UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LEONOR WIERZYNSKI PEDROSO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Porto Alegre

2012

LEONOR WIERZYNSKI PEDROSO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Elisabete Zardo Búrigo

Porto Alegre

2012

LEONOR WIERZYNSKI PEDROSO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada à Banca Examinadora para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

Banca Examinadora:

....

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas - UNIFRA

....

Profª. Dra. Maria Alice Gravina - UFRGS

....

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso - UFRGS

Porto Alegre, ... de ....de 2012.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida.

À Profª Elisabete Zardo Búrigo, minha orientadora, pela paciência, pela dedicação e por tudo que me ensinou ao longo da realização dessa dissertação.

Aos meus pais, Valeria e Nelson, meus primeiros professores. Obrigada por estarem sempre ao meu lado, dando-me orientação, incentivo e apoio em todos os sentidos.

Ao meu noivo, Fabiano, pelo amor, pela paciência e ajuda constantes. Obrigada pelo companheirismo, pela amizade e por estar comigo sempre.

À minha irmã, Lívia, pelo exemplo de dedicação e de busca pelo aperfeiçoamento e crescimento pessoal e profissional.

À Inara e José Luís, pelo constante apoio e carinho.

Aos colegas e amigos do curso, em especial à Michele, pelas conversas, pelos auxílios e pelos grupos de estudo.

A todos os amigos que de uma forma ou de outra estiveram ao meu lado incentivando-me nesse processo.

Ao Colégio Marista Assunção e aos meus alunos, sem os quais esse trabalho não existiria.

Aos membros da Banca Examinadora, Professores Doutores José Carlos Leivas, Maria Alice Gravina e Marcus Basso, pela atenção e pelas sugestões que enriqueceram esse trabalho.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta de ensino da Trigonometria para estudantes do Ensino Médio, baseada na utilização do *software* GeoGebra. Seu principal objetivo é avaliar a aprendizagem da Trigonometria propiciada por uma sequência de ensino desenvolvida em um ambiente informatizado e dinâmico. A metodologia utilizada na pesquisa foi o estudo de caso. As atividades da experiência didática foram aplicadas em uma escola particular de Porto Alegre em duas etapas: inicialmente, com uma turma de 45 alunos e, posteriormente, com um grupo de 7 alunos dessa turma. A análise dos dados coletados foi baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud e enfocou a identificação e interpretação de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados pelos alunos nas resoluções das atividades. A aprendizagem dos conceitos de ângulo, razões trigonométricas, círculo trigonométrico e funções trigonométricas e propriedades a eles relacionadas foi favorecida pelo uso do *software* de Geometria Dinâmica, que propiciou a observação e compreensão de relações entre elementos de uma construção, permitiu a experimentação de hipóteses e elaboração de conclusões, instigou discussões e tornou as aulas mais dinâmicas, com o professor assumindo o papel de mediador na aprendizagem, e o trabalho cooperativo entre os alunos organizados em grupos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática – Educação Matemática - Trigonometria - Ensino da Trigonometria - GeoGebra - Geometria Dinâmica – Teoria dos Campos Conceituais.

ABSTRACT

This dissertation presents a Trigonometry teaching proposal for High School students, based on the use of the software GeoGebra. The main purpose of this paper is to evaluate the learning of Trigonometry provided by a sequence of teaching developed in a computerized and dynamic environment. The methodology used in the research was a case study. The activities of the teaching experience were applied in a private school of Porto Alegre, in two stages: first, with a 45-student group and afterwards with a 7-student group of the former one. The analysis of the collected data was based on the Conceptual Fields Theory by Gerard Vergnaud and focused on the identification and interpretation of in-action-concepts and in-action-theorems used by the students to solve the activities proposed. The learning of concepts such as angles, trigonometric reasons, circles and functions and the properties related to them was favored by the use of the software of Dynamic Geometry, which provided an observation and comprehension of relations between elements of a construction, allowed the experimentation of hypothesis and the elaboration of conclusions, instigated discussions and made the classes more dynamic, with the teacher taking the role of mediator in the learning, and the cooperative work among students organized in groups.

Keywords: Mathematics Teaching – Mathematics Education - Trigonometry – Trigonometry Teaching - GeoGebra – Dynamic Geometry – Conceptual Fields Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da Trigonometria é uma das inquietações que tenho como professora. Durante as minhas experiências docentes na Educação Básica e na Educação Superior, percebi diversas dificuldades na aprendizagem dos alunos relativas a esse tema. Os registros de resoluções de exercícios nos cadernos, os registros de provas e os comentários realizados durante as aulas mostravam que muitas vezes os alunos não estavam compreendendo os significados dos conteúdos trigonométricos que estavam sendo desenvolvidos, nem compreendendo a linguagem simbólica utilizada nesse conteúdo e nem conseguiam entender a Trigonometria como uma ferramenta matemática capaz de resolver problemas contextualizados.

As minhas vivências em sala de aula evidenciaram também que as dificuldades de aprendizagem dos alunos não estão restritas à Trigonometria. Porém, por que desenvolver um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Trigonometria? Porque considero a Trigonometria um conteúdo rico e importante, por abranger conhecimentos relativos à Álgebra e à Geometria, unindo esses dois ramos da Matemática: por exemplo, uma equação trigonométrica pode ser resolvida através da representação de suas possíveis soluções no círculo trigonométrico. Também é importante quanto às suas aplicações. Entre as mais antigas, está o cálculo de distâncias inacessíveis, como alturas de prédios, de montanhas, de satélites e de aviões, larguras de rios e comprimentos de pontes. Na Física, algumas aplicações estão no cálculo do trabalho de uma força atuante no deslocamento de um corpo e no estudo de fenômenos ondulatórios. Na Medicina, o estudo da respiração humana, que é um fenômeno cíclico, pode ser feito através da modelagem com funções trigonométricas, assim como o estudo da pressão sanguínea e do ciclo menstrual. Pode-se citar ainda outros fenômenos cíclicos que podem ser estudados através de funções trigonométricas, como a oscilação periódica das marés e a variação das temperaturas anuais em determinada região.

Tendo como referência essas percepções e convicções, decidi pesquisar e desenvolver uma proposta alternativa de ensino da Trigonometria, com o objetivo de promover uma aprendizagem para os alunos que envolvesse a compreensão dos conteúdos e a utilização correta do simbolismo matemático envolvido, que promovesse o raciocínio e a autonomia dos alunos na realização de tarefas e desenvolvesse sua capacidade de resolver exercícios e problemas contextualizados.

Assim, desenvolvi um conjunto de atividades que compõem uma sequência de ensino. A opção pela elaboração dessa sequência, sua aplicação e posterior análise, embasada pela Teoria dos Campos Conceituais, tem dois objetivos principais: testar uma alternativa didática que pudesse contribuir para a melhoria do ensino, além da minha sala de aula, e contribuir para a discussão e as pesquisas que vêm se desenvolvendo em torno do tema. Portanto, não foi minha intenção apenas identificar e analisar problemas relativos à aprendizagem e ao ensino, mas construir uma alternativa didática como uma sugestão de material para outros professores utilizarem com seus alunos, adaptando e alterando o que fosse preciso conforme suas necessidades.

O caráter inovador dessa experiência de ensino está relacionado ao uso do *software* GeoGebra[1], um programa que permite estudar Álgebra e Geometria ao mesmo tempo. Em todas as atividades, construções geométricas manipuláveis foram apresentadas aos alunos, ou eles construíram figuras geométricas, também manipuláveis, a partir de suas propriedades; as atividades foram elaboradas buscando instigar os alunos a criarem hipóteses e testá-las para serem comprovadas ou modificadas.

No capítulo 1 do trabalho, apresento um estudo do tema: o ensino da Trigonometria. São discutidas questões relativas ao ensino da Trigonometria na Educação Básica, focando-se a abordagem do tema pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e a maneira como a Trigonometria é abordada no Exame Nacional do Ensino Médio. Em seguida, comento minhas experiências docentes no Ensino Superior, no Ensino Médio e os livros didáticos adotados no Ensino Médio pela escola onde realizei a experiência e apresento um estudo sobre abordagens diferenciadas da Trigonometria propostas em trabalhos recentes de pesquisadores da área.

No capítulo 2, relato o processo através do qual surgiu a ideia da elaboração da sequência de ensino, as questões que nortearam a pesquisa e a metodologia utilizada.

No capítulo 3, apresento a fundamentação teórica da pesquisa: comento a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, utilizada na interpretação das falas e das escritas dos alunos, as potencialidades da Geometria Dinâmica, como recurso de aprendizagem, e apresento um estudo sobre o conceito de ângulo.

O capítulo 4 é dedicado ao detalhamento das atividades da sequência, ao relato de sua aplicação e à análise das resoluções desenvolvidas pelos alunos. A análise foi iniciada com a classificação das respostas, levando-se em consideração acertos, erros e soluções que se

---

[1] *Software* livre, disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/>.

destacaram quanto à criatividade ou por serem especialmente reveladoras dos modos de pensar dos alunos. Em seguida, analisou-se o que poderia ter levado os alunos a procederem e a responderem de uma forma ou de outra. A última etapa da análise envolveu a identificação e a interpretação de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação usados pelos alunos durante a realização das atividades. Nesse capítulo, detalho também os objetivos das atividades, os conceitos e os conhecimentos abordados em cada uma.

As considerações finais apresentam reflexões sobre a experiência de ensino. Analiso de que maneira as questões norteadoras da pesquisa foram, ou não, respondidas. Destaco seus pontos principais: os benefícios que considero que a experiência trouxe para a aprendizagem dos alunos, as dificuldades que surgiram e o que poderia ser melhorado, tendo em vista a aplicação da sequência em outras turmas de ensino médio.

1 ESTUDO DO TEMA: O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Este capítulo apresenta o estudo realizado sobre o tema: ensino da Trigonometria. A seção 1.1 aborda questões referentes às expectativas em relação ao ensino da Trigonometria na Educação Básica. Considerou-se nesse estudo o que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) apresentam sobre o tema e como os conhecimentos trigonométricos estão sendo avaliados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A seção 1.2 é dedicada ao relato das minhas experiências docentes no Ensino Médio e no Ensino Superior e à análise dos livros didáticos adotados na escola onde lecionei e onde foi realizada a pesquisa. Pretende-se com essa seção explicar, de modo mais detalhado, como a experiência de sala de aula motivou e orientou o desenvolvimento da pesquisa. A seção 1.3 é dedicada a uma breve discussão de propostas diferenciadas de ensino de Trigonometria realizadas no Brasil nos últimos anos.

1.1 A TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A Trigonometria é abordada na Educação Básica, no Brasil, usualmente, em dois momentos principais: no final do Ensino Fundamental, quando se introduzem os conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, e no Ensino Médio, quando são abordados os conceitos de arcos, ângulos e suas unidades de medida (graus e radianos), a caracterização do círculo trigonométrico, a identificação das razões trigonométricas no círculo trigonométrico, a resolução de equações trigonométricas, as funções trigonométricas, a representação gráfica das funções e a resolução de problemas que envolvem a Trigonometria. Os conceitos trigonométricos são abordados ou retomados em outros momentos na disciplina Matemática, como por exemplo, no estudo do coeficiente angular de uma reta, com a construção de gráficos de funções lineares afins, e no estudo da Geometria Analítica. A Trigonometria também pode aparecer no estudo dos números complexos, de sua representação na forma trigonométrica, e das operações com esses números nessa forma. A Trigonometria também pode ser abordada na disciplina de Física, por exemplo, com o estudo das ondas que envolve classificação, comprimento, período, frequência, fase e velocidade.

1.1.1 A Trigonometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)

Os PCNEM (Brasil, 2000) destacam a importância do ensino da Trigonometria e a utilização de recursos pedagógicos com vistas ao aprimoramento do aprendizado matemático e das outras disciplinas. É necessário destacar que um dos objetivos principais dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio é orientar as instituições de ensino da Educação Básica quanto às competências, às habilidades e aos conhecimentos fundamentais que se espera que os alunos desenvolvam durante a vida escolar. Sendo assim, considero que esse é um dos documentos oficiais mais importantes que devem ser considerados na construção dos currículos das instituições de ensino básico do país.

Especificamente sobre o ensino da Trigonometria, o documento ressalta a importância do tema:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que se deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos (BRASIL, 2000, p.44).

O trecho citado acima embasa a ideia de que os estudantes devem estudar os conhecimentos trigonométricos necessários para que desenvolvam habilidades e competências voltadas para a resolução de problemas aplicados. Destaca-se ainda o comentário de que os cálculos algébricos das identidades e as resoluções de equações continuam sendo importantes, o que não se recomenda é unicamente focar o ensino nesse aspecto da Trigonometria.

Entre as habilidades e competências que os PCNEM consideram necessárias serem desenvolvidas no estudo da Matemática, estão:

> **Representação e comunicação**
> - Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).
>
> **Investigação e compreensão**
> - Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
>
> **Contextualização sócio-cultural**

> - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> - Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades (PCNEM, 2000, p. 46).

Essas habilidades e competências foram tomadas como referências na construção da sequência de ensino que será apresentada no capítulo 4.

1.1.2 A Trigonometria no Exame Nacional do Ensino Médio

Um instrumento que deve ser considerado, pois pode influenciar na organização e planejamento do currículo escolar, é o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) promovido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Desde 2009, o exame passou a ser não só uma ferramenta de avaliação da qualidade de ensino das escolas de Ensino Médio brasileiras, mas uma alternativa de ingresso em uma instituição de Ensino Superior[2].

Com o objetivo de conhecer a forma como os conteúdos trigonométricos são avaliados no ENEM, consultou-se a Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias[3], um dos quatro grandes eixos do exame, e as provas dos anos de 2010 e 2009[4]. A matriz de referência não está organizada por conteúdos, mas sim por competências que se considera que os alunos devem ter desenvolvido em 7 áreas da Matemática. Essas áreas são:

1) Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

2) Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

3) Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

---

[2] As instituições de Ensino Superior são livres para adotar nos seus critérios de seleção a nota obtida, pelo aluno do Ensino Médio, no ENEM. As instituições podem adotá-lo como única fase no seu processo de seleção, como primeira fase do processo, combinar a nota do ENEM com a nota do vestibular da instituição ou ainda adotá-lo como critério de preenchimento de vagas remanescentes do vestibular.

[3] Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/edital/2011/edital_n07_18_05_2011_2.pdf> Acesso: ago. 2011.

[4] Disponíveis em: < http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores > Acesso em: ago. 2011.

4) Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

5) Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

6) Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsões de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

7) Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

A figura 1 nos mostra uma questão da prova azul[5] realizada em 2010. Essa questão é um exemplo de como a Trigonometria pode ser abordada na prova. O aluno poderá resolver a questão se conhecer uma das características principais da função cosseno: que seus valores máximo e mínimo são 1 e -1, respectivamente.

Questão 152

Um satélite de telecomunicações, *t* minutos após ter atingido sua órbita, está a *r* quilômetros de distância do centro da Terra. Quando *r* assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de *r* em função de *t* seja dado por

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \times \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de *r*, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por *S*.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, *S* atinge o valor de

A 12 765 km.
B 12 000 km.
C 11 730 km.
D 10 965 km.
E 5 865 km.

Figura 1: Questão 152 da prova do ENEM 2010.

A figura 2 mostra a questão 164 da prova azul do ENEM 2009. A questão envolve conhecimentos de Trigonometria, especificamente relativos à razão trigonométrica tangente, de Geometria (cálculo de área de triângulo) e cálculo de porcentagem. Detalhando um pouco

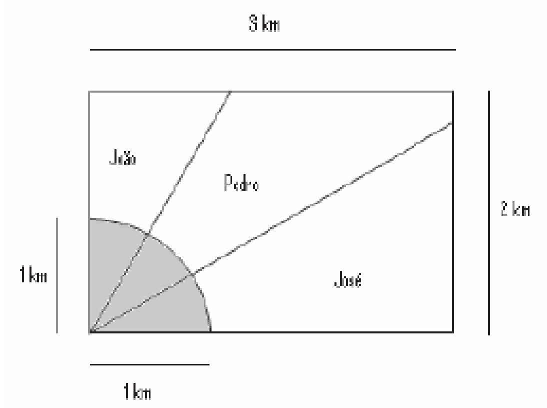
---

[5] As provas do ENEM recebem cores diferenciadas. As questões são semelhantes, mas os gabaritos são diferentes. Esse é um recurso para tentar-se evitar fraudes na realização do exame.

mais a parte da Trigonometria, o estudante precisa ser capaz de identificar que deve encontrar a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° para calcular a área do triângulo. A figura informa a medida do cateto adjacente, logo o estudante deve ser capaz de identificar e utilizar a razão trigonométrica tangente para solucionar o problema.

Questão 164

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$)

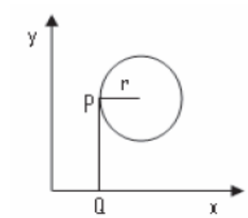
A 50%.
B 43%.
C 37%.
D 33%.
E 19%.

Figura 2: Questão 164 do ENEM 2009.

A figura 3 mostra a questão 174 também da prova azul do ENEM 2009. Para a resolução da questão, o aluno necessita compreender que a variação horizontal, correspondente ao movimento de Q sobre o eixo *x*, informa a variação do cosseno do ângulo e que se a distância *d*, sobre o círculo, deve ser menor ou igual ao raio *r*, isso significa que a distância percorrida pelo ponto P deve ser menor do que 1 radiano. Esse raciocínio conduz à informação de que o argumento da função está medido em radianos, que é obtido pela razão *d/r*, logo a distância que P percorre sobre o eixo é dada pela expressão do item *b*.

Questão 174

Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo *x*, uma distância dada por

A) $r\left(1 - \text{sen}\dfrac{d}{r}\right)$.

B) $r\left(1 - \cos\dfrac{d}{r}\right)$.

C) $r\left(1 - \text{tg}\dfrac{d}{r}\right)$.

D) $r\,\text{sen}\left(\dfrac{r}{d}\right)$.

E) $r\cos\left(\dfrac{r}{d}\right)$.

Figura 3: Questão 174 da prova azul do ENEM 2009.

A partir do que foi observado sobre os conhecimentos citados na matriz de referência do ENEM e pela análise das questões, podemos perceber que o ENEM não tende a exigir dos alunos memorizações de fórmulas, de regras e de valores para as razões trigonométricas, mas pretende verificar a capacidade de analisar, de relacionar, de interpretar informações matematicamente a partir do domínio de conhecimentos básicos ou fundamentais da Trigonometria.

Na elaboração da sequência de ensino, levou-se em consideração essa característica do ENEM, ou seja, buscou-se o desenvolvimento dos conhecimentos básicos da Trigonometria a partir da compreensão desses conhecimentos e não pela memorização de fórmulas trigonométricas.

1.2 EXPERIÊNCIAS DOCENTES COM O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Durante minha graduação, participei de um programa de Iniciação Científica, promovido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, no qual pesquisei dificuldades que alunos da disciplina de Cálculo e Geometria Analítica IA apresentavam, relativas às suas noções sobre funções. Essa disciplina aborda o Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável e é oferecida para alunos calouros de vários cursos da universidade. Após a conclusão da graduação, no período de 2006 a 2008, pude continuar observando o aprendizado e as dificuldades de alunos de Cálculo, porém como professora substituta na mesma universidade.

Desde 2008 até maio de 2011, fui professora de Matemática no Colégio Marista Assunção, escola particular de Porto Alegre. Durante esse período, trabalhei com turmas do segundo ano do Ensino Médio, além de outros níveis.

Essas minhas experiências permitiram-me observar que a Trigonometria é vista tanto por alunos do Ensino Médio quanto por alunos ingressantes no Ensino Superior como um conteúdo difícil, sem sentido ou com poucas aplicações práticas e que requer o conhecimento de um extenso formulário para utilização na resolução de exercícios. Nessas minhas experiências como professora, ouvi, diversas vezes dos alunos, que nas provas as questões de Trigonometria eram as mais difíceis e, muitas vezes, elas eram deixadas em branco.

Comentar essas experiências docentes é importante, pois as primeiras, como bolsista de Iniciação Científica e como professora substituta na UFRGS, permitem exemplificar alguns tipos de erros cometidos pelos alunos em questões que envolvem a Trigonometria e, a segunda experiência, como professora do Colégio Marista Assunção, motivou a elaboração do material que compõe a sequência de ensino baseada em atividades que utilizam o *software* GeoGebra.

1.2.1 Dificuldades apresentadas por alunos do Cálculo I relativas ao estudo da Trigonometria

Durante o ano de 2005, fui bolsista de Iniciação Científica na Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS sob a orientação das Professoras Elisabete Zardo Búrigo e Luisa Rodriguez Doering. Nesse período, realizamos a pesquisa intitulada *Investigação em turmas* *de Cálculo: noções de função*, que estava inserida dentro do projeto *Ensino e Aprendizagem de Cálculo*, que teve seu início no ano de 2003.

Esse trabalho teve por objetivos

> compreender como os alunos vêm construindo as noções de função, as dificuldades que enfrentam ocasionadas por noções, muitas vezes fragmentadas, sobre esse assunto e como os alunos superam essas dificuldades (PEDROSO, 2006).

Os dados coletados foram obtidos através da observação de turmas especiais de Cálculo I (compostas por um número reduzido de alunos e que tiveram mais de uma reprovação na disciplina), por análise de provas dos alunos, por entrevistas com eles e preenchimento de questionário. Entre as várias dificuldades observadas na construção do conceito de função, as dificuldades relativas aos conceitos trigonométricos, às funções trigonométricas e suas inversas apareceram com grande frequência. Abaixo exponho cinco exemplos de erros e dúvidas apresentadas por alunos transcritos do Relatório da Pesquisa[1]:

> a) Na resolução de um exercício em que apareceu $\ldots = \frac{1}{5}\int \frac{d\theta}{sec\,\theta} = \frac{1}{5}\int cos\,\theta d\theta = \ldots$, um aluno pergunta: "Como é que saiu a secante ali de baixo?".
>
> b) Rogério comenta, sobre a função *f(x)* = *x* + *sen x*: "Derivar é fácil, mas é impossível de interpretar!".
>
> c) Dúvida de um aluno para calcular o $\lim\limits_{\theta \to \infty} \frac{sen\,3\theta}{\theta}$: "Posso passar o 3 pra fora?" .
>
> d) Em outra questão, da segunda área, sobre taxas de variação envolvendo Trigonometria, a aluna escreve: $cos\,\theta = \frac{5}{3}$ (sendo que $-1 \leq cos\,\theta \leq 1$).
>
> e) Para a questão "*Determine o valor máximo absoluto da função* $f(\theta) = -cos\,\theta - sen^2\,\theta$ *no intervalo* $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$", ele deriva corretamente e encontra o valor correto, mas divide a derivada por "*sen* θ", não se dando conta de que este valor pode ser zero e, mais adiante, conclui que, se $cos\,\theta = \frac{1}{2}$, então $\theta = \frac{\pi}{3}$, esquecendo que este valor pode ser negativo também (PEDROSO, 2006).

No exemplo *a*, observa-se que o aluno não consegue identificar a identidade trigonométrica $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, portanto não observou que foi feita uma substituição na integral por essa identidade. No exemplo *b*, outro aluno comenta sobre a sua dificuldade de interpretar a lei da função. Essa dificuldade mostra que o aluno não está conseguindo desenvolver interpretações e/ou construções gráficas, que podem ser feitas com o auxílio do estudo das primeira e segunda derivadas da função e dos limites. Ou, até mesmo, a dúvida pode ser mais básica: o aluno pode estar pensando em x como um ângulo medido em graus e não em radianos, dessa forma fica sem significado, por exemplo, a expressão

$$f(30°) = 30° + sen(30°)$$

$$f(30°) = 30° + 0,5$$

O exemplo *c* mostra uma dúvida comum dos alunos que envolve a ideia de simplificação em uma fração. Essa dúvida pode ser resolvida com um contra-exemplo: se $x = \frac{\pi}{3}$, então: $\frac{sen(3.\pi/3)}{\frac{\pi}{3}} = \frac{sen\,\pi}{\frac{\pi}{3}} = 0$, o que é bem diferente de "passar o 3 para fora" e obter $\frac{3.\,sen(\pi/3)}{\frac{\pi}{3}} = 3.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{\pi} = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$. Porém eles não costumam fazer esse tipo de teste, o que também pode ser explicado pela dificuldade em se trabalhar com a variável x em radianos.

O exemplo *d* mostra claramente que a aluna não compreende que o cosseno de θ nunca será maior do que um, ou menor do que -1. Isso pode estar relacionado com a falta de significado do cosseno para a aluna. Ela poderia pensar que, em um triângulo retângulo, o cosseno é a razão entre as medidas do cateto adjacente e da hipotenusa e que, como a hipotenusa é sempre o maior lado, a razão será maior que zero e menor do que 1. Estendendo a ideia de cosseno para ângulos quaisquer no círculo trigonométrico, tem-se que o raio do círculo é 1, portanto o cosseno estará variando entre -1 e 1 inclusive.

No exemplo *e*, o aluno não encontra a outra possível solução, claramente ele não percebeu os valores simétricos nos outros quadrantes do ciclo trigonométrico. Todos esses exemplos indicam que há alunos que chegam à universidade com dificuldades de raciocinar sobre os conteúdos trigonométricos, relacionando esses conhecimentos entre si. Também são indícios de que alguns alunos constroem um conhecimento fragmentado, onde conhecem algumas fórmulas ou formas decoradas de resoluções e que, quando é exigido um pouco mais de autonomia e interpretações na resolução de um problema ou exercício, eles não conseguem realizá-los.

Após o desenvolvimento dessa pesquisa, trabalhei durante dois anos (de agosto de 2006 até julho de 2008) como professora substituta no Instituto de Matemática da UFRGS lecionando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral IA. Esse trabalho permitiu-me também observar que as dificuldades com a Trigonometria apresentadas na pesquisa reapareceram.

Essas experiências que tive no Ensino Superior com o ensino e aprendizagem de Trigonometria foram fundamentais para que eu me questionasse sobre o que eu poderia fazer de diferente para auxiliar os meus alunos da Educação Básica a terem uma compreensão melhor desse conteúdo. Permitiram também que eu refletisse sobre o que eu poderia fazer para que as aulas ficassem mais interessantes, mais dinâmicas e quem sabe até poder ampliar o grupo de alunos com interesse pela área das ciências exatas. Enfim, essas experiências levaram-me a pensar sobre quais os tipos de recursos que eu poderia utilizar para ajudar na compreensão das relações trigonométricas para que os alunos não cometessem erros do tipo

$$\frac{sen\,\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = sen$$

e que tipos de atividades poderiam ser elaboradas para a superação dessas dificuldades.

1.2.2 Dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio

Ao longo das minhas experiências docentes no Ensino Médio, pude perceber diversas dificuldades apresentadas por muitos alunos, por exemplo: a) frequentemente, muitos não conseguiam aplicar as razões trigonométricas na resolução de problemas, ou seja, em uma situação simples como calcular a altura de um prédio, sabendo a distância até um certo ponto no solo e o ângulo sob o qual se avista o topo de um prédio a partir desse ponto, os alunos utilizavam seno ou cosseno ao invés da tangente, ou ainda, substituíam a tangente pelo valor do ângulo ($tg\ 30° = 30$); b) decoravam os sinais de seno e de cosseno nos quadrantes do círculo trigonométrico, sem conseguir entender porque o seno é positivo no 2° quadrante, negativo no 3°, e assim por diante; c) não compreendiam o que era radiano, frequentemente escreviam igualdades parecidas com $sen\ 1 = 1$ ou $sen\ 0{,}5 = 30°$; d) tentavam decorar as fórmulas de redução ao 1° quadrante para cada razão, ou seja, um total de nove fórmulas diferentes; e) não conseguiam estabelecer as principais diferenças ou semelhanças entre os gráficos de seno e cosseno; f) na resolução de equações trigonométricas, na maioria das vezes, esqueciam os valores de arcos simétricos que também eram soluções da equação.

Esses são apenas alguns exemplos dos erros que frequentemente observava nas perguntas que os alunos faziam em aula, na resolução de provas, na resolução de exercícios propostos em aula e para serem resolvidos em casa. Esses erros mostram a ausência de significado desses conteúdos e que, basicamente, os alunos fixavam-se em decorar fórmulas para tentar resolver exercícios.

1.2.3 A Trigonometria nos livros didáticos adotados pela escola onde a experiência foi realizada

A análise de livros didáticos foi considerada importante para o desenvolvimento da sequência de ensino, pois o livro didático pode ser uma importante ferramenta de apoio para os professores em sala de aula e uma fonte alternativa de estudo para os estudantes.

Para a realização desse trabalho, julgou-se interessante fazer uma breve análise do livro adotado até o ano de 2010 pela escola em que foi realizada a experiência de ensino e do livro adotado em 2011 por essa mesma escola. Optou-se pela análise desses dois livros para ter-se uma ideia de como a Trigonometria é abordada por esses recursos de apoio ao ensino na escola.

O capítulo referente à Trigonometria no livro Matemática – Contexto e Aplicações, de Luiz Roberto Dante (2006), adotado até 2010 pela escola, inicia com uma breve introdução que aborda o significado da palavra Trigonometria e, em seguida, passa a comparar rampas que aparecem em figuras, questionando qual é a mais íngreme. Conclui essa introdução dizendo que situações que envolvem ângulos e lados podem ser resolvidas através da Trigonometria. A segunda parte do capítulo é intitulada "índice de subida". Uma rampa em forma de triângulo retângulo (ver figura 4) é apresentada com as denominações: percurso, afastamento e altura. Com base em alguns triângulos semelhantes ao triângulo dado, é feita uma listagem das razões entre altura e afastamento para cada triângulo e conclui-se que essa razão é sempre uma constante para a mesma subida e que essa constante é o índice de subida. Outra figura é apresentada com índice de subida diferente. Pede-se ao estudante, no item “para refletir”, como devem ser o afastamento e a altura para se ter um índice de subida igual a 1 (um) e maior do que 1 (um). Cinco exercícios são apresentados e neles pede-se para calcular o índice de subida, ou é dado o índice e pede-se para calcular o afastamento ou a altura. Um dos exercícios pede que o estudante desenhe uma rampa com um índice dado. Ainda dentro desse segundo tópico é estabelecida uma comparação entre ângulo de subida e índice de subida.

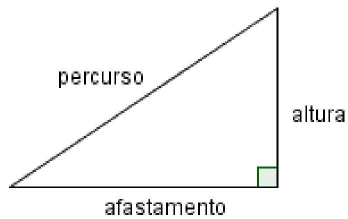


Figura 4: Triângulo com lados denominados percurso, afastamento e altura.

Os tópicos três, quatro e cinco abordam, respectivamente, as ideias de tangente, seno e cosseno. A figura da rampa aparece novamente e diz-se que a palavra tangente irá representar a razão entre a altura e o afastamento: “Usaremos a palavra tangente para associar a medida do ângulo de subida e o índice na mesma subida. A tangente do ângulo de subida é igual ao índice de subida associado, e o indicaremos por k_1” (DANTE, 2006, p.200). Em seguida, volta-se ao problema inicial citado na introdução que era saber qual rampa era mais íngreme, sem conhecer as medidas dos ângulos. Comparam-se as tangentes de cada ângulo e responde-se à questão. Os tópicos quatro e cinco são desenvolvidos de maneira semelhante ao da tangente. Em cada um desses tópicos aparece o quadro intitulado “para refletir”. As questões envolvem fixar o percurso, pensar em um ângulo α maior do que β e responder qual terá a maior altura, qual valor de seno/cosseno será maior e qual das subidas é mais íngreme.

No sexto tópico, intitulado “O triângulo retângulo”, são dadas as definições do que é um triângulo retângulo, o que é hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente, e também são reescritas as razões trigonométricas utilizando essa nomenclatura. O quadro “para refletir” pede que o estudante justifique a afirmação de que “em todo triângulo retângulo um ângulo é reto e os outros dois são agudos e complementares” (DANTE, 2006, p.201). É dado um exercício que pede que o estudante, utilizando um transferidor, construa um triângulo retângulo com um ângulo de 40º e calcule as três razões vistas com uma precisão de três casas decimais; pede ainda que confira suas respostas na tabela de razões trigonométricas dada no final do capítulo.

Ainda no sexto tópico, são feitas simples manipulações algébricas para isolar, nas razões trigonométricas, ora a medida do cateto oposto, ora a da hipotenusa, ora a do cateto adjacente, isso para mostrar que em qualquer triângulo retângulo em que são conhecidos um ângulo e um lado pode-se obter todas as medidas dos lados e dos ângulos consultando na tabela trigonométrica os valores de seno, cosseno ou tangente do ângulo conhecido. No quadro “para refletir”, afirma-se que os valores de seno e cosseno de um ângulo agudo variam entre 0 e 1 e que a tangente desse mesmo ângulo é sempre maior do que 0. Em seguida, mostra-se: que o seno e o cosseno de ângulos complementares são iguais, a relação fundamental da Trigonometria, obtida a partir do Teorema de Pitágoras ($sen^2\, x + cos^2\, x = 1$), e que a tangente de α pode ser escrita em função de seno e cosseno de α.

Finalizando esse capítulo inicial¸ é feito um quadro resumo de tudo o que foi visto até o momento, são mostrados quatro exercícios resolvidos que envolvem cálculos diretos das razões trigonométricas, ou das medidas dos lados, ou das medidas dos ângulos e são dados exercícios para os estudantes resolverem, parecidos com os exemplificados. Em um item à parte, estão as aplicações que envolvem resolução de problemas. Nesse ponto são apresentados, como exemplos, os contextos: descobrir a altura que uma pessoa atingiu, com relação ao solo, ao subir por uma rampa; descobrir o comprimento de um cabo que liga o pé de uma árvore ao topo de uma encosta reta; calcular a distância de um barco até uma plataforma marítima; calcular a altura de uma montanha utilizando-se duas medições de ângulos e a distância entre os pontos em que foram feitas essas duas medições; calcular a medida do raio da Terra. Contextos que aparecem em problemas propostos para os estudantes resolverem: calcular a altura atingida por um caminhão, em relação ao solo, ao subir uma rampa; calcular a largura de um rio; calcular a altura máxima atingida por uma moeda lançada por um *cowboy* que a atinge com dois tiros quando seu braço faz determinado ângulo com a horizontal; calcular a distância de uma ilha até a praia, sendo conhecido o ângulo de depressão do topo de uma torre nessa ilha e a altura dessa torre; calcular a altura atingida por um avião no instante em que ele passa por uma torre distante 2km do ponto de levantamento de voo; calcular a altura de um telhado; calcular o módulo dos vetores horizontal e vertical que são a decomposição de um vetor de inclinação igual a 30º; calcular a altura do Pão de Açúcar, quando informadas duas medições de ângulos e a distância entre os pontos de medição; calcular a medida do raio da Terra, sabendo a altura da montanha em que está o Cristo Redentor e o ângulo que um observador obtém com a linha do horizonte; aplicações à Física: cálculo de trabalho, força e mais vetores.

Desses contextos, considero um exemplo de aplicação sem sentido o exercício do *cowboy* atirando em uma moeda. Uma vez que, se o *cowboy* atinge a moeda com um tiro, ela mudará sua trajetória, portanto não se poderá imaginar a representação da situação como um triângulo retângulo. O enunciado do exercício diz para se considerar que não há mudança nessa trajetória, ou seja, a moeda continua caindo perpendicularmente ao solo depois do tiro. Nesse caso, não há sentido no contexto.

O capítulo termina com três textos sobre a história da Trigonometria que são apenas informativos, ou seja, não é proposta nenhuma atividade a partir deles.

A série Matemática, de autoria de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr., é composta por três livros, um para cada ano do Ensino Médio. No primeiro livro, é feita uma revisão da Trigonometria no triângulo retângulo. Primeiro, explica o que são cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa, depois, são dadas as definições das razões. Basicamente, os exercícios de aplicações são: calcular altura de prédio, de torres, de árvores, largura de rio, entre outras. Uma diferença significativa entre esse livro e o outro é que no primeiro há uma pequena explanação sobre o significado da Trigonometria e comenta-se um pouco de sua história, seja no início ou no fim do capítulo. Já nesse, não é citado em nenhum momento o significado da palavra Trigonometria e nem são feitas referências à parte histórica.

O próximo conteúdo desenvolvido é o das relações trigonométricas em um triângulo qualquer. Os autores começam dizendo o que são ângulos suplementares e já definem que o seno de um ângulo x é igual ao seno de seu suplemento $180° - x$ e que o cosseno de um ângulo x é igual ao oposto do cosseno de seu suplemento.

Percebo aqui uma precipitação no tratamento dessas informações, pois não há justificativa dada aos alunos para essas igualdades, principalmente com relação ao cosseno, pois essas razões foram vistas, até esse momento, como o quociente de duas medidas, portanto com resultados positivos. Agora, como aparece esse resultado negativo?

Na sequência, seguem as demonstrações das leis dos cossenos, em triângulos acutângulos e obtusângulos, e dos senos em triângulo acutângulo. A parte teórica é finalizada com a demonstração da fórmula da área de um triângulo qualquer. Seguem então exercícios resolvidos como exemplos e outros para os alunos resolverem. Alguns desses exercícios envolvem aplicações diretas das fórmulas e em outros, há um contexto, como calcular a distância de um barco até um certo ponto, calcular o comprimento de um túnel e o comprimento de uma ponte sobre um rio.

Até essa parte da análise, percebo que em ambos os livros há uma preocupação com a apresentação de exercícios que mostram basicamente uma das aplicações da Trigonometria: cálculo de distâncias inacessíveis. As explicações em geral apresentam informações que alunos do Ensino Médio já devem ter condições de acompanhar, porém percebo alguns aspectos que poderiam ser modificados.

O livro de Dante (2006) dedica um tempo significativo ao trabalho com os termos: percurso, afastamento, altura, índice de subida (figura 5a). Em seguida, define as razões trigonométricas em função desses termos. Somente após esse estudo inicial é apresentada a definição do que são cateto adjacente, cateto oposto e hipotenusa. Por fim, são retomadas as definições das razões com a linguagem formalizada. Acredito que esse excesso de informação pode causar mais confusão aos alunos do que ajudá-los. Basta observar o seguinte: a palavra altura, como está colocada no texto, é válida como a altura de uma rampa, portanto o triângulo retângulo teria que estar em uma posição fixa; as palavras percurso (usada no lugar de hipotenusa) e afastamento (usada no lugar de cateto adjacente) poderiam muito bem ser trocadas (figura 5b), pois o que impede o aluno de pensar que afastamento é a distância percorrida pela pessoa do ponto inicial até o ponto em que ela subiu na rampa? Por que o percurso não pode ser entendido como a distância do ponto inicial até a posição da pessoa vista na horizontal? E se o triângulo retângulo em um exercício estiver posicionado de uma forma diferente, por exemplo, com a hipotenusa na horizontal (figura 5c), e o aluno tiver memorizado as razões trigonométricas utilizando as palavras percurso, altura e afastamento, será que ele conseguirá calcular as razões identificando corretamente a altura, o percurso e o afastamento?

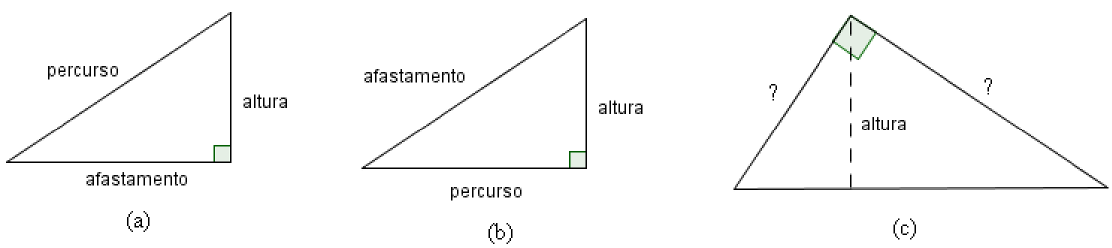


Figura 5: Possíveis utilizações dos termos percurso, afastamento e altura.

O capítulo seguinte do livro de Dante (2006) trata do seno e cosseno de ângulos obtusos e das leis de seno e cosseno para triângulos quaisquer de forma muito semelhante ao que foi feito no livro de Giovanni *et.al.* (2007). Inclusive, o mesmo comentário feito anteriormente sobre o tratamento de $cos\ x = -\ cos\ (180° - x)$ aplica-se aqui.

O segundo livro do sistema de ensino da FTD inicia com um estudo sobre arcos e ângulos. O próximo capítulo do livro de Dante (2006) também segue esse conteúdo. A partir desse ponto, a sequência dos conteúdos é semelhante nas duas coleções: estudo de arcos e ângulos e suas unidades de medida (radiano e grau), círculo trigonométrico, arcos côngruos, simetrias, seno e cosseno no círculo trigonométrico, reduções ao primeiro quadrante, função seno, função cosseno, tangente e função tangente, funções secante, cossecante e cotangente, relações trigonométricas, equações trigonométricas, inequações trigonométricas, fórmulas de adição e subtração de arcos, fórmulas de arco duplo, fórmulas de transformação em produto, fórmulas de divisão de arcos (FTD) e técnicas para demonstração de identidades (FTD).

Algumas considerações devem ser feitas comparando-se os dois livros: em ambos, na parte relativa ao estudo dos gráficos das funções seno e cosseno (com transformações), é enfocada a construção de tabelas com os valores de seno e cosseno dos chamados ângulos notáveis (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° e 360°) para obtenção dos gráficos, ou seja, não se destacam as construções pelas transformações. Por exemplo, ao invés de se construir uma tabela de valores para, a partir dela, esboçar o gráfico da função $f(x) = 1 + sen\ x$, poderia-se obtê-lo pensando-se no deslocamento vertical do gráfico de $sen\ x$. O livro de Dante (2006) sugere apenas uma comparação em um exemplo resolvido através do quadro "Para refletir": "Verifique que mudanças ocorreram nos gráficos de $f(x) = 3.sen\ x$ com relação a $f(x) = sen\ x$ e $f(x) = 1 + cos\ x$ com relação a $f(x) = cos\ x$" (DANTE, 2006, p.250). A estratégia de construir gráficos com base em alguns pontos não enfatiza as propriedades das funções seno e cosseno, como crescimento e periodicidade, que são conservadas pelas transformações que geram as funções do tipo $y = a + b.sen\ (cx + d)$.

O livro da FTD não aborda exercícios de cálculo de seno, de cosseno e de tangente que não sejam dos ângulos mais comumente utilizados (adotados como referência): 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360° e de seus simétricos e/ou côngruos. Sobre ângulos diferentes desses, aparecem alguns exercícios de análise de sinal, nos quais não é necessária a determinação de valores. No livro de Dante, aparecem alguns exercícios em que os alunos devem consultar a tabela com valores de seno, cosseno e tangente para ângulos de 0° a 90°, com variação de 1 em 1 grau.

Esse tratamento, enfocando os ângulos adotados como referência, passa a ideia para o aluno de ângulos fixos, elementos estáticos, sem variação, logo seno, cosseno e tangente também parecem sempre ter os mesmos valores. Até mesmo o modo como são construídos os gráficos, por tabelas, induz os alunos a pensarem sempre nos mesmos valores.

Outro aspecto que deve ser considerado é que, no início do estudo de arcos e ângulos, é feito, em ambos os livros, o estudo da unidade radiano, trabalham-se exercícios que envolvam comprimento de círculos, comprimento de arcos, etc. Porém, no decorrer das seções a unidade radianos torna-se "π radianos", ou seja, nos exercícios e explicações aparecem os arcos de medidas $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, entre outros, em que os estudantes apenas trocam π por 180°. Esse procedimento os induz a entenderem "π radianos" não como um arco de, aproximadamente, 3,14 radianos, mas unicamente como o ângulo de 180°, que é tomado como referência para a conversão entre graus e radianos. Os alunos não são levados a pensar, por exemplo, no significado de *sen* 2, ou *cos* (-1).

A quantidade de exercícios propostos aos alunos é grande nos dois livros. O livro da FTD, além dos diversos blocos com cerca de 10 a 20 exercícios e/ou problemas ao longo das seções, no final do capítulo, apresenta um caderno de atividades com 178 exercícios e/ou problemas extras. Em ambos, aparecem problemas que envolvem funções trigonométricas como: estudo de variação de temperatura e variação de marés, no livro do Dante, e movimento de roda-gigante, variação de marés, variação do custo de determinado produto, variação da distância atingida por um objeto lançado obliquamente, variação da quantidade mensal de produtos vendidos e variação de ar nos pulmões, no livro da FTD.

Durante minhas experiências docentes na escola utilizei esses dois livros didáticos. Pude perceber que ambos apresentavam aspectos que precisavam ser abordados de maneiras diferentes. Esses aspectos foram comentados durante a análise, mas podemos resumi-los como: informações em excesso e confusas (como a utilização das palavras afastamento, percurso e altura na definição das razões trigonométricas); algumas contextualizações falsas ou equivocadas (como o exemplo do *cowboy*); apresentação de definições de modo que não fazem sentido para os alunos (como o cosseno negativo, quando o cálculo das razões só havia sido desenvolvido considerando-se medidas positivas); tratamento de seno, cosseno e tangente como valores fixos (com explicações e exercícios que enfocam sempre os mesmos ângulos de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° e 360°); a unidade de medida radiano é trabalhada inicialmente, mas nos capítulos seguintes enfocam a transformação para a unidade grau e o radiano é deixado de lado; os gráficos das funções são construídos de forma padronizada e fixa (por tabelas).

Durante minhas aulas, utilizava os livros didáticos como complemento ao meu trabalho, aproveitando o que considerava relevante e abordando de forma diferente (utilizando material desenvolvido por mim em folhas ou escrevendo conteúdos no quadro) o que eu acreditava que precisava ser melhorado. Percebi que, ainda assim, os alunos não aprendiam ou compreendiam a maior parte dos conceitos que eu julgava serem fundamentais. Eram tantos conteúdos abordados, tantos exercícios solicitados que os alunos acabavam optando por decorar, por exemplo, os valores principais de seno, cosseno e tangente dos ângulos citados anteriormente e decorar a resolução de alguns exercícios para se prepararem para uma prova e nada mais. Portanto, nem minhas aulas, nem o livro didático estavam conseguindo proporcionar situações que promovessem a compreensão dos conteúdos trigonométricos de forma significativa para a maioria dos alunos.

Um dos objetivos da elaboração de uma sequência de ensino alternativa foi suprir as falhas apresentadas nos livros e nas aulas e reorganizar os conteúdos como acredito ser mais coerente para o aprendizado dos alunos: de forma mais dinâmica, mais interessante, com menor quantidade de exercícios, mas com exercícios e problemas significativos, lavando os alunos a refletirem, testarem possibilidades, experimentarem e construírem conceitos de forma mais significativa para eles.

1.3 ABORDAGENS DIFERENCIADAS PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA

Nesta seção, descrevo brevemente alguns trabalhos sobre ensino da Trigonometria que foram consultados por ocasião da pesquisa. Diversos trabalhos[6] apontam para novos rumos na abordagem desse conteúdo em sala de aula. Frequentemente, utilizam materiais concretos, a resolução de problemas e os recursos de informática (*softwares*) como meios de qualificar o ensino da Trigonometria. As diferenças básicas entre esses materiais alternativos estão no tipo de *software* utilizado, na opção de trabalhar apenas uma parte da Trigonometria com o auxílio de *software* ou estendendo esse tipo de trabalho para a maior parte do conteúdo, no tipo de atividade proposta pelo professor com o uso desses recursos, nos tipos de materiais concretos e como eles são usados. Nesse tópico, portanto, relato algumas dessas propostas a que tive acesso durante o processo de construção da experiência de ensino.

Costa (1997) realizou uma investigação sobre a influência que os contextos "computador" e "mundo experimental" trazem para a aprendizagem da Trigonometria. A autora escolheu o assunto: funções seno e cosseno. Elaborou duas sequências de ensino para serem aplicadas para duas turmas do 2° ano do Ensino Médio: uma introduziu o assunto por meio de atividades com o uso do computador (utilizou os *softwares* Cabri-Géomètre[7] e Graphmatica[8]) e, posteriormente, continuou abordando o assunto por meio de manipulações no "mundo experimental" (problemas e experiências práticas sobre funções trigonométricas), a outra sequência abordou o assunto em ordem foi invertida, isto é, começou com as manipulações no "mundo experimental" e terminou com as atividades no computador. A

[6]Como os trabalhos de Costa (1997), Klein (2009), Goés e Colaço (2009) e Piva (2009).

[7] Cabri-Géomètre é um *software* de geometria dinâmica que precisa de uma licença paga para sua utilização .

[8] Disponível em: <http://graphmatica.apoiomatematica.net> Acesso em: ago. 2011.

autora buscou verificar qual organização metodológica culminaria em melhor aprendizagem para seus alunos e procurou também investigar a "eficácia de cada contexto e sua interferência no momento da aprendizagem" (Ibidem, 1997, p. 91). A comparação das metodologias foi baseada nos resultados obtidos em três fases avaliativas: pré-teste, teste intermediário e pós-teste. Destacarei aqui seu trabalho com os *softwares*. Costa desenvolveu atividades em que os alunos acessavam os arquivos do Cabri com construções prontas, os alunos podiam manipular essas construções e responder as questões no roteiro entregue em papel. Em outras atividades, específicas para análise de gráficos, os alunos digitavam as funções no Graphmatica e analisavam os gráficos registrando suas conclusões no roteiro. Os conteúdos abordados foram: triângulo retângulo (retomada de conteúdos já vistos anteriormente), ciclo trigonométrico e relação fundamental da Trigonometria, seno e cosseno no ciclo, gráfico de seno e cosseno (feito à mão pelos alunos a partir de valores observados no ciclo), simetrias, transformações nos gráficos de seno e cosseno. A autora comparou as avaliações dos dois grupos experimentais com um grupo de alunos que estavam tendo aulas regulares e concluiu que os dois contextos (do mundo experimental e do computador) possibilitaram um melhor aprendizado por parte dos alunos. Concluiu que o grupo que primeiramente trabalhou com os problemas e depois com as atividades no computador teve um melhor desempenho tanto no teste intermediário quanto no pós-teste.

Marjúnia Klein (2009) apresenta, para uma turma do segundo ano do Ensino Médio, uma sequência de atividades que envolvem recursos diferenciados. O objetivo de Klein é "propor e avaliar uma metodologia de ensino, baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, que possa contribuir para a construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual trigonometria" (2009, p. 22). A autora especifica outros objetivos: investigar concepções prévias, elaborar atividades significativas, investigar conhecimentos-em-ação dos alunos e avaliar o aprendizado sob essa perspectiva. Inicialmente, realiza uma atividade de avaliação de conteúdos prévios dos alunos, estudados na oitava série do Ensino Fundamental. Essa atividade consistiu na exploração de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo. A partir dessa avaliação dos conhecimentos prévios, a autora elaborou sete situações didáticas, procurando utilizar materiais concretos, recursos diferentes (como o *software* Graphmatica) e resolução de problemas. Os conteúdos abordados nas situações foram: razões trigonométricas no triângulo retângulo; relações entre grau e radiano; seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico; arcos côngruos; reduções ao primeiro quadrante; funções seno, cosseno e tangente e as transformações de alongamento e compressão vertical e deslocamento vertical nos gráficos dessas funções. Alguns materiais concretos utilizados pela autora foram: triângulos retângulos confeccionados em E.V.A., régua, transferidor, astrolábio (confeccionado pelos alunos), fita métrica, círculos confeccionados em E.V.A, círculos trigonométricos (confeccionados a partir de um modelo em papel, com canudinhos, bailarina - objeto para prender os canudinhos no molde - folha de papel transparente, cola, tesoura e percevejos), folha quadriculada e papel pardo para construção gráfica.

A autora concluiu seu trabalho destacando as contribuições que a sua sequência de ensino promoveu para o ensino:

> Verifica-se que essa metodologia favorece a concentração dos alunos, sua participação, seu envolvimento, sua criatividade; a possibilidade de argumentação, o levantamento de hipóteses, a reflexão, a oportunidade de estarem mais preparados para resolverem problemas do cotidiano (KLEIN, 2009, p.95).

Góes e Colaço (2009) desenvolveram o artigo "A Geometria Dinâmica e o Ensino da Trigonometria" (2009). O objetivo desse trabalho era experimentar uma metodologia que utilizasse um *software* de Geometria Dinâmica para criar uma motivação maior para os alunos e que permitisse a eles descobrir e construir conhecimentos. Nesse artigo, os autores relatam uma experiência de ensino realizada em uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental. Essa experiência utilizou o *software* CaR Metal[9] para a construção de triângulos de ângulos de 30°, 45° e 60° e posterior cálculo das razões trigonométricas. A respeito desse trabalho destaco que os ângulos, nos passos das construções, foram fixados, ou seja, o aluno não tinha a liberdade de mover um ponto para mudar o ângulo indicado. Em segundo lugar, os triângulos foram construídos no primeiro quadrante de um círculo, porém o círculo trigonométrico não foi abordado de forma alguma, a não ser pela mudança do seu raio, para ampliação ou redução dos triângulos, processo que poderia ser feito sem a imagem desse círculo. A utilização do *software* apresentou um problema, o mesmo que apareceu na utilização do GeoGebra e que será comentado ao longo do relato: durante o cálculo das razões com as medidas encontradas para os catetos, encontraram-se valores diferentes, ou seja, um pequeno erro de aproximação resultante dos arredondamentos que o *software* fez.

O trabalho "Explorando Conceitos da Trigonometria Através de *Software* Livre", realizado por Piva, Dorneles, Spilimbergo e Dosciati (2009), e consiste em um mini-curso sobre a utilização de *softwares* livres para o ensino da Trigonometria. Os *softwares* livres

---

[9] Disponível em: <http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/> Acesso em: ago.2011.

Trigonometria[10] e Círculo Trigonométrico[11] foram utilizados nesse mini-curso. O objetivo desse mini-curso foi "socializar com alunos de licenciatura e professores uma possibilidade de trabalho em sala de aula fazendo uso de *softwares* livres para o ensino da trigonometria" (Ibidem, p.1). Sugestões de como trabalhar com os programas ou propostas de atividades não foram relatadas, porém, acessando-se o programa Trigonometria, percebe-se que ele pode ser utilizado como apoio para uma aula do professor, pois apresenta as definições das razões trigonométricas obtidas a partir de triângulo retângulos, os gráficos das seis funções trigonométricas básicas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e tangente) e das inversas (arco seno, arco cosseno...), ilustrações de relações entre ângulos (complementares, suplementares e simétricos) e uma tabela com inúmeras fórmulas trigonométricas. Esse *software* mostra construções animadas, porém todas são prontas, ou seja, o aluno não faz construções, apenas observa.

A busca por trabalhos e propostas de ensino diferenciado da Trigonometria objetivou conhecer o que outros professores e pesquisadores estavam pensando e realizando nos últimos anos sobre o tema. Esses trabalhos mostram que muitas propostas estão surgindo com o intuito de melhorar o ensino da Trigonometria, promovendo um ensino diferenciado através de atividades elaboradas com ideias, materiais e recursos alternativos. Oportunizou também a observação de aspectos que não foram contemplados nas experiências desses professores e pesquisadores ou que poderiam ser abordados de outras maneiras.

Os estudos aqui apresentados não utilizaram *softwares* na abordagem de todos os conteúdos propostos. Os autores selecionaram uma parte do conteúdo para ser desenvolvida com auxílio desse recurso. Acredita-se que seja possível desenvolver uma sequência que aborde todos os conteúdos trigonométricos propostos com o auxílio de *softwares*, com o objetivo de promover a manipulação de construções geométricas, observação de medidas de lados, de ângulos, de arcos, entre outros.

O instrumento utilizado por Klein (2009) para a visualização de ângulos no círculo trigonométrico e de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente não favorece a compreensão das simetrias entre os ângulos nos quadrantes. A autora não enfocou em seu trabalho a resolução de equações trigonométricas. Com relação à construção gráfica, a autora optou por construir os gráficos em três etapas: papel quadriculado, papel pardo e computador.

---

[10] Disponível em: <http://josefleal.no.sapo.pt> Acesso em: ago. 2011

[11] Disponível em:<http://www.giase.min-edu.pt/nonio/softeduc/soft3/circ.htm.>

As duas primeiras atividades correspondem à marcação dos valores padrão de seno e cosseno (calculados com referência aos ângulos de 0°, 30°, 45°, ..., 360°) e a atividade no computador abordou somente deslocamento e alongamento/compressão vertical.

Esses aspectos destacados poderiam ser abordados de maneira alternativa: com a utilização de um *software* que aborde Geometria e Álgebra. A utilização de um programa de Geometria e Álgebra pode possibilitar uma melhor compreensão das simetrias e, consequentemente, do cálculo das reduções ao primeiro quadrante; pode possibilitar também a observação dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno de forma dinâmica, a partir da modificação dos valores dos parâmetros na própria tela e consequente movimento das curvas (o que é diferente de digitar a função no programa e ele mostrar o gráfico fixo e pronto da função); e pode possibilitar a compreensão das equações trigonométricas através das suas resoluções no círculo trigonométrico.

Com relação ao trabalho de Góes e Colaço (2009), observei apenas que seu objetivo era abordar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Foram enfocados os ângulos de 30°, 45° e 60°, ou seja, novamente aparece a ideia de que só se podem calcular seno, cosseno e tangente para esses valores. Outro aspecto que deve ser notado: não é justificado, em nenhum momento para os alunos, o motivo de o triângulo ter sido construído dentro do círculo. A atividade poderia ter sido realizada igualmente sem essa construção do círculo. Acredito que outros ângulos, além dos considerados notáveis, devem ser abordados com os alunos tanto no estudo do triângulo retângulo quanto no estudo da Trigonometria no círculo trigonométrico.

Piva *et al*. (2009) não sugerem, ao menos no artigo sobre o mini-curso, atividades baseadas nos *softwares*. Como foi citado anteriormente, o *software* Trigonometria apresenta excesso de fórmulas e construções prontas (não manipuláveis), portanto é um programa informativo, não interativo.

Com relação ao trabalho desenvolvido por Costa (1997), destaco que a autora utilizou dois programas: Cabri e Graphmatica, porém atualmente existem programas que abordam a Geometria e a Álgebra ao mesmo tempo, como, por exemplo, o GeoGebra. Uma vantagem que esse *software* apresenta é a possibilidade de se realizar a construção dos gráficos de seno e cosseno a partir do círculo trigonométrico de forma concomitante (um ponto P move-se sobre o círculo e um ponto S vai movendo-se sobre o plano de acordo com seno no círculo, idem para cosseno) e permite também utilizar recursos como o de trocar os parâmetros de uma função do tipo $f(x) = a + b.sen\ (cx + d)$ para observar os gráficos movimentando-se na tela.

A autora enfocou as transformações de radianos para graus. No entanto, acredito que é necessário promover uma melhor compreensão dos radianos, uma vez que associam-se as medidas dos arcos em radianos com os números reais que compõem o domínio das funções trigonométricas.

O trabalho desenvolvido por Ricardo Santos (2008) não abordou o ensino da Trigonometria, mas a Geometria Analítica. Esse trabalho foi considerado relevante uma vez que enfocou uma abordagem diferenciada para o ensino da Geometria Analítica com o uso de *software*. Uma das questões que Santos procurou responder em seu trabalho foi: "A manipulação de igualdades e desigualdades no GrafEq[12], verificando suas representações no plano cartesiano, ajudará os estudantes na apropriação da linguagem algébrica representativa de situações do plano?" (2008, p.16). O autor realizou uma sequência de ensino com atividades que buscaram desenvolver conhecimentos de Geometria Analítica. Santos, após a realização da sequência e análise do material coletado, concluiu especificamente sobre a utilização do *software* que:

> [...] ampliou a percepção dos estudantes sobre os objetos algébricos, geométricos e as equivalências entre eles. [...] o distanciamento existente entre as estruturas dos sujeitos (estudantes) e os objetos de estudo (expressões algébricas, representações gráficas) foi reduzido. [...] aumentou a capacidade de exploração dos estudantes (2008, p. 122).

Os benefícios que a utilização do programa GrafEq agregou aos processos de aprendizagem dos alunos dos conteúdos da Geometria Analítica levam à questão: outros *softwares*, também podem contribuir de forma positiva no desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, em especial, na área da Trigonometria? Essa é uma das questões que procurei responder em minha pesquisa. No final do seu trabalho, Santos sugeriu a realização de pesquisas sobre a utilização do GrafEq em parceria com o GeoGebra como alternativa para o ensino da Geometria Analítica.

Os trabalhos desenvolvidos pelos autores aqui citados e analisados mostraram que existem aspectos que ainda podem ser melhorados no ensino da Trigonometria. No capítulo 2, relatarei como surgiu a ideia da elaboração de uma sequência de ensino em que utilizei o *software* GeoGebra.

---

[12] Disponível em: < http://www.peda.com/grafeq/>.

2 A PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA

A seção 2.1 apresenta a motivação para a elaboração de uma sequência de ensino alternativa para a Trigonometria, envolvendo atividades construídas com auxílio do *software* GeoGebra. A seção 2.2 descreve os objetivos e as questões que nortearam a realização desta pesquisa e, por fim, a seção 2.3 descreve a metodologia utilizada.

2.1 COMO SURGIU A IDEIA DA ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES NO GEOGEBRA

No primeiro semestre de 2010, trabalhei com uma turma de Progressão Parcial de Estudos (PPE) do Colégio Marista Assunção, além das minhas turmas regulares. Essa turma era formada por alunos que haviam sido reprovados apenas em Matemática no 2º ano do Ensino Médio. Eles apresentavam dificuldades como as citadas na seção 1.2.

Como uma tentativa de promover situações de aprendizagem diferentes, visando superar essas e outras dificuldades que apresentavam, optei por desenvolver com eles um trabalho de retomada da Trigonometria utilizando o *software* GeoGebra. Procurei com isso facilitar a compreensão dos conceitos trigonométricos através do dinamismo e da interatividade com as construções geométricas promovidos pelo programa. Esse dinamismo e interatividade residem no fato de que os alunos podiam manipular as construções dadas ou as construções feitas por eles para observar quais características alteravam-se ou permaneciam iguais e também para testar hipóteses.

A utilização do programa de Geometria Dinâmica com os alunos da PPE foi importante porque permitiu o trabalho com figuras construídas com precisão a partir de suas propriedades. As figuras desenhadas pelo professor no quadro-negro, além de serem estáticas, rígidas, podem ser muito diferentes daquilo que ele quer representar: por exemplo, um professor desenha no quadro de giz um triângulo e escreve que um dos ângulos agudos mede 30°, mas se o ângulo não foi construído com base nas suas propriedades (um terço do ângulo reto), é provável que sua medida fique bem diferente de 30°; ou ainda, o professor esboça um círculo trigonométrico sem compasso, produzindo uma figura que não tem formato circular, o que prejudica a observação das características do círculo trigonométrico e das simetrias entre os quadrantes. Portanto, a possibilidade de se construir figuras geométricas com base em suas propriedades e, após sua construção, poder manipular essas figuras ampliando-as, reduzindo-as e rotacionando-as mostrou-se um aspecto importante para a adoção de um *software* de

Geometria Dinâmica como ferramenta auxiliar e fundamental para a aprendizagem desses alunos da PPE.

Nesse trabalho com os alunos da PPE, desenvolvi atividades que ficaram restritas à construção do triângulo retângulo e posterior cálculo das seis razões trigonométricas, à relação entre as unidades de medidas de ângulos e de arcos: grau e radiano, às reduções ao primeiro quadrante e à construção e análise de gráficos de seno e cosseno. Durante esse período, percebi que esses alunos, que tinham bastante dificuldade com a Trigonometria, conseguiram compreender as noções fundamentais que estavam sendo trabalhadas com esse formato diferenciado de atividade e que manifestaram maior interesse por essa proposta do que pelas atividades até então desenvolvidas.

Observei, durante essa experiência na elaboração das tarefas para os alunos da PPE, que o programa propiciava o estabelecimento de relações importantes entre a Álgebra e a Geometria, porque mostra ao mesmo tempo duas janelas (ver figura 6): a "janela de visualização"[13], onde são realizadas as construções geométricas e gráficas, e a "janela de álgebra", onde aparecem as representações algébricas dos elementos construídos. Pode-se, por exemplo, construir um círculo na janela de visualização, utilizando-se a ferramenta "círculo dado centro e raio" e, imediatamente, o programa mostra, na janela de Álgebra, a equação desse círculo. Inclusive, é possível proceder de maneira inversa: digitar a equação de um círculo e, em seguida, observar a figura na janela de visualização.

Também há a possibilidade de se trabalhar somente com a janela de visualização, ocultando-se a janela de Álgebra. O programa também propiciava um aprendizado rápido quanto à manipulação de suas ferramentas, porque cada vez que se clica sobre uma ferramenta da barra de ferramentas, aparece um pequeno texto indicando o nome e como se utiliza a mesma. Por exemplo, ao clicar na ferramenta "ângulo", aparece o texto: "Ângulo. Selecione três pontos ou duas retas". Portanto, essas foram algumas das características que mais influenciaram na minha escolha do programa GeoGebra. O apêndice A mostra um exemplo de construção realizada no GeoGebra e um exemplo de utilização da ferramenta protocolo de construção.

[13] O nome "Janela de visualização", utilizado pelo GeoGebra, refere-se ao espaço na tela onde é exibida a imagem da figura geométrica construída.

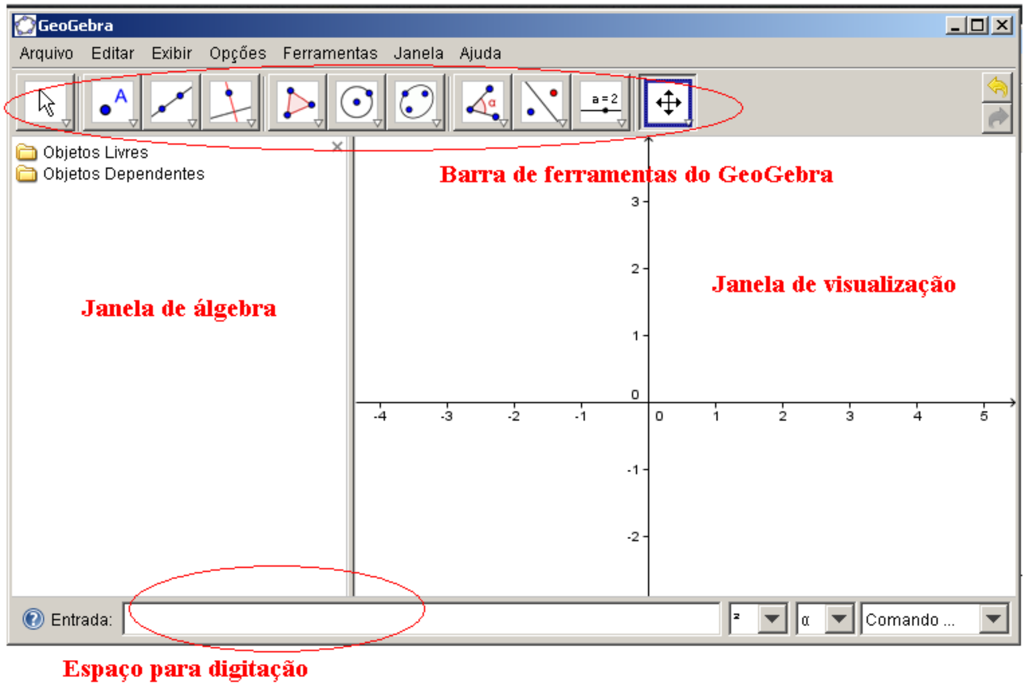


Figura 6: Interface do GeoGebra.

Com os resultados positivos quanto à avaliação da aprendizagem dos alunos da PPE, pensei em ampliar, reformular e aprofundar as atividades, buscando uma sequência de ensino que favorecesse um ambiente de aprendizagem interessante e dinâmico para uma turma regular do 2º ano do Ensino Médio. Um ambiente que permitisse aos estudantes fazer mais experimentações (podendo variar arcos, ângulos, lados, medidas de segmentos, gráficos), estabelecer relações entre elementos que variavam ou não, construir figuras geométricas e utilizar ferramentas do programa para facilitar a visualização de características e propriedades (como mostrar a medida de um objeto, mostrar um objeto ou escondê-lo, mudar cor, espessura, entre outros).

Nesse momento, cabe esclarecer que utilizarei a palavra "visualização" no trabalho para fazer referência a conexões entre imagens mentais e figuras exibidas na tela do computador, conforme a definição adotada por Zazkis, Dubinsky e Dautermann (1996):

> Visualização é um ato na qual um indivíduo estabelece uma forte conexão entre uma construção interna e alguma coisa ao qual o acesso é obtido através dos sentidos. Tal conexão pode ser feita em duas direções. Um ato de visualização pode consistir de qualquer construção mental de objetos ou processos que um indivíduo associa com objetos ou eventos percebidos por ele como externo. Por outro lado, uma ação de visualização pode consistir da construção, em algum meio externo como um papel, quadro ou tela de computador, de objetos ou eventos que o indivíduo identifica com objeto(s) ou processo(s) em sua mente (Ibidem, p. 10, tradução nossa).

Além dessa experiência pessoal com o uso do GeoGebra, que foi o ponto de partida para a elaboração de um experimento de ensino baseado em um *software* de Geometria Dinâmica, a opção pelo trabalho com o *software* foi reforçada pela argumentação de Gravina (1996, p. 2):

> [...] a partir de exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos conjecturam e, com o feedback constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjecturas, chegando a resultados que resistem ao "desenho em movimento", passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática.

Após a escolha do *software* GeoGebra para a elaboração das atividades da sequência de ensino, pesquisei materiais que tratassem do uso do GeoGebra em sala de aula. Tive acesso então ao material disponibilizado pelo curso: Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática (GRAVINA, 2011), que foi oferecido pelo Instituto de Matemática da UFRGS em parceria com a Universidade Aberta do Brasil (UAB), de 2009 a 2011, com objetivo de contribuir com a formação de professores da Educação Básica. A modalidade de ensino oferecida é à distância. A disciplina Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas (HOFFMANN, 2011) é uma das disciplinas oferecidas no curso. Ela é composta por quatro módulos que desenvolvem um estudo sobre a modelagem como metodologia de ensino no contexto da Geometria e Trigonometria. O módulo III da disciplina desenvolve um estudo sobre Geometria e Trigonometria a partir do problema de calcular a distância de uma espaçonave à superfície da Terra. No decorrer do estudo, são propostas atividades com conteúdos trigonométricos e nessas atividades são apresentadas animações realizadas no *software* GeoGebra sobre: cálculo da altura de um prédio, seno, cosseno, tangente, secante, e cotangente no círculo trigonométrico. Enfatizo que o material disponibilizado no *site* dessa disciplina foi uma inspiração para a realização das atividades da sequência de ensino elaborada por mim. Os problemas e questões apresentados e construídos no GeoGebra incentivaram a criação ou o aprimoramento de algumas atividades da sequência.

2.2 OBJETIVOS E QUESTÕES DE PESQUISA

Considerando tudo o que foi dito sobre minhas inquietações como professora, sobre a importância da Trigonometria, sobre as dificuldades no aprendizado desse conhecimento e sobre a possibilidade de se pensar em um ensino com características mais dinâmicas e interativas, decidi elaborar e testar uma sequência de ensino para ser aplicada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. A sequência foi construída com o objetivo de que as atividades desenvolvidas com auxílio do programa GeoGebra auxiliassem os alunos a construir noções e conceitos trigonométricos, isto é, de que o trabalho com a Geometria Dinâmica, a interatividade dos alunos com as construções e a autonomia na realização das tarefas, auxiliassem os alunos a entender e a utilizar os conceitos trigonométricos e não apenas decorar definições, valores e procedimentos. Esses conceitos trigonométricos estariam relacionados com a Trigonometria no triângulo retângulo, com as unidades de medidas de ângulos, com a Trigonometria no círculo trigonométrico, com a resolução de equações, com o estudo das funções trigonométricas e com aplicações da Trigonometria.

As atividades foram elaboradas procurando sempre a utilização de uma linguagem que fosse acessível aos alunos, que permitisse a eles lerem as instruções e realizar a maior parte dos exercícios de maneira autônoma. Primou-se também pela variedade de situações apresentadas aos estudantes, para que não seguissem somente uma linha de raciocínio fixa, padronizada; consequentemente, as perguntas foram elaboradas ora de um jeito, ora de outro, justamente para promover essa diversificação. Houve também preocupação relativa à apresentação visual das atividades, isto é, procurei utilizar as ferramentas do programa como colorir, aumentar ou diminuir espessura de um objeto, mostrar, esconder, estilo, entre outras, evitando a apresentação monótona de atividades sempre iguais e, principalmente, esses recursos permitiram destacar os elementos mais importantes das atividades.

A pesquisa foi realizada buscando-se verificar se esses objetivos de compreensão dos conceitos seriam atingidos e identificar as condições que permitiriam (ou não) que fossem alcançados. Buscou-se, com a pesquisa, responder à seguinte questão:

Em que momentos e de que modos as atividades que compõem a sequência de ensino, realizadas no software GeoGebra, conseguirão ajudar e serão importantes no aprendizado dos alunos de conhecimentos relativos à Trigonometria?

A partir dessa questão, outras emergiram e orientaram a elaboração da sequência, bem como a análise de sua experimentação:

a) Quais são as ideias e os conhecimentos anteriormente construídos dos quais os alunos irão fazer uso, como esses conhecimentos serão modificados ou adaptados ao longo da experiência e quais os conceitos e teoremas-em-ação que os alunos estarão formulando, ou reformulando, durante a experiência?

b) O uso do *software* ajudará na visualização e interpretação das representações geométricas? Por outro lado, quais as dificuldades que podem surgir durante um processo de aprendizagem em que as atividades são elaboradas com base no Geogebra, relacionadas à utilização das ferramentas do programa ou aos conteúdos trigonométricos?

c) Quais os benefícios que a experimentação, por meio de tentativas que envolvem acertos e erros, trará para a aprendizagem dos alunos?

d) É possível que os alunos compreendam os principais conceitos relativos à Trigonometria no triângulo retângulo, ao círculo trigonométrico, às diferentes unidades de medidas de arcos e ângulos, às equações e às funções trigonométricas de uma forma mais autônoma?

2.3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

O estudo de caso é uma das metodologias de pesquisa qualitativa que, segundo Lüdke e André (1986, p.13), "[...] vêm ganhando crescente aceitação na área da educação, devido principalmente ao seu potencial pra estudar as questões relacionadas à escola". Dentre as características básicas que uma pesquisa qualitativa apresenta, segundo Bogdan e Biklen (apud LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p. 11), destacam-se :

> 1. A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.
> 2. Os dados coletados são predominantemente descritivos.
> 3. A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto.
> 4. O 'significado' que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador.

E o estudo de caso, segundo Lüdke e André, caracteriza-se por: primeiro, visar "a descoberta" (1986, p.18). Isso significa que o pesquisador parte de "alguns pressupostos teóricos iniciais" (p.18), porém durante o processo de pesquisa novos aspectos poderão ir surgindo e se agregando ao trabalho; segundo, caracteriza-se por enfatizar a "interpretação em contexto" (p.18), isto é, considera-se que o contexto onde está inserido o objeto de estudo é fundamental para se compreender esse objeto de forma completa. Terceiro, buscar retratar "a realidade de forma completa e profunda" (p.19), levando-se em consideração os diferentes pontos de vista e diferentes aspectos que envolvem a situação e/ou problema analisados. Quarto, os estudos de caso caracterizam-se também por utilizar "uma variedade de fontes de informação" (p.19), referindo-se às diferentes formas de coletas de dados que podem ser utilizadas e aos diferentes momentos em que podem ocorrer. Quinto, revelar "experiência vicária" e permitir "generalizações naturalísticas" (p.19), em outras palavras, o leitor procura associar as informações pesquisadas com a sua própria experiência, analisando o que é possível, ou não, agregar dessas suas experiências pessoais. Sexto, procurar "representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vista presentes numa situação social" (p.20), esses pontos de vista conflitantes tanto podem dizer respeito aos sujeitos pesquisados quanto ao próprio pesquisador. Sétimo, por fim, um estudo de caso caracteriza-se por utilizar "uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa", ou seja, "os relatos escritos apresentam, geralmente, um estilo informal, narrativo, ilustrado por figuras de linguagem, citações, exemplos e descrições" (p.20).

Sobre o desenvolvimento do estudo de caso, Lüdke e André (1986, p.21) indicam três fases: a fase exploratória, a fase de delimitação do estudo e a fase de análise sistemática e elaboração do relatório. Na primeira fase, são identificadas e formuladas algumas questões ou problemas iniciais, os quais poderão ser alterados durante o estudo e também outros poderão ser agregados. Essas questões ou problemas podem ter seu ponto de partida na leitura de bibliografia, na observação dos sujeitos, em documentos de registro, entre outros. A segunda fase caracteriza-se pela coleta de materiais e pela seleção do que será analisado. Na terceira fase é feita a articulação entre os materiais coletados, sua análise e escrita do relatório.

Tanto o modo como pensei nas questões de dificuldades de aprendizado dos alunos, como o modo como foram pensadas as atividades da sequência de ensino enquadravam-se nas características da metodologia de estudo de caso, foi escolhida uma turma, e, depois, um grupo dessa turma, para a aplicação da sequência. O objetivo não era estabelecer comparações com outras turmas, mas analisar como essa sequência contribuiu para o aprendizado dessa turma em particular. Portanto, o estudo de caso mostrou-se a metodologia mais adequada para a realização dessa pesquisa de características qualitativas.

O estudo de caso iniciou com a identificação de problemas e formulação de questões relativas às dificuldades de aprendizado da Trigonometria e ao que se poderia pensar em termos de alternativas de auxílio para superação dessas dificuldades. Esse processo baseou-se nas minhas experiências docentes citadas anteriormente. A partir desse momento, iniciei o processo de criação e recriação das atividades que iriam compor a sequência de ensino. As atividades não ficaram prontas nessa fase, pois foram sendo adaptadas e reformuladas durante o processo de coleta de dados.

A coleta de dados em sala de aula foi feita através de gravações de áudio de todas as aulas e através dos materiais das atividades que os alunos realizaram nesse processo. Inicialmente, os alunos e os pais e/ou responsáveis assinaram um termo de consentimento (apêndice B) autorizando a gravação em áudio e a utilização dos trabalhos dos alunos na pesquisa. Os arquivos de áudio foram obtidos a partir de um gravador que eu levava comigo nas aulas, portanto pude captar os diálogos que aconteceram e pude ouvi-los novamente, selecionando o que foi mais relevante para a pesquisa. As atividades foram resolvidas no próprio GeoGebra, isto é, os alunos foram orientados quanto à utilização da ferramenta "inserir texto" para responder às questões. Outro recurso do GeoGebra foi fundamental na coleta dos dados: o recurso “gravar”. Esse recurso permitiu que eu organizasse pastas no computador onde os alunos puderam gravar os arquivos onde estavam registradas suas atividades. Inclusive, acessando o arquivo das atividades dos alunos pude analisar as próprias construções deles através do protocolo de construção, ou através da manipulação dessas construções, para tentar entender as suas respostas. Em duas atividades, os registros foram feitos em folha de papel, pois a resolução delas exigiria maior quantidade de cálculos e, por uma questão de otimização do tempo, optou-se por não digitar as resoluções. A análise dos materiais gravados no computador foi feita do seguinte modo: acessaram-se os arquivos da atividade 1, por exemplo, gravados por cada grupo; copiaram-se todas as respostas dadas ao 1° exercício e foram coladas em um arquivo de texto com a identificação do respectivo grupo. Esse processo foi feito com cada exercício de cada atividade, o que permitiu reunir em um mesmo arquivo todas as respostas dadas à atividade 1, outro com as respostas dadas à atividade 2 e assim por diante. Tendo esse material pronto, foi possível analisar as respostas dos grupos separando-as por semelhanças ou diferenças (erros, acertos, curiosidades,...). Quando se passou a trabalhar com um grupo menor de alunos, esse processo de reunião das respostas não foi mais realizado. Passou-se a analisar um trabalho de cada vez. No primeiro material entregue em papel pela turma inteira, foi feita uma catalogação das respostas também item a item; no segundo, com o grupo pequeno, analisou-se cada material individualmente.

A descrição das atividades, dos sujeitos da pesquisa e do embasamento teórico utilizado como referência para a análise do material (na terceira fase do estudo de caso) será apresentada nos próximos capítulos da dissertação.

3 BASES TEÓRICAS

O capítulo 3 apresenta as bases teóricas utilizadas para a análise dos dados coletados durante a realização da experiência de ensino. A seção 3.1 aborda o tema: ambientes de Geometria Dinâmica. A seção 3.2 apresenta elementos da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud usados nesse estudo. A seção 3.3 apresenta uma discussão sobre o conceito de ângulo, um dos conceitos fundamentais para a compreensão da trigonometria.

3.1 AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Segundo Gravina (2001), "os ambientes de Geometria Dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem" (p. 82).

A autora, em sua tese de doutorado intitulada *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*, mostra que os ambientes de Geometria Dinâmica auxiliam os estudantes a transpor as barreiras dos raciocínios apenas empíricos para os raciocínios hipotético-dedutivos, isto é, aqueles raciocínios baseados em demonstrações de teoremas e não apenas baseados na observação e experimentação. A autora desenvolveu seu trabalho na área da Geometria Euclidiana visando o aprendizado através das demonstrações geométricas em ambientes dinâmicos. Mesmo nosso enfoque sendo diferente, não orientado para deduções, consideramos oportunas as reflexões presentes nessa tese sobre os benefícios e as contribuições que os ambientes de Geometria Dinâmica podem trazer para a aprendizagem da Matemática. Essas contribuições podem ser estendidas para diversas áreas do ensino:

> Na transição do conhecimento empírico para o que tem caráter de teoria matemática, mostra-se necessária uma crucial reestruturação de forma de pensar, e a tecnologia informática pode muito bem intermediar o desenvolvimento das habilidades cognitivas que aí entram em jogo. Anuncia-se, então, ao que se pretende esta tese: investigar como as situações que chamar-se-iam de tecno-didáticas - situações didáticas que acontecem em ambientes informatizados - podem favorecer a superação das dificuldades presentes no processo de aprendizagem da geometria (GRAVINA, 2001, p. 5).

Para a realização de seu trabalho, Gravina escolheu o *software* Cabri-Geometry II, pois o considerou "[...] um dos mais versáteis quanto a recursos de construção e manipulação dinâmica de objetos geométricos[...]" (2001, p. 5). A autora destaca também que um dos benefícios do programa é permitir a manipulação das figuras diretamente na tela:

> O "desenho em movimento" torna-se revelador dos invariantes que são decorrências implícitas da construção feita. De imediato percebe-se parte da potencialidade do ambiente: ao permitir a construção e manipulação de objetos concreto-abstratos, ele desencadeia algumas das primeiras ações mentais características do pensar matemático - o estabelecer relações e conjecturar - e o faz de forma contundente, se comparado às possibilidades apresentadas pelo desenho, estático, em papel (GRAVINA, 2001, p. 6).

Essas características, atribuídas ao programa Cabri-Geometry II, também foram observadas por nós na escolha no *software* GeoGebra, sendo que uma das vantagens observadas por nós nessa escolha é que o GeoGebra é um *software* livre, portanto pode ser utilizado nas escolas sem necessidade de qualquer investimento financeiro extra para aquisição de *softwares*.

A metodologia escolhida pela pesquisadora foi a engenharia didática. Após sua realização, Gravina concluiu que os estudantes passaram a perceber o desenho sob um novo ponto de vista: "como instância de representação de um objeto geométrico, desqualificando as imagens prototípicas advindas da fusão inadequada de componentes conceitual e figural" (2001, p. 190). Para a autora, imagens prototípicas são desenhos particulares, apresentados sempre em uma mesma situação e com uma mesma posição; componentes conceituais são as propriedades características de uma classe de objetos e componentes figurais são as imagens mentais associadas ao conceito. A autora concluiu também que os estudantes passaram a compreender a importância das demonstrações geométricas; que os estudantes "mostraram atitudes que caracterizam o 'pensar matemático' - formular conjecturas, errar, realizar muitos experimentos de pensamento e então avançar no processo de demonstração" (Ibidem, p. 190). Especialmente com relação aos benefícios da utilização de ambientes de Geometria Dinâmica no processo, Gravina destaca que esse tipo de ambiente promoveu os alunos de um patamar de conhecimento para outro: "[...] a partir do patamar de conhecimento ainda empírico, os alunos ascenderam àquele em que a geometria é entendida como um modelo teórico" (Ibidem, p. 191) e também que "[...] com os 'desenhos em movimento' os alunos desenvolveram progressivamente habilidades para construir suas próprias demonstrações" (Ibidem, p. 191).

Outro aspecto que o trabalho da autora mostra é que o processo de construção geométrica está relacionado com o conceito de função e é essa relação funcional que promove o dinamismo das figuras: "as variáveis independentes correspondem aos objetos que podem ser movimentados e são esses que dão o dinamismo à figura" (Ibidem, p. 85). A autora exemplifica essa ideia através da construção de um quadrado a partir do lado AB. O lado AB corresponderia à variável independente e o quadrado (construção final) à variável dependente.

Ao finalizar seu trabalho, a autora enfatiza a utilização dos ambientes de Geometria Dinâmica com o objetivo de desenvolver o pensamento hipotético-dedutivo. Mesmo tendo objetivo diferente do trabalho que busquei desenvolver, pois pesquisei a construção de conceitos trigonométricos pelos estudantes enfocando os significados (invariantes operatórios) construídos por eles, julguei importante comentar as conclusões de Gravina a respeito dos ambientes de Geometria Dinâmica porque mostram como esses ambientes podem favorecer o aprendizado dos estudantes.

3.2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

Esta seção é dedicada ao estudo da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud tomada como referência na análise dos dados coletados durante a experiência didática, tendo em vista que se aplica largamente no estudo das estruturas cognitivas relativas à Matemática.

> O objeto de estudo que tem ocupado o maior número de investigações embasadas na Teoria dos Campos Conceituais como referência está centrado na análise das estruturas aditivas e multiplicativas; [...] é, portanto, no âmbito do conhecimento das matemáticas onde sua aplicação tem sido maior (VERGNAUD apud MOREIRA, 2004, p. 14, tradução nossa).

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud é uma teoria psicológica cognitivista, isto é, que estuda os processos mentais de aquisição e de construção de conhecimentos pelos sujeitos.

> A intenção da teoria dos campos conceituais é proporcionar uma estrutura às investigações sobre atividades cognitivas complexas, em especial, com referência aos aprendizados científicos e técnicos. Trata-se de uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceituação do real, por que permite situar e estudar as semelhanças e diferenças entre os conhecimentos desde o ponto de vista de seu conteúdo conceitual (VERGNAUD apud MOREIRA, 2004, p. 8, tradução nossa).

O desenvolvimento de conhecimentos é um processo complexo e a Teoria dos Campos Conceituais surge como uma importante ferramenta teórica para ajudar na sua compreensão, porém ela mesma não deixa de ser complexa. Para entendê-la é necessário compreender uma série de conceitos-chave, como: campo conceitual, conceito (referente, significado, significante), situação, esquema, invariantes operatórios (conceito-em-ação e teorema-em-ação) e representação. Cada um desses conceitos-chave será comentado e, em seguida, esses conceitos-chave serão relacionados com o objetivo de proporcionar uma visão geral da Teoria dos Campos Conceituais.

Para Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p. 8), "campo conceitual é [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição". Essa ideia de campo conceitual surgiu a partir de três considerações fundamentais, que são:

> 1) Um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; 2) Uma situação não se analisa com um só conceito; 3) A construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (VERGNAUD apud MOREIRA, 2002, p. 9).

Um conceito não é apenas uma definição ou um enunciado. Vergnaud define que um conceito é:

> [...] uma terna de três conjuntos distintos (não independentes entre eles evidentemente): C = (S, I, L)
> S conjunto de situações que dão sentido ao conceito
> I conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações
> L conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráficas...) que permitem representar os conceitos e suas relações e, consequentemente, as situações e os esquemas que eles evocam (VERGNAUD, 2009, p. 29).

Segundo Moreira (2002, p. 10), o conjunto S também é chamado de referente do conceito. O conjunto I é o significado do conceito. O conjunto L (ou R como aparece am algumas bibliografias) é chamado de significante. As situações correspondem à realidade, os invariantes operatórios e as representações linguísticas e simbólicas correspondem ao pensamento do sujeito, à forma como o sujeito representa essa realidade.

Segundo Moreira, Vergnaud utiliza o conceito de situação como tarefa: "O conceito de situação [...] não é o de situação didática, mas sim o de tarefa, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias" (2002, p. 11). O desenvolvimento do conhecimento pelo sujeito não ocorrerá em apenas uma situação, mas diversas situações enfrentadas por ele é que irão proporcionar o desenvolvimento de significados, como já citado anteriormente.

Segundo Vergnaud (2009, p. 21), "esquema é uma organização invariante da atividade para uma situação dada" e envolve quatro componentes:

- um objetivo, subobjetivos e antecipações.
- regras em ação de tomada de informação e de controle.
- invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação.
- possibilidades de inferência em situação (VERGNAUD, 2009, p. 21).

Destaca-se da definição que a organização é invariante, isto é, a forma com que o indivíduo se organiza para resolver uma situação ou um problema ou uma classe de situações, mas as ações e os comportamentos que são gerados no decorrer da atividade podem variar. Para Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p. 12), "o desenvolvimento cognitivo consiste, sobretudo, e principalmente, no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas", isto é, quanto mais esquemas o sujeito tiver e dominar, mais condições e ferramentas cognitivas ele terá para auxiliá-lo no enfrentamento de novas situações. Esse vasto repertório consiste em esquemas que podem ser perceptivo-gestuais (contar, classificar objetos, esboçar um gráfico...), verbais (fala, discurso...) e sociais (ações sociais como mediação de conflitos, sedução de uma pessoa...).

Com relação à segunda definição de esquema, o primeiro item, que se refere aos objetivos, subobjetivos e antecipações, segundo Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p. 12), significa que "um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos". Já as regras em ação são justamente a base do esquema, ou seja, "permitem a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação" (ibidem). Os invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) constituem os conhecimentos existentes ou gerados no esquema, isto é, "dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas" (ibidem). O último item, ou ingrediente do esquema, as possibilidades de inferência, são raciocínios que "permitem 'calcular', 'aqui e a agora', as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito" (ibidem).

Os invariantes operatórios são fundamentais no desenvolvimento do campo conceitual por justamente constituírem os conhecimentos em ação envolvidos nos esquemas. Vergnaud define e distingue os invariantes operatórios conceito-em-ação e teorema-em-ação: "Um conceito-em-ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação. Um teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação" (2009, p. 23).

> Há uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Mas seria um erro confundi-los. Conceitos em ação são ingredientes necessários das proposições. Mas conceitos não são teoremas, pois não permitem derivações (inferências ou computações); derivações requerem proposições. Proposições podem ser verdadeiras ou falsas; conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes. Ainda assim não existem proposições sem conceitos (VERGNAUD apud MOREIRA, 2002, p. 16).

Moreira (2002, p. 15) cita alguns exemplos de conceitos em ação frequentemente utilizados por alunos: "grandeza e magnitude, valor unitário, razão e fração, função e variável, taxa constante, dependência e independência, quociente e produto de dimensões". Cita ainda outros exemplos como: "número cardinal, ganho e perda, aumento e diminuição, transformação e estado, estado inicial e final, transformação positiva e negativa, adição e subtração" (idem). Esses exemplos ilustram a caracterização de Vergnaud para conceito-em-ação:

> Os conceitos em ação permitem identificar os objetos, as propriedades e as relações. Por 'objeto' é preciso compreender ao mesmo tempo objetos materialmente perceptíveis e 'objetos construídos' pela cultura, pela ciência, pela técnica, ou pelo próprio sujeito individual. Por 'propriedades e relações' é preciso compreender ao mesmo tempo predicados observáveis e predicados que podem ser inferidos a partir dos observáveis, mas que são eles próprios construções culturais individuais (VERGNAUD, 2009, p. 22).

Sendo assim, os conceitos em ação permitem que o sujeito identifique as características (objetos, propriedades e relações) que estão presentes em uma determinada situação e que são importantes ou não (pertinentes ou não) para a resolução de um problema ou para alcançar um objetivo que se apresente a esse sujeito. Essa identificação faz parte então do esquema que o sujeito colocará em ação para alcançar seus objetivos. Tendo posto em ação esses conceitos, o sujeito passa a fazer inferências e raciocínios, ou seja, passa a elaborar teoremas em ação (não necessariamente nessa ordem). Um teoremas em ação, como citado acima, é "uma proposição tida como verdadeira na ação em situação". Vergnaud esclarece ainda que:

> Entre todos os teoremas em ação, alguns têm um estatuto de proposição tida como verdadeira aqui e no momento presente; enquanto que outros são universalmente verdadeiros, para toda uma classe de situações. Entretanto é preciso observar que o estatuto de uma proposição pode oscilar entre o particular e o universal: por exemplo, 4+5=9 é uma proposição particular se a distinguimos de 4+6=9 ou de 7+3=10, mas é uma proposição universal se a considerarmos verdadeira tanto quando contamos cavalos em um estábulo como quando contamos canetas sobre uma mesa (VERGNAUD, 2009, p. 23).

Podemos perceber então que os invariantes operatórios representam os conhecimentos em ação do sujeito. Considerando-se os invariantes operatórios é que percebemos esse lugar ou momento em que o sujeito estabelece relações entre conceitos construídos anteriormente (e ainda assim talvez não acabados) com objetos e elementos (tanto materiais quanto abstratos, mentais) ainda em fase de exploração e descoberta pelo sujeito. Os invariantes operatórios criam portanto o espaço para a criação de raciocínios e de hipóteses que ao longo de um certo tempo vão sendo testados, comprovados ou refutados de acordo com as situações que vão se apresentado ao sujeito. Nesse sentido, Moreira explica que:

> Em geral, os alunos não são capazes de explicar ou mesmo expressar em linguagem natural seus teoremas e conceitos-em-ação. Na abordagem de uma situação, os dados a serem trabalhados e a sequência de cálculos a serem feitos dependem de teoremas-em-ação e da identificação de diferentes tipos de elementos pertinentes. A maioria desses conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra o ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos, e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito (MOREIRA, 2002, p. 16).

A figura 7 abaixo é um mapa conceitual da Teoria dos Campos Conceituais, criado por Moreira (2002), e permite-nos compreender as relações entre os conceitos-chave que foram caracterizados ao longo desse texto.

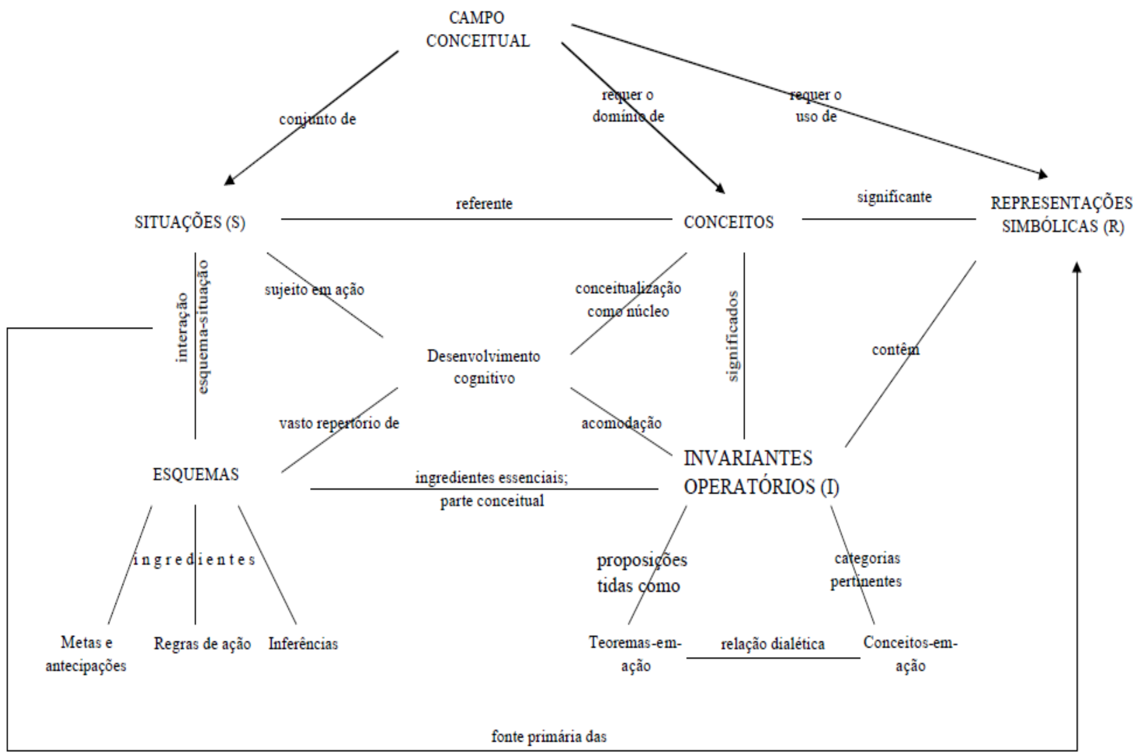


Figura 7: Mapa conceitual criado por Marco Antônio Moreira (2002, p. 18).

Podemos ler esse mapa da seguinte forma: campo conceitual é gerado a partir de um conjunto de diferentes situações apresentadas ao sujeito; a construção do campo conceitual requer o domínio de conceitos pelo sujeito e requer que ele seja capaz de utilizar diferentes representações simbólicas. Para alcançar os objetivos e metas das situações apresentadas, o sujeito colocará em ação seus esquemas que organizam suas ações e que são compostos de metas e antecipações, regras de ação e inferências. A interação entre as situações e os esquemas levará o sujeito a utilizar-se de representações simbólicas (imagens mentais, fala, escrita, desenho...) que são fundamentais na construção de um conceito. Os conceitos, por sua vez, são constituídos basicamente por três aspectos interrelacionados: referente (situação), significados (invariantes operatórios) e o significante (representações simbólicas). O significado de um conceito é dado então pelos invariantes operatórios: conceito-em-ação, utilizados pelo sujeito na seleção das características pertinentes ou não em uma situação, e teoremas-em-ação, que são as proposições elaboradas pelo sujeito em situação (verdadeiras ou não). Nesse processo todo, chega-se então ao ponto de como se dá o desenvolvimento cognitivo do sujeito: é através de suas ações frente às situações que lhe são apresentadas, é pela articulação e mobilização de um vasto repertório de esquemas construídos anteriormente ou durante o processo, é pela acomodação dos invariantes operatórios e é pela capacidade de desenvolver e construir conceitos que o sujeito desenvolve-se cognitivamente.

3.2.1 A aprendizagem sob a perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais tem consequências importantes para a reflexão sobre o ensino: o que é de fato a aprendizagem? Qual o papel do professor nesse processo? Como se dá a pesquisa em educação sob esse ponto de vista?

A pergunta: "o que é aprender? é respondida por Vergnaud de forma simples e direta: "Conhecimento é adaptação" (2009, p. 13). Vergnaud afirma que o indivíduo adapta-se às diferentes situações a que é apresentado e que essa adaptação ocorre através da "evolução da organização de sua atividade" (ibidem), que, como vimos anteriormente, consiste em evolução e enriquecimento de seus esquemas. Aqui o autor deixa claro que as situações aparecem ao longo das experiências dos indivíduos (crianças, adolescentes e adultos). As experiências podem ser cotidianas, escolares e profissionais. Vergnaud explica que aqueles que desejam criar situações de aprendizagem na escola ou no trabalho devem aproximar essas situações à forma como os sujeitos normalmente desenvolvem "novas formas de atividade, sozinhos ou com ajuda" (2009, p. 14).

Sobre a possibilidade de conhecer os processos de aprendizagem, o autor explica que:

> sendo a primeira função do conhecimento de fazer e ter êxito, a análise da atividade em situação é um meio essencial para compreender os processos de aprendizagem, por mais delicada e difícil que ela seja. Ela passa notadamente pela análise dos erros, das hesitações e dos desfuncionamentos, assim como pela identificação das diferentes etapas pelas quais se constrói uma nova forma de organização da atividade (VERGNAUD, 2009, p. 14).

Esse "fazer e ter êxito" pode ser resumido, segundo o autor, com o termo "competência". Com base na ideia de competência, Vergnaud aprofunda sua definição do que é aprender sob quatro aspectos:

> X é mais competente no tempo t do que no tempo t' se ele sabe fazer o que ele não sabia fazer. [...] X é mais competente se ele se coloca de uma maneira melhor (mais rápida, mais confiável, mais compatível com a maneira de colocar de seus parceiros). X é mais competente se ele dispõe de fontes alternativas para tratar situações de certos tipos [...] X é mais competente se ele é menos desprovido diante de uma situação nova (VERGNAUD, 2009, p. 17).

Essas considerações feitas por Vergnaud acerca do que é aprender levam-nos à questão de qual é o papel do professor no processo de aprendizagem escolar. Fica claro que, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, um conceito não é desenvolvido, aprendido a partir de uma definição ou enunciado feito pelo professor. Nesse contexto dos Campos Conceituais, o papel do professor é de mediador. O professor é responsável por desenvolver situações didáticas que propiciem ao aluno a colocação de seus esquemas em ação e, consequentemente, seus conceitos em ação e teoremas em ação. Cabe ao professor também auxiliar no enriquecimento dos esquemas dos aprendizes, bem como auxiliá-los no desenvolvimento de suas representações da realidade, isto é, mediando a construção dos significados (a partir dos invariantes operatórios) e dos significantes (da linguagem, da escrita, dos gestos...).

> Professores são mediadores. Sua tarefa é de ajudar os alunos a desenvolver seu repertório de esquemas e representações. Desenvolvendo novos esquemas, os alunos tornam-se capazes de enfrentar situações cada vez mais complexas.[...] Os professores usam palavras e sentenças para explicar, formular questões, selecionar informações, propor metas, expectativas, regras e planos. Contudo, sua ação mediadora mais importante é a de prover situações (de aprendizagem) frutíferas para os estudantes (VERGNAUD apud MOREIRA, 2002, p. 21).

É importante destacar também que esse papel mediador do professor inclui a mediação entre os conhecimentos prévios que os alunos desenvolveram e os conhecimentos científicos a que se quer chegar. Segundo Moreira (2002, p. 20) "[...] é normal que os alunos apresentem tais concepções [prévias] e que elas devem ser consideradas como precursoras de conceitos científicos a serem adquiridos. A ativação desses precursores é necessária e deve ser guiada pelo professor". Moreira complementa ainda essa afirmação explicando que certos conceitos podem "ser construídos somente se certas concepções prévias forem abandonadas. [...] Nesse caso, a ação mediadora do professor é também imprescindível" (ibidem).

A ideia de professor mediador de situações de aprendizagem escolar requer o estabelecimento das características do que é resolução de problemas ou situações de resolução de problemas. Para Vergnaud "[...] há uma relação dialética e cíclica entre a conceitualização e a resolução de problemas. [...] a problematização vai muito além da abstração de regularidades do mundo observável. Problemas são teóricos e práticos, não meramente empíricos, mesmo para crianças pequenas". Com base nisso, Vergnaud observa que o que é problema para um indivíduo, pode não ser para outro, pois essa questão depende dos tipos de conceitos que já foram desenvolvidos pelos indivíduos. Com o passar do tempo, com o enfrentamento de situações diversificadas e com o desenvolvimento de esquemas, o que é um problema poderá deixar de sê-lo e assim, o indivíduo estará pronto para enfrentar novos problemas. Esse processo de resolução de problemas caracteriza um ciclo de aprendizado constante.

> Vergnaud chama de "ilusão pedagógica" a atitude dos professores que creem que o ensino [...] consiste na apresentação organizada, clara, rigorosa das teorias formais e que quando isso é bem feito os alunos aprendem. [...] é através de situações de resolução de problemas que os conceitos se desenvolvem no aluno e as situações de resolução de problemas que tornam os conceitos significativos para os alunos podem estar, pelo menos inicialmente, muito distantes do formalismo apresentado pelo professor. Mas, apesar disso, tais situações são essenciais para o desenvolvimento de conceitos (VERGNAUD apud MOREIRA, 2002, p. 23).

Por fim, é fundamental considerar como se dá a pesquisa na área do ensino com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. O trecho abaixo citado mostra que a pesquisa é realizada de maneira cíclica, o que está de acordo com a teoria, visto que ela própria é um ciclo de conceitos-chave relacionados uns com os outros. A pesquisa envolve:

> Identificar e classificar situações e, então, coletar dados sobre procedimentos e outras maneiras através das quais os estudantes expressam seu raciocínio. Um ciclo de pesquisa inicia com a identificação de níveis de objetos, relações e teoremas-em-ação. O ciclo continua, então com o delineamento de situações e materiais e sua experimentação com alunos, completando-se com a construção de representações simbólicas através da observação e análise dos diferentes fenômenos que ocorrem. Começa, então, um segundo ciclo para melhorar o primeiro, e assim sucessivamente (VERGNAUD apud MOREIRA, 2002, p. 26).

3.3 CONCEITO DE ÂNGULO

As noções sobre ângulo são fundamentais no estudo da Trigonometria. A seção 3.3.1 aborda as diferentes definições de ângulo presentes em livros didáticos e em livros de geometria e expõe como essas noções serão abordadas na experiência de ensino. A seção 3.3.2 apresenta uma pesquisa realizada por Piaget *et al.* (1948) e tem o objetivo de evidenciar a complexidade da construção cognitiva desse conceito.

3.3.1 O conceito de ângulo no ensino da Trigonometria

O conceito de ângulo é fundamental para a compreensão dos conceitos trigonométricos que serão abordados na experiência de ensino. Os livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e os livros de Geometria pesquisados apresentam definições para ângulo que envolvem as ideias de inclinação, de semirretas com mesma origem, de região do plano e de ângulo como giro.

Em "Os Elementos", de Euclides, encontramos a seguinte definição:

> E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta (EUCLIDES, 2009, p. 97).

A definição de ângulo mais encontrada nos livros é a que envolve a ideia de semirretas com mesma origem:

> Seja α um plano qualquer e h, k duas semirretas distintas que partem do ponto O de α e que pertencem a retas distintas. Ao sistema destas duas semirretas chamamos ângulo e o designamos com $\angle$ (h, k) ou $\angle$ (k, h). As semirretas h, k recebem o nome de lados do ângulo, e o ponto O se chama vértice do ângulo (HILBERT, 1953, p. 15, tradução nossa).

> Se duas semirretas tiverem a mesma origem mas não estiverem contidas na mesma reta, então sua reunião é um ângulo. As duas semirretas são chamadas lados do ângulos e a origem comum das semirretas é chamada vértice do ângulo (MOISE; DOWNS, 1971, p. 67).

> Ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é seu vértice (CARMO, MORGADO e WAGNER, 2005, p. 5).

Essa definição também aparece em livros didáticos, como:

> Ângulo é uma figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas chamam-se lados do ângulo e o ponto de origem chama-se vértice (DANTE, 2009, p. 210).

> Figura formada por duas semirretas de mesma origem. Indica-se por: AÔB (ângulo AOB)ou BÔA (ângulo BOA). Esse ângulo tem o vértice O e lados $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ (DANTE, 2003, p. 318).

São exemplos de definições de ângulo que utilizam a noção de região do plano:

> Uma região do plano, convexa, determinada por duas semirretas de mesma origem, é denominada ângulo (GIOVANNI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR, 2007, p. 148).

> Ângulo é a região do plano formada por duas semirretas distintas e de mesma origem (OLIVEIRA e FERNANDES, 2008, p. 80).

A definição de ângulo como um giro foi encontrada em apenas um livro didático. Imenes e Lellis (2003) iniciam o capítulo "Formas Planas", no livro didático para 5ª série, com o tópico: "Giros, cantos e ângulos". O tópico desenvolve noções de ângulo mostrando a imagem de uma régua escolar com uma extremidade fixa e a outra livre. As imagens mostram giros dessa régua e explica-se "O giro da régua corresponde a um ângulo" (Idem, p. 59). Outras informações são adicionadas como, por exemplo, "Para medir ângulos, consideramos que a volta toda tem 360°" e "O ângulo de meia volta também é chamado ângulo raso. Ele mede 180° porque 180° é a metade de 360°". O tópico se encerra com a figura de um ângulo (dois segmentos de reta com mesma origem, o ponto A) e a identificação de seus elementos: o vértice A, os lados e o ângulo Â (a região interna entre os dois segmentos).

Contudo, a noção de ângulo como um giro ou uma rotação, isto é, ângulo compreendido como uma figura dinâmica também está presente em alguns textos pesquisados.

Moise e Downs (1971) definem ângulo utilizando a ideia de semirretas de mesma origem, porém mais adiante, no mesmo capítulo, explicam que:

> Essa é a forma mais simples da ideia de um ângulo. [...] Mais tarde, no entanto, quando você estudar trigonometria, a ideia de ângulo aparecerá de uma forma diferente. Em trigonometria, fará diferença qual lado do ângulo é mencionado em primeiro lugar. Isto é, em trigonometria fazemos distinção entre $\angle CAB$ e $\angle BAC$. Em $\angle CAB$, o lado AC é o lado inicial e AB é o lado final. [...] Ângulo assim são chamados ângulos orientados (Ibidem, p. 72).

A expressão "ângulo orientado", citada no texto, remete à ideia de movimento, ou seja, esse ângulo orientado será construído através de uma rotação de sentido horário ou anti-horário.

Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007), no tópico "Um giro pode ser medido" (Ibidem, p. 148), apresentam figuras de um palito fixo em uma extremidade e livre na outra. As figuras mostram esse palito em movimento e afirma-se: "Um giro nos dá uma ideia de ângulo"; somente depois dessa abordagem inicial é que os autores definiram ângulo a partir da ideia de região do plano.

Iezzi (1999) não trata, explicitamente, da ideia de ângulo como um giro ou uma volta. Sua definição geométrica de ângulo é fixa (definiu ângulo a partir de duas semirretas de mesma origem). Contudo, quando o autor passa a tratar de funções circulares, a palavra "percurso" é utilizada para indicar a marcação de arcos com comprimentos reais e remete a um movimento, um giro, no sentido anti-horário ou horário, e é utilizada com esse significado. O autor deixa claro também que um arco está associado a um ângulo central, logo, o texto sugere que, se um arco pode ser marcado no círculo a partir de um giro, então o ângulo determinado por esse arco também pode ser compreendido a partir desse giro.

No seu livro didático para o Ensino Médio, Dante (2009) inicia o capítulo "Conceitos trigonométricos básicos" definindo arco e ângulo central da seguinte maneira:

> Arco geométrico: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Se os dois pontos coincidem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.
> Arco e ângulo central: todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subentende (DANTE, 2009, p. 278 - p. 279).

As imagens que são apresentadas ao leitor exemplificam ângulos e arcos de círculo e são seguidas de legendas como: "arco AB de 90° (um quarto de volta)" e "arco AB de 180° (meia volta)" (Ibidem, p. 279).

Mais adiante, o autor define arcos côngruos:

> Toda vez que o ponto da circunferência, final do arco iniciado em (1, 0), é o mesmo para dois arcos diferentes [...], chamamos esses arcos de arcos côngruos ou congruentes. É conveniente notar que todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 2π, que é o comprimento de cada volta (Idem, p. 281).

A maneira como o autor define e explica o conceito de arco sugere o tratamento como um giro, uma rotação, pois usa, constantemente, a expressão "volta".

Esse tratamento de ângulo como giro também fica evidente ao analisar-se o livro para a 5ª série do Ensino Fundamental de autoria de Dante (2003). Ele define ângulo a partir de semirretas de mesma origem, mas explica a ideia de ângulo utilizando contextos de giro. No tópico intitulado: "Giros e ângulos" (Ibidem, p. 173), apresenta figuras de pistas circulares com carrinhos andando por elas e explica: "[...] para cada giro há um ângulo correspondente" (Ibidem, p. 173).

Uma discussão sobre as diferentes definições de ângulo foi realizada por Gadotti (2008). O quadro abaixo resume as definições de ângulo encontradas por ela nos períodos: após o Movimento da Matemática Moderna (MMM), durante e antes do MMM.

Quadro 1

Resumo das definições por período referente à Matemática Moderna no Brasil por categoria.

Categorias	Após	Durante	Antes	Total
Par de linhas	17	4	2	23
Região no espaço	16	6	1	23
Como giro	4	-	-	4
Não define/outros	3	1	-	4
Total geral	40	11	3	54

Fonte: Gadotti (2008, p. 85)

O quadro 1 mostra que, dos 40 livros de matemática pesquisados no período após o MMM, 17 definiram ângulo como par de linhas, 16 como região no espaço e apenas 4 como giro. Os livros analisados no período do movimento e antes dele, não definem ângulo como giro. A autora analisou esses dados e comentou que:

> Ângulo como *giro* permite considerar ângulos maiores que 360º, ângulos positivos e negativos, mas, segundo Casas e Luengo (2005, p. 203), é uma ideia abstrata, pois não há algo material para representá-la como um par de linhas ou uma região no espaço. Além disso, essa definição de ângulo proporciona uma visão dinâmica, como algo em movimento, em contraste com as outras duas que dão uma visão estática (GADOTTI, 2008, p. 86).

A autora escreve também sobre a dificuldade de se definir conceitos em Matemática, não só o de ângulo, e explica que:

> Pelo exposto, não se pretendeu nesse trabalho verificar quais livros ou quais professores dão a melhor definição de ângulo, mas evidenciar as diferentes formas de se identificar um mesmo elemento geométrico. Se o professor conhecer as possíveis definições de ângulo e suas limitações poderá ter mais liberdade e segurança em escolher a mais adequada a uma determinada situação de ensino (Ibidem, p. 87).

Essa discussão sobre ângulo teve como objetivo esclarecer as noções de ângulo que a sequência de ensino pretende abordar com os alunos: ângulo formado por duas semirretas de mesma origem e ângulo como um giro.

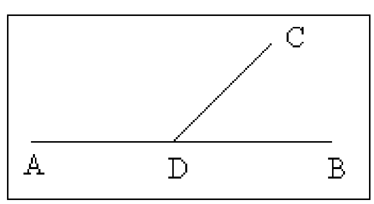
A noção de ângulo como duas semirretas de mesma origem estará presente nas atividades que envolvem triângulo retângulo nas atividades 1 (Relacionando lados e ângulos em um triângulo retângulo), 2 (Aplicações das razões trigonométricas), 5 (Seno e cosseno no círculo trigonométrico) e 6 (Simetrias).

A noção de ângulo como giro estará presente nas atividades que envolvem o círculo trigonométrico. Na experiência de ensino, o círculo trigonométrico será construído centrado sobre a origem de um sistema cartesiano ortogonal. A origem do sistema será o ponto O = (0, 0) e o raio medirá uma unidade de comprimento. O ângulo no círculo trigonométrico será considerado como sendo formado por um segmento fixo $\overline{OA}$ (raio do círculo), em que A é o ponto de coordenadas (1, 0), e pelo segmento $\overline{OP}$, sendo P um ponto qualquer pertencente ao círculo. Pretende-se desenvolver a noção de ângulo como um giro do lado $\overline{OP}$, em torno de O, no sentido horário ou anti-horário. Essa noção de ângulo será abordada nas atividades: 3 (Construindo e caracterizando o círculo trigonométrico), 4 (Relação entre as unidades de medidas de ângulos e arcos: grau x radiano), 5 (Seno e cosseno no círculo trigonométrico) e 6 (Simetrias). Esse tratamento dinâmico para ângulo foi favorecido pelas possibilidades de construção de figuras em movimento proporcionadas pelo *software* GeoGebra.

3.3.2 A construção do conceito de ângulo

Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) estudaram a construção do conceito de ângulo em crianças. Os autores relatam uma experiência que mostra diferentes níveis nesse processo de construção do conceito. A experiência consistiu em solicitar às crianças que reproduzissem uma figura composta de um segmento AB (horizontal) e um segmento CD, concorrente ao segmento AB e sendo D o ponto em comum entre os dois segmentos, conforme imagem destacada no quadro 2.

Quadro 2: Experiência sobre o conceito de ângulo.



As crianças não poderiam olhar a figura no momento em que desenhavam, mas poderiam utilizar instrumentos como réguas, papéis, compasso e triângulos de cartolina. O primeiro nível identificado pelos autores caracteriza-se pela ausência de qualquer medida de ângulo. As crianças não medem os segmentos AD e BD, marcando o ponto D em qualquer lugar do segmento AB.

> Sua medida da figura proposta como modelo permanece de fato, estritamente unidimensional, ainda que se referindo às retas distintas AB e CD: em outras palavras, em presença de uma figura angular, esses sujeitos nem mesmo suspeitam que se possa medir outra coisa além do comprimento dos lados (PIAGET, INHELDER & SZEMINSKA, 1948, p. 230, tradução nossa).

No segundo nível, as crianças marcam com precisão o ponto D e tentam conservar a inclinação da régua. Essas crianças "não assimilam a figura modelo a um sistema de ângulos [...]: eles vêem apenas uma linha inclinada cuja extremidade coincide com um ponto dado em uma horizontal, e não dois ângulos a serem medidos enquanto ângulos" (Ibidem, p.233). No terceiro nível, os sujeitos conseguem estruturar a figura modelo como um sistema de ângulos: medem as distâncias AC e BC marcando a abertura dos ângulos complementares ADC e CDB, ou às vezes a distância CK sobre uma reta perpendicular tirada de C até AB.

> De um lado, em efeito, a medida do ângulo é bidimensional, como a determinação de um ponto sobre um plano: [...] a medida de um ângulo implica uma coordenação *sui generis* entre o comprimento dos lados e o tamanho da abertura, essas duas medidas não estando orientadas segundo a mesma dimensão e encerrando por isso o plano compreendido entre os lados do ângulo [...] (Ibidem, p. 236, tradução nossa).

No quarto nível identificado, os sujeitos apresentam preferência mais marcada pela "abertura normal" do ângulo CDB, aquela que intervém na determinação do seno.

> Sem o saber, eles estão perto de medir os ângulos pelas relações estabelecidas entre os comprimentos dos lados (DC ou CK) e a linha de abertura normal (CK): bastaria substituir a simples coordenação lógica dos valores métricos obtidos das medidas pela multiplicação e divisão métricas, para chegar a um cálculo do seno e da tangente do ângulo (Ibidem, p. 236, tradução nossa).

Com base nesse experimento e na discussão apresentada pelos autores, nota-se que: a construção do conceito pode ocorrer fora do ambiente escolar, sem que haja uma intencionalidade de ensino; essa construção é complexa e envolve, entre outros aspectos, a superação do pensamento unidimensional e focado nos elementos explícitos das figuras.

4 A EXPERIMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ENSINO

O capítulo 4 apresenta um relato detalhado sobre o processo de elaboração das atividades que compõem a sequência de ensino, sobre a aplicação dessas atividades, sua resolução pelos alunos e a análise do material coletado durante a experiência.

4.1 O PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

As atividades[14] que compõem a experiência de ensino foram elaboradas com o intuito de desenvolver os conteúdos da Trigonometria usualmente estudados no Ensino Fundamental e Médio. O objetivo de se criar essa sequência de ensino foi construir um material que permitisse o estudo desses conteúdos e que contasse, durante todo o seu desenvolvimento, com o auxílio do *software* GeoGebra. Essa sequência foi aplicada para uma turma e um grupo em particular, mas esperava-se que esse material e a análise dos resultados desse caso pudessem contribuir para o ensino e a aprendizagem da Trigonometria para outros grupos de alunos. Pensei em atividades que tivessem um caráter dinâmico, em que os alunos pudessem visualizar e desenvolver construções geométricas baseadas em suas propriedades, que pudessem manipular essas construções para experimentar possibilidades, identificar padrões, formular conjecturas, novamente testá-las e assim por diante.

Tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, as atividades da sequência de ensino foram elaboradas tendo em vista conceitos relativos à Trigonometria considerados importantes para serem desenvolvidos no Ensino Médio, e como deveriam ser abordados.

Pensando nos conceitos trigonométricos a serem abordados na sequência de ensino, tomei como referência o artigo de Klein e Costa (2011) no qual as autoras mencionam que a primeira etapa para a realização de sua abordagem diferenciada sobre o ensino da Trigonometria foi a construção de um Mapa Conceitual do Campo Conceitual da Trigonometria. Elaborei, então, um Mapa Conceitual do Campo Conceitual da Trigonometria com o objetivo de organizar e explicitar os conceitos que seriam abordados na experiência de ensino.

Considerando que "Mapas Conceituais são diagramas de significados, de relações significativas; de hierarquias conceituais" (MOREIRA, 1997) construí um Mapa Conceitual

---

[14] Ver apêndice E.

do Campo Conceitual da Trigonometria que está apresentado na figura 8. Nesse mapa, os conceitos-chave abordados na sequência de ensino estão destacados em vermelho.

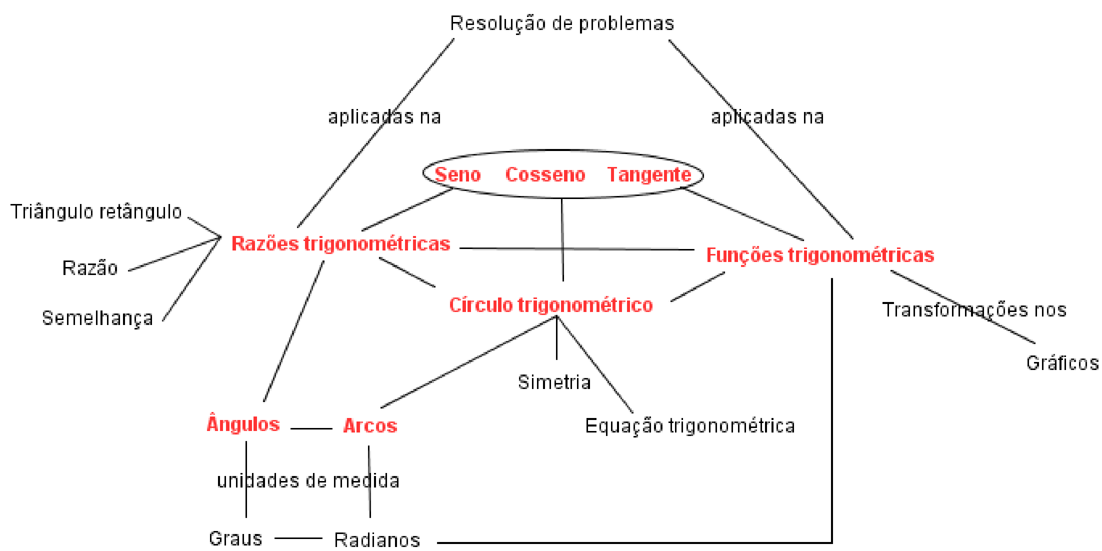


Figura 8: Mapa Conceitual do Campo Conceitual da Trigonometria desenvolvido para a Sequência de ensino.

No mapa conceitual, destaquei os conceitos: seno, cosseno e tangente. Sobre esses conceitos centrais, esperava que os alunos pudessem conhecer as razões trigonométricas no triângulo retângulo, identificar os lados do triângulo de acordo com o ângulo de referência, calcular essas razões e aplicá-las na resolução de exercícios e problemas. Relacionados a esses conceitos iniciais, estão os conceitos de razão trigonométrica, círculo trigonométrico e função trigonométrica. Além de conhecer as razões trigonométricas, esperava que os alunos entendessem que essas razões são constantes, para um mesmo ângulo de referência, devido à semelhança de triângulos. Esperava que os alunos pudessem compreender as características e aplicações do círculo trigonométrico a partir de sua construção, que pudessem marcar arcos de círculo e compreendessem a unidade de medida de comprimento de arcos, bem como associassem esse arco a um ângulo central e estabelecessem relações entre as unidades de medida de arcos e ângulos (radiano e grau). Esperava que os alunos conhecessem as funções trigonométricas $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = cos\ x$ no círculo trigonométrico, relacionando as razões trigonométricas com as funções e identificando x como um número real associado à medida de um arco do círculo trigonométrico. Esperava que os alunos resolvessem equações trigonométricas do tipo: $sen\ \alpha = sen\ \beta$ ($\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$) e $cos\ \alpha = cos\ \beta$ ($\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = - \beta + 2k\pi$) a partir da observação das simetrias entre os ângulos no círculo trigonométrico. Esperava que os alunos pudessem conhecer, caracterizar e analisar os gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno, observando a periodicidade, o crescimento, a variação de sinal e a imagem das funções, e que pudessem também construir os gráficos das funções $f(x) = A + B \, sen \, (CX + D)$ e $g(x) = A + B \cos (CX + D)$ a partir de transformações como deslocamentos verticais e horizontais, alongamentos, compressões e reflexões e que pudessem aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas.

Para promover o dinamismo esperado, as atividades foram desenvolvidas utilizando-se o programa GeoGebra. Os arquivos das atividades foram criados a partir da ideia de promover situações diversas para os alunos. Alguns arquivos apresentavam construções prontas cujo objetivo principal era permitir aos alunos a manipulação dessas construções e observação de padrões, características e propriedades a partir dos movimentos. Outros arquivos continham roteiros de construções que eles deveriam fazer. Essas construções visavam favorecer a observação e compreensão de propriedades geométricas importantes e que, provavelmente, não seriam percebidas pelos alunos se as construções fossem dadas prontas. Gravina (1996) enfatiza os aspectos didáticos relacionados às construções feitas pelos alunos e às construções feitas pelo professor:

> Dois são os principais aspectos didáticos de utilização dos programas: a) os alunos constroem os desenhos de objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo a descoberta de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível de escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente (GRAVINA, 1996, p. 7).

Uma construção simples e que pode ser citada para ilustrar essa ideia é a construção de um triângulo retângulo que permanece retângulo quando um dos seus vértices é deslocado, mudando sua posição e dimensões. Resultado diferente encontraria um aluno que construísse um triângulo a partir de três pontos quaisquer, posicionados de tal forma que parecessem determinar um triângulo retângulo; nesse caso, ao movimentar algum vértice, esse triângulo deformar-se-ia e deixaria de ser triângulo retângulo. Necessariamente, os passos para a construção no GeoGebra do triângulo, que não perde suas propriedades, envolvem retas perpendiculares ou a marcação de ângulo cuja medida é 90º, portanto, leva à obrigatoriedade da existência de um ângulo reto no triângulo.

A tabela 1 mostra a organização das atividades da sequência de ensino, bem como seus respectivos conteúdos e as características das construções desenvolvidas em cada uma delas:

Atividade	Nome	Conteúdos abordados	Construções	N° de encontros
1	Relacionando lados e ângulos em um triângulo retângulo.	- Semelhança de triângulos. - Soma dos ângulos internos de um triângulo; - Identificação em um triângulo retângulo de hipotenusa, cateto oposto e adjacente a um ângulo agudo; - Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente;	- Triângulo retângulo construído pela professora. - Triângulo retângulo construído pelos alunos através de suas propriedades.	3
2	Aplicações	- Utilização das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para cálculo de medidas desconhecidas em situações contextualizadas.	- Triângulos retângulos construídos pela professora.	1
3	Construindo e caracterizando o círculo trigonométrico.	- Caracterização do círculo trigonométrico: raio, pontos de intersecção do circulo com os eixos coordenados, quadrantes, sentido horário e sentido anti-horário; - Ângulos congruentes; - Ângulos marcados no sentido horário.	- Círculo trigonométrico construído pelos alunos.	1 encontro para as atividades 3 e 4.
4	Relação entre as unidades de medidas de ângulos e de arcos: grau X radiano.	- Unidade de medida de comprimento de arco: radianos; - Unidade de medida de ângulo: graus; - Conversão de graus para radianos e vice-versa.	- Construção pelos alunos de arco de círculo e ângulo correspondente no círculo trigonométrico.	
5	Seno e cosseno no círculo trigonométrico.	- Seno e cosseno no círculo trigonométrico: variação das medidas dos ângulos e variação dos valores de seno e cosseno em cada quadrante; - Análise do sinal de seno e cosseno para ângulos do 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes; - Identificação dos valores de seno e cosseno de ângulos de 0° (zero grau), 90°, 180°, 270° e 360°.	- Círculo trigonométrico construído pela professora.	1
6	Simetrias	- Simetria de ângulos em relação ao eixo *y*;	- Círculo trigonométrico construído pela professora,	1

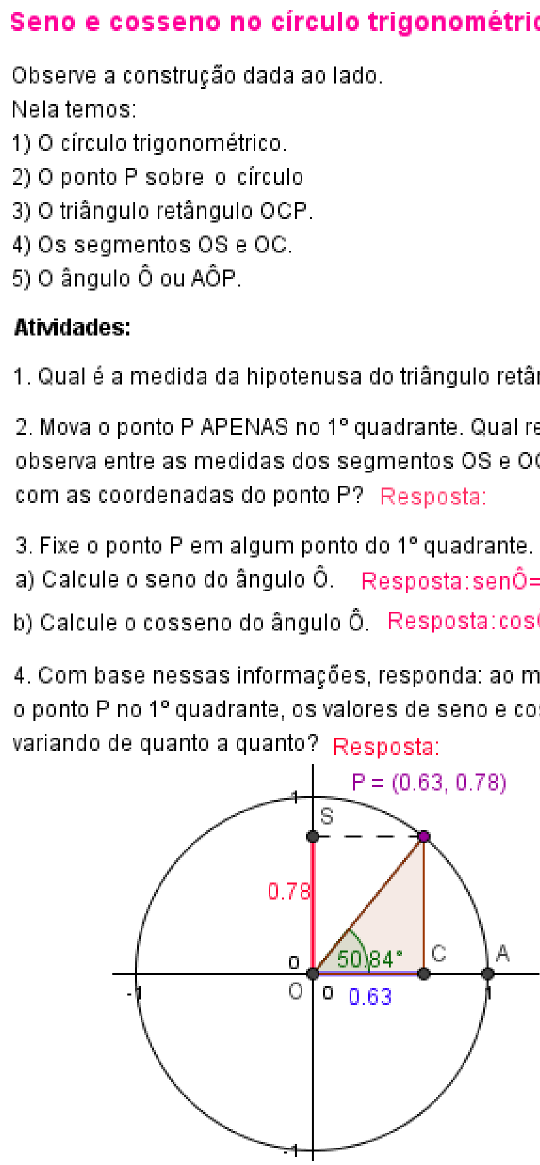
		- Simetria de ângulos em relação ao eixo *x*; - Simetria de ângulos em relação à origem dos eixos. - Comparação dos valores de senos e cossenos de ângulos simétricos; - Resolução de equações trigonométricas.	com pontos simétricos entre si marcados em cada quadrante.	
7	Retomando conceitos: seno e cosseno de arcos medidos em radiano.	- Seno e cosseno de arcos medidos em radianos; - Associação do comprimento do arco dado em radianos com a unidade utilizada no eixo das abscissas.	- Círculo trigonométrico construído pela professora com arco AP marcado.	1
8	Gráfico das funções seno e cosseno a partir do círculo trigonométrico.	- Construção e análise dos gráficos das funções $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = cos\ x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.	- Círculo trigonométrico construído pela professora e pontos S_2 e C_2 associados a seno e cosseno.	1
9	Explorando transformações nos gráficos das funções seno e cosseno.	- Construção das funções $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = cos\ x$ para $x \in \Re$. -Transformações nos gráficos: deslocamentos, alongamentos, compressões e reflexões; - Análise das funções: imagem, período e raízes; - Resolução de problemas aplicados através da análise de gráficos.	- Construção dos gráficos pelos alunos. - Gráficos de seno e cosseno construídos pela professora, com parâmetros para serem manipulados na tela.	3

Tabela 1: Atividades que compõem a experiência de ensino e conteúdos abordados.

Nas construções dadas ou solicitadas, os alunos podiam utilizar ferramentas do *software* para medir ângulos e comprimentos, para construir pontos, segmentos, retas, círculos e uma série de outros elementos geométricos. Também tinham à sua disposição ferramentas como mostrar ou esconder objetos, inserir texto, podiam personalizar uma construção modificando sua aparência, como cor e espessura.

Pensei que a melhor forma de registrar as respostas dos alunos seria utilizando o próprio GeoGebra, para facilitar a gravação das resoluções das atividades para posterior análise. Quando necessário, o registro ou o roteiro de alguma atividade foi feito em folhas de papel, como nas atividades 2 e 9 (apêndices C e D respectivamente).

Nas aulas, cada grupo de alunos utilizava um computador. Eles acessavam os arquivos e neles estavam escritos o nome da atividade, as instruções relativas ao que deveriam fazer e as perguntas a serem respondidas; após cada pergunta, havia um espaço apropriado para digitação da resposta. A figura 9 mostra uma parte da atividade 5, nela pode-se ver um exemplo do formato em que as atividades foram apresentadas aos alunos. Após a realização de cada atividade, cada grupo identificava e gravava seu trabalho, no formato de arquivo GeoGebra, em uma pasta já preparada com o nome da atividade.



Seno e cosseno no círculo trigonométrico

Observe a construção dada ao lado.
Nela temos:
1) O círculo trigonométrico.
2) O ponto P sobre o círculo
3) O triângulo retângulo OCP.
4) Os segmentos OS e OC.
5) O ângulo Ô ou AÔP.

Atividades:

1. Qual é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo? Resposta:

2. Mova o ponto P APENAS no 1° quadrante. Qual relação você observa entre as medidas dos segmentos OS e OC comparando-as com as coordenadas do ponto P? Resposta:

3. Fixe o ponto P em algum ponto do 1° quadrante.
a) Calcule o seno do ângulo Ô. Resposta:senÔ= =
b) Calcule o cosseno do ângulo Ô. Resposta:cosÔ= =

4. Com base nessas informações, responda: ao movimentarmos o ponto P no 1° quadrante, os valores de seno e cosseno estão variando de quanto a quanto? Resposta:

Figura 9: Parte inicial da atividade 5.

O detalhamento de cada atividade e de seus objetivos específicos será apresentado no decorrer do relato da implementação da experiência.

Destaco, nesse momento, a utilização da palavra "círculo" nas atividades. Os livros didáticos adotados na escola utilizam a palavra "circunferência" para se referirem à curva, e a palavra "círculo", para se referirem à região interna à curva. Outros livros de matemática usam "círculo" para designar a curva. O seguinte trecho é um exemplo desse uso:

> [...] consideremos o conjunto dos pontos de um plano que estão a uma distância fixa (digamos 1) de um ponto fixo *O* do plano. Este conjunto constitui um círculo S_1 de raio 1 e centro *O*, que será chamado de círculo unitário do plano (CARMO, MORGADO e WAGNER, 2005, p. 3).

O GeoGebra usa a palavra círculo para se referir à curva, portanto optei por manter a mesma linguagem do programa nas atividades e ao longo da escrita desse trabalho. Essa escolha também está embasada na discussão que Lima (1987) faz sobre o uso dessas denominações:

> Em resumo: circunferência e disco são palavras de sentido bastante claro, cada uma com um significado na língua portuguesa. Por outro lado, círculo é uma palavra que tanto pode ser empregada no sentido de circunferência como no sentido de disco (LIMA, 1987, p. 197).

4.2 OS ALUNOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

A experiência de ensino foi realizada em dois momentos distintos[15]. O primeiro, aconteceu com a turma 221 do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Marista Assunção de Porto Alegre, no qual trabalhei até maio de 2011. O segundo momento contou com a participação de sete alunos voluntários da turma 221. A aplicação das atividades, no primeiro momento, iniciou-se em 31 de março e terminou em 03 de maio de 2011, totalizando 6 encontros. O segundo momento iniciou em 17 de maio e terminou em 21 de junho de 2011, totalizando também 6 encontros.

A turma 221, formada por 45 alunos, foi o grupo que iniciou a realização das atividades da experiência. Trabalhei com essa turma desde o primeiro ano do Ensino Médio, então tive oportunidade de observar os alunos e conhecer as dificuldades que apresentavam. Durante esse ano que passou, percebi que, dos quarenta e cinco alunos, poucos apresentavam um conhecimento matemático esperado em um primeiro ano do Ensino Médio. Considero conhecimentos básicos: compreender e resolver equações do primeiro grau e equações do segundo grau; resolver sistemas de equações de primeiro grau; resolver expressões e cálculos que envolvam números racionais (sejam esses na forma decimal ou fracionária) e as

[15] Devido a uma mudança na minha situação profissional, foi necessária a realização da experiência em dois momentos distintos.

operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; compreender e resolver problemas que envolvam esses conhecimentos. Durante todo o primeiro ano, fui observando esses conhecimentos em relação aos quais os alunos apresentavam dificuldades e fui tentando retomar esses conteúdos conforme as necessidades que apareciam no estudo das funções. Foram revisados desde os conceitos iniciais de funções até os diferentes tipos de funções estudados no início do ensino médio: função constante, linear, polinomial de primeiro grau, polinomial de segundo grau, função composta, inversa e modular. Nesse extenso estudo, percebi que foram aparecendo novos empecilhos à aprendizagem. Os alunos apresentaram dificuldades quanto à marcação de pontos no plano cartesiano, à identificação do domínio da função, ao cálculo da imagem de um elemento do domínio, à visualização de um gráfico como uma representação de uma situação e análise da mesma a partir dele, à obtenção de uma lei de formação de função a partir de algumas informações dadas, ao cálculo de raízes (tanto com relação ao processo algébrico, como à compreensão do significado de raiz ou zero), entre outras.

Esses problemas todos já foram suficientes para provocar em mim várias inquietações como professora. Porém, ainda é importante citar que esse grupo de alunos apresentou baixa concentração e pouco interesse durante as aulas e durante a realização das tarefas. Os alunos não conseguiam se organizar rapidamente para o início das aulas, nem conseguiam manter postura adequada durante as explicações (prestar atenção, não conversar com os colegas nesse momento, anotar a matéria e fazer perguntas para esclarecer dúvidas). Acrescento também a resistência a realizar atividades propostas (exercícios dados no quadro-negro ou indicados no livro didático e trabalhos em grupos).

As minhas inquietações relativas ao ensino da Trigonometria e ao aprendizado dos alunos, conjugadas à necessidade de modificação na estrutura das minhas aulas de Matemática, tendo em vista as características do grupo, levaram-me a pensar e desenvolver a sequência de ensino apoiada no uso do programa GeoGebra. Nesse ano, percebi, durante o primeiro mês de aulas com esses alunos, uma mudança na sua postura. Apresentaram-se mais atentos, participativos e dispostos aos trabalhos propostos. No final do mês de março, iniciei o trabalho com os alunos. Expliquei a eles como seriam as atividades que iriam desenvolver, quais os objetivos dessas atividades, a duração do processo de sua aplicação; expliquei que as resoluções seriam recolhidas pela professora, que as aulas seriam gravadas em arquivos de áudio e que a análise do processo de aplicação da sequência e do material coletado faria parte de uma pesquisa. Expliquei os objetivos da pesquisa e que ela fazia parte do meu trabalho de dissertação de Mestrado. Durante essa apresentação geral da proposta aos alunos, foram entregues os pedidos de autorização para a coleta dos dados, que tanto eles quanto seus pais e/ou responsáveis deveriam assinar se estivessem de acordo com a participação (apêndice B). Acredito ser importante comentar que durante e após essa apresentação alguns alunos demonstraram interesse em saber mais informações sobre a pesquisa e sobre o curso de mestrado.

No dia 31 de março, iniciou-se a realização da atividade 1 da sequência. Desse momento até 3 de maio, trabalhei com a turma completa, com seus 45 integrantes. A partir de 6 de maio, houve uma mudança na minha situação profissional e deixei a escola. Conversei com a coordenação pedagógica do Colégio Marista Assunção, com a direção e com os alunos da turma sobre a possibilidade de continuar aplicando o material da pesquisa na escola, porém no turno inverso de aula. A escola colocou-se à disposição para ajudar na continuidade da pesquisa, disponibilizando um dos laboratórios de informática em uma tarde por semana. Conversei com a turma antes do meu desligamento explicando a eles os motivos dessa mudança e convidando-os para voluntariamente virem à escola para continuar realizando as atividades. Dezesseis alunos inscreveram-se para continuar participando do processo; destes, sete compareceram aos encontros.

O estudo de caso foi, portanto, desenvolvido em duas fases. As atividades 1 a 5 foram realizadas com a turma. As atividades 6 a 9 foram realizadas com o grupo de sete alunos voluntários. A mudança no caráter e na composição do grupo foi considerada na análise da implementação da sequência. Ainda, um aspecto considerado negativo por mim nessa mudança foi a redução na quantidade de materiais coletados para análise e um aspecto positivo foi a possibilidade de conversar mais tempo com cada aluno, questionando durante a realização das atividades o que eles estavam pensando, ou porque estavam fazendo um determinado procedimento ou outro.

A partir da próxima seção, descreverei a aplicação da sequência planejada, detalhando, para cada atividade: seus objetivos, sua realização pelos alunos, comentários deles durante a realização das atividades e a análise dos seus aprendizados. Para a análise das atividades 1 a 5, as respostas dos alunos foram agrupadas em tabelas, para se ter uma ideia quantitativa do número de alunos que responderam corretamente às questões ou que deram respostas diferentes do esperado; para as atividades 6 a 9, as respostas não foram agrupadas em tabelas, pois analisei o trabalho de cada grupo separadamente. Foram selecionadas, dos materiais que os alunos entregaram em cada atividade, respostas interessantes para exemplificar situações de aprendizagem relevantes para os objetivos da pesquisa. Também foram analisados diálogos entre alunos e a professora que ocorreram durante as aulas, os quais foram registrados em arquivos de áudio. A identificação dos grupos, na primeira fase, foi feita com as letras: A, B, C e assim por diante; na segunda fase, optou-se por utilizar a numeração romana: I, II, III e assim por diante, uma vez que a organização dos grupos foi alterada. Em alguns momentos, identificaram-se alguns componentes dos grupos. Por questões éticas, a identificação dos alunos foi feita através da atribuição de nomes fictícios.

4.3 RELACIONANDO LADOS E ÂNGULOS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

4.3.1 Objetivos da atividade 1

Quadro 3: Objetivos da atividade 1.

- Compreender as noções de seno, cosseno e tangente como razões que não dependem das medidas dos lados;
- Compreender os conhecimentos iniciais de trigonometria no triângulo retângulo: desde a identificação dos lados no triângulo até o cálculo das razões trigonométricas;
- Entender claramente as instruções que estão dadas na atividade;
- Resolver as atividades com autonomia;
- Conhecer, manipular e utilizar as ferramentas do programa para a realização das atividades.

A atividade 1 introduziu o estudo da Trigonometria, ou seja, foi a primeira aula a abordar esse conteúdo e também a primeira em que os alunos tiveram acesso ao programa GeoGebra. Ela é composta por dez exercícios que deveriam ser resolvidos em grupos com dois ou três componentes, cada grupo teria um computador à sua disposição no laboratório de informática da escola. É importante citar que essa turma não havia estudado Trigonometria no triângulo retângulo na oitava série, embora esse conteúdo constasse no plano de estudos da escola para essa série.

No 1º exercício, foi apresentada uma construção que poderia ser manipulada: um triângulo retângulo em que estavam marcados alguns elementos, como ilustra a figura 10. Os alunos deviam mover o ponto B no triângulo e observar quais as modificações que aconteciam. O triângulo havia sido construído de modo que, ao mover-se o ponto B, o ponto C também se movia, mantendo-se assim o lado BC perpendicular ao lado AB. Os ângulos internos foram fixados com o intuito de se trabalhar com triângulos semelhantes. Na figura 10, à esquerda, está o triângulo inicial da atividade e, à direita, pode-se ver um exemplo do efeito do movimento de clicar sobre o ponto B e arrastá-lo para a esquerda. Vemos que os ângulos mantêm-se com as mesmas medidas. O triângulo pontilhado ao fundo foi incluído na figura para permitir a comparação entre a figura original e a figura após o movimento, mas o aluno não via mais o triângulo original após movimentar o ponto B. O objetivo desse procedimento era que os alunos observassem que as medidas dos lados do triângulo se alteram, mas as medidas dos ângulos internos permanecem as mesmas.

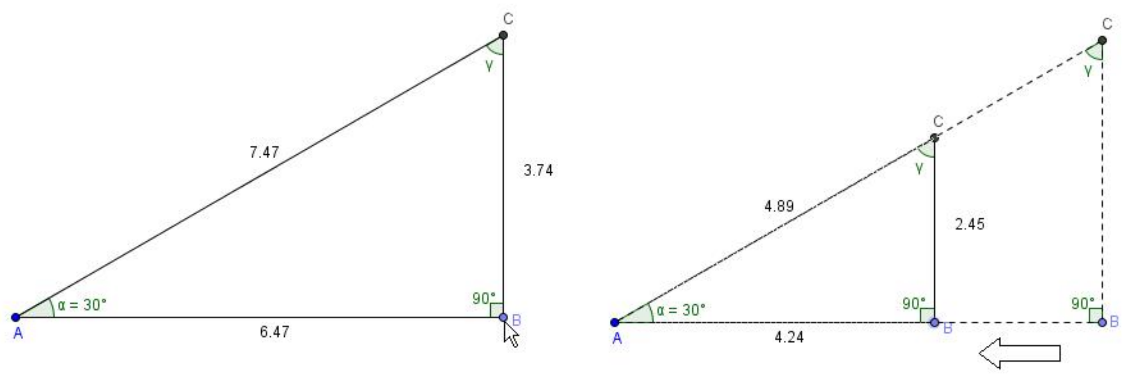


Figura 10: Triângulo inicial e movimento de “arrastar” para esquerda o ponto B.

Os conceitos abordados no exercício 1 estão relacionados com o conceito de função existente no processo de construção geométrica, favorecido pelos ambientes de Geometria Dinâmica. Nesse exercício, a posição do ponto B corresponderia à variável independente e os lados, à variável dependente de uma função, ou ainda, a posição do ponto B corresponderia à variável independente e os ângulos, às variáveis dependentes (nesse último caso, teríamos um exemplo de função constante).

Na figura 11, pode-se observar o enunciado do 2º exercício, que teve por objetivo retomar a propriedade da Geometria Euclidiana que afirma que a soma de todos os ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º (180 graus).

2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma. Você sabe qual é o valor dessa soma? Em caso afirmativo, utilize essa soma para calcular o valor do ângulo γ. Em caso negativo, selecione ângulo, no oitavo botão, clique sobre os pontos A, C e B, nessa ordem, e obtenha o valor dessa soma.

Resposta:

Figura 11: Enunciado do 2º exercício da atividade 1.

O 3º exercício identificava os nomes dos lados do triângulo retângulo com referência ao ângulo agudo α: "O segmento AC, que é oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa. O segmento AB é chamado de cateto adjacente ao ângulo α e o segmento BC é chamado de cateto oposto ao ângulo α". Na figura 12, estão as perguntas feitas aos alunos após essa introdução.

a) qual segmento é o cateto oposto ao ângulo γ?
b) qual segmento é o cateto adjacente ao ângulo γ?
c) qual segmento é a hipotenusa?

Resposta:

Figura 12: Perguntas do 3º exercício.

Esperava que os alunos percebessem que o cateto oposto e o adjacente iriam mudar quando utilizassem como referência o ângulo γ, mas que a hipotenusa permanece sempre a mesma. Na figura 13, estão identificados os lados de acordo com o ângulo de referência. Os alunos não tinham essa imagem na atividade, contudo, essa figura mostra ao leitor a conclusão à qual eu esperava que eles chegassem.

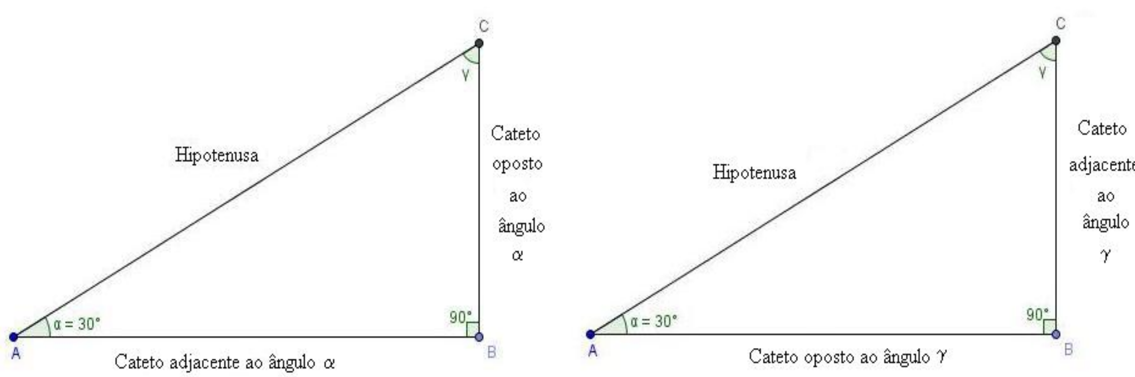


Figura 13: Identificação dos lados do triângulo retângulo de acordo com o ângulo de referência.

A partir do 4º exercício (conforme figura 14), começou-se a explorar as ideias relativas às razões trigonométricas. Os alunos deveriam modificar a posição do ponto B e calcular a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa, modificar a posição do ponto B novamente e calcular a razão entre as novas medidas do cateto oposto e da hipotenusa e repetir, uma terceira vez, esse procedimento. Eles poderiam utilizar calculadora para agilizar a resolução do exercício. Esperava que os alunos não tivessem dificuldade com a palavra *razão*, isto é, esperava que eles compreendessem a razão como quociente entre numerador e denominador. O primeiro objetivo desse exercício era que os alunos observassem que, mesmo mudando as medidas dos lados, mantendo o mesmo ângulo como referência, a razão é uma constante. O 5º e o 6º exercícios tinham esse mesmo objetivo, com a diferença de que no 5º a razão a ser calculada é entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa e, no 6º, entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo α. O segundo objetivo era trabalhar com os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 30º, por ser um dos ângulos que aparecem com maior frequência em livros didáticos, em exercícios, em questões de provas de vestibulares, por ser fácil de memorizar e por servir como referência para comparação com outras.

4. Clique inicialmente em Razão 1 e preencha as chaves {}/{} com os valores do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa respectivamente. Após o segundo sinal de igual, escreva o valor que você encontrou para essa razão com o auxílio da calculadora. Em seguida, mova o ponto B, preencha as chaves e repita o cálculo para os novos valores que apareceram. Faça isso uma última vez, movendo novamente o ponto B.

Razão$_1$=.= Razão$_2$=.= Razão$_3$=.=

5. Repita o que você fez no item 4, porém agora as razões devem ser formadas pelo cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa.

Razão$_1$=.= Razão$_2$=.= Razão$_3$=.=

6. Repita o que você fez nos itens 4 e 5, porém as razões devem ser formadas pelo cateto oposto e pelo cateto adjacente respectivamente.

Razão$_1$=.= Razão$_2$=.= Razão$_3$=.=

Figura 14: Enunciados do 4º, 5º e 6º exercícios.

No 7º exercício (figura 15), houve uma mudança no ângulo de referência. Os alunos deveriam calcular três razões: a primeira, entre as medidas do cateto oposto ao ângulo γ e da hipotenusa, a segunda, entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo γ e da hipotenusa e, a terceira, entre as medidas do cateto oposto ao ângulo γ e do cateto adjacente ao ângulo γ. Esperava que os estudantes comparassem a primeira razão com os resultados obtidos no 4º exercício (ver enunciado na figura 14a); a segunda, com os resultados do 5º exercício (figura 14b) e, a terceira, com os resultados do 6º exercício (figura 14c). Esperava que eles observassem que, mudando o ângulo de referência, os valores das razões iriam mudar também. Outro objetivo aqui era introduzir os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 60º, pelas mesmas razões citadas anteriormente para a escolha do ângulo de 30º.

7. Se mudarmos o ângulo que tomamos como referência, os valores das razões irão mudar? Responda a essa pergunta calculando as razões abaixo com relação ao ângulo γ e comparando com os resultados obtidos nos exercícios 4, 5 e 6.

$\frac{\text{cat.op.}}{\text{hip}} = . =$ $\qquad$ $\frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} = . =$ $\qquad$ $\frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}} =$

Resposta:

Figura 15: Enunciado do 7° exercício.

O 8º exercício da atividade consistia na leitura de um texto que apresentava uma conclusão sobre o que havia sido feito a partir do 4º exercício até aquele momento. Na figura 16, pode-se acompanhar o que foi apresentado para os alunos. O objetivo era que, nesse momento da atividade 1, os alunos tivessem a oportunidade de organizar e sistematizar as ideias que estavam sendo desenvolvidas e que se fizesse a nomeação das razões utilizando a nomenclatura usual de seno, cosseno e tangente. Esperava também que ficasse clara para os alunos a importância da referência ao ângulo em cada uma das razões, pois é comum observarmos em aulas de estudo da Trigonometria os alunos escreverem em seus cadernos *sen* = 0,5, por exemplo, sem identificar o ângulo.

8. Observe que calculamos diversas razões entre os lados do triângulo relacionando-as com os ângulos α e γ. A cada passo mudamos os lados ou o ângulo de referência. Para não haver confusão entre os elementos que estamos relacionando, atribuem-se nomes específicos para cada uma dessas razões especificando também o ângulo de referência. Assim:

a) as razões do exercício 4 são chamadas de seno do ângulo α e escrevemos:

$$\mathbf{sen}\,\alpha = \frac{\textbf{cateto oposto}}{\textbf{hipotenusa}}$$

b) as razões do exercício 5 são chamadas de cosseno do ângulo α e escrevemos:

$$\mathbf{cos}\,\alpha = \frac{\textbf{cateto adjacente}}{\textbf{hipotenusa}}$$

c) as razões do exercício 6 são chamadas de tangente do ângulo α e escrevemos:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\textbf{cateto oposto}}{\textbf{cateto adjacente}}$$

d) Nas razões do exercício 7, mudamos o ângulo de referência:

$$\mathbf{sen}\,\gamma = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}} \qquad \mathbf{cos}\,\gamma = \frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} \qquad \mathbf{tg}\,\gamma = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}}.$$

Figura 16: Texto de introdução aos termos seno, cosseno e tangente.

No 9° exercício (figura 17), foi solicitado que os estudantes construíssem um triângulo retângulo. O exercício foi dirigido com a indicação dos passos da construção, pois eles ainda não haviam tido a oportunidade de explorar o GeoGebra. Os objetivos eram: que os alunos começassem a conhecer as ferramentas e possibilidades do GeoGebra; que os alunos se familiarizassem com a linguagem matemática (ponto, reta, segmento, ângulo, etc); que os alunos começassem a se familiarizar com construções geométricas baseadas nas suas propriedades e, finalmente, que fixassem as razões trigonométricas estudadas até agora e que conhecessem os valores do seno, do cosseno e da tangente de 45º.

9. Construa um triângulo retângulo em que α = 45º na região indicada ao lado. Calcule senα, cosα e tgα. Para a construção do triângulo retângulo, siga os passos abaixo:

a) No terceiro botão, selecione segmento definido por dois pontos.
b) Faça o segmento no espaço indicado para a construção do triângulo.
c) Clique com o botão direito do mouse sobre os pontos extremos do segmento e selecione a opção exibir rótulo.
d) No quarto botão, selecione reta perpendicular. Clique sobre o segmento e clique sobre o ponto E.
e) No oitavo botão, selecione ângulo com amplitude fixa e clique no ponto E e depois no ponto D. Digite 45º na janela que abriu.
f) No terceiro botão, selecione reta definida por dois pontos. Clique sobre o ponto D e sobre o ponto preto.
g) No segundo botão, selecione interseção de dois objetos e clique onde a reta do item f e a reta perpendicular se cruzam (clique quando as duas retas ficarem em negrito).
h) Clique com o botão direito do mouse sobre esse ponto e selecione exibir rótulo.
i) No terceiro botão, selecione segmento definido por dois pontos e clique nos pontos D e F, depois em E e F.
j) Clique com o botão direito do mouse sobre a reta criada no item f e sobre a reta perpendicular. Selecione exibir objeto (isso irá escondê-las).
k) Clique com o botão diretio do mouse sobre um dos segmentos. Selecione propriedades. Na aba básico, selecione exibir rótulo e valor. Faça isso para os três segmentos.

Figura 17: Enunciado do 9° exercício.

O 10° e último exercício (figura 18) caracterizou-se por incentivar a autonomia dos alunos, pois eles podiam fazer a construção do triângulo com um ângulo à sua escolha e também os passos da construção do triângulo retângulo não foram indicados, isso significa que eles podiam repetir os passos do item anterior ou podiam construir um triângulo retângulo através de outro procedimento. Os objetivos aqui eram: que os alunos explorassem as ferramentas do GeoGebra, que calculassem corretamente as razões trigonométricas dos ângulos escolhidos por eles e que pudessem verificar que, em qualquer triângulo retângulo, as razões podem ser calculadas, ou seja, que triângulos retângulos não precisam ter obrigatoriamente ângulos de medidas iguais a 30°, 45º ou 60°.

10. Agora, construa um triângulo retângulo com um ângulo diferente dos que foram trabalhados até agora (30º, 45º e 60º). Calcule o seno, o cosseno e a tangente dos dois ângulos agudos do teu triângulo.

Figura 18: Enunciado do 10° exercício.

4.3.2 A realização da atividade 1 pelos alunos

Neste tópico, será analisada a realização da atividade 1 pelos alunos e as ideias e os comentários interessantes que eles foram fazendo durante a aula ou registrando na própria tarefa, ou seja, aspectos relativos à aprendizagem inicial deles dos conceitos trigonométricos.

Para cada exercício, inicialmente, será apresentada uma análise quantitativa das respostas dos alunos e, logo após, uma análise qualitativa das respostas mais interessantes quanto à correção ou quanto às ideias diferentes ou errôneas que apareceram. A análise das respostas e dos diálogos será baseada na identificação e interpretação dos conceitos-em-ação explicitados e, principalmente, dos teoremas-em-ação utilizados pelos alunos.

Os grupos serão designados por letras e os alunos por nomes fictícios, como comentado anteriormente, para preservar o anonimato dos participantes e, ao mesmo tempo, permitir comparações entre situações e procedimentos referentes a um mesmo aluno ou grupo.

A atividade 1 foi desenvolvida ao longo de três encontros. Foi realizada por 17 grupos de trabalho, cada um desses grupos sendo formado por dois, três ou quatro componentes (o único grupo com quatro componentes foi separado mais adiante em duas duplas).

O 1º exercício era uma questão de observação e identificação da propriedade dos triângulos semelhantes (enunciado conforme figura 19). Vemos na tabela 2 a classificação das respostas: 13 grupos deram a resposta esperada, isto é, de que as medidas dos lados aumentam ou diminuem proporcionalmente enquanto os ângulos permanecem os mesmos.

1° exercício	
Responderam que as medidas dos lados do triângulo se alteram, mas os ângulos permanecem os mesmos.	13 grupos
A resposta dada estava relacionada com as ideias de seno, cosseno ou tangente.	3 grupos
Não respondeu à questão[16].	1 grupo

Tabela 2: Classificação das respostas do 1º exercício da atividade 1.

Dos três grupos que relacionaram sua resposta com seno, cosseno e tangente, dois tinham componentes que afirmaram terem estudado Trigonometria anteriormente (alunos que vieram de outra escola ou que fizeram cursos preparatórios para Escola Militar). Porém, é importante destacar que essas três respostas não estavam corretas. Um exemplo é a resposta

[16] O grupo P não salvou a atividade antes de fechá-la. Na aula seguinte, recomeçaram a atividade a partir do exercício 4, onde haviam parado.

abaixo:

1. Mova o ponto B na figura. O que acontece com as medidas dos lados do triângulo? O que acontece com as medidas dos ângulos?

Resposta: Muda proporcionalmente o valor do seno, cosseno e tangente. E os ângulos continuam os mesmos.

Figura 19: Enunciado do 1° exercício e resposta do grupo L.

Percebe-se aqui que o grupo L pode estar associando as palavras seno, cosseno e tangente com as medidas dos lados do triângulo e não com as razões entre essas medidas. Concluo isso, pois o que "muda proporcionalmente" são as medidas dos lados, porém, as razões entre elas permanecem constantes já que os triângulos são semelhantes. Outra hipótese é a de que os alunos consideram que, quando os lados mudam, as razões também mudam. Essa confusão é um indício de que os conceitos básicos de Trigonometria no triângulo retângulo estudados não foram bem compreendidos pelos alunos, ou ainda, pode indicar que o grupo está apenas buscando na memória conhecimentos estudados anteriormente e noções prévias que estavam desorganizadas naquele momento, mas que poderiam ser reorganizados ao longo da tarefa.

Considerando-se que "os conceitos em ação permitem identificar os objetos, as propriedades e relações" (VERGNAUD, 2009, p. 22), observou-se que nesse momento os três grupos mobilizaram conceitos em ação relativos às razões, pois estabeleceram uma relação imediata entre triângulo retângulo e as palavras seno, cosseno e tangente. Na resolução do exercício, expressaram a ideia de que os valores de seno, cosseno e tangente mudavam proporcionalmente, mostrando uma certa indiferenciação entre os lados e as razões. Essa hipótese pode ser considerada um teorema-em-ação, visto que "um teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação" (idem, 2009, p. 23).

Na resolução do 2º exercício (figura 11), 16 grupos obtiveram a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. Essa resolução surpreendeu-me pelo número de alunos que não sabiam ou não utilizaram o valor dessa soma, pois essa informação em geral é trabalhada em diferentes momentos da vida escolar, como no estudo de polígonos e no estudo da semelhança de figuras planas. O acesso a essa informação fica evidente ao observarmos a tabela 3, no qual vemos que 5 grupos sabiam dela inicialmente.

2º exercício	
Obtiveram o valor da medida do terceiro ângulo, utilizando a ferramenta ângulo do GeoGebra, para dar o valor da soma dos ângulos internos.	11 grupos
Responderam que a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é 180° sem calcular/obter o valor do terceiro ângulo que estava faltando.	3 grupos
Sabiam o valor da soma e utilizaram-na para calcular o valor da medida do terceiro ângulo.	2 grupos
Não respondeu.	1 grupo

Tabela 3: Classificação das respostas dadas ao 2° exercício.

É importante comentar que na resolução desse exercício apareceu um problema no uso do programa. Durante a aula, a maior parte das duplas que utilizaram a ferramenta "ângulo" do GeoGebra para calcular o valor de γ estava respondendo 66° (sessenta e seis graus). Perguntei ao primeiro grupo em que observei esse problema o motivo dessa resposta e eles me mostraram que haviam lido esse valor na tela. O que aconteceu é que o valor do ângulo ($\gamma = 60°$) aparece sobre a linha que marca o ângulo, dividindo o 0 (zero) ao meio e a medida, visualmente, parece 66°. Esse problema foi corrigido com todos os grupos em que isso ocorreu. Há aqui uma questão importante: essa informação visual não seria um problema se os alunos estivessem fazendo o cálculo; essa leitura equivocada é um indício de que de fato não sabiam o valor da soma e estavam baseando-se apenas na informação na tela. A transcrição abaixo de um diálogo ocorrido durante a realização da atividade entre o aluno Gerson[17], do grupo G, e a professora é um exemplo dessa situação:

Professora: "Vocês não sabem qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?".
Gerson: "Sim, é 66º".
Professora: "Não, não é 66º". É que ele está em cima da linha. Clica na seta de mover, clica sobre o valor e arrasta ele para o lado para poder enxergar".
Gerson: "Aonde?"
Professora: "Sobre o valor do ângulo. Clica e arrasta ele. Isso".
Gerson: "Ah! é 60°".
Professora: "Isso. Então, qual é a soma dos ângulos internos?"
Gerson: "60°".
Professora: "Não. A soma dos ângulos internos e não o valor do γ".

[17] Nome fictício.

Gerson: "Ah...esse, mais esse, mais esse".

Professora: "Isso".

Gerson: "Ah é...deixa eu ver... é 180°".

Nesse diálogo, podemos observar também a dificuldade de compreensão do que está sendo pedido, pois a professora perguntou qual era o valor da soma das medidas dos ângulos internos e o aluno respondeu, duas vezes, o valor da medida do ângulo γ, primeiro o valor errado e depois o correto para γ. O aluno está focado no ângulo cuja medida ele consegue ver e tem dificuldade de estabelecer uma relação entre os ângulos (algo que não está dado na tela).

No diálogo abaixo, vemos mais um exemplo de que outro grupo (grupo K) estava baseando-se apenas na informação da tela, ou seja, mostra a dependência desses alunos em relação às informações que estão dadas, escritas, aparentes.

Karina: "Eu não entendi a [questão] dois. Eu pensei que era somar o 30° com o 90°, mas não era".

Professora: "É porque esses não são os únicos ângulos que a gente tem no triângulo. Faltou aquele outro ângulo lá em cima. Vocês sabem qual é a soma dos três ângulos de um triângulo?"

Karina: "Não".

Professora: "Então, em caso negativo, se vocês não sabem, o que têm que fazer? Clique sobre ângulo no oitavo botão, clique sobre os pontos ACB, nessa ordem [Professora lê parte do enunciado]. Viu que apareceu um valor lá?"

Karina: "Não estou enxergando".

Professora: "Não está enxergando, então clica aqui na seta, clica sobre o valor do ângulo e arrasta ele para o lado".

Karina: "Aí somo os três?"

Professora: "Isso, isso mesmo".

Identificou-se nesse diálogo o uso de um teorema-em-ação no momento em que Karina, do grupo K, fala "Eu pensei que era somar o 30° com o 90°". O teorema aqui implícito é: para somar os ângulos internos de um triângulo, somam-se os valores dos ângulos que aparecem dentro do triângulo. Esse teorema é falso, uma vez que havia um ângulo cuja medida não estava visível na tela, mas que precisava ser somada também. O diálogo evidencia que a aluna percebeu que o teorema é falso e solicitou ajuda para corrigi-lo.

A pergunta três (ver enunciado na figura 20) foi importante para introduzir os termos cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa e para enfatizar que esses termos dependem do ângulo que se toma como referência. Essa identificação era fundamental para que os cálculos das razões abordadas a partir do 4º exercício fossem realizados corretamente. Considero que o objetivo da questão foi atingido, já que 14 grupos identificaram corretamente essas informações, como mostra a tabela 4.

3° exercício	
Identificaram corretamente hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente relativos ao ângulo γ.	14 grupos
Não identificaram corretamente.	2 grupos
Não respondeu.	1 grupo

Tabela 4: Classificação das respostas dadas ao 3º exercício.

Com relação aos erros na identificação dos lados, cito como exemplo a resposta dada pelo grupo A:

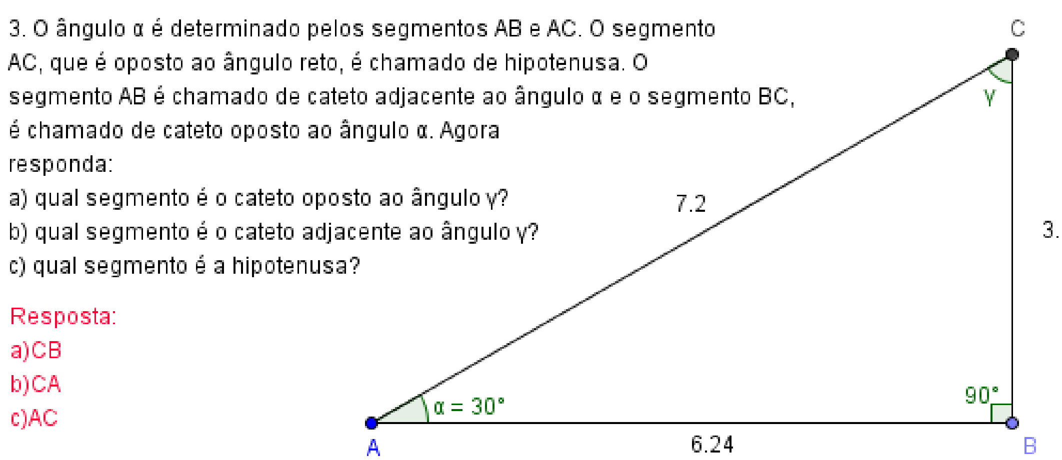


Figura 20: Enunciado do 3º exercício e resposta com erro na identificação dos lados com referência ao ângulo γ (grupo A).

Nota-se que os alunos do grupo A perceberam a mudança do ângulo de referência para γ, pois na identificação dos segmentos nos itens *a* e *b* começam pelo vértice C. Porém, identificaram o lado oposto ao ângulo γ (que é o segmento AB) como sendo CB (que é o adjacente). Identificaram o cateto adjacente como sendo o segmento CA (que é a hipotenusa), quando deveriam ter respondido CB. Identificaram corretamente que AC é a hipotenusa, mas não se deram conta de que essa é a mesma resposta dada ao item *c*.

A resposta do grupo A mostra confusão na identificação dos lados do triângulo e mostra também que a noção de ângulo não está clara, pois há dificuldade de identificar relações entre os lados e um ângulo dado. Essas confusões podem estar associadas à incompreensão ou desatenção à expressão "cateto oposto" ou, ainda, à identificação do cateto oposto como sendo o segmento vertical.

O 4° exercício solicitava que os alunos calculassem a razão entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa para o triângulo retângulo da atividade. Deveriam mover o ponto B, para modificar as medidas dos lados, calcular a razão novamente e, por fim, repetir o procedimento e calcular a razão uma última vez. A tabela 5 mostra a classificação das respostas dadas ao 4° exercício (ver enunciado na figura 21). Nela observamos que 11 grupos calcularam corretamente as três razões.

4º exercício	
Calcularam corretamente as três razões (medida do cateto oposto sobre a medida da hipotenusa).	11 grupos
Calcularam corretamente duas razões.	2 grupos
Calcularam corretamente uma razão.	2 grupos
Erraram as três razões.	2 grupos

Tabela 5: Classificação das respostas dadas ao 4º exercício.

Os alunos do grupo A, que no exercício anterior apresentaram a dificuldade na identificação dos lados do triângulo retângulo, persistiram com esse problema no 4º exercício, como podemos ver na figura 21.

4. Clique inicialmente em Razão 1 e preencha as chaves {}/{} com os valores do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa respectivamente. Após o segundo sinal de igual, escreva o valor que você encontrou para essa razão com o auxílio da calculadora. Em seguida, mova o ponto B, preencha as chaves e repita o cálculo para os novos valores que apareceram. Faça isso uma última vez, movendo novamente o ponto B.

$\text{Razão}_1 = \frac{3.6}{7.19} = 0.500$ $\qquad$ $\text{Razão}_2 = \frac{7.5}{3.75} = 27.125$ $\qquad$ $\text{Razão}_3 = \frac{8.36}{4.18} = 2$

Figura 21: Inversão entre cateto oposto e hipotenusa (grupo A).

O grupo A calculou corretamente a razão 1 entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, porém nas razões 2 e 3 aparecem problemas. Em ambas, o grupo inverteu os termos calculando a razão entre a medida da hipotenusa sobre a medida do cateto oposto. Essa inversão pode ser um indício de que preferem dividir o maior número pelo menor, considerando que a ordem não importa. Na razão 2, há também um erro de cálculo, pois o resultado correto da razão que eles digitaram é 2, porém digitaram na resposta o número 27,125. Isso não só indica um erro de digitação na calculadora, mas uma ausência de reflexão sobre o resultado encontrado, pois como um número um pouco maior do que sete, dividido por um número próximo a quatro, pode resultar em 27,125?

O grupo C organiza as razões corretamente (figura 22). Há um erro na resposta da razão 1, que também pode ter sido causado por erro na digitação dos valores na calculadora e novamente há a ausência de reflexão sobre o resultado encontrado. Nas razões 2 e 3, podemos observar respostas próximas, mas diferentes. A razão entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa com referência ao ângulo de 30º é exatamente 0,5 e as respostas encontradas foram 0,499 e 0,496. O GeoGebra mostra valores para as medidas de segmentos, de arcos, de ângulos, entre outros, com arredondamentos, por isso essa diferença nos resultados obtidos.

$\text{Razão}_1 = \frac{2.6}{5.19} = 1.187$ $\qquad$ $\text{Razão}_2 = \frac{3.3}{6.61} = 0.499$ $\qquad$ $\text{Razão}_3 = \frac{0.71}{1.43} = 0.496$

Figura 22: Aproximações no GeoGebra (Grupo C).

Esses valores aproximados apareceram em diferentes atividades e essa questão foi discutida com os alunos durante as aulas. Mostrei a eles que, se quisessem aumentar a precisão na obtenção dos valores, eles poderiam aumentar o número de casas decimais nos números mostrados pelo programa, conforme pode ser visto na figura 23.

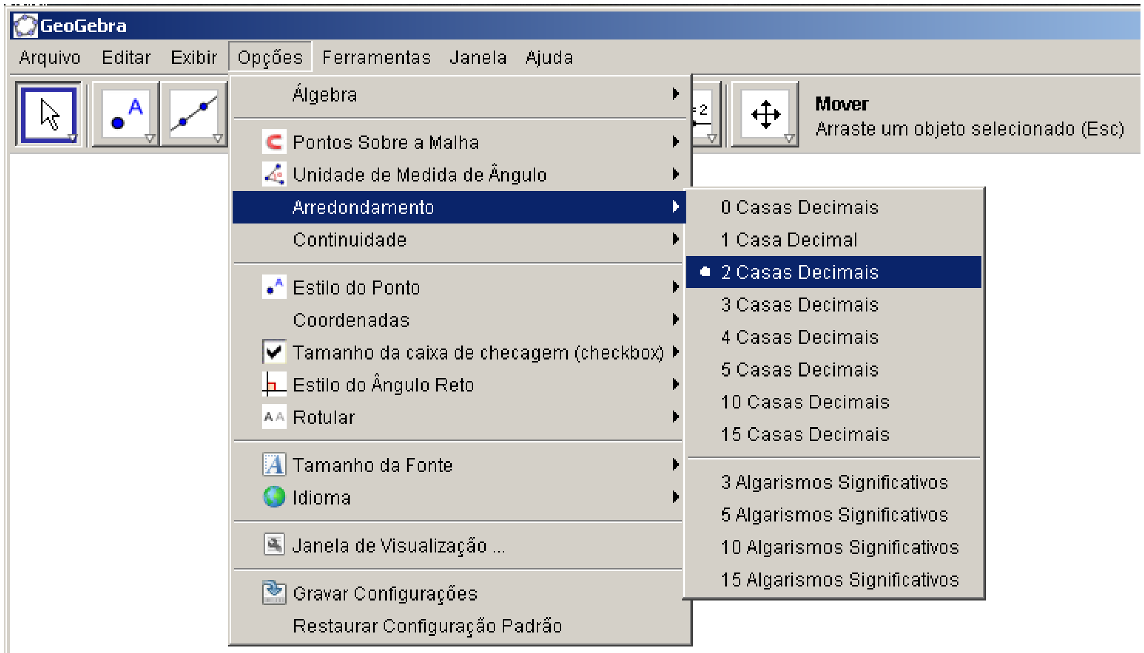


Figura 23: Ferramenta para modificação no número de casas decimais.

A transcrição abaixo é de um trecho do diálogo entre a professora e o aluno Jonas do grupo R. O aluno começou a realizar o 4º exercício, tendo calculado apenas a primeira razão, e chamou a professora para confirmar o que ele estava pensando:

Jonas: "Não vai dar 0,499 em todos?"

Professora: "Em todos por quê?"

Jonas: "Porque todos diminuem igual."

Essa observação do aluno é um indício de que ele percebeu a existência de um padrão, antes mesmo de registrar e efetuar o cálculo das outras razões do exercício. Inclusive o aluno movimenta o triângulo e mostra para a professora que a razão entre esses outros valores que aparecem para a medida do cateto oposto e para a medida da hipotenusa vai dar 0,499 ou 0,5.

O teorema-em-ação implícito aqui identificado é que se os triângulos retângulos são semelhantes, então a razão entre os lados será igual. Esse é um exemplo de teorema-em-ação verdadeiro e era justamente o objetivo do exercício, ou seja, que os alunos percebessem que as razões resultariam em valores constantes.

Já o próximo diálogo mostra um tipo de dificuldade de identificação dos elementos do triângulo diferente das dificuldades citadas anteriormente, onde houve troca entre cateto oposto com cateto adjacente, ou cateto oposto com hipotenusa, e assim por diante. Nesse diálogo entre os alunos Otávio, do grupo S, Mário, do grupo G, e a professora, vemos que Otávio associa os catetos e a hipotenusa com a letra que identifica o vértice dos ângulos.

Professora: "Qual é o cateto oposto ao ângulo *alfa*?"
Otávio: "É C ou B."
Professora: "C ou B? Mas catetos são os lados, não os ângulos."
Otávio: "Lado B."
Professora: "Lado B?"
Mário: "Não! B, C e A são os ângulos. Olha: ângulo...e cateto oposto" [colega aponta os elementos na tela].
Otávio: "Esse é o cateto *alfa*."
Professora: "Esse é o cateto adjacente em relação ao *alfa*."
Mário: Ah tá! Em relação ao *alfa*! Então o cateto oposto é esse. Viu? Eu sei."
Otávio: "Não dá de esperto!"
Professora: "Quando quiser falar o cateto, não diz só um ponto. Tem que dizer que vai do ponto B até o ponto C, então o cateto oposto é o lado BC."

O diálogo evidencia a indiferenciação entre lado, ponto e ângulo. Para Otávio, ângulo se confunde com vértice. Outra explicação para a fala de Otávio é que podia estar olhando para as letras B e C ao lado dos vértices, mas interpretando essas letras como se estivessem designando os lados, o que pode justificar as falas "É C ou B" e "Lado B". Nesse caso, Otávio não estaria considerando o segmento como sendo determinado por dois pontos. Mário mistura cateto adjacente com cateto oposto, o que também indica dificuldade com a noção de ângulo. Esses conceitos-em-ação indicam a dificuldade em desenvolver a noção de ângulo. Essa noção é complexa, porque envolve, ao mesmo tempo, a identificação dos lados e de uma relação entre eles.

No 5° exercício (ver enunciado na figura 24), os alunos deveriam calcular três vezes a razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa, com deslocamento do ponto B. Na tabela 6, pode-se ver que 12 grupos resolveram corretamente o exercício.

5º exercício	
Calcularam corretamente as três razões (medida do cateto adjacente sobre a medida da hipotenusa).	12 grupos
Calcularam corretamente duas razões.	2 grupos
Calcularam corretamente uma razão.	---
Erraram as três razões.	3 grupos

Tabela 6: Classificação das respostas dadas ao 5º exercício.

No 5º exercício, o grupo A continua apresentando o mesmo problema relativo à inversão entre os termos da razão. Aqui, deveriam calcular a razão entre as medidas do cateto adjacente e da hipotenusa, porém calculam a razão entre a medida da hipotenusa sobre a medida do cateto adjacente, o que pode ser visto na figura 24. Essa inversão entre hipotenusa e cateto adjacente apareceu em mais dois grupos. Um fez isso nas três razões e o outro, em uma das razões.

5. Repita o que você fez no item 4, porém agora as razões devem ser formadas pelo cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa.

$\text{Razão}_1=\frac{7.44}{6.44}=1.15$ $\text{Razão}_2=\frac{4.61}{3.99}=1.55$ $\text{Razão}_3=\frac{3.16}{2.74}=1.15$

Figura 24: Inversão entre as medidas do cateto adjacente e da hipotenusa (grupo A).

Na figura 25, pode-se observar que o grupo D, que calculou corretamente as duas primeiras razões[18], optou por utilizar um maior número de casas decimais em suas respostas. Mesmo tendo errado a terceira razão, as partes fundamentais da atividade, que são a identificação dos lados do triângulo de acordo com o ângulo de referência, o cálculo das razões trigonométricas e a compreensão das razões trigonométricas como razões constantes para cada ângulo agudo do triângulo, foram compreendidas pelo grupo D.

$\text{Razão}_1=\frac{6{,}99}{8{,}07}=0{,}866171003$ $\text{Razão}_2=\frac{5}{5{,}78}=0{,}865051903$ $\text{Razão}_3=\frac{4}{4{,}92}=0{,}81300813$

Figura 25: Resposta dada ao 5º exercício pelo grupo D.

[18] Há um erro na razão 3 que, provavelmente, ocorreu no momento de identificarem o valor do cateto adjacente ou da hipotenusa no triângulo ou no momento de digitar o valor observado na montagem da razão.

A tabela 7 mostra a classificação das respostas dadas ao 6° exercício, que pedia para calcular a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente do ângulo α, três vezes novamente, com deslocamento do ponto B (figura 26).

6º exercício	
Calcularam corretamente as três razões (medida do cateto oposto sobre a medida do cateto adjacente).	14 grupos
Calculou corretamente duas razões.	1 grupo
Calculou corretamente uma razão.	---
Erraram as três razões.	2 grupos

Tabela 7: Classificação das respostas dadas ao 6º exercício.

O grupo A, que apresentou dificuldade em identificar os lados do triângulo retângulo no 3º exercício e permaneceu com essa dificuldade no 4º e 5º exercício, parece compreender melhor a situação e a tarefa, e mostra maior organização na solução do exercício. Na figura 26, aparece a resposta do grupo A e nela podemos observar que as três razões foram escritas corretamente e que o cálculo da primeira e da terceira razão estão corretos, apesar de haver uma diferença no arredondamento do valor[19]. Considerando-se essas observações, o grupo A demonstra um crescimento na sua compreensão quanto à identificação dos lados do triângulo, na montagem das razões e no cálculo das mesmas, porém permanece não analisando ou comparando suas respostas

.

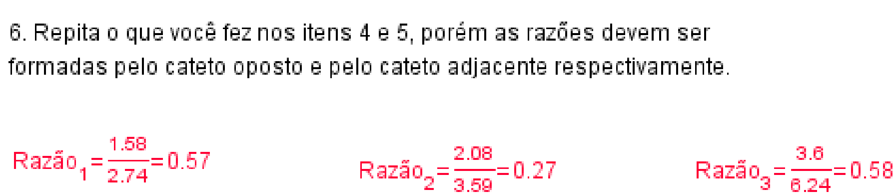


Figura 26: Diferença no arredondamento e erro na segunda razão (grupo A).

Ainda sobre a questão dos arredondamentos nas respostas, uma situação semelhante à do grupo A apareceu. A resposta do grupo F (figura 27) mostra que eles utilizaram uma casa decimal nas suas respostas. O problema aqui está no seguinte: o grupo arredondou os valores

[19] Na resposta da segunda razão há um erro, pois os valores para o cateto oposto e o cateto adjacente estão corretos e calculando-se a razão, encontra-se 0,579, portanto, trocaram o algarismo 5 pelo algarismo 2.

para baixo, quando deveriam arredondar para cima (conforme critério de arredondamento mais utilizado na escola). Tomando a razão 1 como exemplo, o resultado dela, dado com três casas decimais, é 0,579. Se os alunos quisessem dar a resposta com duas casas decimais, deveriam escrever 0,58, já que o algarismo dos milésimos é maior do que 5 e, se quisessem dar a resposta com uma casa decimal, deveriam escrever 0,6, pois o algarismo da casa dos centésimos é maior do que cinco. Esse arredondamento por corte acarreta um problema maior, que é o de não permitir que o grupo diferencie as razões do 4º exercício, entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, com as razões do 6º exercício, entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente, possibilitando uma confusão entre *sen* 30° e *tg* 30°, que são expressas pelo grupo com o mesmo valor de 0,5.

Como arredondamentos já haviam sido trabalhados em outros momentos da vida escolar dos alunos, não era esperada essa dificuldade. Porém, ela representou uma oportunidade para discussão de um tema que parece simples, mas não é, como ficou evidente nesses exemplos. Portanto, revisei com eles os critérios de arredondamento durante a atividade.

$$\text{Razão}_1=\frac{2,79}{4,82}=0,5 \qquad \text{Razão}_2=\frac{3,98}{6,9}=0,5 \qquad \text{Razão}_3=\frac{1,5}{2,59}=0,5$$

Figura 27: Resposta dada pelo grupo F ao 6º exercício.

Os dois grupos que erraram as três razões inverteram cateto oposto com hipotenusa.

Na tabela 8, pode-se ver a classificação das respostas dadas ao 7° exercício (figura 28), que pedia para calcular as razões entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, do cateto adjacente e da hipotenusa e do cateto oposto e do cateto adjacente com relação ao ângulo γ.

7º exercício	
Calcularam corretamente as três razões (seno, cosseno e tangente com relação à γ).	7 grupos
Calcularam corretamente duas razões (seno e cosseno).	4 grupos
Calcularam corretamente uma razão (cosseno).	2 grupos
Erraram as três razões.	4 grupos

Tabela 8: Classificação das respostas dadas ao 7º exercício.

Nesse exercício, o número de erros na resolução foi maior quando comparado com os exercícios 4, 5 e 6. Aqui o grau de dificuldade aumentou, pois houve a troca do ângulo de referência, de α para γ, e os grupos deveriam calcular três razões: entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, do cateto adjacente e da hipotenusa e, por último, do cateto oposto e do cateto adjacente. Para responder a esse exercício, esperava que os alunos comparassem o resultado da primeira razão (entre as medidas do cateto oposto ao ângulo γ e da hipotenusa) com as razões do 4º exercício (entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa). A segunda razão (medida do cateto adjacente ao ângulo γ e da hipotenusa) deveria ser comparada com as do 5º exercício (entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa) e a terceira razão, comparada às razões do 6º exercício (entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e do cateto adjacente).

Na resposta apresentada na figura 28, podemos ver que o grupo G conseguiu trocar o ângulo de referência e identificar os lados de acordo com esse ângulo. Calculou corretamente a primeira e a segunda razão, porém inverteu cateto oposto com cateto adjacente na terceira.

7. Se mudarmos o ângulo que tomamos como referência, os valores das razões irão mudar? Responda a essa pergunta calculando as razões abaixo com relação ao ângulo γ e comparando com os resultados obtidos nos exercícios 4, 5 e 6.

$\frac{\text{cat.op.}}{\text{hip}} = \frac{5.98}{6.90} = 0.866$ $\frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} = \frac{3.45}{6.90} = 0.5$ $\frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}} = \frac{3.45}{5.98} = 0.57$

Resposta: Não, os valores continuam os mesmos,
só muda a ordem em que se apresentam com relação à troca de ângulo de referência.

Figura 28: Inversão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente na terceira razão (grupo G).

Na figura 29, podemos observar que o grupo F não conseguiu trocar o ângulo de referência, ou seja, continuou olhando para o ângulo α, que mede 30º, e identificou os lados de acordo com esse ângulo. Saliento que nos exercícios 3, 4, 5 e 6 o grupo identificou os lados corretamente, inclusive com relação ao ângulo γ no 3º exercício. Isso é um indício de que o conceito de razão trigonométrica no triângulo retângulo ainda não está bem compreendido nesse momento. Eles tanto podem estar fixando sempre um ângulo, como podem estar fixados em uma determinada imagem da figura, onde cada cateto fica numa determinada posição. Na terceira razão, aparece novamente o problema do arredondamento.

$\frac{\text{cat.op.}}{\text{hip}}=\frac{3{,}62}{7{,}24}=0{,}5$ $\qquad$ $\frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}}=\frac{6{,}27}{7{,}24}=0{,}8$ $\qquad$ $\frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}}=\frac{3{,}62}{6{,}27}=0{,}5$

Figura 29: O ângulo de referência não foi alterado (grupo F).

A análise da resolução desse exercício pelo grupo F revelou um conceito-em-ação que estava implícito: cateto oposto é aquele que está posicionado verticalmente, cateto adjacente é o que está posicionado horizontalmente e hipotenusa é o segmento que une os extremos desses segmentos. Identificou-se esse conceito a partir da análise da atividade do grupo até esse exercício: erraram apenas quando se pediu para trocar o ângulo de referência para γ, e o cateto vertical passou a ser cateto adjacente e o cateto horizontal passou a ser cateto oposto. Esse equívoco apareceu também para os grupos I, K e M. A identificação desse falso conceito é importante, pois exemplifica uma confusão comum que pude observar em minhas experiências docentes anteriores com alunos do ensino médio e que está associada à ideia de "desenho prototípico". Gravina (1996) explica o que são esses "desenhos prototípicos" e as consequências que o uso desse tipo de desenho causam no aprendizado dos alunos:

> "[...] são desenhos bem particulares [...]. Por exemplo, quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas em triângulos sempre acutângulos, etc... Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação. E mais, para os alunos, a posição relativa do desenho ou seu traçado particular, passam a fazer parte das características do objeto, quer nos aspecto conceitual [expressa propriedades que caracterizam um certa classe de objetos] ou quer no aspecto figural [corresponde a imagem mental que associamos ao conceito], estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos (GRAVINA, 1996, p. 2).

Na figura 30, pode-se observar que as respostas do grupo H para as razões são iguais. O erro do grupo H está em calcular a razão entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa para o ângulo α três vezes, apenas mudando os valores das medidas dos lados ao deslocar o ponto B, isto é, repetiram o procedimento do 4° exercício, sem considerar o enunciado.

$\frac{\text{cat.op.}}{\text{hip}}=\frac{1.29}{2.58}=0.5$ $\qquad$ $\frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}}=\frac{2.36}{4.72}=0.5$ $\qquad$ $\frac{2.94}{5.88}=0.5$

Figura 30: Grupo H calcula razões entre a medida do cateto oposto e da hipotenusa com relação a α.

O 8º exercício propunha uma leitura que visava proporcionar aos alunos um momento de reflexão sobre o que eles tinham feito até aquele momento e introduzir os termos seno, cosseno e tangente. É interessante observar que esse exercício de leitura causou um certo desconforto para os alunos, pois vários grupos perguntaram "o que era para fazer". Esse desconforto ou estranheza pode indicar que os alunos entendem que, em um exercício de Matemática, deve-se necessariamente calcular algum valor. Esse procedimento está relacionado àquilo que Brousseau (apud SILVA, 1999) denomina "contrato didático" e que é estabelecido nas aulas de Matemática ao longo da vida escolar dos alunos:

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor...Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (BROUSSEAU apud SILVA, 1999, p. 43).

Segundo Silva (1999), nas aulas de Matemática, o contrato didático que prevalece é aquele em que o professor dá aulas expositivas e "passa" exercícios para os alunos. O professor "deve selecionar partes do conteúdo que o aluno possa aprender e propor problemas cujos enunciados contenham os dados necessários e tão-somente esses, cuja combinação racional, aliada aos elementos da aula, permite encontrar a solução do problema". O papel do aluno nesse contrato é compreender a aula e conseguir resolver os problemas.

O exercício 8 permitiu um momento de quebra de contrato didático. O autor explica que expressões do tipo "não sei fazer", "como começa?", "não entendi o que é para fazer", entre outras, indicam essa ruptura. Identificou-se então que a "cláusula" implícita que foi rompida nesse momento é aquela que afirma que "sempre há uma resposta a uma questão matemática e o professor a conhece. Deve-se sempre dar uma resposta que eventualmente será corrigida" (SILVA, 1999, p. 51).

Mesmo tendo sido explicado que deveriam somente fazer a leitura das informações apresentadas, alguns grupos substituíram nas definições apresentadas valores para as medidas do cateto oposto, do cateto adjacente e da hipotenusa, calculando novamente o valor das razões. Um exemplo desse procedimento é o que o grupo A fez, como pode ser observado na figura 31, a seguir:

8. Observe que calculamos diversas razões entre os lados do triângulo relacionando-as com os ângulos α e γ. A cada passo mudamos os lados ou o ângulo de referência. Para não haver confusão entre os elementos que estamos relacionando, atribuem-se nomes específicos para cada uma dessas razões especificando também o ângulo de referência. Assim:

a) as razões do exercício 4 são chamadas de seno do ângulo α e escrevemos:

$$\mathbf{sen\alpha = \frac{3.6}{7.2} = 0.5}$$

b) as razões do exercício 5 são chamadas de cosseno do ângulo α e escrevemos:

$$\mathbf{cos\alpha = \frac{6.24}{7.2} = 0.866}$$

c) as razões do exercício 6 são chamadas de tangente do ângulo α e escrevemos:

$$\mathbf{tg\alpha = \frac{3.6}{6.24} = 0.57}$$

d) Nas razões do exercício 7, mudamos o ângulo de referência:

$$\mathbf{sen\gamma} = \frac{6.24}{7.2} = \mathbf{0.866} \qquad \mathbf{cos\gamma} = \frac{3.6}{7.2} = \mathbf{0.5} \qquad \mathbf{tg\gamma} = \frac{6.24}{3.6}. = \mathbf{1.73}$$

Figura 31: Texto do 8º exercício com valores substituídos nas definições (grupo A).

Esse procedimento indica também a dificuldade do grupo em lidar com um ângulo genérico, pois precisaram fixar um valor. É importante destacar aqui que o grupo A interpretou, equivocadamente, que precisava substituir os termos e calcular as razões. Mesmo assim, esse procedimento não atrapalhou a compreensão dos conceitos que estavam sendo trabalhados, pelo contrário, ajudou o grupo a sistematizar as ideias sobre o que são as razões trigonométricas e como são calculadas, justamente o que era o objetivo principal naquele momento. Faço essa afirmação analisando o crescimento que o grupo mostrou ao longo da atividade, pois justamente o grupo A foi um grupo que não conseguiu identificar os lados quando foi mudado o ângulo de referência e que não calculou corretamente as razões do 4º e 5º exercício. Apresentou indícios de maior compreensão na montagem das razões e no cálculo das mesmas no 6º exercício, mas ainda com erros. No 7º exercício, o grupo mudou o ângulo de referência e calculou as razões corretamente, e confirma-se então o crescimento deles com o que fizeram nesse 8º exercício: identificaram todos os lados de acordo com o ângulo de referência e calcularam as razões. Destaco ainda que no 9º exercício, que pedia para construírem um triângulo retângulo com ângulos agudos medindo 45º utilizando as ferramentas do GeoGebra e para calcularem seno, cosseno e tangente desse ângulo, o grupo construiu e calculou tudo corretamente.

Na figura 32, pode-se observar o enunciado do 9º exercício e o roteiro para a construção do triângulo retângulo. Optou-se por dar o roteiro para os alunos devido à falta de familiaridade deles com o GeoGebra. Como foi comentado anteriormente, essa foi a primeira aula com a utilização do programa. Os objetivos eram que os alunos percebessem as propriedades do triângulo retângulo a partir da realização da construção indicada e que conseguissem calcular as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para esse triângulo.

9. Construa um triângulo retângulo em que $\alpha = 45°$ na região indicada ao lado. Calcule senα, cosα e tgα. Para a construção do triângulo retângulo, siga os passos abaixo:

a) No terceiro botão, selecione segmento definido por dois pontos.
b) Faça o segmento no espaço indicado para a construção do triângulo.
c) Clique com o botão direito do mouse sobre os pontos extremos do segmento e selecione a opção exibir rótulo.
d) No quarto botão, selecione reta perpendicular. Clique sobre o segmento e clique sobre o ponto E.
e) No oitavo botão, selecione ângulo com amplitude fixa e clique no ponto E e depois no ponto D. Digite 45º na janela que abriu.
f) No terceiro botão, selecione reta definida por dois pontos. Clique sobre o ponto D e sobre o ponto preto.
g) No segundo botão, selecione interseção de dois objetos e clique onde a reta do item f e a reta perpendicular se cruzam (clique quando as duas retas ficarem em negrito).
h) Clique com o botão direito do mouse sobre esse ponto e selecione exibir rótulo.
i) No terceiro botão, selecione segmento definido por dois pontos e clique nos pontos D e F, depois em E e F.
j) Clique com o botão direito do mouse sobre a reta criada no item f e sobre a reta perpendicular. Selecione exibir objeto (isso irá escondê-las).
k) Clique com o botão direito do mouse sobre um dos segmentos. Selecione propriedades. Na aba básico, selecione exibir rótulo e valor. Faça isso para os três segmentos.

Figura 32: Enunciado e roteiro do 9º exercício.

A tabela 9 mostra que 14 grupos conseguiram realizar a construção e, desses grupos, 11 calcularam as razões corretamente.

9º exercício			
Construíram corretamente o triângulo retângulo.	14 grupos	Calcularam seno, cosseno e tangente corretamente.	11 grupos
		Calculou corretamente duas razões.	1 grupo
		Calculou corretamente uma razão.	1 grupo
		Errou as três razões.	1 grupo
Não conseguiram construir o triângulo retângulo.	2 grupos	----	
Não fez a questão.	1 grupo	---	

Tabela 9 : Classificação das respostas dadas ao 9º exercício.

Para iniciar a construção do triângulo do 9º exercício, os grupos tiveram dificuldades, chamavam-me para ajudar a realizá-lo sem nem mesmo terem tentado fazer o que estava sendo pedido no item *a*. Ajudei-os nos passos iniciais de construção do segmento e, a partir daí, eles terminaram a construção.

O grupo F foi um dos dois grupos que não conseguiu fazer a construção. Na figura 33, podemos observar que dois pontos estão identificados pelas suas coordenadas, ao invés de estarem identificados pelas letras D e E[20]. Isso já dificultou a leitura do que deveria ter sido feito nos próximos passos. Observa-se que, mesmo assim, o grupo conseguiu construir a reta perpendicular e marcar o ângulo de 45°, o que faltou foi eles perceberem que o triângulo retângulo seria formado ao prolongarem o segmento cujos extremos são o ponto azul e o ponto I até a reta perpendicular, o que havia sido orientado nos itens *f* e *g* do roteiro[21].

[20] Para identificar os pontos com essas letras, bastava clicar com o botão direito do mouse sobre os pontos e selecionar, no menu que se abria, a opção "exibir rótulo". Essa identificação diferente que os alunos fizeram deu-se provavelmente por eles terem selecionado no menu a opção "propriedades" e então modificado o tipo de rótulo (para valor, ao invés de nome).

[21] A linha tracejada na figura foi feita pela professora para indicar o que o grupo deveria ter feito para formar o triângulo retângulo.

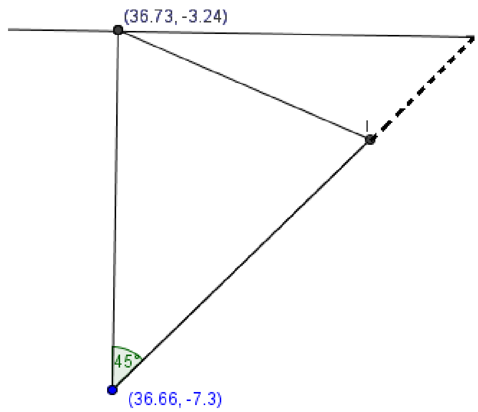


Figura 33: Construção feita pelo grupo F.

Na figura 34, vemos o que o outro grupo, que não conseguiu construir o triângulo, fez. Durante a realização da atividade, o grupo I criou três pontos na janela de visualização que não estavam sendo pedidos (nomeados pelo GeoGebra de D, E e F). Como eles já tinham criado esses pontos, o GeoGebra nomeou os próximos pontos como G, H e I e o grupo não conseguiu prosseguir, pois não compreendeu o roteiro dado.

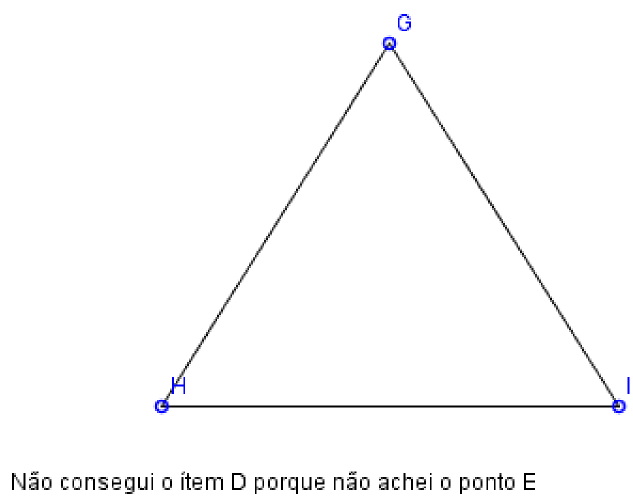


Figura 34: Construção feita pelo grupo I.

Com relação aos erros nos cálculos das razões, cito como exemplo a resolução do grupo J, que pode ser vista na figura 35. O grupo conseguiu construir o triângulo corretamente, mas não conseguiu identificar os lados com referência ao ângulo de 45°. O grupo trocou cateto oposto por hipotenusa. Escreve que a medida do cateto oposto é 3,4, quando na verdade esse é o valor da medida da hipotenusa, e que a da hipotenusa é 2,4 (medida do cateto oposto). Esse grupo apresentou dificuldades ao longo de toda a atividade. Não conseguiu resolver corretamente o 3°, o 5º, o 6º, o 9° e o 10° exercícios, ou seja, a dificuldade de identificar os lados do triângulo persistiu até o final da atividade 1.

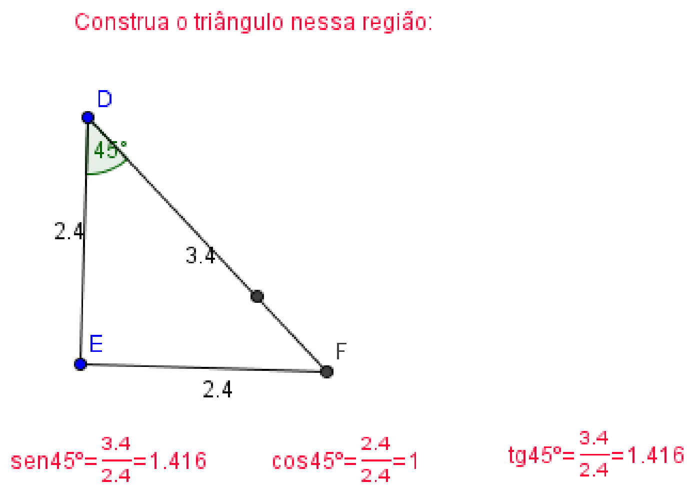


Figura 35: Construção correta e erro no cálculo das razões trigonométricas (grupo J).

O último exercício da atividade 1 caracterizou-se por dar aos alunos a liberdade de escolherem um ângulo diferente de 30°, 45º e 60° para iniciar a construção de um triângulo retângulo e pedia que os alunos calculassem, após essa construção, o seno, o cosseno e a tangente desse ângulo. Pode-se observar na tabela 10 que foi grande o número de grupos que não fizeram ou não conseguiram realizar a atividade. Isso pode ter ocorrido devido à falta de tempo para realização da atividade, ou os grupos podem não ter se dado conta de que poderiam repetir os passos do 9º exercício bastando trocar o ângulo de 45° pelo que eles escolhessem.

<table>
<tr><td colspan="4">10º exercício</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Construíram corretamente o triângulo retângulo.</td><td rowspan="5">8 grupos</td><td>Calcularam seno, cosseno e tangente corretamente</td><td>4 grupos</td></tr>
<tr><td>Calcularam corretamente duas razões</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Calcularam corretamente uma razão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Erraram as três razões</td><td>3 grupos</td></tr>
<tr><td>Não calcularam</td><td>1 grupo</td></tr>
<tr><td>Não conseguiram construir o triângulo retângulo.</td><td>5 grupos</td><td colspan="2">---</td></tr>
<tr><td>Não fizeram a questão</td><td>4 grupos</td><td colspan="2">---</td></tr>
</table>

Tabela 10: Classificação das respostas dadas ao 10º exercício.

A dificuldade dos grupos que conseguiram fazer a construção, mas erraram no cálculo das razões, parece estar na identificação dos lados. A figura 36 mostra a construção feita pelo grupo G, que escolheu um dos ângulos agudos para ter medida de 66°. Eles inverteram cateto oposto e hipotenusa, identificando corretamente apenas o cateto adjacente. É importante destacar aqui que o grupo G acertou toda a atividade, exceto a terceira razão do 7º exercício, onde trocou o cateto oposto pelo cateto adjacente. Poderia se atribuir essa dificuldade de identificar a hipotenusa ao fato de não estar destacado o ângulo de 90° no triângulo, porém, no 9° exercício, esse ângulo também não está destacado e a hipotenusa é identificada corretamente. Esse erro sugere que a posição do triângulo, diferente do que foi dado inicialmente na tarefa, teria dificultado a identificação. Contudo, no exercício anterior, o triângulo construído por eles também está em uma posição diferenciada e isso não se mostrou um problema. Essa é uma situação de transição entre a fixação de uma imagem e uma certa capacidade de deslocar o ponto de vista.

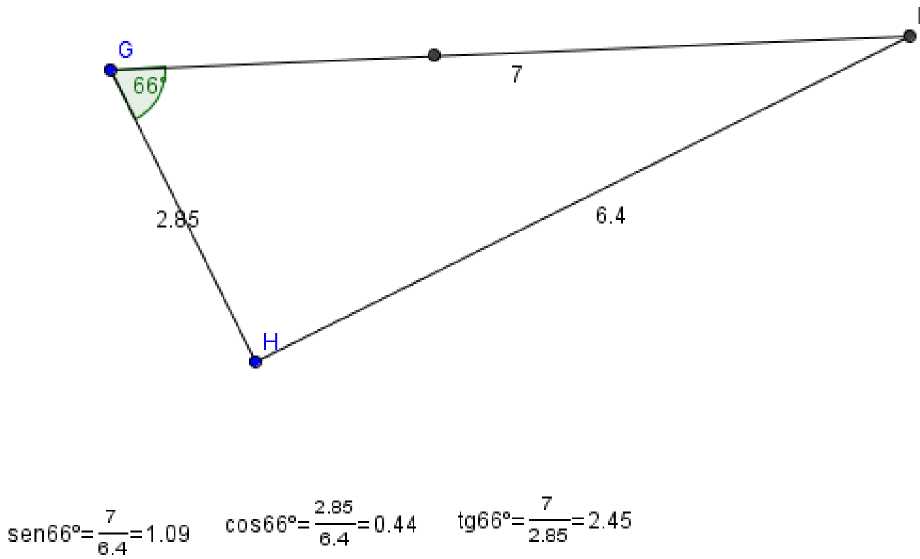


Figura 36: Confusão entre cateto oposto e hipotenusa (grupo G).

Comentário semelhante ao feito acima pode ser atribuído à resolução feita pelo grupo K. O grupo K acertou todas as questões, exceto o 7º exercício, quando não trocou o ângulo de referência para γ no cálculo das razões. Uma dificuldade no triângulo construído pelo grupo foi que a figura ficou muito grande e o grupo não conseguiu ver o triângulo integralmente na tela[22].

Nas razões, o grupo identificou a medida do cateto oposto como 3,02, que é a medida do cateto adjacente, identificou a medida do cateto adjacente como 17,15, que é a medida do cateto oposto. No cálculo de seno do ângulo de 80°, utiliza a medida da hipotenusa corretamente, mas no cálculo do cosseno utiliza a medida 3,02. Aqui podemos notar que o grupo mostra dependência da imagem na tela, ou seja, sem conseguir ver o triângulo integralmente, não conseguiu identificar corretamente os lados e, consequentemente, escrever as razões.

[22] Na figura 37, o triângulo foi reduzido pela professora para se ter a visualização integral do triângulo.

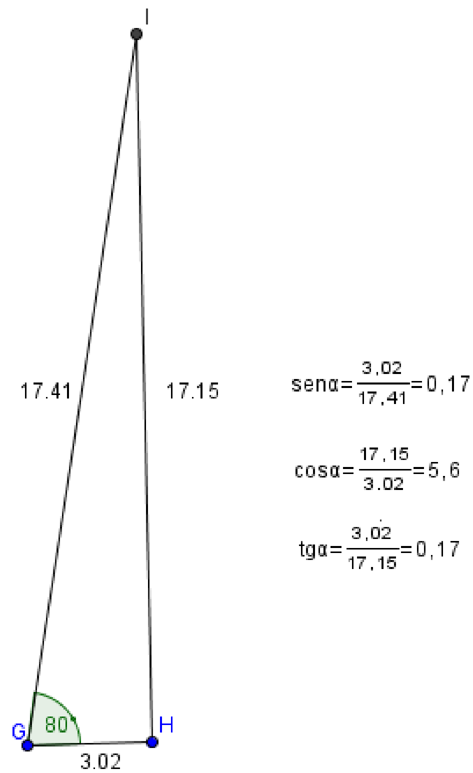


Figura 37: Resolução do 10° exercício pelo grupo K.

A figura 38(a) mostra a construção realizada pelo grupo B. O triângulo retângulo parece isósceles, porém observa-se uma pequena diferença nas medidas dos catetos. Ao clicar sobre o ponto H e arrastá-lo para verificar a construção, vemos na parte (b) que o triângulo retângulo se desfaz e, portanto, não foi construído conforme o roteiro[23]. Esse é um exemplo de construção em que não há "estabilidade sob ação de movimento" (GRAVINA, 2001, p. 83), pois a construção transforma-se com o deslocamento do ponto H, mas não preserva as relações geométricas. O ponto principal aqui é que, mesmo com os problemas na construção, percebe-se que o grupo tinha a intenção de calcular as razões trigonométricas para um ângulo agudo. Embora tenham escrito *sen* 90° e *cos* 90°, provavelmente, por ser o ângulo cuja

[23] Nessa construção podemos observar que o grupo destacou o ângulo de 90° no triângulo e escreveu as razões trigonométricas com referência a esse ângulo. A princípio parece que o grupo escolheu o ângulo de 90°, mas não foi isso que aconteceu. O GeoGebra possui uma ferramenta chamada "protocolo de construção". Essa ferramenta permite que se refaça passo a passo o que está mostrado na tela. Utilizando essa ferramenta para analisar a construção e tentar entender o que o grupo fez, vi que ele construiu o segmento inicial GH, depois a reta perpendicular a esse segmento, passando pelo ponto G; construiu um segundo ponto sobre H, utilizou esse novo ponto e o ponto G para construir um ângulo de 45° graus ou próximo a ele. Essa medida não ficou fixa, então não fica clara a ideia de qual valor eles escolheram. Enfim, o grupo continua construindo retas, segmentos e marcando ângulos até chegar na parte (a) da figura 38.

medida ficou visível na tela, observa-se que a identificação dos lados foi feita corretamente com relação ao ângulo agudo de vértice H em (a).

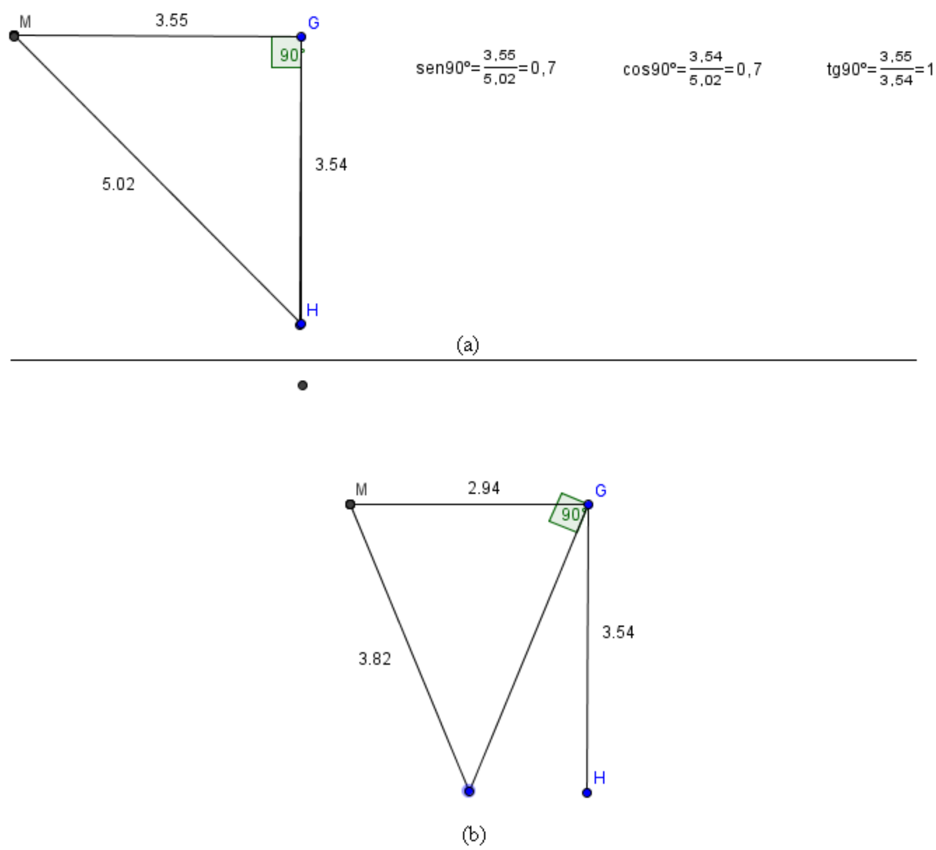


Figura 38: Construção realizada pelo grupo B.

4.3.3 Comentários sobre a realização da atividade 1

A realização da atividade 1 foi um momento de descoberta, pelos alunos, do programa e de suas ferramentas. Nesse momento, foram observadas dificuldades de compreensão de como resolver os exercícios (qual botão selecionar, onde clicar, como escrever as respostas, entre outras) e de compreensão daquilo que estava sendo pedido (como no 8° exercício, por exemplo).

A atividade 1 mostrou que muitos grupos ficaram focados na imagem mostrada na tela, como pôde ser observado no exercício que pedia para obterem a soma dos ângulos internos do triângulo (quando os alunos identificaram um ângulo de 66° ou somaram apenas as duas medidas de ângulos que estavam visíveis), nos exercícios em que o ângulo de referência foi alterado e também ficou evidente essa fixação da imagem na tela quando o triângulo construído pelo grupo K ficou muito grande na janela de visualização e não pôde ser visto pelo grupo inteiro na tela.

Ao mesmo tempo em que os alunos estavam fixando-se na imagem na tela, o GeoGebra mostrou-se um recurso fundamental para a discussão dessas dificuldades. Os recursos de clicar sobre um objeto e arrastá-lo, para melhor visualização do mesmo, mostrar um ângulo, girar e mudar a posição dos triângulos e aproximar ou afastar a imagem mostrada na tela, no caso do triângulo que ficou muito grande, foram utilizados para destacar aqueles aspectos que os alunos não estavam observando, ou o que eles estavam concluindo de maneira equivocada em um exercício. Essas dificuldades de identificar os lados dos triângulos, ângulos e mudar o ângulo de referência, que estão relacionadas à compreensão do conceito de ângulo, também aparecem em aulas sem o uso de *software*, em que as imagens são representadas no papel ou no quadro de giz. Porém, no quadro de giz e no papel, é mais difícil ajudar os alunos a perceberem seus erros, pois são muito limitados os recursos para representar um giro, uma ampliação ou uma redução.

Nos exercícios sobre cálculo das razões trigonométricas, alguns grupos encontraram valores para seno e cosseno maiores do que 1 (um). Julgou-se, nesse momento, que seria mais fácil para os alunos compreenderem que seno e cosseno não ultrapassam o valor 1 quando esses conceitos fossem abordados no círculo trigonométrico. Portanto, não se chamou atenção para esses erros nesse momento da sequência de ensino.

As dificuldades com a identificação dos lados e com a noção de ângulo mostram que é necessário desenvolver com os alunos situações que apresentem triângulos retângulos posicionados de maneira diferente e mudando-se o ângulo de referência, para que não fixem a imagem mental de lado vertical como cateto oposto e lado horizontal como cateto adjacente. Os exercícios 9 e 10 podem ser citados como exemplos de situações em que os alunos se depararam com triângulos posicionados de maneiras variadas, uma vez que a construção feita por eles nem sempre partiu de um segmento horizontal, e mais, o GeoGebra permitiu que os alunos clicassem sobre um dos vértices e girassem seus triângulos. A atividade 2, que será detalhada na próxima seção, foi uma oportunidade de retomada dessas noções de lados e ângulos. Nela, outros triângulos retângulos foram apresentados aos alunos, em problemas que envolveram contextos variados, para identificação dos lados, dos ângulos e para que efetuassem cálculos envolvendo as razões trigonométricas.

A análise das resoluções da atividade 1 mostrou que alguns grupos (como os grupos E e J) permaneceram até o fim com dificuldades como a identificação de cateto oposto e cateto adjacente referentes a um determinado ângulo e, consequentemente, de cálculo do valor das razões trigonométricas. O grupo E, desde o início, apresentou dificuldades em identificar os lados para o ângulo γ e inverteu os termos no cálculo das razões do 4° exercício até o 9° exercício, não seguindo um mesmo padrão. Já o grupo A mostra um crescimento na compreensão dos conceitos envolvidos na atividade: inicialmente, não consegue identificar os lados de acordo com γ, invertem os lados ou calculam erroneamente os valores das razões nos exercícios 4 e 5, porém a partir do 6°, identificam os lados e calculam corretamente todas as razões, inclusive para o triângulo construído por eles no 9° exercício (não fizeram o 10°). O grupo O foi o único que acertou todos os exercícios propostos, o que indica que, com a mediação da professora quando tiveram dúvidas e com o auxílio do programa, conseguiram compreender e usar os conceitos que estavam sendo abordados naquele momento.

Abaixo, estão listados os grupos que resolveram a atividade 1 e um comentário final sobre o desempenho de cada um.

a) Grupo A: apresentou erros até o 5° exercício, porém nos exercícios 6, 7 e 9 resolveu todas as razões corretamente e conseguiu construir o triângulo (exercício 9), o que demonstra que o grupo conseguiu até final da atividade identificar lados, ângulos e calcular as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

b) Grupo B: cometeu erros no 4° exercício e não conseguiu construir o triângulo do 10° exercício. O restante da atividade estava todo certo, o que indica que o grupo atingiu a maioria dos objetivos propostos para a atividade.

c) Grupo C: errou as razões no 4° exercício e a conclusão do 7° exercício (porém calculou as razões corretamente). O restante da atividade estava correto. O grupo atingiu os objetivos propostos.

d) Grupo D: errou apenas uma razão no 5° exercício. O grupo atingiu os objetivos propostos.

e) Grupo E: calculou corretamente as duas primeiras razões do 4° exercício, porém nos próximos (5, 6, 7 e 9) apresentou confusão com a identificação dos lados e dos ângulos. Não fez o 10° exercício. O grupo permaneceu com dificuldades e confusões até o final da atividade.

f) Grupo F: realizou a atividade corretamente até o 5° exercício. Comete erros no 6° e 7° exercício e não consegue realizar as construções no 9° e 10°. Portanto, o grupo não conseguiu atingir os objetivos propostos.

g) Grupo G: o grupo errou o 7° exercício, o restante da atividade estava certo. O grupo conseguiu atingir a maioria dos objetivos da atividade, mas apresentou dificuldades na identificação de lados ao se mudar o ângulo de referência.

h) Grupo H: os exercícios 4 e 7 apresentaram erros. O restante estava certo, inclusive as construções do 9° e 10° exercício. O grupo atingiu alguns dos objetivos propostos para a atividade.

i) Grupo I: errou os exercícios 5 e 7. Não conseguiu realizar as construções. Logo, o grupo não alcançou alguns dos objetivos da atividade.

j) Grupo J: o grupo permaneceu com dificuldades até o final da atividade. Acertou apenas o 7° exercício. O grupo não alcançou os objetivos da atividade.

k) Grupo K: errou os exercícios 7 e 10, o restante estava certo. O grupo atingiu alguns dos objetivos propostos.

l) grupo L: apresenta erros no 1°, 9° e 10° exercícios. O restante estava certo. O grupo atingiu a maioria dos objetivos da atividade.

m) Grupo M: apresenta erros nos exercícios 7 e 10. O grupo atingiu alguns dos objetivos da atividade.

n) Grupo N: apresenta erros nos exercícios 7 e 10 (não construiu o triângulo corretamente). O grupo não atingiu alguns dos objetivos da atividade.

o) Grupo O: toda a atividade estava correta. O grupo atingiu os objetivos propostos.

p) Grupo P: tudo que fez estava certo, porém deixou os exercícios 1, 2, 3 e duas razões do 4 em branco. O grupo deixou em branco, pois teve problemas ao tentar salvar o arquivo na primeira aula e continuou, na aula seguinte, de onde tinha parado. O grupo alcançou os objetivos propostos.

q) Grupo Q: não entregou a atividade.

r) Grupo R: errou uma das razões no exercício 7, não fez o 9° e o 10° exercício. O grupo atingiu a maioria dos objetivos da atividade.

s) Grupo S: não entregou a atividade.

t) Grupo T: não entregou a atividade.

u) Grupo U: não entregou a atividade.

4.4 ATIVIDADE DE APLICAÇÕES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

4.4.1 Descrição da atividade 2 e seus objetivos

A Atividade 2 consistia em quatro problemas contextualizados de aplicação das razões trigonométricas, sendo que cada um foi apresentado em um arquivo separado, portanto os alunos tinham que abri-los um de cada vez.

O 1° problema consistia em calcular a altura de um prédio. O enunciado e a figura dada para os alunos podem ser vistos na figura 39.

Atividade 1: Calcular a altura de um prédio.

a) Inicialmente, mova o ponto A na figura. O que acontece com o ângulo quando a pessoa se afasta ou se aproxima do prédio?

b) Uma pessoa está a uma certa distância de um prédio e avista seu topo sob um ângulo α. Mova novamente o ponto A para escolher essa distância e esse ângulo. Em seguida, utilize uma relação trigonométrica adequada (seno, cosseno ou tangente?) para calcular a medida h. [Obs: as medidas de comprimento estão dadas em metros]. Qual é a altura do prédio?

c) Compare a sua resposta para a altura do prédio com a resposta dos seus colegas que estão à direita e à esquerda. O que vocês observaram?

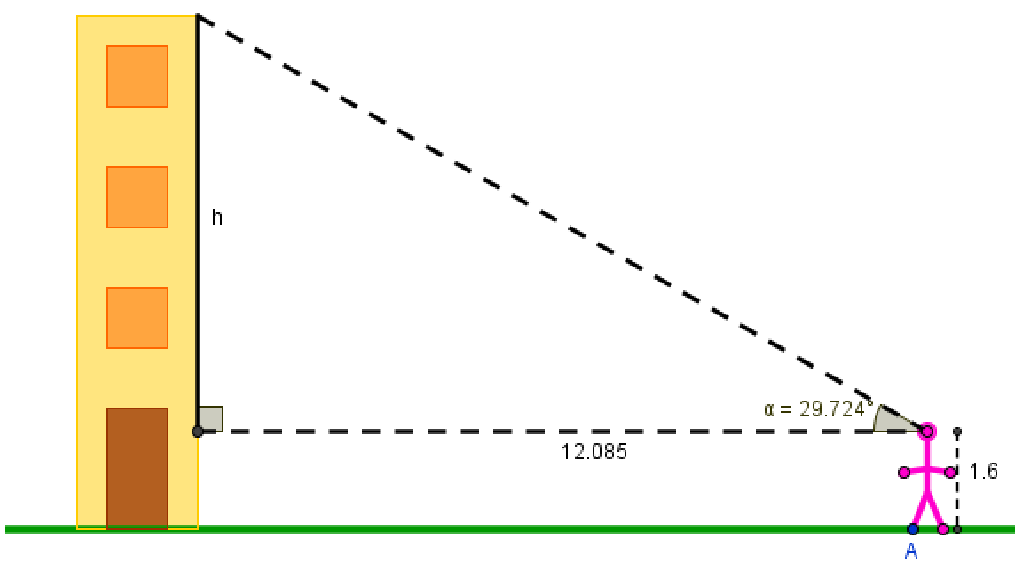


Figura 39: Enunciado e figura do 1º problema de aplicação.

Para a resolução desse problema, os alunos deveriam: observar que, ao se mover o ponto A da figura na direção do prédio, a medida do ângulo α aumenta, e que, ao se afastar o ponto A, a medida do ângulo α diminui; identificar que *h* é o cateto oposto e que o lado paralelo ao solo é o cateto adjacente ao ângulo α; identificar a razão trigonométrica a ser utilizada na resolução; obter o valor dessa razão a partir dos recursos do programa (esse procedimento foi orientado, como pode ser visto na figura 40), substituir esse valor na razão trigonométrica escolhida, calcular o valor de *h*, somar a altura da pessoa ao valor de *h* e, por fim, comparar a resposta do grupo com as respostas obtidas pelos grupos próximos. Esse último item permitiria aos alunos observar que, mesmo variando os ângulos e a distância da pessoa ao prédio, o valor encontrado para a altura do prédio é sempre o mesmo, como a figura indica. Cabe destacar que, mesmo sendo informada a medida do cateto adjacente e sendo necessária a obtenção da medida do cateto oposto para o cálculo da altura, podendo-se utilizar para essa obtenção o valor da tangente, os alunos poderiam obter, através dos recursos do GeoGebra vistos na atividade 1, o valor da hipotenusa e, então, utilizar o seno para resolver o problema. Ainda, os alunos poderiam, novamente através dos recursos do GeoGebra, obter a altura do prédio diretamente, porém se algum grupo fizesse esse procedimento, seria orientado a pensar sobre como calcular essa altura sem ter esse recurso, e poderia então usá-lo apenas para verificar se a sua resposta estava de acordo com a do *software*.

Importante! Para obter o valor do seno, cosseno ou tangente faça o seguinte:
1) Digite em Entrada:

senoα=sin(α)
ou
cosssenoα=cos(α)
ou
tangenteα=tan(α)

2) No menu Exibir, selecione janela de álgebra e localize o seno, cosseno ou tangente com o respectivo valor informado pelo Geogebra.

Figura 40: Orientação para obtenção do valor de seno, cosseno ou tangente de α.

O 2º problema era semelhante ao primeiro, pois as razões trigonométricas a serem utilizadas também poderiam ser tangente ou seno. Na figura 41, pode-se observar o enunciado e a figura dada aos alunos; pedia-se a altura da árvore, dada sua sombra e o ângulo de incidência dos raios solares. As diferenças entre os dois primeiros estão: na posição do triângulo; no fato de que a medida do cateto oposto ao ângulo α é a altura da árvore; e na ausência da indicação do procedimento para obtenção do valor de seno, cosseno ou tangente do ângulo - logo, os alunos deveriam lembrar o procedimento feito antes ou apenas abrir o arquivo anterior para relembrá-lo. Esse 2° problema foi proposto aos alunos mais como um exercício para que eles revisassem os procedimentos relativos à resolução (como identificação da razão trigonométrica, obtenção e substituição do valor da razão trigonométrica de acordo com o ângulo) antes de se aumentar o grau de dificuldade dos problemas e dos procedimentos.

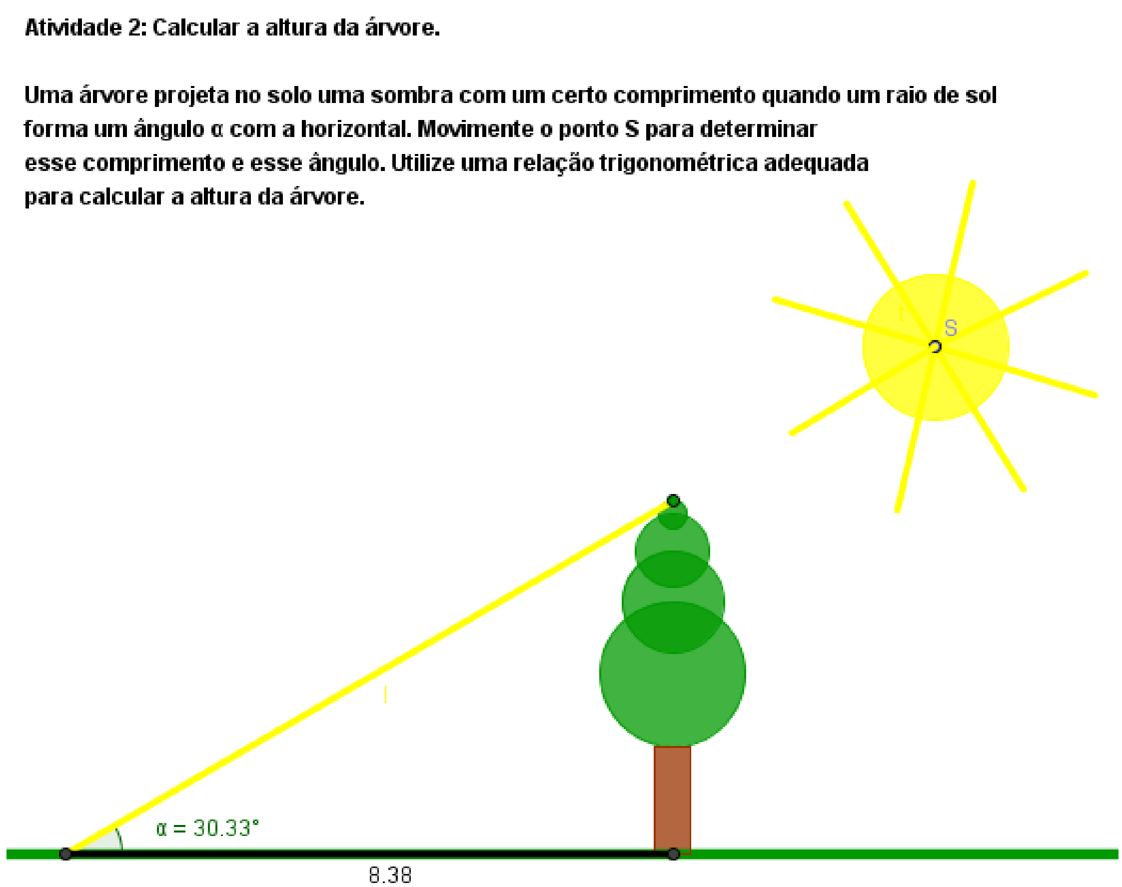


Figura 41: Enunciado e figura do 2º problema.

O 3º problema solicitava que os alunos calculassem a medida do raio da Terra. O enunciado e a figura dada podem ser vistos na figura 42. Nesse problema, o grau de dificuldade é maior que nos anteriores, visto que a medida do cateto oposto ao ângulo α é o raio da Terra e a medida da hipotenusa é dada pela soma do raio da Terra com a distância do satélite à superfície da Terra. Portanto, os objetivos do 3º problema eram: identificar os lados do triângulo de acordo com o ângulo de referência, identificar a razão trigonométrica a ser utilizada, calcular e substituir o valor de seno, cosseno ou tangente obtido pelo programa, proceder com a manipulação algébrica coerente a fim de obter o valor do raio e, por fim, utilizar a informação da escala para obter o valor real do raio da Terra em quilômetros.

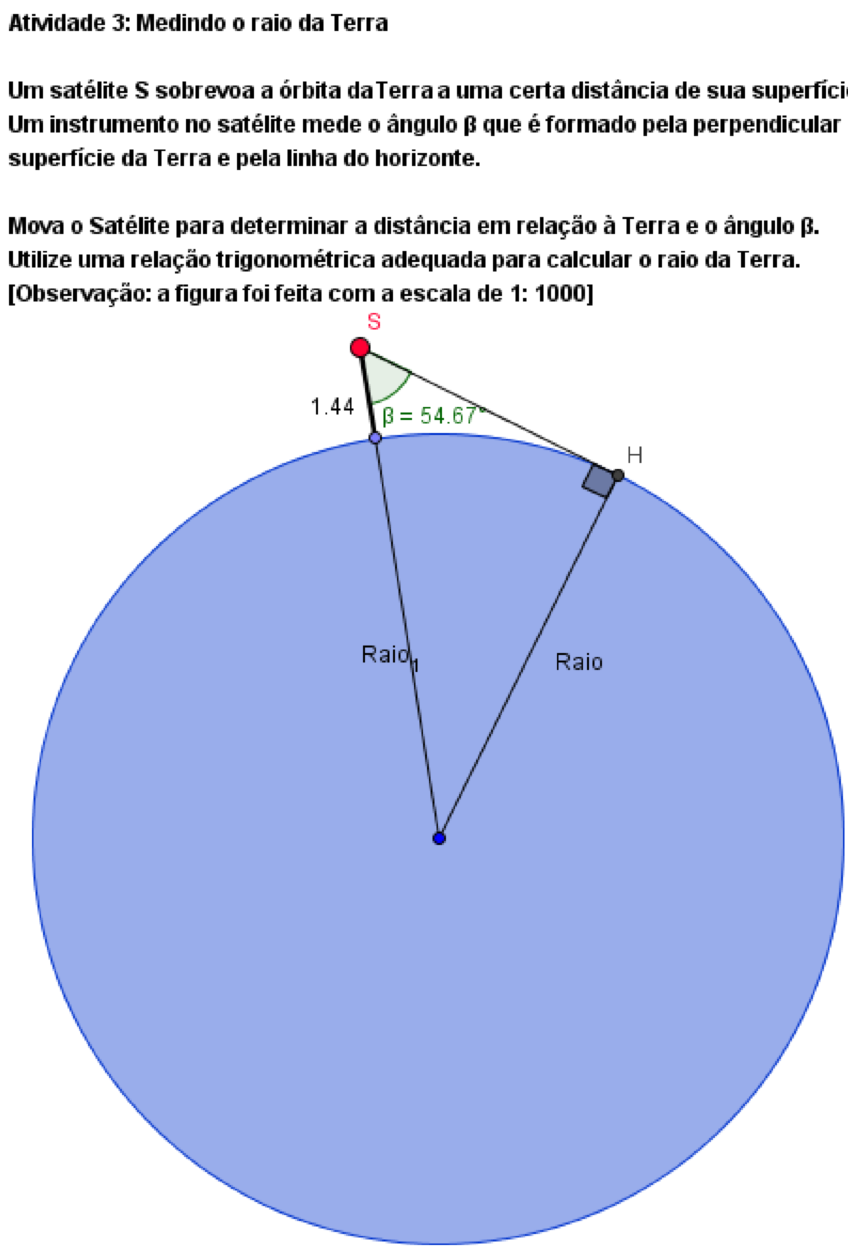


Figura 42: Enunciado e figura do 3º problema.

O 4º problema solicitava aos alunos medir a largura de um riacho, conforme pode ser visto na figura 43. A resolução deveria ser feita em duas partes, considerando-se os triângulos ADC e BDC. Esperava-se que os alunos, no triângulo ADC, identificassem e utilizassem a razão trigonométrica tangente, envolvendo o cateto oposto *c* e o cateto adjacente *d*. No triângulo BDC, também utilizariam a tangente, envolvendo o cateto oposto *c* e o cateto adjacente dado pela soma de *d* com a distância entre A e B. Através de manipulações algébricas, os alunos deveriam obter a medida de *c* e, em seguida, subtrair a medida da distância da reta até a margem, obtendo, assim, a largura do riacho.

Atividade 4: Calcular a largura de um riacho.

Uma pessoa está em uma das margens de um riacho e deseja conhecer a sua largura.
Ela segue o seguinte procedimento: para em um ponto A e avista, na margem oposta, uma pedra, situada no ponto C, que usará como referência para medida dos ângulos. Utilizando um instrumento de medida de ângulos, mede o ângulo formado pela reta paralela à margem e sua visão da pedra. Desloca-se para um ponto B, na reta paralela à margem, e faz uma nova medição de ângulo.

Mova os pontos A e B como desejar. Utilize os valores dos ângulos, a distância entre A e B, as distâncias c e d e uma relação trigonométrica adequada para calcular a largura do rio.

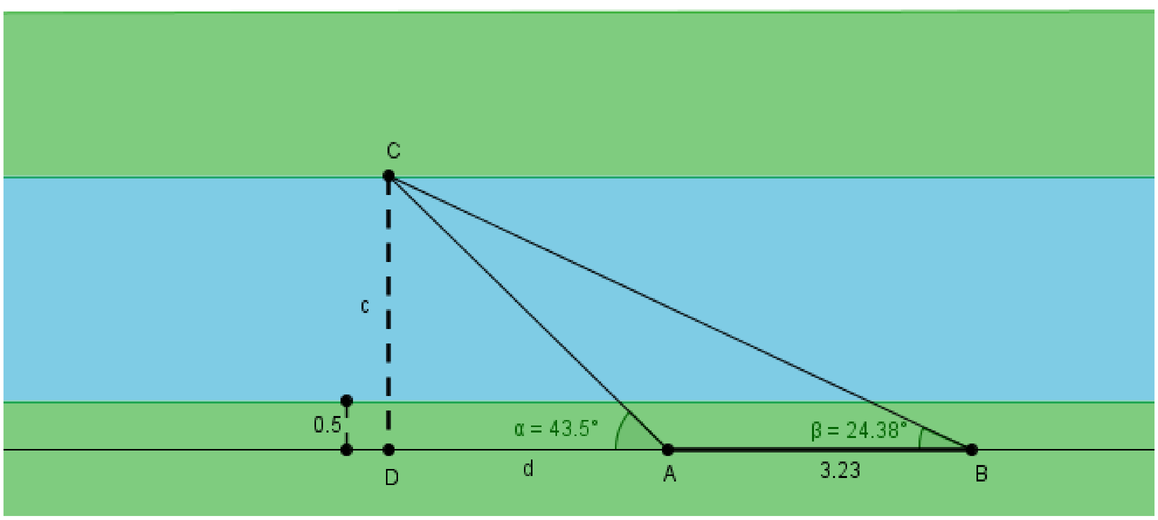


Figura 43: Enunciado e figura do 4º problema.

Uma consideração importante a ser feita sobre um objetivo presente nos quatro problemas apresentados é que eles permitiriam aos alunos trabalhar com valores de ângulos diferentes. Mostrando que o seno, o cosseno e a tangente podem ser calculados com referência a qualquer ângulo no triângulo retângulo que esteja variando entre 0° e 90°. Esse fato nem sempre fica claro para os alunos; afirmo isso com base nas minhas experiências como professora, pois os alunos acostumam-se a utilizar os ângulos de 30°, 45° e 60° nos exercícios e problemas, que são os ângulos que aparecem com maior frequência nos livros e os mais utilizados pelos professores, e, quando aparece um ângulo diferente, muitas vezes não sabem como proceder na resolução.

Para a realização da atividade 2, os alunos foram orientados a abrir os arquivos das atividades no GeoGebra, mas a resolução seria feita em uma folha apropriada para o registro entregue pela professora (apêndice C). Optou-se por não fazer o registro no GeoGebra devido às manipulações algébricas que teriam que ser feitas e que demorariam para ser digitadas.

4.4.2 A resolução da atividade 2 pelos alunos

A folha de resolução dos problemas de aplicação foi entregue por 15 grupos.

A tabela 11 mostra a classificação das respostas dadas ao item *a* do 1° problema, que pedia para observar o que acontecia com o ângulo quando o ponto A era aproximado do prédio ou afastado. Pode-se observar na tabela que 14 grupos responderam corretamente que a medida do ângulo aumentava ou diminuía respectivamente.

1° problema: item *a*	
Responderam que a medida do ângulo aumentava ou diminuía conforme a pessoa se aproximava ou se afastava do prédio.	14 grupos
Errou a resposta.	1 grupo

Tabela 11: Classificação das respostas dadas ao item *a* do 1° problema.

O grupo A errou a resposta, pois escreveu apenas: "$\frac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{oposto}$" sem dar indícios sobre de que modo estava pensando para chegar a essa relação. Podemos notar pela resposta que relaciona os lados sem considerar o ângulo.

Através dessa resposta, identifiquei a utilização de um teorema-em-ação: a razão entre dois lados do triângulo retângulo resulta na medida do terceiro. Esse teorema é falso, percebi que ele foi uma tentativa de obtenção da medida do cateto oposto (valor de h). Percebi também que o grupo não estava observando o ângulo e com isso não percebeu que poderia usar uma razão trigonométrica, ou, ainda, não entendeu as razões trigonométricas, então a informação do ângulo tornou-se irrelevante. Por outro lado, o teorema-em-ação mostra ainda que o grupo sabe que é possível obter a medida do terceiro lado conhecendo a medida de dois deles, considerando, por exemplo, o Teorema de Pitágoras estudado anteriormente, e tenta estabelecer alguma relação entre os lados, utilizando a escrita de razão abordada na atividade.

A resposta mostra que o grupo está mais atento aos lados, que são os elementos mais visíveis, que seus componentes sabem medir e com os quais estão familiarizados. Nesse sentido a informação sobre a medida do ângulo ficou irrelevante. O conceito de ângulo não está bem construído pelo grupo A, assim como o conceito de razão. Consequentemente, não consegue pensar nas razões como propriedades dos ângulos.

A dificuldade em perceber o ângulo remete à pesquisa realizada por por Piaget *et al* (1948) sobre a construção do conceito de ângulo. No procedimento realizado pelo grupo A, percebemos que identificou as medidas dos lados e também o tamanho da abertura (associado ao cateto oposto), mas não o ângulo em si. Os alunos estão focados nos elementos lineares, que eles conseguem medir.

Para resolver o item *b*, que pedia a altura do prédio, os alunos tinham que identificar a relação trigonométrica que iriam utilizar (tangente), obter o valor da tangente do ângulo no GeoGebra, calcular o valor de *h* (cateto oposto) e calcular a altura do prédio somando ao valor de *h* a altura da pessoa. A tabela 12 mostra a classificação das respostas dadas ao item *b*.

<table>
<tr><th colspan="6">1° problema: item b</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificaram corretamente a razão trigonométrica tangente para resolver o problema.</td><td rowspan="3">13 grupos</td><td rowspan="2">Obtiveram corretamente o valor da tangente.</td><td rowspan="2">12 grupos.</td><td>Calcularam o valor de h e somaram a altura da pessoa.</td><td>2 grupos</td></tr>
<tr><td>Calcularam o valor de h, mas não somaram a altura da pessoa.</td><td>10 grupos</td></tr>
<tr><td>Não obteve o valor da tangente.</td><td>1 grupo.</td><td colspan="2">----</td></tr>
<tr><td>Identificaram, erroneamente, a razão trigonométrica seno.</td><td>2 grupos</td><td colspan="4">----</td></tr>
</table>

Tabela 12: Classificação das respostas dadas ao item *b* do 1° problema.

Nessa tabela observa-se que, dos 15 grupos, 13 identificaram corretamente essa relação como sendo a tangente e 2 grupos a identificaram como seno. Um desses dois grupos (grupo J) identificou a distância da pessoa ao prédio como sendo hipotenusa (e não cateto adjacente), e a medida h como sendo a medida do cateto oposto. O outro grupo (grupo A) não deixou claro nos seus registros a forma como pensou para utilizar essa relação, escrevendo apenas "sen 45º = 0,707". Nenhum desses dois grupos obteve a medida da hipotenusa através de recursos do GeoGebra para calcular a medida de h.

Dos 13 grupos que identificaram a razão trigonométrica tangente, 12 obtiveram o valor da tangente para seus respectivos ângulos corretamente e 1 grupo não desenvolveu a questão além dessa identificação.

Os 12 grupos que obtiveram corretamente no GeoGebra o valor da tangente encontraram o valor de h como sendo, aproximadamente, 6,9 metros. E está correto, porém, para encontrar a altura do prédio, ainda era necessário somar a altura da pessoa que estava indicada na figura e apenas 2 grupos fizeram essa soma. Isso mostra que os alunos não consideraram a altura da pessoa indicada na figura, ou, ainda, que estão acostumados a calcular utilizando a "fórmula", no caso, a razão trigonométrica, e obter um número, sem pensar no significado desse número que aqui representava uma parte da altura do prédio e não a altura toda. Esse procedimento evidenciou a seguinte regra do contrato didático estabelecido implicitamente nas aulas de Matemática: "as questões colocadas não têm, em geral, nenhuma relação com a realidade cotidiana mesmo que pareçam ter, graças a um habilidoso disfarce. Na verdade, elas só servem para ver se os alunos compreenderam o assunto que está sendo abordado" (SILVA, 1999, p. 51). Logo, o aluno não pensa sobre a resposta, pois já realizou o procedimento que o professor havia ensinado.

Durante a aula, algumas dúvidas apareceram. O grupo G pensou em calcular a altura do prédio utilizando o Teorema de Pitágoras, como pode ser observado através do diálogo abaixo:

Mário: "A gente vai escolher a tangencial, que é o oposto pelo adjacente. Só que o oposto a gente não sabe".

Professora: "Tá. Vamos ver a figura".

Mário: "Eu fiz pelo valor da...a ao quadrado igual a b ao quadrado, mais c ao quadrado [$a^2 = b^2 + c^2$]".

A resolução do problema pelo grupo G mostrou que o grupo utilizou um conceito-em-ação que identifica o triângulo retângulo com o Teorema de Pitágoras, pois relacionou triângulo retângulo com a necessidade de utilizar esse teorema. A situação envolvia: triângulo retângulo, identificação dos lados e do ângulo, identificação da razão trigonométrica e resolução do problema. Observei que o grupo conseguiu identificar os lados do triângulo retângulo corretamente, identificou a razão trigonométrica tangente como pertinente, mas não resolveu o problema através dela por não observar o ângulo, ou por não entender que poderia substituir o valor da tangente do ângulo na igualdade $tan\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$. Sendo assim, encontrou uma alternativa de resolução, através do Teorema de Pitágoras, que foi considerada pertinente à situação e, de fato, foi suficiente para a obtenção da medida de *h* no problema, pois conseguiu obter o valor da hipotenusa através de recursos do GeoGebra que mostram os valores dos lados.

É interessante observar que o grupo sabia que precisava fazer algum cálculo, pois o enunciado pedia para calcular a medida *h*. Porém, poderia ter visto o valor de *h* diretamente através do mesmo recurso que usou para encontrar o valor da hipotenusa. O procedimento realizado pelo grupo estava relacionado ao "contrato didático" mencionado anteriormente. Aqui observou-se a utilização da "cláusula" que diz: "em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações. A tarefa é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente" (SILVA, 1999, p. 51).

Na continuação do diálogo, a professora explicou a necessidade de utilizar a tangente (corrigindo a expressão "tangencial") e como utilizá-la no desenvolvimento do problema. Foi enfatizada a questão sobre como iriam calcular a altura *h* sem terem a possibilidade de obter a hipotenusa diretamente pelo GeoGebra. O grupo entregou o trabalho com a questão resolvida corretamente, mas sem somar a altura da pessoa no final.

No item *c*, onde deveria ser feita a comparação das respostas entre os grupos próximos, 10 grupos compararam as suas respostas e 5 grupos não responderam a esse item, como pode ser visto na tabela 13.

<table>
<tr><td colspan="4">1° problema: item c</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Compararam suas respostas.</td><td rowspan="2">10 grupos</td><td>Concluíram que a altura é a mesma.</td><td>5 grupos</td></tr>
<tr><td>Encontraram valores aproximados.</td><td>5 grupos</td></tr>
<tr><td>Não responderam ao item.</td><td>5 grupos</td><td colspan="2">---</td></tr>
</table>

Tabela 13: Classificação das respostas dadas ao item *c* do 1° problema.

Com relação às comparações que os grupos fizeram, apenas 5 atingiram o objetivo do item, que era observar que, mesmo mudando o ângulo e a distância da pessoa ao prédio, a altura do prédio, ou, no caso, a medida de *h* que a maioria utilizou para essa comparação, era a mesma. Exemplos disso podem ser vistos nas respostas dada pelo grupo G: "Mesmo escolhendo ângulos diferentes, a resposta é a mesma" e pelo grupo K: "Mesmo o ângulo sendo diferente, é a mesma altura". Cinco grupos responderam que acharam uma pequena diferença nos valores, como é o caso do grupo B: "A altura é 0,003 maior que a da minha colega". Nesses casos, não é possível concluir se os alunos perceberam, ou não, que essa diferença ocorreu pelas aproximações e arredondamentos utilizados nos valores das tangentes e até mesmo nos valores das distâncias da pessoa ao prédio. Apenas 1 desses 5 grupos, o grupo L, deixa claro através de sua resposta que não percebeu isso: "A minha altura é 0,08 maior do que a da minha colega, devido a ângulos diferentes". Nessa resposta notei que os alunos concluíram exatamente o contrário do que esperava para a resolução do item, isto é, esperava que percebessem que a altura é invariante, mesmo mudando-se a medida do ângulo.

A comparação das respostas feita pelo grupo L mostrou que o grupo utilizou o teorema-em-ação: “se os ângulos são diferentes, então as alturas também serão diferentes”. Esse teorema é falso, uma vez que a altura do prédio é sempre a mesma. O uso do teorema demonstra, por um lado, uma atitude frequente entre os alunos de desconsiderarem o contexto do problema. Se o grupo que deu essa resposta fosse questionado se a altura de um prédio (real e não sua imagem na tela) varia quando um observador se move, eles certamente responderiam que não. Essa atitude está relacionada com o contrato didático, como se os problemas escolares não tivessem relação com o mundo real. Por outro lado, considerando que estavam fixados na figura da tela, a resposta indica, mais uma vez, a dificuldade de diferenciação entre ângulos e lados, como se a mudança de um dos elementos do triângulo acarretasse, necessariamente, a mudança dos demais. A resposta indica, também, uma certa dificuldade de analisar a figura. O triângulo da tela não é visto como uma figura construída para a interpretação da situação, mas como algo que “contém” a altura do prédio; a altura passa a ser tomada como um elemento do triângulo.

Na resolução desse primeiro problema, 3 grupos registraram a tangente sem identificar o ângulo de referência, isto é, escreveram apenas "*tan*", porém desenvolveram a questão corretamente até encontrar o valor de *h* e 1 grupo registrou "seno" também sem o ângulo de referência. Dez grupos escreveram o ângulo de referência, independentemente de terem desenvolvido a questão corretamente.

A tabela 14 mostra a classificação das respostas dadas ao 2º problema, que pedia para calcular a altura da árvore. Na tabela, podemos ver que o problema foi resolvido corretamente por 11 dos 15 grupos.

2° problema	
Calcularam corretamente a altura da árvore.	11 grupos
Não resolveram o problema.	2 grupos
Erraram a resolução.	2 grupos

Tabela 14: Classificação das respostas dadas ao 2° problema.

Na tabela 14, vemos também que 2 grupos não fizeram a questão. Outros 2 grupos erraram, sendo que o grupo M identificou a tangente, mas substituiu na expressão o valor do cosseno do ângulo 30,66º (*cos* 30,66º ≅ 0,855) ao invés da tangente desse ângulo (*tan* 30,66° ≅ 0,59), fazendo: "$0{,}855 = \frac{h}{8{,}26}$".

O grupo J identificou a tangente como a razão a ser utilizada e obteve corretamente o valor da tangente do ângulo no GeoGebra, porém deu esse mesmo valor como altura da árvore, quando deveria ter obtido, através desse valor, a medida do cateto oposto, que é a altura da árvore. Outro erro cometido foi o de não escrever o ângulo de referência.

As resoluções de 5 grupos foram feitas com os valores 17,89m, para o comprimento da sombra, e 15,32° para o ângulo formado pelo raio de sol com a horizontal. A princípio, estranhei que tivessem utilizado os mesmos valores, e pensei que poderiam ser cópias um do outro, porém a forma como foi resolvido o problema e/ou a forma de registro feita pelos grupos foi diferente. Observei então que os grupos utilizaram os valores que aparecem na tela ao abrir-se a atividade, ou seja, eles não moveram o ponto S como estava sendo solicitado na questão. Esse fato não causou erro nas resoluções, mas os alunos não observaram a variação do ângulo e do comprimento da sombra da árvore. Isso pode indicar que os alunos perceberam através do problema anterior que, modificando o ângulo e o comprimento da sombra, não se altera a altura da árvore, portanto poderiam utilizar os valores informados ao abrir o arquivo.

A tabela 15 mostra que nenhum grupo acertou integralmente a resolução do 3º problema, que pedia para calcular a medida do raio da Terra.

3° problema	
Resolveu corretamente o 3° problema.	----
Calcularam o raio da figura, mas não utilizaram a escala informada para obter o raio da Terra.	4 grupos
Identificaram seno, escreveram a equação, mas erraram a manipulação algébrica.	2 grupos
Desenhou um triângulo com as medidas da figura, inclusive com a medida do raio.	1 grupo
Identificaram seno, mas não escreveram nada além disso.	4 grupos
Identificaram a relação trigonométrica cosseno e não prosseguiram na resolução.	1 grupo
Tentaram resolver o problema sem utilizar as relações trigonométricas.	3 grupos

Tabela 15: Classificação das respostas dadas ao 3° problema.

Quatro grupos identificaram o seno como a razão a ser utilizada, obtiveram o valor do seno do ângulo, substituíram esse valor na igualdade e manipularam corretamente a equação obtendo o valor do cateto oposto (raio da Terra). O erro cometido foi a não utilização da escala informada no enunciado, ou seja, a resposta encontrada foi aproximadamente 6,38 km, que deveria ser multiplicada por 1000 para haver coerência com a medida do raio da Terra, de 6380 km aproximadamente.

Um dos 2 grupos que erraram a manipulação algébrica (grupo C) identificou seno como a razão a ser utilizada, obteve o valor correto para o seno do ângulo, substituiu na igualdade, porém errou a resolução da equação. Escreveu corretamente: "$0{,}67 = \frac{R}{3{,}17 + R}$", mas errou ao fazer: "0,67.3,17 = R". Mesmo assim, foi o único grupo que encontrou a resposta correta, considerando a escala dada. Aparentemente, o grupo percebeu que havia erros na resolução da equação, pois não finalizou a resolução, e utilizou os recursos do GeoGebra para obter diretamente a medida do segmento que representava o raio da Terra.

O outro grupo (grupo N) identificou seno como a razão a ser utilizada, obteve o valor correto para o seno do ângulo, substituiu na igualdade, iniciou a resolução da equação corretamente, mas errou a resolução a partir de um erro de sinal.

Um grupo (grupo Q) desenhou o triângulo dado no problema dando o valor do raio como 6,38. Certamente, o grupo utilizou os recursos do GeoGebra para obter esse valor, no entanto, desconsiderou a escala informada.

Com relação ao restante dos trabalhos, 4 grupos identificaram seno como a razão a ser utilizada e não escreveram nada além disso e 1 identificou cosseno, também não prosseguindo na resolução. Três grupos, provavelmente cópias um do outro (os registros estão exatamente iguais e as medidas do ângulo e da distância do satélite à superfície da Terra não são aquelas informadas ao abrir o arquivo) utilizaram uma informação visual para calcular o raio da Terra. No quadro 4, está registrada uma transcrição da resolução apresentada por eles:

Quadro 4: Resolução do 3° problema.

Distância do satélite à superfície da Terra: 2,64 Distância do satélite ao centro: 7,92 ângulo: 45° 2,64 x 3 = 7,92 Resposta: raio da Terra: 14.782,52

É provável que os alunos tenham tentado calcular a distância do centro da Terra ao satélite através de uma informação visual, pois ao posicionar o satélite formando um ângulo de medida igual a 45º e com distância à superfície da Terra de 2,64 (como na figura 44 feita pela professora) a imagem sugere que do centro ao satélite temos uma medida que é cerca de 3 vezes a da distância do satélite à superfície. Essa seria uma explicação para o cálculo 2,64 x 3, feito por esses grupos.

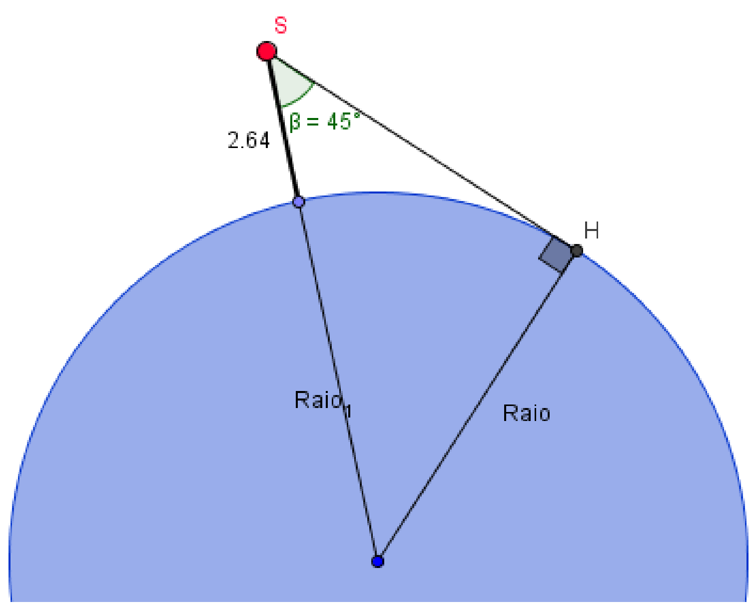


Figura 44: Imagem utilizada pelos grupos para estimar a relação entre as distâncias.

Os próximos raciocínios utilizados pelos grupos não estão registrados. Escrevem apenas a resposta 14782,52, que mais parece estar associada ao diâmetro da Terra do que ao Raio.

Tendo em vista a dificuldade apresentada pelos grupos na resolução do 3º problema, o início da resolução do 4º foi orientado por mim. No quadro branco da sala de aula, mostrei aos alunos um esboço dos dois triângulos retângulos dados no problema (ver figura 45) e que permitiriam calcular a largura do riacho. Questionei os alunos se o lado *c* (sobre o riacho) era o cateto oposto, o adjacente ou a hipotenusa com relação aos ângulos dados nos dois triângulos. Em seguida, repeti a pergunta, mas agora com relação ao lado *d* (paralelo ao riacho) e ao lado dado pela soma de *d* mais a distância de A a B. Tendo sido feita a identificação dos lados como cateto oposto e adjacente, chegamos à conclusão de que a relação trigonométrica a ser utilizada era a tangente. Escrevi no quadro as duas igualdades, uma para cada triângulo (utilizando valores fictícios para as tangentes e para a distância entre A e B), e orientei os alunos que, ao abrirem a atividade no laboratório de informática, deveriam escolher os ângulos, obter os valores das tangentes e, em seguida, isolar uma das incógnitas na equação mais simples e substituir na segunda equação.

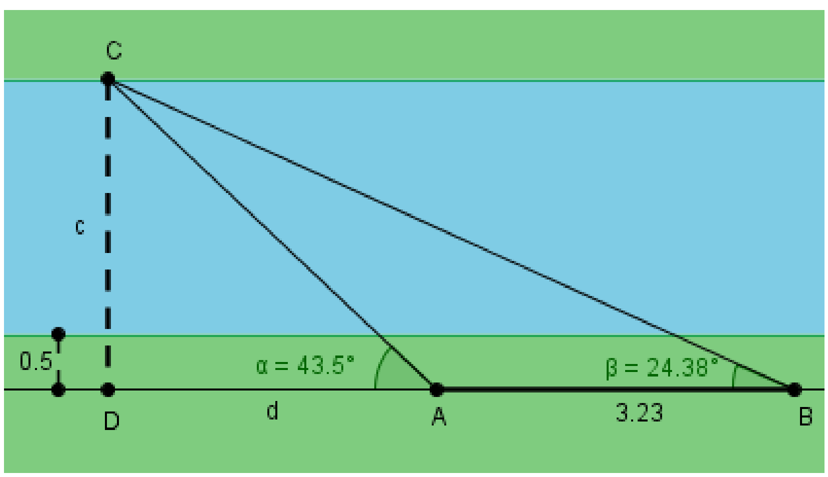


Figura 45: Triângulos retângulos ACD e BCD.

A tabela 16 mostra a classificação das respostas dadas ao 4° problema. Nela podemos observar que 3 dos 15 grupos obtiveram a medida da largura do rio corretamente.

4° problema	
Calcularam a largura do rio corretamente (aproximadamente 2,3m).	3 grupos
Calcularam a medida de *c*, mas não descontaram a distância da reta à margem.	2 grupos
Desenvolveram a maior parte do problema corretamente, mas cometeram um erro na manipulação algébrica, aparentemente por falta de atenção.	2 grupos
Fez a manipulação algébrica das equações, porém usando os mesmos valores fictícios utilizados pela professora ao invés dos valores dados na atividade.	1 grupo
Substituiu o valor de *c* pela medida do ângulo β.	1 grupo
Não calculou os valores da tangente corretamente e errou também a manipulação algébrica.	1 grupo
Deixaram a questão em branco, ou apenas anotaram o que a professora escreveu no quadro como exemplo.	5 grupos

Tabela 16: Classificação das respostas dadas ao 4° problema.

4.4.3 Comentários sobre a atividade 2

Durante a resolução da atividade 2, observei mais um aspecto interessante do trabalho com o GeoGebra. Foi frequente a tentativa dos alunos de obterem um lado que está faltando em um triângulo retângulo através da aplicação do Teorema de Pitágoras. Com o GeoGebra isso foi possível, porém, em outros tipos de aulas, os alunos recebem os triângulos em papel, como pude observar através dos relatos de colegas e das minhas próprias experiências. Nesses triângulos aparecem as medidas de um lado e de um ângulo com o objetivo de se aplicar as razões trigonométricas e obter a medida do cateto oposto, ou do adjacente ou da hipotenusa. Em geral, os alunos não conseguem obter a medida do segundo lado que está faltando e que é necessário para a aplicação do Teorema de Pitágoras. Muitas vezes nem com o auxílio de uma régua isso ocorre pois, por exemplo, um segmento desenhado no papel pode ser associado com uma medida de 20 unidades, mas aparecer desenhado com medida de 3 cm nesse papel. Portanto, os alunos deveriam encontrar a escala em que o desenho foi feito e só então calcular a medida do lado que estava faltando, procedimento raramente realizado por eles.

A resolução no GeoGebra desses problemas de aplicação sobre o cálculo de distâncias inacessíveis mostrou-se interessante sob diversos aspectos: os alunos puderam manipular as figuras, ver os objetos movendo-se, e observar características variáveis e invariáveis. Essa observação dos objetos em movimento não é possível com representações de situações feitas apenas no quadro de giz e no papel.

O *software* permitiu também que os alunos encontrassem alternativas de resolução dos problemas: por exemplo, tornar visível uma medida que não aparecia na figura inicial e, assim obter a resposta ou, a partir dela, resolver o problema, como através do Teorema de Pitágoras comentado anteriormente. Os objetivos dos problemas eram que os alunos aplicassem as razões trigonométricas para resolvê-los, porém alguns alunos, como em outras situações escolares, tentaram simplificar a resolução e utilizar os conhecimentos previamente construídos, mesmo não sendo suficientes para a resolução do problema.

Outro aspecto que deve ser observado é que as dificuldades com manipulações algébricas apareceram na atividade, assim como aparecem nas aulas que não utilizam um recurso como o GeoGebra. A mediação da professora na resolução dos problemas foi importante para ajudar os alunos a lidarem com essas dificuldades.

A tabela 17 mostra uma avaliação do desempenho dos grupos na resolução dos problemas:

1° problema	14 dos 15 grupos responderam corretamente ao item *a*.
	12 dos 15 grupos identificaram e calcularam corretamente a relação tangente, porém apenas 2 dos 12 grupos consideraram o contexto do problema e somaram a altura da pessoa no item.
	10 dos 15 grupos compararam as suas respostas e apenas 1 dos 10 grupos mostrou uma conclusão diferente do que era esperado.
2° problema	11 dos 15 grupos resolveram corretamente a questão. Dos outros 4 grupos, 2 erraram (grupos J e M) e 2 deixaram a questão em branco (grupos A e Q) .
3° problema	Não foi resolvido corretamente por nenhum dos grupos.
4° problema	5 dos 15 grupos conseguiram calcular o valor de *c*. 5 grupos deixaram a questão em branco e 5 grupos apresentaram erros na manipulação algébrica das suas equações.

Tabela 17: Avaliação do desempenho dos grupos na resolução dos problemas.

A realização do primeiro problema mostrou que a maioria dos grupos conseguiu identificar os lados de acordo com o ângulo e identificar a razão trigonométrica correspondente a essas informações. Os três grupos que não conseguiram responder corretamente ao item *b* foram os grupos A, J e Q.

Para compreender o desempenho desses grupos, vamos comparar suas respostas com o desempenho na atividade anterior.

O grupo A, na atividade 1, havia inicialmente apresentado problemas de identificação das relações entre lados e ângulos e, nos últimos exercícios, havia identificado essas relações e calculado as razões corretamente. Contudo, no primeiro problema da atividade 2, identificou a razão a ser utilizada como seno e utilizou o teorema-em-ação "a razão entre dois lados do triângulo retângulo resulta na medida do terceiro". Também não comparou sua resposta com a dos colegas no item *c*. Concluí então que o grupo não havia conseguido ainda desenvolver as noções de ângulo e razões trigonométricas. Estava num processo intermediário da construção dos conceitos, pois mostrou em um momento que conseguiu identificar e utilizar as noções abordadas na atividade, mas em outro momento não conseguiu.

O grupo J permaneceu com as dificuldades apresentadas na atividade 1, não identificando os catetos oposto e adjacente de acordo com o ângulo e, consequentemente, não identificou a razão trigonométrica a ser utilizada.

O grupo Q não entregou a atividade 1, portanto não foi possível avaliar seu crescimento quanto à compreensão das noções abordadas. O grupo não conseguiu realizar a atividade 2, respondendo corretamente apenas o item *a* do 1° problema.

Observou-se também que o grupo I, que não tinha atingido os objetivos propostos na atividade 1, conseguiu realizar os problemas 1 e 2 corretamente, indicando que houve uma organização das noções de ângulo, de lado e de razões trigonométricas. Não resolveu os problemas 3 e 4.

Os grupos E e F, que também não haviam atingido os objetivos da atividade 1, não entregaram a atividade 2, portanto não foi possível avaliá-los.

A maioria dos grupos conseguiu atingir os objetivos do 2° problema: identificar as relações entre os lados e o ângulo dado, a relação trigonométrica envolvida e encontrar a medida solicitada.

O grau de dificuldade do 3° problema era maior do que dos dois primeiros. O triângulo (apresentado) estava em uma posição diferente dos triângulos apresentados nas atividades anteriores, com a hipotenusa posicionada quase verticalmente. Mesmo assim, 10 dos 15 grupos identificaram corretamente a relação trigonométrica a ser utilizada como sendo o seno, o que indica que conseguiram identificar as relações entre lados e o ângulo dado. Foi observado, nesse problema, que a dificuldade dos alunos estava no equacionamento ou no processo de manipulação algébrica para resolução da equação: $sen\beta = \frac{raio}{raio + a}$. Essa resolução foi retomada com os alunos em aula, obtendo-se o equacionamento e resolvendo-se a equação. No momento seguinte, orientei o equacionamento do 4° problema, como comentado anteriormente.

. As orientações dadas pela professora ajudaram os alunos a resolver o 4° problema, sendo que 5 do 15 grupos conseguiram encontrar a medida *c*. Novamente, os problemas de manipulação algébrica apareceram como obstáculos à resolução do problema.

4.5 CONSTRUINDO E CARACTERIZANDO O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

4.5.1 Descrição da atividade 3 e seus objetivos

A atividade 3 solicitava que os alunos fizessem a construção do círculo trigonométrico e, com base nessa construção, respondessem a algumas perguntas. O roteiro da construção pode ser visto na figura 46 e as perguntas podem ser vistas na figura 47.

Construindo e caracterizando o círculo trigonométrico

1) No 6º botão, selecione Círculo dado centro e raio no menu que irá abrir.
2) Clique no ponto O e digite 1 para o raio;
3) Marcar os ponto de intersecção (2º botão, selecionar Intersecção de dois objetos) do círculo com os eixos.
4) Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A (ponto de coordenadas (1, 0)), selecione propriedades e, em exibir rótulo, selecione nome & valor. Repita isso para os pontos B, C e D (no sentido anti-horário).
4) Nomear os quadrantes (inserir texto no penúltimo botão): escreva 1º Q e arraste o texto até ele ficar sobre o quadrante AOB, depois novo texto, digite 2°Q e arraste o texto para o quadrante BOC e assim por diante, no sentido anti-horário.
5) Marcar um ponto P qualquer sobre o círculo (selecione novo ponto no segundo botão e depois, para renomear o ponto, clique com o botão direito do mouse sobre ele e selecione renomear);
6) Marcar o ângulo AÔP (oitavo botão) e arrastar o ponto sobre o circulo para observar o ângulo.

Figura 46: Roteiro para a construção do círculo trigonométrico.

Agora responda:

a) Os ângulos do 1° quadrante variam de quanto a quanto?

Resposta:

b) E os ângulos do 2° quadrante?

Resposta:

c) E os ângulos do 3º quadrante?

Resposta:

d) E os ângulos do 4º quadrante?

Resposta:

e) Selecione ângulo com amplitude fixa no oitavo botão. Clique sobre A e O e digite, na janela que irá abrir, um ângulo maior do que 360°. Qual ângulo ficou marcado no círculo? Explique o que aconteceu.

Resposta:

f) Novamente, selecione ângulo de amplitude fixa, mas agora digite um ângulo negativo. Qual ângulo ficou marcado no círculo? Explique o que aconteceu.
OBS: se os valores ficarem uns sobre os outros, selecione mover no primeiro botão, clique sobre o(s) valor(es) e arraste um pouco para o lado para poder enxergá-lo(s).

Resposta:

Figura 47: Perguntas relacionadas ao círculo trigonométrico.

Ao final da realização dos passos indicados para a construção, os alunos deveriam ter uma imagem como a que pode ser vista na figura 48, onde P é um ponto qualquer do primeiro quadrante do círculo.

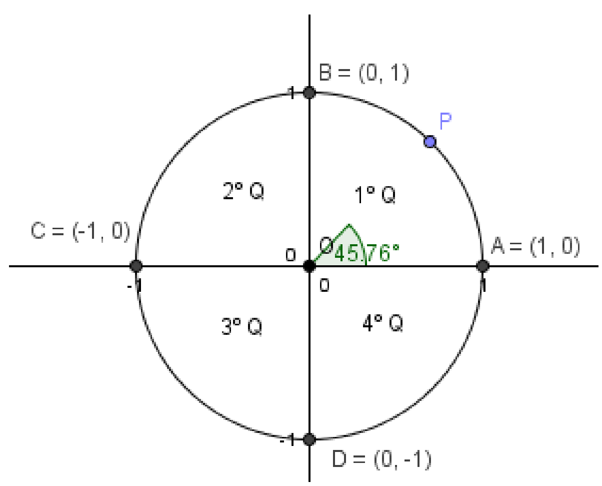


Figura 48: Construção que os alunos deveriam realizar.

O primeiro objetivo da atividade 3 era que os alunos observassem as principais características do círculo trigonométrico a partir de sua construção: centro na intersecção dos eixos coordenados, raio com medida igual a 1 (uma) unidade, intersecções do círculo com os eixos coordenados, origem dos arcos marcada no ponto A e quadrantes identificados no sentido anti-horário. O segundo objetivo era que os alunos pudessem observar um ponto P deslocando-se sobre o círculo e as variações, conforme ele se desloca, da medida do ângulo central por ele determinado (AÔP).

A atividade 3 também teve como objetivo levar os alunos a pensar sobre a marcação, no círculo trigonométrico, de ângulos com medidas maiores que 360º e de ângulos cujas medidas são negativas. Aqui introduziu-se a ideia de ângulo como giro, ou seja, um ângulo maior do que 360° equivale a mais de uma volta completa no círculo, no sentido anti-horário, e um ângulo negativo equivale a um giro no sentido horário. Essa reflexão era especialmente importante porque o GeoGebra não mostra ângulos com medidas maiores do que 360°, nem com medidas negativas. O programa desconta a medida do ângulo correspondente a uma volta completa, quantas vezes for necessário, e marca a menor determinação positiva. Para ilustrar esse procedimento, pode-se pensar nos ângulos com medidas iguais a 400° e -30°. Para o primeiro ângulo, o GeoGebra marca a extremidade final do arco no 1º quadrante e o ângulo destacado é 40°, pois 400° - 360º = 40°, como pode ser visto na figura 49(a); para o segundo ângulo, o GeoGebra marca o ângulo de 330°, pois - 30° + 360° = 330°, como pode ser visto na figura 49(b).

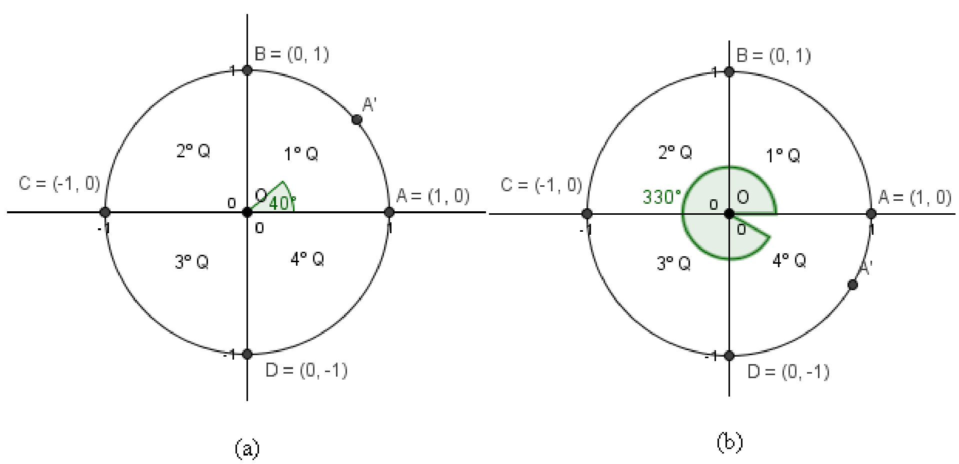


Figura 49: Marcação dos ângulos de medidas iguais a 400° (a) e -30° (b) no GeoGebra.

4.5.2 A realização da atividade 3 pelos alunos

A atividade 3 foi realizada por 17 grupos. Na tabela 18, observamos o número de acertos e erros relativos à construção e às perguntas *a*, *b*, *c* e *d* que abordavam a variação das medidas dos ângulos marcados no 1º, 2º, 3º e 4º quadrante respectivamente.

	Resposta esperada	Realizaram/responderam corretamente	Realizaram/responderam erroneamente
Construção do círculo trigonométrico.	-----	17 grupos	---
Variação da medida do ângulo no 1º quadrante.	0° a 90°	15 grupos	2 grupos
Variação da medida do ângulo no 2º quadrante.	90° a 180°	16 grupos	1 grupo
Variação da medida do ângulo no 3º quadrante.	180° a 270°	16 grupos	1 grupo
Variação da medida do ângulo no 4º quadrante.	270° a 360°	16 grupos	1 grupo

Tabela 18: Número de acertos e erros na construção e nas perguntas *a*, *b*, *c* e *d* da atividade 3.

O erro cometido pelo grupo C na análise da variação dos ângulos pode ser observado na figura 50.

Agora responda:
a) Os ângulos do 1° quadrante variam de quanto a quanto?

Resposta:90º

b) E os ângulos do 2° quadrante?

Resposta:180º

c) E os ângulos do 3º quadrante?

Resposta:270º

d) E os ângulos do 4º quadrante?

Resposta:360º

Figura 50: Resposta dada pelo grupo C para a variação dos ângulos nos quadrantes.

Pode-se observar que o grupo C não compreendeu a ideia de variação dos ângulos, isto é, tomando a pergunta *b* como exemplo, não percebeu que os ângulos marcados no 2º quadrante podem variar de 90° até 180°. Provavelmente, o grupo estava focado nas divisões entre os quadrantes e destacou somente os ângulos que são mostrados na tela.

A maioria dos grupos escreveu a variação da medida do ângulo AÔP dando suas respostas na unidade graus. Já o grupo A expressou a variação dos ângulos através das coordenadas dos pontos de intersecção do círculo com os eixos, como se pode ver na figura 51. Revisando o protocolo de construção[24] da atividade dos alunos, percebi que também não marcaram o ponto P "livre" sobre o círculo, marcaram pontos fixos e seus respectivos ângulos, logo não conseguiram ver os ângulos variando. Utilizaram então as coordenadas dos pontos de intersecção que estavam aparecendo na tela para indicar a variação. Considerei a inversão dos pontos na resposta da pergunta *a* como erro de atenção.

[24] Protocolo de construção é uma ferramenta do GeoGebra que permite retomar passo a passo o que foi feito nas construções do arquivo. Para maiores informações sobre a ferramenta, ver apêndice A.

Agora responda:
a) Os ângulos do 1° quadrante variam de quanto a quanto?

Resposta: (0,1) a (1,0)

b) E os ângulos do 2° quadrante?

Resposta:(0,1) a (-1,0)

c) E os ângulos do 3° quadrante?

Resposta:(-1,0) a (0,-1)

d) E os ângulos do 4° quadrante?

Resposta:(0,-1) a (1,0)

Figura 51: Resposta do grupo A às perguntas *a*, *b*, *c* e *d*.

Para a pergunta *e*, que pedia para os grupos utilizarem a ferramenta "ângulo de amplitude fixa", escolherem um ângulo maior do que 360° e observarem qual ângulo ficou marcado no círculo, houve maior diversidade de respostas. Pode-se notar isso através das informações na tabela 19.

Pergunta *e*	
Indicaram corretamente o ângulo que ficou marcado e explicaram também corretamente.	8 grupos
Indicaram corretamente o ângulo que ficou marcado, mas não explicaram.	2 grupos
Indicou corretamente o ângulo, mas errou a explicação.	1 grupos
Erraram a resposta.	6 grupos

Tabela 19: Classificação das respostas dadas à pergunta *e*.

As respostas corretas podem ser exemplificadas pelo que os grupos D e N escreveram. Na figura 52, está apresentada a resposta do grupo D. Nela podemos observar que há um erro de atenção na identificação do quadrante, porém o ângulo está correto (digitaram o ângulo de medida igual a 405°) e a explicação para o ângulo marcado ser de 45º está certa.

Resposta: 45° no segundo quadrante, isto aconteceu pois ao atingir 360° dá uma volta completa, sendo assim, começa outra volta 1 volta = 360° | 405° = 1 volta + 45°

Figura 52: Resposta correta dada pelo grupo D.

A figura 53 mostra a resposta do grupo N, que digitou uma amplitude de 370º e observou na tela um ângulo de 10º. Observei, a partir de sua escrita, que o grupo percebeu que é possível marcar ângulos maiores do que 360°, bastando descontar as voltas completas. O grupo finaliza dizendo que, ao deslocar-se o ponto P, os 10° continuavam marcados. Aparentemente, o grupo esperava que existisse alguma relação de dependência entre o ângulo AÔP e o ângulo de amplitude fixa marcado por eles.

Resposta: sim ficou marcado mas nao da forma :
'tradicional' porque quando eu coloquei 370° o
que apareceu marcado foi 10° , ou seja, o ângulo
deu toda a volta de 360° e recomeçou como so
tinha 10° a mais do que 360° ficou marcado 10°
e sempre que eu mechia o ponto 'P' os 10°
continuavam marcados

Figura 53: Resposta dada pelo grupo N à pergunta *e*.

Essas respostas mostram um teorema-em-ação utilizado pelos alunos: se um ângulo mede um valor maior do que 360°, então descontam-se as voltas completas e marca-se no círculo a medida restante. Os alunos que utilizaram esse teorema-em-ação aparentemente perceberam as noções básicas de arcos côngruos determinados por ângulos maiores do que 360° e compreenderam ângulo como giro.

Os 6 grupos que erraram a resposta à pergunta *e* parecem ter desenvolvido raciocínios semelhantes, pois todos disseram, de algum modo, que não existe ângulo maior do que 360° ou que não é possível marcar um ângulo maior do que 360° no círculo. As respostas apresentadas nas figuras 54 e 55 são exemplos dessa afirmação.

Resposta: Nenhum, pois não existe nenhum ângulo maior que 360°

Figura 54: Resposta dada pelo grupo K.

Resposta: Nenhum círculo pode ter circunferência maior do que 360°, porque
360° é uma volta completa.

Figura 55: Resposta dada pelo grupo O.

As respostas dadas por esses grupos que erraram foram analisadas através da ferramenta do GeoGebra: protocolo de construção[25]. Chegou-se à seguinte conclusão: esses

[25] Dois protocolos de construção aqui analisados foram apresentados como exemplos no apêndice A.

grupos não seguiram o procedimento de marcar o ângulo de amplitude fixa conforme solicitado no enunciado. Acredito que clicaram sobre o ponto P e arrastaram-no sobre o círculo, no sentido anti-horário, observando que a medida do ângulo AÔP aumenta, porém ao ultrapassar o ponto A (completando uma volta) o ângulo indicado volta a marcar ângulos inferiores a 360°. Essa maneira de proceder para responder a pergunta, tentando simplificar o procedimento, causou esse erro. A utilização do "ângulo de amplitude fixa" tinha exatamente o objetivo de evidenciar a marcação de um ângulo de medida maior do que 360°, pois o aluno precisaria digitar essa medida de ângulo escolhido por ele, obteria um novo ângulo no círculo e teria como analisá-lo. Talvez eles tenham pensado que era preciso utilizar sempre o ponto P.

Essas resoluções permitiram a identificação do conceito-em-ação: se um ângulo de 360° determina um arco de uma volta completa no círculo trigonométrico, então não existem ângulos maiores do que 360°. Esse conceito-em-ação explicita a maneira como os alunos entenderam a marcação de ângulos maiores do que 360° no círculo trigonométrico, ou seja, se a volta está completa, então não há a possibilidade de marcar uma segunda volta no círculo, portanto entendem que a primeira volta sempre se repete. Percebo aqui que estão pensando no ângulo como uma figura fixa; nesse caso, não faz sentido considerar medidas maiores do que 360º. Eles estão acostumados com essa forma de pensar e de enxergar os elementos geométricos: fixos, estáticos, limitados. Esse teorema-em-ação também pode ter se originado, ou pelo menos foi reforçado, pela simplificação que alguns grupos fizeram na realização do exercício, isto é, não marcaram o ângulo de amplitude fixa solicitado. Nessa situação, a figura mostrada na tela do GeoGebra levou os alunos a concluírem sobre uma propriedade dos ângulos que é falsa.

A pergunta *f* solicitava que os alunos selecionassem ângulo de amplitude fixa e digitassem um ângulo negativo e que observassem qual ângulo ficou marcado no círculo trigonométrico. Também houve diversidade de respostas, como pode ser visto na tabela 20.

Pergunta *f*	
Indicaram corretamente o ângulo que ficou marcado e explicaram também corretamente.	7 grupos
Indicaram corretamente o ângulo que ficou marcado, mas não explicaram.	2 grupos
Indicaram corretamente o ângulo, mas erraram a explicação.	4 grupos
Erraram a resposta.	4 grupos

Tabela 20: Classificação das respostas dadas à pergunta *f*.

Para ilustrar o conjunto das 7 respostas corretas, pode-se observar a figura 56, onde aparece a resposta dada pelo grupo N.

Resposta: eu coloquei -10° e o angulo marcado que
apareceu foi 350°, ou seja, o que o computador fez foi
medir o ângulo 360° menos os graus que eu coloquei
no caso -10°

Figura 56: Resposta dada pelo grupo N à pergunta *f*.

Noto nessas respostas a utilização do teorema-em-ação: se um ângulo é negativo, então diminui-se o módulo desse valor do ângulo de 360° e marca-se a medida restante. Também observo que os alunos que utilizaram esse teorema em suas respostas aparentemente perceberam as noções básicas de arcos côngruos a ângulos menores do que 0°. Esse teorema utiliza como referência o ângulo de 360°, pois nenhum dos grupos escolheu um ângulo negativo menor do que -360°, isto é, se algum grupo tivesse escolhido um ângulo de medida -450°, por exemplo, o módulo desse valor seria descontado de 720° (duas voltas completas).

Um exemplo de resposta dada pelos 4 grupos que erraram a explicação, mas procederam corretamente na marcação do ângulo de amplitude fixa, pode ser visto na figura 57.

Resposta:Ficou marcado um ângulo de 315°, pois foi digitado um ângulo negativo.

Figura 57: Resposta dada pelo grupo A à pergunta *f*.

O grupo A escolheu o ângulo de medida igual a -45º, mas não conseguiu explicar o motivo de ter aparecido no círculo o ângulo de medida 315°, ou seja, qual a relação existente entre o ângulo negativo escolhido e o positivo que apareceu.

Com relação aos 4 grupos que erraram a resposta, todos responderam que um ângulo negativo não existe ou que não pode ser marcado no círculo. Analisando o protocolo de construção dos grupos, confirmei que novamente não marcaram "ângulo de amplitude fixa" como havia sido solicitado no enunciado.

Esses 4 grupos utilizaram o teorema-em-ação: se no círculo trigonométrico mostrado na tela só aparecem ângulos positivos, então não existem ângulos negativos. A origem desse falso teorema-em-ação pode estar na simplificação realizada pelos alunos que não utilizaram a ferramenta "ângulo de amplitude fixa", procedimento comentado anteriormente, ou ainda, pode estar no conceito-em-ação de que medidas são sempre representadas por números positivos. Nesse último caso, o GeoGebra só reforçou isso.

4.5.3 Comentários sobre a atividade 3

Destacamos na atividade 3 a utilização de dois teoremas-em-ação falsos, os quais afirmaram que não é possível marcar ângulos maiores do que 360°, nem ângulos menores do que 0°. Os teoremas-em-ação mostram ainda que os alunos estavam focados nos valores mostrados na tela. Mesmo vendo a variação dos ângulos de 0° a 360°, eles não conseguiram ampliar essa ideia para ângulos maiores do que 360° ou menores do que 0°, como se aqueles valores mostrados marcassem o início e o fim dos ângulos existentes. Isso mostra que, mesmo oferecendo recursos mais dinâmicos do que o quadro de giz, onde o professor se limita a contornar o círculo trigonométrico para indicar as voltas no sentido horário ou anti-horário, a utilização do programa, nesse caso, acabou dificultando a compreensão dos ângulos côngruos para alguns alunos. Isso reforça a convicção de que a mediação do professor é fundamental em qualquer ambiente de sala de aula, inclusive nos ambientes informatizados.

As ideias relativas a ângulos côngruos foram retomadas com os alunos nas aulas seguintes. A professora utilizou o quadro para mostrar que os ângulos negativos são marcados no sentido horário e explicou o procedimento utilizado para se marcar a menor determinação positiva dos mesmos. Explicou também o significado dos ângulos com medidas maiores do que 360° graus e como se faz para marcá-los no círculo trigonométrico.

Enfim, os dois últimos exercícios da atividade 3 evidenciaram a importância da mediação do professor para o esclarecimento de dúvidas dos alunos. Mostraram também que novas situações que envolvam ângulos negativos e ângulos maiores do que 360° deveriam ser apresentadas aos alunos para oportunizar novas reflexões e para observar se as discussões feitas a partir das atividades 3 e 4 (que será relatada na próxima seção) permitiram que os alunos entendessem as noções de ângulos côngruos[26].

[26] Nas atividades 4, 7 e 9, que serão descritas ao longo do trabalho, novas oportunidades de discussão e retomada desses conceitos foram apresentadas aos alunos. Como exemplos podemos citar os exercícios que envolveram: marcação de arco medindo 7 radianos, cálculo de seno ou cosseno de ângulos negativos e construção de gráficos com domínio real (e não restritos ao intervalo correspondente a uma volta no círculo).

4.6 RELAÇÃO ENTRE AS UNIDADES DE MEDIDAS DE ÂNGULOS E DE ARCOS - GRAUS X RADIANOS

4.6.1 Descrição da atividade 4 e seus objetivos

Na atividade 4, os alunos receberam um roteiro de construção (ver figura 58) que deveria ser feita a partir de um círculo dado e quatro exercícios que deveriam ser respondidos com base nessa construção. Na figura 59(a), está apresentado o círculo inicial dado aos alunos: com centro em O = (0, 0), raio igual a 1 unidade e com o ponto A = (1, 0) destacado. Na figura 59(b), vê-se a imagem da construção após a realização dos procedimentos indicados no roteiro.

Relação entre as unidades de medidas de ângulos e de arcos – grau x radiano

1) Marque um ponto P sobre o circulo (2° botão, novo ponto. Renomear, botão direito do mouse).
2) Selecionar, no 6° botão, a ferramenta "arco circular dados o centro e dois pontos". Clique em O, depois nos pontos A e P.
3) Mude a cor e a espessura do arco para melhor visualização: na janela de álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre o d e selecione propriedades. Mude a cor para vermelho e,em estilo,aumente a espessura do arco para 5.
4) Exibir o rótulo "valor" (também clique com o botão direito sobre d, propriedades e básico).
5) Marcar o ângulo AOP nessa ordem (8° botão).

Figura 58: Roteiro da construção da atividade 4.

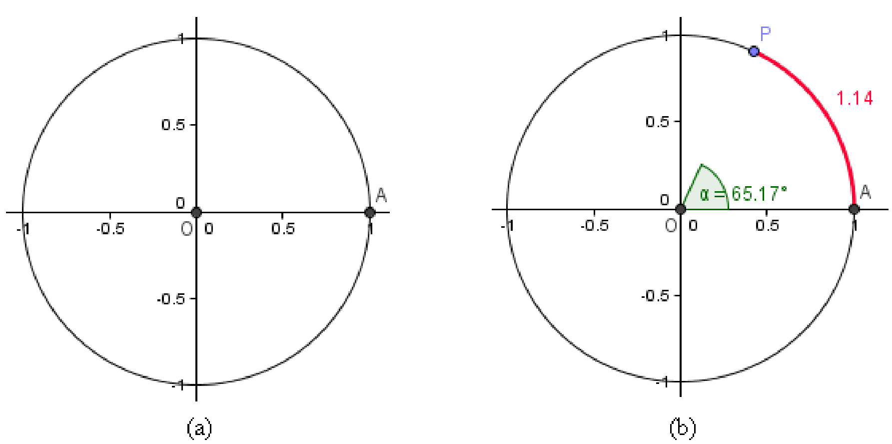


Figura 59: Círculo inicial e círculo após a realização dos passos da construção.

Essa construção é um exemplo de situação que envolve o conceito de função no processo de construção geométrica, comentado anteriormente. O ponto P corresponde à variável independente e o arco AP, à variável dependente, ou ainda, o ponto P corresponde à variável independente e o ângulo AÔP, à variável dependente.

A atividade 4 teve por objetivos: que os alunos pudessem compreender as noções básicas sobre arcos, isto é, que são partes do círculo com duas extremidades, cujo comprimento pode ser medido e que pode ser associado a um ângulo central do círculo; e permitir aos alunos o estabelecimento de correspondências entre as unidades de medidas de ângulos e arcos - grau e radiano. Esperava que, ao movimentar o ponto P sobre o círculo, os alunos observassem a correspondência entre o comprimento do arco AP, em radianos, e ângulo AÔP medido em graus. Esperava também que, com essas comparações, conseguissem expressar a unidade grau em radiano e vice-e-versa.

Na figura 60, estão apresentados os quatro exercícios que deveriam ser resolvidos pelos alunos.

1) O que representa o valor que aparece associado ao arco AOP?

Resposta:

2) Posicione o ponto P de tal forma a obter um arco de medida igual a 1.
Quantos arcos com a mesma medida desse cabem no circulo aproximadamente?

Resposta:

3) Em que quadrante fica o ponto P para um arco de medida igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

Resposta:
a) b) c) d) e) f)

4) Complete:

a) O arco de 1 rad é correspondente a um ângulo de aproximadamente...... graus.
b) Um ângulo de 90° é correspondente a um arco de aproximadamente..... rad.
c) 180° corresponde a .... rad.
d) 270° corresponde a ...... rad.
e) 360° corresponde a ..... rad.
f) π rad corresponde .... rad ou .... °
g) 2π rad corresponde a .... rad ou........ °
h) π/2 rad corresponde a ....°
i) 3π/2 rad corresponde a ....°

Figura 60: Exercícios da atividade 4.

4.6.2 A realização da atividade 4 pelos alunos

A atividade 4 foi realizada por 19 grupos. A tabela 21 mostra a classificação das respostas que foram dadas ao primeiro exercício, que perguntava sobre o valor associado ao arco AP.

1° exercício	
Responderam que o valor associado ao arco AP é a medida do arco.	8 grupos
Responderam que o valor associado ao arco é a medida do ângulo.	1 grupo
Responderam que o valor é "o radiano".	4 grupos
Não responderam.	3 grupos
Utilizaram uma linguagem imprecisa em sua resposta.	2 grupos
Respondeu erroneamente.	1 grupo

Tabela 21: Classificação das respostas dos alunos dadas ao 1° exercício da atividade 4.

A resposta dada pelo grupo N ao 1º exercício ("O que representa o valor que aparece associado ao arco AP?") foi: "A circunferência do ângulo". Aparentemente, os alunos se referiram ao comprimento do arco, usando elementos de linguagem desenvolvidos em outros momentos. Em outras palavras, o grupo associou "circunferência" com o comprimento do círculo, que seria a medida correspondente ao arco de uma volta completa, e, como não foi dada uma volta completa, o grupo especificou "do ângulo". Portanto, o grupo escolheu uma expressão imprecisa para dar sua resposta, mas há o indício de que está observando o arco e o seu comprimento. Outra confusão, ou indiferenciação, que essa resposta pode estar indicando é que não está claro para os alunos a diferença entre um objeto e a sua medida, pois o valor associado não é o arco, ou o círculo, mas sim a medida desse arco, ou desse círculo.

A segunda resposta escrita com linguagem imprecisa foi dada pelo grupo A. O grupo respondeu: "A diferença de ângulos entre o ponto A e P". A frase está confusa pelo uso da palavra ângulo. Retirando-se essa palavra, o grupo teria escrito apenas: "a diferença entre o ponto A e P", ou seja, percebe-se que "a diferença" refere-se à medida do percurso entre o ponto A e o ponto P e, portanto, ao comprimento do arco. O grupo observa essa medida e sente necessidade de relacionar a medida do arco com o ângulo que estava aparecendo no círculo. Esse procedimento indica a utilização do conceito-em-ação que relaciona arco e ângulo.

O grupo P respondeu apenas "1,33". Essa resposta foi classificada como errada e pode estar indicando que o grupo não prestou atenção ou não entendeu o que estava sendo perguntado. Pode indicar também que o grupo não moveu o ponto P para responder a essa pergunta, não percebendo que a medida do arco iria variar.

Os grupos que responderam apenas "os radianos" foram grupos que pediram auxílio à professora. Foram explicadas a eles ideias sobre comprimento de arco e medida desse comprimento em radianos e que essa unidade de medida estava relacionada com o raio do círculo. Eles resumiram a informação apenas em "radianos".

O 2º exercício (Quantos arcos com a medida 1 radiano cabem no círculo?) foi respondido de forma correta pela maioria dos grupos, como pode ser visto na tabela 22. As respostas variaram quanto à escrita: alguns grupos responderam "aproximadamente 6 arcos", outros "aproximadamente 6,2", ou apenas "6 arcos", entre outras.

2º exercício	
Responderam que cabem aproximadamente 6 arcos no círculo.	18 grupos
Respondeu erroneamente.	1 grupo

Tabela 22: Classificação das respostas dos alunos dadas ao 2º exercício.

A resposta dada pelo grupo L destacou-se das demais: "6,27. Pois é a razão do ângulo sobre o 360°". Podemos notar que o grupo, apesar de ter escrito os termos da razão na ordem inversa, calculou a razão entre o ângulo de medida igual a 360° e o ângulo de, aproximadamente, 57,34° (correspondente ao arco de medida 1 radiano) obtendo o número de vezes que o arco cabe no círculo.

A resolução do exercício pelo grupo L permitiu identificar o seguinte teorema-em-ação: "o número de vezes que um arco cabe em uma circunferência é dado pela razão entre 360° e o ângulo correspondente ao arco". O teorema-em-ação está correto e surpreendeu pela sua complexidade, uma vez que eu esperava apenas que os alunos observassem o arco de 1 radiano e movessem o extremo do arco (ponto P) até completar uma volta, quando ficaria marcado um comprimento de 6,28 radianos aproximadamente. Porém o grupo pensou em termos de razão e interpretou o resultado dessa razão como o número que indica quantas vezes o ângulo de 57,3° cabe em 360°.

O grupo A errou a resposta escrevendo "4 arcos". Talvez o grupo tenha entendido que deveria posicionar o ponto P no ponto de coordenadas (0,1), ao invés de posicionar o ponto P formando um arco de medida igual a 1. Essa confusão pode ser melhor compreendida observando-se a figura 61. Na figura, o ponto P foi posicionado (pela professora) sobre a intersecção do círculo com o eixo vertical, ou seja, onde está aparecendo o valor 1. Seguindo esse procedimento, vemos que cabem "4 arcos" vermelhos no círculo.

Nessa resolução identifiquei o teorema-em-ação: "do ponto A = (1, 0) até o ponto P = (0, 1) tem-se um arco de medida 1, então cabem 4 arcos iguais a esse no círculo". Esse teorema é falso e, como foi dito acima, foi elaborado a partir da confusão feita com o valor 1, mostrado na tela. O grupo não utilizou o valor que aparecia associado ao arco, pois quando o arco foi construído, provavelmente, o valor indicado não era 1, logo os alunos deveriam mover o ponto P até que o número 1 ficasse visível, mas não fizeram isso.

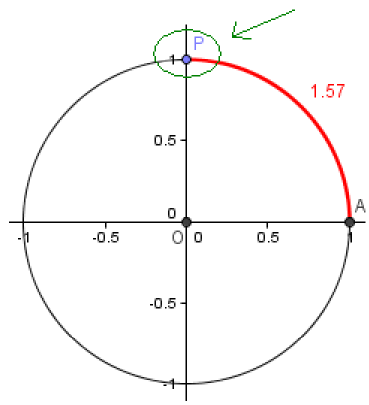


Figura 61: Ponto P posicionado sobre o ponto de coordenadas (0, 1).

Essa resolução feita pelo grupo A pode estar também evidenciando a dificuldade de selecionar os valores e as medidas relevantes em uma figura para a resolução de um exercício. A dificuldade de selecionar informações pode estar associada ao contrato didático mais usual nas aulas de Matemática, onde os problemas e os exercícios apresentam apenas os dados que serão utilizados em algum cálculo. Silva (1999) especifica a cláusula do contrato didático a esse respeito: "para resolver um problema é preciso encontrar os dado no seu enunciado. Nele devem constar todos os dados necessários e não deve haver nada de supérfluo" (Ibidem, p. 51).

Na resolução do 3º exercício ("Em qual quadrante fica o ponto P para um arco de medida 2, 3, 4, 5, 6 e 7?"), destacou-se o número de grupos que erraram somente a resposta ao item *f* (tabela 23), que perguntava em qual quadrante ficaria o ponto P, considerando-se um arco de medida igual a 7 unidades.

3° exercício	
Identificaram corretamente todos os quadrantes.	6 grupos
Errou somente o item *a*, acertando os outros.	1 grupo
Erraram somente o item *f*, acertando os outros.	8 grupos
Responderam erroneamente a todos os itens.	4 grupos

Tabela 23: Classificação das respostas dos alunos dadas ao 3º exercício.

Dentre essas 8 respostas de grupos que erraram somente o item *f*, destaco três. A resposta dada pelo grupo O exemplifica o que a maior parte desses 8 grupos concluiu: "Não tem como estar em nenhum quadrante, pois o valor do arco só vai até um valor aproximado ao 6". Nessa resposta aparece novamente a confusão que já tinha sido evidenciada na atividade 3, quando os grupos tinham que marcar ângulos com medidas maiores do que 360°. Parece que a ideia de sobrepor uma parte do arco sobre ele mesmo é considerada impossível.

O grupo B responde que "Não tem como, pelo fato de que o π não tem valor maior que 7". O sentido dessa resposta é o mesmo que foi dado pelo grupo O. O que diferencia essa resposta é o fato de utilizarem "π" no lugar de comprimento do círculo ou comprimento do arco. Essa confusão pode estar associada à fórmula do comprimento do círculo ($C = 2\pi r$) estudada em série anterior e a uma indiferenciação entre a constante e o comprimento do círculo, dado pela expressão. Deve-se levar em consideração que, para muitos alunos, π não é considerado como um número, o que ajuda a alimentar essa confusão. Esse foi outro momento que evidenciou uma confusão com o uso da linguagem como havia aparecido, anteriormente, com os grupos N e A no 1° exercício, quando se utilizaram de linguagem imprecisa para escrever suas respostas.

A terceira resposta que se destacou foi dada pelo grupo E, que escreveu "7 = 0,88". Esse grupo percebeu que o arco iria ultrapassar uma volta completa, porém, ao invés de responder o quadrante em que ficou o ponto P, respondeu uma medida aproximada do arco que ultrapassa essa volta completa, como pode ser visto na figura 62 (feita pela professora).

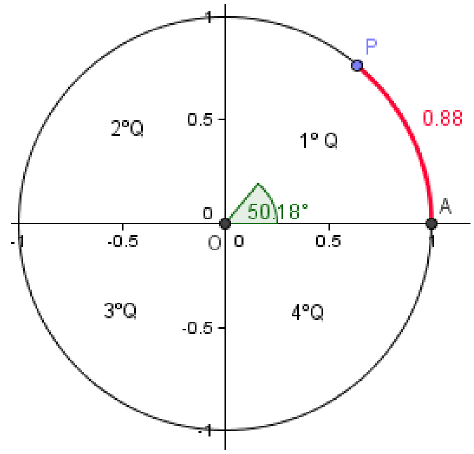


Figura 62: Medida do arco observada pelo grupo E.

Nas 4 respostas em que todos os itens estavam errados, apareceram os seguintes problemas: o grupo Q, ao invés de identificar o quadrante em que ficaria o ponto P, indicou as coordenadas do ponto P para as medidas dos arcos pedidas no enunciado, o que mostra uma indiferenciação entre arco e extremidade. Um aspecto interessante nessa resposta é que o grupo apagou da pergunta o item *f*, indicando que percebeu a dificuldade de marcar um arco de medida igual a 7 unidades e, ao não conseguir resolver esse problema, apagou-o evitando assim deixar um item em branco ou dar uma resposta errada. Os grupos L e R responderam dando o ângulo, medido em graus, correspondente ao arco AP: o grupo L respondeu que o arco de 7 radianos corresponde a "360°" e o grupo R respondeu "45,23°", ou seja, o primeiro não observou que o arco ultrapassa uma volta completa e o segundo observou que iria ultrapassar e deu uma resposta aproximada para o ângulo correspondente ao arco. Essa aproximação feita pelo grupo R não foi baseada em cálculo, mas foi baseada em estimativa visual, ou seja, posicionou o ponto P onde pensou completar o arco de medida 7 unidades. Em consequência disso, a resposta está com um erro de aproximadamente 4°. A resposta dada pelo grupo A (figura 63) foi a única que pareceu sem sentido e não consegui chegar a uma conclusão sobre como o grupo pensou.

3) Em que quadrante fica o ponto P para um arco de medida igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

Resposta:
a)1°Q b)1°Q c)4°Q d)1°Q e)3°Q f)3°Q

Figura 63: Resposta do grupo A dada no 3° exercício.

Na tabela 24, está apresentada a classificação das respostas ao 4° exercício, que pedia a conversão de medidas dadas em graus para radianos, ou vice-e-versa. Nela podemos observar que 14 grupos completaram corretamente 8 ou 9 itens do exercício.

4° exercício	
Completaram corretamente os 9 itens.	9 grupos
Completaram corretamente 8 itens.	5 grupos
Completaram corretamente 7 itens.	2 grupos
Completaram corretamente 6 itens.	1 grupo
Completaram corretamente apenas 2 itens.	1 grupo
Não concluiu a atividade.	1 grupo

Tabela 24: Classificação das respostas dos alunos dadas ao 4º exercício.

A resolução do 4° exercício destacou-se pelas diferenças nas aproximações das respostas mostradas no GeoGebra. Pequenas diferenças de aproximações não foram consideradas problemáticas quanto à compreensão das relações entre as unidades de medida grau e radiano, porém foram consideradas problemáticas quando provocaram uma conclusão errada. Para ilustrar essa diferenciação entre as respostas, observe, na figura 64, o que o grupo C respondeu.

4) Complete:

a) O arco de 1 rad é correspondente a um ângulo de aproximadamente 57.35 graus..
b) Um ângulo de 90º é correspondente a um arco de aproximadamente 1.57 rad.
c) 180º corresponde a π rad.
d) 270º corresponde a 4.71 rad.
e) 360º corresponde a 0 rad.
f) π rad corresponde 3.14 rad ou 180º
g) 2π rad corresponde a 6.28 rad ou 359.01 º
h) π/2 rad corresponde a 89.7º
i) 3π/2 rad corresponde a 296.61º

Figura 64: Resposta dada pelo grupo C ao 4° exercício.

Nessa resposta, o único item considerado errado foi o *e*. No item *e*, o ângulo de 360° corresponde a uma volta completa, então o arco correspondente mede aproximadamente 6,28 radianos. O GeoGebra, quando o ponto P para sobre o ponto A completando uma volta, imediatamente, "apaga" o arco feito. Se o aluno movimenta o ponto P lentamente, ele consegue perceber isso, se movimenta mais rapidamente, não consegue perceber esse fato e marca apenas o ângulo inicial de 0°. As respostas dos itens *g*, *h* e *i* não foram consideradas erradas, pois nos itens *g* e *h* há uma pequena diferença quanto à aproximação e, no item *i*, houve um erro de atenção (a resposta que aparece no círculo é 269,61°) e não de compreensão de relações.

Na figura 65, vemos a resposta do grupo N. O grupo erra os itens de *a* até *g* por estar interpretando 1 rad como sendo igual a π rad.

4) Complete:

a) O arco de 1 rad é correspondente a um ângulo de aproximadamente 180° graus.
b) Um ângulo de 90° é correspondente a um arco de aproximadamente 0,5 rad.
c) 180° corresponde a 1 rad.
d) 270° corresponde a 1,5 rad.
e) 360° corresponde a 2 rad.
f) π rad corresponde 1 rad ou 180°
g) 2π rad corresponde a 2 rad ou 360°
h) π/2 rad corresponde a 90°
i) 3π/2 rad corresponde a 270°

Figura 65: Resposta do grupo N dada ao 4º exercício.

Identifiquei nessa resolução o teorema-em-ação: "1 radiano é igual a π radianos". Essa é uma confusão frequente que observei em minhas experiências docentes, pois os arcos medidos em radianos mais comuns de serem utilizados em aula são: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π radianos, ou seja, aparecem com o número π. É como se π deixasse de representar um número e passasse a ser entendido como a própria unidade de medida de arcos. π radianos pode ser tomada como unidade de medida, mas nessa situação ficou claro que eles não entenderam o que é 1 radiano. A atividade 7, que será relatada mais adiante, teve por objetivo retomar essas relações entre graus e radianos, esclarecendo as dúvidas que persistiram na atividade.

4.6.3 Comentários sobre a atividade 4

A atividade 4 mostrou dificuldades que alguns alunos (grupo N e grupo B, por exemplo) apresentaram em relação à utilização de linguagem precisa para expressar suas ideias. Observar a linguagem dos alunos é importante, pois a construção de um conceito depende das situações propostas, dos invariantes operatórios e das representações (falas, escritas, desenhos...) utilizadas pelos alunos.

No 3° exercício vimos que a maioria dos grupos conseguiu identificar corretamente o quadrante em que o extremo do arco medido em radianos estaria localizado, tanto que 15 dos 19 grupos responderam corretamente a todos os itens ou erraram apenas 1 deles. Nesse exercício, reapareceu o problema de marcar arcos maiores do que uma volta (item *f*: localizar o extremo final do arco de medida 7 radianos) que já tinha aparecido na atividade 3. É importante comentar que as duas atividades (3 e 4) foram realizadas no mesmo dia, pois a aula teve duração de dois períodos. Sendo assim, os esclarecimentos foram feitos na aula seguinte, como foi explicado na seção 4.5.3 (comentários sobre a atividade 3).

Ainda sobre o 3° exercício, observei um fato interessante: um grupo apagou o item *f* do exercício, provavelmente por não saber como resolvê-lo. Esse procedimento não poderia ter sido feito se a atividade fosse dada em uma folha impressa. Mostra uma estratégia, ou um truque proporcionado pelo GeoGebra, para não precisar resolver o problema, contando ainda com a possibilidade de que a professora não percebesse uma questão não respondida.

A atividade 4 foi importante, pois introduziu as noções sobre arcos medidos em radianos. Notei que a maioria dos grupos (18 de 19) conseguiu observar que o arco de 1 radiano cabe, aproximadamente, 6,28 vezes no círculo. Observei também que a maioria dos grupos conseguiu estabelecer relações entre o ângulo medido em graus e o arco medido em radianos correspondente a esse ângulo. Essa afirmação está embasada nos dados da tabela 23, onde vemos que 16 grupos dos 19 conseguiram responder corretamente a 7 itens (do total de 9) ou mais do exercício.

A realização da atividade mostrou ainda a dificuldade de alguns grupos em distinguir o ponto P do arco que tem A e P como extremidade, uma dificuldade que podia ser esperada pelo arco se tratar de um objeto novo, que eles nunca tinham se preocupado em medir.

4.7 SENO E COSSENO NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

4.7.1 Descrição da atividade 5 e seus objetivos

Na atividade 5, os alunos receberam uma construção pronta. A construção é composta pelo círculo trigonométrico, pelos segmentos OS e OC sobre os eixos, pelo ponto P, pelo ângulo AÔP e pelo triângulo retângulo OCP, como pode ser visto na figura 66(a). O ponto P é livre para ser movimentado sobre o círculo e, conforme o movimento é realizado, as coordenadas do ponto P se alteram, bem como as medidas dos segmentos OS e OC e a medida do ângulo (figura 66(b)).

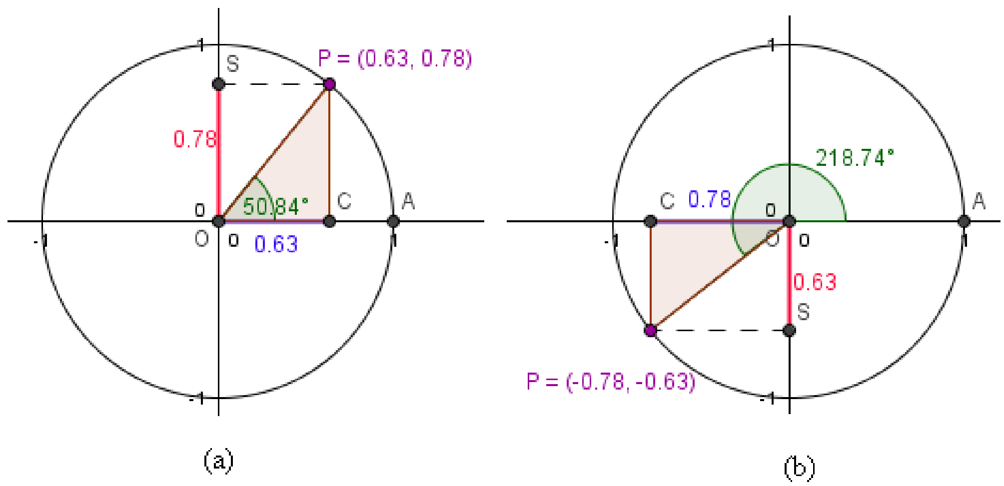


Figura 66: Construção dada aos alunos na atividade 5.

Nessa construção, o ponto P pode ser associado à variável independente de uma função e o segmento OC (ou o segmento OS), à variável dependente.

O objetivo principal da atividade 5 era proporcionar aos alunos a compreensão do seno e do cosseno no círculo trigonométrico, ampliando o significado de seno e cosseno como razões entre as medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo para seno e cosseno como coordenadas do ponto P. Consequentemente, amplia-se a ideia do cálculo de seno e cosseno de ângulos entre 0° e 90°, para ângulos maiores ou iguais a 90° e, até mesmo, para ângulos menores do que 0°.

Na figura 67, podem ser vistos os enunciados dos três primeiros exercícios. No primeiro, os alunos deveriam observar o triângulo retângulo apenas no primeiro quadrante e, nesse triângulo, identificar a medida da hipotenusa (igual a 1 unidade). O 2° exercício tinha por objetivo chamar a atenção dos alunos para as coordenadas do ponto P, proporcionando a eles o estabelecimento da comparação entre os valores das coordenadas e os valores associados aos segmentos. O 3° exercício solicitava que os alunos fixassem o ponto P, ainda no primeiro quadrante, e calculassem o seno e o cosseno do ângulo AÔP. Esse exercício tinha como objetivo que os alunos calculassem seno e cosseno do ângulo como razão entre as medidas dos catetos e a hipotenusa.

1. Qual é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo?

Resposta:

2. Mova o ponto P APENAS no 1° quadrante. Qual relação você observa entre as medidas dos segmentos OS e OC comparando-as com as coordenadas do ponto P?

Resposta:

3. Fixe o ponto P em algum ponto do 1° quadrante.
a) Calcule o seno do ângulo Ô.

Resposta:senÔ=.=

b) Calcule o cosseno do ângulo Ô.

Resposta:cosÔ=.=

Figura 67: Enunciados dos três primeiros exercícios.

Do 4° exercício até o 8°, as perguntas referem-se à variação dos valores de seno e cosseno em cada um dos quadrantes, à variação dos ângulos também em cada quadrante e à associação das medidas dos segmentos OS e OC com as coordenadas do ponto P. Sobre a associação das medidas dos segmentos com as coordenadas de P, esperava que os alunos percebessem que os resultados de seno e cosseno, no primeiro quadrante, correspondem às coordenadas do ponto P. Para ilustrar essa ideia, pode-se observar na figura 66(a), acima, que $sen\,50{,}84° = \frac{0{,}78}{1} = 0{,}78$, que é a medida do segmento OS e também a ordenada do ponto P. Portanto, o seno do ângulo pode ser visto como a segunda coordenada do ponto P. Para os outros quadrantes, esperava que os estudantes percebessem que as medidas dos segmentos continuam relacionadas com as coordenadas do ponto P, porém as coordenadas de P apresentam sinal positivo ou negativo, conforme a posição de P no plano cartesiano.

Os enunciados podem ser vistos na figura 68. Entre o 5° e o 6° exercício, foi apresentado aos alunos um esclarecimento sobre a ideia principal que estava sendo desenvolvida na atividade. O objetivo desse esclarecimento foi provocar um momento de reflexão dos alunos, para que prestassem atenção no aspecto principal da atividade.

4. Com base nessas informações, responda: ao movimentarmos o ponto P no 1° quadrante, os valores de seno e cosseno estão variando de quanto a quanto?

Resposta:

5. Agora, movimente o ponto P APENAS sobre o segundo quadrante.
Qual relação você observa entre as medidas dos segmentos OS e OC comparando-as com as coordendas do ponto P?

Resposta:

Importante: observe que estamos ampliando a ideia de senos e cossenos para ângulos maiores do que 90°.
Passamos a olhar o seno e o cosseno não somente como as medidas dos segmentos OS e OC, mas como sendo as coordenadas do ponto P: o cosseno é a primeira coordenada e o seno, a segunda.

6.Com base nessas informações, responda: ao movimentarmos o ponto P no 2° quadrante, os valores de seno e cosseno estão variando de quanto a quanto?

Resposta:

7. No terceiro quadrante, o ângulo AÔP varia de quanto a quanto?
E os valores de seno e cosseno, variam de quanto a quanto?

Resposta:

8. No quarto quadrante, o ângulo AÔP varia de quanto a quanto?
E os valores de seno e cosseno?

Resposta:

Figura 68: Enunciados dos exercícios 4, 5, 6, 7 e 8.

O 9° exercício teve como objetivo chamar a atenção dos alunos para os valores de seno e cosseno calculados quando o ponto P encontra-se exatamente sobre as interseções dos eixos com o círculo, ou seja, formando ângulos de medidas: 0°, 90°, 180°, 270° e 360°. Os exercícios seguintes, 10°, 11° e 12°, tinham o objetivo de levar os alunos a perceberem os sinais de seno e cosseno em cada quadrante. Os enunciados dos exercícios 9 ao 12 podem ser vistos na figura 69. Em especial, no 10° exercício, esperava-se que os alunos percebessem que a segunda coordenada do ponto P (seno do ângulo) para o ângulo de 210° tem o valor oposto à segunda coordenada do ponto quando esse determina um ângulo de 30° no círculo (figura 70).

9. Movimente o ponto P e responda:

sen 0° =	cos 0° =
sen 90° =	cos 90°
sen 180° =	cos 180° =
sen 270° =	cos 270° =
sen 360° =	cos 360° =

10. Classifique a afirmação em verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta:

sen 30° = 0,5 e sen 210° = - 0,5.

Resposta:

11. Em quais quadrantes os valores de seno são positivos?
E em quais são negativos?

Resposta:

12. Em quais quadrantes os valores de cosseno são positivos?
E em quais são negativos?

Resposta:

Figura 69: Enunciados dos exercícios 9 ao 12.

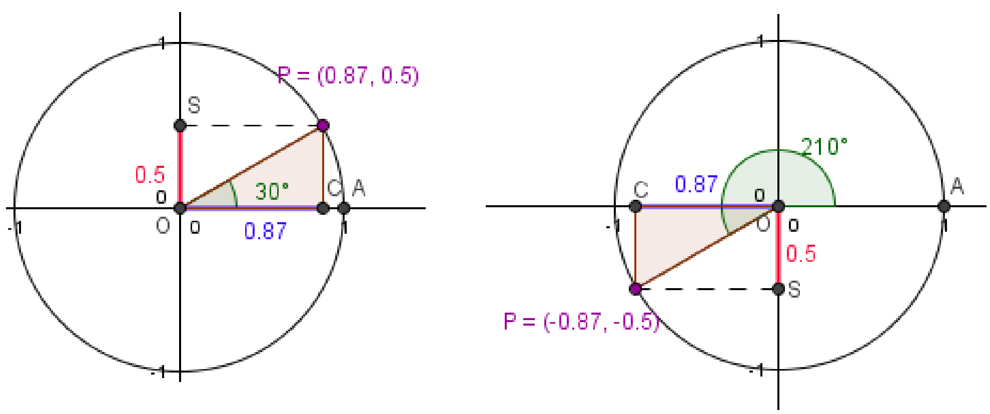


Figura 70: Coordenadas do ponto P com valores opostos no 1° e 3° quadrantes.

4.7.2 A realização da atividade 5 pelos alunos

A atividade 5 foi a última a ser realizada com o grupo de 45 alunos. Essa atividade foi realizada por 13 grupos. A tabela 25 mostra a classificação das respostas dos grupos dadas ao 1° exercício.

1° exercício	
Responderam corretamente que a medida da hipotenusa é igual a 1 unidade.	11 grupos
Responderam erroneamente.	2 grupos

Tabela 25: Classificação das respostas dadas ao 1° exercício da atividade 5.

Dos 11 grupos que responderam corretamente que a hipotenusa no círculo trigonométrico tem medida igual a 1 unidade, 10 grupos observaram diretamente o raio do círculo e 1 grupo, o grupo R, desenvolveu o cálculo da medida da hipotenusa através da utilização do Teorema de Pitágoras. A resolução feita pelo grupo R pode ser vista na figura 71.

Resposta:
hip² = 0,78² + 0,63²
hip² = 0,6084 + 0,3969
hip² = 1,0053
hip = raiz de 1,0053 = 1,0026464

Figura 71: Cálculo da medida da hipotenusa através do Teorema de Pitágoras.

Nesse momento, identifiquei novamente a utilização do conceito-em-ação que relaciona o triângulo retângulo com o Teorema de Pitágoras. Pude observar que o grupo desenvolveu corretamente o cálculo da hipotenusa. A diferença no resultado deve-se ao fato, já comentado anteriormente, dos arredondamentos feitos no GeoGebra. Nos exercícios seguintes, o grupo R utilizou o valor 1 para a hipotenusa. Apesar do exercício não solicitar o cálculo, os alunos poderiam resolvê-lo caso sentissem necessidade e talvez tenham feito o cálculo por estarem acostumados aos exercícios de Matemática em que, em geral, pede-se para calcular, efetuar ou resolver, o que novamente remete à ideia de contrato didático citada anteriormente.

O grupo K errou a resposta. Assim como o grupo R, tentou calcular a hipotenusa através do Teorema de Pitágoras, figura 72.

1. Qual é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo?

Resposta: a² = 0,78² +0,63² = 1,67

Figura 72: Resposta dada pelo grupo K ao 1° exercício.

O grupo K também utilizou o conceito-em-ação “Teorema de Pitágoras”, porém errou o cálculo, uma vez que utilizou o seguinte teorema-em-ação: "o quadrado de um número é igual ao número multiplicado por dois". O grupo K calculou: 2 *x* 0,78 + 2 *x* 0,63 (ao invés de elevar ao quadrado esses valores). Obteve 2,82 como resposta e extraiu a raiz quadrada, chegando então a, aproximadamente, 1,67. A confusão entre "dobro" de um número e o "quadrado" de um número é comum em alunos de diferentes níveis, como pude observar em minhas experiências como professora. Os alunos percebem que a potenciação está relacionada com a multiplicação, mas não distinguem as expressões: 2 *x* 0,78 e $0{,}78^2$. Aqui há uma indiferenciação entre adição e a multiplicação: entre "somar com ele mesmo" e "multiplicar por ele mesmo", ou então "duas vezes o número" com "o número vezes ele mesmo".

Uma segunda observação está no uso dos valores 0,78 e 0,63 pelos grupos R e K. Esses são os valores que aparecem na tela assim que os alunos abrem o arquivo do GeoGebra, portanto, concluiu-se que, inicialmente, nenhum desses grupos moveu o ponto P.

O outro erro foi cometido pelo grupo A. O grupo responde que "Com ângulo de 45° obtemos a altura de 0,71". Esse erro indica que o grupo está ainda trocando os lados no triângulo retângulo, confundiu hipotenusa com cateto oposto.

A tabela 26 mostra a classificação das respostas dadas ao 2° exercício, que pedia para comparar as medidas dos segmentos OS e OC com as coordenadas do ponto P no 1° quadrante.

2° exercício	
Observaram apenas que os segmentos aumentam ou diminuem sem explicitar que os valores das medidas são iguais às coordenadas do ponto P.	10 grupos
Identificaram que os valores das medidas são iguais às coordenadas do ponto P.	2 grupos
Concluiu que as medidas aumentam ou diminuem ao mesmo tempo.	1 grupo

Tabela 26: Classificação das respostas dadas ao 2° exercício.

Vemos na tabela que 10 grupos perceberam que, conforme se movimenta o ponto P, as medidas dos segmentos OS e OC diminuem ou aumentam. Porém, eles não deixaram claro em suas respostas se perceberam que a medida do segmento OC era dada pela 1ª coordenada do ponto P e que a medida do segmento OS era dada pela 2ª coordenada. Na figura 73, pode ser observado um exemplo desse conjunto de respostas.

2. Mova o ponto P APENAS no 1° quadrante. Qual relação você
observa entre as medidas dos segmentos OS e OC comparando-as
com as coordenadas do ponto P?

Resposta: Observamos que quando mexemos o ponto P para baixo
a medida do segmento OS diminui e para cima a medida vai aumentando,
no segmento OC é ao contrario, quando mexemos o ponto P para baixo,
as medidas aumentam e quando mexemos para cima a medida diminui.

Figura 73: Resposta dada pelo grupo M ao 2° exercício.

Apenas 2 grupos responderam o que estava sendo esperado no exercício, explicitando a comparação entre os valores. A figura 74 mostra a resposta do grupo R.

Resposta: Os valores mudam conforme o ponto P é movimen
tado, pois o valor de Seno é igual a cordenada do eixo Y do
ponto P e o Cosseno é igual a cordenada do eixo X do ponto.

Figura 74: Resposta dada pelo grupo R ao 2° exercício.

Pela resposta do grupo, fica evidente que os componentes perceberam que as medidas dos segmentos mudam e que identificaram o significado das coordenadas do ponto P. O grupo compreendeu o objetivo da atividade, pois ao invés de usar a expressão "medida dos segmentos" já estava relacionando essas medidas com os respectivos valores de seno e cosseno.

A tabela 27 mostra a classificação das respostas dadas ao 3° exercício, que pedia para fixar o ponto P no primeiro quadrante e calcular o valor do seno e do cosseno para o ângulo AÔP.

3° exercício	
Calcularam corretamente seno e cosseno para o ângulo escolhido.	11 grupos
Errou por utilizar um valor incorreto para a hipotenusa.	1 grupo
Errou por não identificar os lados no triângulo retângulo.	1 grupo

Tabela 27: Classificação das respostas dadas ao 3° exercício.

O grupo K, que anteriormente havia calculado a hipotenusa como sendo 1,67, utilizou esse valor no cálculo de seno e cosseno e, consequentemente, errou o valor das razões. Já o grupo A, que indicou que estava com dificuldade de identificar os lados no 1° exercício (trocou a hipotenusa pelo cateto oposto) repetiu aqui esse problema. Na figura 75, podemos observar o que o grupo A pensou.

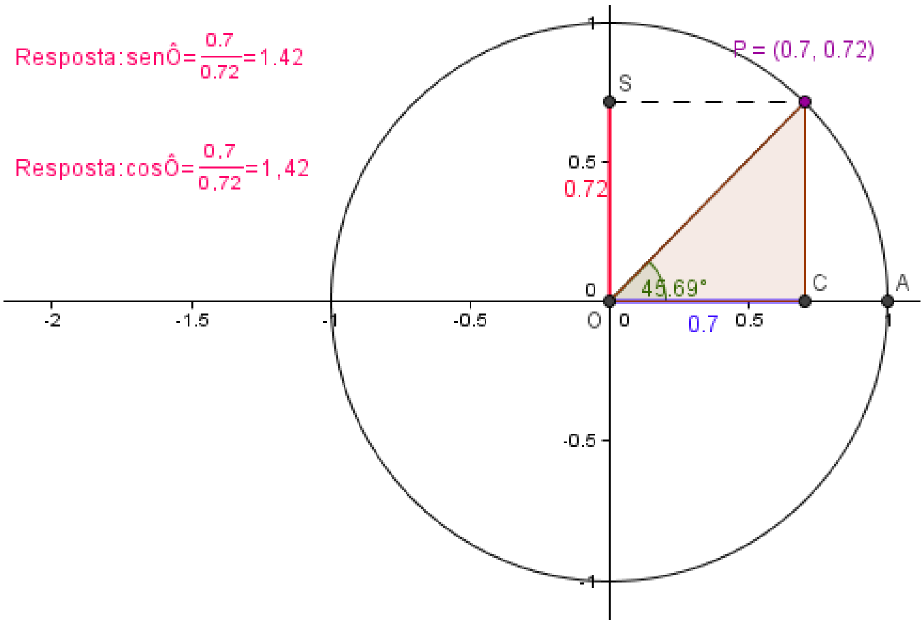


Figura 75: Resolução do 3° exercício pelo grupo A.

Na figura 75, apresento a resposta do grupo A acrescida da figura feita pela professora onde o ponto P foi posicionado de acordo com os valores indicados pelo grupo nas duas respostas à esquerda. Fica evidente que o grupo não identificou a hipotenusa, escreveu a razão apenas com os valores dos segmentos que apareciam na tela. Os alunos não pensaram o seno como a razão entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, a mesma observação pode ser feita para o cosseno.

Na tabela 28, estão classificadas as respostas dadas ao 4° exercício, que pedia para os alunos responderem de quanto a quanto o seno e o cosseno variavam no 1° quadrante.

4° exercício	
Responderam corretamente que tanto o seno quanto o cosseno variam de 0 a 1 no 1° quadrante.	8 grupos
Responderam que as medidas dos catetos variam de 0 a 1.	2 grupos
Não identificaram os valores, apenas identificaram que quando um aumenta o outro diminui.	2 grupos
Concluiu que seno e cosseno não sofreram variação.	1 grupo

Tabela 28: Classificação das respostas dadas ao 4° exercício.

A resposta dada pelo grupo I é um exemplo de conclusão correta do exercício: "o valor de seno está variando de 0 a 1 e o do cosseno está variando de 1 a 0". Dois grupos referiram-se aos catetos para dar a resposta e foram classificados separadamente do grupo que respondeu corretamente. Essa separação foi feita apenas por ter ficado a dúvida se os alunos perceberam ou não que, no primeiro quadrante, as medidas dos catetos são os valores de seno e cosseno.

A resposta mais diferente, nesse exercício, foi dada pelo grupo A. O grupo afirma que "Os valores de seno e cosseno não sofreram variação durante a movimentação". Aqui não fica claro o que o grupo pensou, pois, ao movimentar o ponto P sobre o círculo, as medidas dos segmentos e do ângulo e as coordenadas do ponto variam. Ficam fixos a hipotenusa e o círculo (o qual permanece centrado na origem e com raio sendo a hipotenusa). É possível que o grupo esteja associando os valores de seno e cosseno à ideia de razão constante (para um mesmo ângulo) que foi trabalhada na atividade 1. Nessa atividade anterior, calculou, por exemplo, três vezes a razão entre as medidas do cateto oposto e da hipotenusa e chegou à conclusão de que, para um mesmo ângulo, o seno é uma constante. Logo, poderia estar pensando que seno e cosseno têm sempre o mesmo valor, não percebendo que, se o ângulo mudar, as razões sofrerão alteração. Outra possibilidade é que, como o grupo calculou da mesma forma seno e cosseno (rever figura 75), tenha chegado à conclusão de que são iguais, portanto não haveria "variação". Nas duas hipóteses, a resposta mostra que ainda há incompreensão das noções de seno e cosseno.

Para o 5º exercício, que pedia para movimentar o ponto P no segundo quadrante e comparar as medidas dos segmentos com as coordenadas do ponto, houve respostas diversificadas, como pode ser visto na tabela 29.

5° exercício	
Identificaram que os valores das medidas dos segmentos são iguais às coordenadas do ponto, porém a primeira coordenada tem sinal negativo.	2 grupos
Concluiu que são iguais, ou seja, não observou o sinal.	1 grupo
Responderam corretamente que seno e cosseno vão diminuindo.	2 grupos
Observaram apenas que as medidas aumentam ou diminuem sem relacionar com o ponto, nem com sinal.	4 grupos
Responderam que o segmento OC ficou negativo.	3 grupos
Concluiu que as medidas aumentam ou diminuem relacionando com o ângulo.	1 grupo

Tabela 29: Classificação das respostas dadas ao 5° exercício.

Dois grupos concluíram o que se esperava do exercício, um exemplo é a resposta dada pelo grupo R: "Que o valor do cosseno se torna negativo já o do seno permanece igual". Esse grupo claramente está identificando as coordenadas do ponto como seno e cosseno (rever figura 74) e perceberam a mudança de sinal no 2° quadrante.

Três grupos responderam que o segmento OC ficou negativo. Aqui há uma confusão: a medida de um segmento nunca é negativa, as coordenadas dos pontos que determinam esse segmento sim, podem ser negativas. Então, esses grupos perceberam a mudança do sinal para o intervalo que está relacionado com o cosseno, mas não souberam escrever isso corretamente.

O grupo B respondeu novamente que as medidas aumentam ou diminuem ao mesmo tempo, sem observar que enquanto uma aumenta, a outra diminui: "Quanto mais próximo do ângulo de 90º menores são as medidas dos segmentos OS e OC. Já quando estão aproximando-se do ângulo de 90º as medidas dos segmentos são maiores". Aparentemente, o segundo ângulo considerado pelo grupo era o de 180°. O grupo estava olhando apenas para o eixo das abscissas.

O 6° exercício perguntava de quanto a quanto variavam seno e cosseno no 2° quadrante. A tabela 30 apresenta os diferentes tipos de respostas.

6° exercício	
Responderam corretamente que o seno varia de 0 a 1 e que o cosseno varia de 0 a -1.	4 grupos
Responderam que ambos variam de 0 a 1, sem observar o sinal negativo.	4 grupos
Responderam de forma geral: de -1 a 1, sem distinguir seno do cosseno.	2 grupos
Identificaram erroneamente que seno varia de 0 a -1 e que cosseno varia de 0 a 1.	2 grupos
Respondeu o ângulo de variação (de 0° a 180°)	1 grupo

Tabela 30: Classificação das respostas dadas ao 6° exercício.

Cabe comentar aqui que 4 grupos permanecem observando apenas as medidas dos segmentos, sem olhar para as coordenadas do ponto. Esse exercício estava posicionado logo abaixo da observação que buscava chamar a atenção dos alunos para os valores de seno e cosseno dados pelas coordenadas do ponto, e não mais pelas medidas dos catetos. Isso mostra que a informação dada aos alunos nessa observação não foi compreendida por esses grupos.

É possível que os 2 grupos que responderam de forma geral, que a variação era de 1 a -1, tenham pensado no seno e no cosseno separadamente, mas não tiveram o cuidado de distinguir essas variações na escrita.

O grupo K respondeu que varia "de 0° a 180°", ou seja, fixou-se na variação do ângulo no primeiro e no segundo quadrante, não observando a variação do seno e do cosseno. Há uma indiferenciação entre o ângulo e suas propriedades. É provável que a identificação das coordenadas do ponto como sendo os valores de cosseno e seno não tenha sido compreendida até aquele momento. É possível também que não tenham entendido a pergunta.

No 7° exercício há uma mudança na forma da pergunta: ao invés de perguntar-se a relação entre as coordenadas e os segmentos, pergunta-se sobre a variação do ângulo no terceiro quadrante e sobre a variação de seno e cosseno nesse mesmo quadrante. Na tabela 31 estão apresentados os diferentes tipos de respostas.

7° exercício	
Responderam corretamente que o ângulo varia de 180° a 270° e que seno e cosseno variam de 0 a -1.	5 grupos
Respondeu a variação de seno e cosseno corretamente, mas identificou a variação do ângulo no 3° quadrante de 0° a 270°.	1 grupo
Responderam apenas que seno e cosseno variam de 0 a 1.	2 grupos
Responderam apenas a variação do ângulo.	2 grupos
Responderam a variação do ângulo corretamente, mas concluíram que seno e cosseno aumentam.	2 grupos
Errou a variação do ângulo, do seno e do cosseno.	1 grupo

Tabela 31: Classificação das respostas dadas ao 7° exercício.

Uma resposta chamou minha atenção nesse exercício. O grupo M responde que "Os valores de seno e cosseno variam de 0,67 a 0,74. E o ângulo AÔP varia de 95° a 227°". Parece que o grupo posicionou o ponto P em um lugar qualquer do 2° quadrante e em um ponto qualquer do 3° quadrante e concluiu que essa é a variação do ângulo. Sobre a variação de seno e cosseno, o grupo considerou os valores das medidas dos segmentos OS e OC, dadas quando o ponto formou o ângulo de 227°, e atribuiu esses valores para a variação do seno e do cosseno (ver figura 76 feita pela professora). O grupo não está observando a variação dos elementos, e aparentemente precisou fixar valores para tentar responder ao exercício. Isso pode ser uma consequência do hábito de responder aos exercícios de Matemática com valores fixos, sem pensar em um conjunto de possibilidades ou intervalo de valores como resposta a um problema.

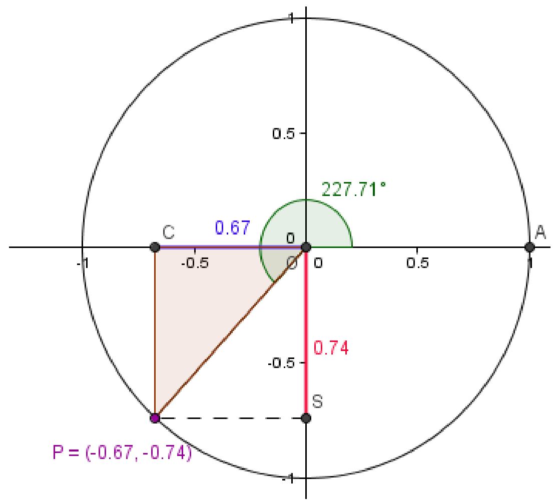


Figura 76: Ilustração da resposta dada pelo grupo M ao 7° exercício.

O 8° exercício repetia a pergunta do 7°, porém referia-se às variações no quarto quadrante. A tabela 32 mostra a classificação das respostas.

8° exercício	
Responderam corretamente a variação do ângulo, do seno e do cosseno.	3 grupos
Respondeu corretamente a variação de seno e de cosseno, mas a variação do ângulo foi identificada como de 0° a 360°.	1 grupo
Responderam apenas que a variação de seno e de cosseno é de 0 a 1.	3 grupos
Respondeu a variação do ângulo corretamente, mas escreveu que seno e cosseno variam de 0 a -1.	1 grupo
Respondeu apenas a variação de seno e de cosseno de forma geral: de -1 a 1.	1 grupo
Respondem apenas a variação do ângulo.	2 grupos
Errou a variação do ângulo, do seno e do cosseno.	1 grupo
Não respondeu.	1 grupo

Tabela 32: Classificação das respostas dadas ao 8° exercício.

Do mesmo modo como havia feito no 7º exercício, o grupo S identificou a variação do ângulo a partir de 0° e não a partir do início do quadrante. O grupo não conseguiu distinguir essas duas situações: fixar uma extremidade (nos pontos de coordenadas (0, 1), (-1, 0) ou (0, -1)) e restringir a variação da outra.

O grupo Q respondeu de forma genérica e ainda deu um exemplo para explicar como estava pensando: "De -1 a 1 Cosseno = -0,63 Seno = 0,78". O grupo demonstra que compreendeu que seno e cosseno podem assumir valores positivos ou negativos, porém não conseguiu perceber seno e cosseno separadamente, ou seja, que seno varia de -1 a 0 e cosseno de 0 a 1. Não percebeu também a necessidade de escrever o ângulo, justamente o que vai indicar se o resultado será positivo ou negativo e, por último, percebe a confusão: os alunos consideraram a primeira coordenada do ponto como seno e a segunda como cosseno.

O 9° exercício pedia que os grupos completassem os valores de seno e cosseno dos ângulos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°. Observe a classificação das respostas na tabela 33.

9° exercício	
Completaram corretamente todos os itens.	8 grupos
Completaram com valores errados.	4 grupos
Não fez a questão.	1 grupo

Tabela 33: Classificação das respostas dadas ao 9° exercício.

Dos quatro grupos que preencheram erroneamente os valores, destaco dois deles, C e O, que atribuíram valor 1 para todos itens. Claramente, os alunos observaram apenas as medidas dos segmentos, pois em qualquer um dos pontos em que P é posicionado formando os ângulos 0°, 90°, 180°, 270° ou 360° um dos segmentos tem sempre medida igual a 1 unidade, enquanto o outro segmento não é mostrado, pois sua medida fica igual a zero. Esses dois grupos, durante toda a atividade, não observaram as coordenadas do ponto P como foi solicitado. Uma possibilidade de explicação para esse problema é que os grupos podem ter percebido que as coordenadas do ponto P no primeiro quadrante são iguais às medidas dos segmentos e concluíram que não havia necessidade de ficar observando as coordenadas; outra é a de que simplesmente tomaram as medidas que eram dadas na tela. Esse procedimento pode ter sido feito pelos grupos como uma tentativa de simplificação da atividade.

Nesse procedimento estava implícito o seguinte teorema-em-ação: "se seno e cosseno no círculo trigonométrico podem ser vistos pelas medidas dos segmentos, então seno e cosseno de 0°, 90°, 180°, 270° e 360° são sempre 1". Os grupos que utilizaram esse teorema-em-ação não observaram que seno e cosseno podem assumir valores negativos e nem distinguiram as duas razões, uma vez que se o valor de seno é 1, o do cosseno é zero; se cosseno é -1, o seno é zero, e assim por diante.

O grupo T, que também errou o exercício, começou preenchendo os três primeiros itens respondendo que " *sen* 0º = 0, *sen* 90º = 1,5, *sen* 180º = 3,0", ou seja, o grupo estava observando o comprimento do arco, aproximadamente, e não os valores de seno. Interessante observar ainda que o comprimento do arco AP não aparecia nessa atividade, portanto parece que o grupo estava respondendo baseando-se no que foi trabalhado na atividade anterior sobre as unidade de medidas de ângulos e arcos. Nos exercícios anteriores da atividade 5, o grupo parece estar olhando para as medidas dos segmentos OS e OC ou para o ponto P, porém aqui o grupo confunde-se, indício de que as noções de seno e cosseno no círculo não estão ainda bem compreendidas por eles.

Essa resolução evidencia o teorema-em-ação: "os valores de *sen* 0°, *sen* 90°, *sen* 180°, e assim por diante, são dados pelas medidas dos arcos determinados pelos respectivos ângulos". Esse falso teorema-em-ação é interessante de ser observado nessa situação, pois é um erro comum que notei em minhas experiências em sala de aula. Alguns alunos consideram que seno ou cosseno de um ângulo medido em graus é a medida do arco correspondente, em radianos, e isso foi o que o grupo T fez no exercício, como por exemplo: $sen\ 90° = \frac{\pi}{2}$ ou $cos\ 30° = \frac{\pi}{6}$. O mesmo vale para seno e cosseno de um ângulo medido em radianos: $sen\ \frac{\pi}{2} = 90°$ ou $cos\ \frac{\pi}{6} = 30°$. Não era esperado que esse tipo de confusão aparecesse nessa situação, uma vez que, no círculo trigonométrico da atividade, estavam indicados os segmentos associados ao seno e ao cosseno e as coordenadas do ponto P, que mostram os valores de seno e cosseno. Nas atividades mais comuns de sala de aula, os alunos não têm essa figura junto aos exercícios em que precisam calcular esses valores. Esperava que a figura da atividade evidenciasse a relação de que seno e cosseno são dados pelas coordenadas do ponto P e não pela medida do arco correspondente ao ângulo.

O grupo K não fez o exercício. Registrou que "Não conseguimos fazer pois não sabíamos a hipotenusa". Esse grupo é o mesmo que obteve o valor errado da hipotenusa no 1° exercício pelo Teorema de Pitágoras. Aqui fica evidente que o grupo não percebeu que a medida da hipotenusa é uma constante no círculo trigonométrico, e pensou que teria que calculá-la novamente, não usando o valor 1,67 encontrado anteriormente. Nos casos dados, o grupo não poderia obter a hipotenusa pelo mesmo procedimento, pois para os ângulos dados não existe triângulo.

Na tabela 34, estão apresentadas as classificações das respostas dadas ao 10° exercício. No 10° exercício, os alunos tinham que avaliar se a afirmativa "*sen* 30° = 0,5 e *sen* 210° = -0,5" era verdadeira ou falsa e justificar essa resposta.

10° exercício	
Responderam corretamente e justificaram.	5 grupos
Responderam corretamente, mas não justificaram.	6 grupos
Não responderam.	2 grupos

Tabela 34: Classificação das respostas dadas ao 10° exercício.

Interessante observar que todos os alunos que responderam a questão o fizeram corretamente. Inclusive o grupo K, que não havia resolvido o 9° exercício por não saber a hipotenusa, resolveu o 10° corretamente e justificou: "Verdadeira segundo visualização do gráfico nos ângulos 30º e 210 º". Esse é um indício de que o grupo conseguiu observar as coordenadas do ponto P como seno ou cosseno, mas essa relação não está clara para ele de modo que consiga usar essa ideia em diferentes situações.

Com relação às respostas corretas, destaco a do grupo R: "Verdadeiro. O seno no angulo de 30° é igual a 1/2 ou 0,5. O ângulo 210° é o ângulo oposto ao 30°, portanto o valor de seno também é oposto, ou seja igual ao de 30° mas negativo". Esse é um exemplo de resposta completa e que mostra que os alunos estão construindo os conceitos de seno e cosseno no círculo trigonométrico corretamente.

A tabela 35 mostra a classificação das respostas aos exercícios 11° e 12°. As respostas foram agrupadas em uma única tabela por serem semelhantes. Os dois últimos exercícios solicitavam que os grupos escrevessem em quais quadrantes o seno é positivo ou negativo e em quais quadrantes o cosseno é positivo ou negativo.

	11° exercício (seno)	12° exercício (cosseno)
Identificaram corretamente os sinais para seno ou cosseno nos quadrantes.	9 grupos	10 grupos
Responderam que apenas em um quadrante seno ou cosseno é negativo.	2 grupos	2 grupos
Errou a resposta.	1 grupo	---
Não respondeu.	1 grupo	1 grupo

Tabela 35: Classificação das respostas dadas ao 11° e 12° exercício.

Dois grupos responderam que em apenas um quadrante ocorre o sinal negativo. O grupo B respondeu no 12° exercício: "O valor do cosseno é positivo no 1º Q, 3º Q e 4º Q e negativo, apenas no 2º Q".

O grupo O errou a resposta do 11° exercício, pois fez a mesma análise realizada para o cosseno: "O seno é positivo em dois quadrantes, no 1º e no 4º, e negativo em dois, no 2º e 3º".

4.7.3 Comentários sobre a atividade 5

A atividade 5 foi a última a ser realizada com a turma de 45 alunos no laboratório de informática. Apenas 13 grupos conseguiram completar a atividade durante a aula e, mesmo sendo possível entregá-la após o período de aula, apenas esses grupos entregaram o trabalho.

Sobre as resoluções dos exercícios da atividade 5, cabe destacar as observações seguintes:

Muitos grupos não compreenderam perguntas como a do exercício 2: "Mova o ponto P apenas no 1º quadrante. Qual relação você observa entre as medidas dos segmentos OS e OC comparando-as com as coordenadas do ponto P?". Esperava que os alunos observassem que a abscissa e a ordenada do ponto tinham o mesmo valor (em módulo) que as medidas dos segmentos OC e OS. A maioria dos grupos (11 dos 13 grupos - tabela 26) não comparou as medidas dos segmentos com as coordenadas do ponto, fixou-se na informação de que os segmentos OS e OC aumentam ou diminuem. Essa fixação nos segmentos pôde ser constatada também no 5° exercício, em que 7 dos 13 grupos observaram apenas o aumento ou a diminuição dos segmentos.

Alguns grupos não conseguiram responder aos exercícios em que eram formuladas mais questões, como no exercício 7: "No terceiro quadrante, o ângulo AÔP varia de quanto a quanto? E os valores de seno e cosseno, variam de quanto a quanto?". Nesse exercício, três informações foram pedidas: variação do ângulo, do seno e do cosseno. No 7° exercício, 4 grupos responderam somente o que se referia a seno e cosseno ou somente a variação do ângulo. No 8° exercício, 6 dos 13 grupos também responderam somente a variação de seno e cosseno ou somente a variação do ângulo.

Alguns grupos fixaram-se nos valores que apareciam juntos aos segmentos OS e OC, consequentemente, não observaram as mudanças de sinal nos quadrantes. Percebi esse fato analisando e comparando as respostas dadas aos exercícios 4, 6, 7, 8 e 9. No 4° exercício, 10 dos 13 grupos respondem que, no 1° quadrante, seno e cosseno variam de 0 a 1 (observando os segmentos ou o ponto P). Nesse exercício não importava se os grupos olhavam para os segmentos ou para o ponto, pois seno e cosseno são positivos no 1° quadrante. Já no 6° exercício, 4 grupos respondem a variação de 0 a 1 para seno e cosseno, porém cosseno no segundo quadrante varia de 0 a -1; no 7°, 2 grupos respondem que a variação é de 0 a 1, mas cosseno e seno variam de 0 a -1 no 3° quadrante; no 8°, 3 grupos não observaram o sinal negativo e no 9° exercício, 2 grupos atribuíram o valor 1 (positivo) para todos os valores de seno e cosseno solicitados.

Essas respostas dos alunos podem estar associadas ao fato de que, na figura dada, várias informações estavam aparecendo: o círculo trigonométrico de raio 1, o segmento OS e sua medida, o segmento OC e sua medida, o triângulo OCP, o ponto P e suas coordenadas e o ângulo AÔP e sua medida em graus. Os alunos tinham que distinguir as informações em cada exercício conforme o que estava sendo perguntado ou relacionar duas, três ou mais informações para responder ao exercício. Esses procedimentos não são triviais considerando-se que, em geral, os alunos resolvem exercícios em que não há necessidade de escolher as informações pertinentes à pergunta, essas informações já estão explícitas no enunciado ou na figura. Ainda deve-se considerar que solicitar comparações entre dados matemáticos também pode ser complicado para os alunos, na medida em que estão acostumados, de acordo com minhas experiências, com exercícios matemáticos cujos enunciados solicitam: calcular, efetuar ou resolver ao invés de observar, comparar e analisar. Essa dificuldade relaciona-se novamente com a ideia de contrato didático: "para resolver um problema é preciso encontrar os dados no seu enunciado. Nele devem constar todos os dados necessários e não deve haver nada de supérfluo" (SILVA, p. 51, 1999).

Com relação aos avanços obtidos pelos grupos nessa atividade, destaco:

a) dos 13 grupos, apenas 1 não conseguiu identificar os lados do triângulo retângulo corretamente para o cálculo do seno e do cosseno no exercício 3, e 11 desses grupos calcularam corretamente seno e cosseno no triângulo. Aqui observo que as dificuldades identificadas nas atividades iniciais parecem ter sido superadas pela maioria dos grupos.

b) mesmo os grupos apresentando dificuldades em observar os sinais de seno e de cosseno (comentado no item *c* anteriormente), observo que nos exercícios 10, 11 e 12 a maioria dos grupos percebeu as mudanças de sinais. No exercício 10, que pedia para avaliar como verdadeira ou falsa as igualdades *sen* 30° = 0,5 e *sen* 210° = -0,5 e justificar a resposta, 11 grupos responderam que eram verdadeiras. Nos 11° e 12° exercícios, os quais pediam para identificar os quadrantes positivos e negativos para seno e cosseno respectivamente, 9 grupos identificaram corretamente os sinais para seno e 10, para cosseno. Destaco que os grupos que não estavam observando o sinal negativo nos exercícios anteriores incluíram-se nos grupos que acertaram ou que identificaram o sinal negativo em apenas um quadrante, ou seja, perceberam a possibilidade de ter-se valores negativos para o seno e o cosseno.

Não tive oportunidade de dar um retorno sobre as resoluções da atividade 5 para os alunos, porém foi feita uma aula de revisão (no último dia de aula com a turma) sobre os pontos importantes e sobre os problemas que foram observados nas resoluções das atividades anteriores. Essa aula de retomada foi a conclusão da primeira etapa da experiência didática. Após minha saída da escola, a turma continuou estudando os conteúdos de Trigonometria da forma mais usual, sem a utilização do GeoGebra.

Para a realização de uma avaliação dessa primeira etapa da experiência, separarei os grupos em três categorias conforme o desenvolvimento dos conhecimentos abordados nas atividades. A tabela 36 mostra os conhecimentos que busquei desenvolver em cada uma delas.

Atividade 1	Triângulo retângulo (identificação de lados e de ângulos). Razão. Ângulo (ângulos agudos, ângulo reto, soma de ângulos internos, relação entre lados e ângulos). Semelhança. Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Construir triângulos retângulos a partir de suas propriedades. Conhecer, manipular e utilizar as ferramentas do programa.
Atividade 2	Identificar a razão trigonométrica a ser utilizada de acordo com as informações dadas no problema. Aplicar as razões trigonométricas na resolução dos problemas. Obter os valores de seno, cosseno ou tangente do ângulo. Resolver os problemas. Estabelecer comparações.
Atividade 3	Construir o círculo trigonométrico. Caracterizar o círculo trigonométrico. Observar a variação do ângulo central AÔP. Compreender ângulos congruentes (maiores do que 360° e menores do que 0°). Discutir as limitações do programa.
Atividade 4	Ângulos no círculo trigonométrico. Arcos. Relacionar ângulos medidos em graus e arcos medidos em radianos.
Atividade 5	Triângulo retângulo. Seno e cosseno dados pelas coordenadas do ponto P no círculo trigonométrico. Análise da variação dos valores de seno e cosseno em cada quadrante.

Tabela 36: Conhecimentos abordados nas atividades da 1ª etapa da experiência.

Na primeira categoria, estão os grupos que mostraram ter compreendido os conceitos abordados ao longo da experiência; na segunda categoria, estão os grupos que mostraram ter compreendido parte dos conceitos abordados; na terceira categoria, estão os grupos que mostraram não ter compreendido a maior parte dos conceitos abordados nas atividades.

1ª) Os grupos B, D, G, N, O e P conseguiram compreender os conceitos abordados ao longo da experiência de ensino.

Por exemplo, o grupo G desenvolveu os conceitos de razão trigonométrica: calculou corretamente 14 das 18 razões pedidas na atividade 1, mas em 4 razões, errou a identificação dos lados do triângulo retângulo de acordo com o ângulo de referência. Porém, na atividade 2, conseguiu identificar todas as razões trigonométricas a serem utilizadas na resolução dos problemas de aplicação e identificou os lados dos triângulos retângulos corretamente nas resoluções. Na atividade 1, observou corretamente a variação dos lados dos triângulos retângulos semelhantes, enquanto os ângulos permaneciam com as mesmas medidas; construiu corretamente os triângulos retângulos conforme o roteiro indicado. Na atividade 3, o grupo conseguiu observar a variação dos ângulos em cada quadrante do círculo trigonométrico e compreendeu o conceito de ângulos maiores do que 360° ou menores do que 0°. Na atividade 4, compreendeu a noção de arco medido em radianos, identificando corretamente o quadrante em que fica a extremidade final dos arcos indicados e estabelecendo corretamente as relações entre os ângulos medidos em graus e os arcos medidos em radianos. O grupo não entregou a atividade 5.

2ª) Os grupos H, I, K, L, S, R e U conseguiram compreender parte dos conceitos abordados.

Por exemplo, o grupo I, na atividade 1, não conseguiu calcular todas as razões trigonométricas, confundindo-se na identificação dos lados do triângulo para o cálculo de cosseno e confundindo-se quando houve troca do ângulo de referência, portanto, nesse momento da experiência, os conceitos de razão trigonométrica, de triângulo retângulo e de ângulo não estavam bem organizados. O grupo também não conseguiu realizar as duas construções de triângulos retângulos. Na atividade 2, o grupo consegue resolver corretamente os dois primeiros problemas propostos, identificando as razões a serem utilizadas e identificando os lados de acordo com os ângulos de referência. Porém, o grupo não conseguiu resolver os dois últimos problemas, deixando-os em branco. Na atividade 3, o grupo conseguiu construir e caracterizar circulo trigonométrico, observar a variação dos ângulos nos quadrantes e conseguiu marcar os ângulos congruentes (maiores do que 360° e menores do que 0°), explicando o procedimento realizado. Contudo, na atividade 4, não conseguiu identificar os quadrantes onde estariam as extremidades finais dos arcos indicados, medidos em radianos, inclusive considerou que o arco de 7 radianos não poderia ser marcado, pois "não completa". Observei então que o conceito de ângulo ou de arco com medida maior do que uma volta ainda não tinha sido bem compreendido. Na atividade 5, o grupo consegue calcular as razões no triângulo retângulo, consegue observar corretamente a variação de seno e cosseno nos quadrantes, inclusive observando os sinais, calcula os valores de seno e cosseno para ângulos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.

3ª) Os grupos A, C, E, F, J, M, Q e T não conseguiram compreender a maior parte dos conceitos abordados nas atividades. O grupo A permaneceu com dificuldades ao longo de todas as atividades. Na atividade 1, não observa a propriedade da semelhança de triângulos de que os lados variam proporcionalmente, enquanto os ângulos não se alteram. Teve dificuldade em identificar os lados quando se mudou o ângulo de referência. Calculou corretamente 9 das 18 razões solicitadas. Construiu corretamente um dos triângulos retângulos, mas não construiu o outro. Não compreendeu que o exercício 8 era apenas para ser lido, completou as definições apresentadas com valores. Na atividade 2, o grupo não conseguiu resolver nenhum dos problemas apresentados, não identificando nenhuma das razões trigonométricas a serem utilizadas. Na atividade 3, não identificou a variação dos ângulos em cada quadrante, mas respondeu corretamente às questões sobre ângulos côngruos. Na atividade 4, não compreendeu a ideia de arco e medida de arco. Na atividade 5, não conseguiu identificar a hipotenusa do triângulo retângulo, não conseguiu calcular seno e cosseno no triângulo retângulo, concluiu que seno e cosseno não variam no círculo trigonométrico e não conseguiu observar os valores de seno e de cosseno dos ângulos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.

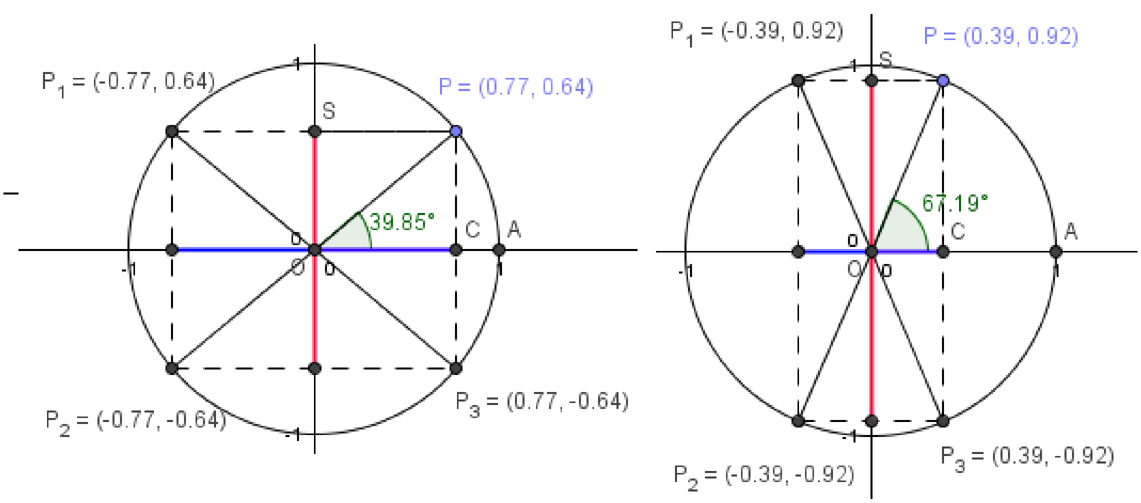
Nessa terceira categoria, foram incluídos os grupos que não entregaram duas ou mais atividades, portanto não puderam ser avaliados de maneira precisa quanto ao seu crescimento com relação ao aprendizado. Os grupos E e M não entregaram 2 atividades cada um e os grupos F e T não entregaram 3 atividades.

A identificação dessas categorias permitiu observar que para alguns grupos seria necessária a continuação das atividades enfocando a retomada de conceitos, oportunizando assim novas situações de aprendizagem para superação dessas incompreensões que persistiram ao longo da experiência.

4.8 SIMETRIAS

4.8.1 Descrição da atividade 6 e seus objetivos

A atividade 6 era composta por uma construção pronta e 5 exercícios. Nessa construção, pontos P, P_1, P_2 e P_3 eram marcados sobre o círculo trigonométrico, segmentos OS e OC apareciam destacados sobre os eixos e também era marcado o ângulo AÔP, como pode ser visto na figura 77(a). Nessa construção, o único ponto que poderia ser movimentado livremente era o ponto P, todos os outros movimentavam-se a partir do movimento de P, pois foram construídos como simétricos uns dos outros: P_1 é simétrico a P com relação ao eixo vertical, P_2 é simétrico a P em relação à origem e P_3 é simétrico a P com relação ao eixo horizontal. Na figura 77(b), podemos ver a nova posição dos pontos após movimento do ponto P.



(a) (b)

Figura 77: Construção dada aos alunos na atividade 6 e movimentação do ponto P.

Nessa construção, o ponto P pode ser associado à variável independente de uma função, enquanto os pontos P_1, P_2 e P_3 podem ser associados à variável dependente. Assim como o ponto P pode ser associado à variável independente, enquanto os ângulos $A\hat{O}P_1$, $A\hat{O}P_2$ ou $A\hat{O}P_3$, à variável dependente.

O 1° exercício pedia apenas que os alunos movimentassem o ponto P sobre o círculo e observassem as relações entre os pontos marcados. Também apresentava aos alunos os nomes das simetrias existentes entre os pontos. Aqui os alunos não precisavam registrar nenhuma conclusão. No 2° exercício, os alunos também não precisavam registrar nenhuma resposta, bastava que posicionassem o ponto P no primeiro quadrante. Esses dois enunciados podem ser observados na figura 78.

1. inicialmente, apenas movimente o ponto P sobre o círculo trigonométrico e
observe as relações entre os pontos P's:
Os pontos P e P_1 são simétricos em relação ao eixo y.
P e P_3 são simétricos em relação ao eixo x.
P e P_2 são simétricos em relação à origem.

2. Fixe o ponto P no primeiro quadrante (não mexa mais no ponto por enquanto).

Figura 78: Enunciados dos exercícios 1 e 2.

O 3° exercício pedia que os alunos obtivessem as medidas dos ângulos AÔP, $A\hat{O}P_1$, $A\hat{O}P_2$ e $A\hat{O}P_3$. Seu enunciado pode ser visto na figura 79.

3. Calcule e complete com as medidas (positivas) dos ângulos tomados
no sentido anti-horário:
med(AÔP) =
med($A\hat{O}P_1$)=
med($A\hat{O}P_2$) =
med($A\hat{O}P_3$)=

Figura 79: Enunciado do 3° exercício.

O 4° exercício era constituído de 10 itens ordenados de *a* até *j*. Cada item deveria ser julgado como verdadeiro ou falso. Os alunos não precisavam justificar sua resposta, pois respondiam apenas através da observação do movimento do ponto P sobre o círculo. Cada um dos itens pode ser visto na figura 80.

4. Classifique em verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Os senos dos ângulos AÔP e AÔP_1 têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal. R:

b) Os senos dos ângulos AÔP e AÔP_2 têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal. R:

c) Os cossenos dos ângulos AÔP e AÔP_3 têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos. R:

d) Os cossenos dos ângulos AÔP e AÔP_2 têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos. R;

e) Os senos dos ângulos AÔP e AÔP_3 têm mesmo valor absoluto e sinais opostos. R:

f) Os cossenos dos ângulos AÔP e AÔP_1 têm o mesmo valor absoluto e sinais iguais. R:

g) sen 246,5 ° = - sen 66,5° R:

h) cos 317,49° = cos 42,51° R:

i) sen 148,12° = - sen 31,88° R:

j) cos 100,88° = - cos 79,12° R:

Figura 80: Enunciado do 4° exercício.

O 5° exercício era constituído por 6 itens ordenados de *a* até *f*. Nesse exercício, os alunos tinham que resolver as equações trigonométricas apresentadas através da observação das relações no círculo trigonométrico. O enunciado e as equações podem ser vistos na figura 81.

5. Resolva as equações trigonométricas abaixo. Para cada equação, obtenha todas as soluções possíveis considerando $0° \leq x < 360°$ ou $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\text{sen}x = \text{sen}45°$

R:

b) $\cos x = \cos 1$

R:

c) $\text{sen}\, x = -0,5$

R:

d) $\cos x = 0,7$

R:

e) $\text{sen}\, 2x = 0,4$

R:

f) $\cos 3x = -1$

R:

Figura 81: Enunciado do 5° exercício.

O objetivo geral dessa atividade era que os alunos observassem as simetrias entre os pontos em relação ao eixo *x*, ao eixo *y* e à origem e, consequentemente, a simetria entre os ângulos, e que fizessem uso dessas relações para compreender as igualdades entre os valores de seno para ângulos em quadrantes diferentes, o mesmo para cosseno. Esperava que no 3° exercício os estudantes conseguissem calcular as medidas dos ângulos $A\hat{O}P_1$, $A\hat{O}P_2$ e $A\hat{O}P_3$ utilizando o ângulo $A\hat{O}P$, os ângulos de 180º ou 360º e as noções de simetria. O objetivo do 4° exercício era que os estudantes observassem e avaliassem se e quando os valores de seno ou cosseno para ângulos em diferentes quadrantes têm o mesmo valor absoluto e sinais iguais ou opostos. Pretendia com esse exercício também desenvolver as reduções dos ângulos ao primeiro quadrante de uma forma mais dinâmica, enfocando as simetrias e não as fórmulas de redução comumente apresentadas aos alunos. O 5° exercício introduziu as noções básicas sobre resolução de equações trigonométricas, enfocando o significado da incógnita *x* no círculo trigonométrico. O 5° exercício também teve como objetivo que os alunos resolvessem as equações utilizando as unidades de medida grau ou radiano.

4.8.2 A realização da atividade 6 pelos alunos

A atividade 6 foi a primeira a ser realizada com o grupo reduzido de alunos, ou seja, nesse ponto, iniciou-se a segunda etapa da pesquisa. Essa atividade foi realizada por 7 alunos, sendo que duas duplas foram formadas e três alunos trabalharam individualmente. Devido a essa nova formação dos grupos de trabalho, a identificação dos mesmos passará a ser feita como: grupo I, grupo II, grupo III, grupo IV e grupo V. A apresentação da análise das respostas dadas pelos grupos também será modificada. Será apresentada por grupo e não mais por exercício de cada atividade como foi feito até a atividade 5. Essa mudança na análise foi considerada pertinente, uma vez que, com o número reduzido de participantes, o desempenho de cada grupo poderia ser analisado ao longo das atividades e em um só momento, ao invés de se intercalar, na análise, as respostas de cada grupo.

O grupo I foi formado por um aluno do grupo D. Esse grupo respondeu corretamente ao 3° exercício, o qual pedia para, após fixar o ponto P no 1° quadrante, obter os valores dos ângulos simétricos ao AÔP. No 4° exercício, onde os alunos deviam classificar como verdadeiras ou falsas as afirmativas, o grupo errou somente um dos itens, provavelmente, por ser o primeiro que abordou o cosseno (os cossenos dos ângulos AÔP e AÔP_3 têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos). Respondeu como se fosse para seno, ou seja, que a afirmação seria verdadeira, porém é falsa, pois no 1° e no 4° quadrante cosseno tem sinais iguais. Os itens seguintes, sobre cosseno ou seno, estavam corretos, aparentemente percebeu a diferença entre as afirmativas sobre seno e as afirmativas sobre cosseno.

O 5° exercício pedia que os alunos resolvessem as equações trigonométricas através do círculo. Ele foi resolvido corretamente pelo grupo I até o item *d*, porém nos itens *e* e *f* (equações $sen\ 2x = 0{,}4$ e $cos\ 3x = -1$), o grupo respondeu, respectivamente, "0,2 radianos//12° e 2,94 radianos//168,5°" e "0,34 radianos//19,39° e 2,8 radianos //160,53°". O grupo I não seguiu o caminho esperado de marcar um arco de comprimento 0,4, no sentido anti-horário no item *e*, e um arco de comprimento 1, no sentido horário, no item *f*, tomar os ângulos correspondentes e dividir esses ângulos por 2 (item *e*) e por 3 (item *f*). As respostas mostram que o grupo optou, no item *e*, por dividir o número 0,4 por 2, marcar no círculo trigonométrico o seno igual a 0,2 e observar a medida do arco em radianos e do ângulo em graus no 1° quadrante e no 2° quadrante. O grupo fez o mesmo para o item *f*. Na figura 82(a), feita pela professora, pode-se observar o caminho seguido pelo grupo: posicionou o ponto P de modo a ter a segunda coordenada, correspondente ao seno, com valor 0,2; o arco ficou também com medida 0,2 radianos e o ângulo correspondente ficou igual a 11,68°, o qual foi arredondado para 12°. Na figura 82(b), observa-se a resposta obtida no segundo quadrante: o ponto P também apresenta o valor para seno igual a 0,2, o arco medindo 2,94 radianos e o ângulo medindo 168,5°.

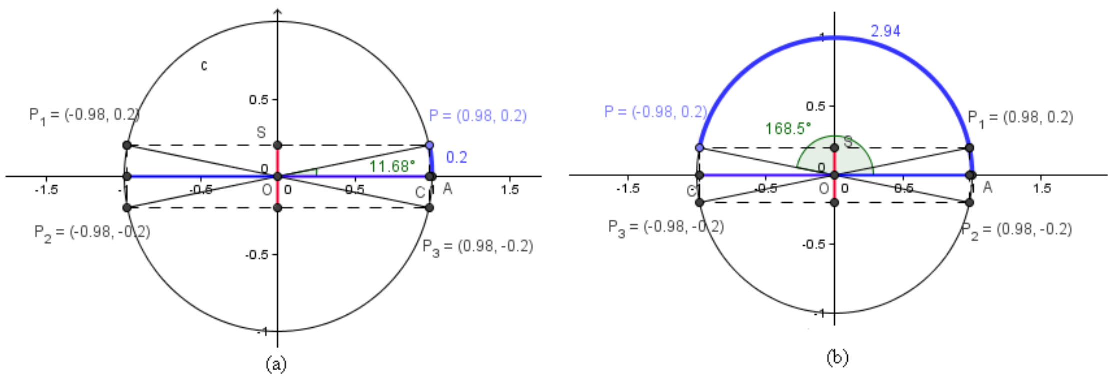


Figura 82: Resposta do grupo I ao item *e* do 5° exercício.

A figura 83, também feita pela professora, ilustra o raciocínio análogo utilizado para a resolução do item *f*. Em 83(a) temos o ponto P = (0,94; 0,33), o arco de 0,34 radianos e o ângulo de 19,39°. Em 83(b) temos o ponto P = (-0,94; 0,33), o arco de 2,8 radianos e o ângulo de 160,53°. Isto é, o grupo tentou resolver a equação *cos* 3*x* = -1 como se fosse equivalente a *sen x* = 1/3.

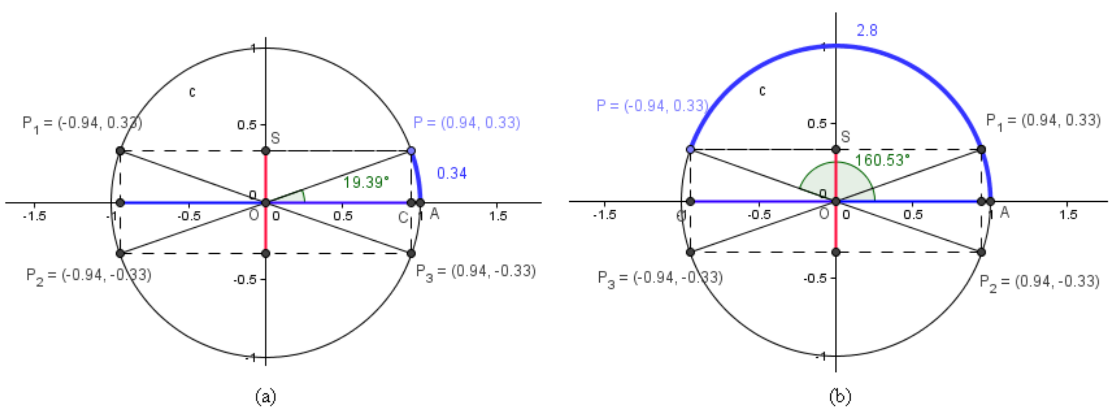


Figura 83: Resposta do grupo I ao item *f*.

Esse procedimento na resolução do 5° exercício evidenciou a utilização do teorema-em-ação: se $sen\ ax = b$ então $sen\ x = \dfrac{b}{a}$, com $a \neq 0$. Esse teorema indica um tratamento linear da razão trigonométrica, como uma generalização do procedimento de resolução de equações do tipo $ax^n = b$, ou $x^n = \frac{b}{a}$, com $a \neq 0$. É um teorema falso, porém frequentemente utilizado por alguns alunos de Ensino Médio; seu uso está associado ao hábito de simplificar o processo de resolução de uma equação pensando em "passar para o outro lado" da igualdade o valor que está multiplicando a incógnita.

O tratamento linear aplicado a situações matemáticas não-lineares tem sido investigado por alguns pesquisadores, entre eles pode-se citar Villarreal, Esteley e Alagia (2005). Os autores afirmam que a aplicação do tratamento linear a contextos não-lineares aparece tanto nas resoluções de problemas realizadas por estudantes de nível médio, como por estudantes de nível superior, e não é, necessariamente, consciente.

O grupo II foi formado por um aluno do grupo L e um do grupo S. O grupo realizou o 3° exercício, que pedia para calcular os ângulos simétricos ao ângulo AÔP do primeiro quadrante. O diálogo abaixo mostra o tipo de raciocínio que o grupo II estava usando inicialmente para tentar calcular o ângulo AÔP_1 do segundo quadrante e como foram esclarecidas as dúvidas pelo grupo I, que participou do diálogo, e pela professora. O aluno que compõe o grupo I será identificado como Marcos, os dois alunos que compõem o grupo II serão identificados como Carlos e Otávio:

Carlos: Sora, como é que eu faço essa aqui, a três?

Professora: Tu fixou um ângulo de quantos graus?

Carlos: 52, 92°.

Professora: Então a primeira coisa que tu vai escrever é a medida do AÔP. O *O* é sempre esse ponto central, então o ângulo AÔP é direto.

Carlos: Tá, 52,92°

Professora: Agora, mantém ele fixo [o ponto P] na mesma posição e tu vais medir o ângulo AÔP_1.

Carlos: Tá, é esse aqui.

Professora: Isso. Como é que tu pode fazer pra calcular esse ângulo?

Otávio: Levo o ponto P até o ponto P_1.

Professora: Mas sem mexer no ponto P. O ponto P tem que estar fixo.

Carlos: AÔP_1...não é o dobro?

Otávio: É, tu dobra!

Professora: Não, ele não vai dobrar, porque se vocês dobrarem é como se vocês dissessem que o ângulo PÔP_1 tem a mesma medida [que o AÔP]. [Professora mostra na tela os dois ângulos para os alunos compararem as medidas e verem que são diferentes, conforme pode ser visto na figura 84].

Carlos: Sora, aqui é 90° graus.

Professora: Certo.

Carlos: Aqui diz que P e P_1 são simétricos em relação ao eixo y .

Professora: Correto.

Carlos: Então eles estão a uma mesma distância um do outro.

Professora: Isso, eles estão a uma mesma distância.

Carlos: Então se aqui tem 52,92°, aqui também vai ter.

Professora: Correto.

Otávio: Daí, 90° mais 52...

Marcos: Não, daí tu diminui 52,92° de 90° e soma o que sobrar com mais 90° daqui.

Professora: Pode ser, essa é uma alternativa de resolução.

Marcos: Tá.

Professora: Outra alternativa que vocês têm....vocês podem resolver das duas formas...mas outra ideia é vocês olharem o ângulo total do primeiro e do segundo quadrantes, juntos eles medem quanto?

Otávio: 180°.

Professora: Certo. O Marcos viu que esse ângulo aqui é igual ao ângulo de 52, 92° . Então se vocês pegarem o 180° e tirarem essa parte vai sobrar o ângulo $A\hat{O}P_1$. Vocês conseguem enxergar isso?

Carlos: Sim, sim.

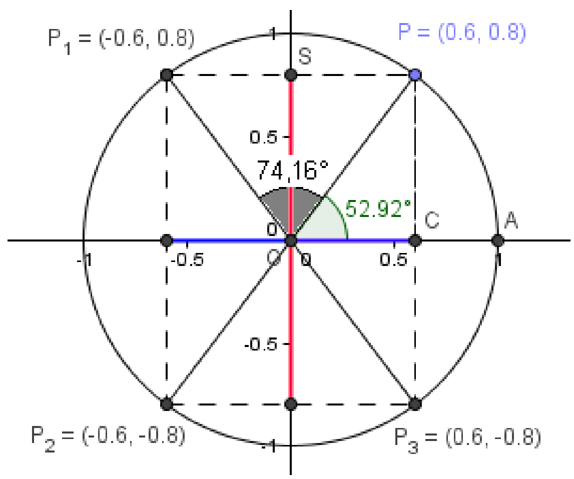


Figura 84: Ângulos $A\hat{O}P$ e $P\hat{O}P_1$ com medidas diferentes.

Destaco no diálogo acima que Marcos, do grupo I, utilizou um teorema-em-ação que se refere ao cálculo do ângulo simétrico a $A\hat{O}P$ no segundo quadrante: $A\hat{O}P_1 = 90° - A\hat{O}P + 90°$. Esse teorema é verdadeiro e mostra que o aluno consegue identificar, compor e decompor ângulos.

O grupo II classificou corretamente como verdadeiras ou falsas todas as afirmativas do 4° exercício, que abordavam as igualdades entre senos ou cossenos de ângulos em quadrantes diferentes.

No item *a* do 5° exercício, os alunos tinham que encontrar a segunda solução da equação *sen x* = *sen* 45°, para $0° \leq x < 360°$. O grupo II não observou a medida do ângulo no segundo quadrante, respondeu apenas "0,79 radianos", ou seja, observou a medida do arco correspondente ao ângulo de 45°. Já no item *b*, que pedia a solução da equação *cos x* = *cos* 1, para $0 \leq x < 2\pi$, o grupo além de escrever uma aproximação correta em radianos, também respondeu em graus: "5,8 r/ 303°". Esse procedimento mostra que o grupo estava conseguindo estabelecer relações entre ângulos e arcos. O grupo também resolveu corretamente a próxima equação (*sen x* = -0,5), observando as duas soluções (no 3° e no 4° quadrante), e deu a resposta nas unidades grau e radiano. Já na equação do item *d* (*cos x* = 0,7) o grupo observou o valor de *x* somente no primeiro quadrante e deu a resposta em grau e radiano. As respostas dadas aos dois últimos itens são iguais às respostas dadas pelo grupo I. O raciocínio utilizado pelos alunos para resolverem as equações *sen* 2*x* = 0,4 e *cos* 3*x* = -1 foi confirmado na aula seguinte, como mostra o seguinte diálogo:

Carlos: A última eu não entendi o que era para fazer.

Professora: Tá. Os itens iniciais estavam ok. Eu queria tentar entender como é que vocês resolveram os itens *e* e *f*, se vocês lembram.

Carlos: Aquele dia a gente pegou o arco e botou...a gente colocou o 0,4 em radianos.

Professora: 0,4 como radianos...mostra como é que tu fez.

Carlos: Deixa eu ver 0,2 radianos...na verdade, a gente pegou o 0,4 em radianos daí é seno de 2*x*...a gente dividiu por dois.

Professora: Pegaram o 0,4 e dividiram por dois?

Carlos: Daí a gente botou que 0,2 radianos equivalem a 12°.

Professora: E no *f*?

Carlos: Foi a mesma coisa...- 1. Tá, 3*x*...igual ao ângulo de 0,3. Agente dividiu -1 por 3.

Professora: Então vocês dividiram -1 por três e acharam um arco de aproximadamente 0,34 e viram qual era o ângulo?

Carlos: É. Como fica o radiano negativo?

Na sequência do diálogo, foi explicado aos alunos que o valor do seno era igual a 0,4 na primeira equação, portanto deveria ser visto o valor 0,4 na segunda coordenada do ponto P, e que a segunda equação referia-se a cosseno, e também se chamou a atenção para a coordenada do ponto P. Discuti com os alunos que um arco cujo radiano é negativo é marcado no sentido horário no círculo trigonométrico, porém na equação $cos\ 3x = -1$ esse valor -1 não é a medida do arco, mas sim o valor do cosseno.

O procedimento do grupo II para a resolução dos últimos itens do exercício confirmou o que havia sido comentado na análise da resposta do grupo I, isto é, que são frequentes os casos de alunos que se utilizam do falso teorema-em-ação: se $sen\ ax = b$ então $sen\ x = \frac{b}{a}$, considerando essas equações trigonométricas como lineares.

O grupo III foi formado por um aluno que pertencia ao grupo R. O grupo III realizou toda a atividade corretamente, exceto pelo item *f* do 5° exercício. Durante a realização da atividade, o grupo mostrou que estava entendendo os conceitos sobre simetrias abordados na atividade. O diálogo seguinte mostra que o grupo consegue perceber as simetrias entre os pontos P, P_1, P_2 e P_3 claramente e que consegue articular diferentes formas de pensar como calcular os ângulos simétricos. Inclusive, a escolha da medida 45° para o ângulo AÔP foi feita de forma intencional, para facilitar o cálculo mental ou simplificar o problema. O raciocínio verbalizado sugere que o grupo provavelmente conseguiria calcular os ângulos simétricos, talvez com auxílio de lápis e papel, se a medida escolhida fosse outra.

Jonas: P e P_1 são simétricos em relação ao eixo *y*, isso quer dizer que têm a mesma distância? [aluno refere-se à distância do ponto P ao eixo *y* e do ponto P_1 ao eixo *y*].

Professora: Sim. Essa distância aqui é a mesma daqui.

Jonas: Então quer dizer que todos são simétricos a todos.

Professora: Sim, o P é simétrico ao P_3 em relação ao eixo *x*, depois P e P_1 são simétricos em relação ao *y* e P e o P_2 são simétricos em relação à origem.

Jonas: Então P_1 e P_3 são iguais.

Professora: O P_1 e o P_3 são simétricos em relação à origem.

Jonas: Então isso aqui [cálculo da medida do ângulo A$\hat{O}P_1$], eu tenho que fazer 45° + 45° + 45° ou 180°- 45°?

Professora: Sim, como tu fixou um ângulo de 45° pode ser.

Jonas: Melhor do que complicar com um ângulo cheio de vírgula.

Observei a partir desse diálogo que Jonas utilizou-se de dois teoremas-em-ação referentes às simetrias. O primeiro deles foi: "se os ângulos formam um retângulo no círculo trigonométrico, então os quatro ângulos são simétricos entre si". Esse teorema-em-ação pôde ser observado a partir da fala de Jonas logo após ter observado a figura apresentada na atividade: "Todos são simétricos a todos". O segundo teorema-em-ação identificado referiu-se ao cálculo do ângulo simétrico a AÔP no 2° quadrante: $A\hat{O}P_1 = 180° - A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_1 = A\hat{O}P + A\hat{O}P + A\hat{O}P$. A primeira parte desse teorema-em-ação é verdadeira para qualquer ângulo AÔP do 1° quadrante; porém, a segunda parte, só é verdadeira se $A\hat{O}P = 45°$, valor escolhido pelo grupo.

Para o item *f* do 5° exercício, no qual o grupo tinha que resolver a equação $\cos 3x = -1$, no intervalo de $0 \leq x < 360°$, o aluno respondeu: "60° e 100,9°". A primeira parte da resposta indica que o aluno compreendeu o significado da equação, ou seja, encontrou o ângulo cujo cosseno vale -1 e depois dividiu esse ângulo por 3. A segunda parte, o valor 100,9°, parece não ter significado. O aluno foi questionado na aula seguinte sobre o que pensou e não soube explicar, inclusive parece considerar que para essa equação há apenas uma solução considerando-se $0° \leq x < 360°$, como pode ser observado no diálogo seguinte:

Professora: No item *f*, tu colocou duas respostas: 60° e 100,09°. Tu lembra porque tu colocou essas respostas?
Jonas: O de 60° eu lembro. Três vezes alguma coisa para dar 180°. Agora, como eu cheguei em 100°? Como é que eu cheguei em 100°?! ...Eu acho que eu viajei. Não me lembro.

Observamos aqui que Jonas faz uso de um teorema-em-ação que mostra a compreensão do procedimento que pode ser utilizado para a resolução da equação trigonométrica: se $\cos ax = -1$, então $ax = 180°$, logo $x = \dfrac{180°}{a}$. Esse teorema está implícito na fala: "O de 60° eu lembro. Três vezes alguma coisa para dar 180°".

O grupo IV foi formado pelas duas alunas do grupo O da primeira etapa da experiência. O grupo IV respondeu corretamente ao 3° exercício. O diálogo seguinte mostra o tipo de raciocínio que o grupo utilizou para calcular os ângulos simétricos.

Francisca: Prof. tá tudo errado aqui.
Professora: O que tá tudo errado?
Francisca: Tá, do $A\hat{O}P_1$, daí eu fiz 90°...não fiz 180° menos 39,91°, aí deu 140,09°. Aí eu fiz $A\hat{O}P_2$ pegando 180° mais 39,91°.
Professora: Correto.
Francisca: Aí esse aqui a gente fez 270° mais 39,91° deu errado, então fiz 360° menos 39,91° e deu certo.
Professora: Exatamente, é com o 360°. Por que gurias?

Francisca: É esse aqui...

Manuela: ...foi o que eu falei, tinha que dar 09 no final, porque o outro cálculo deu com 91.

Podemos notar que o grupo não estava utilizando diretamente a simetria entre os ângulos, porém estava analisando as possíveis respostas para o valor do ângulo, observando um padrão que decorre das simetrias: para o 2° e 3° quadrantes obtiveram 140,09° e 219,91°, então se no 1° quadrante o ângulo era de 39,91°, ele terminava em "91", logo o ângulo do quarto quadrante teria que terminar em "09". O grupo somou 270° mais 39,91° e observou que não dava final 09, sendo assim, eliminaram essa resposta e acabaram calculando corretamente 360° - 39,91°.

Nesse diálogo identifiquei a utilização do seguinte teorema-em-ação para o cálculo de ângulo simétrico no 4° quadrante: $A\hat{O}P_3 = 270° + A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_3 = 360° - A\hat{O}P$. Apenas a segunda parte do teorema é verdadeira e foi interessante o raciocínio utilizado pelo grupo para determinar qual dessas duas formas de calcular seria a correta: a comparação, comentada acima, das casas decimais das respostas possíveis. A partir dessa comparação, optaram pelo procedimento: $A\hat{O}P_3 = 360° - A\hat{O}P$. Essa comparação mostra que o grupo conseguiu resolver o problema a partir da observação de padrões nos valores.

No 4° exercício, erraram os itens *c* e *f*. O erro do grupo IV parece estar associado à não diferenciação entre seno e cosseno nas resoluções dos itens *a* ao *f*. Essa conclusão está baseada no fato de que, se se trocar cosseno por seno nos itens *c*, *d* e *f,* as afirmativas ficam todas corretas (isto pode ser visto analisando-se as respostas que constam na figura 85, onde o círculo foi acrescentado pela professora para melhor visualização dos ângulos).

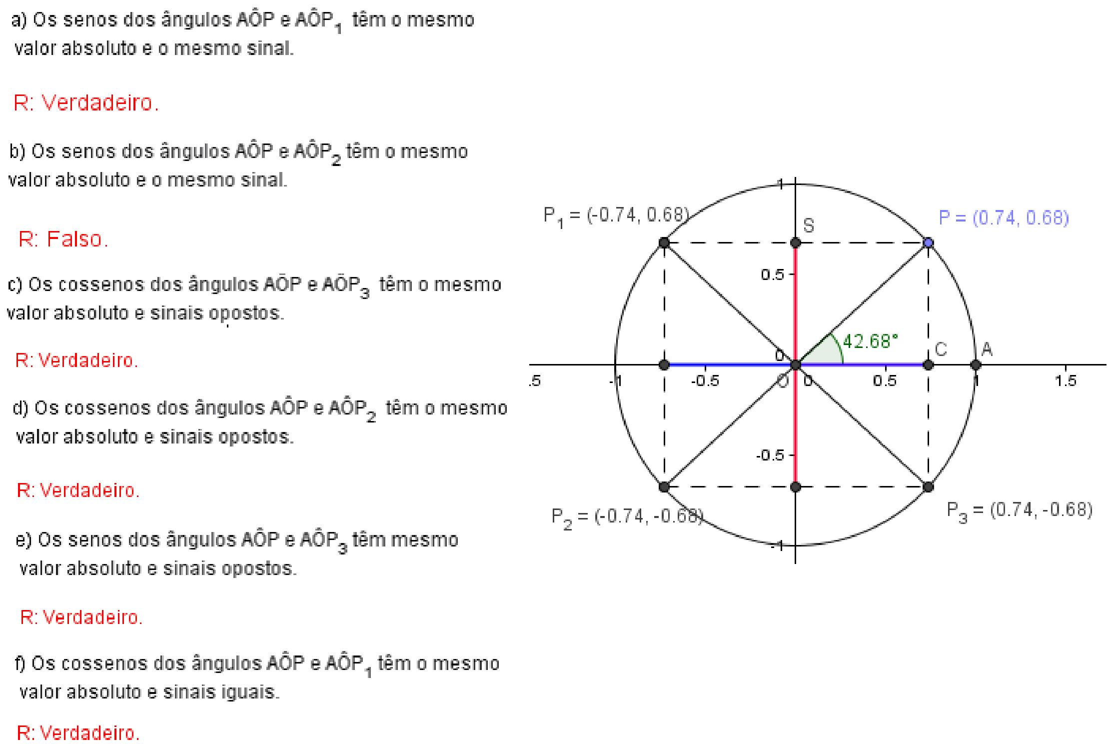


Figura 85: Resolução do 4° exercício pelo grupo IV.

Os itens *g* ao *j*, do mesmo exercício, foram respondidos corretamente pelo grupo, inclusive para cosseno. O que pode ter ajudado na resolução desses itens foi a mudança no formato das afirmativas, isto é, passou-se de frases escritas por extenso para igualdades numéricas. Podemos observar, por exemplo, o item *h*: $cos\ 317{,}49° = cos\ 42{,}51°$.

No 5° exercício, o grupo IV resolveu corretamente todos os itens, exceto o *b*, como pode ser observado na figura 86. No item b, o grupo parece ter interpretado a equação como $cos\ x = 1$, e desse modo teria chegado ao valor 0° ou 0,01°, como foi aproximado pelo grupo.

a) senx= sen45°

R: 135°

b) cos x = cos 1

R:0,01

c) sen x = - 0,5

R:210° e 330.18°

d) cos x = 0,7

R:45,62° e 314°

e) sen 2x = 0,4

R: x=11,72° e 78,28°

f) cos 3x = - 1

R: x =60°

Figura 86: Resolução do 5° exercício pelo grupo IV.

Na resolução do item *b*, identificou-se o teorema-em-ação: resolver $cos\ x = cos\ 1$ é o mesmo que resolver $cos\ x = 1$. Esse teorema-em-ação é falso, uma vez que as soluções da equação dada, para $0 \leq x < 2\pi$, são o arco de 1 rad e o arco simétrico a ele no 2° quadrante, isto é, π - 1; a resposta obtida pelo grupo é uma aproximação de um ângulo, ou arco, cujo cosseno vale 1. Não ficou claro se o grupo respondeu 0,01 em radianos ou quis responder em graus, mas esqueceu o símbolo: °.

O grupo V realizou a atividade até o 4° exercício, sendo que resolveu corretamente o 3° e errou apenas 2 dos 10 itens do 4° exercício. O aspecto que destaco na realização da atividade pelo grupo foi a forma como entendeu a simetria inicialmente. Observe o diálogo abaixo.

Professora: Qual relação tem entre o P e o P_3?

Leandro: Um é negativo em relação ao outro. É um espelho.

Professora: Isso, eles têm uma posição espelhada um em relação ao outro. Essa posição espelhada é em relação a quem: ao eixo *y* ou ao *x*?

Leandro: [Aluno aponta para o eixo *y*].

Professora: Como é que tu estás enxergando que é em relação a *y*?
Leandro: Esse é o negativo desse [Aluno aponta para os segmentos vermelhos OS marcados sobre *y*]
Professora: Ok. Quando a gente usa essa ideia do espelho que tu disseste, é como se a gente estivesse colocando o espelho sobre o eixo *x*. Olha aqui, se eu colocar [o espelho] nessa posição, eu vou ver o ponto refletido ali em baixo [no 4° quadrante]. Então essa ideia é a reflexão com relação ao eixo *x*.

Fica evidente que Leandro observa a simetria existente entre os pontos P e P_3, respectivamente no 1° e 4° quadrantes, mas pensa que essa simetria é relativa ao eixo *y* justamente por estar comparando as alturas.

4.8.3 Comentários sobre a atividade 6

A atividade 6 foi a primeira a ser realizada com o grupo menor de alunos. Observou-se que a redução no número de participantes facilitou o acompanhamento da realização da atividade. Pude sentar com cada um dos grupos, acompanhar e participar dos diálogos por mais tempo, observando melhor e registrando as ideias que foram sendo expressas durante a resolução dos exercícios, mas que não foram escritas nas respostas. Com a turma toda (45 alunos) não havia sido possível acompanhar cada pequeno grupo por um tempo mais significativo, uma vez que vários grupos solicitavam auxílio ao mesmo tempo.

A atividade 6 foi uma situação em que as dificuldades apresentadas na atividade 5 foram retomadas. Na atividade 6, enfatizei a utilização das coordenadas dos pontos para observação dos valores de seno e de cosseno, e por isso as medidas dos segmentos OS e OC permaneceram ocultas. Essas medidas tinham sido utilizadas pelos alunos para a obtenção dos valores de seno e cosseno e, por isso, alguns deles haviam obtido somente valores positivos para seno e cosseno na atividade anterior. Ao ocultar essas medidas, observei que os alunos conseguiram observar as coordenadas dos pontos para obter as informações pedidas nos exercícios.

Destaco nessa atividade a variedade de teoremas-em-ação utilizados pelos alunos para a obtenção dos ângulos simétricos:

1°) $A\hat{O}P_1 = 90° - A\hat{O}P + 90°$ (grupo I);
2°) $A\hat{O}P_1 = 180° - A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_1 = A\hat{O}P + A\hat{O}P + A\hat{O}P$ (grupo III);
3°) $A\hat{O}P_3 = 270° + A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_3 = 360° - A\hat{O}P$ *(grupo IV).*

Essa variedade de teoremas-em-ação demonstra que existem diferentes e interessantes estratégias de resolução de uma mesma situação ou de situações semelhantes. Essa atividade permitiu registrar essas estratégias e discutir com os alunos suas ideias. Observei também que a troca de informações entre os grupos enriqueceu os diálogos, que não ficaram restritos à mediação da professora. Essa cooperação entre os grupos foi considerada um aspecto fundamental para a compreensão dos conceitos abordados na atividade, uma vez que um aluno explica sua ideia para outro utilizando-se de uma mesma linguagem, a qual é diferente daquela utilizada pela professora.

Destaca-se na resolução da atividade o aparecimento do falso teorema-em-ação: se $sen\ ax = b$ então $sen\ x = \frac{b}{a}$, comentado anteriormente, que é utilizado por alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior, conforme pude observar em minhas experiências em sala de aula. Para a retomada e correção desse teorema-em-ação, o GeoGebra foi fundamental, pois permitiu à professora mostrar aos grupos a diferença entre marcar um arco de 0,4 radianos, observar o ângulo correspondente e dividir a medida do ângulo por dois (procedimento errado realizado por dois grupos para a resolução da equação $sen\ 2x = 0{,}4$) e posicionar o ponto P de tal forma que o seno seja 0,4, observar o ângulo correspondente e então dividí-lo por dois (procedimento correto). O GeoGebra também facilitou a visualização das outras possíveis soluções das equações apresentadas, pois é comum que o aluno encontre, por exemplo, uma solução de equação trigonométrica no 1° quadrante, porém não observa as outras soluções no 2°, no 3° ou no 4° quadrante.

Finalizo a análise dessa atividade enfatizando a facilidade com que os grupos deram suas respostas às equações tanto em radianos como em graus, indicando que a unidade radianos estava sendo, aos poucos, usada com naturalidade, ou seja, os alunos mostraram que estavam conseguindo observar a medida do arco em radianos e a medida do ângulo em graus ao mesmo tempo. Essa observação é importante, pois ela mostra que é possível que os alunos compreendam radianos sem precisarem recorrer ao cálculo de regra de três para sua transformação para graus.

4.9 RETOMANDO CONCEITOS: RADIANOS

4.9.1 Descrição da atividade 7 e seus objetivos

A atividade 7 tinha o objetivo de retomar com os alunos o significado dos cálculos de seno e cosseno de arcos medidos em radianos e também introduzir a associação de um segmento OP', marcado sobre o eixo *x*, com a mesma medida do arco AP. Essa associação deveria ser feita através da observação da abscissa do ponto P', que representa a medida do arco *AP*, ou através da observação da medida do segmento OP'. A atividade 7 era, portanto, uma preparação para a próxima atividade, que abordaria o estudo dos gráficos das funções seno e cosseno no plano cartesiano.

A atividade era composta por dois exercícios e uma construção. A construção era o círculo trigonométrico em que a medida do ângulo AÔP em graus não estava visível. Estavam marcados apenas o ponto A = (1, 0), o ponto P sobre o círculo e o arco AÔP. No 1° exercício, os alunos deveriam mover o ponto P sobre o círculo e completar os valores de seno e cosseno dos arcos cujas medidas eram dadas em radianos. O enunciado do 1° exercício, os itens para serem completados e a construção dada podem ser vistos na figura 87.

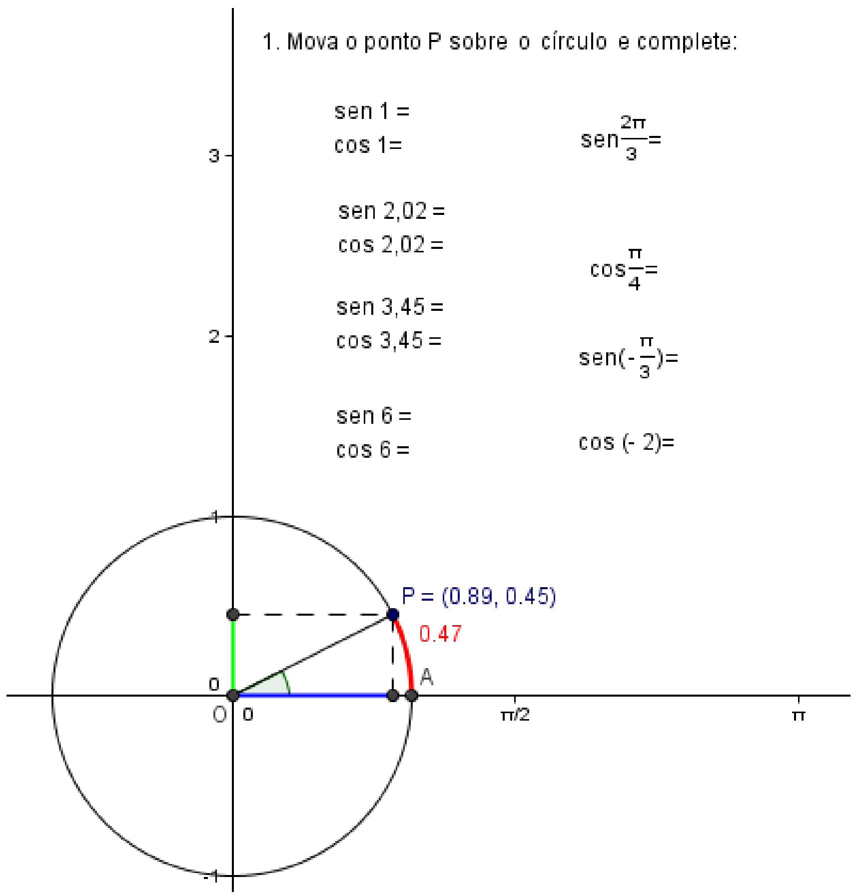


Figura 87: Parte inicial da atividade 7.

O 2° exercício pedia que os alunos exibissem a janela de Álgebra e clicassem sobre o ponto P' e sobre *b* para torná-los visíveis. "*b*" era o nome do segmento com extremos nos pontos O e P'. Os alunos deveriam mover o ponto P no círculo e observar que o ponto P' movia-se de forma dependente de P. O exercício perguntava então qual era a relação que existia entre a medida do arco AP e a medida do segmento OP'. Na atividade, o eixo horizontal foi graduado de $\frac{\pi}{2}$ em $\frac{\pi}{2}$. Na figura 88, podemos ver o enunciado do 2° exercício e o círculo com o ponto P' e o segmento *b* exibidos.

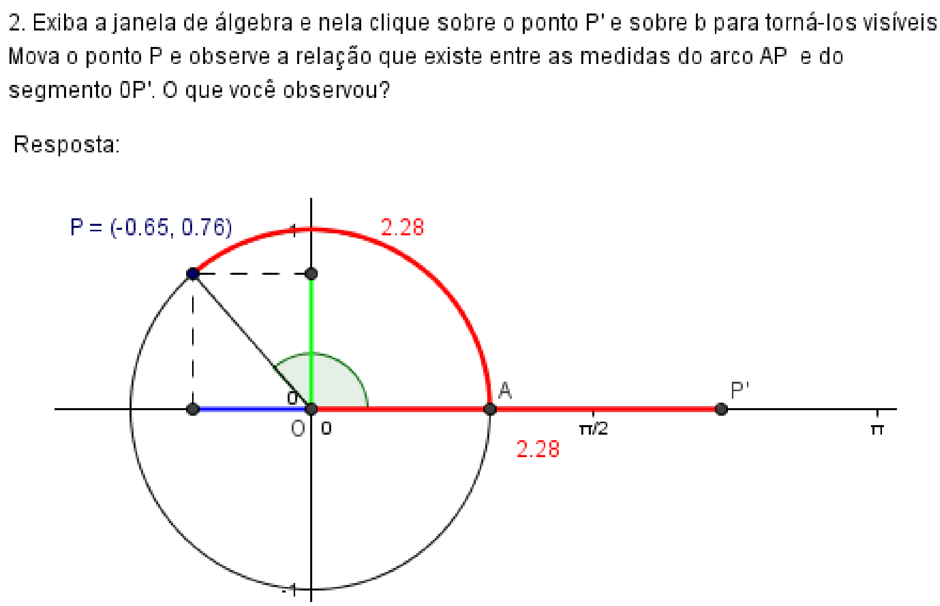


Figura 88: Enunciado do 2° exercício e ponto P' e segmento *b* sobre o eixo *x*.

4.9.2 A realização da atividade 7 pelos alunos

O grupo I realizou toda a atividade corretamente. No 2° exercício, por exemplo, concluiu que "Independente do movimento feito, a medida do arco AP será igual à medida do segmento OP'".

O grupo II também entregou a atividade resolvida corretamente, exceto por um erro de sinal em um dos itens que, aparentemente, foi um erro de atenção. Durante a realização da atividade, o grupo apresentou confusões entre o valor do seno de um arco dado em radianos e a medida do próprio arco. No diálogo abaixo, o grupo II mostra essa dúvida com relação ao *sen* 2,02 e *cos* 2,02 pedidos no exercício 1:

Carlos: Aqui no *sen* 2,02 a gente fez uma regra de três.

Professora: Como assim regra de três? Me explica melhor.

Carlos: Aqui não quer saber o *sen* 2,02 quantos radianos?

Professora: Como?

Carlos: 2,02 quer dizer que é o valor do seno?

Professora: Essa que é a ideia: 2,02 é a medida do arco medido em radianos.

Carlos: Então é aqui ó...[aluno marca no círculo trigonométrico um arco de medida 2,02]...é 0,9.

Professora: Isso. Então vocês têm que cuidar isso: vocês estão confundindo um arco medido em radianos com o valor do seno desse arco. Outra coisa, o seno de um arco teria como dar resultado maior do que 1? [professora vê a resposta dada ao primeiro item *sen* 1 = 1,57 e aproveita para questioná-los sobre isso]

Otávio: Não, o limite dele é 1.

Professora: Olha o que vocês responderam no item anterior.

Carlos: Mas não é aqui ó: 1? [aluno aponta para o valor 1 que aparece no eixo y]. Se colocar no 1, fica 1,57.

Professora: Então, de novo: aqui vocês colocaram o valor do arco como sendo 1,57 e o seno como sendo 1, mas é o contrário. Vocês têm que marcar um arco de medida 1 radiano e ver o seno correspondente.

Carlos: Tá, no caso, 90°.

Professora: Não, esse é o ângulo correspondente ao arco de 1,57 radianos. O que se quer em *sen* 1 é o seno de um arco de medida 1 radiano. A medida do arco é aquela em vermelho.

Carlos: Sim, mas tipo em sen 1, não é só colocar a coordenada em 1?

Professora: Aí é que tá. O seno não é 1, o valor 1 que aparece ali é o arco em radianos. Marca um arco de 1 radiano.

Carlos: [aluno marca o arco].

Professora: Isso. Tu marcou o arco de 1 radiano e quer o seno de 1 radiano.

Carlos: Ah tá, é 0,84.

Otávio: Ah, agora entendi!

Observei nesse momento que o grupo II estava utilizando-se do seguinte teorema-em-ação: $sen\ \alpha$ é o mesmo que $sen = \alpha$, com α medido em radianos. Pude notar com esse teorema-em-ação que o grupo estava com dificuldades de diferenciar a medida do arco dada em radianos do valor do seno desse arco. Esse teorema-em-ação foi identificado através das falas: "Aqui não quer saber o *sen* 2,02 quantos radianos? 2,02 quer dizer que é o valor do seno?" e através da resposta: *sen* 1 = 1,57. Ao longo do diálogo com o grupo, os componentes percebem a diferença entre as expressões $sen\ \alpha = x$ e $sen\ x = \alpha$, sendo α um valor conhecido. Aproveitei esse momento de diálogo para discutir que senos e cossenos não assumem valores maiores do que 1, ou menores do que -1, pois o raio do círculo trigonométrico tem sempre 1 unidade de medida.

Para a resolução do último item do 1° exercício, Carlos estranha o sinal negativo em "*cos* (-2) =", porém Otávio (do mesmo grupo II) e Marcos (do grupo I) intervêm sugerindo duas resoluções possíveis:

Carlos: Cosseno do radiano -2?

Otávio: Mas é o arco. Pega o arco.

Carlos: Não entendi essa última.

Professora: O raciocínio que vocês vão usar é semelhante ao que vocês fizeram no item anterior [referindo-se ao *sen* (-π/3) resolvido corretamente pelo grupo].

Carlos: Sim, mas a gente tava vendo em radianos....É que não tem como dar negativo.

Otávio: Mas aqui a gente faz a mesma coisa com o 2. A gente transforma em -2, aí a gente pega o valor dele negativo, bota o menos. [Otávio mostra na tela o arco de medida 2 e aponta o seu simétrico em relação ao eixo *x*].

Marcos: Ou tu bota o quanto falta para atingir uma volta inteira.

Professora: Quanto falta para atingir uma volta inteira?

Marcos: Isso. Por exemplo, aqui ó. Bota o ponto P aqui, praticamente dá 6,28. Foi o que eu fiz pelo menos e diminuí o valor que pediu.

Professora: Isso. Também está certo.

...

Professora: Então o cosseno do -2 é...?

Otávio: -0,42.

Nesse diálogo observamos que Carlos, ao dizer "mas a gente tava vendo em radianos", considera que radianos aparece associado ao número π, que pode ser transformado rapidamente para graus (substituindo-se π por 180°) e aí está a maior facilidade em calcular *sen* (-π/3) do que *cos* (-2). Carlos comenta também que "não tem como dar negativo", há indícios de que consegue compreender um ângulo negativo medido em graus (marcado no sentido horário no círculo trigonométrico), porém não consegue fazer o mesmo raciocínio para um arco medindo -2 radianos (que também é marcado no sentido horário). Otávio explica ao colega utilizando a simetria: primeiro marca um arco de 2 radianos (sentido anti-horário), observa o valor correspondente para o cosseno e depois "transforma em -2" (indicando o arco simétrico com relação ao eixo *x*). Por sua vez, Marcos sugere outra resolução possível: marcar o arco de uma volta completa (aproximadamente 6,28) e diminuir 2, encontrando assim o arco de medida 4,28 radianos que é côngruo ao arco de -2 radianos.

Nessas intervenções dos colegas, identificaram-se dois teoremas-em-ação: se -2 é o simétrico do arco de medida 2 em relação ao eixo x, então $cos(-2) = cos(2)$, utilizado por Otávio, e se -2 é côngruo ao arco de medida 4,28 obtido por 6,28 - 2 = 4,28, então $cos(-2) = cos(4{,}28)$, utilizado por Marcos. Esses teoremas-em-ação mostram um avanço na compreensão desses ângulos pelos alunos. O diálogo entre os colegas evidencia a importância das trocas de conhecimentos entre eles, um explicando para o outro a maneira como conseguiu entender. A professora nesse momento estava mediando o diálogo e iria interferir apenas no caso de que algum teorema-em-ação falso fosse utilizado como explicação.

Com relação ao 2° exercício, a resposta dada pelo grupo II sobre o que eles observaram de relação entre o arco AP e o segmento OP' foi a seguinte: "A relação dos valores dos ângulos com as medidas em radianos. Quanto maior o ângulo, maior o valor em radianos de P'. Observamos que o valor de 180° equivale a 3,14 ou π radianos e que 360° é duas vezes maior que 180°, portanto seu valor em radianos também é o dobro: 6,28 ou 2π". Observa-se aqui que o grupo procura associar o comprimento do segmento ou do arco com os ângulos medidos em graus, ao invés de concluir apenas que o segmento OP' tem a mesma medida do arco AP em radianos.

O grupo III respondeu corretamente a maioria dos itens do 1° exercício. Errou os valores de $cos\frac{\pi}{4}$ e de $sen\frac{2\pi}{3}$, respondeu "$cos\frac{\pi}{4} = 0{,}77$", quando deveria ter respondido 0,707 aproximadamente, e respondeu "$sen\frac{2\pi}{3} = 0{,}95$", quando deveria ter respondido 0,866 aproximadamente. Uma explicação para essas respostas é que o grupo III transformou as medidas dadas em radianos para graus (45° e 120° respectivamente); novamente aparece a preferência em trabalhar com ângulos medidos em graus. Como as medidas em graus não estavam visíveis, posicionou o ponto P perto da metade do primeiro quadrante, para o primeiro item, e entre a metade do segundo quadrante e o ponto (0, 1) para o segundo item, como pode ser visto na figura 89, feita pela professora. Na figura 89(a), pode-se observar que a primeira coordenada do ponto, relativa ao cosseno, é 0,77. Na figura 89(b), a segunda coordenada, relativa ao seno, é 0,95. Portanto, pude concluir que, mesmo o grupo não tendo marcado o arco precisamente, ele tinha uma estimativa da medida desses arcos, e mais, o grupo sabia identificar seno e cosseno através das coordenadas do ponto P.

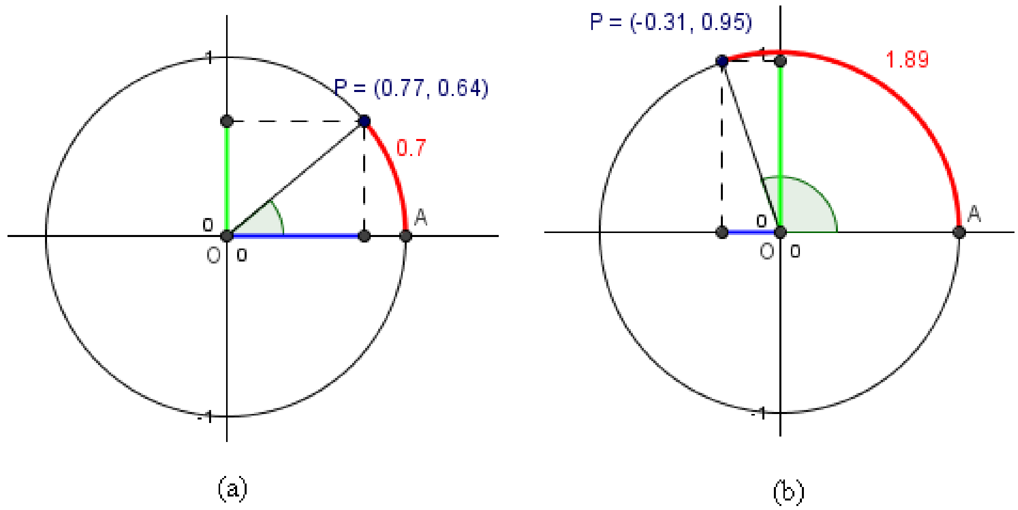


Figura 89: Interpretação gráfica das respostas dadas pelo grupo III.

O grupo III foi questionado pela professora sobre como pensou para obter o valor de $sen\frac{2\pi}{3}$.

Professora: Como tu pensaste para calcular o seno de $\frac{2\pi}{3}$?

Jonas: π é 180°. $\frac{2\pi}{3}$ é 120°. Aí fiz uma regrinha de três.

Professora: Que regra de três tu fizeste?

Jonas: π é 180°. X é 120°. 120 por 180 é 0,6 radianos. Então 120° tá aqui do lado, então o seno é esse aqui. Tipo...eu não sei onde tá o 120° aqui, eu sei que o seno é esse aqui. [O aluno marcou um arco de 0,6 radianos e observou o seno desse arco].

Professora: Deixa eu ver aqui...tu pegaste o 180°...o 120°...

Jonas: O de 120° não é igual a esse aqui só que do outro lado?

Professora: Tu estás usando o simétrico.

Jonas: O cosseno é igual e só muda o sinal.

Professora: E o que tu fizeste com o π da regra de três?

Jonas: Ah! É 0,6π...agora eu achei o 120°.

Nesse diálogo, podemos perceber que ao invés de substituir π pela aproximação 3,14 em $\frac{2\pi}{3}$, o aluno transformou a medida para graus e depois fez uma regra de três para obter a medida correspondente em radianos, para então marcar o arco com essa medida e obter o seno correspondente. O raciocínio está certo, a não ser por ter omitido π após dividir 120° por 180° na resolução da regra de três. Talvez essa omissão de π esteja indicando um pouco de automatismo na resolução e/ou dificuldade de lidar com sistemas de medidas diferentes. Destaco que o cálculo de 0,6 x 3,14 ≅ 1,89 está de acordo com a figura 88(b) acima. Outro aspecto que deve ser considerado é que o aluno percebe, ao marcar o arco de 0,6 radianos, que ele não é correspondente ao ângulo de 120°, e então considera corretamente que o seno do arco no 2° quadrante tem o mesmo valor do seno no 1° quadrante, devido à simetria.

O grupo IV também respondeu corretamente os exercícios, apresentando um erro de sinal que foi considerado erro de atenção. Concluiu no 2° exercício que "enquanto movemos o ponto P, o valor da reta e do comprimento do círculo ficam iguais". Nessa resposta, podemos observar que, embora utilizando um vocabulário equivocado, pois não diferencia reta de segmento, nem comprimento do círculo de comprimento do arco, o grupo mostrou que conseguiu compreender a relação entre o comprimento do arco e o comprimento do segmento OP' ou a abscissa do ponto P'.

4.9.3 Comentários sobre a atividade 7

A atividade 7 buscou retomar o cálculo de seno e cosseno de ângulos e arcos medidos em graus e radianos. Foi uma nova situação proposta com o objetivo de corrigir ideias errôneas acerca do uso dessas unidades de medida que tinham sido observadas nas atividades anteriores. O grupo II foi um exemplo de que essas ideias ainda estavam confusas. Após o diálogo entre os colegas e a professora, o grupo mostrou que estava conseguindo compreender a diferença entre o valor do seno de um ângulo e a medida em radianos do arco e resolveu o exercício corretamente.

Nessa atividade, oportunizou-se também a retomada do significado de ângulos e de arcos negativos. Alguns alunos tinham apresentado problemas de compreensão dessas medidas nas atividades 3 e 4. Observei que a atividade 5, sobre simetrias, ajudou os alunos a entenderem os ângulos simétricos que têm o mesmo valor de seno ou cosseno e, a partir disso, conseguiram entender o significado de ângulos negativos e ângulos côngruos. Esse comentário tomou como referência os teoremas-em-ação: "se -2 é o simétrico do arco de medida 2 em relação ao eixo x, então $cos(-2) = cos(2)$" e "se -2 é côngruo ao arco de medida 4,28 obtido por 6,28 - 2 = 4,28, então $cos(-2) = cos(4,28)$".

A atividade evidenciou a preferência dos alunos por realizarem os exercícios com ângulos medidos em graus, ao invés de arcos medidos em radianos. Para os alunos, é mais fácil substituir π por 180° do que π por 3,14, como pude observar no cálculo de $sen\frac{2\pi}{3}$ pelo grupo III.

De acordo com o que foi comentado acima, avaliei que a atividade 7 foi importante por permitir a discussão e a correção de ideias que haviam ficado confusas sobre arcos e ângulos e cálculo de seno e cosseno dessas medidas. Esse momento foi fundamental para a continuidade da experiência de ensino, uma vez que as próximas atividades iriam abordar as funções trigonométricas e essas noções de ângulo, de arco e de seno e cosseno no círculo trigonométrico precisavam estar claras para os alunos.

4.10 GRÁFICO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO A PARTIR DO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

4.10.1 Descrição da atividade 8 e seus objetivos

A atividade 8 era composta por oito exercícios e uma construção: o círculo trigonométrico em que estavam marcados os segmentos OS, OC, os pontos P e A e o ângulo AÔP. Os exercícios 1, 3, 4, 6 e 7 eram procedimentos que os grupos deveriam realizar e os exercícios 2, 5 e 8 eram perguntas que os alunos deveriam responder. Na figura 90, podem ser observados o círculo e os enunciados dos exercícios.

Gráfico das funções seno e cosseno a partir do círculo trigonométrico

1. Observar seno e cosseno destacados no círculo.

2. Clique no ponto B, na janela de álgebra. Mova o ponto P sobre o círculo
Responda: qual relação existe entre o arco AP e a posição do ponto B sobre o eixo horizontal?

Resposta:

3. Clicar em S_2 e i.
4. Habilitar rastro do ponto S_2 clicando com o botão direito do mouse sobre ele e selecionado habilitar rastro.
5. Mova o ponto P sobre todo círculo . Faça isso várias vezes até a curva que apareceu ficar toda pintada.
Responda: Que relação você observa entre essa curva e as informações fornecidas no círculo trigonométrico?

Resposta:

6. Clicar em C_2 e j.
7. Habilitar rastro do ponto C_2.
8. Responda: O que significa essa curva que apareceu? Que relação existe entre ela e as informações do círculo trigonométrico?

Resposta:

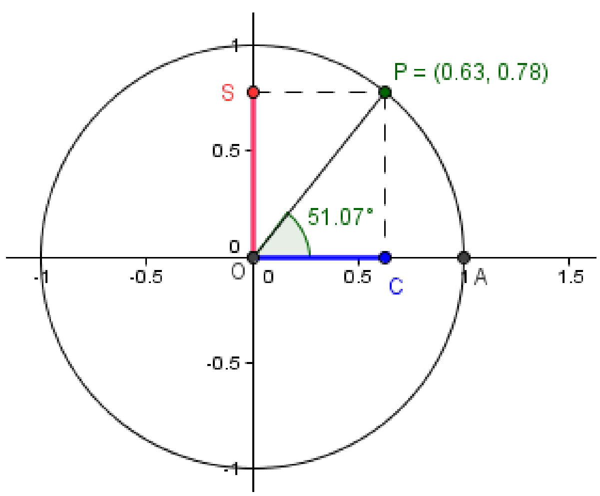


Figura 90: Enunciados e círculo da atividade 8.

O objetivo do 1° exercício era que os grupos observassem o círculo dado e os valores de seno e cosseno representados pelas coordenadas do ponto P ou pelos segmentos OS e OC. O 2° exercício pretendia retomar a relação introduzida na atividade anterior: que o segmento OB, sobre o eixo *x*, tem a mesma medida do arco AP em radianos. As diferenças entre o que foi pedido nessa atividade e o que havia sido pedido na atividade anterior são: que o eixo horizontal não está graduado de $\frac{\pi}{2}$ em $\frac{\pi}{2}$, mas de 0,5 em 0,5; e mais, que a medida do arco em radianos não é visível, ou seja, na atividade 8, os alunos podiam ver apenas a medida do ângulo AÔP em graus. Esperava que os alunos percebessem essa diferença na apresentação das informações e que essa diferença não fosse um obstáculo para o desenvolvimento da atividade, ou seja, que os alunos associassem os números reais apresentados no eixo x, que são valores do domínio da função seno e da função cosseno, com as medidas dos arcos em radianos.

No 3° exercício, os alunos deveriam tornar visíveis o segmento i, paralelo e congruente ao segmento OS, e sua extremidade S_2 (sendo B a outra extremidade). No 4° exercício, os grupos deveriam habilitar a ferramenta "rastro" para o ponto S_2. Essa ferramenta mostra o rastro que um objeto deixa no plano após ser movimentado. No 5° exercício, os alunos deveriam movimentar o ponto P sobre o círculo. Ao fazer isso, o ponto B deslocava-se sobre o eixo x, e o segmento i deslocava-se também paralelamente ao eixo das ordenadas, de modo que a ordenada do ponto S_2 era sempre a mesma do ponto S e do ponto P, e a abscissa do ponto S_2 era sempre a mesma do ponto B. Portanto, as coordenadas do ponto S_2 mostram a medida do arco em radianos e o seno desse arco, e o rastro que esse ponto deixa no plano mostra o gráfico da função seno. A figura 91 ilustra as etapas de traçado do gráfico. Em 91(a) estão marcados os pontos B e S_2 e o segmento i, mas P não foi movimentado. Em 91(b) o ponto P movimentou-se no primeiro e segundo quadrantes e, em 91(c), P completou uma volta no círculo.

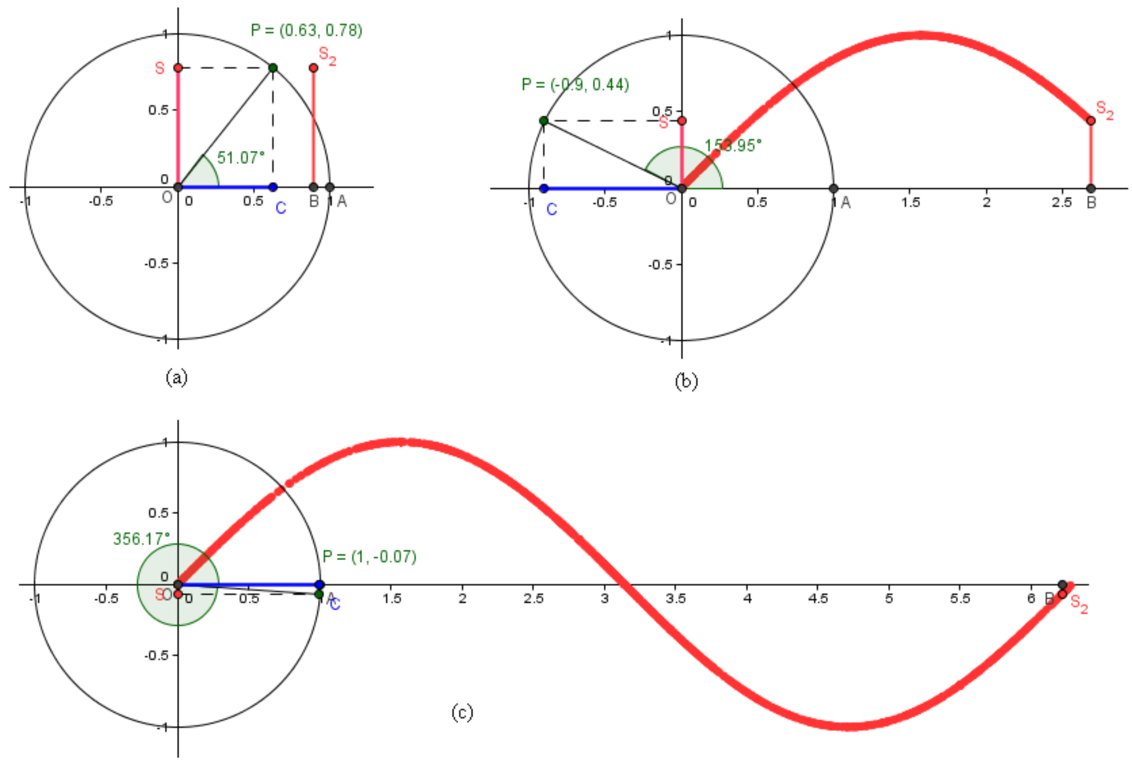


Figura 91: Construção do gráfico da função seno no intervalo de [0, 2π].

Nessa primeira atividade de construção dos gráficos das funções seno e cosseno, as funções ficaram restritas ao domínio [0, 2π], pois o GeoGebra, como já foi comentado anteriormente, não mostra ângulos maiores do que 360° nem menores do que 0° no círculo trigonométrico. O trabalho com as funções tendo como domínio todo o conjunto dos números reais será relatado na próxima atividade.

Nos exercícios 6, 7 e 8, os grupos deveriam fazer procedimento semelhante ao citado para os exercícios 3, 4 e 5, mas o gráfico traçado era o da função cosseno. As etapas dessa construção podem ser vistas na figura 92. Em 92(a) aparecem os pontos B e C_2 e o segmento *j* (paralelo ao eixo das ordenadas, de extremos em B e C_2), esse segmento *j* corresponde ao segmento OC marcado no círculo, ambos têm a mesma medida. Em 92(b) está representado o movimento de P no primeiro e segundo quadrantes. Em 92(c) vemos o gráfico da função cosseno com domínio restrito ao intervalo [0, 2π].

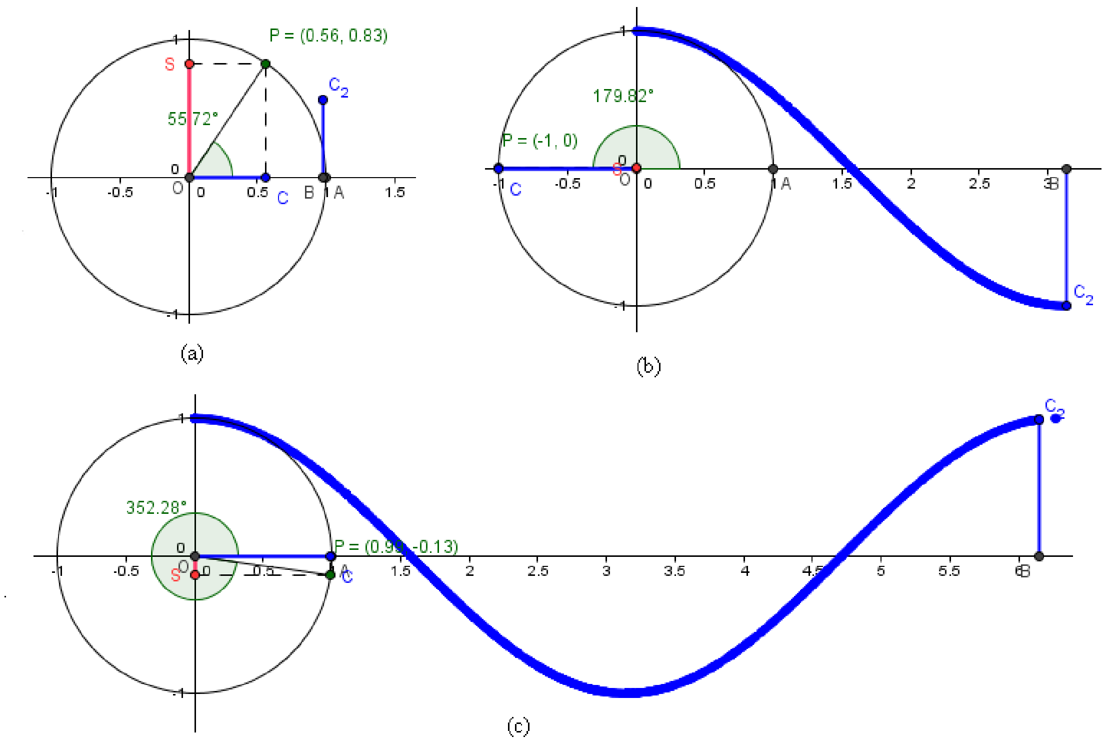


Figura 92: Construção do gráfico da função cosseno no intervalo [0, 2π].

Nessa atividade, há uma situação implícita interessante de ser observada. Já foram comentadas, nas atividades anteriores, funções envolvidas no processo de construção geométrica das figuras. Aqui, vemos um processo de composição de funções. O ponto P corresponde à variável independente, a medida do arco AP depende desse ponto P e, por sua vez, o ponto B depende da medida do arco AP.

Esperava dessa atividade 8 que os alunos observassem os gráficos das funções seno e cosseno e conseguissem relacionar as informações que aparecem nos gráficos com os conhecimentos desenvolvidos sobre o círculo trigonométrico desde as primeiras atividades. Portanto, esperava que os alunos percebessem que no intervalo do eixo das abscissas [0, π/2], (ou como aparece na tela: aproximadamente [0; 1,57]), o gráfico representa o comportamento de seno, ou cosseno, no primeiro quadrante, o mesmo para os próximos intervalos até 2π. Esperava que os grupos percebessem que os valores do eixo horizontal representam as medidas dos arcos em radianos e que a imagem de cada um desses valores corresponde ao valor de seno, ou cosseno, do arco. Esperava que percebessem as mudanças de sinal das funções, que percebessem as diferenças entre os gráficos de seno e de cosseno e que conseguissem associar as raízes das funções com as extremidades dos quadrantes.

É importante destacar que essa atividade foi considerada como ponto principal da sequência de ensino, uma vez que, para a sua realização, os alunos tinham que fazer uso da maior parte dos conhecimentos desenvolvidos até o momento e transpor esses conhecimentos para o contexto das funções trigonométricas, onde a variável independente corresponde à medida de um arco em radianos. Portanto, os alunos tinham que, consciente ou inconscientemente, utilizar noções da Trigonometria do triângulo retângulo (uma vez que os segmentos BS_2 e BC_2 representam o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo AÔP formado no círculo trigonométrico) e/ou utilizar seno e cosseno como coordenadas do ponto P; utilizar as informações que caracterizam o círculo trigonométrico (os alunos deveriam, por exemplo, perceber que as alturas máxima e mínima atingidas pelos gráficos são 1 e -1 e que isso ocorre pois o raio do círculo mede 1 unidade, logo seno e cosseno não assumirão valores maiores do que 1, nem menores do que -1); utilizar as noções sobre as medidas de ângulos e arcos em graus e radianos; utilizar as noções de simetria para perceber que os valores das funções se repetem para ângulos e arcos simétricos, podendo variar o sinal dependendo do quadrante em questão e, por fim, utilizar os conhecimentos do cálculo de seno e cosseno no círculo e associar essas informações às coordenadas dos pontos $S_2 = (\alpha, sen\ \alpha)$ e $C_2 = (\alpha, cos\ \alpha)$.

Nessa atividade, o uso do GeoGebra seria fundamental para desenvolver o conceito de função, pois os alunos poderiam ver os pontos S_2 e C_2 mudando de posição conforme as suas coordenadas fossem variando de acordo com o movimento do ponto P no círculo trigonométrico. Estabelecer todas essas relações seria um desafio fundamental para os alunos, logo a atividade teria um papel significativo na avaliação do quanto eles estavam ou não conseguindo aprender acerca dos conceitos trigonométricos desenvolvidos na sequência de ensino.

Na atividade 8, as perguntas foram elaboradas de maneira que os alunos tivessem liberdade de escrever aquilo que estavam observando, ou seja, inicialmente procurei não dirigir ou induzir os pontos a serem observados por eles. Durante a aplicação das atividades, após os alunos escreverem suas observações, a professora foi questionando os grupos sobre alguns aspectos importantes que eles deveriam notar.

4.10.2 A realização da atividade 8 pelos alunos

O grupo I respondeu aos exercícios 2 e 5, porém não concluiu a atividade. O 2° exercício perguntava qual a relação entre o arco AP e a posição do ponto B sobre o eixo horizontal. O grupo respondeu "Eles possuem as mesmas medidas". Essa resposta indica que o grupo está comparando corretamente a medida do arco com a medida do segmento OB. O grupo poderia também ter relacionado a medida do arco com a abscissa do ponto B, porém parece que não pensou dessa forma. É importante destacar que nem as coordenadas do ponto B eram visíveis na tela, nem o segmento OB, portanto os alunos eram livres para fazer essa comparação. Percebi que a tendência do grupo é comparar a medida do arco com o segmento ao invés de compará-la com as coordenadas do ponto. Isso se explica pelo fato dos alunos poderem imaginar o arco sendo esticado e ficando do tamanho do segmento, ao passo que associar essa medida do arco com a abscissa do ponto seria uma ideia mais abstrata.

A figura 93 mostra a análise do gráfico da função seno feita no 5° exercício.

Resposta:
* o ponto S^2 acompanha o movimento do seno
* altura máxima do ponto S^2 = raio do círculo
* no 1° e 2° quadrantes y > 0
* no 3° e 4° quadrante y < 0
* 1 volta do S^2 = 360°
* valor de S^2 no eixo horizontal = radianos

Figura 93: Análise da função seno realizada pelo grupo I.

Pela análise realizada, pude observar que o grupo conseguiu associar corretamente as relações que ocorrem no círculo trigonométrico com o que é mostrado no gráfico da função. A primeira conclusão que o grupo escreveu é que "o ponto S_2 acompanha o movimento do seno". Essa observação é importante, pois mostra que o grupo conseguiu analisar o movimento do ponto S_2, cuja altura representa o seno do arco. Essa relação é fundamental para o conceito de função, que justamente desenvolve as noções de variação e dependência de variáveis. A segunda conclusão que o grupo escreveu é que a "altura máxima do ponto S_2 = raio do círculo". Essa observação mostra que o grupo compreendeu as características do círculo trigonométrico e estava conseguindo transpor essas informações para o gráfico da função, nesse caso, construindo as noções sobre a imagem da função seno. As duas análises seguintes: "no 1° e 2° quadrantes $y > 0$" e "no 3° e 4° quadrantes $y < 0$" mostram claramente que o grupo relacionou os sinais dos quadrantes com os sinais da função, utilizando corretamente a linguagem de função: $y > 0$ e $y < 0$. A afirmação "1 volta do $S_2 = 360°$" deixa claro que o grupo compreendeu que a curva traçada no plano se refere a uma volta completa do ponto P sobre o círculo trigonométrico. Considerei que o grupo compreendeu que não é o ponto S_2 que completa a volta no círculo, ou seja, ele apenas utilizou o recurso de linguagem que achou adequado para se referir ao período da função, termo que ainda não havia sido mencionado. A última conclusão escrita pelo grupo foi que: o "valor de S_2 no eixo horizontal = radianos", aqui o grupo mostrou que conseguiu pensar em uma volta completa no círculo em graus, mas também em radianos, e que associou esse valor em radianos com a abscissa do ponto S_2. Destaco que o grupo I conseguiu estabelecer relações entre variações no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas. Esse destaque merece ser feito, pois alguns alunos frequentemente não conseguem estabelecer essa relação, atentando apenas para o que acontece horizontalmente, isto é, para as variações nas abscissas, ou apenas verticalmente, no eixo das ordenadas. Um exemplo dessa dificuldade é quando alguns estudantes, observando um gráfico no sentido da esquerda para a direita, conseguem ver que os valores da abscissa são crescentes, porém, mesmo que esse gráfico seja decrescente no intervalo considerado, classificam-no como crescente, pois "os valores de *x* crescem".

O grupo II respondeu ao 2° exercício que "O ponto B é o valor em radianos do arco AP". Nessa resposta, pude perceber que o grupo estava comparando a medida do arco com a posição do ponto B, ou seja, o grupo percebeu que a posição do ponto sobre o eixo *x* informa a medida do arco AP. A figura 94 mostra as respostas dadas ao 5° exercício e ao 8° exercício.

5 Resposta: O valor de s2 corresponde ao valor do seno, alterando portanto, suas coordenadas conforme o seno obtido.

8 Resposta: O c2 representa o valor do cosseno, portanto altera suas coordenadas conforme a alternancia do valor do cosseno.

Figura 94: Análise do grupo II dos gráficos de seno e cosseno.

Percebe-se que a análise escrita pelo grupo II não traz tantas informações como a do grupo I, porém percebe-se que o grupo II estava atento às coordenadas dos pontos S_2 e C_2 e conseguiu compreender a relação entre o seno e o cosseno do círculo trigonométrico com a sua representação pelos pontos no plano. A ideia de variação também está presente na análise do grupo. O diálogo seguinte mostra que os alunos conseguiram perceber essa variação:

Professora: Vocês conseguem visualizar no gráfico onde fica o 1° quadrante? Vocês conseguem entender porque [o ponto no gráfico] tá subindo, descendo?

Carlos: Sim, tá. Primeiro, aqui tá o valor 1...no C_2.

Professora: Tá, C_2.

Carlos: E aqui [no círculo trigonométrico] tá o valor 1. Aí ele sobe [o ponto P no círculo] e aí tá descendo [o ponto C_2 no gráfico, pois cosseno vai diminuindo]. Quando ele chegar no zero [segmento OC do círculo], aí ele chega no zero [ponto C_2 no gráfico]. Aí aqui ele assume valor negativo e ali também assume valor negativo. Então é o mesmo resultado só a representação muda. E no S_2 é a mesma coisa.

Nessa fala, o Carlos comparou o círculo trigonométrico com o gráfico. Quando ele disse "Aí ele sobe e aí tá descendo", mostrou o ponto P no círculo subindo a partir do ponto A = (1, 0) no sentido anti-horário e o valor do cosseno diminuindo no gráfico. Depois o aluno disse "Quando ele chegar no zero, aí ele chega no zero ", também referiu-se ao cosseno no círculo e depois à posição do ponto C_2 no gráfico. Fez as mesmas relações para a análise do sinal.

É importante destacar também que o grupo relacionou os gráficos de seno e cosseno com o estudo que fizeram, paralelamente ao desenvolvimento da sequência de ensino, na disciplina de Física, onde estudaram ondulatória:

Carlos: Uma coisa eu já sei.

Professora: O que tu já sabes?

Carlos: Isso aqui é o *lambda*. *Lambda* de valor 6,25 [aproximadamente].

Professora: Tá relacionado com a Física. Tu lembras qual é o significado do *lambda*?

Otávio: Sim, é o comprimento de onda.

O grupo III respondeu ao 2° exercício da mesma forma que o grupo II: "O ponto B é o valor em radianos do arco AP", portanto também relacionou a medida do arco com a posição do ponto B sobre o eixo *x*. A figura 95 mostra a resposta do grupo ao 5° e ao 8° exercícios.

5 Resposta: As curvas são o grafico da função seno
Acurva sobe e desce conforme o valor de seno e não passa de1
porque o maximo valor que seno pode atingir é 1.

8 Resposta: Acurva que apareceu é o grafico da função cosseno
Ele não passa de altura 1 e -1 comoo grafico da função seno
Acurva sobe e desce conforme os valores de cosseno.

Figura 95: Resposta dada pelo grupo III ao 5° e ao 8° exercícios.

Percebi, pelas respostas acima, que o grupo identificou a variação das funções de acordo com a variação do seno e do cosseno no círculo trigonométrico. O grupo destacou a imagem máxima e mínima que as funções atingem no plano de acordo com o que acontece no círculo trigonométrico. O diálogo abaixo indica que o grupo III compreendeu as relações existentes entre o círculo trigonométrico e os gráficos das funções.

Professora: Que relações tu consegues estabelecer entre as informações do círculo e essa curva vermelha que está sendo criada?

Jonas: O círculo vai abrir.

Professora: Abrir de que forma?

Jonas: ?

Professora: Por exemplo, tu consegue identificar o primeiro quadrante? Onde ele é representado quando tu olha para o gráfico vermelho?

Jonas: Vamos ver. Isso aqui vai até 6,28, que equivale a 360° [referindo-se aos valores do eixo *x*].

Professora: Correto.

Jonas: Logo a metade é 3,14, 180°.

Professora: Tá.

Jonas: Tá aqui o primeiro quadrante [aponta para o intervalo de 0 a $\pi/2$].

Professora: Isso. Então o que tu consegue observar no gráfico da função seno? Por exemplo, qual é a altura máxima atingida pela função?

Jonas: Um.

Professora: Se eu te pergunto: $sen\ x = 2$, qual é o valor de x?

Jonas: Não existe.

Professora: Isso

Destaca-se do diálogo a afirmação de Jonas: "o círculo vai abrir", parece que o aluno imagina o círculo como um cordão que pudesse ser cortado em um ponto e esticado sobre o eixo x.

As perguntas seguintes foram feitas pelo aluno Jonas do grupo III e mostram que, inicialmente, pensou que os gráficos das funções sempre teriam o mesmo formato e domínio restrito ao intervalo $[0, 2\pi]$. Mostra ainda que, com a mediação da professora, o aluno compreendeu como se dará a transposição dessas noções iniciais de seno e cosseno do círculo para a representação, no plano cartesiano, do seno e do cosseno como funções de medidas de arcos.

Jonas: Professora, o gráfico de seno e cosseno é padrão, né? Porque é sempre 1 e vai sempre até 6,28.

A partir dessa pergunta, a professora retomou com o aluno a ideia de como é feita a marcação de ângulos maiores do que 360° e menores do que 0° no círculo trigonométrico pelo GeoGebra, ou seja, que o programa marca sempre a menor determinação positiva, como se reiniciasse a mesma volta no círculo. Falei que na atividade seguinte seriam abordadas com o grupo as transformações que podem ser feitas nos gráficos "padrões" de seno e cosseno e que eles também poderiam ver como ficariam os gráficos com domínio no conjunto dos números reais e não apenas no intervalo $[0, 2\pi]$. O aluno mostra que compreendeu essa discussão e que consegue imaginar como esse processo ocorre. Como pode ser visto nas colocações seguintes:

Professora: Se eu quiser marcar um ângulo de 420°, o que vai acontecer?
Jonas: Vai dividir por 360° e vai achar.
....
Jonas: Então, pode acontecer de tu dar um gráfico gigantesco, gigantesco, gigantesco, com um monte de curvinhas e perguntar quantas voltas deu?

A última frase mostra que Jonas conseguiu antecipar a visualização do gráfico de seno ou de cosseno pensando nas voltas que o ponto P pode dar no círculo trigonométrico. Mostra também que as dúvidas sobre ângulos côngruos foram esclarecidas.

O grupo IV não terminou a atividade, respondeu somente ao 2° item, pois durante o início da aula estava terminando a atividade anterior e o grupo não retornou nas aulas seguintes para fazer a conclusão. Ao 2° item, o grupo respondeu: "Existe relação entre o valor do arco e dos ângulos, portanto quanto maior for o ângulo e o radianos, maior será o valor de

B". Percebi também que o grupo relacionou a medida do arco com a posição do ponto B sobre o eixo x. Nessa resposta, pode-se destacar a distinção que o grupo faz entre ângulo e arco ao escrever "...quanto maior for o ângulo e o radianos...". Essa distinção é importante, pois nas atividades propostas ângulo é medido com a unidade graus, enquanto comprimento de arco é medido através da unidade radianos e, ao mesmo tempo, o grupo percebe claramente a correspondência que existe entre esses dois elementos geométricos. Esse era um dos objetivos da atividade 4 (Relação entre as unidades de medidas de ângulos e de arcos: graus x radianos) que continuou sendo abordado ao longo das atividades seguintes, e aqui o grupo mostra que compreendeu essa distinção.

O grupo V respondeu ao 2° exercício escrevendo: "Quanto maior for o grau do ângulo, o ponto B estará mais distante". Nessa resposta, pude observar que o grupo não estava associando de maneira precisa o comprimento do arco com a medida do segmento OB, nem com a abscissa do ponto B. O grupo entendeu que há relação entre a medida do ângulo e a distância entre B e a origem, porém não é possível afirmar que o grupo compreendeu a relação entre esse valor marcado no eixo x e o ângulo. Destaca-se ainda que essa dificuldade pode ser atribuída à ausência do grupo na realização da atividade 7 (Retomando conceitos: radianos).

Com relação ao 5° e 8° exercícios, as respostas do grupo podem ser vistas na figura 96.

5) Resposta: Nos Quandrantes 1 e 4 o ponto na curva estará subindo
e nos pontos 2 e 3 o ponto estará descendo

8) Resposta: Nos quadrantes 1 e2 o ponto desce e nos quandrantes
3 e 4 o ponto sobe.

Figura 96: Respostas do grupo V aos exercícios 5 e 8.

Podemos notar que o grupo associou corretamente o crescimento e o decrescimento das funções relacionando-os com o crescimento e decrescimento de seno e de cosseno no círculo. Apesar de, na resposta do 5°exercício, o grupo ter escrito "...e nos pontos 2 e 3 o ponto estará descendo" entende-se que o grupo quis dizer: "...e nos quadrantes 2 e 3...". O estabelecimento dessa relação entre crescimento e decrescimento poderia levar o grupo a observar também características como a mudança de sinal das funções e o intervalo de variação da imagem das funções.

4.10.3 Comentários sobre a atividade 8

A atividade 8 destacou-se pela maneira com que os alunos se expressaram e analisaram os gráficos, comparando-os com o círculo trigonométrico. Ficou evidente o crescimento e o amadurecimento deles quanto aos conceitos relacionados a ângulos, a arcos, a seno e cosseno no círculo trigonométrico e a transposição desses conceitos para a representação no plano cartesiano. As noções de dependência entre as variáveis também parecem ter sido bem compreendidas. Para embasar essa afirmação, destaco novamente a análise feita pelo grupo I que escreveu: "O ponto S_2 acompanha o movimento do seno. Altura máxima do ponto S_2 = raio do círculo. No 1° e 2° quadrantes $y > 0$. No 3° e 4° quadrantes $y < 0$. 1 volta do S_2 = 360°. Valor de S_2 no eixo horizontal = radianos". Vejo nessa resposta que os conhecimentos expressos estão corretos e que a linguagem utilizada na representação desses conhecimentos está adequada, mesmo que informal.

Outro aspecto importante que apareceu na realização dessa atividade é o estabelecimento de relações entre as ideias desenvolvidas em diferentes situações. Nessa atividade promovi uma situação em que os alunos poderiam comparar elementos, observar variações e escrever suas conclusões acerca das funções trigonométricas seno e cosseno. Na disciplina de Física, foram apresentadas diferentes situações de aplicações das funções trigonométricas no estudo de ondas. Um grupo manifestou sua observação de que já sabia algumas coisas, como o valor de *lambda* para os gráficos apresentados. Ao ser questionado sobre o que era o *lambda*, o aluno explicou corretamente que era o comprimento de onda. Esse estabelecimento de relações entre os conhecimentos desenvolvidos em deferentes situações é fundamental para a construção dos conceitos envolvidos.

4.11 EXPLORANDO TRANSFORMAÇÕES NOS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO.

4.11.1 Descrição da atividade 9 e seus objetivos

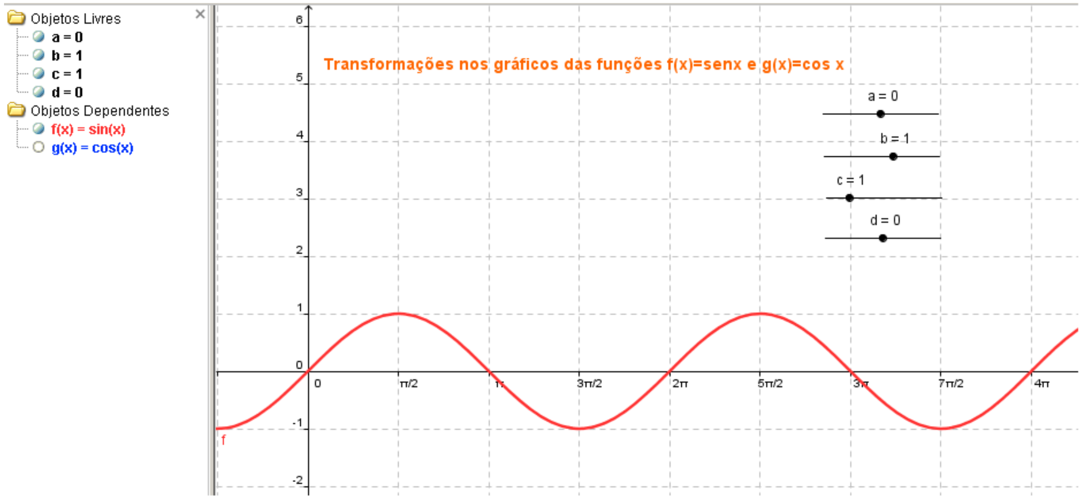
A atividade 9 foi a última da sequência de ensino. A atividade era composta por um roteiro dado aos alunos em papel, em que havia 12 exercícios que envolviam a análise dos gráficos e das transformações nos gráficos das funções seno e cosseno; e por dois desafios (dois exercícios selecionados de provas de vestibular e adaptados para a sequência) que envolviam aplicações das transformações nos gráficos das funções trigonométricas estudadas. O roteiro da atividade 9 pode ser visto no apêndice D.

Para a realização da atividade, os alunos tinham que construir os gráficos pedidos no roteiro no GeoGebra. Do 1° ao 9° exercício os enunciados eram semelhantes e perguntavam algumas informações sobre a transformação realizada em cada item. Para ilustrar esse conjunto de enunciados, observe no quadro 5 o que foi pedido no 3° exercício:

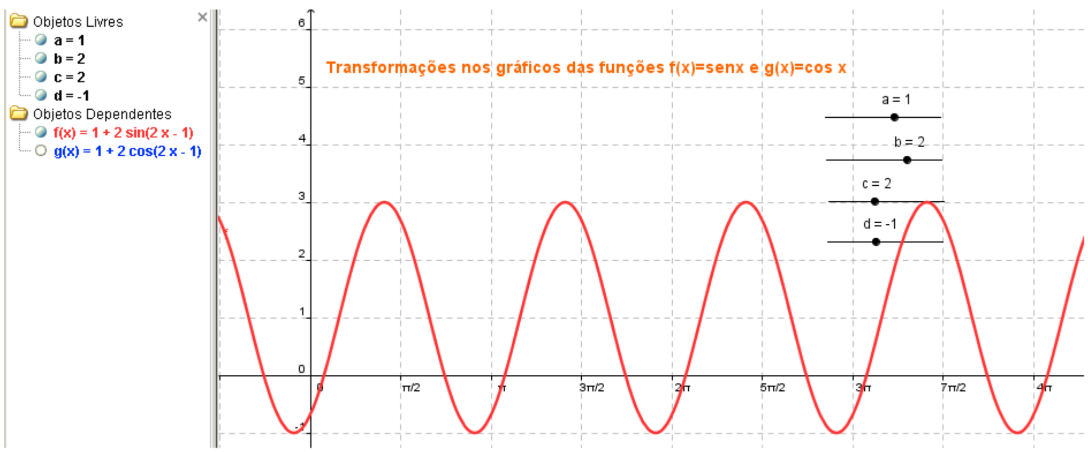
Quadro 5: Enunciado do 3° exercício.

3. Na janela de álgebra, clique sobre as funções *f*_1 e *f*_2 para esconder seus gráficos. a) Digite ***g*_1*(x)* = 2*sin(x)*** (amarelo) e ***g*_2*(x)*= 3*sin(x)*** (verde). Compare os gráficos com a função *f(x) = sen x*. O que aconteceu com as alturas atingidas pela função? .... b) Os pontos de corte com o eixo *x* (raízes) modificaram ou não? .... c) Qual é a imagem de cada uma das funções do item *a*? ....

Para a realização do 10° exercício, os grupos tinham que acessar o arquivo intitulado "transformações nos gráficos_variação". Nesse arquivo, estavam construídos os gráficos das funções $f(x) = A + B.sen\ (Cx + D)$ e $g(x) = A + B.cos\ (Cx + D)$. Os parâmetros A, B, C e D deveriam ser alterados e, consequentemente, os gráficos seriam modificados. A figura 97 mostra o gráfico da função *f*, enquanto o gráfico da função *g* está escondido. Em 97(a) aparece o gráfico inicial da função *f*, com A = 0, B = 1, C = 1 e D = 0. Na janela de Álgebra, pode-se observar as leis de formação das funções e os parâmetros. Em 97(b) aparece o gráfico da função *f* após os parâmetros serem modificados para A = 1, B = 2, C = 2 e D= 1.



(a)



(b)

Figura 97: Arquivo utilizado para a realização do 10° exercício.

Após alterar o valor dos parâmetros no arquivo, os grupos deveriam completar as frases dos itens *a* ao *f* com as expressões dadas: deslocamento para cima/para baixo, deslocamento para direita/para esquerda, alongamento vertical, compressão vertical, alongamento horizontal, compressão horizontal e reflexão do gráfico em torno do eixo *x*. Como exemplo de frase a ser completada pelos grupos, pode-se citar o item *a* (quadro 6).

Quadro 6: Item *a* do 10° exercício.

a) **A** provoca um ______________________________no gráfico da função *f(x) = sen x*. Se **A** for positivo será para_____________ e se **A** for negativo será para _____________________.

O 11° exercício pedia para os alunos construírem os gráficos das cinco funções dadas: $f_1(x) = 2 + (1/2).cos\ (x)$, $f_2(x) = -1 + cos\ (2x)$, $f_3(x) = -3.cos\ x$, $f_4(x) = 2.cos(x + \pi)$ e $f_5(x) = cos[(1/3)x]$. A partir dessas construções, os alunos tinham que identificar quais transformações ocorreram no gráfico da função cosseno. O 12° exercício mostrava a figura de três gráficos e os alunos tinham que obter a lei de formação de cada um deles. Para responder a esse exercício, os alunos poderiam utilizar o arquivo "transformações nos gráficos_variação" para tentar reproduzi-los e obter as leis de formação. A figura 98 mostra o gráfico dado no item *a* do exercício.

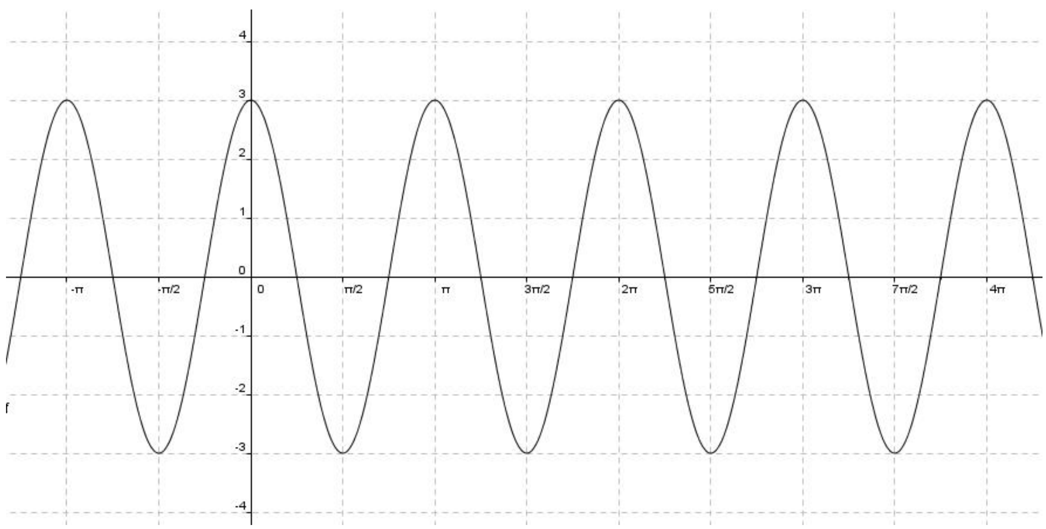


Figura 98: Gráfico do item *a* do exercício 12.

Os dois desafios finais eram duas questões de vestibular (adaptadas para a atividade) que envolviam aplicações de funções trigonométricas para interpretação de fenômenos periódicos (enunciados conforme quadros 7 e 8). As questões deveriam ser respondidas com base na construção dos gráficos das funções dadas. Em um segundo momento, os alunos deveriam pensar sobre como resolver o que estava sendo questionado, caso não tivessem o recurso de utilizar o GeoGebra para as construções.

Quadro 7: Enunciado da primeira questão de aplicação das funções trigonométricas.

1. (Vunesp) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura *h* em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11{,}5 + 10\,\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{12}\right).(t-26)\right]$, onde o tempo *t* é dado em segundos e a medida angular em radianos.

a) determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar (t = 0). R:..

b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa.

R:..

Importante:

- para responder a questão, obtenha o gráfico que representa a situação descrita acima digitando, no geogebra: f(x) = 11.5+10sin[(π/12)*(x-26)]
- para facilitar a visualização dos valores, crie um ponto sobre o gráfico e movimente-o observando suas coordenadas. [no segundo botão, selecione: novo ponto; clique com o botão direito do mouse e selecione: exibir rótulo : valor].

Desafio 1: sem ter o gráfico da função dado pelo geogebra, como você faria para calcular a altura inicial do seu amigo?

Quadro 8: Enunciado da segunda questão de aplicação das funções trigonométricas.

2. (FGV - SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800\,\text{sen}\left(\frac{x.\pi}{12}\right)$ onde f(x) é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo é igual a:

a) 600. b) 800. c) 900. d) 1500. e) 1600.

Importante: ajuste a janela de visualização!

- Clique com o botão direito do mouse sobre o eixo x. Selecione janela de visualização. Em eixos, digite -2 para valor mínimo e 28 para máximo. Selecione a aba Eixo Y. Digite -100 para valor mínimo e 2000 para máximo. Clique em fechar.

Desafio2: sem ter o gráfico da função dado pelo geogebra, como você faria para calcular o número máximo e mínimo de clientes dentro do supermercado?

Os objetivos da atividade eram: proporcionar um estudo aprofundado dos gráficos das funções seno e cosseno, desenvolvendo conhecimentos como domínio (ampliando as funções trabalhadas anteriormente no intervalo de 0 a 2π para o conjunto dos números reais), raízes, imagem, máximos, mínimos e periodicidade; proporcionar o desenvolvimento dos conceitos sobre transformações nos gráficos das funções trigonométricas a partir da variação de parâmetros; desenvolver nos alunos a flexibilidade na utilização de diferentes linguagens, ou seja, desenvolver a compreensão do gráfico a partir da lei da função e a compreensão da lei de formação da função a partir de seu gráfico e, por fim, proporcionar aos alunos a contextualização dos conceitos desenvolvidos em problemas que envolveram fenômenos periódicos.

4.11.2 A realização da atividade 9 pelos alunos

A atividade 9 foi realizada pelos grupos I, II e III e teve duração de dois encontros. O grupo I realizou a atividade até o 10° exercício e não conseguiu terminá-la devido a falta de tempo. Todas as respostas dadas pelo grupo I estavam corretas. O grupo conseguiu identificar as raízes das funções, as imagens os valores máximos e mínimos, conseguiu estabelecer comparações entre os gráficos dados e conseguiu associar corretamente todas as transformações indicadas no 10° exercício.

Destaco duas respostas do grupo: no 6° exercício, foi solicitado que o grupo construísse os gráficos das funções $i_1(x) = sen\ (2x)$, em vermelho (figura 99a) feita pela professora), e $i_2(x) = sen\ (4x)$, em azul (figura 99b), e os comparasse. O grupo respondeu: "A frequência do gráfico vermelho é menor do que a do gráfico azul". A resposta do grupo está correta e, além disso, mostra que o grupo está associando os conceitos desenvolvidos em Matemática com os conceitos desenvolvidos em Física, pois os alunos estudaram o conceito "frequência" nessa disciplina, porém, na sequência de ensino, isso ainda não tinha sido abordado.

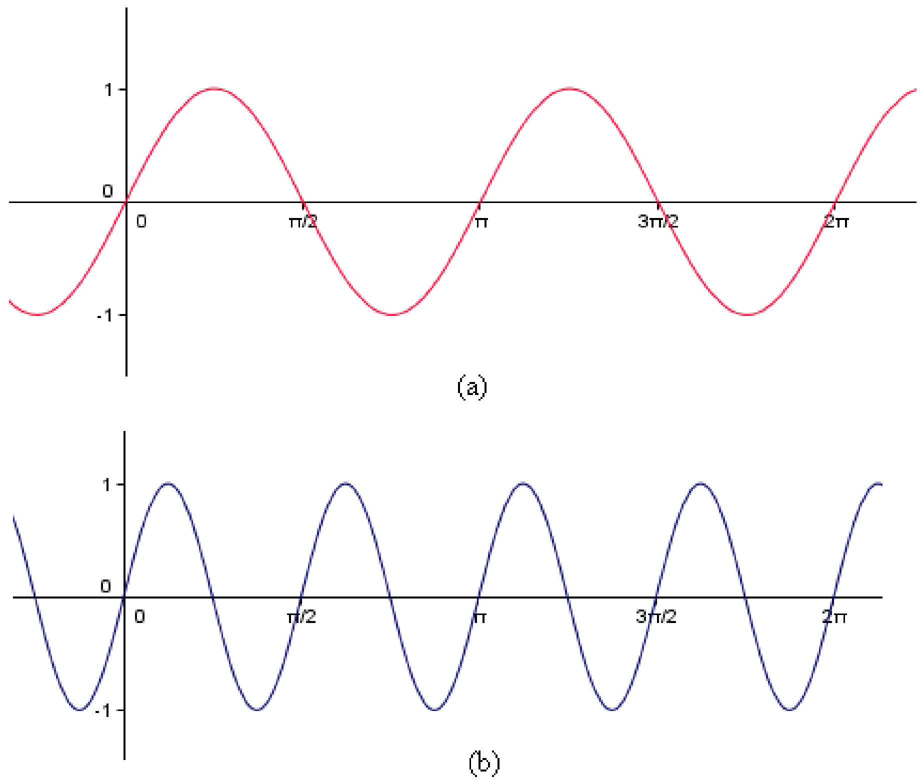


Figura 99: Gráficos das funções $i_1(x) = sen(2x)$ e $i_2(x) = sen(4x)$.

A segunda resposta que destaco é a do 9° exercício, que pedia para comparar o gráfico da função $j_1(x) = sen\ (x-(\pi/2))$, em laranja na figura 100, com o gráfico da função $j_3(x) = sen\ (x+(\pi/2))$, em verde. A intenção aqui era que os alunos percebessem o deslocamento horizontal para a direita e para a esquerda respectivamente, porém o grupo observa outra relação entre esses gráficos: "É igual à onda laranja, porém está ao contrário". Essa conclusão é facilmente verificada ao se analisar os dois gráficos no mesmo plano e perceber que de fato um gráfico é a reflexão do outro em torno do eixo x (figura 100 feita pela professora). Essa maneira de enxergar os gráficos indica a utilização do seguinte teorema-em-ação:

$j_1(x) = sen\ (x-(\pi/2))$ é uma reflexão em torno do eixo x do gráfico de $j_3(x) = sen\ (x+(\pi/2))$.

No 10° exercício, o grupo preencheu as lacunas sobre as transformações corretamente, inclusive aqueles itens que questionou sobre deslocamento horizontal e reflexão em torno do eixo x.

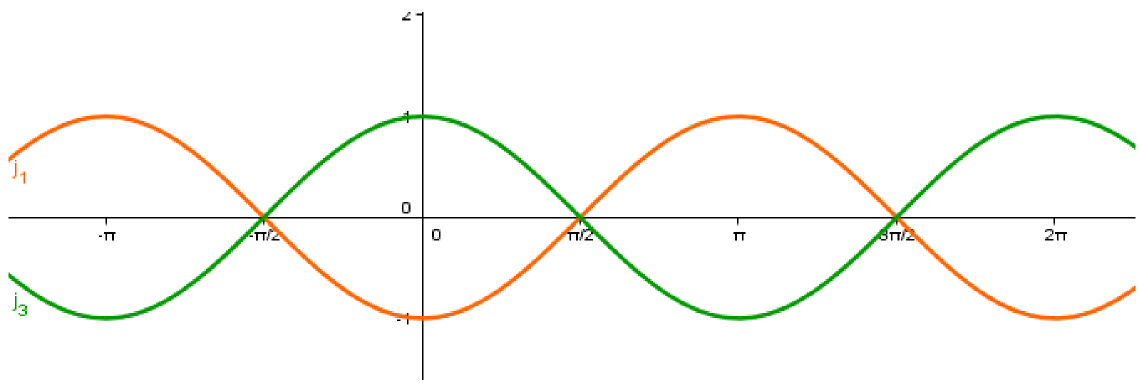


Figura 100: Gráficos de $j_1(x) = sen\ (x-(\pi/2))$ e $j_3(x) = sen\ (x+(\pi/2))$.

O grupo II deixou de realizar apenas o exercício 12°. Das respostas dadas pelos alunos destaco a seguinte: o item *a* do 1° exercício perguntava quais eram as alturas máxima e mínima atingidas pelo gráfico da função *f(x) = sen x* e o grupo respondeu "[1; -1]". Nessa resposta pude observar que os alunos entenderam que a pergunta estava relacionada à variação das alturas no gráfico, mas não utilizaram uma escrita adequada para o registro. Já nos itens seguintes, que perguntavam qual a imagem da função e o valor de cinco raízes, utilizaram adequadamente colchetes e chaves respectivamente.

Destaco também a resposta dada ao 5° exercício, que perguntava o que acontecia com o gráfico da função *f(x) = sen x,* ao se multiplicar a função *f* por -1 obtendo-se a função *h(x) = - sen* (*x*). Na figura 101, podem ser vistos os dois gráficos no mesmo plano. O grupo responde: "Alterna as alturas, ou melhor, muda o período". Aqui pude notar o seguinte teorema-em-ação: se uma função trigonométrica for multiplicada por -1, então as alturas se alternam ou muda o período. A primeira parte do teorema-em-ação está correta, ou seja, as alturas que eram positivas no intervalo [0, π], passam a ser negativas e assim por diante. A segunda parte está errada, já que o período da função permanece sendo 2π. Porém, a resposta sugere que o grupo não quis dizer isso, mas sim percebeu que houve um deslocamento horizontal do gráfico, isto é, a curva que aparecia originalmente no intervalo de [0, 2π], aparece agora no intervalo [-π,π], ou [π, 3π], e assim por diante. Ao mencionarem o período, estavam se referindo ao seu "início" e "final".

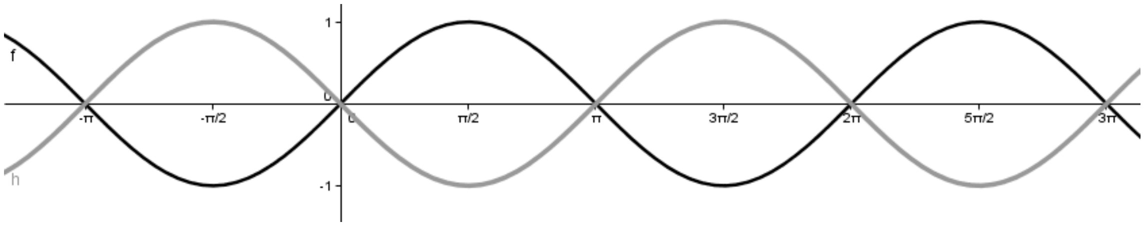


Figura 101: Gráficos das funções ***f(x) = sen x*** e ***h(x) = - sen x***.

O item *a* do 8° exercício perguntava qual a diferença entre os gráficos das funções $j_1(x) = sen\ (x\text{-}(\pi/2))$, em laranja, e $j_2(x) = sen\ (x - \pi)$, em roxo. O grupo II respondeu "O roxo é o dobro do outro". Para tentar entender a ideia do grupo, a professora construiu (ver figura 102) os gráficos j_1 e j_2 no mesmo plano que o gráfico de $f(x) = sen\ x$.

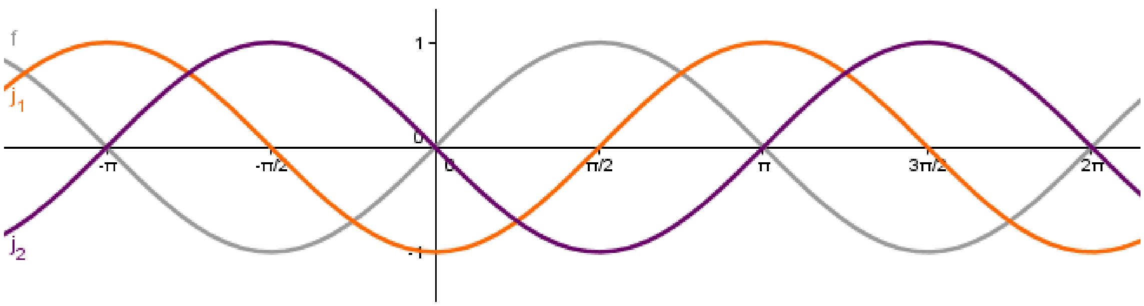


Figura 102: Gráfico das funções $\boldsymbol{j_1(x) = sen\ (x\text{-}(\pi/2))}$, $\boldsymbol{j_2(x) = sen\ (x - \pi)}$ e ***f(x) = sen x***.

Pela figura, observa-se que a curva no intervalo [0, 2π] da função $f(x) = sen\ x$ desloca-se para o intervalo [π/2, 5π/2], no gráfico em laranja, e para o intervalo [π, 3π], no gráfico em roxo. Se observarmos apenas o início de cada um desses dois últimos intervalos - π/2 e π - vemos que o segundo valor, π (raiz no gráfico roxo), é o dobro do outro, π/2 (raiz no gráfico laranja), sendo assim, os alunos concluíram que um "é o dobro do outro". Portanto, percebe-se que estão focados em um único ponto e a partir dele chegam a suas conclusões. Já com relação ao item *b*, foi solicitado que os alunos identificassem um intervalo em que cada função (j_1 e j_2) completa um período e que obtivessem o comprimento desse intervalo. O grupo II responde para a função j_1: "Intervalo: [0, 5π/2]. Comprimento: 5π/2" e para a função j_2: "Intervalo [0, 3π]. Comprimento: 3π". Nesse item, podemos ver que o grupo considera que o período sempre se inicia na origem, mas identifica o final do período com o valor correspondente a 2π, isto é, com o resultado do deslocamento horizontal de 2π. Observei aqui a utilização do teorema-em-ação: o período começa sempre em $x = 0$. Essa maneira de pensar mostra um início de compreensão, pois o grupo indica um período corretamente na função seno, e tenta identificar o mesmo "desenho de curva" nos outros gráficos, mas sem deslocar a origem. Não percebe que é como se a curva se deslocasse, mantendo o comprimento, nos casos em questão.

A resposta do grupo II ao 9° exercício, que pede para comparar as funções $j_2(x) = sen\ (x - \pi)$ e $j_3(x) = sen\ (x + (\pi/2))$, foi: "Semelhanças: mesmo comprimento de onda e período. Diferenças: inverso do outro, uma começa em π/2 antes do que a outra". A parte referente às diferenças mostra que o grupo estava conseguindo analisar as transformações dos gráficos de dois modos diferentes, tanto observando a reflexão em torno do eixo *x*, como observando os deslocamentos horizontais. Sobre os deslocamentos, pode-se observar que o grupo não enxergou a transformação como um deslocamento para a direita e outro para a esquerda, mas enxergou que houve um deslocamento para a direita de π/2 em um gráfico e, aparentemente, enxergou que houve um deslocamento para a direita de 3π/2 no outro. Essa conclusão está baseada na afirmação "...uma começa em π/2 antes do que a outra".

As respostas dadas ao 10° exercício estavam corretas. No início da resolução desse exercício durante a aula, ao abrir o arquivo "Transformações nos gráficos_variação", o grupo mostrou que percebeu diferenças fundamentais entre os gráficos de seno e cosseno. O gráfico que aparece inicialmente ao abrir o arquivo é o da função cosseno e o grupo comentou:

Carlos: Esse aqui é o cosseno.

Professora: Como é que tu fizeste para concluir que esse é o cosseno?

Carlos: Porque eu vi que cosseno equivale ao *x* e seno equivale ao *y* [referindo-se ao círculo trigonométrico]. Daí eu lembrei, vim pra cá [aluno aponta para a intersecção do gráfico de cosseno com o eixo *y*], daí se o cosseno equivale ao *x*, tá vindo por aqui e fica negativo no segundo quadrante.

Portanto, o grupo diferenciou um gráfico do outro através da mudança de sinal das funções. Ele pensou no que aconteceu no círculo trigonométrico e depois relacionou essas informações com o gráfico.

O item *d* do 10° exercício (quadro 8) deveria ser completado com as expressões "compressão horizontal" e P = "$\frac{2\pi}{C}$". O item *e*, por sua vez, deveria ser completado com "alongamento horizontal" e P = "$\frac{2\pi}{C}$".

Quadro 9: Itens *d* e *e* do 10° exercício.

d) Se **C** for um número maior que 1 (um), irá provocar uma _________________________ no gráfico de f(x) = sen x e o período será dado por: P = _____ (verifique isso nas funções do item 6).
e) Se **C** for um número entre 0 (zero) e 1 (um), irá provocar um _____________________no gráfico de f(x) = sen x e o período também será dado por P = ______ (verifique isso nas funções do item 7).

O grupo II conseguiu, com a mediação da professora, chegar à expressão que calcula o período das funções trigonométricas. O diálogo abaixo mostra que o grupo novamente está relacionando o estudo das funções trigonométricas com os conteúdos desenvolvidos na disciplina de Física.

Professora: Como é que tu poderias pensar em uma forma de calcular o período?

Carlos: Tá. O período é o inverso da frequência.

[aluno faz o gráfico da função seno no GeoGebra.]

Professora: Então, em relação ao C da função, pensando na frequência, como tu estavas imaginando...tenta pensar em uma maneira, uma fórmula de calcular esse P.

[aluno fica pensando e professora retorna depois]

Carlos: Eu ia tentar descobrir a frequência.

Professora: E tu colocou a frequência como sendo...[professora deixa o aluno pensar um pouco].

Carlos: É que é uma fórmula, por que varia. Posso pegar uma [função] aqui e fazer. [Carlos precisa pensar no cálculo a partir de uma função específica].

Professora: O que é isso aqui que tu colocou? [A professora pergunta sobre uma anotação do aluno na folha].

Carlos: Período é 1 sobre *f*.

Professora: Então é o inverso da frequência.

Carlos: Com isso eu descobri a frequência.

Professora: E isso aqui? [Sobre outra anotação feita no canto da folha].

Carlos: Isso aqui é um comentário: *x* vai ser o comprimento de onda [comprimento de onda é o período], *lambda*, e aqui a velocidade.

Professora: Tu colocou uma frequência de 2 para esse gráfico.

Carlos: É. O comprimento de onda como 2π. [Carlos identifica a frequência como sendo $f = C$. Identifica, pelo gráfico, o comprimento de onda].

Professora: A frequência dele aqui é 2, num período de 2π.

Carlos: É π dividido por... [Carlos não completa seu raciocínio].

Professora: Tu consegue ver aqui [no gráfico] o valor da frequência que tu colocou? [Professora pretende que o aluno observe a frequência no gráfico além de identificá-la através da lei da função].

Carlos: Tá vamos ver.... O comprimento de onda aqui é π, o intervalo digamos que é...[Carlos não completa seu raciocínio].

Professora: A tua frequência é quantas vezes o teu gráfico oscila no intervalo de 0 a 2π. Quantas oscilações completas tu vês?

Carlos: Duas.

Professora: Então a frequência é de 2[em 2π]. Então tu colocou frequência igual a 2π dividido pelo π que é o comprimento da tua onda. [Professora chama a atenção do aluno para o cálculo que ele fez].

Carlos: Tá vamos fazer aqui.... [Aluno escreve a lápis].

Professora: Qual seria o período?

Carlos: 0,5. [Conclusão feita a partir da ideia inicial de que período é o inverso da frequência, sendo $f = C$].

Professora: Tu consegue ver o intervalo em que completa uma oscilação? Qual seria o comprimento dessa onda?

Carlos: Tá, a gente tá tomando como padrão o intervalo. Então dá 2 oscilações para 1...

Professora: E o período?

Carlos: Se dá 2 oscilações para 1, é 3,5.

Professora: 3,5?

Carlos: Não, dá π.

Professora: Tá, então o período é π. Se tu observar o que tu colocou aqui [período é o inverso da frequência], o teu período seria 1 sobre 2. Como que eu faria aqui pra aparecer o π na resposta?

Carlos: 2π. [Carlos percebe que precisa ajustar sua fórmula inicial $P = \dfrac{1}{C}$ para $P = \dfrac{2\pi}{C}$].

Professora: Isso, então no lugar do 1, seria 2π. Agora 2π dividido pelo 2 dá o período que é π. E de onde que aparece esse 2?

Carlos: O 2 é a frequência.

Professora: Isso, o 2 é esse valor da frequência que fica aparecendo na função multiplicando o x. Então aqui tá a fórmula do teu período.

Carlos: Então eu posso colocar o período como 2π sobre C.

Um teorema-em-ação interessante foi identificado a partir do diálogo: "O período é o inverso da frequência". O aluno Carlos mostrou que sabia identificar o número de oscilações do gráfico no intervalo de comprimento 2π e que sabia identificar o comprimento de onda (que é o período da função), porém fixou-se, inicialmente, na ideia de que o período era o inverso da frequência para tentar encontrar a fórmula do período, sendo que estava considerando $f = C$ e $P = \frac{1}{C}$. Através do diálogo, queria que o aluno percebesse que não bastava inverter a frequência para se ter o período. Conversei com o grupo com o objetivo de que percebesse que calculando 1/2 encontraria período igual a 0,5 (como o grupo mesmo disse), mas os alunos estavam afirmando, ao mesmo tempo, que o comprimento de onda era π, então trabalhei com a ideia do que precisava ser alterado nessa fórmula. Concluiu-se que o 1 deveria ser trocado por 2π, assim chegou-se à expressão: $P = 2\pi/C$.

As respostas do 11° exercício também estavam corretas, exceto por 1 dos 5 itens, em que o grupo escreveu transformações que não aconteceram. Para $f_1(x) = 2 + (1/2).cos\ x$, o grupo identifica: "Alongamento horizontal, deslocamento para cima e deslocamento para a direita". A confusão aqui é que a compressão vertical parece alongar o gráfico horizontalmente, ele não percebeu que o período ficou o mesmo, ou seja, confundiu uma alteração com a outra, o que indica que estava focado na forma e não na imagem do gráfico.

O grupo II respondeu aos desafios corretamente. O 1° primeiro desafio pedia para se obter a altura de uma pessoa em uma roda-gigante ao iniciar o movimento, as alturas máxima e mínima atingidas por ela e o tempo em que a roda gigante completa uma volta. Inicialmente poderia ser construído o gráfico da função $h(t) = 11{,}5 + 10.sen\ [\pi/12(t - 26)]$ no GeoGebra, em seguida, a altura inicial deveria ser calculada sem observar o gráfico no GeoGebra. Pude notar (figura 103) que os alunos resolveram o 1° desafio utilizando a unidade de medida radianos. O grupo queria transformar a medida para graus, porém a professora explicou a eles que poderiam utilizar radianos para calcular o seno. O grupo aparentemente compreendeu a ideia de dividir a parte superior do círculo em seis partes iguais (devido ao $\frac{\pi}{6}$), a parte inferior também em seis partes, e então, contar de $\frac{\pi}{6}$ em $\frac{\pi}{6}$ até completar os $-13\frac{\pi}{6}$ solicitados (ver figura 104), inclusive, o grupo percebeu que a contagem deveria ser feita no sentido horário por causa da medida negativa. O grupo finalizou calculando corretamente o seno do valor encontrado.

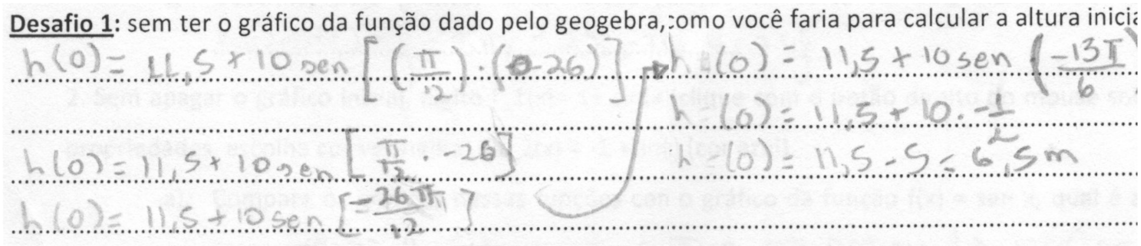


Figura 103: Resolução do 1° desafio pelo grupo II.

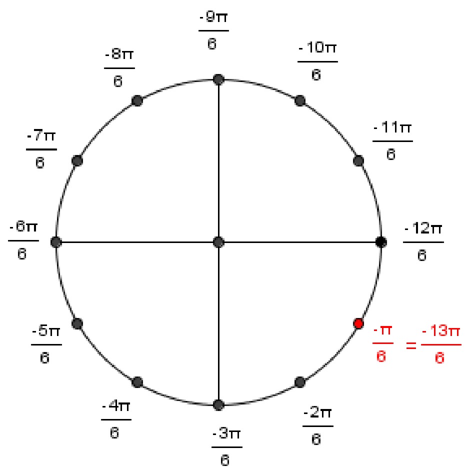
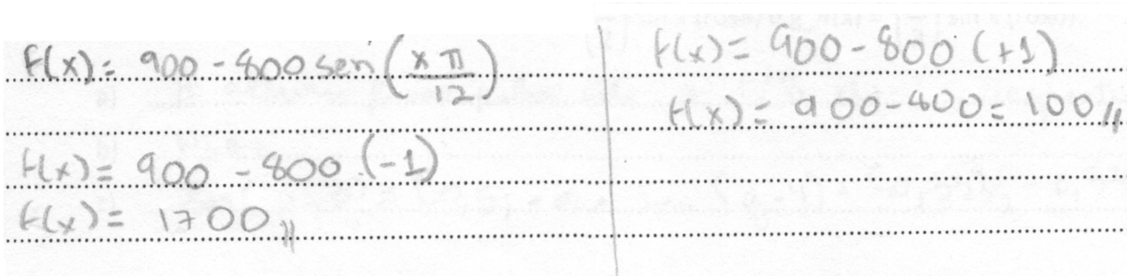


Figura 104: Localização da medida $-13\frac{\pi}{6}$ no círculo trigonométrico.

O 2° desafio pedia para calcular a diferença entre o número máximo e mínimo de pessoas que circulam em um supermercado durante um dia, esse movimento foi modelado pela função $f(x) = 900 - 800\, sen(\frac{x\pi}{12})$. Podemos perceber, na figura 105, que o grupo conseguiu substituir o seno pelo seu valor máximo (1) e mínimo (-1) para obter os números máximo e mínimo de pessoas no supermercado. A professora, durante a aula, chamou a atenção do grupo para o fato de terem encontrado, ao substituir a altura mínima, o valor máximo de número de clientes no supermercado e vice-versa. A professora destacou o sinal "-" na frente do seno, que provocou uma reflexão em torno do eixo *x*, portanto houve a inversão das alturas do gráfico.


$f(x) = 900 - 400\,sen\left(\frac{x\pi}{12}\right)$

$f(x) = 900 - 400\,(-1)$

$f(x) = 1700$

$f(x) = 900 - 800\,(+1)$

$f(x) = 900 - 400 = 100$

Figura 105: Resolução do 2° desafio pelo grupo II.

O grupo III respondeu corretamente a atividade até o 5° exercício. No exercício 6, item *c*, que pedia a identificação de um intervalo em que as funções $i_1(x) = sen\ (2x)$ e $i_2(x) = sen\ (4x)$ completam um período e o comprimento desse intervalo, o grupo respondeu para a primeira função: "Intervalo: [0, π/2]. Comprimento: π/2" e, para a segunda função, "Intervalo: [0, π/4]. Comprimento: π/4". Analisando essas respostas, concluí que o grupo considerou como período apenas a parte positiva da função, ou seja, a curva cresce (observando o gráfico a partir de $x = 0$) e decresce atingindo o eixo x em $x = \pi/2$ e esse trecho do gráfico corresponderia a um período. O grupo parece ter utilizado o mesmo raciocínio para a outra função. Essas respostas indicaram a utilização do conceito-em-ação que considera que apenas os valores positivos importam. Nos demais exercícios, o grupo respondeu corretamente os intervalos e os comprimentos dos mesmos, tanto para alongamento horizontal como para deslocamento horizontal.

No 10° exercício, o grupo responde a maior parte dos itens corretamente, porém não consegue identificar que o período varia quando há compressão ou alongamento horizontal, e que é dado por $P = \dfrac{2\pi}{C}$ (os outros dois grupos conseguiram). Ele completa o item *d* escrevendo: d) Se **C** for um número maior que 1 (um), irá provocar uma "<u>compressão horizontal</u>" no gráfico de $f(x) = sen\ x$ e o período será dado por: P = "<u>2π</u>". E completa o item *e* escrevendo: Se **C** for um número entre 0 (zero) e 1 (um), irá provocar um "<u>alongamento horizontal</u>" no gráfico de $f(x) = sen\ x$ e o período também será dado por P = "<u>2π</u>". Com base nessas respostas pode-se supor que o grupo III tem a ideia de que o período será sempre 2π, o que indicaria a utilização do teorema-em-ação: "período não muda"; ou que estão se baseando em alguma função dos exercícios anteriores para responder.

O item *b* do 11° exercício pedia para identificar as transformações na função $f_2(x) = -1 + cos\ (2x)$, o grupo respondeu: "Vai cair uma unidade e as raízes dividiram por 2".

Essa resposta pode estar indicando que o grupo conseguiu compreender a mudança de período ou talvez estivessem focados apenas nas raízes e não pensando em uma "volta completa".

O grupo III foi o único que tentou realizar o 12° exercício. Para o primeiro gráfico dado, figura 106, o grupo identifica "*f(x)* = 3.*sen* (2*x*)", quando deveria ter escrito cosseno no lugar de seno, ou ter considerado ainda a função seno, mas com um deslocamento horizontal. Mesmo assim, é importante observar que o grupo conseguiu identificar no gráfico o alongamento vertical e a compressão horizontal e usar essas informações na lei de formação da função.

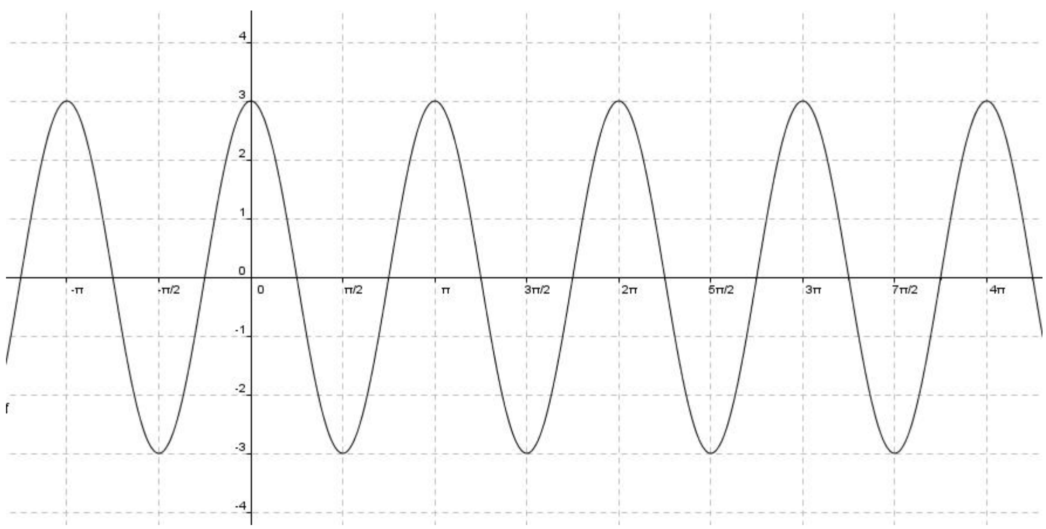


Figura 106: Gráfico do item *a* da questão 12.

O grupo III também aproximou-se da segunda lei de formação da função (o gráfico do item *b* pode ser visto na figura 107) e deu ainda duas possibilidades para a resposta: "*g(x)* = -2 + *sen (x* -0,8*)* ou -2 + *(x* + 5,52*)*". Nesse caso, o grupo observou tanto o deslocamento vertical para baixo como os deslocamentos horizontais, que podem ser considerados para a direita ou para a esquerda, porém o deslocamento para a esquerda deveria ser representado por "+0,8" na primeira função, ou para a direita por "-5,52" na segunda função. Esse é um erro comum: interpretar o sinal do parâmetro como indicativo do sentido de deslocamento, associando negativo para esquerda e positivo para direita.

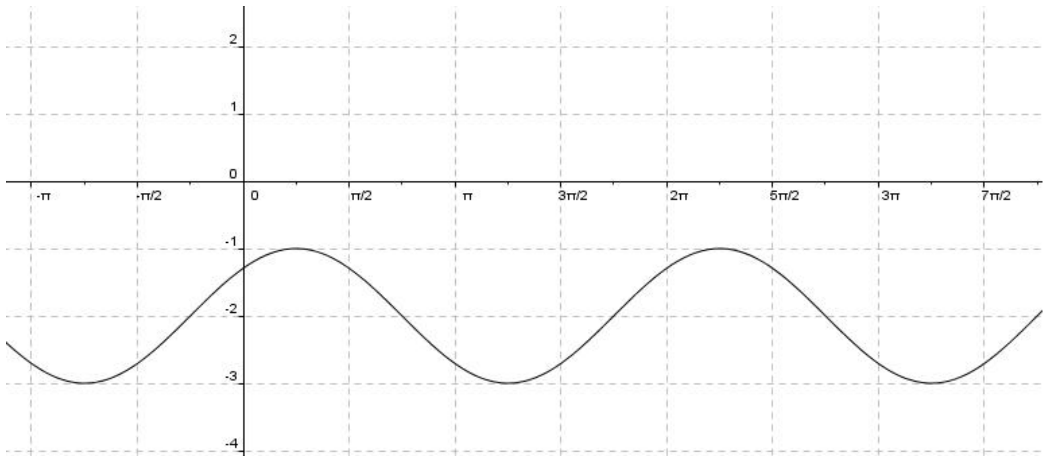


Figura 107: Gráfico do item *b* do 12° exercício.

Para o item *c*, o grupo identifica a lei "$h(x) = 0{,}5 + 2{,}5\ sen\ (x + 1{,}5)$ ou $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} sen\ (x + \frac{3}{2})$ ". O gráfico do item *c* pode ser visto na figura 108. As duas respostas representam as mesmas transformações, porém uma está no formato decimal e a outra no formato fracionário. A resposta do grupo indica que ele percebeu o deslocamento vertical para cima e o alongamento vertical, mas não conseguiu identificar quantas unidades deslocou ou alongou. Observei que o grupo escolheu os valores 0,5 e 2,5, que somados resultam em 3, o valor máximo da função que pode ser visto no gráfico, portanto teve o cuidado de escolher valores que mostrassem essa relação com a altura máxima da função, mesmo estando errado. O grupo não identifica o valor médio como critério para deslocamento vertical, compensa deslocamento vertical com alongamento vertical. Algumas alternativas corretas de respostas que o grupo poderia dar eram: $f(x) = 1 - 2.sen(x)$, $f(x) = 1 + 2\ sen(x + \pi)$, $f(x) = 1 + 2\ sen\ (x - \pi)$. Já com relação ao deslocamento horizontal, o valor escolhido estaria correto se a função fosse cosseno, ou seja, o gráfico estaria deslocado para a esquerda, aproximadamente, 1,5 unidades: $f(x) = 1 + 2.cos(x + \pi/2)$, porém o grupo registrou seno.

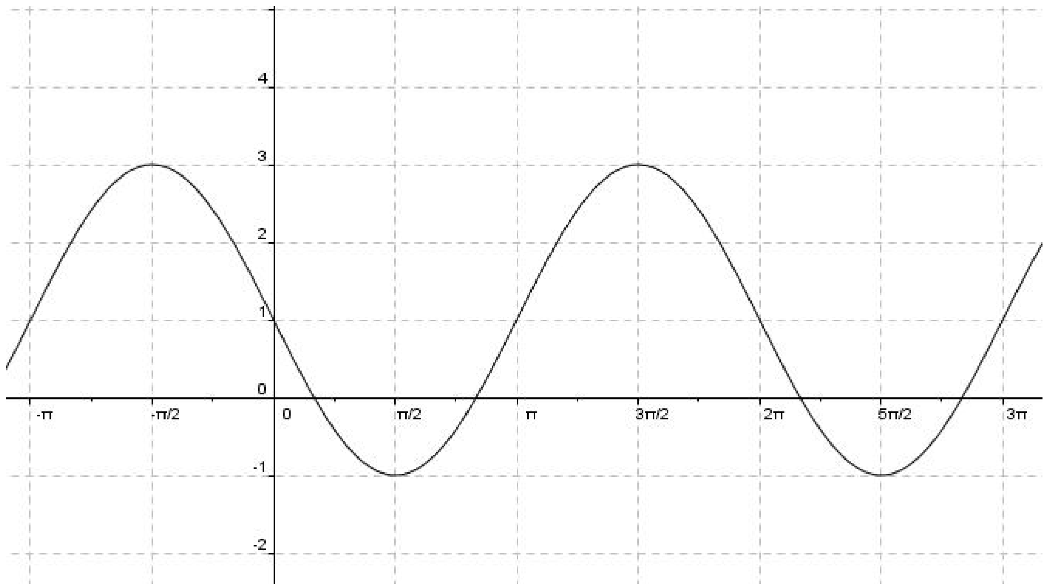


Figura 108: Gráfico do item *c* do 12° exercício.

A resolução dos desafios pelo grupo III foi feita de forma correta. O grupo iniciou corretamente a resolução do 1° desafio (sobre o movimento da roda gigante) substituindo *t* por 0 (figura 109 abaixo). Atrapalhou-se porém com as unidades grau e radiano. O grupo transformou π/12 para a unidade grau e diminuiu do resultado o valor 26 que estava em radianos. Após a orientação da professora, o grupo transformou tudo para radianos, obtendo argumento igual a -25,74. Porém, aqui repetiu o erro de misturar graus e radianos. Entendeu o valor -25,74 radianos como -25,74° e reduziu esse valor para o primeiro quadrante. Novamente, a professora interveio e sugeriu que passassem tudo para graus, já que o grupo estava confundindo-se com radianos. O aluno *d* comenta: "Radianos só complica! Os numerozinhos são menores, mas é mais difícil". Então, utilizou regra de três para transformar radianos para graus, através da relação que o grupo lembrava: 1 radiano equivale a um ângulo de 57,3° aproximadamente. A partir desse momento, a resolução foi correta: encontrou a medida -1474,902°, diminuiu as voltas completas, encontrando um resto igual a -34,902°, reduziu esse valor para o primeiro quadrante, obteve o seno correspondente (inicialmente escreveu positivo, porém em seguida colocou o sinal correto) e calculou o que estava sendo pedido na questão. A resposta do aluno teve uma diferença grande com relação à resposta correta (uma diferença de 0,7m para menos), devido aos arredondamentos que o aluno foi fazendo durante o cálculo. A figura 109 mostra a resolução da segunda parte do desafio pelo grupo III.

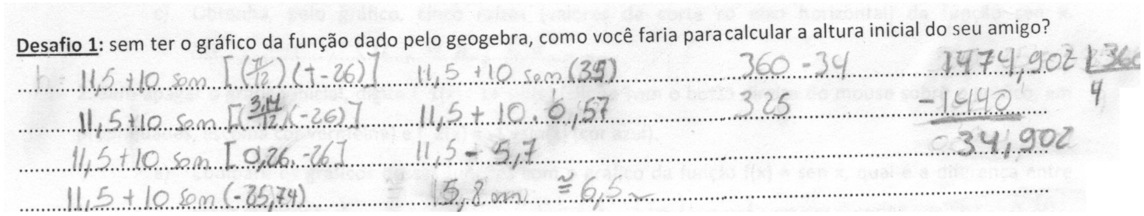


Figura 109: Resolução do 1° desafio pelo grupo III.

O segundo desafio, sobre o número de clientes que circulam em um supermercado, foi resolvido corretamente pelo grupo, porém pude perceber uma certa confusão no registro. Na primeira linha da resolução, à esquerda na figura 110, o grupo escreveu $f(x) = 900 - 800\ sen(\frac{12\pi}{x})$, na segunda linha, omitiu o *x* e o 12, escrevendo apenas $f(x) = 900 - 800.sen(\pi)$ e somente na terceira escreveu o argumento corretamente.

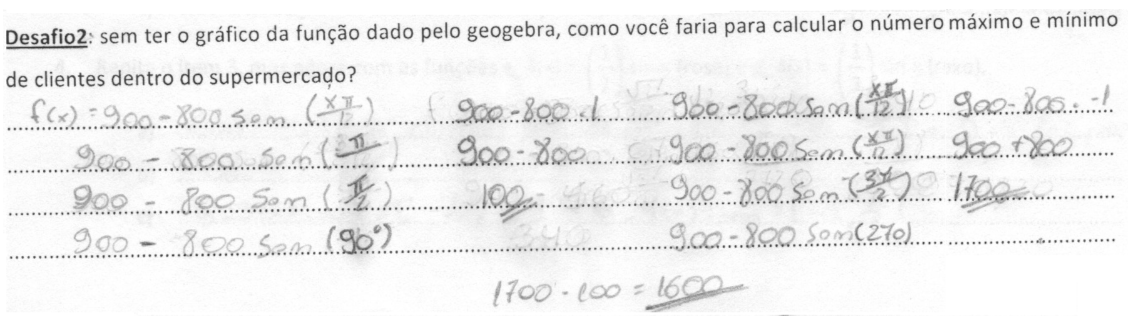


Figura 110: Resolução do 2° desafio pelo grupo III.

4.11.3 Comentários sobre a atividade 9

A atividade 9 permitiu que os alunos observassem características importantes dos gráficos das funções seno e cosseno como: imagem, raízes, alturas máxima e mínima, período e as transformações nos gráficos. Permitiu também que os grupos analisassem e comparassem os gráficos, percebendo semelhanças ou diferenças. O GeoGebra mostrou-se um recurso importante na realização desses exercícios, pois os alunos conseguiram construir os gráficos facilmente (bastando digitar a função na "entrada"), personalizá-los (modificando as cores conforme foi orientado), observá-los na janela de visualização e ainda podiam ver as leis das funções na janela de Álgebra facilitando a identificação e análise desses gráficos. O GeoGebra permitiu também que os alunos observassem os gráficos em movimento. O recurso de modificar os parâmetros A, B, C e D nas funções

$f(x) = A + B\ sen[C(x + D)]$ e $g(x) = A + B\ cos[C(x + D)]$ apresentado no arquivo "transformações nos gráficos_variação" permitiu que os alunos vissem os gráficos sendo alongados, comprimidos, deslocados... de maneira dinâmica e não estática como nos gráficos iniciais da atividade.

O exercício 12 foi resolvido por apenas um grupo. Nesse exercício, os alunos tinham que identificar os valores dos parâmetros A, B, C e D através dos gráficos e escrever a função correspondente a cada um deles. Poderiam inclusive utilizar o arquivo "transformações nos gráficos_variação" para tentar reproduzir os gráficos e observar as leis na janela de Álgebra. O grupo I, como foi comentado anteriormente, realizou a atividade somente até o 10° exercício por causa da falta de tempo, portanto não foi possível concluir se teria conseguido realizá-lo ou não. Já o grupo II deixou de realizar somente esse exercício. O grupo II mostrou que conseguiu identificar as transformações nos gráficos a partir das leis das funções, pois realizou corretamente a maioria dos exercícios até o 11°, porém no 12° foi solicitado que raciocinasse de forma inversa e não conseguiu realizar esse processo. Isso mostra que as noções sobre transformações ainda não estavam bem compreendidas pelo grupo.

Percebi na resolução dos problemas que os grupos não compreenderam o cálculo do seno da função do 1° desafio, pois o argumento foi dado em radianos. Um grupo conseguiu obter o valor do seno do arco através dos radianos e o outro grupo transformou o arco para um ângulo medido em graus. Com ajuda da professora durante a realização dos problemas, conseguiram resolvê-los e parece que compreenderam o que estavam fazendo. Notei isso pois os alunos conseguiram, por exemplo, substituir os valores máximo e mínimo do seno para achar o número máximo e mínimo de pessoas que circulavam no supermercado e também conseguiram entender a inversão desses valores provocada pelo "-1" que multiplicou a função seno.

No encerramento da 2ª etapa da experiência de ensino, realizou-se uma avaliação dos grupos quanto à compreensão dos conhecimentos. A tabela 37 mostra os conhecimentos abordados em cada atividade.

Atividade 6	Simetrias. Círculo trigonométrico. Comparar valores de seno e cosseno de ângulos simétricos. Resolver equações trigonométricas.
Atividade 7	Arcos medidos em radianos. Arcos com medidas negativas. Calcular seno e cosseno de arcos. Associar a medida de arco com a abscissa de um ponto sobre o eixo x.
Atividade 8	Círculo trigonométrico. Seno e cosseno no círculo trigonométrico. Função seno e função cosseno. Construir e caracterizar os gráficos de seno e cosseno no intervalo $[0, 2\pi]$.
Atividade 9	Função seno e cosseno. Analisar funções trigonométricas. Analisar transformações nos gráficos de seno e cosseno. Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas.

Tabela 37: Conhecimentos abordadas nas atividades da 2ª etapa da experiência.

Os grupos foram separados em duas categorias: na primeira, estão os grupos que conseguiram compreender a maior parte dos conhecimentos; na segunda categoria, estão os grupos que conseguiram compreender alguns conhecimentos, porém precisariam retomar alguns pontos.

1ª) Os grupos I, II e III conseguiram compreender a maior parte dos conceitos abordados. O grupo III foi o que teve melhor desempenho na 2ª etapa evidenciando isso nas resoluções das atividades e nas suas falas durantes as aulas. O grupo I apresentou dificuldade com a resolução de algumas equações trigonométricas na atividade 6, porém os outros conhecimentos foram compreendidos. Nas atividades seguintes, o grupo mostra que também compreendeu os conhecimentos abordados, sendo que a última atividade não pôde ser avaliada integralmente, pois o aluno não teve tempo de acabá-la. O grupo II, na atividade 6, apresentou dificuldade em resolver algumas equações trigonométricas, porém durante as discussões em aula, mostrou ter avançado na compreensão dessas equações. Nas demais atividades, o grupo mostrou ter desenvolvidos os conhecimentos, apresentando ainda algumas dúvidas sobre cálculo de seno ou de cosseno de arcos medidos em radianos, contudo essas dúvidas parecem ter sido esclarecidas.

2ª) Os grupos IV e V compreenderam parte dos conceitos. O grupo IV apresentou dificuldade em resolver algumas das equações trigonométricas da atividade 6. Conseguiu avançar na compreensão dos conhecimentos da atividade 7. Não compreendeu os conhecimentos abordados na atividade 8, pois respondeu apenas a um exercício, deixando os restantes em branco. Não compareceu em aula para a realização da atividade 9. O grupo V não compareceu em aula para a realização das atividades 7 e 9. Na atividade 6, não conseguiu resolver as equações trigonométricas propostas. Na atividade 8, o grupo conseguiu perceber o crescimento ou decrescimento dos gráficos das funções seno e cosseno, porém ficou limitado a essas observações.

A identificação dessas duas categorias permitiu observar que os três grupos que realizaram todas as atividades conseguiram compreender os conceitos propostos, e acredito que os outros dois grupos poderiam ter tido melhor aproveitamento se tivessem comparecido a todas as aulas, completando a sequência de ensino. Ficou evidente que a mediação da professora e as discussões com os grupos foram fundamentais para o esclarecimento das dúvidas e que o número reduzido de alunos participantes na 2ª etapa contribuiu para isso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise das resoluções das atividades dos alunos e diálogos gravados durante as aulas permitiram observar o avanço na compreensão de conceitos trigonométricos importantes que me propus desenvolver, como os de: seno, cosseno e tangente como razões trigonométricas, ângulo, círculo trigonométrico, simetria, equação trigonométrica, função trigonométrica e transformações trigonométricas nos gráficos de seno e cosseno.

Observei que os alunos relacionavam as situações propostas com conceitos-em-ação construídos por eles anteriormente e que consideravam pertinentes a essas situações. A identificação e análise dos teoremas-em-ação utilizados por eles foi fundamental para a observação e compreensão das ideias que foram desenvolvendo ao longo das situações propostas. Tanto os teoremas-em-ação verdadeiros como os falsos representaram importantes oportunidades de discussões em aula sobre os conhecimentos que estavam sendo abordados. Os teoremas-em-ação verdadeiros, enunciados ou utilizados, indicaram que as atividades propostas, realizadas com o auxílio do *software* GeoGebra, foram situações propícias à construção desses conhecimentos. Os teoremas-em-ação falsos também foram fundamentais, pois, a partir deles, novas discussões foram realizadas no momento em que apareceram ou posteriormente à observação das resoluções das atividades pela professora. Nessas discussões, procurei superar as confusões observadas e o GeoGebra mostrou-se uma ferramenta importante nesse processo.

A utilização do GeoGebra e a análise das resoluções das atividades e das falas dos alunos, baseada na Teoria dos Campos Conceituais, permitiram não só identificar as dificuldades e os erros cometidos, mas acima de tudo, permitiu compreender melhor os raciocínios dos alunos frente aos desafios e assim, a professora pôde fazer intervenções mais adequadas à construção dos conceitos. O uso dos recursos do *software* foi importante para destacar os elementos que estavam desconsiderando ou relações entre os objetos que não estavam percebendo.

Tendo em vista a discussão sobre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados e elaborados pelos alunos ao longo da experiência de ensino, vários deles são enunciados a seguir:

1) Se os lados do triângulo mudam, então seno, cosseno e tangente também mudam. (Falso).
2) Se os ângulos são diferentes, então as alturas [cateto oposto] também serão diferentes. (Falso).

3) A soma dos ângulos internos de um triângulo é dada pela soma dos ângulos que aparecem na figura. (Falso).
4) Cateto oposto é aquele que está posicionado verticalmente, cateto adjacente é o que está posicionado horizontalmente e hipotenusa é o segmento que une os extremos desses segmentos. (Falso).
5) A razão entre as medidas de dois lados do triângulo retângulo resulta na medida do terceiro. (Falso).
6) Se um ângulo mede um valor maior do que 360°, então descontam-se as voltas completas e marca-se a medida restante no círculo. (Verdadeiro).
7) Se um ângulo de 360° determina um arco de uma volta completa no círculo trigonométrico, então não existem ângulos maiores do que 360°. (Falso).
8) Se um ângulo é negativo, então diminui-se o módulo desse valor do ângulo de 360° e marca-se a medida restante (para $0° > \alpha > -360°$). (Verdadeiro).
9) Se no círculo trigonométrico mostrado na tela só aparecem ângulos positivos, então não existem ângulos negativos. (Falso).
10) Se os triângulos retângulos são semelhantes, então a razão entre lados correspondentes será igual. (Verdadeiro).
11) Se um triângulo é retângulo, então a relação a ser utilizada é o Teorema de Pitágoras. (Verdadeiro).
12) O número de vezes que um arco cabe em um círculo é dado pela razão entre 360° e o ângulo correspondente ao arco. (Verdadeiro).
13) Do ponto A = (1, 0) até o ponto P = (0, 1) tem-se um arco de medida 1, então cabem 4 arcos iguais a esse no círculo. (Falso).
14) Um radiano é igual a π radianos. (Falso).
15) O quadrado de um número é igual ao número multiplicado por dois. (Falso).
16) Se seno e cosseno no círculo trigonométrico podem ser vistos pelas medidas dos segmentos, então seno e cosseno de 0°, 90°, 180°, 270° e 360° são sempre 1. (Falso).
17) Os valores de *sen* 0°, *sen* 90°, *sen* 180°, [e assim por diante], são dados pelas medidas dos arcos determinados pelos respectivos ângulos. (Falso).
18) Se $sen\ ax = b$ então $sen\ x = \frac{b}{a}$, com $a \neq 0$. (Falso).
19) O ponto P está no 1° quadrante, P_1 está no 2° quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo *y*. Sendo assim, $A\hat{O}P_1 = 90° - A\hat{O}P + 90°$. (Verdadeiro).

20) O ponto P está no 1° quadrante, P_1 está no 2° quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo y. Sendo assim, $A\hat{O}P_1 = 180° - A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_1 = A\hat{O}P + A\hat{O}P + A\hat{O}P$. (Verdadeiro).
21) O ponto P está no 1° quadrante, P_3 está no 4º quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo x. Sendo assim, $A\hat{O}P_3 = 270° + A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_3 = 360° - A\hat{O}P$. (Verdadeiro).
22) O ponto P está no 1º quadrante do círculo trigonométrico, P_1 está no 2°, P_2 está no 3° e P_3 está no 4° quadrante. Se forem traçados segmentos unindo os pontos e formar-se um retângulo, então os quatro pontos são simétricos entre si. (Verdadeiro).
23) Se $cos\ ax = -1$, então $ax = 180°$, logo $x = \frac{180°}{a}$. (Verdadeiro).
24) Resolver $cos\ x = cos\ 1$ é o mesmo que resolver $cos\ x = 1$. (Falso).
25) $Sen\ \alpha$ é o mesmo que $sen = \alpha$, com α medido em radianos. (Falso).
26) Se -2 é o simétrico do arco de medida 2 em relação ao eixo x, então $cos(-2) = cos(2)$. (Verdadeiro).
27) Se -2 é côngruo ao arco de medida 4,28 obtido por 6,28 - 2 = 4,28, então $cos(-2) = cos(4{,}28)$. (Verdadeiro).
28) $j_1(x) = sen\ (x-(\pi/2))$ é uma reflexão em torno do eixo x do gráfico de $j_3(x) = sen\ (x +(\pi/2))$. (Verdadeiro).
29) Se uma função trigonométrica for multiplicada por -1, então as alturas se alternam ou muda [desloca horizontalmente] o período. (Verdadeiro).
30) O período começa sempre em $x = 0$. (Falso).
31) O período é o inverso da frequência, sendo $f = C$ e $P = \frac{1}{C}$. (Falso).
32) Período não muda (sempre $P = 2\pi$). (Falso).

A sequência de ensino evidenciou confusões dos alunos relativas à noção de ângulo, desde a primeira atividade. Inicialmente, observei que alguns grupos confundiam lado do triângulo com o ângulo, ou não conseguiam mudar o ângulo de referência para a identificação dos lados. Os teoremas-em-ação citados acima nos itens 2, 3, 7, 9 são exemplos de teoremas falsos sobre noções ou propriedades de ângulos. Essas noções errôneas foram retomadas em aula e em outras situações, como na atividade de retomada dos ângulos e arcos medidos em graus e radianos. Já os itens 6, 8, 12, 19, 20, 21, 22 são exemplos de teoremas-em-ação verdadeiros sobre essas noções ou propriedades.

Confusões com o seno (ou cosseno) de um arco, medido em radianos, e o valor desse seno como sendo a própria medida do arco em radianos apareceram também nas atividades. Pude observar escritas do tipo: *sen* 1 $\Leftrightarrow$ *sen* = 1. O GeoGebra nesses casos também serviu como referência para esclarecimento desses teoremas-em-ação falsos, pois pôde-se marcar um arco de 1 radiano e chamar a atenção do aluno para o seno correspondente e, em seguida, mostrar o seno com valor 1, pela ordenada do ponto ou pelo segmento OS no eixo y, e chamar a atenção para qual ângulo ou arco determinava esse seno de valor 1. Outras confusões semelhantes a essa podem ser observadas nos itens 17, 24 e 25. Já os itens 26 e 27 mostram raciocínios construídos corretamente acerca de cossenos de arcos medidos em radianos.

O uso do GeoGebra mostrou-se um programa eficaz como auxílio na elaboração de situações de aprendizagem escolar ricas em possibilidades de construção de conhecimentos. As manipulações das figuras apresentadas para os alunos, bem como as construções realizadas por eles, promoveram dinamismo nas atividades, possibilidades de realização de tentativas, confirmação de hipóteses, observação de relações entre objetos variáveis e fixos. No GeoGebra, várias informações foram apresentadas aos alunos e eles precisavam desenvolver a capacidade de selecionar aquelas que eram pertinentes ao exercício ou problema que estavam resolvendo. Os teoremas-em-ação citados nos itens 22, 23, 26, 27, 28 e 29 exemplificam conclusões importantes e que foram baseadas nesse processo de manipulação das figuras no programa. Por outro lado, em algumas situações, o uso do GeoGebra reforçou ideias errôneas. Pudemos observar isso nas situações em que os alunos ficaram focados nas imagens mostradas na tela; os teoremas-em-ação dos itens 3, 4 e 9 são exemplos disso.

Outras observações importantes realizadas durante a experiência foram: o tratamento linear de seno e cosseno (item 18) em oposição ao raciocínio correto para resoluções de equações trigonométricas (item 23); a identificação de relações e de propriedades entre lados do triângulo retângulo (itens 1, 4 e 5 - falsos - 10 e 11 - verdadeiros); a relação entre os conceitos abordados e o que foi abordado na disciplina de Física (o item 31 mostra um teorema-em-ação falso sobre essa relação, porém o grupo que o desenvolveu mostrou tê-lo corrigido ao longo da atividade).

A sequência de ensino proporcionou aos alunos a manipulação de figuras, a observação de variações, relações e propriedades das construções geométricas. Permitiu a eles criar hipóteses e testá-las, confirmando-as ou reformulando-as quando necessário. Esse dinamismo e interatividade beneficiaram sua aprendizagem, pois o grupo saiu da postura de ouvinte de explicações para a postura de investigador de hipóteses, de padrões, de relações, ou seja, os exercícios eram dados e eles que tinham que buscar e/ou elaborar as explicações e as respostas A sequência de ensino também possibilitou uma mudança na relação entre a professora e os alunos. Anteriormente, as aulas eram estruturadas com explicações dos conteúdos, exercícios e correção, logo a professora tinha o papel de transmitir os conteúdos e os alunos tinham o papel de receptores desses conteúdos. Com a experiência, os alunos assumiram o papel de construtores do seu próprio conhecimento e a professora assumiu o papel de mediadora. Essa mediação foi importante para orientá-los na descoberta e na utilização das ferramentas do programa necessárias nas atividades, também foi fundamental quando os alunos utilizaram ou elaboraram conceitos-em-ação e teoremas-em-ação falsos, para que percebessem que estavam pensando de maneira equivocada, e quando utilizaram ou elaboraram conceitos e teoremas-em-ação verdadeiros, para que tivessem a confirmação de que o que estavam pensando estava correto.

A sequência de ensino trouxe outro benefício, além da mudança de papéis no processo de ensino, que não era esperado. A relação afetiva entre a turma e a professora mudou. A relação entre a turma e a professora, quando estavam no 1° ano do Ensino Médio, era tensa, devido ao desinteresse dos alunos pelas aulas, pelas atividades propostas e pela própria Matemática. Porém, a possibilidade de eles saírem da sala de aula, irem para o laboratório de informática, realizarem atividades mais dinâmicas, conversarem com a professora sobre suas ideias tornou o ambiente de aprendizagem mais agradável. Quando a professora falou a eles da sua saída da escola, alguns alunos comentaram que sentiriam falta das aulas, pois estavam gostando e entendendo as aulas de Matemática.

A experiência de ensino evidenciou o contrato didático estabelecido anteriormente nas aulas de Matemática. Nele, os alunos estavam acostumados a: extrair todos os dados dos enunciados dos problemas e com eles realizar algum procedimento, ao invés de selecionar as informações relevantes dos enunciados e das figuras mostradas na tela; encontrar um número qualquer como resposta, ao invés de analisar se essa resposta é coerente com o contexto apresentado; e resolver um problema unicamente através de operações e de fórmulas, sem perceber que é possível resolver algumas situações sem efetuar cálculos e operações, como através dos recursos de um *software* matemático.

Sobre o desenvolvimento da sequência de ensino, gostaria de ter aplicado as atividades com toda a turma até o final. Dessa maneira, seria possível analisar a experimentação de toda a sequência com uma turma regular do Ensino Médio. Também seria possível analisar se, de fato, as confusões que apareceram para o grupo inicial foram esclarecidas ao final da primeira etapa, pois poder-se-ia observar se iriam reaparecer na atividades seguintes. Por outro lado, com o grupo menor de alunos, percebi que os diálogos entre eles e entre eles e a professora foram mais produtivos. Por estarem em um grupo menor, estavam mais concentrados e deve-se levar em consideração que os sete alunos desse grupo foram voluntários, ou seja, estavam ali manifestamente interessados em aprender mais Trigonometria. Nessa segunda etapa da experiência, pude sentar-me ao lado dos grupos e acompanhar a realização das tarefas por mais tempo. Com o grupo grande, atendia uma dúvida de um determinado grupo e em seguida tinha que me deslocar para ajudar outro que estava me chamando.

Considero que a experiência mostrou-se uma alternativa interessante para o ensino da Trigonometria por ter instigado os alunos a pensarem sobre a Trigonometria, a criarem suas hipóteses, a testá-las, conforme foi comentado anteriormente. Mesmo não tendo sido testada por inteiro com uma turma, acredito que possa ser aplicada do início ao fim com uma turma regular. Nesse caso, seria interessante o professor utilizar um computador para si e projetar em uma tela a atividade que estivesse aplicando, para poder responder e discutir com a turma as dúvidas que fossem surgindo. Essa seria uma alternativa para qualificar o acompanhamento das resoluções e das ideias elaboradas pelos grupos. Para uma próxima experiência, acrescentaria atividades que enfocassem o Teorema Fundamental da Trigonometria ($sen^2\, x + cos^2\, x = 1$), a função tangente e as razões trigonométricas secante, cossecante e cotangente no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico.

Para finalizar, gostaria de comentar que a experiência de ensino enriqueceu minha formação como professora, pois me permitiu vivenciar e observar os benefícios que uma mudança na estrutura das aulas e das atividades propostas podem trazer para a aprendizagem dos alunos. Permitiu constatar o quanto é importante o professor desenvolver a sua criatividade, elaborando material próprio, pesquisando o que outros professores estão fazendo para contribuir com o ensino, não só da Trigonometria, mas também de outros conteúdos matemáticos. Assim, a experiência influenciou minha prática docente levando-me a pensar em um ensino diferenciado, a elaborar, a criar e a testar alternativas de ensino para outras turmas, de outros níveis de ensino, e para outros conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria - Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

COSTA, Nielce M.L. **Funções Seno e Cosseno: uma Sequência de Ensino a partir dos Contextos do "Mundo Experimental" e do Computador**. 1997. 250p. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), PUC-SP. 1997.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Contexto e Aplicações**. 2.ed. Vol. Único. São Paulo: Editora Ática, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Contexto e Aplicações**. 3.ed. Vol. Único. São Paulo: Editora Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática.** 5ª série. São Paulo: Editora Ática, 2003.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar 9 - Geometria Plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 2000.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Traduzido por Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GADOTTI, Marlene de Fátima. **Definições Matemáticas do Conceito de Ângulo: Influências da História, do Movimento da Matemática Moderna e das Produções Didáticas nas Concepções dos Docentes**. 2008. 135p. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Metodista de Piracicaba. São Paulo. 2008.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr., José Ruy. **Matemática**. Sistema de Ensino. São Paulo: FTD, 2007. v. 1 e 2.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto; GIOVANNI Jr., José Ruy. **A Conquista da Matemática.** 5ª série. São Paulo: FTD, 2007.

GOÉS, Anderson R.T.; COLAÇO, Heliza. **A Geometria Dinâmica e o Ensino da Trigonometria**. In: Encontro Nacional de Informática e Educação, 1, 2009, Paraná. Anais.

GRAVINA, Maria Alice. **Mídias Digitais na Educação Matemática I** (recurso eletrêonico). Porto Alegre: UFRGS, 2011.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. 277p. Tese (Doutorado em Informática na Educação), Faculdade de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria** . In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 7, 1996, Belo Horizonte. **Anais**. Fortaleza: 1996

HILBERT, David. **Fundamentos de la Geometria**. Madrid: Instituto Jorge Juan de Matematicas, 1953.

HOFFMANN, Daniela Stevanin. **Geometria e Trigonometria na Resolução de Problemas** [recurso eletrônico]. Porto Alegre: UFRGS, 2011.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 3 -Trigonometria.** 7. ed. São Paulo: Atual, 1999.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. Matemática Para Todos: 5ª série. São Paulo: Scipione, 2003.

KLEIN, Marjúnia Édita Zimmer. **O Ensino da Trigonometria Subsidiado pelas Teorias da Aprendizagem Significativa e dos Campos Conceituais**. 2009. 121p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), Faculdade de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

KLEIN, Marjúnia; COSTA, Sayonara. **Investigando as Concepções Prévias dos Alunos do Segundo Ano do Ensino Médio e seus Desempenhos em alguns Conceitos do Campo Conceitual da Trigonometria**. In: Bolema. São Paulo: 2011. p 43-73.

LIMA, Elon lages. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1987.

LÜDKE, Menga; ANDRÈ, Marli. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MOISE, Edwin E.; DOWNS, Floyd L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1971.

MOREIRA, Marco Antônio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v.7, n.1, p. 7-29, jan 2002.

MOREIRA, Marco Antônio; PALMERO, Mª Luz Rodríguez. La Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud. In: ______. **La Teoría de Los Campos Conceptuales de Vergnaud, la Enseñanza de las Ciencias y la Investigación en el Área**. Instituto de Física(UFRGS): Porto Alegre, 2004.

MOREIRA, Marco Antônio. **Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa**. Porto Alegre: 1997. Disponível em: < http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf>. Acesso em: jul. 2011.

OLIVEIRA, Carlos N. C.; FERNANDES, Marco Antônio M. **Para Viver Juntos: Matemática, 6° ano**. São Paulo: Edições SM, 2008.

PEDROSO, Leonor. **Investigação em Turmas de Cálculo**: noções de função. Porto Alegre: Instituto de Matemática/UFRGS, 2006.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel; SZEMINSKA, Alina. **La géométrie spontanée de l'enfant**. Paris: PUF, 1948.

PIVA, C.; DORNELES, L.; SPILIMBERGO, P.; DOSCIATI, A.F. **Explorando Conceitos de Trigonometria através de *software* livre**. Trabalho apresentado no X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009, Ijuí.

SANTOS, Ricardo. **Tecnologias Digitais na Sala de Aula Para a Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no *Software* Grafeq**. 2008. 137p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

SILVA, Benedito Antônio da. Contrato Didático. In: FRANCHI, Anna; SILVA, Benedito Antônio da; FREITAS, José Luiz Magalhães de; et al. **Educação Matemática: Uma Introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. **A Aprendizagem da Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: CRV, 2009.

VILLARREAL, Mónica E.; ESTELEY, Cristina B.; ALAGIA, Humberto R..Las produciones matemáticas de estudiantes universitários al extender modelos lineales a contextos no lineales. In: ABRATE, Raquel S.; POCHULU, Marcel. **Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática**. Villa María: Universidad Nacional del Villa María, 2007.

APÊNDICE A - O Geogebra

O GeoGebra é um *software* livre de Matemática dinâmica que relaciona Geometria, Álgebra e cálculo. Seu criador foi o Professor de Educação Matemática Markus Hohenwarter que leciona na Johannes Kepler University Linz, na Áustria. O GeoGebra é um *software* criado para atender as necessidades de ensino e aprendizagem matemática nos diferentes níveis educacionais: educação básica e educação superior.

A figura 111 mostra a interface do GeoGebra. Seguindo a numeração indicada na figura, temos:

1) janela de visualização: onde toda a parte gráfica do trabalho é exibida.

2) janela de álgebra: nela aparecem duas categorias, uma de objetos livres e outra de objetos dependentes, nessa janela é possível observar todos os elementos algébricos que estão relacionados com as construções que aparecem na janela de visualização.

3) botões que mostram as ferramentas matemáticas de construção de pontos, retas, polígonos, círculos, ângulos, entre outras.

4) entrada: nela podem ser digitados os objetos algébricos como, por exemplo, coordenadas de pontos, equações e leis de formação de funções.

5) barra de ferramentas do GeoGebra: em exibir, por exemplo, pode-se optar por exibir ou não a janela de Álgebra, ou os eixos na janela de visualização; em opções, pode ser alterada a quantidade de casas decimais que aparecem nos números, ou ainda o tamanho das fontes.

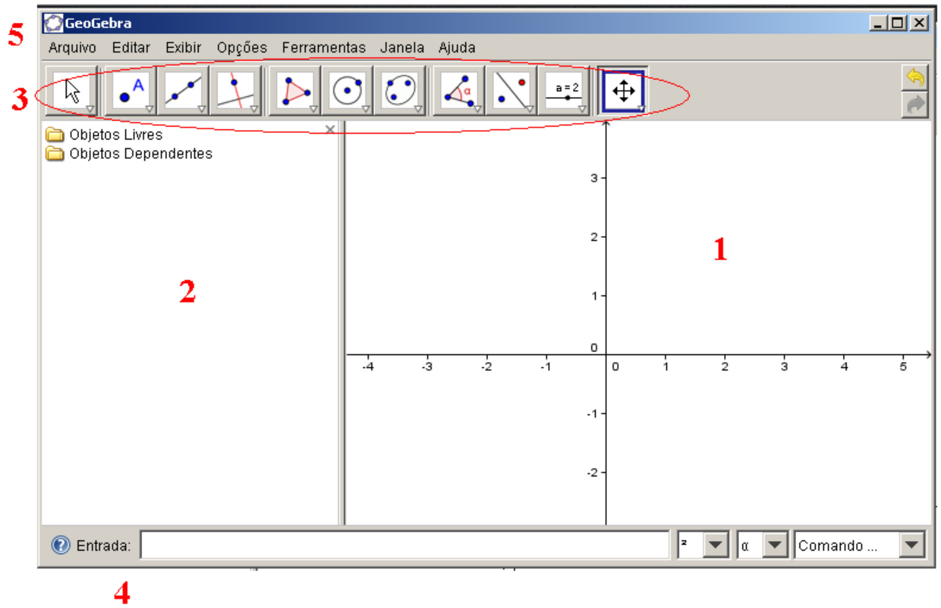


Figura 111: Interface do GeoGebra.

A seguir, serão indicados os passos de uma construção feita no GeoGebra para que o leitor possa ter uma noção de como pode ocorrer esse processo de construção. É importante esclarecer que o GeoGebra apresenta inúmeras possibilidades de construção que variam de simples a avançadas. Nesse trabalho, focaremos construções simples, que não requerem a exploração de todas as ferramentas do programa, mas que foram consideradas fundamentais no processo de aprendizagem da Trigonometria.

Construção do círculo trigonométrico: no 6° botão, seleciona-se "círculo dado centro e raio". Observe que na figura 112, à direita, aparece a indicação do que se deve fazer em seguida.

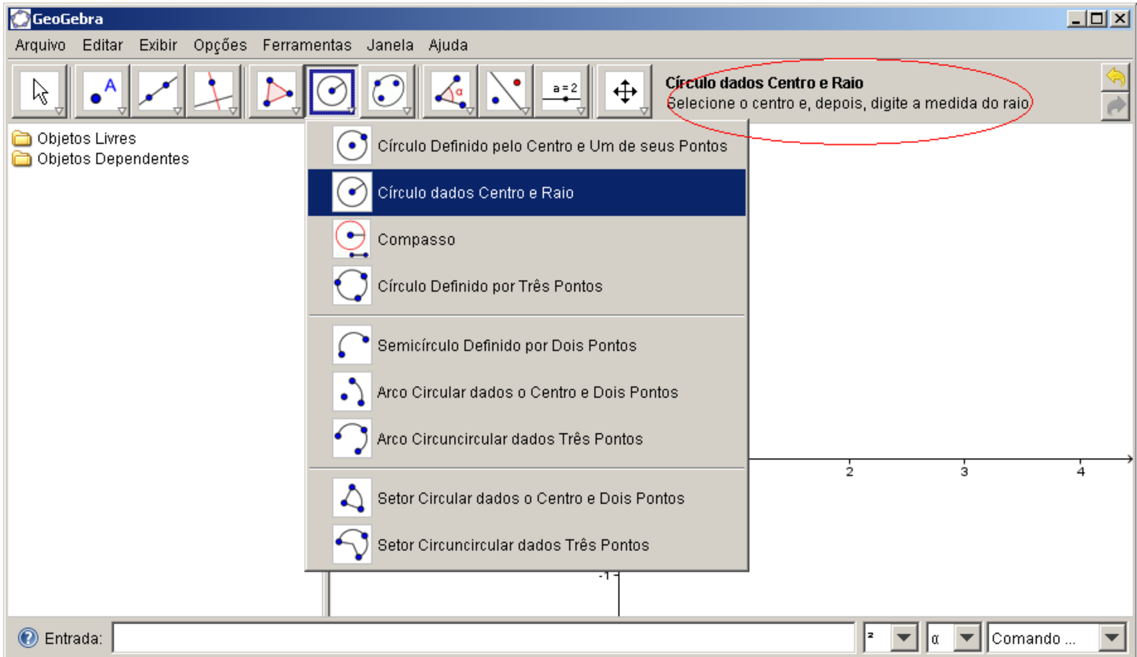


Figura 112: Círculo dado centro e raio.

Para selecionar o centro, basta clicar na janela de visualização sobre o ponto desejado, nesse caso, o ponto A de coordenadas (0,0). Em seguida, aparece a janela em que deverá ser digitado o raio (figura 113).

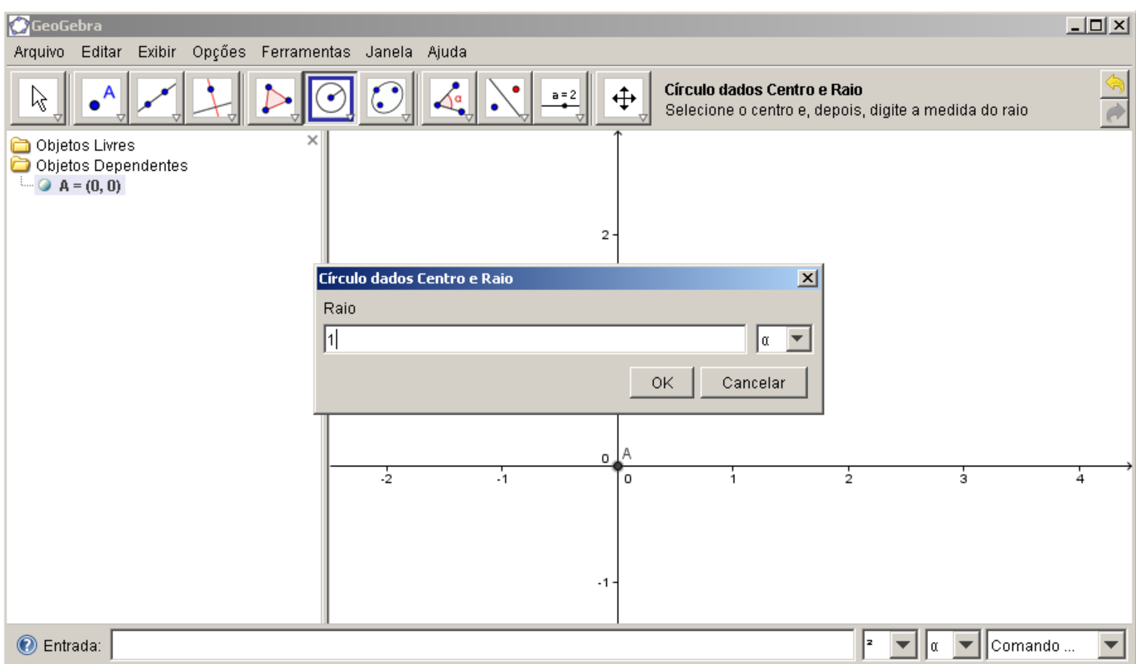


Figura 113: Ponto A = (0, 0) e raio de medida igual a 1 unidade.

Ao clicar em "ok", aparece na janela de visualização o círculo centrado na origem e com raio igual a 1 unidade, como mostra a figura 114. Na janela de Álgebra, estão listados o ponto A, com suas coordenadas, e a equação do círculo. Ambos são objetos dependentes, pois A foi construído tendo suas coordenadas fixas na intersecção dos eixos e, por sua vez, o círculo é dependente do centro A.

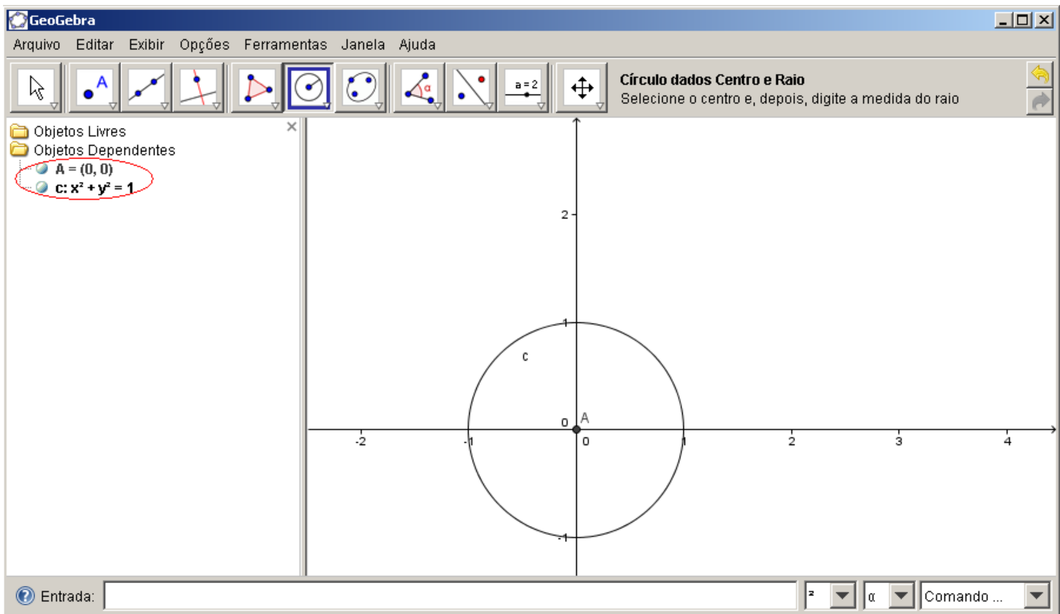


Figura 114: Círculo e sua respectiva equação.

Os próximos passos serão a troca do nome do ponto A para ponto O (de origem) e a criação dos pontos de intersecção do círculo com os eixos. Para renomear um objeto, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto, clicar em "renomear" e digitar o nome desejado (figura 115).

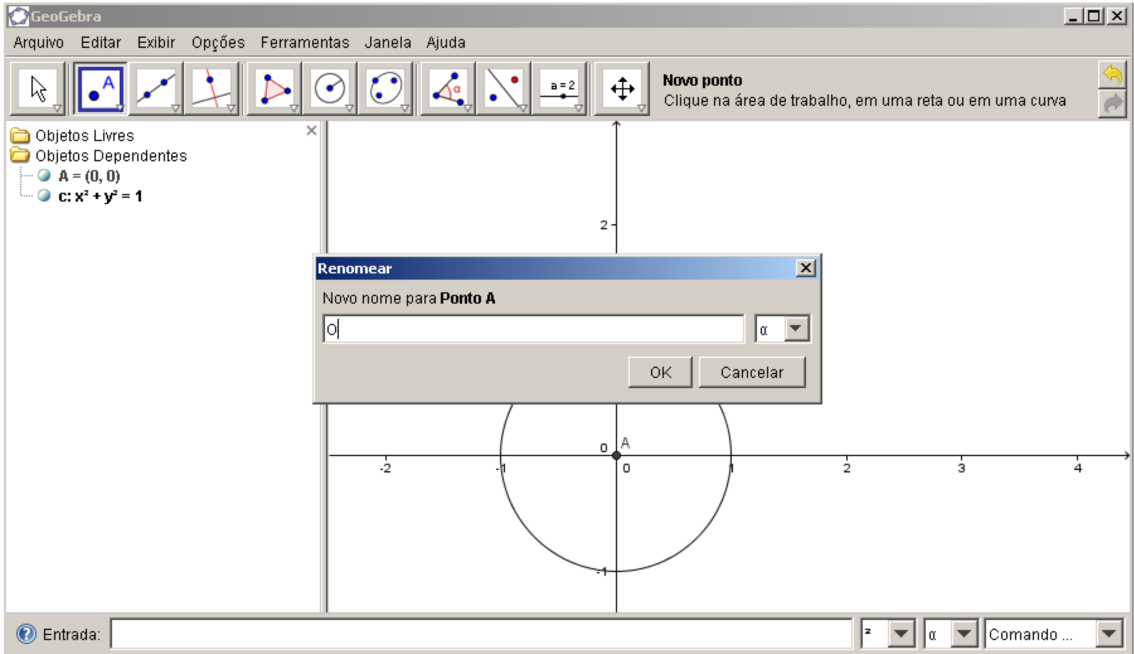


Figura 115: Renomear ponto A.

Para criar os pontos de intersecção, seleciona-se, no segundo botão, da esquerda para direita, "intersecção de dois objetos" (figura 116).

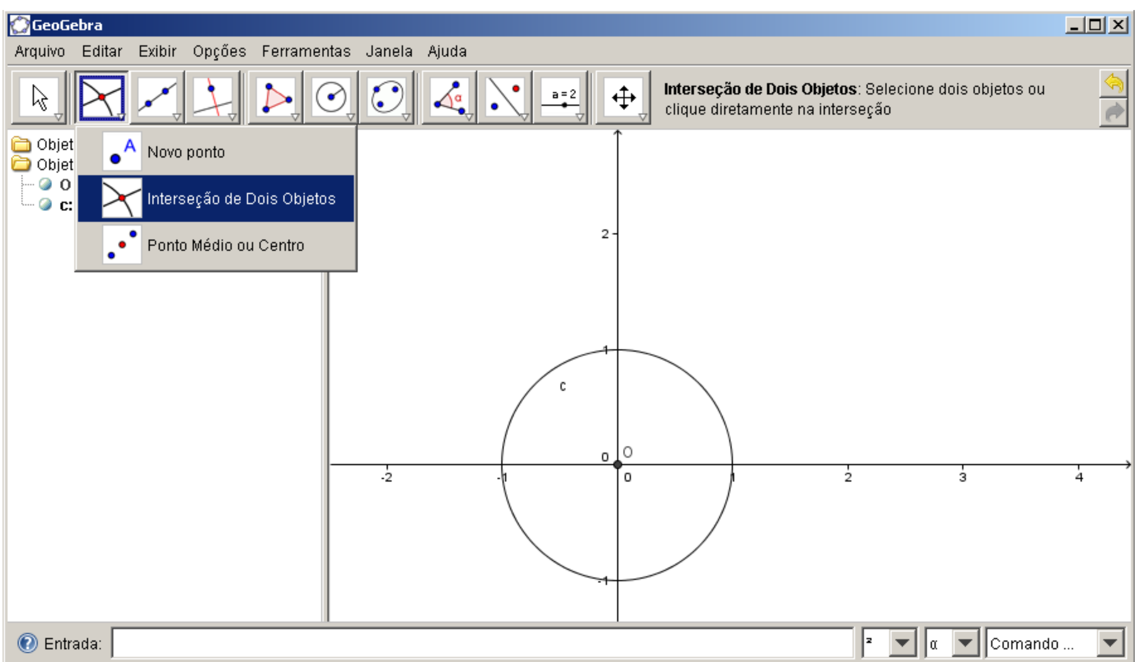


Figura 116: Intersecção de dois objetos.

Após a seleção, clicar sobre o círculo e sobre o eixo horizontal, assim, aparecerão os pontos A e B. Repete-se o procedimento, mas agora clicando sobre o eixo *y*, e aparecerão os pontos C e D (figura 117).

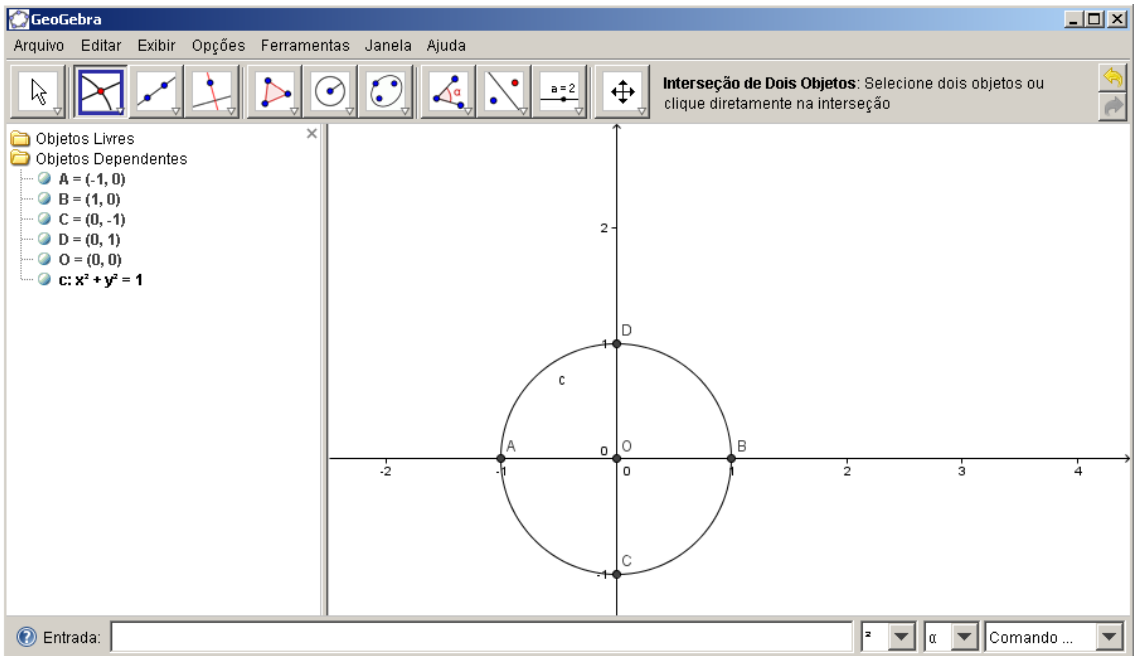


Figura 117: Pontos de intersecção do círculo com os eixos.

Esses novos pontos serão renomeados para que, no círculo trigonométrico, o ponto A apareça com as coordenadas A = (1, 0), ponto considerado como inicial na marcação de arcos e ângulos. O ponto B será B = (0, 1), C = (-1, 0) e D será D = (0, -1), conforme mostra a figura 118.

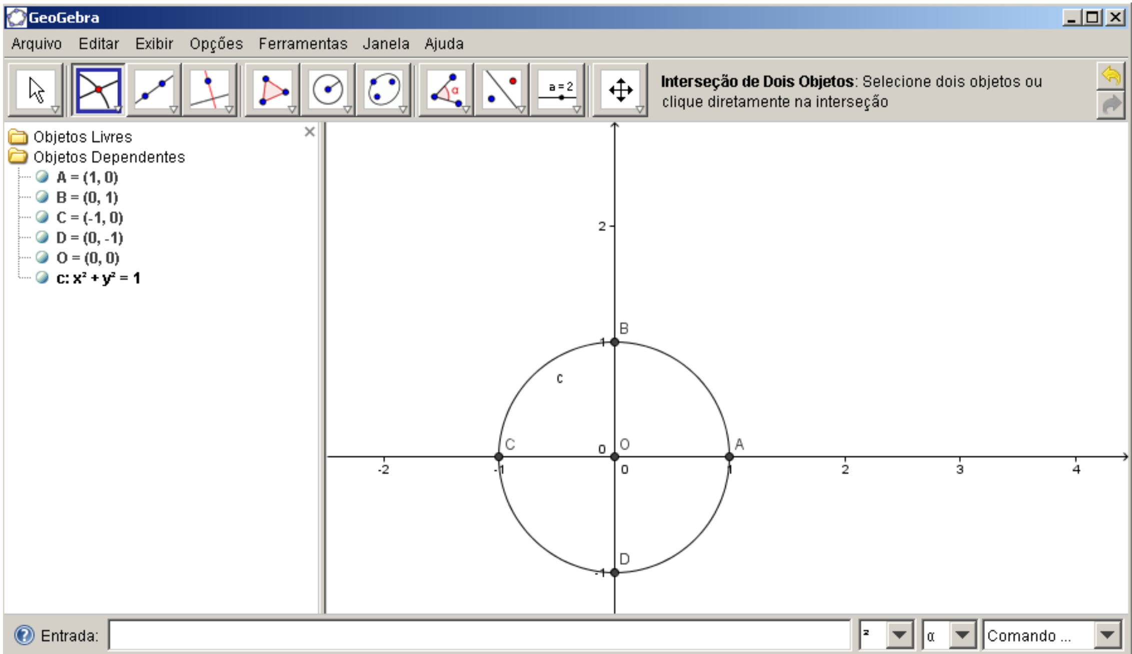


Figura 118: Pontos renomeados.

Com auxílio da ferramenta inserir texto, os quadrantes do círculo trigonométrico serão identificados no sentido anti-horário a partir do quadrante AOB (figura 119).

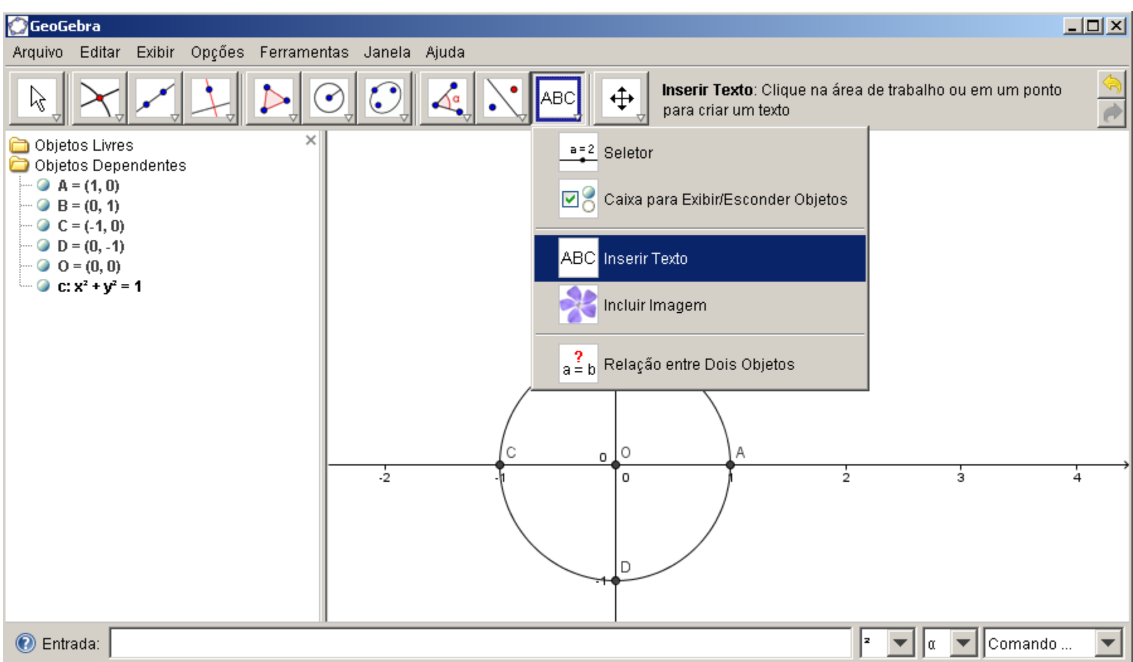


Figura 119: Inserir texto.

A figura 120 mostra os quadrantes já identificados e um novo ponto criado sobre o círculo. Esse ponto foi construído com a ferramenta novo ponto do segundo botão, da esquerda para direita. Após selecioná-la basta clicar sobre o círculo. O ponto criado foi nomeado como ponto E e, em seguida, renomeado para P.

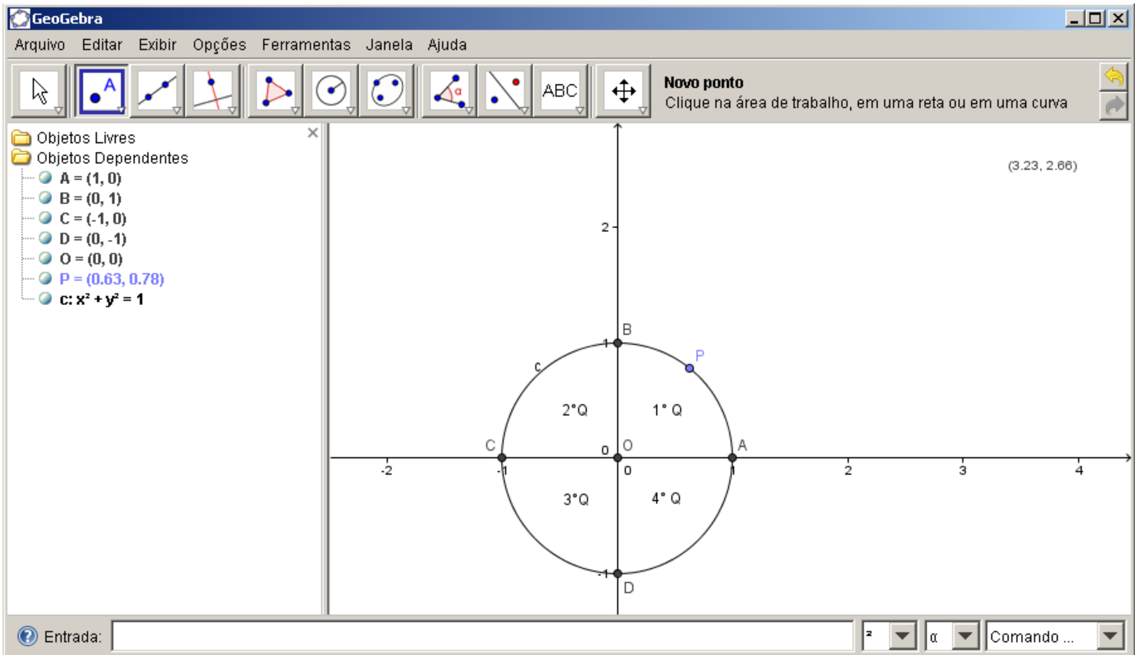


Figura 120: Quadrantes identificados e ponto P sobre o círculo.

A figura 121 mostra a ferramenta "ângulo" do 8° botão. O ângulo AÔP será marcado e ele permitirá que se visualize a variação dos ângulos no círculo trigonométrico. É importante lembrar que o ponto P pode mover-se apenas sobre o círculo.

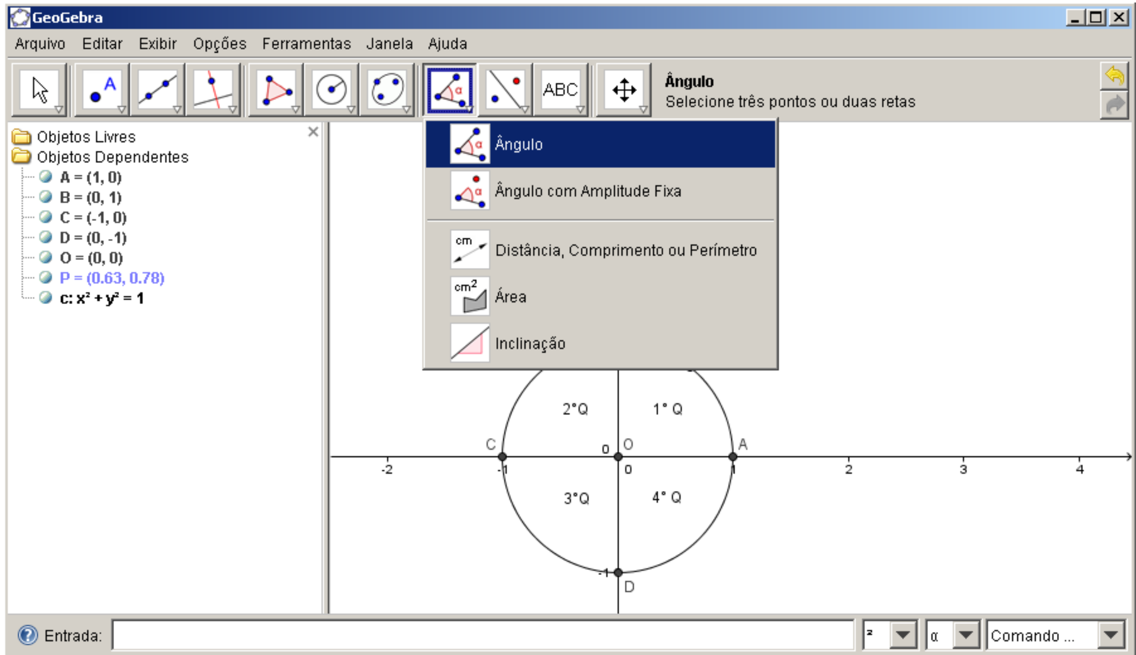


Figura 121: Ferramenta ângulo.

A figura seguinte (122) mostra o resultado final desses passos: o círculo trigonométrico.

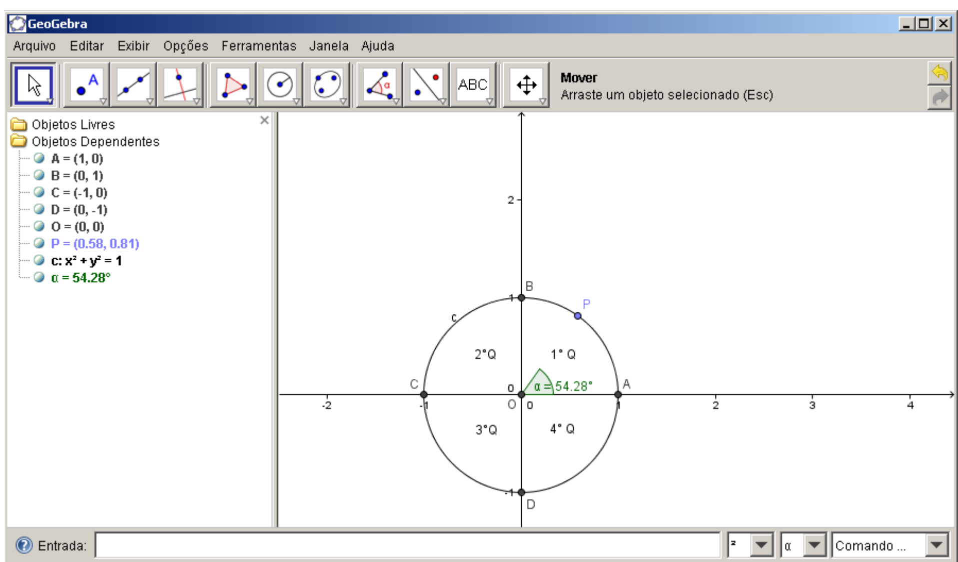
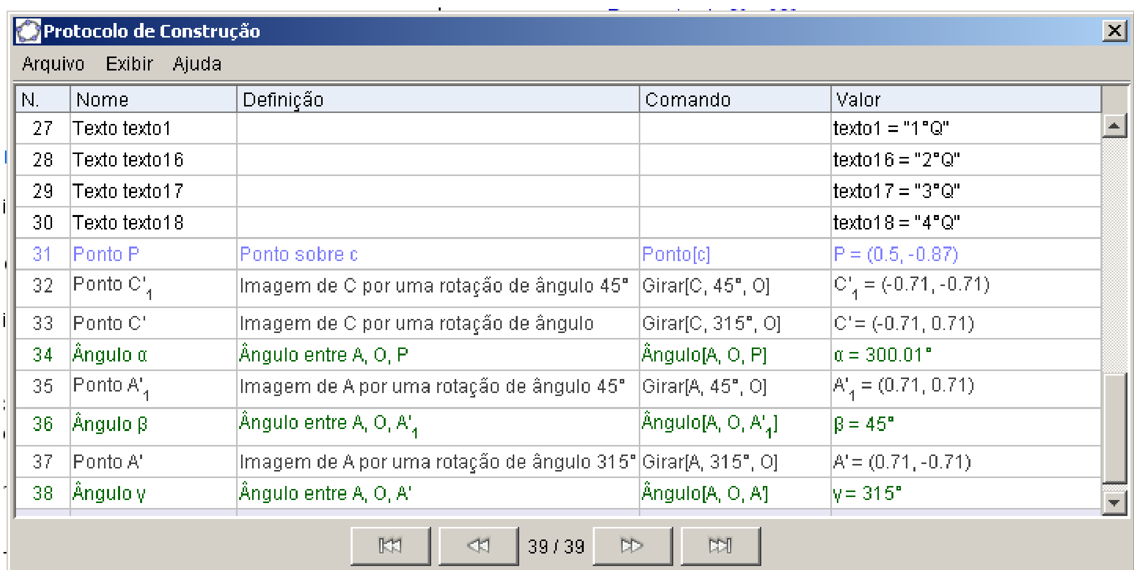


Figura 122: Círculo trigonométrico.

Um recurso interessante que o GeoGebra possui e que ajudou na análise dos trabalhos dos alunos foi a ferramenta "protocolo de construção". Essa ferramenta mostra todos os passos que foram feitos desde o início da construção até o final. Inclusive, é possível esconder a construção da janela de visualização e, clicando no botão "avançar", rever a construção sendo feita passo a passo. Esse recurso foi importante por permitir identificar a forma como os alunos estavam pensando para desenvolver as construções e, consequentemente, resolver as tarefas propostas. Abaixo, apresenta-se um exemplo de situação em que a análise do protocolo de construção foi fundamental para compreender os raciocínios dos alunos.

Na figura 123, pode-se ver o protocolo de construção do grupo D, que acertou a resposta à pergunta: "Selecione ângulo de amplitude fixa no oitavo botão. Clique sobre A e O e digite, na janela que irá abrir, um ângulo maior do que 360°. Qual ângulo ficou marcado no círculo? Explique o que aconteceu". Na linha 33, aparece a definição "Imagem de C por uma rotação de ângulo" e, na linha 34 aparece a definição "Ângulo entre A, O, P" e o valor "α = 300,01°". Essas informações referem-se ao ângulo "livre" utilizado para observar a variação dos ângulos em cada quadrante nas perguntas iniciais. Na linha 35, aparece a definição "Imagem de A por uma rotação de ângulo de 45°" e, na linha 36, aparece o valor "β = 45°". Essas informações referem-se ao ângulo de amplitude fixa, o qual era solicitado na pergunta. Observe que o GeoGebra não registrou o ângulo de medida igual a 405° utilizado pelo grupo, descontou a medida de uma volta completa (360°) e marcou apenas o ângulo de 45°.



Protocolo de Construção

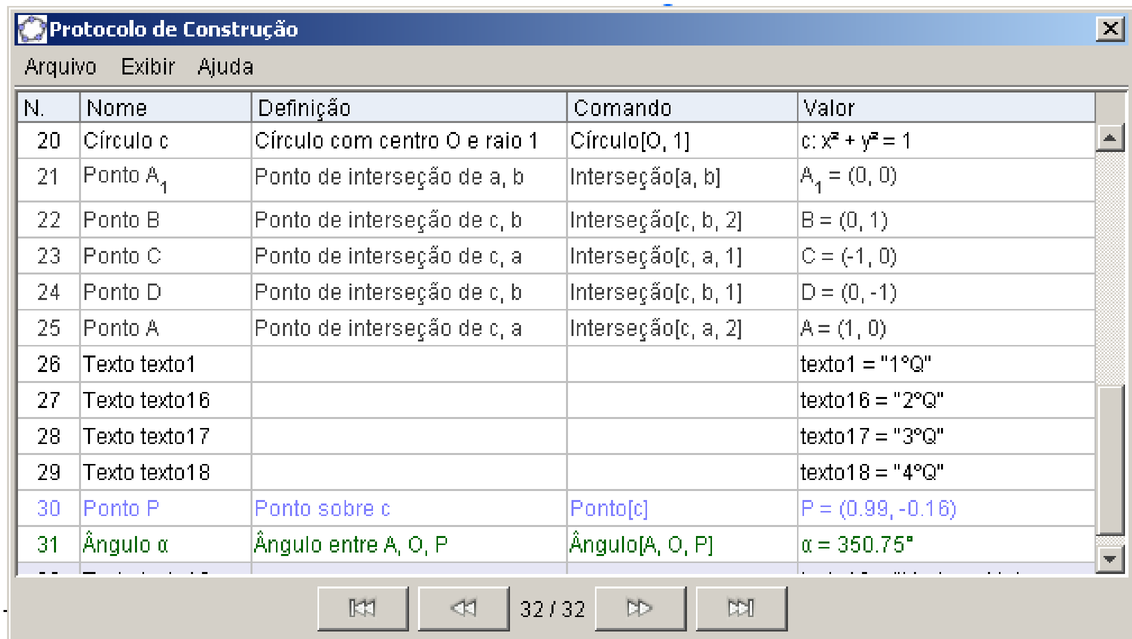
Arquivo Exibir Ajuda

N.	Nome	Definição	Comando	Valor
27	Texto texto1			texto1 = "1°Q"
28	Texto texto16			texto16 = "2°Q"
29	Texto texto17			texto17 = "3°Q"
30	Texto texto18			texto18 = "4°Q"
31	Ponto P	Ponto sobre c	Ponto[c]	P = (0.5, -0.87)
32	Ponto C'_1	Imagem de C por uma rotação de ângulo 45°	Girar[C, 45°, O]	C'_1 = (-0.71, -0.71)
33	Ponto C'	Imagem de C por uma rotação de ângulo	Girar[C, 315°, O]	C' = (-0.71, 0.71)
34	Ângulo α	Ângulo entre A, O, P	Ângulo[A, O, P]	α = 300.01°
35	Ponto A'_1	Imagem de A por uma rotação de ângulo 45°	Girar[A, 45°, O]	A'_1 = (0.71, 0.71)
36	Ângulo β	Ângulo entre A, O, A'_1	Ângulo[A, O, A'_1]	β = 45°
37	Ponto A'	Imagem de A por uma rotação de ângulo 315°	Girar[A, 315°, O]	A' = (0.71, -0.71)
38	Ângulo γ	Ângulo entre A, O, A'	Ângulo[A, O, A']	γ = 315°

39 / 39

Figura 123: Protocolo de construção do grupo D.

Já na figura 124, aparece o protocolo de construção do grupo O, que chegou à conclusão errada. Observe que não aparece a linha referente à construção do ângulo de amplitude fixa, aparece apenas a indicação do ângulo "livre", nas linhas 30 e 31. Nas duas figuras (123 e 124), a última linha do protocolo foi omitida, pois nelas apareciam os nomes dos componentes dos grupos.



N.	Nome	Definição	Comando	Valor
20	Círculo c	Círculo com centro O e raio 1	Círculo[O, 1]	c: $x^2 + y^2 = 1$
21	Ponto A_1	Ponto de interseção de a, b	Interseção[a, b]	$A_1 = (0, 0)$
22	Ponto B	Ponto de interseção de c, b	Interseção[c, b, 2]	B = (0, 1)
23	Ponto C	Ponto de interseção de c, a	Interseção[c, a, 1]	C = (-1, 0)
24	Ponto D	Ponto de interseção de c, b	Interseção[c, b, 1]	D = (0, -1)
25	Ponto A	Ponto de interseção de c, a	Interseção[c, a, 2]	A = (1, 0)
26	Texto texto1			texto1 = "1°Q"
27	Texto texto16			texto16 = "2°Q"
28	Texto texto17			texto17 = "3°Q"
29	Texto texto18			texto18 = "4°Q"
30	Ponto P	Ponto sobre c	Ponto[c]	P = (0.99, -0.16)
31	Ângulo α	Ângulo entre A, O, P	Ângulo[A, O, P]	α = 350.75°

Figura 124: Protocolo de construção do grupo O.

APÊNDICE B - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

O estudo da Trigonometria por estudantes do 2° ano do Ensino Médio é caracterizado por uma série de dificuldades de aprendizagem. Essas dificuldades referem-se à construção de significados, à organização de conceitos e à utilização desses conhecimentos como instrumentos de resolução de problemas.

A presente pesquisa pretende coletar dados e informações que serão analisados e utilizados como referência para a dissertação de mestrado intitulada "*Uma proposta de estudo da Trigonometria através do software Geogebra para o 2º ano do Ensino Médio*". Este trabalho tem como um de seus objetivos principais pesquisar e promover situações de aprendizagem que favoreçam ao estudante a superação dessas dificuldades de aprendizagem citadas e de outras mais. Acredita-se que a utilização do *software* Geogebra irá auxiliar no aprendizado dos conceitos trigonométricos por proporcionar uma visão dinâmica de triângulos, do ciclo trigonométrico e das funções trigonométricas. A coleta de dados será realizada através de gravações de áudio durante as aulas e análise do material produzido pelos alunos.

A pesquisa faz parte do trabalho de dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, cuja orientação é realizada pela Professora Doutora Elisabete Zardo Búrigo.

Os dados e resultados individuais desta pesquisa estarão sempre sob sigilo ético, não sendo mencionados os nomes dos participantes em nenhuma apresentação oral ou trabalho escrito que venha a ser publicado.

As pesquisadoras responsáveis por esta pesquisa, Profª Dra. Elisabete Z. Búrigo e a mestranda, Profª Leonor Wierzynski Pedroso, comprometem-se a esclarecer devida e adequadamente qualquer dúvida ou necessidade que eventualmente o participante e/ou responsável legal venha a ter no momento da pesquisa ou posteriormente através dos emails: 00009949@ufrgs.br e leonor.pedroso@maristas.org.br.

Após ter sido devidamente informado de todos os aspectos desta pesquisa e ter esclarecido todas as minhas dúvidas, eu ....autorizo meu(minha) filho(a) .... a participar desta pesquisa.

....	....
Assinatura do participante	Assinatura do responsável

Porto Alegre, ...de abril de 2011

APÊNDICE C - Folha de registro da atividade 2

Nomes: _________________________ **Turma**: 221 **2° ano do E.M.** Data: __/ __ / 2011	
Componente curricular: **Matemática** I trimestre **Professora**: Leonor W. Pedroso	

Aplicações de seno, cosseno e tangente.
Folha de registro de respostas

Aplicações atividade 1: a) .... b) Distância escolhida: .... Ângulo escolhido:............................. Identifique a razão trigonométrica (dica ao lado) e substitua os valores: α, distância e altura h nessa razão. Calcule no geogebra o valor da razão referente ao ângulo e também substitua esse valor: Cálculo: Resposta: Altura do prédio = ... c)	**Dica**: para identificar a relação trigonométrica a ser utilizada no cálculo, responda: Em relação ao ângulo α, a altura h é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Em relação ao ângulo α, o segmento que representa a distância da pessoa ao prédio é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Qual razão trigonométrica envolve as suas duas respostas anteriores? ( ) seno ( ) cosseno ( ) tangente
Aplicações atividade 2: Comprimento da sombra = ... Ângulo = ... Cálculo: Resposta: altura da árvore = ...	Em relação ao ângulo α, a altura da árvore é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Em relação ao ângulo α, a sombra é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Qual razão trigonométrica envolve as suas duas respostas anteriores? ( ) seno ( ) cosseno ( ) tangente

Aplicações atividade 3: Distância do satélite à superfície da Terra = ... Distância do satélite ao centro da Terra = ... Ângulo = ... Cálculo: Resposta: Raio da Terra = ...	Em relação ao ângulo β, o Raio (segmento que une o ponto central ao ponto H) é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Em relação ao ângulo β, o segmento que indica a distância do satélite S ao centro da Terra é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Qual razão trigonométrica envolve as suas duas respostas anteriores? ( ) seno ( ) cosseno ( ) tangente
Aplicações atividade 4: Nesse problema, uma relação trigonométrica será utilizada duas vezes. Teremos que isolar uma incógnita em uma razão e substituir essa incógnita na outra razão. Distância de A até B = ... Ângulo α = ... Ângulo β = ... Cálculos: Resposta: Largura do rio = ...	**No triângulo ADC**: Em relação ao ângulo α, o segmento **c** é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Em relação ao ângulo α, o segmento **d** é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Qual razão trigonométrica envolve as suas duas respostas anteriores? ( ) seno ( ) cosseno ( ) tangente **No triângulo BDC**: Em relação ao ângulo β, o segmento **c** é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Em relação ao ângulo β, o segmento que vai do ponto D ao B é: ( ) hipotenusa ( ) cateto oposto ( ) cateto adjacente Qual razão trigonométrica envolve as suas duas respostas anteriores? ( ) seno ( ) cosseno ( ) tangente

APÊNDICE D - Roteiro da atividade 9

Nome: ______________________________________	**2º ano do E.M.** Data: __/ __/ 11
Matemática	**Professora**: Leonor W. Pedroso

Explorando transformações nos gráficos das funções seno e cosseno.

1. Abra o *software Geogebra*.
2. Inicialmente, iremos ajustar a unidade utilizada no eixo x. Para isso, clique com o botão direito do mouse sobre o eixo x. Em propriedades, selecione "distância" e escolha $\pi/2$.

Observação: O gráfico da função inicial f(x)=sen(x) não deverá ser "escondido" em nenhum dos itens abaixo.

1. Em "entrada", digite a função: f(x) = sin (x) e tecle "*enter*".

a) Quais são a altura máxima e mínima atingidas pelo gráfico da função? ....

b) Em notação de intervalo, dê a imagem da função f(x) = sen x. ....

c) Obtenha, pelo gráfico, cinco raízes (valores de corte no eixo horizontal) da função sen x. ....

2. Sem apagar o gráfico inicial, digite **f_1(x)= 1+ sin(x)** (clique com o botão direito do mouse sobre o gráfico, em propriedades, escolha cor vermelha) e **f_2(x) = -1 +sin(x)** (cor azul).

a) Compare os gráficos dessas funções com o gráfico da função f(x) = sen x, qual é a diferença entre esses gráficos? ....

....

b) Qual é a imagem da função f_1(x) = 1 + sen (x) e da função f_2(x) = -1 + sen (x)?............................... ....

....

c) O que aconteceria se, ao invés de somarmos à função 1 e –1, somássemos os valores 2 ou -2? Qual seria a imagem de cada uma dessas funções? ....

....

3. Na janela de Álgebra, clique sobre as funções f_1 e f_2 para esconder seus gráficos.

a) Digite **g_1(x) = 2sin(x)** (amarelo) e **g_2(x)= 3sin(x)** (verde). Compare os gráficos com a função f(x) = sen x. O que aconteceu com as alturas atingidas pela função?

....

....

b) Os pontos de corte com o eixo x (raízes) modificaram ou não? ....

c) Qual é a imagem de cada uma das funções do item a? ....

4. Repita o item 3, mas agora com as funções **g_3(x) =** $\left(\frac{1}{2}\right)$ **sin x** (rosa) e **g_4(x) =** $\left(\frac{1}{3}\right)$ **sin x** (roxo).

a) ....

b) ....

c) ....

5. Esconda os gráficos g_1, g_2, g_3 e g_4. Digite **h(x) = -sin x** (cinza).

a) O que acontece com o gráfico da função ao multiplicarmos a função por –1? ....

6. Esconda o gráfico da função h. Digite **i_1(x) = sin (2x)** (vermelho) e **i_2(x) = sin (4x)** (azul).

a) Compare os gráficos. O que mudou entre eles?

....

....

b) Os conjuntos imagem das funções são iguais ou diferentes? ....

c) Observe agora que a função f(x) = sen x completa um período, ou ciclo, no intervalo [0, 2π] e que o comprimento desse intervalo é 2π. Escreva um intervalo em que a função i_1(x) = sin (2x) completa um período, ou ciclo. Escreva um intervalo em que a função i_2(x) = sin (4x) completa um período. Qual o comprimento desses intervalos?

Intervalo: .... Comprimento: ....

Intervalo: .... Comprimento: ....

7. Esconda os gráficos das funções i_1 e i_2. Faça o que foi pedido no item 6, mas agora com as funções: **i_3(x) = sin** $\left[\left(\frac{1}{2}\right)x\right]$ (rosa) e **i_4 = sin** $\left[\left(\frac{1}{4}\right)x\right]$ (verde).

a) ....

b) ....

c) Intervalo: .... Comprimento: ....

Intervalo: .... Comprimento: ....

8. Esconda os gráficos das funções i_3 e i_4. Digite as funções **j_1(x) = sin (x-(pi/2))** (laranja) **e** **j_2(x) = sin (x - pi)** (roxo).

a) Compare os gráficos das funções. Qual a diferença entre eles? ....

....

b) Escreva um intervalo em que j_1(x) = sin (x-(π/2)) completa um período e escreva o comprimento desse intervalo. Faça o mesmo para a função j_2(x) = sin (x - π).

Intervalo: .... Comprimento: ....

Intervalo: .... Comprimento: ....

9. Esconda apenas a função j_2. Digite a função **j_3 = sin (x +(pi/2))** (verde) e compare com a função j_1. Quais diferenças e/ou semelhanças você percebe entre eles?

....

....

10. Abra o arquivo "transformações nos gráficos_variação". Complete as lacunas abaixo utilizando as expressões:

- deslocamento para cima/para baixo;
- deslocamento para direita /para esquerda;
- alongamento vertical;
- compressão vertical;
- alongamento horizontal;
- compressão horizontal;
- reflexão do gráfico em torno do eixo x;

$$y = A + B\text{sen}[C(x \pm D)]$$

a) **A** provoca um ______________________________no gráfico da função f(x)=senx. Se **A** for positivo será para_____________ e se **A** for negativo será para ____________________.

b) Se **B** for um número positivo maior do que 1 (um), irá provocar um ________________________ no gráfico da função f(x) = senx e se **B** for um número positivo e estiver entre 0 (zero) e 1 (um) irá provocar uma ___________________________.

c) Se **B** for negativo, irá provocar uma ________________________________ no gráfico da função f (x) = sen x.

d) Se **C** for um número maior que 1 (um), irá provocar uma __________________________ no gráfico de f(x) = senx e o período será dado por: P = _____ (verifique isso nas funções do item 6).

e) Se **C** for um número entre 0 (zero) e 1 (um), irá provocar um ______________________no gráfico de f(x) = senx e o período também será dado por P = ______ (verifique isso nas funções do item 7).

f) Considere D>0, se somarmos **D** ao x da função, teremos um ________________________ para _____________________. Se diminuirmos **D**, teremos um _____________________________ para __________________________.

11. Construa os gráficos das funções abaixo e indique as transformações feitas em cada um a partir do gráfico de f(x) = cos x.

a) f_1(x) = 2 + (1/2) cos x

....

b) f_2(x) = -1 + cos 2x

....

c) f_3(x)= -3cosx

....

d) f_4(x)= 2cos (x + pi)

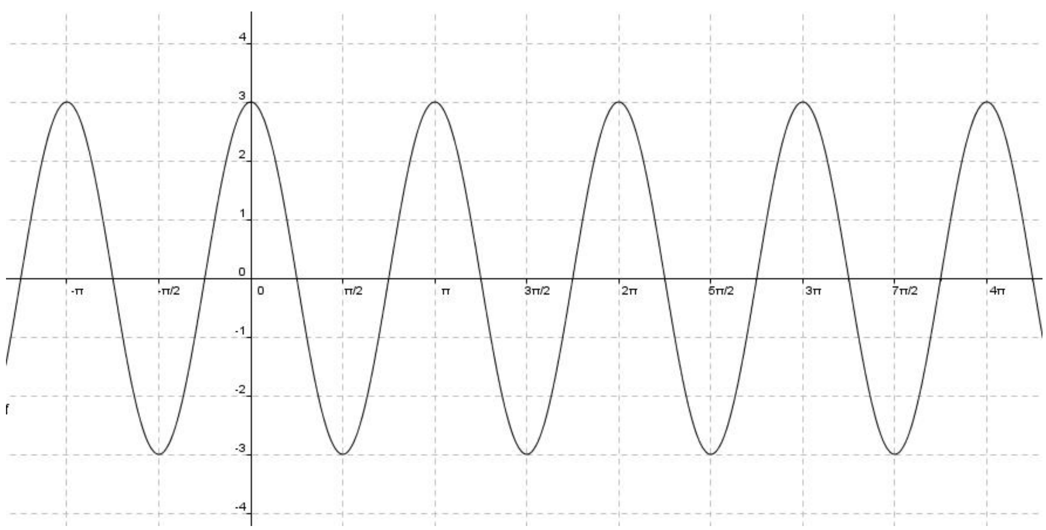
....

e) f_5(x)= cos [(1/3)x]

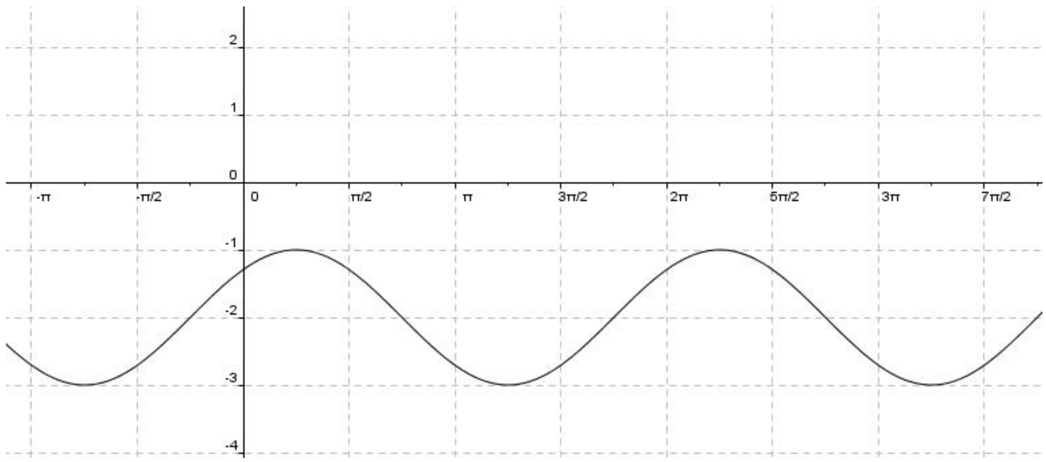
....

12. Observe os gráficos dados e descubra a função correspondente (sugestão: utilize o arquivo "transformações nos gráficos_variação" para tentar reproduzir o gráfico dado e observar os valores de A, B, C e D).

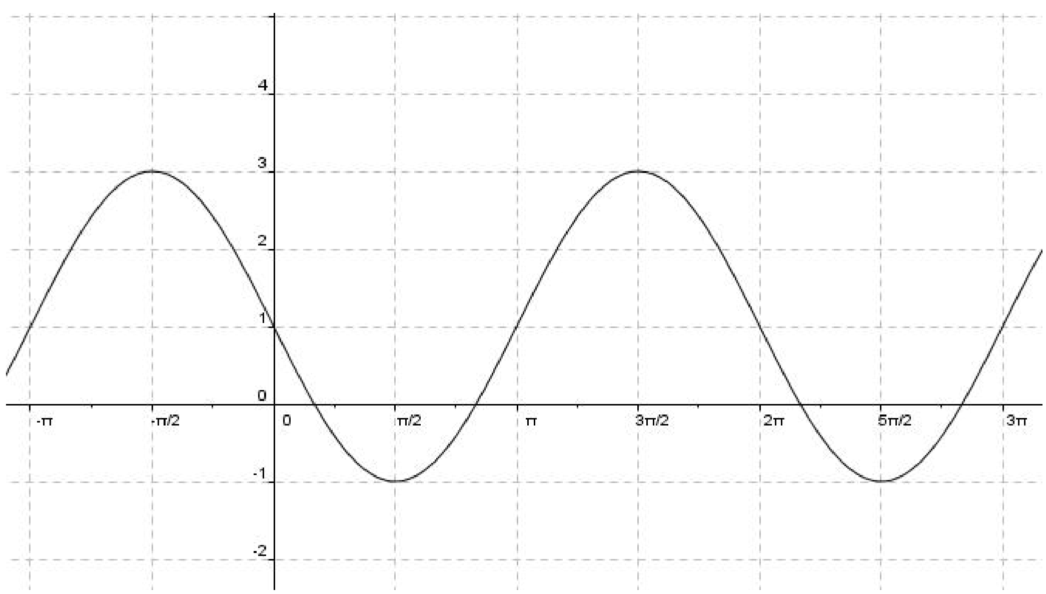
a) f(x) = ...



b) g(x) = ...



c) h(x) = ...



Aplicações das funções trigonométricas

1. (Vunesp) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura h em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11{,}5 + 10\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{12}\right).(t-26)\right]$, onde o tempo t é dado em segundos e a medida angular em radianos.

a) determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar (t = 0). R:..................................

b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa.

R:...

Importante:

- para responder a questão, obtenha o gráfico que representa a situação descrita acima digitando, no geogebra: f(x) = 11.5+10sin[(π/12)*(x-26)]
- para facilitar a visualização dos valores, crie um ponto sobre o gráfico e movimente-o observando suas coordenadas. [no segundo botão, selecione: novo ponto; clique com o botão direito do mouse e selecione: exibir rótulo : valor].

Desafio 1: sem ter o gráfico da função dado pelo geogebra, como você faria para calcular a altura inicial do seu amigo?

....

....

....

....

2. (FGV - SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800\text{sen}\left(\frac{x.\pi}{12}\right)$ onde f(x) é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo é igual a:

a) 600. b) 800. c) 900. d) 1500. e) 1600.

Importante: ajuste a janela de visualização!

- Clique com o botão direito do mouse sobre o eixo x. Selecione janela de visualização. Em eixos, digite -2 para valor mínimo e 28 para máximo. Selecione a aba Eixo Y. Digite -100 para valor mínimo e 2000 para máximo. Clique em fechar.

Desafio2: sem ter o gráfico da função dado pelo geogebra, como você faria para calcular o número máximo e mínimo de clientes dentro do supermercado?

....

....

....

....

Bom trabalho!!!

APÊNDICE E - As atividades realizadas no GeoGebra.

Atividade 1:

Relacionando lados e ângulos em um triângulo retângulo.

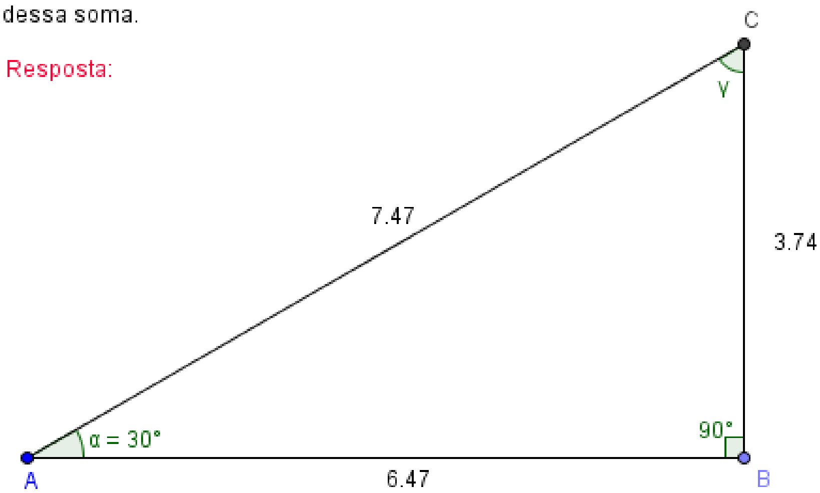
Instruções:
a) para responder às perguntas, selecione mover no primeiro botão e clique duas vezes sobre a palavra resposta para abrir a janela de texto.
b) para mover a área de trabalho, selecione transladar janela de visualização no último botão.

1. Mova o ponto B na figura. O que acontece com as medidas dos lados do triângulo? O que acontece com as medidas dos ângulos?

Resposta:

2. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre a mesma. Você sabe qual é o valor dessa soma? Em caso afirmativo, utilize essa soma para calcular o valor do ângulo γ. Em caso negativo, selecione ângulo, no oitavo botão, clique sobre os pontos A, C e B, nessa ordem, e obtenha o valor dessa soma.

Resposta:



3. O ângulo α é determinado pelos segmentos AB e AC. O segmento AC, que é oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa. O segmento AB é chamado de cateto adjacente ao ângulo α e o segmento BC, é chamado de cateto oposto ao ângulo α. Agora responda:
a) qual segmento é o cateto oposto ao ângulo γ?
b) qual segmento é o cateto adjacente ao ângulo γ?
c) qual segmento é a hipotenusa?

Resposta:

4. Clique inicialmente em Razão 1 e preencha as chaves {}/{} com os valores do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa respectivamente. Após o segundo sinal de igual, escreva o valor que você encontrou para essa razão com o auxílio da calculadora. Em seguida, mova o ponto B, preencha as chaves e repita o cálculo para os novos valores que apareceram. Faça isso uma última vez, movendo novamente o ponto B.

$\text{Razão}_1 = . =$ $\text{Razão}_2 = . =$ $\text{Razão}_3 = . =$

5. Repita o que você fez no item 4, porém agora as razões devem ser formadas pelo cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa.

$\text{Razão}_1 = . =$ $\text{Razão}_2 = . =$ $\text{Razão}_3 = . =$

6. Repita o que você fez nos itens 4 e 5, porém as razões devem ser formadas pelo cateto oposto e pelo cateto adjacente respectivamente.

$\text{Razão}_1 = . =$ $\text{Razão}_2 = . =$ $\text{Razão}_3 = . =$

7. Se mudarmos o ângulo que tomamos como referência, os valores das razões irão mudar? Responda a essa pergunta calculando as razões abaixo com relação ao ângulo γ e comparando com os resultados obtidos nos exercícios 4, 5 e 6.

$\frac{\text{cat.op.}}{\text{hip}} = . =$ $\frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} = . =$ $\frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}} =$

Resposta:

8. Observe que calculamos diversas razões entre os lados do
triângulo relacionando-as com os ângulos α e γ. A cada passo mudamos
os lados ou o ângulo de referência. Para não haver confusão entre
os elementos que estamos relacionando, atribuem-se nomes específicos
para cada uma dessas razões especificando também o ângulo de referência.
Assim:

a) as razões do exercício 4 são chamadas de seno do ângulo α e escrevemos:

$$\mathrm{sen}\alpha = \frac{\text{catetooposto}}{\text{hipotenusa}}$$

b) as razões do exercício 5 são chamadas de cosseno do ângulo α e escrevemos:

$$\cos\alpha = \frac{\text{catetoadjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

c) as razões do exercício 6 são chamadas de tangente do ângulo α e escrevemos:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\text{catetooposto}}{\text{catetoadjacente}}$$

d) Nas razões do exercício 7, mudamos o ângulo de referência:

$$\mathrm{sen}\gamma = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}} \qquad \cos\gamma = \frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} \qquad \mathrm{tg}\gamma = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}}.$$

9. Construa um triângulo retângulo em que α = 45º na região indicada ao lado. Calcule senα, cosα e tgα. Para a construção do triângulo retângulo, siga os passos abaixo:

a) No terceiro botão, selecione segmento definido por dois pontos.
b) Faça o segmento no espaço indicado para a construção do triângulo.
c) Clique com o botão direito do mouse sobre os pontos extremos do segmento e selecione a opção exibir rótulo.
d) No quarto botão, selecione reta perpendicular. Clique sobre o segmento e clique sobre o ponto E.
e) No oitavo botão, selecione ângulo com amplitude fixa e clique no ponto E e depois no ponto D. Digite 45º na janela que abriu.
f) No terceiro botão, selecione reta definida por dois pontos. Clique sobre o ponto D e sobre o ponto preto.
g) No segundo botão, selecione interseção de dois objetos e clique onde a reta do item f e a reta perpendicular se cruzam (clique quando as duas retas ficarem em negrito).
h) Clique com o botão direito do mouse sobre esse ponto e selecione exibir rótulo.
i) No terceiro botão, selecione segmento definido por dois pontos e clique nos pontos D e F, depois em E e F.
j) Clique com o botão direito do mouse sobre a reta criada no item f e sobre a reta perpendicular. Selecione exibir objeto (isso irá escondê-las).
k) Clique com o botão direito do mouse sobre um dos segmentos. Selecione propriedades. Na aba básico, selecione exibir rótulo e valor. Faça isso para os três segmentos.

Construa o triângulo nessa região:

sen45º= = cos45º= = tg45º= =

10. Agora, construa um triângulo retângulo com um ângulo diferente dos que foram trabalhados até agora (30º, 45º e 60º).
Calcule o seno, o cosseno e a tangente dos dois ângulos agudos do teu triângulo.

Atividade 2 - 1° Problema.

Atividade 1: Calcular a altura de um prédio.

a) Inicialmente, mova o ponto A na figura. O que acontece com o ângulo quando a pessoa se afasta ou se aproxima do prédio?

b) Uma pessoa está a uma certa distância de um prédio e avista seu topo sob um ângulo α. Mova novamente o ponto A para escolher essa distância e esse ângulo. Em seguida, utilize uma relação trigonométrica adequada (seno, cosseno ou tangente?) para calcular a medida h. [Obs: as medidas de comprimento estão dadas em metros]. Qual é a altura do prédio?

c) Compare a sua resposta para a altura do prédio com a resposta dos seus colegas que estão à direita e à esquerda. O que vocês observaram?

Importante! Para obter o valor do seno, cosseno ou tangente faça o seguinte:

1) Digite em Entrada:

senoα=sin(α)

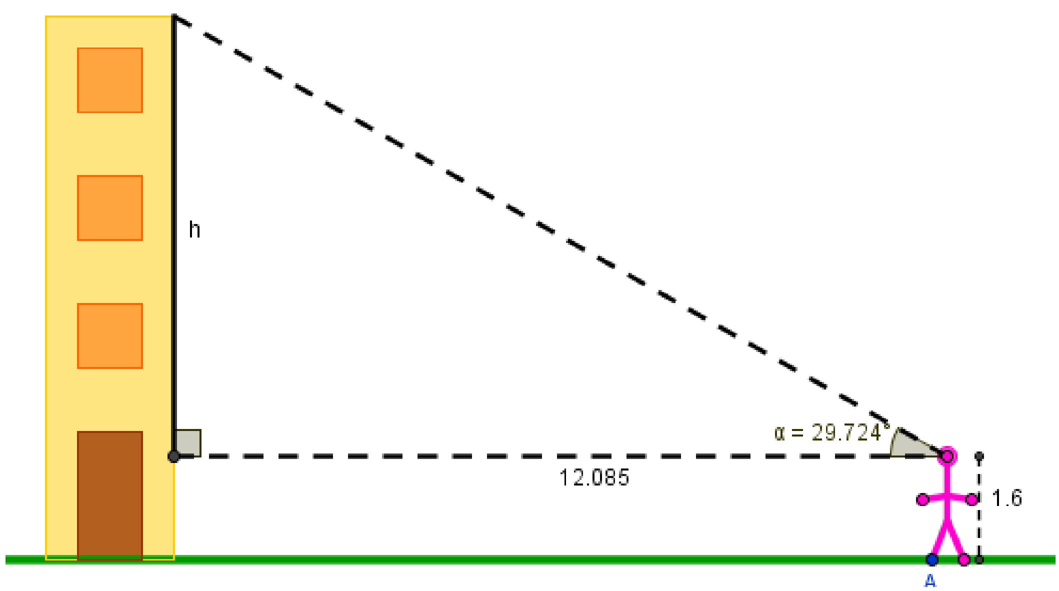
ou

cosssenoα=cos(α)

ou

tangenteα=tan(α)

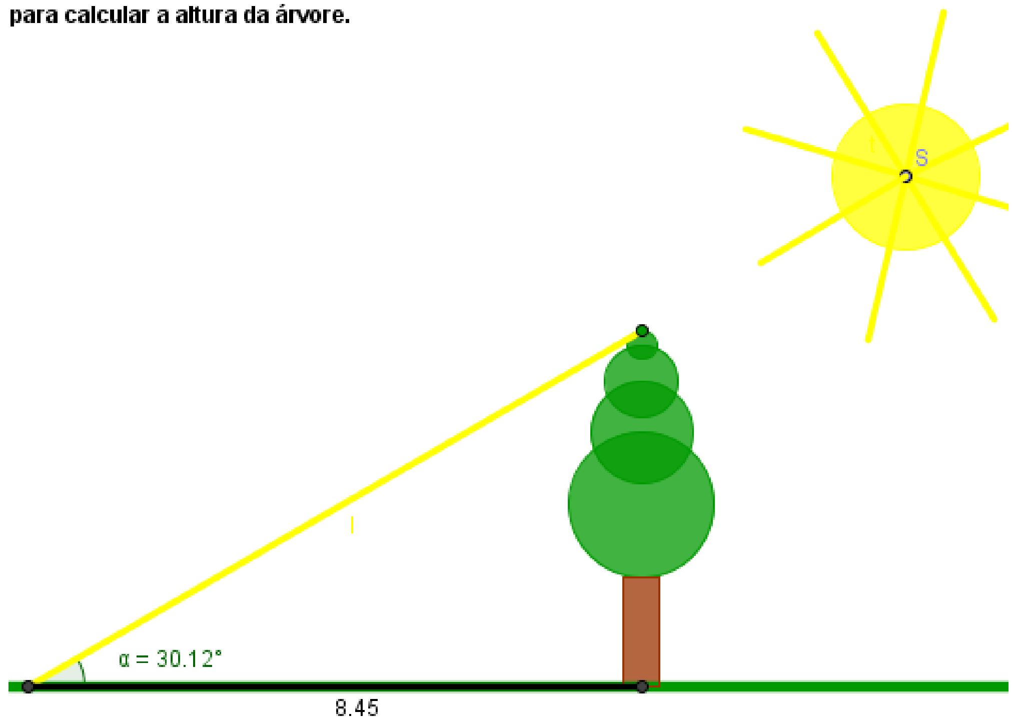
2) No menu Exibir, selecione janela de álgebra e localize o seno, cosseno ou tangente com o respectivo valor informado pelo Geogebra.



Atividade 2 - 2° problema.

Atividade 2: Calcular a altura da árvore.

Uma árvore projeta no solo uma sombra com um certo comprimento quando um raio de sol forma um ângulo α com a horizontal. Movimente o ponto S para determinar esse comprimento e esse ângulo. Utilize uma relação trigonométrica adequada para calcular a altura da árvore.

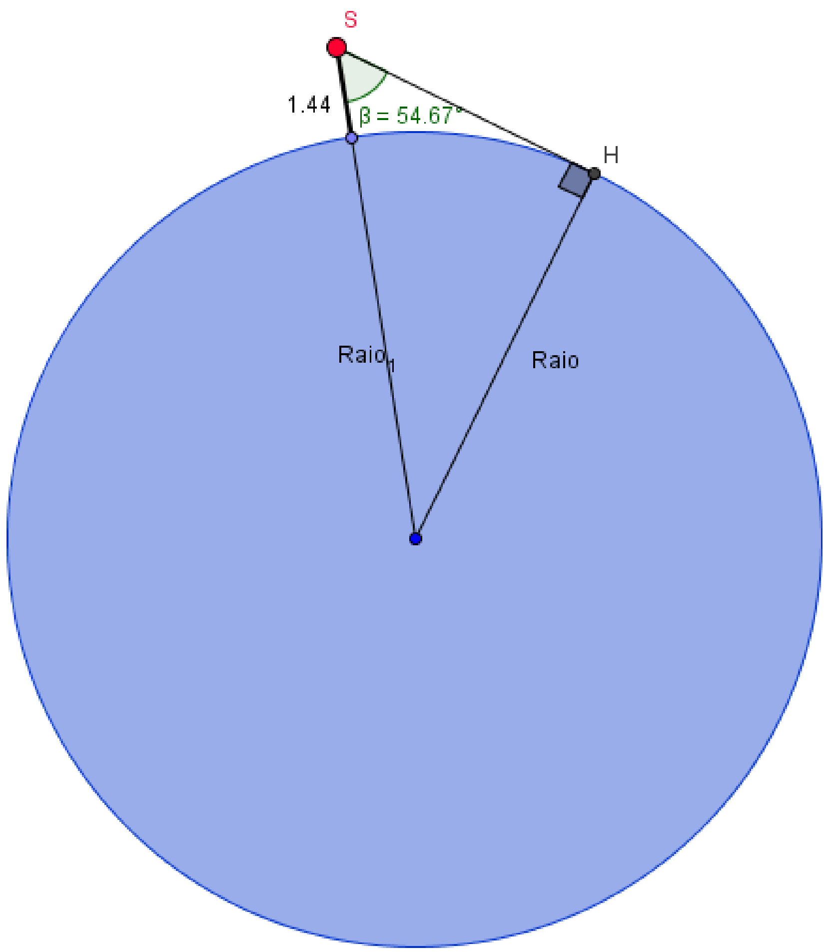


Atividade 2 - 3° problema.

Atividade 3: Medindo o raio da Terra

Um satélite S sobrevoa a órbita da Terra a uma certa distância de sua superfície. Um instrumento no satélite mede o ângulo β que é formado pela perpendicular à superfície da Terra e pela linha do horizonte.

Mova o Satélite para determinar a distância em relação à Terra e o ângulo β. Utilize uma relação trigonométrica adequada para calcular o raio da Terra. [Observação: a figura foi feita com a escala de 1: 1000]

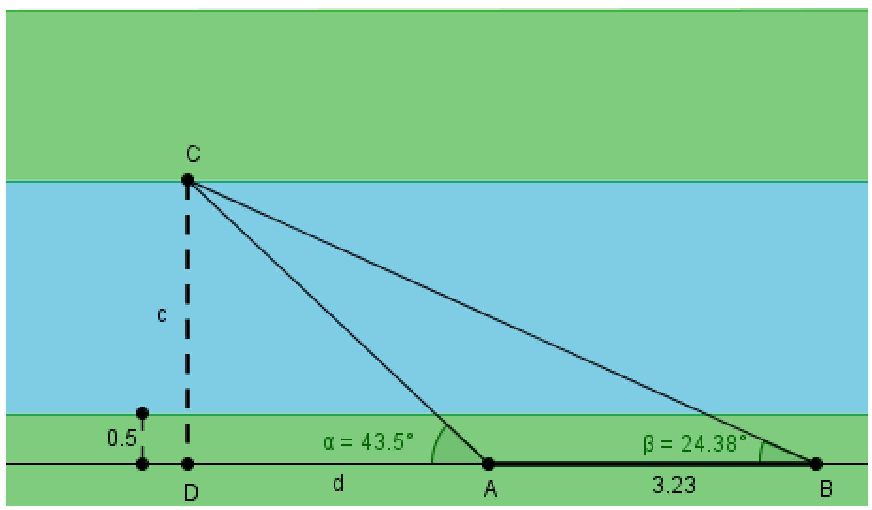


Atividade 2 - 4° problema.

Atividade 4: Calcular a largura de um riacho.

Uma pessoa está em uma das margens de um riacho e deseja conhecer a sua largura. Ela segue o seguinte procedimento: para em um ponto A e avista, na margem oposta, uma pedra, situada no ponto C, que usará como referência para medida dos ângulos. Utilizando um instrumento de medida de ângulos, mede o ângulo formado pela reta paralela à margem e sua visão da pedra. Desloca-se para um ponto B, na reta paralela à margem, e faz uma nova medição de ângulo.

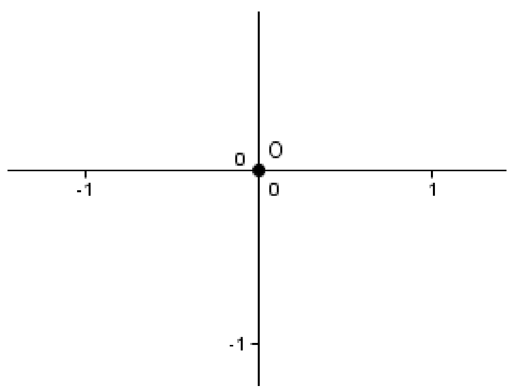
Mova os pontos A e B como desejar. Utilize os valores dos ângulos, a distância entre A e B, as distâncias c e d e uma relação trigonométrica adequada para calcular a largura do rio.



Atividade 3:

Construindo e caracterizando o círculo trigonométrico

1) No 6º botão, selecione Círculo dado centro e raio no menu que irá abrir.
2) Clique no ponto O e digite 1 para o raio;
3) Marcar os ponto de intersecção (2º botão, selecionar Intersecção de dois objetos) do círculo com os eixos.
4) Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A (ponto de coordenadas (1, 0)), selecione propriedades e, em exibir rótulo, selecione nome & valor. Repita isso para os pontos B, C e D (no sentido anti-horário).
5) Nomear os quadrantes (inserir texto no penúltimo botão): escreva 1º Q e arraste o texto até ele ficar sobre o quadrante AOB, depois novo texto, digite 2°Q e arraste o texto para o quadrante BOC e assim por diante, no sentido anti-horário.
6) Marcar um ponto P qualquer sobre o círculo (selecione novo ponto no segundo botão e depois, para renomear o ponto, clique com o botão direito do mouse sobre ele e selecione renomear);
7) Marcar o ângulo AÔP (oitavo botão) e arrastar o ponto sobre o círculo para observar o ângulo.



Agora responda:

a) Os ângulos do 1° quadrante variam de quanto a quanto? Resposta:

b) E os ângulos do 2° quadrante? Resposta:

c) E os ângulos do 3º quadrante? Resposta:

d) E os ângulos do 4º quadrante? Resposta:

e) Selecione ângulo com amplitude fixa no oitavo botão. Clique sobre A e O e digite, na janela que irá abrir, um ângulo maior do que 360°. Qual ângulo ficou marcado no círculo? Explique o que aconteceu. Resposta:

f) Novamente, selecione ângulo de amplitude fixa, mas agora digite um ângulo negativo. Qual ângulo ficou marcado no círculo? Explique o que aconteceu.
OBS: se os valores ficarem uns sobre os outros, selecione mover no primeiro botão, clique sobre o(s) valor(es) e arraste um pouco para o lado para poder enxergá-lo(s).

Resposta:

Atividade 4:

Relação entre as unidades de medidas de ângulos e de arcos – grau x radiano

1) Marque um ponto P sobre o círculo (2° botão, novo ponto. Renomear, botão direito do mouse).
2) Selecionar, no 6° botão, a ferramenta "arco circular dados o centro e dois pontos". Clique em O, depois nos pontos A e P.
3) Mude a cor e a espessura do arco para melhor visualização: na janela de álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre o d e selecione propriedades. Mude a cor para vermelho e, em estilo, aumente a espessura do arco para 5.
4) Exibir o rótulo "valor" (também clique com o botão direito sobre d, propriedades e básico).
5) Marcar o ângulo AOP nessa ordem (8° botão).

Responda:

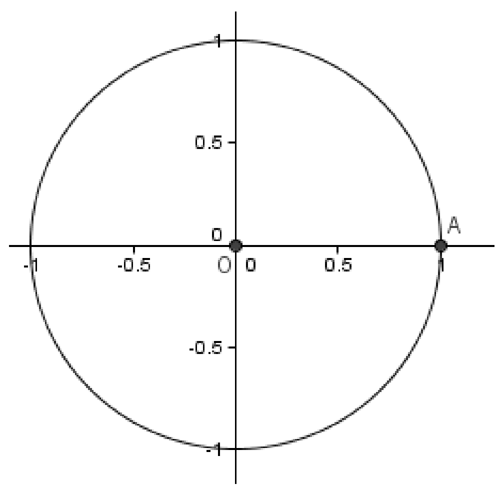
1) O que representa o valor que aparece associado ao arco AOP? Resposta:

2) Posicione o ponto P de tal forma a obter um arco de medida igual a 1.
Quantos arcos com a mesma medida desse cabem no círculo aproximadamente?

Resposta:

3) Em que quadrante fica o ponto P para um arco de medida igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7 Resposta:
a) b) c) d) e) f)



4) Complete:

a) O arco de 1 rad é correspondente a um ângulo de aproximadamente...... graus.

b) Um ângulo de 90º é correspondente a um arco de aproximadamente..... rad.

c) 180º corresponde a .... rad.

d) 270º corresponde a ...... rad.

e) 360º corresponde a ..... rad.

f) π rad corresponde .... rad ou .... º

g) 2π rad corresponde a .... rad ou........ º

h) π/2 rad corresponde a ....°

i) 3π/2 rad corresponde a ....°

Atividade 5:

Seno e cosseno no círculo trigonométrico

Observe a construção dada ao lado.

Nela temos:

1) O círculo trigonométrico.

2) O ponto P sobre o círculo

3) O triângulo retângulo OCP.

4) Os segmentos OS e OC.

5) O ângulo Ô ou AÔP.

Atividades:

1. Qual é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo? Resposta:

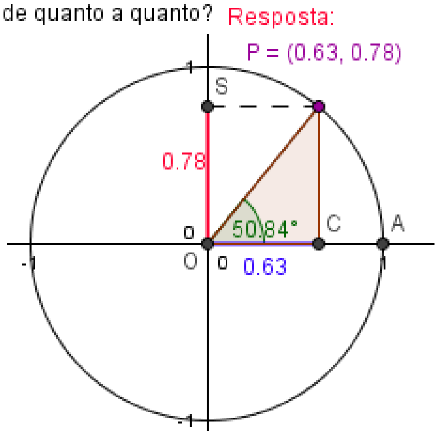
2. Mova o ponto P APENAS no 1° quadrante. Qual relação você observa entre as medidas dos segmentos OS e OC comparando-as com as coordenadas do ponto P? Resposta:

3. Fixe o ponto P em algum ponto do 1° quadrante.

a) Calcule o seno do ângulo Ô. Resposta:senÔ= =

b) Calcule o cosseno do ângulo Ô. Resposta:cosÔ= =

4. Com base nessas informações, responda: ao movimentarmos o ponto P no 1° quadrante, os valores de seno e cosseno estão variando de quanto a quanto? Resposta:



5. Agora, movimente o ponto P APENAS sobre o segundo quadrante.
Qual relação você observa entre as medidas dos segmentos OS e OC comparando-as com as coordendas do ponto P? Resposta:

**Importante: observe que estamos ampliando a ideia de senos e cossenos para ângulos maiores do que 90°.
Passamos a olhar o seno e o cosseno não somente como as medidas dos segmentos OS e OC, mas como sendo as coordenadas do ponto P: o cosseno é a primeira coordenada e o seno, a segunda.**

6.Com base nessas informações, responda: ao movimentarmos o ponto P no 2° quadrante, os valores de seno e cosseno estão variando de quanto a quanto?

Resposta:

7. No terceiro quadrante, o ângulo AÔP varia de quanto a quanto?
E os valores de seno e cosseno, variam de quanto a quanto?
Resposta:

8. No quarto quadrante, o ângulo AÔP varia de quanto a quanto?
E os valores de seno e cosseno? Resposta:

9. Movimente o ponto P e responda:

sen 0° =	cos 0° =
sen 90° =	cos 90°
sen 180° =	cos 180° =
sen 270° =	cos 270° =
sen 360° =	cos 360° =

10. Classifique a afirmação em verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta:
sen 30° = 0,5 e sen 210° = - 0,5. Resposta:

11. Em quais quadrantes os valores de seno são positivos?
E em quais são negativos? Resposta:

12. Em quais quadrantes os valores de cosseno são positivos?
E em quais são negativos? Resposta:

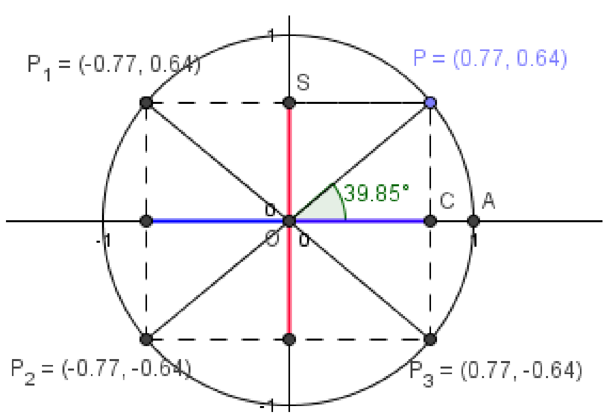
Atividade 6:

Simetrias

1. inicialmente, apenas movimente o ponto P sobre o círculo trigonométrico e observe as relações entre os pontos P's:
Os pontos P e P_1 são simétricos em relação ao eixo y.
P e P_3 são simétricos em relação ao eixo x.
P e P_2 são simétricos em relação à origem.

2. Fixe o ponto P no primeiro quadrante (não mexa mais no ponto por enquanto).

3. Calcule e complete com as medidas (positivas) dos ângulos tomados no sentido anti-horário:
med(AÔP) =
med(AÔP_1)=
med(AÔP_2) =
med(AÔP_3)=



4. Classifique em verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Os senos dos ângulos AÔP e AÔP_1 têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal. R:

b) Os senos dos ângulos AÔP e AÔP_2 têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal. R:

c) Os cossenos dos ângulos AÔP e AÔP_3 têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos. R:

d) Os cossenos dos ângulos AÔP e AÔP_2 têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos. R;

e) Os senos dos ângulos AÔP e AÔP_3 têm mesmo valor absoluto e sinais opostos. R:

f) Os cossenos dos ângulos AÔP e AÔP_1 têm o mesmo valor absoluto e sinais iguais. R:

g) sen 246,5 ° = - sen 66,5° R:

h) cos 317,49° = cos 42,51° R:

i) sen 148,12° = - sen 31,88° R:

j) cos 100,88° = - cos 79,12° R:

5. Resolva as equações trigonométricas abaixo. Para cada equação, obtenha todas as soluções possíveis considerando $0° \leq x < 360°$ ou $0 \leq x < 2\pi$.

a) senx = sen45° R:

b) cos x = cos 1 R:

c) sen x = - 0,5 R:

d) cos x = 0,7 R:

e) sen 2x = 0,4 R:

f) cos 3x = - 1 R:

Atividade 7:

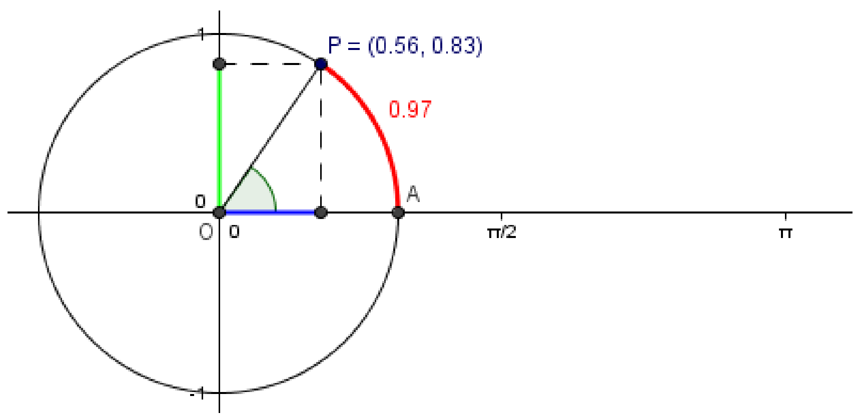
Retomando conceitos: seno e cosseno de arcos medidos em radianos.

1. Mova o ponto P sobre o círculo e complete:

sen 1 = cos 1=	sen 3,45 = cos 3,45 =	$\cos\frac{\pi}{4}=$	$\text{sen}\frac{2\pi}{3}=$
sen 2,02 = cos 2,02 =	sen 6 = cos 6 =	$\text{sen}(-\frac{\pi}{3})=$	cos (- 2)=

2. Exiba a janela de álgebra e nela clique sobre o ponto P' e sobre b para torná-los visíveis. Mova o ponto P e observe a relação que existe entre as medidas do arco AP e do segmento 0P'. O que você observou?

Resposta:



Atividade 8:

Gráfico das funções seno e cosseno a partir do círculo trigonométrico

1. Observar seno e cosseno destacados no círculo.

2. Clique no ponto B, na janela de álgebra. Mova o ponto P sobre o círculo
Responda: qual relação existe entre o arco AP e a posição do ponto B sobre o eixo horizontal?

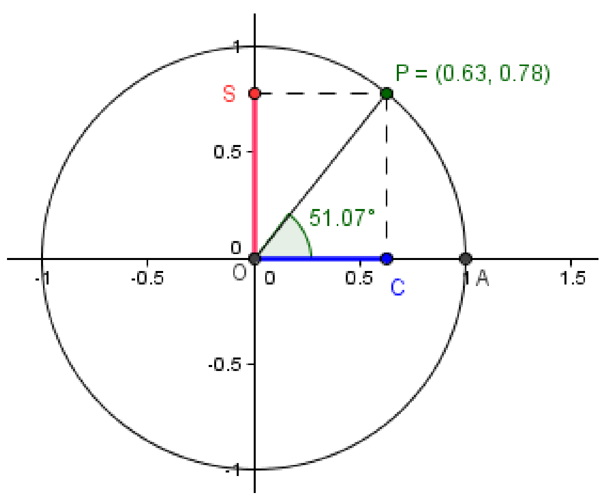
Resposta:

3. Clicar em S_2 e i.
4. Habilitar rastro do ponto S_2 clicando com o botão direito do mouse sobre ele e selecionado habilitar rastro.
5. Mova o ponto P sobre todo círculo . Faça isso várias vezes até a curva que apareceu ficar toda pintada.
Responda: Que relação você observa entre essa curva e as informações fornecidas no círculo trigonométrico?

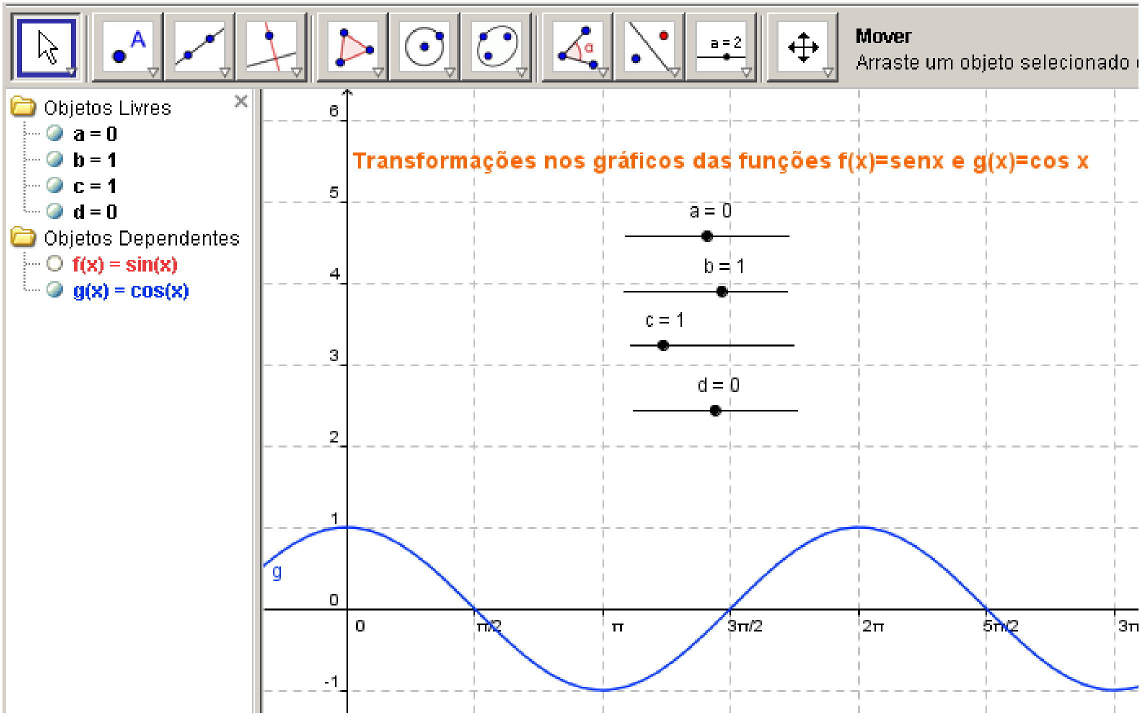
Resposta:

6. Clicar em C_2 e j.
7. Habilitar rastro do ponto C_2.
8. Responda: O que significa essa curva que apareceu? Que relação existe entre ela e as informações do círculo trigonométrico?

Resposta:



Atividade 9:


Mover
Arraste um objeto selecionado
Objetos Livres
a = 0
b = 1
c = 1
d = 0
Objetos Dependentes
f(x) = sin(x)
g(x) = cos(x)
Transformações nos gráficos das funções f(x)=senx e g(x)=cos x
a = 0
b = 1
c = 1
d = 0
g
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π