

346

MEDIDA DE HAUSDORFF E DIMENSÕES FRACIONÁRIAS. *Debora Rampanelli, Leonardo Prange Bonorino (orient.)* (Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Instituto de Matemática, UFRGS).

Em muitos problemas matemáticos, é necessário calcular o “tamanho” de um conjunto. Esta noção, no entanto, depende da dimensão deste conjunto. Por exemplo, para medir uma curva, calcula-se o seu comprimento enquanto que uma superfície é medida pela sua área. Intuitivamente, comprimento é uma medida unidimensional e área é uma medida bidimensional. A medida de Hausdorff, denotada por H_d , generaliza esta noção de medida d -dimensional. Assim, H_1 calcula comprimentos, H_2 estima áreas, etc. Comparada com a medida de Lebesgue definida em \mathbb{R}^n , a medida de Hausdorff tem a vantagem de poder estimar um conjunto na dimensão correta. Por exemplo, qualquer superfície regular S em \mathbb{R}^3 tem medida de Lebesgue nula, visto que o seu volume é zero. Esta é uma resposta que muitas vezes não nos interessa, já que estamos mais preocupados na área de S que pode ser obtida por $H_2(S)$. Isto não impede, no entanto, que se calcule a medida de Hausdorff de um conjunto com uma dimensão diferente da esperada. Podemos calcular $H_3(S)$, que é zero, bem como $H_1(S)$, que é infinita. Para entender esta última, basta observar que é possível colocar dentro de S curvas com comprimentos arbitrariamente grandes, ou seja, S tem um “comprimento” infinito. Constatamos assim que a medida $H_d(S)$ é nula quando d for maior que a dimensão de S e é infinita quando d for menor que a dimensão de S . Esta propriedade possibilita uma definição alternativa para o conceito de dimensão. Podemos pensar na dimensão de um conjunto C com sendo o número d_0 tal que $H_d(C)$ é zero se $d > d_0$ e infinito se $d < d_0$. A definição de medida de Hausdorff pode ser feita para qualquer real não-negativo, assim $H_d(C)$ está definido para qualquer d não-negativo e, portanto, d_0 pode não ser um número natural. Caso isto aconteça, temos um conjunto com “Dimensão de Hausdorff” fracionária. Nesta apresentação serão definidos os conceitos de medida e dimensão de Hausdorff, apresentadas algumas propriedades e calculada a dimensão do conjunto de Cantor, bem como sua medida nesta dimensão. (FAPERGS/IC).