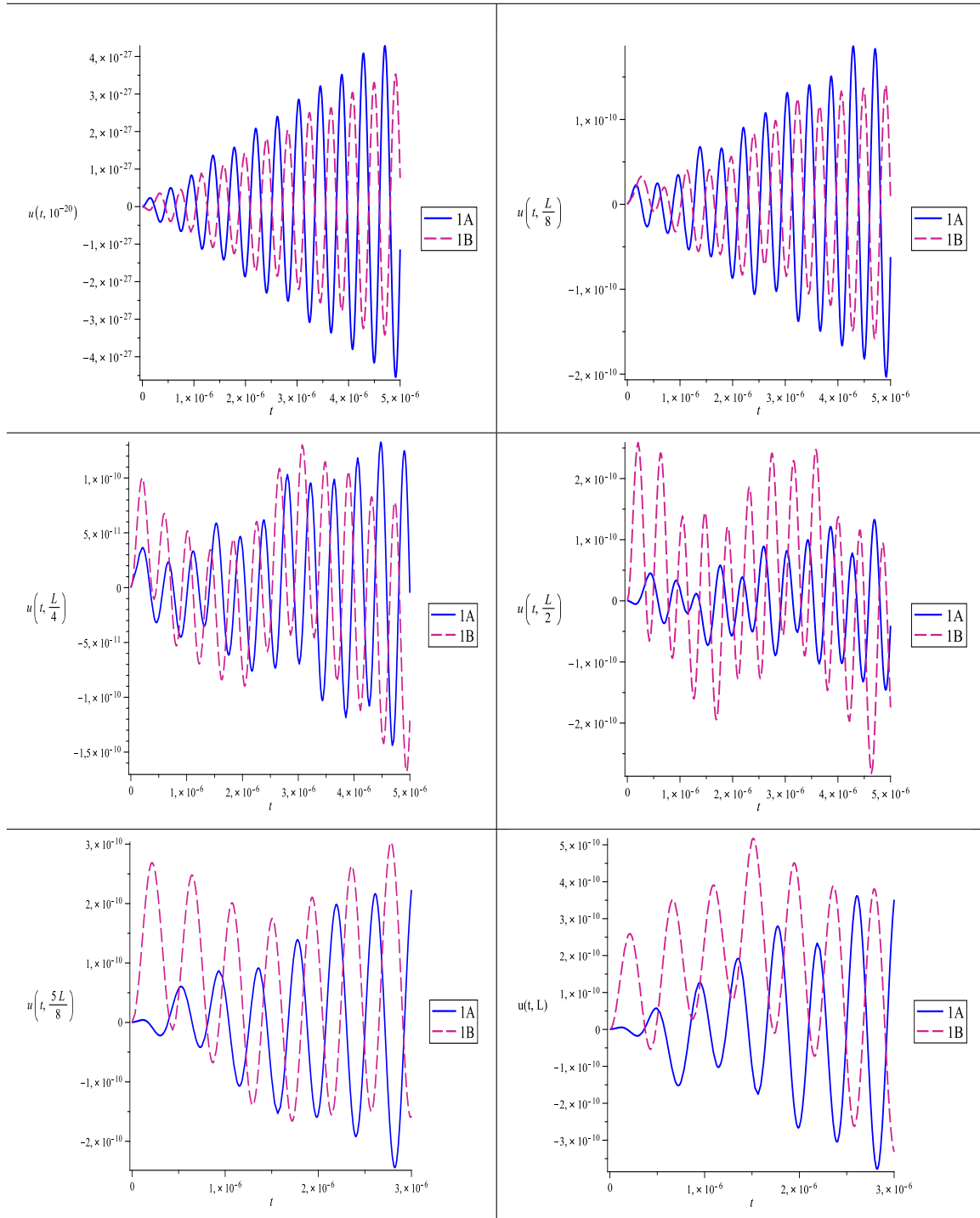


Tabela 5.3: Compara $u(t, x)$ com x fixo (1A-TBT, 1B-TBT)

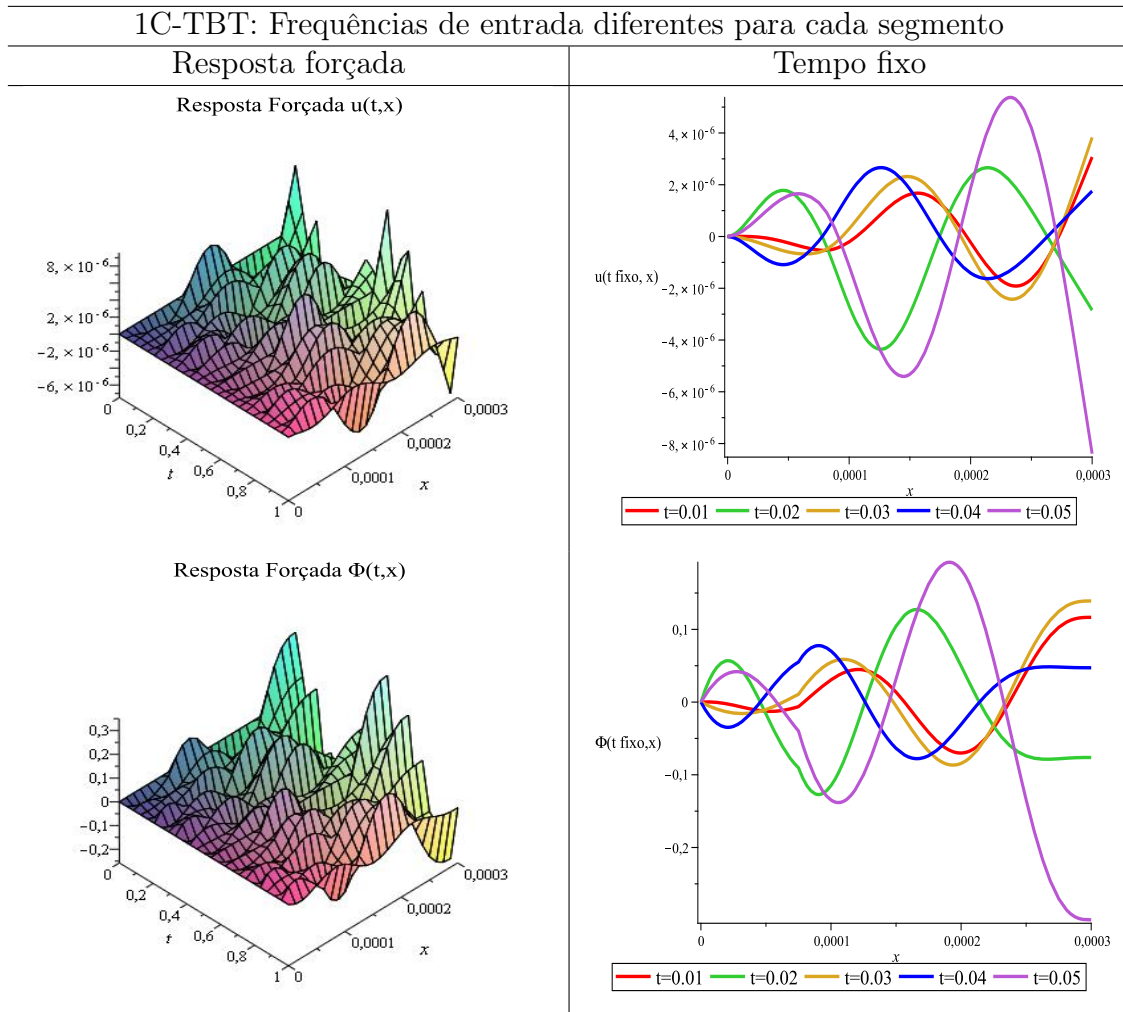
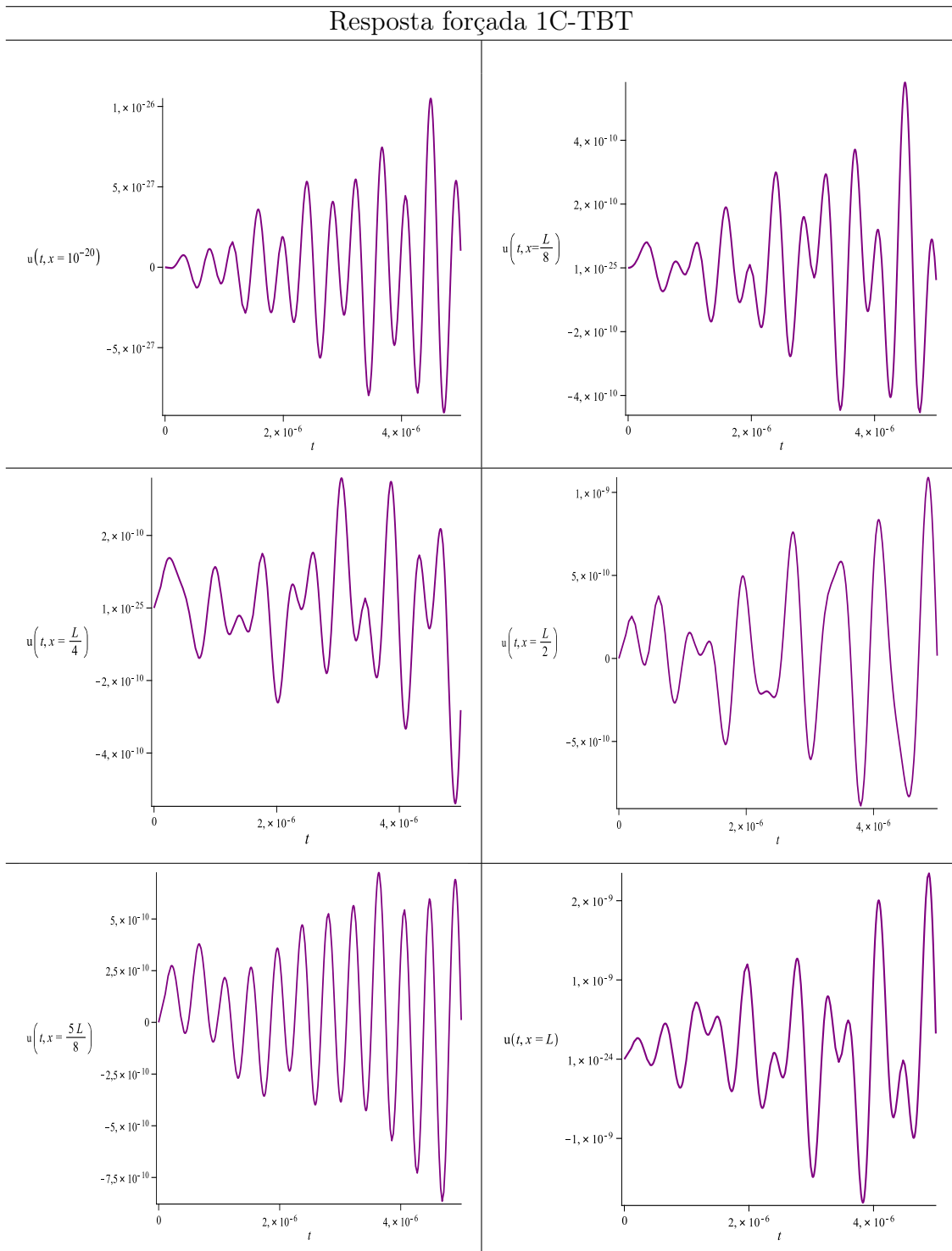


Tabela 5.4: Resposta forçada $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$, forçante do tipo amplitude constante com frequência de entrada diferente para cada segmento (1C-TBT), na segunda coluna $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ com t fixo

Tabela 5.5: Resposta forçada $u(t, x)$ com x fixo (1C-TBT)

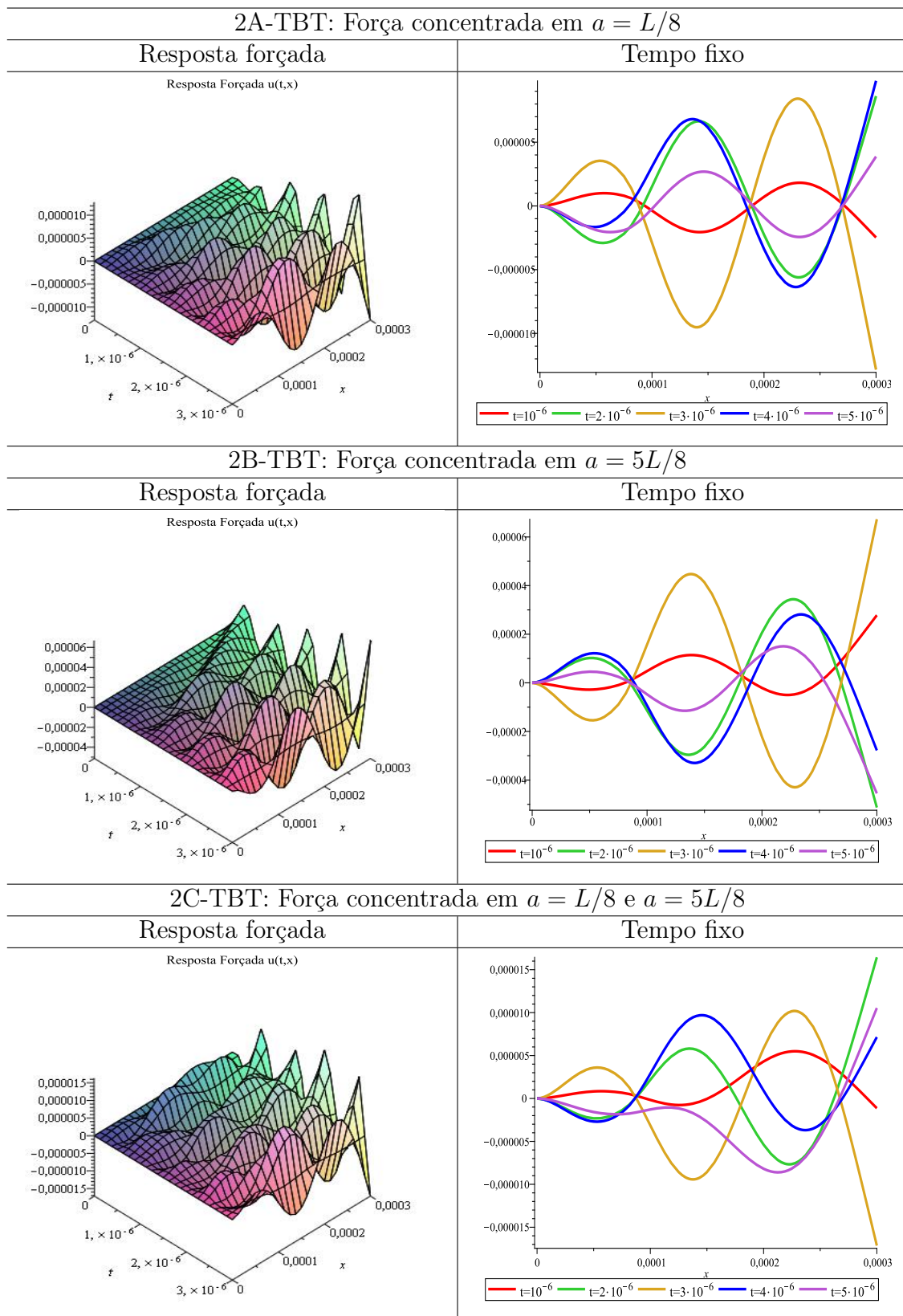
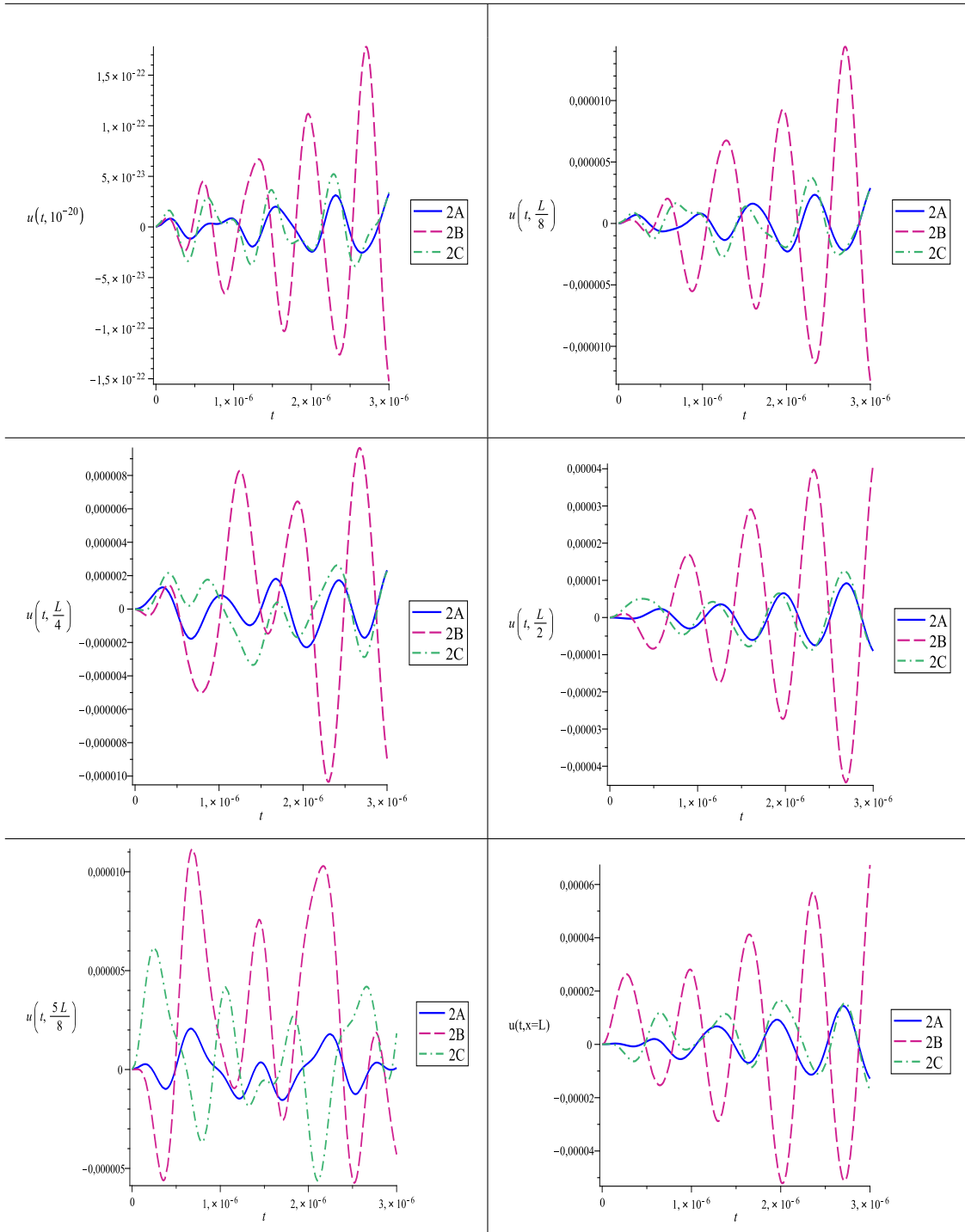


Tabela 5.6: Resposta forçada $u(t, x)$, na segunda coluna $u(t, x)$ com t fixo (2A-TBT, 2B-TBT, 2C-TBT)

 Força concentrada: 2A / 2B / 2C - TBT


 Tabela 5.7: Compara $u(t, x)$ com x fixo (2A-TBT, 2B-TBT e 2C-TBT)

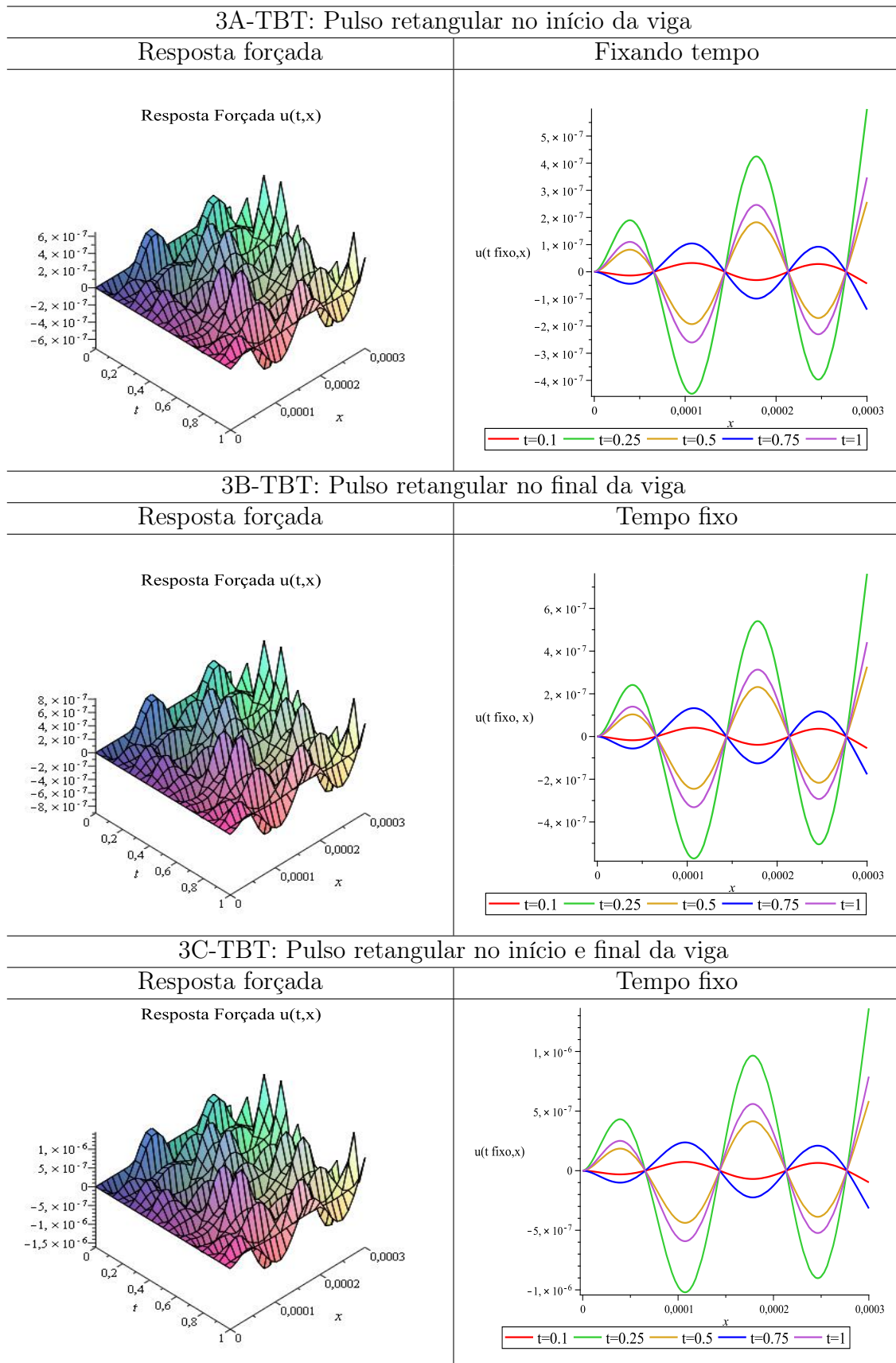
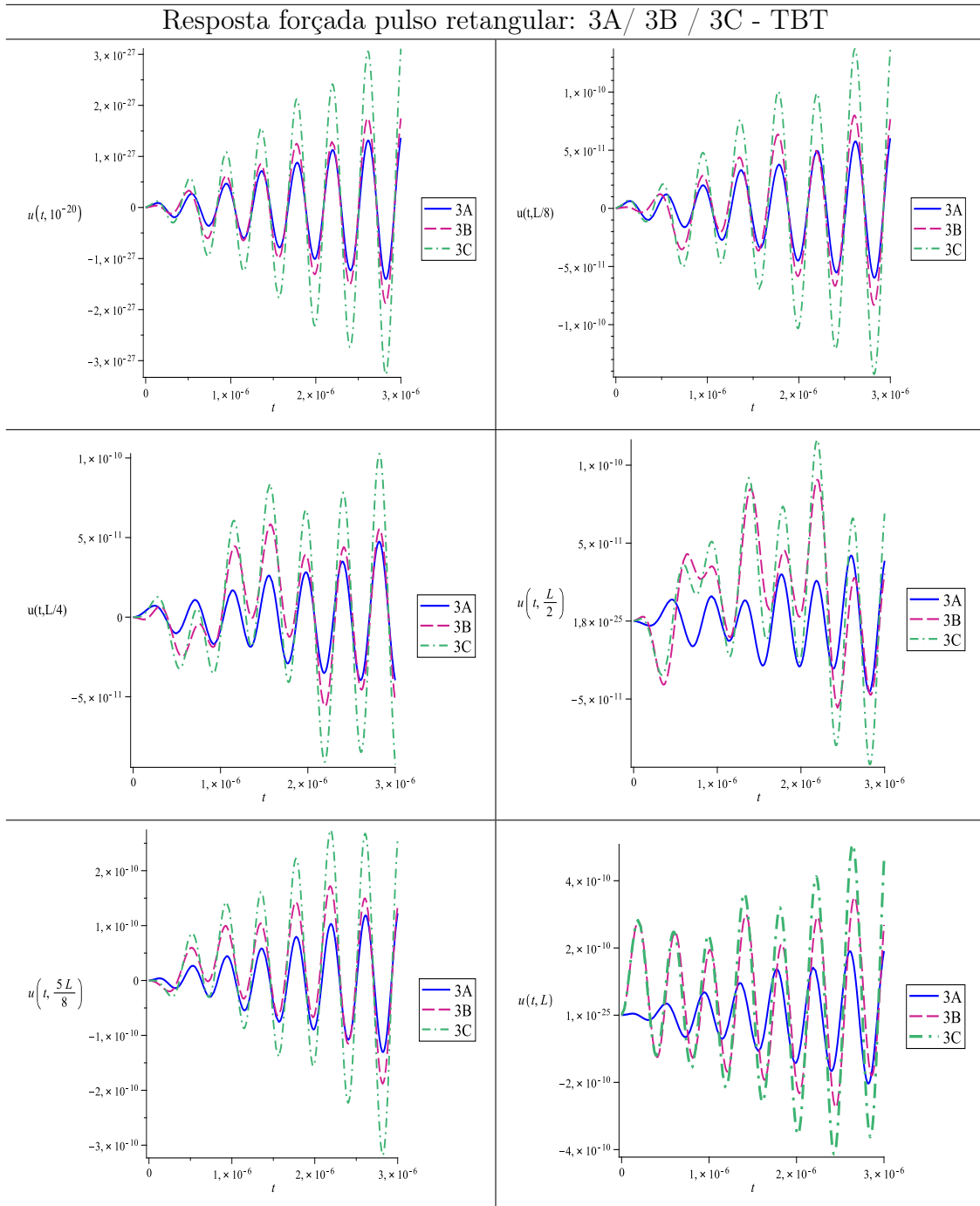


Tabela 5.8: Resposta forçada $u(t, x)$, na segunda coluna $u(t, x)$ com t fixo (3A-TBT, 3B-TBT e 3C-TBT)

Tabela 5.9: Compara $u(t, x)$ com x fixo (3A-TBT, 3B-TBT e 3C-TBT)

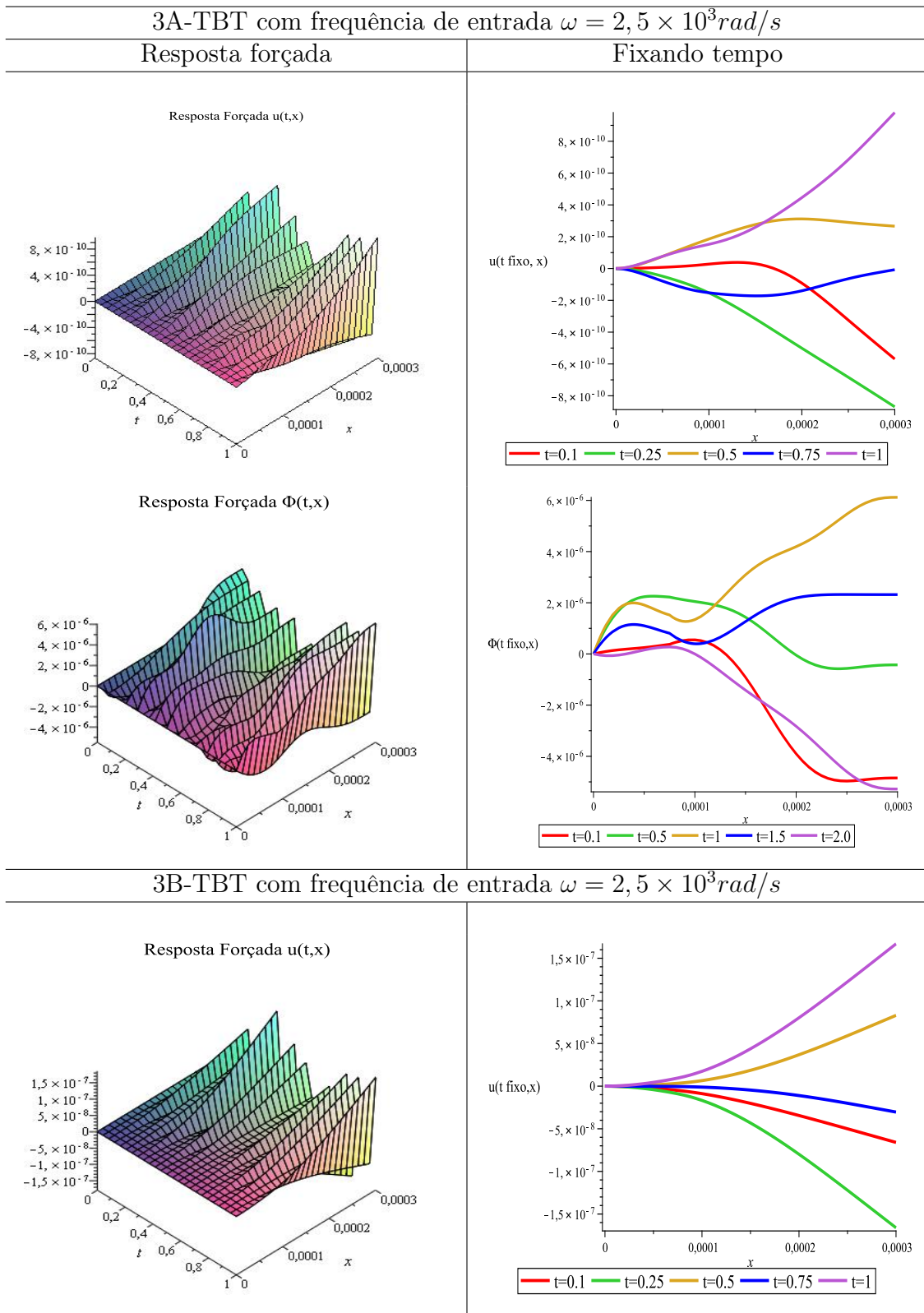


Tabela 5.10: Resposta forçada $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$, frequência de entrada $\omega = 2,5 \times 10^3 rad/s$ (3A-TBT, 3B-TBT), na segunda coluna $u(t, x)$ e $\phi(t, x)$ com t fixo para o caso 3A-TBT e $u(t, x)$ com t fixo para o caso 3B-TBT

Resposta forçada 3A/3B/3C

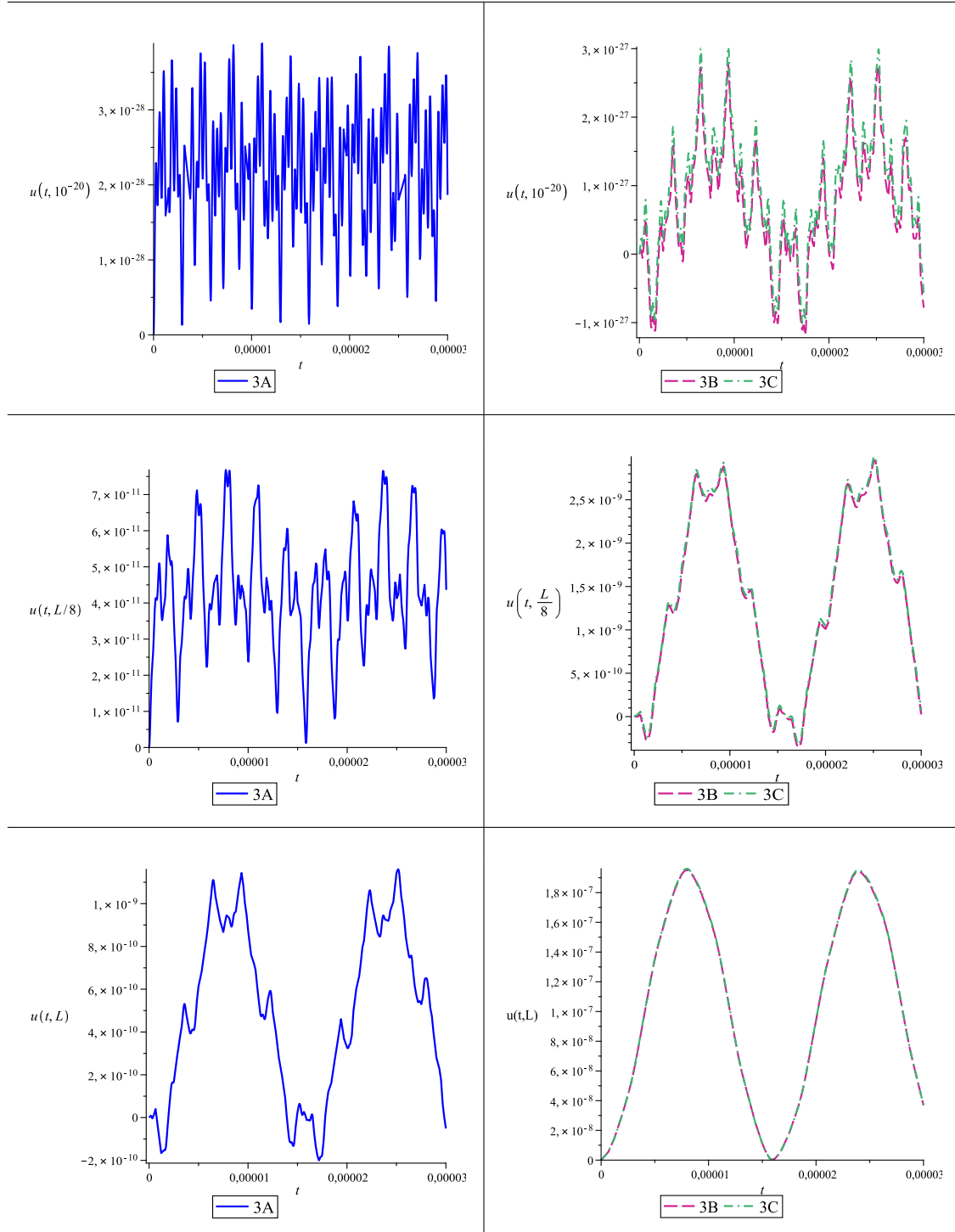


Tabela 5.11: Resposta forçada $u(t, x)$, x fixo, frequência de entrada $\omega = 2,5 \times 10^3 \text{ rad/s}$ (3A-TBT, 3B-TBT e 3C-TBT)

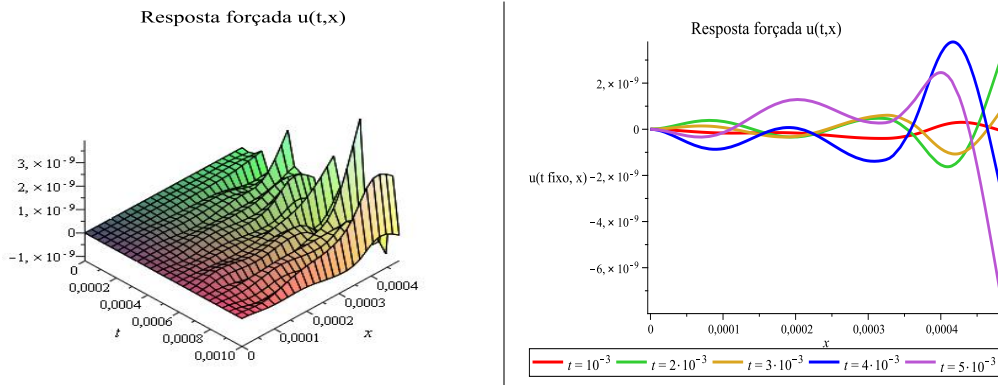


Tabela 5.12: Resposta forçada Modelo 1 - viga de Salehi-Khojin

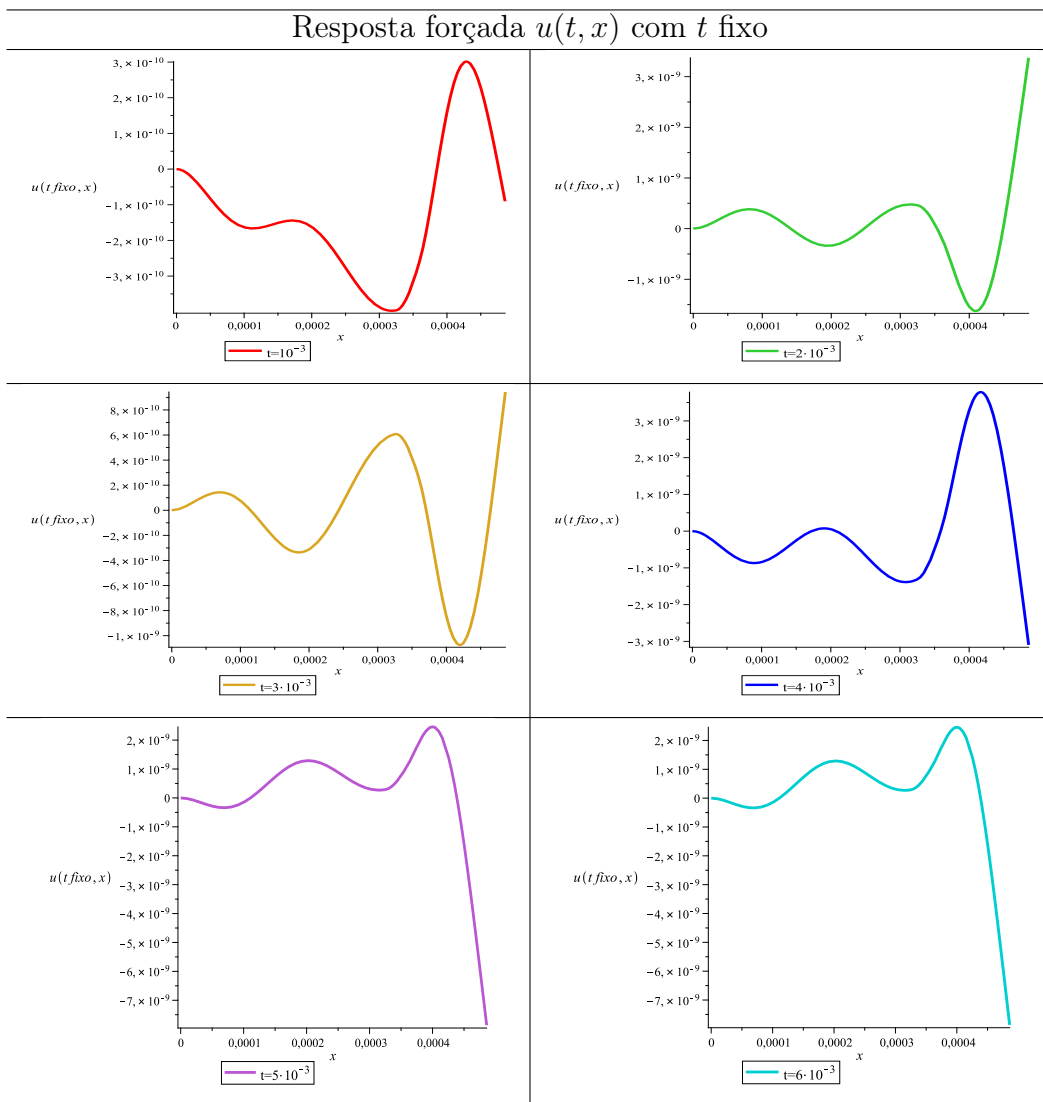


Tabela 5.13: Resposta forçada para a viga de Salehi-Khojin com tempo fixo

6 CONCLUSÕES

Abordou-se nesse trabalho uma metodologia unificada para análise de vibrações transversais, livres e forçadas de vigas segmentadas, baseada nos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, com particular interesse na aplicação em microscopia de força atômica.

A formulação matricial do presente trabalho permitiu obter, de maneira unificada, resultados satisfatórios para a análise modal utilizando configurações diferentes para vigas bi e trissegmentadas. Analisou-se dois modelos, propostos na literatura, de vigas segmentadas pela inclusão de materiais piezoelétricos de uso em AFMs. No primeiro dos modelos considerou-se a largura e espessura da viga como sendo variáveis e com o momento incorporado através de uma forçante tipo pulso na equação governante. No segundo modelo, considerou-se dispositivos na extremidade livre e o momento produzido pelas camadas piezoelétricas foi introduzido nas condições de contorno e de compatibilidade. No caso da inclusão de dispositivos na extremidade direita da viga, como era esperado, a inclusão de massa diminuiu a magnitude das frequências obtidas e a inclusão da mola aumentou a magnitude das frequências.

Simulações realizadas utilizando a abordagem usual de vigas uniformes e a abordagem para vigas segmentadas apresentam diferenças significativas, nas frequências e modos de vibração, quando se consideram as mudanças na seção transversal. Além disso, comparou-se satisfatoriamente os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Como era esperado a diferença entre as frequências é maior para modos mais altos, sendo que o modelo de Timoshenko apresenta frequências com magnitudes menores.

A metodologia considerada nesse trabalho já havia sido considerada por Tsukazan, Claeysen e Copetti para vigas segmentadas do tipo Euler-Bernoulli

[73], [59], e para vigas uniformes do tipo Timoshenko por Claeysen, Costa e Reys [32], [40], [61]. Sendo assim, a contribuição do presente trabalho foi a extensão da metodologia para o caso das vigas segmentadas do tipo Timoshenko. Para tanto considerou-se resultados de vigas segmentadas do tipo Euler-Bernoulli e uniformes do tipo Timoshenko, tais como considerar condições de compatibilidade entre segmentos vizinhos, e expressar os modos de vibração através da base dinâmica, no caso de Timoshenko sendo formada por componentes matriciais determinadas analiticamente por Claeysen [40].

As respostas forçadas, definidas através da integral de convolução da resposta impulso fundamental com a excitação externa, foram calculadas aproximando a resposta impulso da viga através do método de Galerkin com o uso de modos ortogonais para vigas bi e trissegmentadas. Considerou-se forçantes do tipo harmônico no tempo e constante, força concentrada e pulso na amplitude espacial, também variação do posicionamento de tais forçantes.

Apêndice A RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS PIEZOELÉTRICOS

Tanto o efeito piezoelétrico direto quanto o inverso podem ser descritos matematicamente por relações entre quatro variáveis, sendo elas tensão/*stress*, deformação/*strain*, campo elétrico e deslocamento elétrico. Há quatro maneiras de se escrever as equações constitutivas considerando qualquer duas dessas variáveis como variáveis independentes [3], [4], [68], A forma mais comum é dada em notação tensorial como

$$\begin{aligned} S_{ij} &= s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \\ D_i &= d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

sendo S_{ij} a deformação/*strain* (se utiliza também a letra grega ε), T_{kl} a tensão/*stress* (se utiliza também a letra grega σ), D_i o deslocamento elétrico, E_k o campo elétrico aplicado, s_{ijkl}^T a compliância mecânica (inverso do módulo de elasticidade) medida considerando campo elétrico constante (representada pelo sobre-índice E), ε_{ik}^T sendo a permissividade dielétrica medida considerando a tensão constante (representada pelo sobre-índice T) e d_{ikl} o coeficiente de deformação piezoelétrica.

Da simetria dos tensores, as equações constitutivas podem ser expressas na seguinte forma matricial compacta

$$\begin{Bmatrix} S \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s^E & d' \\ d & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T \\ E \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde ' indica transposição. A forma expandida de (A.2), utilizando a notação de Voigt a simetria do material $S_{11}^E = S_{22}^E$, $d_{31} = d_{32}$, etc, e que a polarização coincide com a direção 3

$$\left(\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{cccccccccc} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right) \quad (\text{A.3})$$

sendo

$$\begin{array}{ll}
S_1 = S_{11} & T_1 = T_{11} \\
S_2 = S_{22} & T_2 = T_{22} \\
S_3 = S_{33} & T_3 = T_{33} \\
S_4 = S_{23} + S_{32} & T_4 = T_{23} + T_{32} \\
S_5 = S_{13} + S_{31} & T_5 = T_{13} + T_{31} \\
S_6 = S_{12} + S_{21} & T_6 = T_{12} + T_{21}
\end{array}$$

Para uma viga do tipo Euler-Bernoulli a única componente de tensão não nula está na direção 1, ou seja,

$$T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0.$$

E seguem as relações

1 – Deformação/Deslocamento elétrico

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

s_{11}^E : coeficiente de elasticidade (inverso do módulo de Young);

d_{31} : coeficiente de deformação piezoelétrica;

ε_{33}^T : coeficiente de permissividade dielétrica.

2 – Tensão/Deslocamento elétrico

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & -e_{31} \\ e_{31} & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$c_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E};$$

$$e_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} = c_{11}^E d_{31};$$

$$\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} = c_{11}^E d_{31} = \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2 c_{11}^E.$$

3 – Deformação/Campo elétrico

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^D & g_{31} \\ -g_{31} & \beta_{33}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$s_{11}^D = s_{11}^E - d_{31}^2 \beta_{33}^T;$$

$$g_{31} = d_{31} \beta_{33}^T;$$

$$\beta_{33}^T = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T}.$$

4 – Tensão/Campo elétrico

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^D & -h_{31} \\ -h_{31} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$c_{11}^D = \frac{1}{s_{11}^D};$$

$$h_{31} = c_{11}^D g_{31} = \frac{g_{31}}{s_{11}^D};$$

$$\beta_{33}^S = \beta_{33}^T + g_{31}^2 c_{11}^D.$$

Referências Bibliográficas

- [1] A.G.Butkovsky. *Structural Theory of Distributed Systems*. John Wiley, 1983.
- [2] A.H.A.Pereira. Cerâmicas piezoelétricas: funcionamento e propriedades. <http://www.atcp.com.br>, 2010.
- [3] A.H.Meitzler. IEEE Standard on Piezoelectricity. *IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society*, 176, 1987.
- [4] A.Preumont. *Vibration Control of Active Structures*. Kluwer Academic Pubs, 1997.
- [5] A.R.Ohadi and E.Esmailzadeh. Vibration and stability analysis of non-uniform timoshenko beams under axial and distributed tangential loads. *Journal of Sound and Vibration*, 236(3):443–456, 2000.
- [6] A.Salehi-Khojin. *Vibration analysis of piezoelectric microcantilever sensors*. PhD thesis, Clemson, 2008.
- [7] A.Salehi-Khojin, S.Bashash, and N.Jalili. Modeling and experimental vibration analysis of nanomechanical cantilever active probes. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18:11 pp, 2008.
- [8] A.S.Oliveira. *Estudo do Posicionamento de Atuadores Piezoelétricos em Estruturas Inteligentes*. PhD thesis, Universidade Federal de Itajubá, 2008.
- [9] B.Balachandran and E.B.Magrab. *Mechanical Vibrations*. Cengage, 2nd ed. edition, 2009.
- [10] C.Maurini, M.Porfiri, and J.Pouget. Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams. *Journal of Sound and Vibration*, 298:918–933, 2006.

- [11] D.Inman. *Vibration with control, measurement and stability*. Prentice Hal, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [12] D.Inman. *Engineering Vibrations*. Prentice Hal, New Jersey, 2001.
- [13] D.J.Gorman. *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*. John Wiley, 1975.
- [14] D.Y.Abramovitch, S.B.Andersson, L.Y.Pao, and G.Schitter. A tutorial on the mechanisms, dynamics, and control of atomic force microscopes. *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, 2007.
- [15] E.Meyer. Atomic force microscopy. *Progress in Surface Science*, 41:3–49, 1992.
- [16] E.P.Popov. *Engineering mechanis of solids*. Prentice Hal, New Jersey, 1990.
- [17] F.B.Hildebrand. *Methods of Applied Mathematics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1952.
- [18] F.C.Duarte. Microscópio de tunelamento com varredura (STM) e microscópio de força atômica (AFM). <http://www.dsif.fee.unicamp.br>, 2000.
- [19] G.Binnig, C.F.Quate, and C.Gerber. Atomic Force Microscope. *Physics Review Letters*, 6:930–933, 1986.
- [20] H.Benaroya. *Mechanical Vibration: Analysis, Uncertainties, and Control*. Prentice Hall, 1998.
- [21] H.Benaroya and T.Wei. Hamilton’s principle for external viscousfluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 238(1), 2000.
- [22] H.J.Butt, B.Cappella, and M.Kappl. Force measurements with the atomic force microscope: Technique, interpretation and applications. *Surface Science Reports*, 59:1–152, 2005.

- [23] H.Jih-Lian, F.Rong-Fong, and C.Sheng-Hsin. Quantitative determination of material viscoelasticity using a piezoelectric cantilever bimorph beam. *Journal of Sound and Vibration*, 289:529–550, 2006.
- [24] H.K.Hong and J.T.Chen. On dual integral representation and its application to vibration problems. *Boundary Elements XV*, 2:377–390, 1993.
- [25] H.T.Banks, R.C.Smith, and Y.Wang. *Smart Material Structures Modeling, Estimation and Control*. Masson, John Wiley, Paris, Chichester, 1996.
- [26] H.Y.Lin. On the natural frequencies and mode shapes of a multispan Timoshenko beam carrying a number of various concentrated elements. *Journal of Sound and Vibration*, 319:593–605, 2009.
- [27] I.M.Gelfand and S.V.Fomin. *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963.
- [28] I.S.Sadek, L.Jamiiru, and A.Al-Mohamad. Optimal boundary control of one-dimensional multi-span vibrating systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 94:39–54, 1998.
- [29] J.C.Hsu, H.L.Lee, and W.J.Chang. Flexural vibration frequency of atomic force microscope cantilevers using the Timoshenko beam model. *Nanotechnology*, 18:28503–28508, 2007.
- [30] J.Ginsberg. *Mechanical and Structural Vibrations*. John Wiley Sons, 2002.
- [31] J.N.Reddy. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45:288–307, 2007.
- [32] J.R.Claeyssen. The Timoshenko beam model in vibrating AFM cantilevers. *Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications(Dincon'10)*, ISSN 2178-3667:11 pages, 2010.

- [33] J.R.Claeyssen, C.Garibotti, and S.Vielmo. The free surface of a coupled oceanatmosphere model due to forcing effects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 73(1):114–124, 2006.
- [34] J.R.Claeyssen, G.Canahualpa, and C.Jung. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics*, 30(1):65–78, 1999.
- [35] J.R.Claeyssen and I.F.Ferreira. *A resposta impulso em modelos evolutivos e estacionários*. Ed. da UFSM, Santa Maria, 2009.
- [36] J.R.Claeyssen, I.M.Ferreira, and R.D.Copetti. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Applied Numerical Mathematics*, 47(1):391–405, 2003.
- [37] J.R.Claeyssen, L.D.Chiwiacowsky, and G.C.Suazo. The impulse response in the symbolic computing of modes for beams and plates. *Applied Numerical Mathematics*, 40:119–135, 2002.
- [38] J.R.Claeyssen and R.A.Soder. A dynamical basis for computing modes of Euler-bernoulli and Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 259(4):986–990, 2003.
- [39] J.R.Claeyssen, R.D.Copetti, and T.Tsukazan. Matrix vibration formulation of damped multi-span beams. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 413–421, 2006.
- [40] J.R.Claeyssen and S.N.J.Costa. Modes for the coupled timoshenko model with restrained end. *Journal of Sound and Vibration*, 296:1053–1058, 2006.
- [41] J.R.Claeyssen, T.Tsukazan, J.M.Balthazar, and R.D.Copetti. The timoshenko model in Atomic Force Microscopy. *4th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS 2011)*, 2011.

- [42] J.W.Israelachvilli. *Intermolecular and Surface Forces*. Academic Press, 1991.
- [43] K.Alsaif and M.A.Foda. Vibration suppression of a beam structure by intermediate masses and springs. *Journal of Sound and Vibration*, 256(4):629–645, 2002.
- [44] K.Gloystein and A.Vilalta-Clemente. Principles of atomic force microscopy. *Physics of Advanced Materials Winter School 2008*, 2008.
- [45] L.E.Elsgolc. *Calculus of Variations*. Addinon-Wesley Publishing Company Inc., 1962.
- [46] L.Meirovitch. *Fundamentals of Vibration*. McGraw-Hill Book Company, New York, 2001.
- [47] M.Abbasi and A.K.Mohammadi. A new model for investigating the flexural vibration of an atomic force microscope cantilever. *Ultramicroscopy*, 110:1374–1379, 2010.
- [48] M.A.Foda and B.A.Albassam. Vibration confinement in a general beam structure during harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 295:491–517, 2006.
- [49] M.A.Naimark. *Linear Differential Operators*. Ungar, 1967.
- [50] M.Dadfarnia, N.Jalili, B.Xian, and D.M.Dawson. Lyapunov-based piezoelectric control of flexible cartesian robot manipulators. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 5227–5232, 2003.
- [51] M.Simsek. Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories. *Composite Structures*, 92:904–917, 2010.

- [52] Pacific Nanotechnology. General tutorial: Atomic force microscopy. <http://www.pacificnanotech.com>. [Online; acesso em Agosto-2011].
- [53] N.H.Asmar. *Partial differential equation with Fourier series and boundary value problems*. Pearson Prentice Hall, 2000.
- [54] N.Jalili and K.Laxminarayana. A review of Atomic Force Microscopy imaging systems: application to molecular metrology and biological sciences. *Mechatronics*, 14:907–945, 2004.
- [55] University of Cambridge. DoITPoMS Teaching and Learning Package - Atomic Force Microscopy. <http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/afm/index.php>. [Online; acesso em Setembro-2011].
- [56] Q.Wang and S.T.Quek. Flexural vibration analysis of sandwich beam coupled with piezoelectric actuator. *Smart Mater. Struct.*, 9:103–109, 2000.
- [57] Q.Wang and S.T.Quek. A controllability index for optimal design of piezoelectric actuators in vibration control of beam structures. *Journal of Sound and Vibration*, 242(3):507–518, 2001.
- [58] R.B.Guenther and J.W.Lee. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Dover, 1988.
- [59] R.D.Copetti, J.R.Claeyssen, and T.Tsukazan. Free vibrations in euler-bernoulli multi-span with interaction forces in carbon nanotubes continuum modeling. In *7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications (DINCON07)*, 2007.
- [60] R.D.Copetti, J.R.Claeyssen, and T.Tsukazan. Modal formulation of segmented Euler-Bernoulli beams. *Mathematical Problems in Engineering*, 2007(ID 36261):18 pages, 2007.

- [61] R.J.R.Reys. *Um modelo matemático de Timoshenko não linear para uma viga elástica com força axial*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.
- [62] R.O.Grossi and C.M.Albalbarracín. Eigenfrequencies of generally restrained beams. *Journal of Applied Mathematics*, 2003:10:503–516, 2003.
- [63] S.C.Stanton and B.P.Mann. On the dynamic response of beams with multiple geometric or material discontinuities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24:1409–1419, 2010.
- [64] S.G.Kelly. *Advanced Vibration Analysis*. CRC Press, 2007.
- [65] S.M.Han, H.Benaroya, and T.Weit. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5):935–988, 1999.
- [66] S.M.Yang and Y.J.Lee. Modal analysis of stepped beams with piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*, 176(3):289–300, 1994.
- [67] S.N.J.Costa. *O modelo de Timoshenko em vigas elásticas, estruturas Off-shore e nanotubos de carbono através da resposta fundamental de valor inicial*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.
- [68] S.R.Anton. *Multifunctional Piezoelectric Energy Harvesting Concepts*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2011.
- [69] S.Sahmani and R.Ansari. Nonlocal beam models for buckling of nanobeams using state-space method regarding different boundary conditions. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(9):2365–2375, 2011.
- [70] S.S.Rao. *Mechanical vibrations*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

- [71] S.S.Rao. *Vibrations of Continuous Systems*. John Wiley, 2007.
- [72] T.A.Philpot. *Mechanics of Materials*. John Wiley Sons, 2008.
- [73] T.Tsukazan. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 281:1175–1185, 2005.
- [74] W.H.Fleming. *Controlled Markov Process and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [75] X.Dong, G.Meng, H.Li, and Y.Lin. Vibration analysis of a stepped laminated composite Timoshenko beam. *Mechanics Research Communications*, 32:572–581, 2005.
- [76] Y.M.Ghugal and R.Sharma. A hyperbolic shear deformation theory for flexure and free vibration of thick beams. *International Journal of Computational Methods*, 6(4):585–604, 2009.
- [77] Y.M.Ghugal and R.Sharma. A refined shear deformation theory for flexure of thick beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8:183–195, 2011.
- [78] Y.Yesilc, O.Demirdag, and S.Catal. Free vibrations of a multi-span timoshenko beam carrying multiple spring-mass systems. *Shadana*, 33(4):385–401, 2008.
- [79] Z.Wang, R.Yue, R.Zhang, and L.Liu. Design and optimization of laminated piezoresistive microcantilever sensors. *Sensors and Actuators A*, 120:325–336, 2005.