

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AO  
ESTUDO DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR EM ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO**

**Carla Wagner Matzenbacher**

Porto Alegre

dezembro 2011

**CARLA WAGNER MATZENBACHER**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AO  
ESTUDO DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR EM ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre

dezembro 2011

**CARLA WAGNER MATZENBACHER**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AO  
ESTUDO DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR EM ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 15 de dezembro de 2011

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade  
de São Paulo  
orientador

Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco  
Ph.D. pela Pennsylvania State University  
orientador

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Gerson Moacyr Sisniegas Alva (UFSC)**

Dr. pela Universidade de São Paulo

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal (UFRGS)**

Ph.D. pela North Carolina State University

Matzenbacher, Carla Wagner

Aplicação do método dos elementos finitos ao estudo de ligações viga-pilar em estruturas de concreto armado / Carla Wagner Matzenbacher. – 2011.

122 f.

Orientador: Américo Campos Filho.

Orientador: Alexandre Rodrigues Pacheco

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2011.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Concreto armado. 3. Nós de pórtico. I. Campos Filho, Américo, orient. II. Pacheco, Alexandre Rodrigues, orient. III. Título.

## RESUMO

MATZENBACHER, C. W. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos ao Estudo de Ligações Viga-Pilar em Estruturas de Concreto Armado**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A simulação numérica através do Método dos Elementos Finitos vem sendo utilizada em grande escala nos dias de hoje. Sendo que os trabalhos experimentais não conseguem cobrir toda a gama de situações que podem ocorrer em estruturas de concreto armado, o Método dos Elementos Finitos se apresenta como uma ferramenta para ampliar e generalizar os resultados obtidos através de modelos experimentais testados em laboratório. Estruturas de nós de pórtico em concreto armado são largamente utilizadas em construções civis e possuem um comportamento muito particular. Este trabalho tem por objetivo desenvolver um modelo numérico que simule as ligações viga-pilar nos nós de pórtico em concreto armado, examinando o comportamento destes nós com diferentes configurações geométricas. O modelo computacional desenvolvido é avaliado, primeiramente, através de resultados experimentais bem conhecidos para vigas biapoiadas, para, em seguida, apresentarem-se as análises de nós de pórtico. Os resultados numéricos, utilizando-se dois modelos de malha: uma com elementos quadrangulares quadráticos de oito nós e outra com elementos triangulares lineares de três nós, são comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura. Nesta comparação, pode-se verificar que a modelagem com malha de elementos triangulares lineares pode ser utilizada para análise de estruturas diversas. Podendo-se, também, utilizar esta malha como uma ferramenta para elaboração de códigos computacionais restritos a elementos finitos com funções de interpolação lineares. Os resultados numéricos avaliam, também, a rotação relativa na ligação entre a viga e o pilar.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, concreto armado, nós de pórtico.

## **ABSTRACT**

**MATZENBACHER, C. W. Applying the Finite Element Method to the Study of Beam-Column Joints in Reinforced Concrete Structures.** 2011. Thesis (MSc. in Civil Engineering) – Civil Engineering Graduate Program, UFRGS, Porto Alegre.

Numerical simulations by the Finite Element Method are being extensively used nowadays. Since experimental tests cannot cover the innumerable situations that can occur in reinforced concrete structures, the Finite Element Method presents itself as a tool to amplify and generalize the results obtained throughout experimental models tested in the lab. Structures of reinforced concrete frame joints are largely used in civil construction and have a very particular behavior. This work has the objective of developing a numerical model that simulates beam-column joints in reinforced concrete frames, examining their behavior with different geometrical configurations. The developed computational model is firstly evaluated through well-known experimental results for simply supported beams to, in a second occasion, present the analyses of frame joints. The numerical results, with the consideration of two mesh models: one with quadratic quadrilateral elements of eight nodes and another with linear triangular elements of three nodes, are compared with experimental results from the literature. In this comparison, it is possible to verify that the modeling with linear triangular element meshes can be used for a diversity of structures. One can also use this mesh as a tool in the development of computational codes restricted to linear finite elements. The numerical results also evaluate the relative rotation at the joints between beams and columns.

**Keywords:** the Finite Element Method; reinforced concrete; frame joints.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	OBJETIVOS.....	2
1.2	CONTEXTO BIBLIOGRÁFICO.....	2
1.2.1	<i>Nós de pórtico.....</i>	3
1.2.2	<i>Modelos numéricos de nós de pórtico.....</i>	7
1.3	ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO.....	10
<b>2</b>	<b>MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO.....</b>	<b>11</b>
2.1	INTRODUÇÃO.....	11
2.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ELASTO-VISCOPLÁSTICO.....	11
2.2.1	<i>Formulação básica.....</i>	11
2.2.2	<i>Incremento de deformação viscoplástica.....</i>	13
2.2.3	<i>Incremento de tensão.....</i>	14
2.2.4	<i>Equações de equilíbrio.....</i>	14
2.2.5	<i>Correção do equilíbrio.....</i>	16
2.3	COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO.....	17
2.3.1	<i>Incremento de tensão.....</i>	17
2.3.2	<i>Equações de equilíbrio.....</i>	18
2.3.3	<i>Taxa de deformação viscoplástica.....</i>	19
<b>3</b>	<b>MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E PARA A ARMADURA.....</b>	<b>20</b>
3.1	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO.....	20
3.1.1	<i>Elemento quadrangular quadrático.....</i>	20
3.1.2	<i>Elemento triangular linear.....</i>	23

3.2	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA.....	26
3.2.1	<i>Modelo incorporado</i> .....	26
3.2.2	<i>Formulação geométrica</i> .....	27
3.2.3	<i>Segmentos de armadura localizados no interior de um elemento de concreto</i> ....	31
3.2.3.1	FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO QUADRANGULAR QUADRÁTICO.....	31
3.2.3.2	FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR.....	36
3.2.4	<i>Funções de forma para os elementos de armadura</i> .....	38
3.2.5	<i>Matriz de rigidez para a armadura</i> .....	38
<b>4</b>	<b>MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS .....</b>	<b>41</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	41
4.2	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO.....	42
4.2.1	<i>Modelo para o concreto comprimido</i> .....	42
4.2.1.1	CRITÉRIO DE RUPTURA .....	44
4.2.1.2	CRITÉRIO DE PLASTIFICAÇÃO .....	47
4.2.1.3	REGRA DE ENDURECIMENTO .....	48
4.2.1.4	VETOR DE FLUXO PLÁSTICO.....	50
4.2.2	<i>Modelo para o concreto à tração</i> .....	52
4.2.2.1	CRITÉRIO DE FISSURAÇÃO .....	52
4.2.2.2	CRITÉRIO PARA ESCOLHA DA CURVA DE AMOLECIMENTO.....	53
4.2.2.3	RIGIDEZ TRANSVERSAL DO CONCRETO FISSURADO.....	55
4.3	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA.....	56
<b>5</b>	<b>PRÉ-PROCESSADOR E PÓS-PROCESSADOR.....</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO .....</b>	<b>60</b>
6.1	DESCRIÇÃO DO MODELO.....	60



6.2	RESULTADOS OBTIDOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA .....	62
6.2.1	<i>Viga ET1</i> .....	62
6.2.2	<i>Viga ET2</i> .....	67
6.2.3	<i>Viga ET3</i> .....	71
6.2.4	<i>Viga ET4</i> .....	75
6.3	REFINAMENTO DA MALHA DE ELEMENTOS TRIANGULARES .....	79
<b>7</b>	<b>ANÁLISE DE NÓS DE PÓRTICO EM CONCRETO ARMADO.....</b>	<b>83</b>
7.1	COMPARAÇÕES: RESULTADOS EXPERIMENTAIS E SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....	83
7.1.1	<i>Resultados experimentais</i> .....	87
7.1.2	<i>Resultados numéricos</i> .....	89
7.1.2.1	MODELO RK2 .....	90
7.1.2.2	MODELO RK3 .....	98
7.1.2.3	MODELO RK5 .....	104
7.1.2.4	MODELO RK6 .....	110
7.1.3	<i>Análise dos resultados</i> .....	116
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>118</b>
8.1	CONCLUSÕES.....	118
8.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	119

## LISTA DE SÍMBOLOS

### I - LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A - área; coeficiente

$A_c$  - área da seção transversal de concreto

$A_p$  - área da seção transversal da armadura

B - matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto; coeficiente

$B_s$  - vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço

C - função de posição ao longo da barra de armadura; coeficiente

D - matriz constitutiva

E - módulo de elasticidade longitudinal

$E_c$  - módulo de elasticidade longitudinal do concreto

$E_s$  - módulo de elasticidade longitudinal do aço

F - função de plastificação; força; “pseudo-carga”

$F_0$  - tensão de excoamento uniaxial

G - módulo de elasticidade transversal

$G_c$  - módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado

H - função de interpolação da armadura

$I_1$  - primeiro invariante do tensor de tensão

J - matriz jacobiana;

$J_2$  - segundo invariante do tensor desviador de tensão

$J_3$  - terceiro invariante do tensor desviador de tensão

K - matriz de rigidez do elemento de concreto armado

$K_c$  - matriz de rigidez do concreto

$K_s$  - matriz de rigidez do aço

$K_T$  – matriz de rigidez tangencial global

$M$  – matriz de forma do elemento finito

$N$  – função de interpolação para o elemento de concreto

$P$  – coordenadas dos nós das barras de aço

$Q$  - função do potencial plástico

$V$  - volume

$W$  - trabalho

## II - LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$a$  – vetor de fluxo plástico; coeficiente

$b$  – coeficiente

$c$  – parâmetro; coeficiente

$d$  – deslocamento nodal

$e$  – espessura total do elemento de concreto; elemento de concreto

$f$  – função, vetor de forças nodais equivalentes; superfície de ruptura

$f_{cm}$  – resistência média à compressão do concreto

$f_{tm}$  – resistência média à tração do concreto

$g$  – função

$i$  – número de iterações

$k$  – parâmetro de endurecimento; número de iterações; razão entre  $f_{tm}$  e  $f_{cm}$

$k_1$  – parâmetro

$ne$  – número total de elementos

$ng$  – número de pontos de integração de Gauss

$np$  – número de pontos da barra de armadura

s – tensão desviadora; indicação de material aço

t – tempo

u - campo de deslocamento

x - coordenada cartesiana

y - coordenada cartesiana

w - fator de peso

### III - LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$\Delta$  - incremento

$\Sigma$  - somatório

### IV – LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

$\alpha$  - coeficiente; ângulo

$\beta$  - coeficiente; ângulo

$\gamma$  - coeficiente de fluidez do concreto

$\gamma_s$  - coeficiente de fluidez do aço

$\delta$  - variação; deslocamentos nodais

$\varepsilon$  - deformação específica longitudinal

$\dot{\varepsilon}$  - taxa de deformação

$\varepsilon_e$  - deformação elástica

$\varepsilon_{ctu}$  – deformação limite para o concreto entre fissuras

$\varepsilon_s$  – deformação total do aço

$\varepsilon_{s,e}$  - deformação específica elástica do aço

$\varepsilon_{s,vp}$  – deformação específica viscoplástica do aço

$\varepsilon_t$  – deformação normal à tração do concreto

$\varepsilon_{ve}$  - deformação viscoelástica

$\varepsilon_{vp}$  - deformação viscoplástica

$\eta$  - coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada

$\theta$  - função; ângulo

$\lambda$  - parâmetro

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\xi$  – coordenada normalizada

$\sigma$  - tensão normal no concreto

$\dot{\sigma}$  - taxa de tensão

$\sigma_{ef}$  - tensão efetiva no concreto

$\sigma_s$  - tensão normal na armadura

$\tau$  – tensão de corte no concreto

$\phi$  - diâmetro da barra da armadura

$\chi$  – coordenada normalizada

$\psi$  - forças residuais

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Geometrias usuais de nós - (PAULAY E PRIESTLEY, 1992).....	3
Figura 2: ruptura por tração diagonal (GEORGOUSSIS, 1980).....	6
Figura 3: ruptura por compressão diagonal (GEORGOUSSIS, 1980).....	6
Figura 4: falha na ancoragem (GEORGOUSSIS, 1980).....	6
Figura 5: Elemento isoparamétrico quadrangular .....	20
Figura 6: elemento finito triangular linear.....	23
Figura 7: Barra de armadura no interior de um elemento de concreto .....	28
Figura 8: coordenadas ao longo do eixo da armadura .....	30
Figura 9: curva de definição da barra de aço.....	33
Figura 10: situações possíveis de se encontrar uma barra de armadura .....	34
Figura 11: segmento de armadura dentro do elemento de concreto .....	35
Figura 12: barra de armadura localizada numa aresta em comum de dois elementos de concreto.....	36
Figura 13: representação da reta no espaço .....	36
Figura 14: diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto estrutural .....	41
Figura 15: meridianos da superfície de ruptura .....	47
Figura 16: seções transversais da superfície de ruptura .....	47
Figura 17: superfícies de ruptura e de carregamento.....	48
Figura 18: diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido .....	50
Figura 19: curva tensão-deformação para o concreto tracionado.....	54
Figura 20: diagrama tensão deformação para as armaduras.....	56
Figura 21: telas de visualização de resultados.....	59
Figura 22: representação das vigas de Leonhardt e Walther (1962) .....	61
Figura 23: representação das condições de contorno do modelo .....	61
Figura 24: diagrama carga-deslocamento - modelo ET1.....	62
Figura 25: tensões totais no concreto (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo ET1.....	64
Figura 26: distribuição das fissuras - modelo ET1 .....	65
Figura 27: tensões totais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo ET1 .....	66
Figura 28: diagrama carga-deslocamento - modelo ET2.....	67
Figura 29: tensões totais no concreto (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo ET2 .....	68

Figura 30: distribuição das fissuras - modelo ET2 .....	69
Figura 31: tensões totais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo ET2 .....	70
Figura 32: diagrama carga-deslocamento - modelo ET3.....	71
Figura 33: tensões totais no concreto (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo ET3 .....	72
Figura 34: distribuição das fissuras - modelo ET3 .....	73
Figura 35: tensões totais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo ET3 .....	74
Figura 36: diagrama carga-deslocamento - modelo ET4.....	75
Figura 37: tensões totais no concreto (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo ET3 .....	76
Figura 38: distribuição das fissuras - modelo ET4.....	77
Figura 39: tensões totais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo ET4 .....	78
Figura 40: resultados para a carga última (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo com 210 elementos triangulares lineares .....	80
Figura 41: resultados para a carga última (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo com 420 elementos triangulares lineares .....	81
Figura 42: resultados para a carga última (kN/cm <sup>2</sup> ) - modelo com 840 elementos triangulares lineares .....	82
Figura 43: modelos de nós de pórtico analisados .....	85
Figura 44: avaliação da rotação na região do nó .....	86
Figura 45: diagramas carga-deslocamento experimentais obtidos por Roeser (2002).....	87
Figura 46: comportamentos de fissuração apresentados por Roeser (2002) – nós RK2 e RK3 .....	88
Figura 47: comportamentos de fissuração apresentados por Roeser (2002) – nós RK5 e RK6 .....	89
Figura 48: condições de contorno.....	90
Figura 49: diagrama carga-deslocamento - modelo RK2.....	91
Figura 50: diagrama momento-rotação - modelo RK2.....	92
Figura 51: tensões no concreto $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK2 .....	93
Figura 52: tensões no concreto $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK2 .....	94
Figura 53: distribuição das fissuras – modelo RK2.....	95
Figura 54: tensões axiais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK2 .....	97
Figura 55: diagramas carga-deslocamento - modelo RK3 .....	98
Figura 56: diagrama momento-rotação - modelo RK3.....	99

Figura 57: tensões no concreto $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK3 .....	100
Figura 58: tensões no concreto $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK3 .....	101
Figura 59: distribuição das fissuras – modelo RK3.....	102
Figura 60: tensões axiais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK3 .....	103
Figura 61: diagramas carga - modelo RK5.....	104
Figura 62: diagrama momento-rotação - modelo RK5.....	105
Figura 63: tensões no concreto $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK5 .....	106
Figura 64: tensões no concreto $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK5 .....	107
Figura 65: distribuição das fissuras – modelo RK5.....	108
Figura 66: tensões axiais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK5 .....	109
Figura 67: diagramas carga-deslocamento - modelo RK6 .....	110
Figura 68: diagrama momento-rotação - modelo RK6.....	111
Figura 69: tensões no concreto $\sigma_x$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK6 .....	112
Figura 70: tensões no concreto $\sigma_y$ (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK6 .....	113
Figura 71: distribuição das fissuras – modelo RK6.....	114
Figura 72: tensões axiais na armadura (kN/cm <sup>2</sup> ) – modelo RK6 .....	115



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: propriedades das seções transversais e resistência do concreto de cada nó de pórtico .....	84
Tabela 2: propriedades das armaduras de cada nó de pórtico .....	84



## 1 INTRODUÇÃO

O comportamento do concreto armado é muito complexo e, em virtude de sua importância dentro da engenharia estrutural, é objeto de permanente estudo. A diferença entre resistência à tração e à compressão do concreto, a não-linearidade da relação tensão-deformação, a aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacente, a fissuração do concreto e a transmissão de esforços entre fissuras, entre outros, são fatores que dificultam a análise de estruturas de concreto armado.

As ligações viga-pilar também possuem comportamento complexo e estão sendo investigadas há muitos anos. Uma grande quantidade de trabalhos experimentais já foi realizada. O principal objetivo desses trabalhos é realizar as formas mais variadas de experimentação, propondo cobrir toda a gama de combinações das variáveis existentes para este problema. No entanto, mesmo com uma extensiva pesquisa experimental não seria possível fazer essa cobertura. Os programas numéricos, baseados, em geral, no Método dos Elementos Finitos, surgem como uma alternativa para ampliar o universo de situações estudadas.

Nesse trabalho é proposto um modelo computacional, baseado no Método dos Elementos Finitos, para a análise de nós de pórtico em estruturas de concreto armado. Através de um algoritmo, que considera o material com comportamento elastoplástico, foram implementados modelos com dois elementos finitos distintos: elementos quadrangulares quadráticos e elementos triangulares lineares. Inicialmente verificou-se a adequação do modelo computacional desenvolvido para reproduzir o funcionamento de vigas de concreto armado. Para tal, compararam-se os resultados do modelo com os obtidos experimentalmente por Leonhardt e Walther (1962) para uma série de vigas. Posteriormente compararam-se resultados experimentais para nós de pórtico. Foram utilizados, então, os resultados experimentais determinados por Roeser (2002).

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho foi desenvolver um modelo numérico que utilize elementos quadrangulares quadráticos e triangulares lineares em uma mesma formulação. Com este modelo podem-se comparar malhas pouco refinadas de elementos quadrangulares quadráticos com malhas muito refinadas utilizando-se elementos triangulares lineares. Essa comparação pode auxiliar na formulação de modelos numéricos que precisem ser elaborados utilizando-se elementos mais simples, pois, em algumas situações, devido a alguma restrição das propriedades numéricas, fica condicionada a utilização de elementos com menor quantidade de nós e pontos de Gauss.

Um dos objetivos secundários é realizar uma primeira verificação do correto funcionamento da modelagem numérica desenvolvida. Para isso são utilizadas as vigas ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962) e o nós de pórtico testados por Roeser (2002).

Outro objetivo secundário trata da definição da necessidade de refinamento da malha de elementos triangulares em relação à malha de elementos quadrangulares. Com modelos de elementos finitos mais simples de concreto armado, definem-se quantos elementos triangulares são necessários para cada elemento quadrangular. Com esta informação podem-se rodar modelos mais complexos de concreto armado sem que seja necessário rodar repetidas vezes com malhas mais refinadas para obtenção de resultados satisfatórios.

Um terceiro objetivo é a análise do comportamento da rotação relativa da ligação da viga com o pilar conforme são incrementadas as cargas dos modelos de nós de pórtico. Muitos softwares comerciais utilizam, para suas formulações numéricas, a condição de que os ângulos continuam retos entre vigas e pilares mesmo com carregamentos extremos.

## 1.2 CONTEXTO BIBLIOGRÁFICO

Neste item é apresentado o referencial teórico que embasa a pesquisa. Aqui estão reunidas, analisadas e discutidas as informações publicadas sobre o tema proposto, com a finalidade de fundamentar teoricamente o objeto de investigação.

### 1.2.1 Nós de pórtico

Os nós de pórtico são estruturas comumente utilizadas na engenharia civil. Esses nós representam as ligações viga-pilar nas mais diversas formas possíveis. Segundo Paulay e Priestley (1992) os nós podem ser classificados segundo as diferenças observadas nos mecanismos de ancoragem da armadura da viga, dividindo-os em dois grupos: externos (Figura 1 (a) a (f)) e internos (Figura 1 (g) a (j)). Nessas figuras as lajes não são desenhadas a fim de facilitar a visualização.

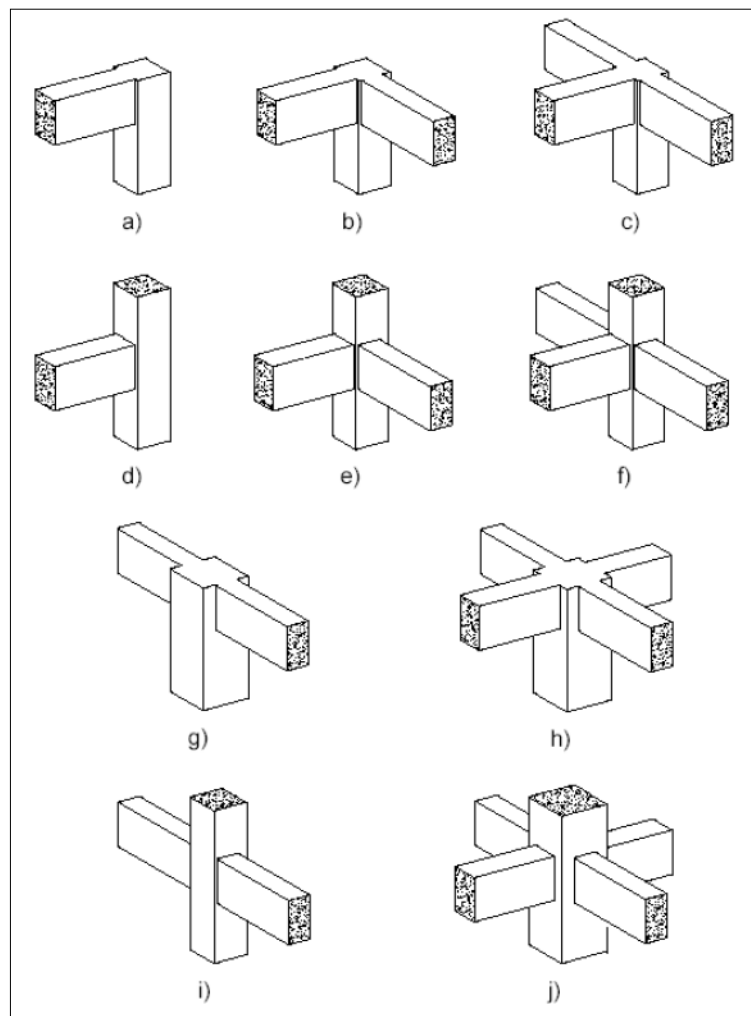


Figura 1: Geometrias usuais de nós - (PAULAY E PRIESTLEY, 1992)

As ligações viga-pilar frequentemente são as conexões mais fracas no sistema estrutural. Conforme Park e Paulay (1975), os requisitos essenciais para uma estrutura de nó em concreto

armado ter performance satisfatória são os seguintes:

- uma ligação deve apresentar uma performance semelhante aos elementos que liga quando submetido a carregamentos de serviço;
- uma ligação deve apresentar uma resistência suficiente para suportar a combinação de cargas mais desfavorável que os elementos que ela liga possam suportar;
- a resistência da ligação não deveria governar a resistência da estrutura e o seu comportamento não deveria impedir o desenvolvimento da resistência total do seu membro adjacente;
- o dimensionamento e detalhamento do nó devem ter arranjos de armaduras que não dificultem a construção ou a compactação do concreto durante a construção.

Até os anos 1970 pouca atenção era dada aos nós de pórtico. Depois de avaliadas as tensões nos membros adjacentes, a maioria dos calculistas admitiam essas condições dentro do nó. Mesmo estes nós que, frequentemente, tinham dimensões um pouco maiores do que os membros que uniam, não eram considerados como um ponto crítico (PARK e PAULAY, 1975).

Georgoussis (1980) enumera as razões pelas quais as investigações sobre os nós de pórtico em concreto armado foram adiante naquele momento:

- mesmo com poucas informações experimentais disponíveis, podia-se perceber que existia uma grande diferença entre a resistência apresentada e a resistência assumida para os nós de pórtico quando determinados detalhamentos de aço eram utilizados;
- o crescente uso de concreto e aço de alta resistência resultava na utilização de elementos cada vez mais delgados, que produziam maiores forças concentradas nos nós. O detalhamento dos nós exigia, então, uma atenção particular para assegurar a performance e diminuir os problemas construtivos;

- identificou-se que os nós de concreto armado deveriam ter uma ductilidade adequada para resistir às grandes deformações provenientes de carregamentos sísmicos.

Os mecanismos de ruptura dos elementos de ligação viga-pilar foram descritos por Georgousis (1980):

- ruptura por tração diagonal: usualmente ocorre em nós de concreto armado submetidos a forças que tendem a retificar a ligação e em ligações de viga-pilar externas. Essa ruptura pode ser frágil dependendo da armadura adotada para o nó (Figura 2);
- ruptura por compressão diagonal: pode ocorrer quando o aço atua no concreto de forma que tensões de tração consideráveis se desenvolvem. Elas se formam perpendicularmente a direção do aço. Nós submetidos a momentos de fechamento produzem condições muito favoráveis para esse tipo de ruptura (Figura 3);
- falha na ancoragem: pode ocorrer em qualquer ligação, em particular naquelas submetidas a carregamentos cíclicos. O desenvolvimento de fissuras em ambos os lados dos elementos de intersecção do nó, conjuntamente com o escoamento da armadura, destroem progressivamente a ligação entre concreto e aço. Isso demonstra que a ancoragem não só depende do comprimento, mas também afeta a abertura de fissuras (Figura 4).
- ruptura por compressão: pode ocorrer quando vigas de concreto com baixa resistência interceptam colunas de concreto de alta resistência.

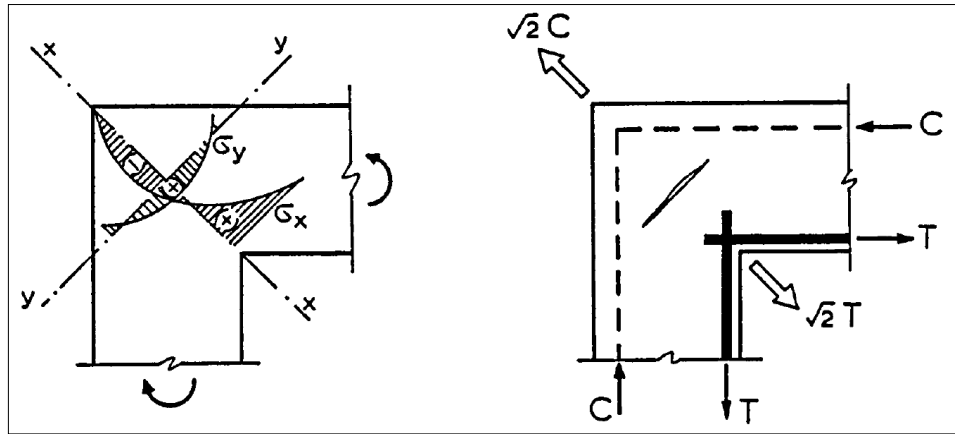


Figura 2: ruptura por tração diagonal (GEORGOUSSIS, 1980)

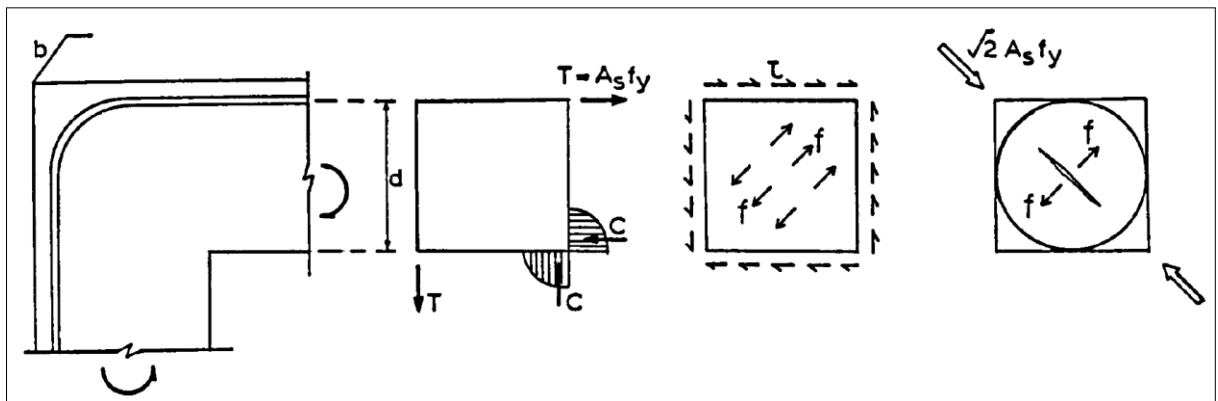


Figura 3: ruptura por compressão diagonal (GEORGOUSSIS, 1980)

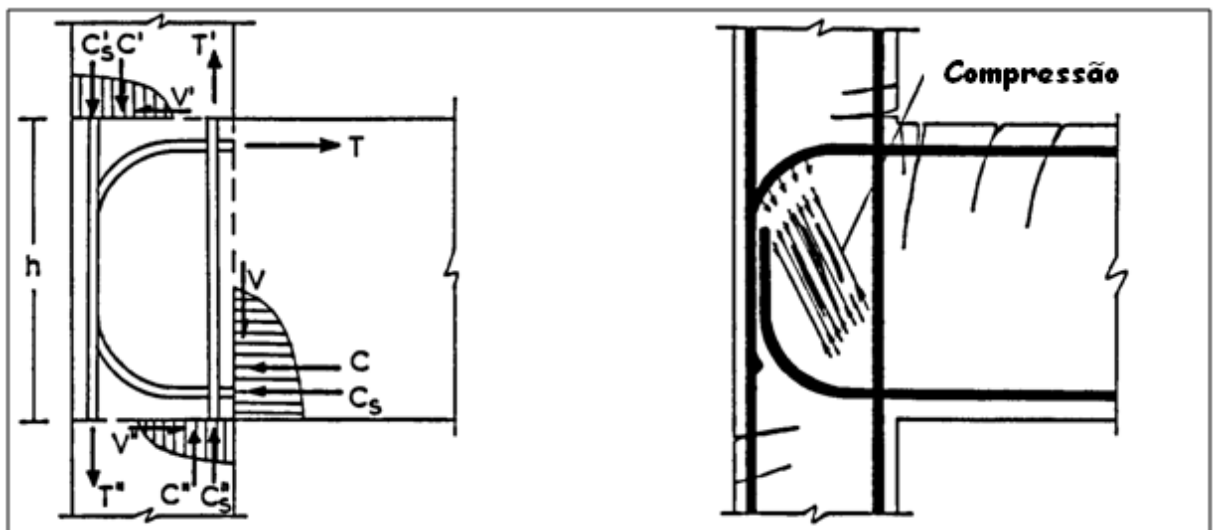


Figura 4: falha na ancoragem (GEORGOUSSIS, 1980)

No entanto, para que estes itens citados acima possam ser respeitados, precisa-se que o nó de



concreto armado seja estudado, pois o comportamento das ligações viga-pilar é complexo e ainda não está completamente entendido. Existem muitas variáveis interagindo para controlar a capacidade do nó, e mesmo um programa experimental extensivo não poderia cobrir completamente todas as combinações dessas variáveis.

Bakir e Boduroglu (2002) afirmam que as ligações viga-pilar podem ser regiões críticas em estruturas apertadas de concreto armado submetidas a efeitos sísmicos severos. Falhas em ligações viga-pilar foram observadas em algumas ocorrências de terremotos desde 1980. Durante os últimos 40 anos, uma quantidade significativa de pesquisas tem sido desenvolvida sobre os comportamentos sísmicos das ligações viga-pilar por todo o mundo. No entanto, comparado às ligações com carregamentos cíclicos, pouca informação existe na literatura prevendo a resistência ao cisalhamento de nós externos carregados monotonicamente.

No Brasil, Alva (2004) realizou um trabalho teórico-experimental de análise de nós de pórtico submetidos a ações cíclicas. As análises foram realizadas através de ensaios experimentais e modelos teóricos derivados do conceito básico de bielas e tirantes e derivados do conceito da Mecânica do Dano e da Fratura. As conclusões deste trabalho tratam, em especial, do detalhamento da armadura na região do nó e indicam o seguinte:

- a forma mais eficiente de ancoragem das barras principais da viga, em termos de resistência e ductilidade, é a dobra de 90 graus para o interior do nó.
- próximo à carga de ruptura, o nó apresenta propagação de fissuras diagonais com grande abertura, indicando a necessidade de utilização de estribos adicionais nesta região.
- as barras longitudinais intermediárias no pilar contribuem como estribos verticais na resistência aos esforços cortantes do nó. Acredita-se que, por propiciar um melhor confinamento da região nodal, a distribuição uniforme das armaduras ao longo do perímetro da seção seja mais indicada.

### **1.2.2 Modelos numéricos de nós de pórtico**

Os primeiros estudos realizados para nós de pórtico utilizando-se elementos finitos foram realizados por Taylor apud Hamil (2000). Neste trabalho apresentado por Taylor apud Hamil

(2000) utilizou-se o método de elementos finitos elásticos para analisar um modelo com fissuração inicial na ligação. O objetivo foi alcançar tensões diagonais similares às tensões de tração no concreto quando iniciava-se a fissuração no nó. Por fim, concluiu-se que, mesmo com bons resultados, o processamento do modelo consumia muito tempo.

Vollum (1998) utilizou um modelo não linear de elementos finitos em sua pesquisa. O objetivo principal foi desenvolver métodos de dimensionamento para ligações viga-pilar externas, convencionais e excêntricas, com ou sem estribos na ligação. Além disso, houve a intenção de desenvolver modelos de bielas e tirantes para prever a resistência das ligações viga-pilar. Este autor leva em consideração o que foi discutido por Kotsovos e Pavlovic (1995) para as considerações em relação ao modelo de elementos finitos adotado.

Uma grande variedade de experimentos foi comparada a modelos numéricos no livro de Kotsvos e Pavlovic (1995). Além do valor de carga de ruptura, outros dois aspectos importantes da resposta estrutural são considerados: o padrão de fissuração e a deformação. Estes dois últimos aspectos não são discutidos com frequência neste trabalho, em parte por ser necessário manter a concisão da apresentação dos resultados, mas também porque as informações experimentais em questão reportam apenas o valor da carga de ruptura.

Em Kotsovos e Pavlovic (1995) utilizou-se um pacote 2-D que fornece as fissuras e o padrão de deformação em cada incremento de carga. No pacote 3-D, as fissuras são consideradas em todas as direções. A conclusão final do livro trata do principal modo de ruptura do concreto estrutural onde a ruptura do material sempre é obtida na tensão de tração (i. e. ao menos uma tensão principal é de tração). Em nenhum caso estudado foi detectada ruptura do material por compressão. Portanto, a inclusão de modelos para suavização de tensões na compressão é irrelevante, de um ponto de vista estrutural. Essa afirmação também sugere que até a inclusão formal de um critério de ruptura na compressão (i. e. todas as tensões principais são de compressão) pode ser considerado irrelevante. O modo de ruptura do material ocorre devido ao aumento muito rápido da expansão lateral do concreto, assim que a tensão máxima de compressão se aproxima. Assim, a direta consequência é o aparecimento de tensões de tração na zona que é imediatamente adjacente à zona de máxima compressão. Como resultado, a tensão máxima de compressão, de fato, nunca pode ser atingida, pois as tensões de tração na direção ortogonal surgem em primeiro lugar. Isso explica, por exemplo, a ruptura horizontal repentina na zona de compressão.

O trabalho de Hamil (2000) apresenta três seções principais de análises de nós de pórtico: programa experimental modelos com carga monotônica, análises por elementos finitos e programa experimental de modelos com carga cíclica.

O software de elementos finitos utilizado é o SBETA onde apenas o elemento quadrilátero de primeira ordem é disponibilizado. Esse elemento possui dois graus de liberdade e um ponto de integração no centro. Elementos de primeira ordem possuem gradiente de deformação linear, o que significa que a malha precisa ser mais refinada nas áreas onde o concreto é esmagado ou comportamentos complexos de tensões são esperados. Bons resultados não poderão ser obtidos em problemas complexos onde a malha de elementos finitos não for devidamente refinada. Dois métodos de solução são disponibilizados neste software: Newton-Raphson e Comprimento do arco. Esta modelagem numérica é utilizada para os exemplos de ligações viga-pilar demonstraram quatro modos distintos de ruptura: ruptura por flexão da viga e do pilar, ruptura do nó por cisalhamento e ruptura induzida por escorregamento da barra de armadura.

O trabalho de Haach (2005) aborda o efeito da força normal no pilar sobre a resistência do nó da ligação. Neste trabalho, são realizadas análises experimentais com comparação a modelos teóricos e numéricos. O modelo numérico utiliza malha de elementos finitos planos quadráticos de quatro nós e integração reduzida. A armadura é modelada com elementos de barra. As considerações finais apresentadas são as seguintes:

O modelo numérico construído representou o modelo experimental de maneira satisfatória, apesar de mais rígido; com isso, pôde-se fazer a variação da força normal para a análise de sua influência no comportamento do modelo. A simulação numérica não permitiu a avaliação da força última, por causa de problemas de instabilidade numérica provocados pela não-linearidade dos materiais.

Resumidamente, a força normal influencia no comportamento dos nós de pórtico externos, principalmente tornando-os mais frágeis para grandes compressões, modificando o padrão de fissuração, o tipo de ruptura da ligação e melhorando a ancoragem das barras tracionadas da viga. Altos valores de força normal enrijecem a ligação, pois aumentam o confinamento na região nodal, no entanto, este enrijecimento faz com que a biela diagonal principal absorva maiores tensões de compressão atingindo a ruína “antecipadamente”.

### 1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho contém 8 capítulos que são divididos conforme citado abaixo:

O capítulo 2 descreve o modelo para análise de um material elasto-viscoplástico, segundo proposto por Owen e Hinton (1980), fazendo-se uma breve revisão da teoria para a modelagem através do Método dos Elementos Finitos. Mostra-se o funcionamento do algoritmo de solução incremental para problemas não-lineares.

No capítulo 3 mostram-se os modelos de elementos finitos adotados. Para o concreto foram utilizados dois elementos: quadrangular quadrático de oito nós e o elemento triangular linear de três nós. Para armadura foram utilizados elementos lineares com formulação de armadura incorporada.

O capítulo 4 apresenta os modelos constitutivos adotados para o concreto comprimido e tracionado e o modelo constitutivo para a armadura.

O capítulo 5 mostra uma breve descrição do pré-processador e pós-processador utilizados para otimizar e melhor avaliar resultados obtidos no simulador numérico utilizado.

No capítulo 6 são apresentados os primeiros resultados obtidos, analisando-se comparações de resultados experimentais e numéricos para vigas biapoiadas com comportamento conhecido. Neste capítulo também é demonstrado como foi definido o refinamento necessário para comparação de resultado entre ambas as malhas utilizadas.

No capítulo 7 nós de pórtico são analisados, o comportamento obtido através do simulador numérico é comparado aos resultados experimentais obtidos por Roeser (2002). Ambas as malhas são analisadas.

O capítulo 8 apresenta as conclusões e sugestões para os próximos trabalhos.

## 2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

### 2.1 INTRODUÇÃO

Através da teoria da elasto-viscoplasticidade, pode-se obter a resposta de uma estrutura para cargas de curta e longa duração. O modelo elasto-viscoplástico pode encontrar soluções tanto para problemas elasto-plásticos, quando a estrutura atinge o estado estacionário, quanto para problemas viscoelásticos, quando se anula a tensão de plastificação.

### 2.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ELASTO-VISCOPLÁSTICO

O modelo elasto-viscoplástico, aqui apresentado, segue a formulação desenvolvida por Owen e Hinton (1980). Esta formulação permite obter uma solução econômica computacionalmente para os problemas clássicos elastoplásticos. Pode-se demonstrar que a solução estável do programa elasto-viscoplástico é idêntica à solução convencional elastoplástica. Da mesma forma, a solução viscoelástica também pode ser facilmente alcançada, ao anular-se a tensão de plastificação.

#### 2.2.1 Formulação básica

Na formulação geral, para problemas não-lineares contínuos, admite-se que a deformação específica total,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , pode ser separada em componentes elástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , e viscoplástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}$ . Desta forma, a taxa de deformação total pode ser expressa pela equação 2.1:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} \quad (2.1)$$

Onde  $(\dot{\phantom{x}})$  representa a diferenciação em relação ao tempo. A taxa de tensão total depende da taxa de deformação elástica, de acordo com a equação 2.2:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (2.2)$$

Nesta equação,  $\mathbf{D}$  é a matriz de elasticidade. O princípio comportamento viscoplástico é governado por uma condição escalar de escoamento na forma da equação 2.3:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) - F_0 = 0 \quad (2.3)$$

O valor de  $F_0$  é a tensão de escoamento uniaxial que deve ser função de um parâmetro de endurecimento,  $k$ . Admite-se que o escoamento viscoplástico ocorre apenas para valores de  $F > F_0$ .

A partir disso, torna-se necessária a escolha da lei específica que definirá a deformação viscoplástica. A opção mais simples é a que admite que a taxa de deformação viscoplástica depende apenas da tensão atual. Assim, define-se:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.4)$$

Essa relação pode ser explicitada na seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.5)$$

Na equação, o valor de  $Q$  é uma função de potencial plástico e  $\gamma$  é um parâmetro de controle da deformação plástica. O termo  $\phi(x)$  é uma função positiva de crescimento monotônico para  $x$  positivo, enquanto que a notação  $\langle \phantom{x} \rangle$  indica o apresentado abaixo:

$$\begin{aligned}\langle \phi(x) \rangle &= \phi(x) \quad \text{para } x > 0 \\ \langle \phi(x) \rangle &= 0 \quad \text{para } x < 0\end{aligned}\tag{2.6}$$

Se o problema for restringido à plasticidade associada, onde  $F \equiv Q$ , a expressão 2.5 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \langle \phi \rangle \mathbf{a}\tag{2.7}$$

onde  $\mathbf{a}$  é o vetor de fluxo plástico. Este vetor depende de  $F$  que, por sua vez, depende do critério de plastificação adotado para resolver o problema.

A função  $\phi$  pode ser definida de duas formas diferentes, conforme apresentado nas equações 2.8 e 2.9:

$$\phi(x) = e^{M\left(\frac{F-F_0}{F_0}\right)} - 1\tag{2.8}$$

$$\phi(x) = \left(\frac{F - F_0}{F_0}\right)^N\tag{2.9}$$

### 2.2.2 Incremento de deformação viscoplástica

Com a taxa de deformação, expressa na equação 2.7, pode-se definir um incremento de deformação viscoplástica  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n$ , que ocorre em um intervalo de tempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , utilizando-se um esquema de incremento de tempo explícito, já que o incremento de deformação é completamente determinado a partir das condições existentes no tempo,  $t_n$ :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp} = \Delta t_n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^n\tag{2.10}$$

### 2.2.3 Incremento de tensão

Utilizando-se a forma incremental, empregada na equação 2.1, tem-se:

$$\Delta\sigma^n = \mathbf{D}\Delta\varepsilon_e^n = \mathbf{D}(\Delta\varepsilon^n - \Delta\varepsilon_{vp}^n) \quad (2.11)$$

Expressando-se o incremento total de deformação em termos de incremento de deslocamentos, obtém-se:

$$\Delta\varepsilon^n = \mathbf{B}\Delta\mathbf{d}^n \quad (2.12)$$

Onde  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona deformações com deslocamentos do elemento de concreto e  $\Delta\mathbf{d}$  é o vetor de incremento de deslocamentos nas direções x e y.

Substituindo-se as equações 2.10 e 2.11 nas equações 2.12, tem-se:

$$\Delta\sigma^n = \mathbf{D}(\mathbf{B}\Delta\mathbf{d}^n - \Delta t_n \dot{\varepsilon}_{vp}^n) \quad (2.13)$$

### 2.2.4 Equações de equilíbrio

A equação que deve ser satisfeita em cada instante de tempo,  $t_n$ , é dada por:

$$\int_V [\mathbf{B}]^T \sigma^n dV + \mathbf{f}^n = 0 \quad (2.14)$$

Nesta equação,  $\mathbf{f}^n$  é o vetor de forças nodais equivalentes devido às forças de superfície, forças internas, carregamentos térmicos etc. Durante um incremento de tempo a equação de equilíbrio que deve ser satisfeita é a seguinte:



$$\int_V [\mathbf{B}]^T \Delta \boldsymbol{\sigma}^n dV + \Delta \mathbf{f}^n = 0 \quad (2.15)$$

Onde  $\Delta \mathbf{f}^n$  representa a mudança dos carregamentos durante o intervalo de tempo  $\Delta t^n$ . Em grande parte dos problemas encontrados na engenharia, os incrementos de tempo são aplicados de forma instantânea, então  $\Delta \mathbf{f}^n = 0$  para todos os incrementos de tempo, exceto para o primeiro, dentro de um incremento de carga.

Utilizando-se as equações 2.13 e 2.15 o incremento de deslocamento que ocorre durante o passo de tempo  $\Delta t^n$  pode ser calculado como:

$$\Delta \mathbf{d}^n = [\mathbf{K}_T^n]^{-1} \Delta \mathbf{V}^n \quad (2.16)$$

$$\Delta \mathbf{V}^n = \int_V [\mathbf{B}]^T \mathbf{D}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n \Delta t_n dV + \Delta \mathbf{f}^n \quad (2.17)$$

Onde  $\mathbf{K}_T^n$  é a matriz de rigidez tangencial global dada por:

$$\mathbf{K}_T^n = \int_V [\mathbf{B}]^T \mathbf{D}^n \mathbf{B} dV \quad (2.18)$$

E  $\Delta \mathbf{V}^n$  é o vetor de incremento de carga nodal equivalente de toda a estrutura, chamado de vetor de "pseudo-cargas".

Aplicando-se a condição inicial, o incremento de deslocamento pode ser calculado para qualquer instante de tempo, que, quando substituído na equação 2.13, resulta no incremento de tensão. Assim:

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \Delta \boldsymbol{\sigma}^n \quad (2.19)$$

$$\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta \mathbf{d}^n$$

Através das equações 2.11 e 2.12, tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n = \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}^n - \mathbf{D}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}^n \quad (2.20)$$

E então:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^n \quad (2.21)$$

O estado estacionário pode ser monitorado examinando-se quais são as taxas de deformação em cada incremento. A verificação da convergência do programa é feita no fim de cada passo de tempo de acordo com o incremento de deformação viscoplástica, conforme a equação a seguir:

$$\frac{\Delta t_{n+1} \sum_{\text{pontos de Gauss}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^{n+1}}{\Delta t_1 \sum_{\text{pontos de Gauss}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^1} \leq TOLER \quad (2.22)$$

Onde TOLER é o valor da tolerância de convergência prescrita no programa.

### 2.2.5 Correção do equilíbrio

O cálculo do incremento de tensão é baseado em uma forma linearizada das equações de equilíbrio incrementais 2.15. No entanto, as tensões totais  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ , obtidas acumulando-se todos os incrementos de tensão, não estão estritamente corretas e não irão satisfazer exatamente a equação de equilíbrio 2.14. A abordagem mais simples para fazer-se a correção das tensões é avaliar as tensões  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ , através das equações 2.13 e 2.19, e, então, calcular as forças residuais,  $\boldsymbol{\psi}$  através da seguinte equação:

$$\boldsymbol{\psi}^{n+1} = \int_V [\mathbf{B}]^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dV + \mathbf{f}^{n+1} \neq 0 \quad (2.23)$$

Esta força residual é, então, adicionada ao incremento de força,  $\Delta \mathbf{f}_{n+1}$ , no próximo passo de tempo. Tal técnica evita um processo de iteração maior e, ao mesmo tempo, alcança uma re-

dução do erro cometido.

## 2.3 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO

No item anterior, foi apresentado um modelo para a análise de um material homogêneo com comportamento elasto-viscoplástico. Tal modelo seria adequado para o estudo de peças de concreto simples.

Neste item, será apresentada a formulação implementada para incorporar a armadura no modelo computacional. Um algoritmo incremental, similar ao do concreto, pode ser desenvolvido para descrever o comportamento elasto-viscoplástico do aço.

### 2.3.1 Incremento de tensão

Conhecido o incremento de deslocamento nodal,  $\Delta \mathbf{d}^n$ , para o passo  $n$  de tempo, o incremento de tensão axial em um ponto de uma barra de aço,  $\Delta \sigma_s^n$ , é dada por:

$$\Delta \sigma_s^n = E_s \Delta \epsilon_{s,e}^n = E_s (\Delta \epsilon_s^n - \Delta \epsilon_{s,vp}^n) \quad (2.24)$$

onde:

- $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;
- $\Delta \epsilon_{s,e}^n$  é o incremento de deformação específica elástica do aço;
- $\Delta \epsilon_s^n$  é o incremento de deformação específica total do aço;
- $\Delta \epsilon_{s,vp}^n$  é o incremento de deformação específica viscoplástica do aço.

O incremento de deformação específica total pode ser calculado como:

$$\Delta \epsilon_s^n = B_s \Delta \mathbf{d}^n \quad (2.25)$$

Em que  $B_s$  é o vetor das relações deslocamentos-deformações da barra de armadura.

Usando-se um esquema de integração no tempo explícito, conforme o item 2.2.2, o incremento de deformação específica viscoplástica para o aço é:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s,vp}^n = \Delta t_n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{s,vp}^n \quad (2.26)$$

Sendo a taxa de deformação específica viscoplástica,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{s,vp}^n$ , dada no item 2.3.3.

Substituindo-se as equações 2.25 e 2.26 na expressão 2.24, tem-se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_s^n = E_s (B_s \Delta \mathbf{d}^n - \Delta t_n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{s,vp}^n) \quad (2.27)$$

A tensão no próximo passo  $n+1$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_s^{n+1}$ , fica:

$$\boldsymbol{\sigma}_s^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_s^n + \Delta \boldsymbol{\sigma}_s^n \quad (2.28)$$

### 2.3.2 Equações de equilíbrio

A equação 2.23, correspondente à força residual, considerando-se a presença da armadura, resulta:

$$\boldsymbol{\psi}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} - \int_V [\mathbf{B}]^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dV - \int_s \mathbf{B}_s \boldsymbol{\sigma}_s^{n+1} A_s ds \quad (2.29)$$

O vetor de “pseudo-carga” da equação 2.17 terá um acréscimo,  $\Delta \mathbf{V}_s^n$ , de:

$$\Delta \mathbf{V}_s^n = \int_s \mathbf{B}_s E_s A_s \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{s,vp}^n \Delta t_n ds \quad (2.30)$$

Onde “s” é a coordenada que descreve o eixo da barra de armadura.

### 2.3.3 Taxa de deformação viscoplástica

A taxa de deformação viscoplástica pode ser calculada como:

$$\dot{\epsilon}_{s,vp}^n = \gamma_s (\sigma_s - \sigma_y) \quad (2.31)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de plastificação inicial e  $\gamma_s$  é o coeficiente de fluidez do aço. Na análise elastoplástica, o coeficiente de fluidez é tomado como sendo  $1 \times 10^{-5}$ .

### 3 MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E PARA A ARMADURA

#### 3.1 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

Neste trabalho foram implementadas as formulações para dois elementos finitos: o elemento quadrangular quadrático de oito nós e o triangular linear de três nós.

##### 3.1.1 Elemento quadrangular quadrático

O elemento finito quadrangular quadrático é da família Serendipity e apresenta oito nós, conforme a Figura 5. Possui dois graus de liberdade em cada nó, correspondentes às translações na direção dos eixos x-y no sistema global de coordenadas. Seu campo de deslocamentos varia de forma quadrática e seu campo de deformações é linear.

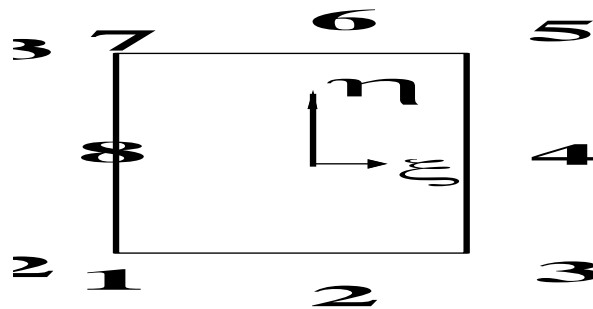


Figura 5: Elemento isoparamétrico quadrangular

A numeração dos nós, mostrada na Figura 5, é iniciada no canto inferior esquerdo e percorre o elemento de forma anti-horária. As funções de interpolação (ou de forma),  $N_i$ , em função das coordenadas normalizadas,  $(\xi, \eta)$ , e da numeração dos nós,  $i$ , do elemento, são:

- para os nós de canto:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0), i = 1,3,5,7 \quad (3.1)$$

- para os nós de meio de lado:

$$N_i = \frac{\xi_i^2}{4}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{4}(1 + \eta_0)(1 - \xi^2), i = 2,4,6,8 \quad (3.2)$$

onde  $\xi_0 = \xi\xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta\eta_i$  e  $(\xi_i, \eta_i)$  são as coordenadas do nó em questão.

Sendo um elemento isoparamétrico, as coordenadas cartesianas,  $(x,y)$ , de um ponto no interior deste elemento, podem ser representadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

onde  $(x_i, y_i)$  é o par de coordenadas cartesianas de um nó  $i$  do elemento em questão e  $n$  é o número de nós do elemento.

A matriz de rigidez,  $\mathbf{K}_c$ , para os elementos de concreto pode ser calculada por:

$$\mathbf{K}_c = \int_V [\mathbf{B}]^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (3.4)$$

e pode ser obtida, numericamente, através da expressão:

$$\mathbf{K}_c = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} [\mathbf{B}_{ij}]^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{ij} w_i w_j e_{ij} |J| \quad (3.5)$$

onde:

- $ng$  é o número de pontos de integração em cada direção do elemento;
- $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana do elemento;
- $w_i$  e  $w_j$  são os fatores de peso;
- $e_{ij}$  é a espessura do elemento;
- $[B_{ij}]$  é a matriz de relações deformações-deslocamentos, calculada no ponto de integração com coordenadas naturais,  $(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ , dada por:

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Onde:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Os termos  $\partial \xi / \partial x$ ,  $\partial \eta / \partial x$ ,  $\partial \xi / \partial y$  e  $\partial \eta / \partial y$  devem ser obtidos através da inversa da matriz Jacobiana do elemento:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva elástica para o estado plano de tensão:



$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. As coordenadas naturais e os fatores de peso para a formulação com 9 pontos de integração são encontrados em Owen e Hinton (1977).

### 3.1.2 Elemento triangular linear

O elemento finito triangular com três nós é apresentado na Figura 6. Este elemento é um dos mais versáteis e simples dos elementos bidimensionais. Pode-se representar praticamente qualquer geometria utilizando-se os elementos triangulares e, sem muita dificuldade, construir malhas que possuem maior refinamento em áreas com maior variação de tensões. (Fish e Belytschko, 2007).

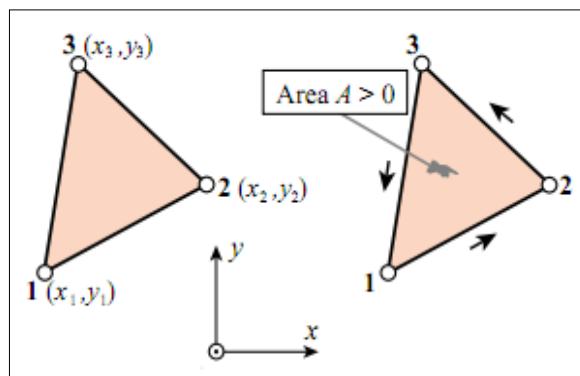


Figura 6: elemento finito triangular linear

As coordenadas dos três nós são definidas pelos pontos  $\{x_1, y_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\}$  e  $\{x_3, y_3\}$ . A solução em cada elemento finito é aproximada por uma função linear das coordenadas  $x$  e  $y$  dada por:

$$\theta(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (3.10)$$

onde  $\alpha_i$  são parâmetros arbitrários, a equação acima pode ser escrita na forma matricial como apresentado a seguir.

$$\theta(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mathbf{p}(x, y) \boldsymbol{\alpha} \quad (3.11)$$

Partindo da equação acima, podem-se construir as equações de forma para o elemento. Inicialmente, expressam-se os seguintes valores nodais:

$$\begin{aligned} \theta(x_1, y_1) &= \theta_1 \\ \theta(x_2, y_2) &= \theta_2 \\ \theta(x_3, y_3) &= \theta_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$\mathbf{d} \qquad \mathbf{M} \qquad \boldsymbol{\alpha}$

Calculando-se a inversa da equação descrita acima, tem-se:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{d} \quad (3.14)$$

Substituindo-se a equação 3.11 na equação 3.14, tem-se:

$$\theta(x, y) = \mathbf{p}(x, y) (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{d} \quad (3.15)$$

A formulação dos elementos finitos define que a matriz que precede o vetor  $\mathbf{d}$  é a matriz de

forma do elemento finito, portanto:

$$\theta(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{d} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{p}(x, y)(\mathbf{M})^{-1} \equiv [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y)] \quad (3.17)$$

Admitindo-se inversa da matriz  $\mathbf{M}$  dada por:

$$(\mathbf{M})^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde  $A$  é a área do elemento e o determinante da matriz  $\mathbf{M}$  é dado por:

$$2A = \det(\mathbf{M}) = (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \quad (3.19)$$

Calculando-se a equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A}(x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y) \\ N_2 &= \frac{1}{2A}(x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y) \\ N_3 &= \frac{1}{2A}(x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Estas são as funções de forma adotadas para o elemento triangular linear no modelo numérico utilizado neste trabalho. A partir deste ponto, são utilizadas as mesmas expressões apresentadas para o elemento quadrangular quadrático até a obtenção da matriz de rigidez do elemento (Equações 3.4 a 3.9).

## 3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Para a representação da armadura, utilizou-se o modelo incorporado, de Elwi e Hrudey (1989). Neste modelo se supõe que a armadura resista apenas a esforços axiais e que há compatibilidade de deslocamentos entre seus pontos e os pontos de concreto localizados na mesma posição. Desta forma, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. Permite-se, com este modelo, uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto, sem a geração de novas incógnitas no problema. Podem existir várias barras de aço dentro de um mesmo elemento finito de concreto. Admite-se, também, aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Apresenta-se, em detalhes, o procedimento para o cálculo da matriz de rigidez da armadura, correspondente aos diversos elementos de concreto. Descrevem-se, inclusive, os passos para a determinação automática dos segmentos de barras de armadura contidos em cada elemento finito de concreto.

Este modelo foi implementado e testado em diversos trabalhos, tais como em Campos Filho (1987), Prates Júnior (1992), Claire (1994), Dantas (2000), entre outros.

### 3.2.1 Modelo incorporado

No modelo incorporado, admite-se que a armadura resiste apenas a tensões axiais na direção da barra e que os deslocamentos de um ponto genérico da barra são iguais aos do elemento de concreto localizado na mesma posição. Desta forma, as barras de aço contribuem para a rigidez apenas no sentido longitudinal e podem ser, arbitrariamente, dispostas dentro do elemento de concreto, sem a introdução de novas incógnitas no problema.

Os deslocamentos ao longo da barra de armadura são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto correspondentes. Logo, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. A expressão final da matriz de rigidez do elemento resulta em:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{K}_{s,i} \quad (3.21)$$

onde “nb” denota o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto. A matriz de rigidez para cada barra de armadura é expressa por:

$$\mathbf{K}_s = E_s A_s \int_s \mathbf{B}_s ds \quad (3.22)$$

onde:

- $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;
- $A_s$  é a área da seção transversal da barra de armadura;
- $\{\mathbf{B}_s\}$  é o vetor das relações deformação-deslocamentos para a armadura.

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo-se modelar barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos.

### 3.2.2 Formulação geométrica

Neste item, é apresentada a formulação para se incorporar barras de aço ao elemento de concreto. A posição das barras é dada em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos. Durante o processo de determinação da matriz de rigidez da armadura, necessita-se da utilização das suas coordenadas naturais locais, como será visto mais adiante.

O elemento de concreto, mostrado na Figura 7, é descrito usando-se as suas coordenadas globais  $(x, y)$ . As coordenadas naturais locais do elemento são  $(\xi, \eta)$ . Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de um ponto, localizado no interior de um elemento, são expressas em termos das funções de interpolação,  $N_i$ , por:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

(3.23)

$$y = \sum_{i=1}^n N_i y_i$$

Os elementos infinitesimais das coordenadas globais são expressos por:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

(3.24)

Onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana mostrada na equação 3.8.

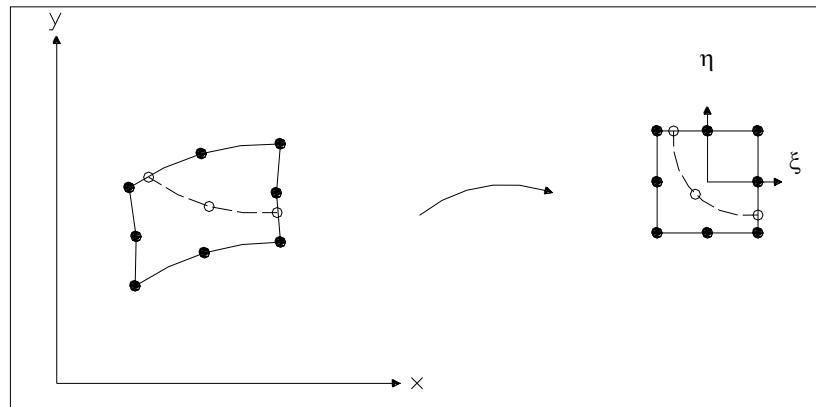


Figura 7: Barra de armadura no interior de um elemento de concreto

Uma importante vantagem desta formulação é que a localização e geometria das barras independem da malha de elementos finitos. A armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais. Para se garantir uma continuidade interelementar adequada, é necessária a colocação de nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos nós das barras de aço, entre os pontos de definição da mesma, são obtidas por interpolação. Desta maneira, nós adicionais são criados dentro dos elementos finitos, onde há presença de armadura. Tomando-se  $x_j$  e  $y_j$  como vetores que contêm as coordenadas globais dos nós da barra, as coordenadas de qualquer outro ponto ao longo desta bar-

ra podem ser determinadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_j & 0 \\ 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

As funções de interpolação unidimensionais,  $H_j$ , são expressas em termos de uma coordenada normalizada,  $\chi$ .

Os vários termos da rigidez, associada à armadura, requerem integrações sobre a mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento  $ds$ , disposto ao longo da armadura, conforme a equação (3.14). A orientação da tangente à barra, ilustrada na Figura 8, é dada pelo ângulo  $\beta$ , onde:

$$\cos \beta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \quad (3.26)$$

$$\sen \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}$$

Sendo  $\cos^2\beta + \sen^2\beta = 1$ , segue que:

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2} \quad (3.27)$$

na qual:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Logo:

$$\cos \beta = \frac{dx/d\chi}{ds/d\chi}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{dy/d\chi}{ds/d\chi}$$
(3.29)

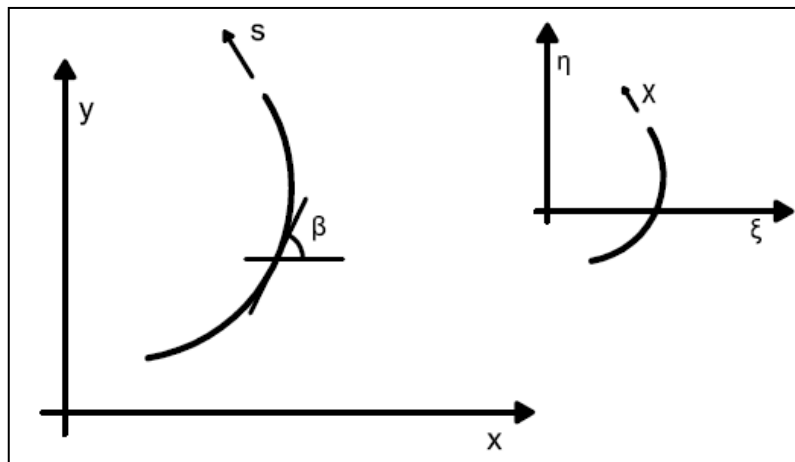


Figura 8: coordenadas ao longo do eixo da armadura

Deste modo, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, assim como o fator de mapeamento isoparamétrico,  $dx/d\chi$ , podem ser obtidos pelas expressões apresentadas acima.

Um elemento diferencial de volume,  $dV_s$ , da barra de aço, pode ser expresso em função do comprimento diferencial,  $ds$ , e da área da seção transversal da barra. Resulta que:

$$dV_s = A_s ds$$
(3.30)

Usando-se o fator de mapeamento descrito na expressão (3.16), integrais, envolvendo elementos de volume ao longo da armadura, podem ser escritas, em função da coordenada normalizada,  $\chi$ , como:



$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\chi} C A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (3.31)$$

na qual  $C$  é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

### 3.2.3 Segmentos de armadura localizados no interior de um elemento de concreto

As barras de armadura são posicionadas pelas coordenadas globais  $(x,y)$  de seus pontos de extremidade.

Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto-aço) de um determinado elemento, precisam-se saber quais barras interceptam este elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional. De forma análoga, as forças internas, associadas à armadura, são integradas àquelas do elemento de concreto para a obtenção do vetor de forças internas totais do elemento.

O modelo computacional, mostrado neste trabalho, calcula, automaticamente, os segmentos de barras de armadura que ficam no interior do elemento de concreto.

#### 3.2.3.1 FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO QUADRANGULAR QUADRÁTICO

Primeiramente, transformam-se as coordenadas globais,  $P_j(x,y)$ , dos pontos que definem as extremidades da barra de armadura, para coordenadas naturais locais,  $P_j(\xi, \eta)$ , dos mesmos. A relação entre estas coordenadas, para elementos isoparamétricos, é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

onde:

- $(x, y)$  são as coordenadas globais de um ponto qualquer;
- $(x_i, y_i)$  são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto;

-  $N_j(\xi, \eta)$  são as funções de forma do elemento de concreto.

A forma explícita, para a relação inversa da equação (5.21), em geral, não é facilmente encontrada. Entretanto, o mapeamento inverso pode ser feito, numericamente, através do algoritmo de Newton-Raphson, como sugerem Elwi e Hrudehy (1989). Deste modo, a determinação aproximada das coordenadas  $(\xi_p, \eta_p)$  está baseada no fato destas coordenadas serem raízes do seguinte sistema de equações:

$$(\mathbf{f}(\xi, \eta)) = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Usando-se o método de Newton-Raphson, tem-se, após  $k+1$  iterações:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}_p^{k+1} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}_p^k + \begin{pmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{pmatrix}_p^{k+1} \quad (3.34)$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{pmatrix}_p^{k+1} = [\mathbf{J}^k]^{T-1} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 \\ 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right] \quad (3.35)$$

sendo, na iteração  $k$ :

- $[\mathbf{J}^k] = [\mathbf{J}^k(\xi, \eta)]$ , a matriz Jacobiana;
- $\langle N_i^k \rangle = \langle N_i^k(\xi, \eta) \rangle$ , as funções de forma do elemento de concreto.

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, referenciados ao sistema natural do elemento em análise, parte-se para uma segunda etapa, onde se define a curva que passa por estes pontos, conforme a Figura 9.

A segunda etapa consiste em se determinar as coordenadas naturais da intersecção da reta, que contém a face do elemento, com a barra de armadura. Os lados do elemento de concreto são definidos, fixando-se uma das coordenadas naturais, valendo  $-1$  ou  $1$ . Portanto, cada lado é definido por uma coordenada fixa e a outra podendo ter valores entre  $-1$  e  $1$ .

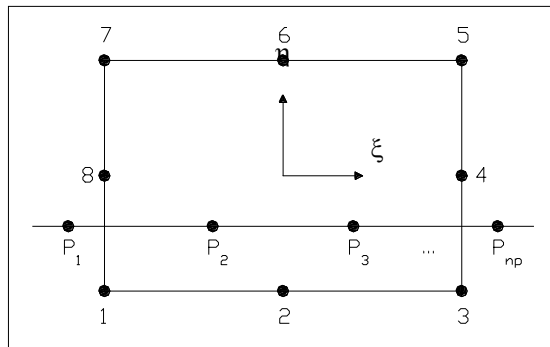


Figura 9: curva de definição da barra de aço

Segundo Zienkiewicz (1986), têm-se:

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i \quad (3.36)$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\chi) \eta_i$$

onde, para os  $np$  pontos da barra de armadura, calculam-se as funções:

$$g_i(\chi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad (3.37)$$

$$f_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)}$$

Na terceira etapa, verifica-se a existência de intersecção da curva  $P_1, P_2, \dots, P_n$  com cada um dos quatro lados do elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada  $\xi = \pm 1$  do elemento e calcula-se a coordenada  $\eta$  da intersecção lado do elemento-curva da barra. Caso  $-1 \leq \eta \leq 1$ , diz-se que a barra intercepta este lado do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional, representativo da parte de armadura, situado no interior deste elemento.

A quarta etapa consiste na verificação do trecho de armadura, efetivamente, contido no elemento de concreto. Destacam-se os seguintes casos possíveis, mostrados na Figura 10:

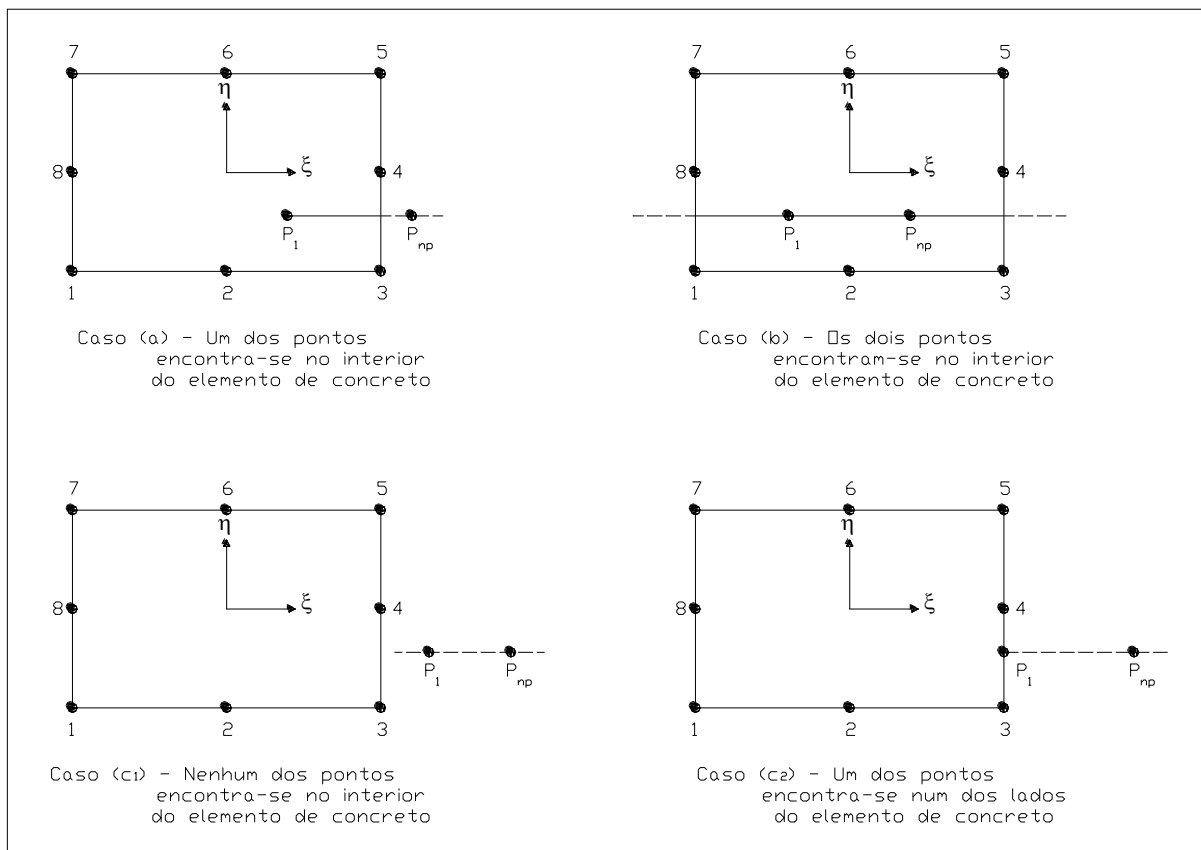


Figura 10: situações possíveis de se encontrar uma barra de armadura

- a) Um dos nós, que define uma das extremidades da barra de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de  $P_1$  ou  $P_{np}$ , em módulo, são menores que 1. Outra situação pode ocorrer, quando os dois nós estão fora do elemento, um de cada lado, e houver intersecção. Obtém-se, então, o comprimento real do segmento de armadura, contido no interior do elemento de concreto.

- b) Os dois nós, que definem a geometria da barra de armadura, encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Toma-se, então, para as coordenadas naturais dos pontos de intersecção, as mesmas coordenadas naturais dos pontos  $P_1$  ou  $P_{np}$ , já obtidas, anteriormente.
- c) Nenhum dos nós de definição da barra de armadura está situado dentro do elemento de concreto. Neste caso, considera-se que a barra não está contida em tal elemento. Situação idêntica ocorre, quando apenas um dos nós de extremidade da barra intercepta um lado do elemento.

Na quinta etapa ocorre a criação, se necessária, de até dois nós intermediários no segmento de armadura, sobre o eixo da coordenada normalizada,  $\chi$ , conforme ilustra a Figura 11. Determinam-se, posteriormente, as coordenadas cartesianas globais e naturais locais para os nós extremos, bem como, para os nós extremos do segmento.

Por último, na sexta etapa, verifica-se se o segmento de armadura coincide com alguma aresta em comum entre dois ou mais elementos de concreto. Neste caso, divide-se a rigidez associada à barra de armadura entre tais elementos. Esta situação pode ser vista na Figura 12.

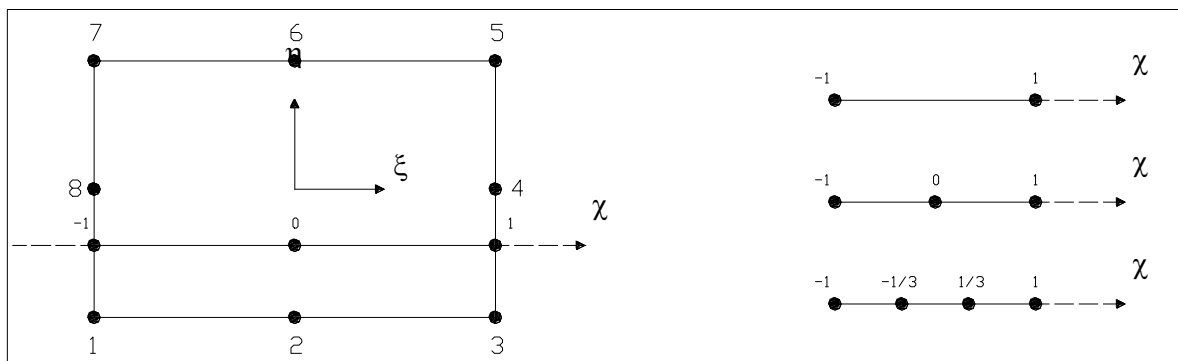


Figura 11: segmento de armadura dentro do elemento de concreto

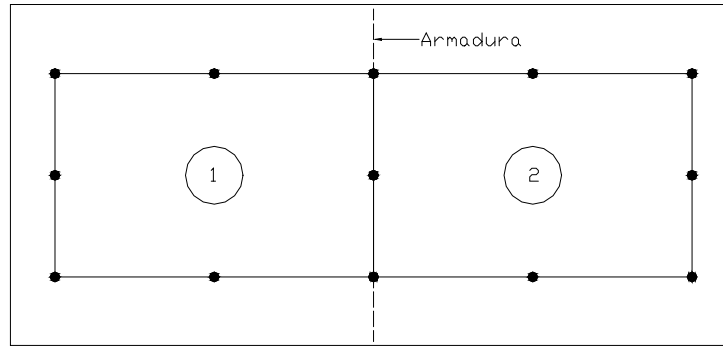


Figura 12: barra de armadura localizada numa aresta em comum de dois elementos de concreto

### 3.2.3.2 FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR

A formulação para definir quais barras de armadura encontram-se dentro de um elemento triangular é diferente da formulação adotada para o elemento quadrangular. No elemento triangular são verificadas as intersecções entre os segmentos de reta: os três lados do elemento finito e a linha de armadura definida por dois pontos na entrada de dados.

O método de intersecção de segmentos de reta tem a restrição de não poderem ser adotadas armaduras com geometria diferente da geometria linear.

Dois pontos P e Q, definem um único vetor  $v=PQ$ , que representa uma direção. Todo ponto R, cuja direção PR seja a mesma de PQ, está contido na mesma reta definida pelos pontos P e Q. portanto pode-se definir uma reta como um conjunto de todos os pontos da forma:

$$R = P + t \times PQ \quad (3.38)$$

onde t é um número real, e  $t \times PQ$  é colinear a PQ.

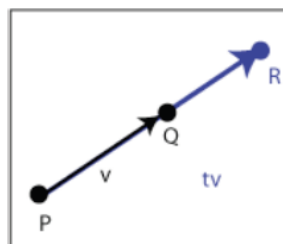


Figura 13: representação da reta no espaço

Pode-se representar um segmento de reta PQ restringindo o domínio paramétrico de  $R(t)$ . Basta se observar que  $R(0) = P$  e  $R(1) = Q$ . Pode-se ver, então, que os pontos de  $R(t)$ , onde  $0 \leq t \leq 1$  são pontos do segmento.

A existência de uma intersecção entre duas retas  $r_1$  e  $r_2$  pode ser verificada da seguinte forma, admitindo-se:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= (x_1(t), y_1(t)) \\ R_2(t) &= (x_2(u), y_2(u)) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para que um ponto pertença simultaneamente a  $r_1$  e  $r_2$ , deve-se ter:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(u) \\ y_1(t) &= y_2(u) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Quando esse sistema possui solução única nas variáveis  $t$  e  $u$ , essas retas são concorrentes, logo possuem um ponto de intersecção.

Uma vez conhecidos os parâmetros do ponto de intersecção de duas retas, é necessário determinar se este ponto de intersecção pertence aos segmentos de retas. Dado um segmento de reta na forma PQ, com equação vetorial na forma  $R = P + t \times PQ$ , o ponto de intersecção da reta definida por PQ com uma outra reta pertencerá ao segmento PQ se  $0 \leq t \leq 1$ . Onde  $t$  é o parâmetro obtido na resolução do sistema para determinar a intersecção de retas. Portanto, dois segmentos se intersectam se os dois parâmetros obtidos respeitarem a condição apresentada acima.

Caso a intersecção dos segmentos seja definida pelo procedimento detalhado acima, o modelo numérico parte para a etapa de definições das funções de forma e propriedades desta barra de armadura que passa por determinado elementos finito.

### 3.2.4 Funções de forma para os elementos de armadura

Polinômios de Lagrange podem ser usados para representar as funções de interpolação dos elementos de armadura, segundo Zienkiewicz (1986), que são expressas por:

$$H^m(\chi) = \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(\chi - \chi_i)}{(\chi_k - \chi_i)} \quad (3.41)$$

Esta função é um polinômio de grau  $m=n-1$ , em termos de  $\chi$ , tendo valor unitário em  $\chi_n = \chi_k$  e nulo para  $\chi_n \neq \chi_k$ , onde  $n$  é o número de nós do elemento de armadura. Deste modo, para os elementos de três nós, empregados neste trabalho:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{\chi^2 - \chi}{2} \\ H_2(\chi) &= 1 - \chi^2 \\ H_3(\chi) &= \frac{\chi^2 + \chi}{2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.2.5 Matriz de rigidez para a armadura

O campo de deformações, dentro de um elemento de armadura, pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Zienkiewicz, Philips e Owen (1974), a deformação ao longo da barra de aço é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente à barra. Sendo assim, considerando-se aderência perfeita entre o concreto e o aço, a expressão para a deformação, em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hrudey (1989), fica:

$$\Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon_x \cos^2 \beta + \Delta \varepsilon_y \sin^2 \beta + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \quad (3.43)$$

Os incrementos de deformações  $\Delta \varepsilon_x$ ,  $\Delta \varepsilon_y$  e  $\Delta \gamma_{xy}$  são obtidos diretamente da relação entre o



vetor de relações deformações-deslocamentos,  $\mathbf{B}_s$ , determinado por Elwi e Hrudey (1989), e o campo de incremento de deslocamento,  $\Delta \mathbf{u}$ , do elemento de concreto. Da equação (3.29), segue que a deformação incremental na armadura pode ser expressa como:

$$\Delta \varepsilon_s = \mathbf{B}_s \Delta \mathbf{u} \quad (3.44)$$

onde:

$$\mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \left( \frac{dN}{dx} \right) + \cos \beta \operatorname{sen} \beta \left( \frac{dN}{dy} \right) \\ \cos \beta \operatorname{sen} \beta \left( \frac{dN}{dx} \right) + \operatorname{sen}^2 \beta \left( \frac{dN}{dy} \right) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

As derivadas das funções de forma,  $N_i$ , em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , são dadas por:

$$\begin{pmatrix} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dy} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{dN_i}{d\xi} \\ \frac{dN_i}{d\eta} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determina-se a variação de trabalho interno para a armadura:

$$\delta \Delta W = \int_{V_s} (\sigma_s + \Delta \sigma_s) \delta \Delta \varepsilon_s dV_s \quad (3.47)$$

na qual  $\sigma_s$  é a tensão normal na armadura e  $V_s$  é o seu volume. A forma incremental da relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como:

$$\Delta \sigma_s = E_s \Delta \varepsilon_s \quad (3.48)$$

Onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço. Assim:

$$\delta\Delta W = \int_s \delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s ds + \int_s \delta\Delta\varepsilon_s E_s \Delta\varepsilon_s A_s ds \quad (3.49)$$

ou:

$$\delta\Delta W = \delta\Delta\mathbf{u} (\mathbf{K}_s \Delta\mathbf{u} + \mathbf{Q}_s) \quad (3.50)$$

Onde o vetor de força nodal equivalente  $\mathbf{Q}_s$  é calculado por:

$$\mathbf{Q}_s = \int_\chi \mathbf{B}_s \sigma_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.51)$$

E a matriz de rigidez para a armadura,  $\mathbf{K}_s$ :

$$\mathbf{K}_s = \int_\chi \mathbf{B}_s E_s \mathbf{B}_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.52)$$

A qual pode ser representada, numericamente, pela expressão:

$$\mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^{ng} \mathbf{B}_{si} E_s \mathbf{B}_{si} \frac{ds}{d\chi} A_s w_i \quad (3.53)$$

Onde:

- $w_i$  é o fator de peso
- $ng$  é o número de pontos de integração na direção axial da barra de armadura.

## 4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

### 4.1 INTRODUÇÃO

O material concreto estrutural comporta-se de uma maneira extremamente complexa, apresentando uma resposta altamente não-linear.

A Figura 14 mostra as três fases típicas pelas quais passa um elemento de concreto estrutural, quando submetido a uma solicitação de flexão: a primeira, elástica-linear, com o concreto não-fissurado; a segunda, onde aparecem as fissuras e a terceira, plástica.

A fissuração do concreto, a plastificação do concreto e do aço, a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto, a não-linearidade da relação tensão-deformação e os fenômenos relacionados ao tempo como fluência e retração do concreto e relaxação do aço protendido, entre outros fatores, como o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço, são as causas desta não-linearidade.

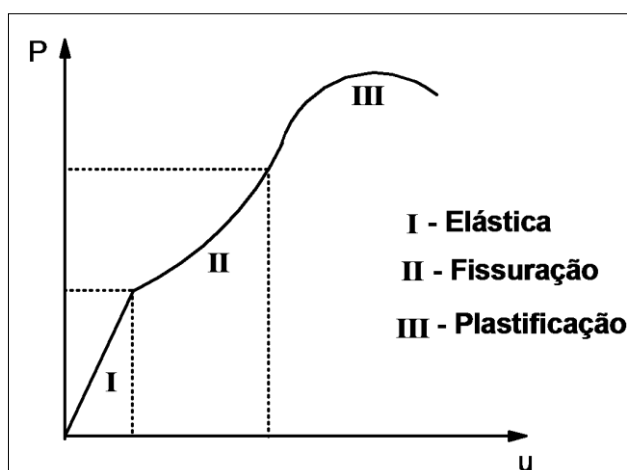


Figura 14: diagrama carga-deslocamento típico de um elemento de concreto estrutural

Utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, uma ferramenta consagrada para solução numérica de uma variedade de problemas encontrados na engenharia, pode-se realizar uma análise mais racional destes fenômenos.

## 4.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

Provavelmente, a principal característica do comportamento do concreto é a sua baixa resistência à tração, quando comparada a sua resistência à compressão. Por tal motivo, utilizaram-se dois modelos distintos para descrever este comportamento. Para o concreto comprimido, um modelo elastoplástico com endurecimento foi empregado. Já para o concreto tracionado, admite-se um comportamento elástico linear até a ruptura. A partir de então, considera-se a contribuição do concreto entre fissuras na rigidez total da estrutura.

A seguir, descrevem-se os modelos constitutivos empregados na representação do concreto.

### 4.2.1 Modelo para o concreto comprimido

O modelo elastoplástico, utilizado para descrever o comportamento do concreto comprimido, compõe-se por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

Admite-se, para o concreto não-fissurado, um comportamento isotrópico. Sua superfície de ruptura,  $f$ , pode ser expressa, em função das tensões principais,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , por:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (4.1)$$

Convenientemente, substituem-se as tensões principais pelo primeiro invariante do tensor de tensões,  $I_1$ , pelos segundo e terceiro invariantes do tensor desviador de tensões,  $J_2$  e  $J_3$ , respectivamente. Desta forma, a expressão (4.1) fica:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (4.2)$$

Onde, segundo Chen e Han (1988):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.3)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_m)^2 + (\sigma_y - \sigma_m)^2 + (\sigma_z - \sigma_m)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} J_3 = & (\sigma_x - \sigma_m) [(\sigma_y - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{xz}^2] \\ & + \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_m) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\ & + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_m)\tau_{xz}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (4.6)$$

E  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  são as componentes do tensor de tensões. Neste trabalho, tratando-se de um problema de estado plano de tensões, tem-se  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

Esta formulação é apresentada por Owen e Hinton (1980) e sua principal vantagem é permitir fazer um código computacional da função de ruptura de uma forma geral, necessitando apenas a especificação de três constantes para qualquer critério individual.

As tensões desviadoras principais,  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ , são dadas pelas raízes da equação cúbica:

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (4.7)$$

Onde se substitui  $s = r \cdot \text{sen}\theta$ :

$$\text{sen}^3\theta - \frac{J_2}{r^2} \text{sen}\theta - \frac{J_3}{r^3} = 0 \quad (4.8)$$

Fazendo-se uso da identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^3 \theta - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{4} = 0 \quad (4.9)$$

E comparando-se as equações (2.7) e (2.8), obtêm-se:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{1/2} \quad (4.10)$$

E

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{4J_3}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (4.11)$$

A primeira raiz da equação (4.11), com  $\theta$  determinado por  $3\theta$  no intervalo de  $\pm\pi/2$ , é uma alternativa para o terceiro invariante do tensor desviador de tensões,  $J_3$ . Notando-se a “natureza cíclica” de  $\operatorname{sen}(3\theta + 2n\pi)$ , têm-se, imediatamente, os três (e apenas três) possíveis valores de  $\operatorname{sen} \theta$ , os quais definem as três tensões principais. As tensões desviadoras principais são dadas por  $s = r \cdot \operatorname{sen} \theta$ , onde, substituindo-se os três valores de  $\theta$ , o valor de  $r$ , dado pela equação (4.10) e adicionando-se a componente de tensão principal hidrostática, podem-se determinar as três tensões principais:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{2J_2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\theta + 2\pi/3) \\ \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen}(\theta + 4\pi/3) \end{pmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Com  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  e  $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ .

#### 4.2.1.1 CRITÉRIO DE RUPTURA

Neste trabalho, utilizou-se para o concreto o critério de ruptura, proposto por Ottosen (1977), o qual foi adotado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) e é dado por:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.13)$$

Onde  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto e:

$$\lambda = c_1 \cos[1/3 \arccos(-c_2 \operatorname{sen} 3\theta)], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta \leq 0 \quad (4.14)$$

$$\lambda = c_1 \cos[\pi/3 - 1/3 \arccos(c_2 \operatorname{sen} 3\theta)], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta > 0$$

Com  $\operatorname{sen} 3\theta$  calculado através da equação (4.11).

Os quatro parâmetros do modelo,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$ , são determinados, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a partir da relação,  $k$ , entre a resistência média à compressão uniaxial,  $f_{cm}$ , e a resistência média à tração uniaxial,  $f_{tm}$ , do concreto, dada por:

$$k = \frac{f_{tm}}{f_{cm}} \quad (4.15)$$

Onde:

$$f_{ctm} = 0,14(f_{cm})^{2/3}, \text{ em } kN/cm^2 \quad (4.16)$$

Assim, os parâmetros do critério de Ottosen são calculados por:

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}} \quad (4.17)$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2$$

O critério de ruptura de Ottosen, caso sejam adotados  $\beta = c_2 = 0$ , ou, então,  $\alpha = c_2 = 0$ , se reduz aos critérios de Von Mises ou de Drucker-Prager, respectivamente.

As figuras abaixo apresentam a forma geral da superfície de ruptura do concreto no espaço tridimensional de tensões, podendo ser vista por seus meridianos, Figura 15, e suas seções transversais, Figura 16. Para um material isotrópico e com mesmas resistências à tração e compressão, a superfície de ruptura apresenta tríplice simetria com origem em  $\theta$ , tornando-se necessário o estudo de apenas meio setor com  $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ . Como o concreto possui resistência à tração muito menor do que à compressão, mas considerando que este é um material isotrópico, continua havendo tal simetria, porém a origem passa a não ser mais em  $\theta$  e o setor a ser estudado agora é de  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ .

Desta forma, a superfície de ruptura do concreto:

- é dependente dos três invariantes de tensão ( $I_1, J_2, J_3$ );
- tem uma forma suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- tem meridianos que são parabólicos e que abrem no sentido negativo do eixo hidrostático;
- possui seções transversais que mudam, de uma forma triangular para circular, com o aumento da pressão hidrostática.



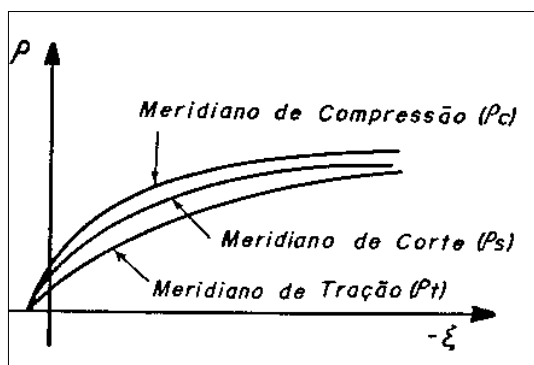


Figura 15: meridianos da superfície de ruptura

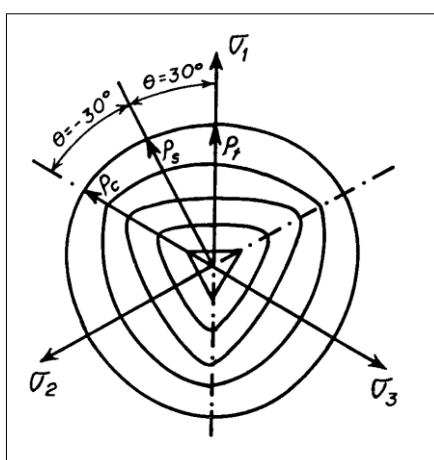


Figura 16: seções transversais da superfície de ruptura

#### 4.2.1.2 CRITÉRIO DE PLASTIFICAÇÃO

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico, mas, por problemas de convergência, não foi possível adotar, para a superfície de plastificação, a mesma forma da superfície de ruptura de Ottosen. Utilizando-se esta superfície, em situação de solitação uniaxial, encontram-se valores elevados de deformações viscoplásticas, nas direções transversais ao eixo longitudinal do elemento de concreto. Optou-se, então, por adotar a superfície gerada pelo critério de Von Mises, o qual, como foi visto anteriormente, é um caso particular do critério de Ottosen.

Desta forma, a expressão geral para a superfície de plastificação ou de carregamento, a partir da superfície gerada pelo critério de Von Mises, é expressa por:

$$F = (3J_2)^{1/2} = \sigma_{ef} \quad (4.18)$$

Considerando nula a tensão de plastificação inicial, o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, ocorre para valores de  $\sigma_{ef}$ , dentro do intervalo  $0 < \sigma_{ef} < f_{cm}$ , conforme ilustrado na Figura 17.

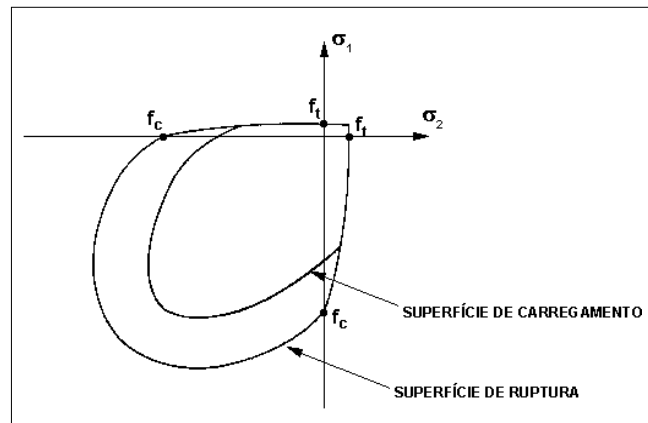


Figura 17: superfícies de ruptura e de carregamento

#### 4.2.1.3 REGRA DE ENDURECIMENTO

A regra de endurecimento define a maneira pela qual as superfícies de plastificação se movimentam (superfícies de carregamento), durante a deformação plástica. É determinada pela relação tensão efetiva x deformação plástica efetiva, onde, aplicando-se tais conceitos, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, determinou-se a relação tensão efetiva x deformação plástica efetiva a partir da curva tensão-deformação uniaxial para o concreto, proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), cuja expressão é dada por:

$$\sigma_c = -\frac{-\frac{E_{ci}}{f_{cm}} \varepsilon_c - \left(\frac{\varepsilon_c}{-0,0022}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{f_{cm}} 0,0022 - 2\right) \frac{\varepsilon_c}{-0,0022}} f_{cm} \quad (4.19)$$

Substituindo-se  $\varepsilon_c = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \sigma/E + \varepsilon_p$  na equação anterior e isolando-se  $\sigma$ , tem-se uma relação,  $\sigma_c = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$ , dada pela expressão:

$$\sigma = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.20)$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= (1 - f_{cm}/(E \times 0,0022))^2 / f_{cm} \\ b &= \varepsilon_p \left( E/f_{cm} - \frac{(1 - f_{cm}/(E \times 0,0022))}{0,0011} \right) \\ c &= -\varepsilon_p \left( E - \frac{(\varepsilon_p f_{cm})}{(0,0022)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

A Figura 18 apresentada a seguir representa o diagrama tensão-deformação, para o concreto comprimido.

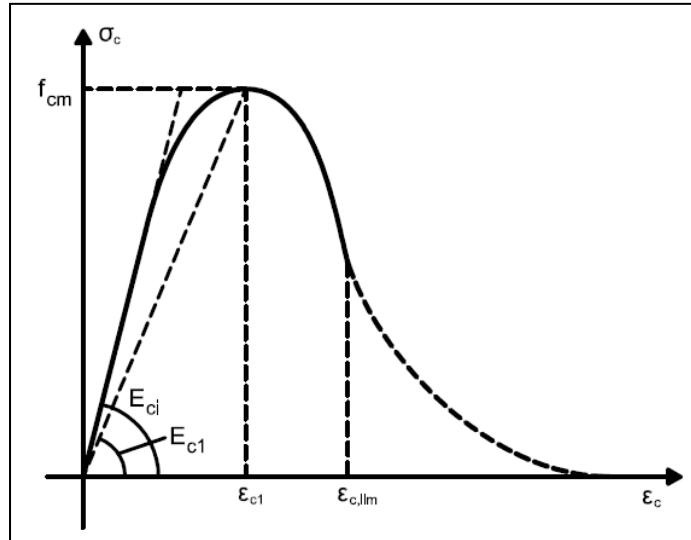


Figura 18: diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

#### 4.2.1.4 VETOR DE FLUXO PLÁSTICO

No modelo implementado, considera-se plasticidade associada, por simplificação, já que há poucas evidências experimentais disponíveis para este fato, segundo Owen e Hinton (1980). Desta forma, dentro do domínio plástico, na relação tensão-deformação, o vetor de fluxo plástico é normal à superfície de plastificação. Assim, este vetor  $\alpha$  pode ser obtido, em termos da função de plastificação, por:

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (4.22)$$

Sendo  $F$  a condição de plastificação ou as funções de carregamento subsequentes. Derivando-se a equação (4.11) com relação à  $\theta$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[ \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} - \frac{3J_3}{(J_2)^2} \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \sigma} \right] \quad (4.23)$$

Substituindo-se a expressão (4.23) na equação (4.22), pode-se escrever:

$$\mathbf{a} = C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3 \quad (4.24)$$

Onde:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1, 1, 1, 0, 0, 0) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} (s_x, s_y, s_z, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}, 2\tau_{xy}) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \left(s_y s_z - \tau_{zx}^2 + \frac{J_2}{3}\right), \left(s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3}\right), \\ \left(s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3}\right), 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{yz}), \\ 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xy}), 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$c_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} \quad (4.28)$$

$$c_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (4.29)$$

$$c_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (4.30)$$

Nas equações acima,  $s_x, s_y$  e  $s_z$  são as tensões desviadoras e  $\tau_{yz}, \tau_{zx}$  e  $\tau_{xy}$  são as tensões totais de corte. Para o estado plano de tensão,  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

Substituindo-se a função F, determinada pela equação (4.18), nas expressões acima, encontram-se as componentes do vetor de fluxo plástico.

## 4.2.2 Modelo para o concreto à tração

O fato do concreto possuir baixa resistência à tração resulta na sua fissuração, para baixos níveis de tensão, se comparados com as tensões de falha à compressão. O concreto fissurado segue o modelo de fissuras distribuídas. Neste modelo, necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissura, sem modificar-se a topologia da malha de elementos finitos durante a análise, como ocorre em outros modelos.

### 4.2.2.1 CRITÉRIO DE FISSURAÇÃO

No presente trabalho, o concreto sob tração é modelado como sendo um material elástico linear e o critério de ruptura de Ottosen é empregado para identificar a falha à tração. Para um ponto, no interior do elemento, previamente não-fissurado, as tensões principais e suas direções são avaliadas. Caso este estado de tensão tenha atingido a superfície de ruptura, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), duas situações podem ocorrer:

- se  $\sigma_1 \geq f_{tm}/2$ , o ponto de integração fissurou;
- se  $\sigma_1 < f_{tm}/2$ , o ponto de integração esmagou.

A fissura é formada no plano ortogonal a  $\sigma_1$ . Após isso, considera-se o concreto ortotrópico, sendo desprezado o efeito de Poisson, conforme Hinton (1988), e os eixos materiais locais coincidem com as direções das tensões principais. A direção da fissura é admitida permanecer fixa, sendo isto conhecido como aproximação da fissura fixa. Para um ponto já fissurado, verifica-se a possibilidade de formação de uma segunda fissura, que, por simplicidade, será considerada ortogonal à primeira fissura. Se ocorrerem duas fissuras, o concreto é suposto não colaborar mais na resistência da estrutura, tendo suas tensões anuladas no ponto em questão.

A direção da fissura é calculada, resolvendo-se um problema de autovetores. Calculam-se os cossenos diretores dos ângulos formados entre o autovalor equivalente à tensão principal máxima,  $\sigma_1$  e o estado de tensão que originou a fissura.

#### 4.2.2.2 CRITÉRIO PARA ESCOLHA DA CURVA DE AMOLECIMENTO

Conforme Hinton (1988), os primeiros estudos, feitos em análise numérica de concreto estrutural, admitiam o concreto como sendo um material elástico-frágil, sob tração. Quando uma fissura ocorria, a tensão normal à fissura era zerada.

Observou-se posteriormente que, devido às forças de aderência, o concreto entre as fissuras suporta um certo nível de tensão de tração. O concreto adere às barras de armadura e contribui ativamente para a rigidez total da estrutura. Este efeito é conhecido como enrijecimento à tração (“tension stiffening”) e pode ser incorporado ao modelo numérico através da inclusão de um ramo descendente suave na relação tensão-deformação do concreto tracionado.

Na definição de uma curva, para modelar o efeito do amolecimento das deformações, dois aspectos devem ser considerados: a forma da curva adotada e o valor dos parâmetros a serem usados.

Diferentes formas do ramo descendente da curva tensão-deformação têm sido adotadas. Hinton (1988) sugere uma forma exponencial e Prates Júnior (1992), uma forma bilinear. Neste trabalho foi adotada a forma bilinear.

Considera-se que o gráfico tensão-deformação consiste de um ramo ascendente, correspondendo à resposta elástica linear, e outro ramo descendente, pós-fissuração, que leva em conta a colaboração do concreto entre fissuras, conforme a Figura 19, expresso por

$$\sigma = \alpha \cdot f_{tm} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ctu}} \right) \quad (4.31)$$

Nesta equação,  $\alpha$  é um parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente e  $\varepsilon_{ctu}$  é um parâmetro que indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Adota-se  $0,5 < \alpha < 0,7$  e para  $\varepsilon_{ctu}$  foi adotado 0,002.

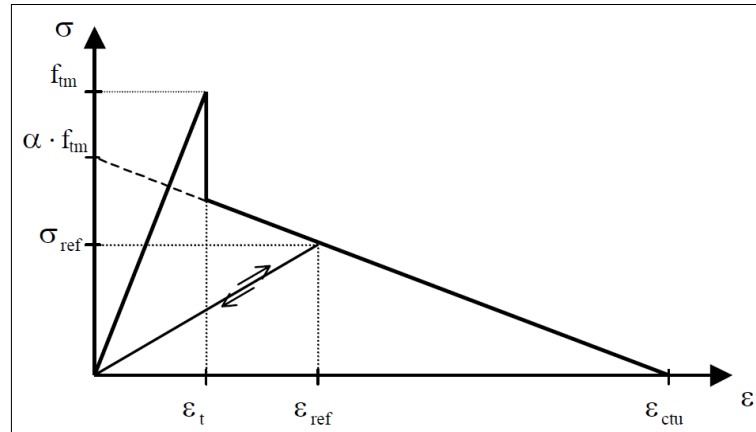


Figura 19: curva tensão-deformação para o concreto tracionado

A redistribuição de tensões devido à fissuração em outros pontos de integração ou carregamentos posteriores, pode eventualmente forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Esta possibilidade é considerada neste modelo. Se a deformação atual  $\varepsilon$  é pequena comparada à deformação  $\varepsilon_{ref}$ , armazenada como a máxima deformação de tração alcançada através da fissura pelo ponto de integração em questão, a tensão normal à fissura,  $\sigma$ , é calculada pela equação 4.32.

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad (4.32)$$

Onde  $\sigma_{ref}$  é a tensão interpolada correspondente à deformação  $\varepsilon_{ref}$ . A trajetória desta “descarga” secante pode ser visualizada na Figura 19. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até  $\varepsilon_{ref}$  ser excedida, após a qual segue a trajetória descendente definida pela equação acima.

Assim como a tensão normal ao plano da fissura, a tensão paralela ao plano da fissura também sofre uma modificação. Duas situações possíveis podem acontecer: a deformação nesta direção ser de compressão, onde, para este caso, admite-se que a tensão correspondente se comporte conforme o diagrama de um ensaio uniaxial à compressão, segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), de acordo com a equação (4.19). Por outro lado, se a deformação, na direção analisada, for de tração, uma relação tensão-deformação linear é adotada. O limite superior desta relação é a resistência à tração do concreto. Se este limite for atingido, o concreto é suposto fissurado nas duas direções e as tensões, no ponto, passam a ser nulas.



#### 4.2.2.3 RIGIDEZ TRANSVERSAL DO CONCRETO FISSURADO

Como uma regra geral, as primeiras fissuras que aparecem no concreto sob tração são perpendiculares à direção da mais alta tensão principal de tração do concreto,  $\sigma_1$ . As direções principais se modificam, por mudanças no carregamento ou por não-linearidades da estrutura, produzindo deslocamentos relativos entre as faces da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura. O valor destas tensões de corte depende das condições locais na fissura. O principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disso, o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (dowell effect) tem também importância na transferência de esforços. Neste caso, as principais variáveis envolvidas são o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano da fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura, que, quando aumenta, faz com que se reduza a capacidade de transferência de corte (shear transfer).

Os mecanismos acima mencionados não podem ser incluídos de forma simples no modelo de fissuras distribuídas. Nos modelos de fissura fixa, tais mecanismos podem ser aproximados, conforme sugere Cervenka (1985), reduzindo-se o valor do módulo de elasticidade transversal do concreto,  $G$ , através de um fator  $\beta$  que varia entre 0 e 1. Desta forma, o novo valor para o módulo de elasticidade transversal,  $G_c$ , é dado por:

$$G_c = \beta G \quad (4.33)$$

Em diversas análises, um valor constante foi atribuído a  $\beta$ , mas o mais realista seria relacioná-lo com a deformação normal à tração do concreto,  $\varepsilon_t$ . Cervenka (1985) apresentou a seguinte fórmula para  $\beta$ , também utilizada por Hinton (1988), a qual foi adotada neste trabalho:

$$\beta = 1 - \left( \frac{\varepsilon_t}{0,005} \right)^{k_1} \quad (4.34)$$

Sendo  $k_1$  um parâmetro ajustado entre  $0,3 < k_1 < 1,0$ .

### 4.3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA A ARMADURA

Nas estruturas de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. Deste modo, faz-se necessário apenas um modelo uniaxial para descrever o seu comportamento.

No modelo computacional, implementou-se um diagrama tensão-deformação bilinear do aço. Considera-se o aço como um material elastoplástico perfeito. Seu módulo de elasticidade longitudinal,  $E_s$ , é uma variável do problema. O material segue um comportamento elástico-linear até atingir o valor da tensão de escoamento do aço,  $f_y$ . A Figura 20 ilustra o diagrama tensão-deformação, adotado neste trabalho, para representar o comportamento das armaduras.

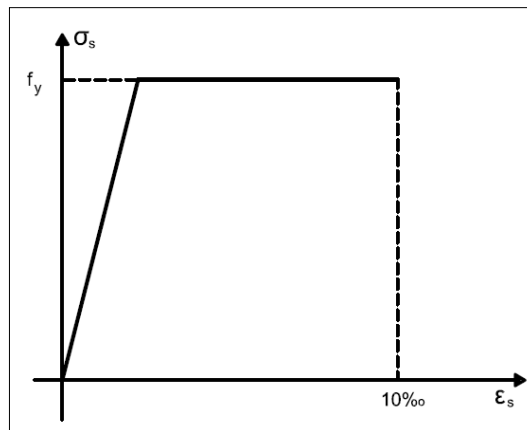


Figura 20: diagrama tensão de deformação para as armaduras

## 5 PRÉ-PROCESSADOR E PÓS-PROCESSADOR

Usando o software MATLAB, programas pré-processadores foram desenvolvidos para gerar de forma automática as malhas de elementos finitos. O MATLAB permite criar diferentes funções que executam comandos específicos. Assim, as conectividades e coordenadas nodais, para a malha de elementos triangulares lineares ou quadrangulares quadráticos de uma análise de viga ou de nó de pórtico, são geradas por rotinas computacionais elaboradas especialmente com tal propósito.

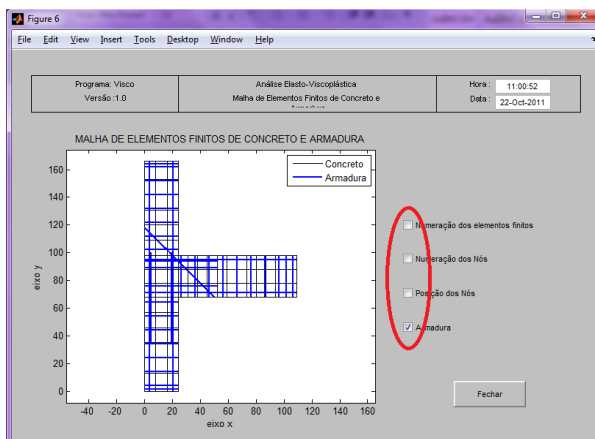
Após serem processados os dados nas rotinas implementadas em FORTRAN, os resultados obtidos são avaliados em um pós-processador desenvolvido em MATLAB. A escolha deste software se deu, porque este contém poderosas ferramentas gráficas, onde puderam ser criados programas para visualização de resultados. Este visualizador foi desenvolvido a partir das rotinas elaboradas no trabalho de Machado (2002). O processador elaborado em FORTRAN foi modificado a partir de programa utilizado por Ribeiro e Campos Filho (2002).

Com a utilização do Método dos Elementos Finitos para a análise de problemas cada vez mais complexos, já que este método fornece um volume muito grande de informações, há uma exigência de se visualizar graficamente os resultados obtidos. Com o recurso GUI (Graphical User Interface), disponível no software MATLAB, criou-se um programa iterativo, onde é possível plotar todos os resultados em cada incremento de carregamento na estrutura.

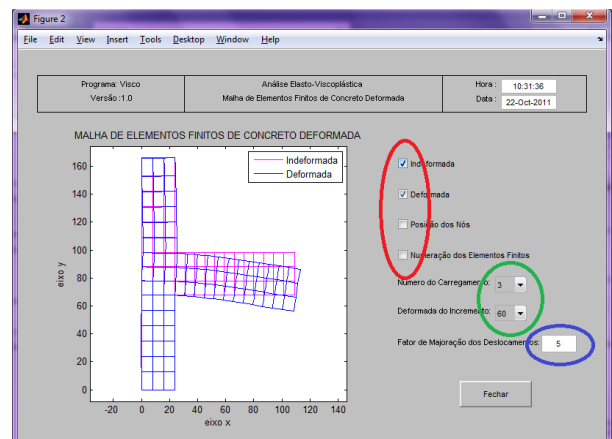
O programa é composto de cinco telas independentes e iterativas e algumas telas adicionais para visualização de resultados auxiliares. Estas telas iterativas podem modificar a forma de visualização dos resultados ou o incremento da carga através de botões de simples utilização. Os resultados em cada tela são: a malha de elementos finitos de concreto e armadura, a deformada dos elementos de concreto, as tensões totais no concreto, as tensões totais na armadura e a distribuição das fissuras nos elementos de concreto.

Na Figura 21 estão apresentadas as cinco telas iterativas do pós-processador.

- **Tela a:** apresenta a geometria do modelo com representação dos elementos finitos do concreto e da armadura. Em destaque estão os itens adicionais que podem ser ativados na imagem: numeração dos elementos finitos, numeração dos nós, posição dos nós e armadura.
- **Tela b:** apresenta a geometria deformada da estrutura. Em destaque, (elipse vermelha) estão as visualizações adicionais: malha indeformada, malha deformada, posição dos nós e numeração dos elementos finitos. Nas opções destacadas pela elipse verde pode-se alterar o carregamento e/ou incremento de carga da visualização. Por fim, a elipse azul destaca uma opção que permite mudar o fator de escala para representação da deformada.
- **Tela c:** apresenta a distribuição das tensões totais no concreto. Em destaque, (elipse vermelha), pode-se escolher a visualização das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ou  $\tau_{xy}$ . Normalmente, a elipse verde destaca a possibilidade de alteração do carregamento e/ou incremento de carga da visualização.
- **Tela d:** apresenta a distribuição de tensões totais na armadura. Em destaque as opções de mudança de carregamento e/ou incremento de carga.
- **Tela e:** apresenta a distribuição de fissuras nos pontos de Gauss de cada elemento finito. O destaque mostra a possibilidade de mudança do carregamento e/ou incremento de carga da visualização.



(a)



(b)

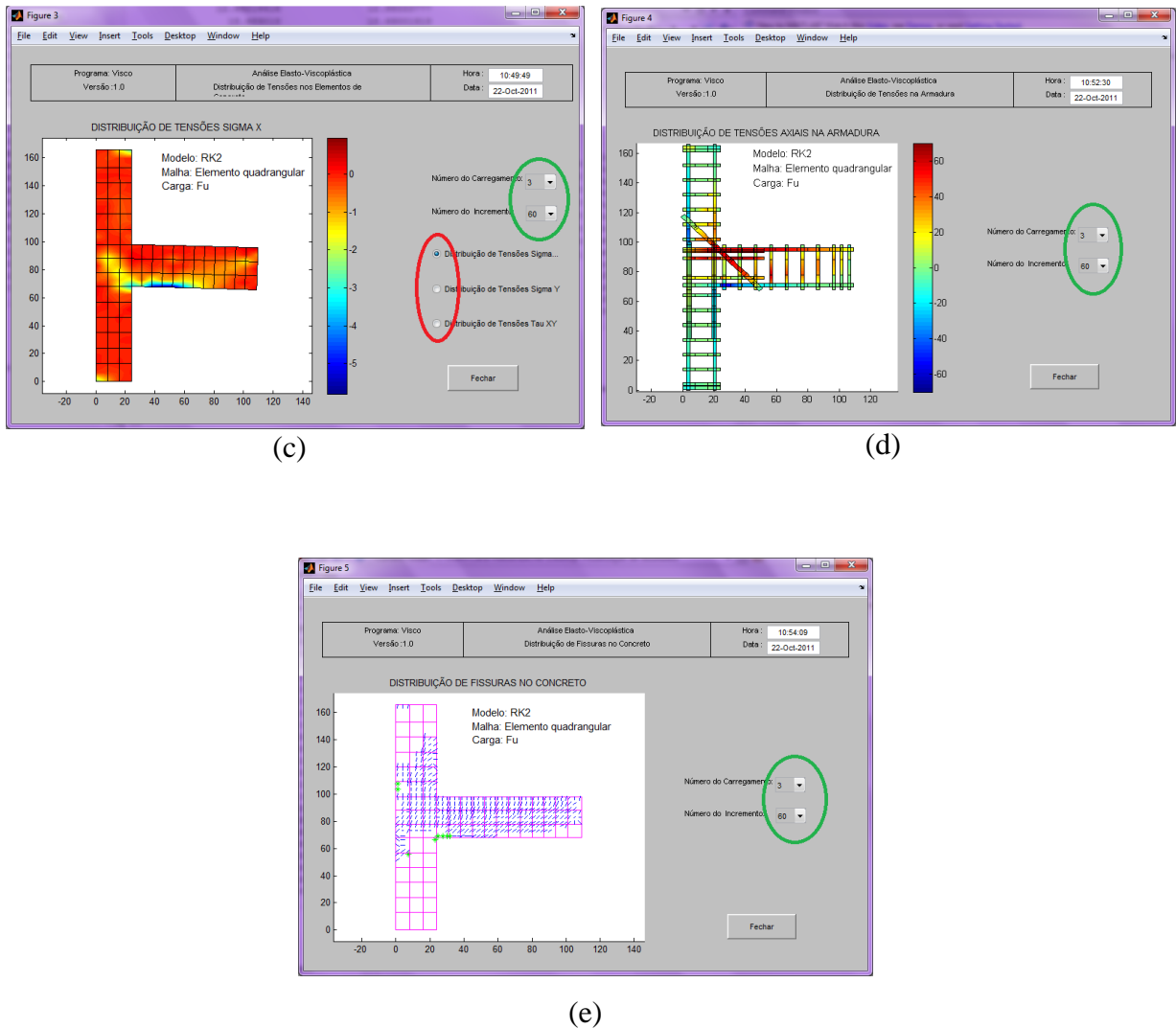


Figura 21: telas de visualização de resultados

Além destas telas, o pós-processador pode gerar gráficos de resultados, como: curva carga-deslocamento e curva momento-rotação relativa entre a viga e o pilar. Para a apresentação dos resultados ao longo do trabalho, apenas a imagem principal que mostra a estrutura é apresentada, reduzindo o espaço necessário para visualização de resultados obtidos.

## 6 ANÁLISE DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO

Inicialmente foram realizados testes para verificação da modelagem numérica adotada. Essa verificação foi realizada utilizando-se modelos em vigas biapoiadas com diferentes formas de ruptura.

Neste capítulo, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados por ensaios experimentais para vigas biapoiadas de concreto armado. Estes ensaios foram realizados por Leonhardt e Walther (1962). Apresentam-se os resultados, obtidos pelo modelo computacional, para tensões no concreto e na armadura, para as distribuições de fissuras no concreto e para o diagrama carga-deslocamento. Todas as simulações numéricas processadas possuem carga aplicada em forma de incrementos de deslocamento. Essa quantidade varia entre valores de 50 a 60 incrementos.

### 6.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

Neste item é apresentado o estudo de um conjunto de quatro vigas, denominadas ET1, ET2, ET3 e ET4, ensaiadas por Leonhardt e Walther (1962). Nessas vigas são aplicadas duas cargas concentradas, cuja posição pode ser vista na Figura 22. A resistência média à compressão do concreto, com base nos resultados experimentais, foi tomada como de  $2,42 \text{ kN/cm}^2$ .

Todas as vigas possuem a mesma armadura longitudinal (Figura 22). Esta consiste, inferiormente, de quatro barras de 20 mm de diâmetro ( $f_y = 42,8 \text{ kN/cm}^2$ ), sendo duas localizadas a 3 cm da borda inferior e duas localizadas a 6 cm da mesma borda e, superiormente, de duas barras de 8 mm de diâmetro ( $f_y = 46,5 \text{ kN/cm}^2$ ), localizadas a 3 cm da borda superior. Todas as barras são de aço encruado a frio (antiga classe B). Os estribos verticais têm 6 mm de diâmetro ( $f_y = 32 \text{ kN/cm}^2$ , aço laminado a quente, antiga classe A), uniformemente espaçados. O módulo de elasticidade do aço,  $E_s$ , é considerado 210 GPa para o aço antiga classe A e 195 GPa para o aço da antiga classe B.

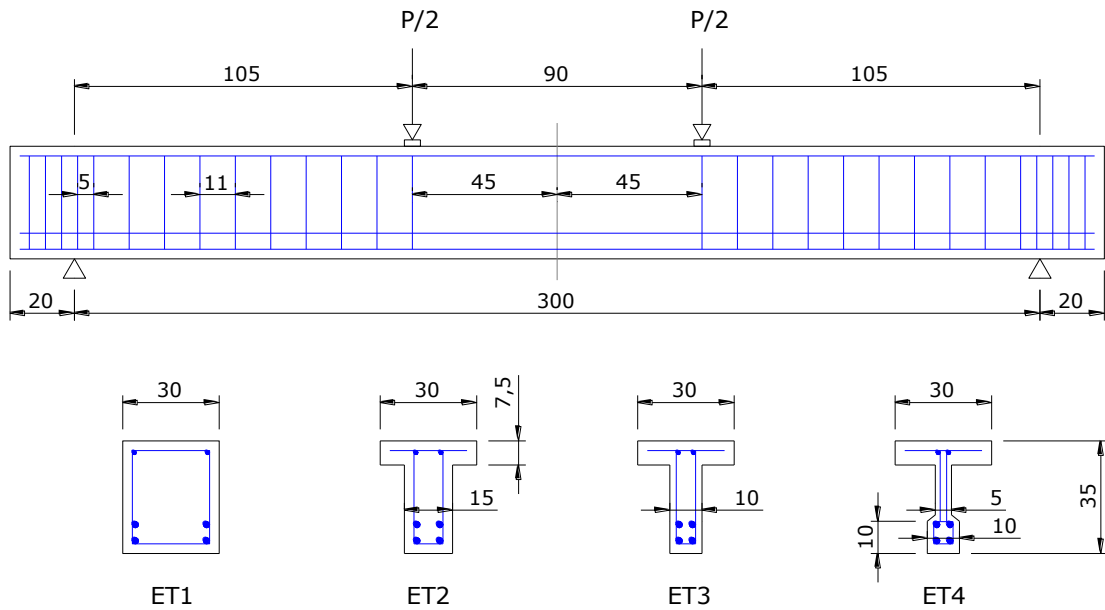


Figura 22: representação das vigas de Leonhardt e Walther (1962)

Para a análise computacional, utilizou-se a malha de elementos finitos com 20 elementos quadrangulares quadráticos de oito nós para estado plano de tensão. O peso próprio das vigas foi considerado como uma carga de curta duração, uma vez que os ensaios eram montados na data da execução (aproximadamente, 28 dias após a concretagem). A Figura 23 apresenta o esquema do modelo numérico com as condições de contorno aplicadas. Para otimizar o processamento numérico, apenas a metade da viga foi modelada. Desta forma, todos os resultados apresentados fazem referência a este modelo.

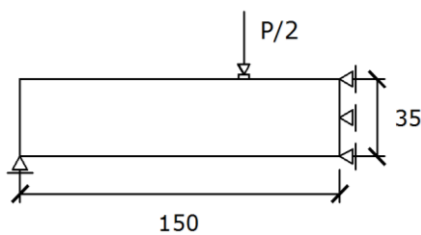


Figura 23: representação das condições de contorno do modelo

## 6.2 RESULTADOS OBTIDOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

As figuras apresentadas a seguir mostram os resultados numéricos para as vigas ET1, ET2, ET3, ET4. São apresentadas as curvas carga-deslocamento, as tensões no concreto e na armadura e a distribuição de fissuras.

### 6.2.1 Viga ET1

Esta viga biapoiada é o mais simples desta série, pois possui seção retangular. Na Figura 24 apresentam-se as curvas carga-deslocamento obtidas experimentalmente e através da simulação numérica com malha quadrangular quadrática de oito nós. O deslocamento é medido no ponto central inferior do vão da viga.

Pode-se verificar uma boa correlação entre as curvas apresentadas, constando-se também uma carga de ruptura muito semelhante à encontrada nos ensaios experimentais.

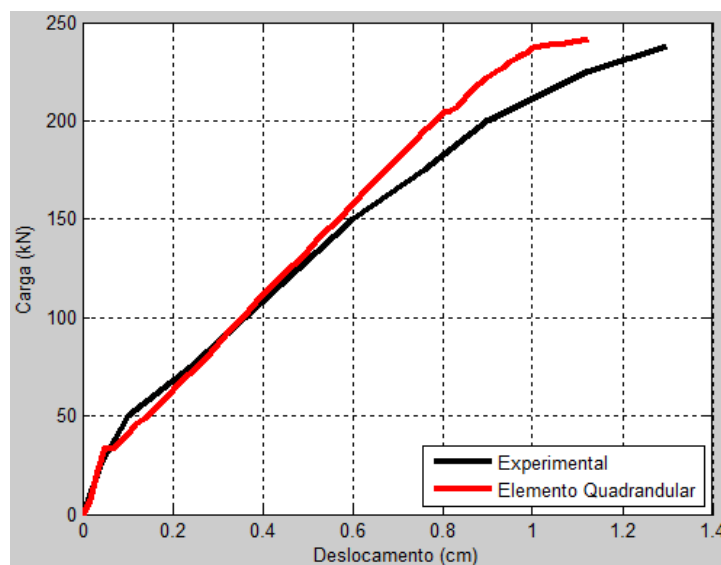


Figura 24: diagrama carga-deslocamento - modelo ET1

Nas figuras abaixo são apresentadas diferentes resultados da análise da viga ET1. Essas figuras proporcionam uma melhor visualização do comportamento da estrutura simulada computacionalmente. Os resultados são comparados tomando-se sempre uma fração da carga última ( $F_u$ ) obtida pelo modelo numérico.



Na Figura 25 é apresentada a distribuição de tensões totais  $\sigma_x$  para três diferentes etapas de carregamento. Essas tensões são obtidas para cada um dos nove pontos de Gauss do elemento quadrilátero quadrático. Com a suavização e extrapolação de tensões, o pós-processador desenha imagens representando a distribuição das tensões ao longo de toda a estrutura.

Na Figura 26 são apresentadas as distribuições de fissuras. Observou-se que a formação de fissuras ocorre fundamentalmente no primeiro terço de carregamento. Por este motivo são apresentadas as imagens das fissuras nos pontos de Gauss para  $1/9 F_u$ ,  $2/9 F_u$  e  $1/3 F_u$ . Nestas etapas do carregamento pode-se verificar uma grande evolução do número de pontos de Gauss que passam a ter estados de tensão que levam à fissuração do concreto.

Na Figura 27 são apresentadas as tensões nas barras de armadura da viga. Essas tensões são obtidas para três pontos em cada segmento de barra dentro de um elemento finito. O pós-processador gera as imagens extrapolando estes valores ao longo de todo o comprimento do segmento de barra desenhado.

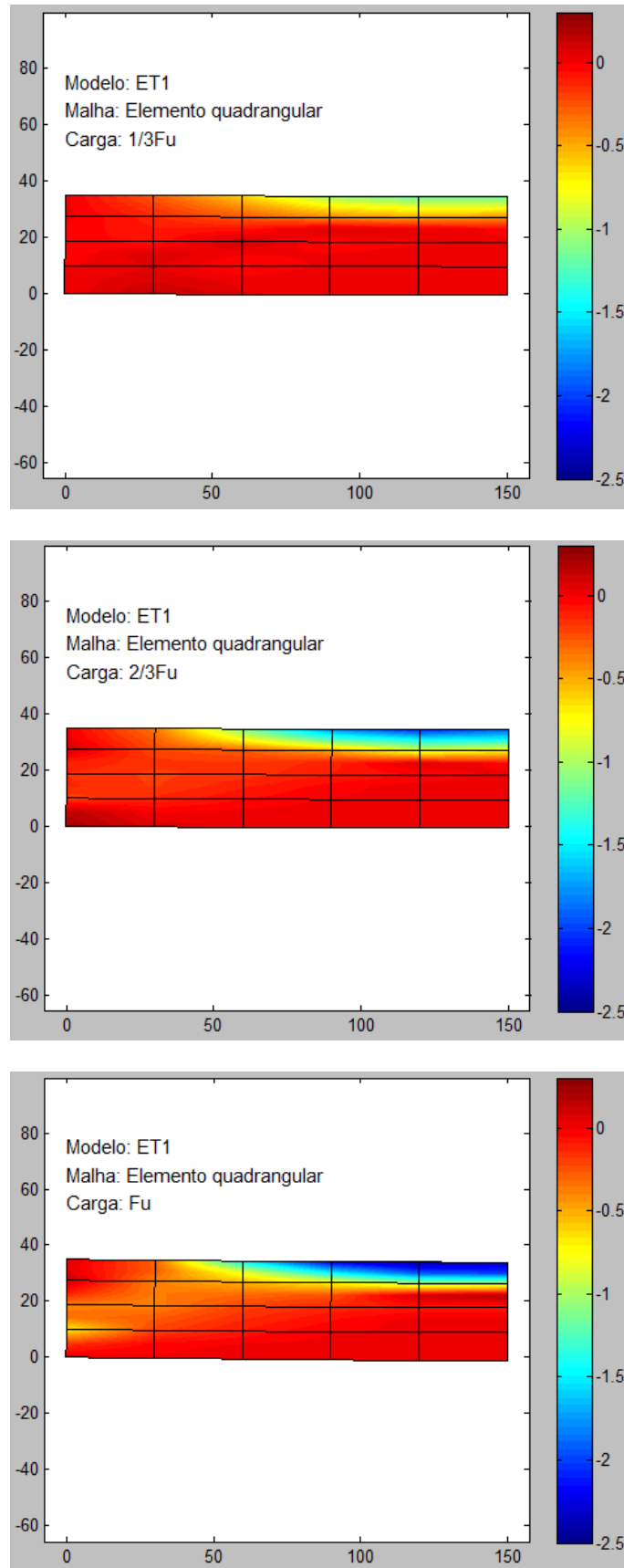


Figura 25: tensões totais no concreto (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo ET1

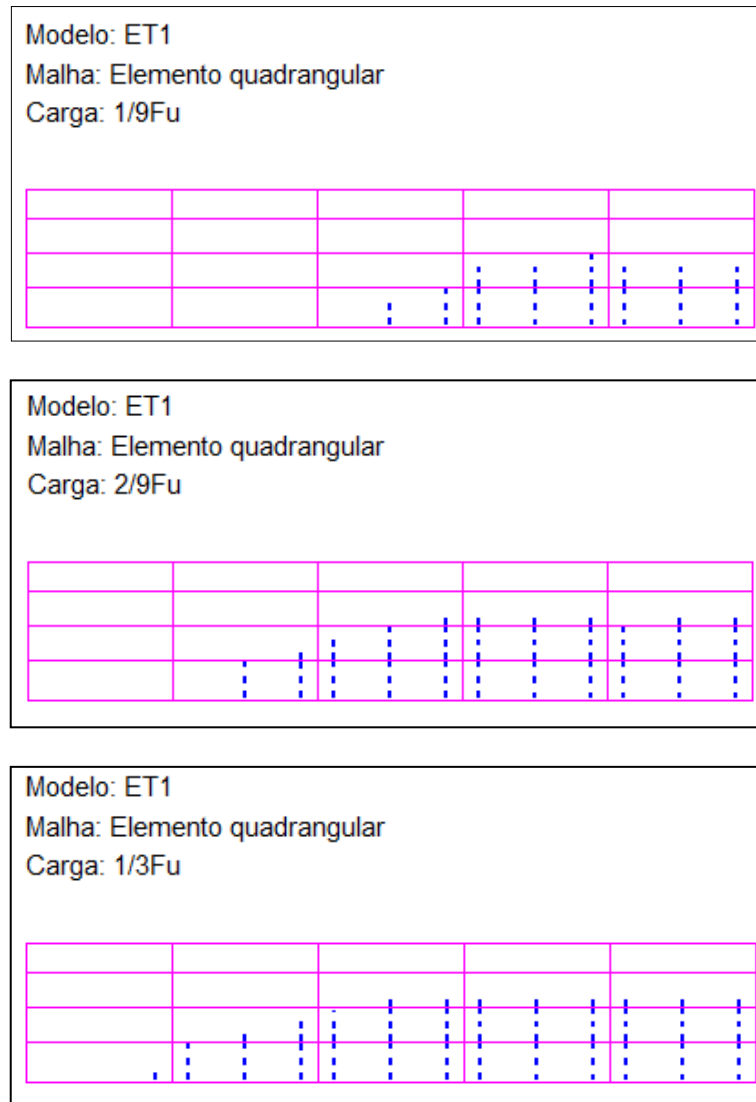


Figura 26: distribuição das fissuras - modelo ET1

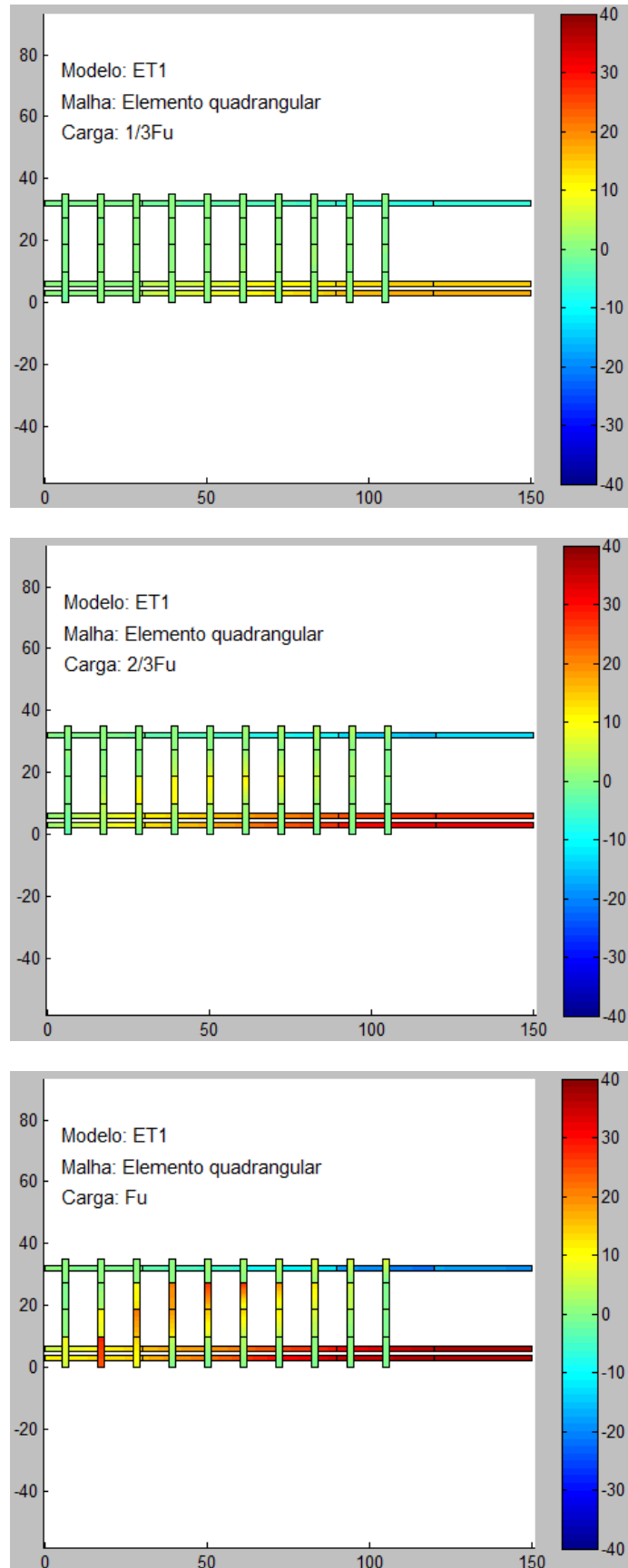


Figura 27: tensões totais na armadura (kN/cm<sup>2</sup>) - modelo ET1

## 6.2.2 Viga ET2

A viga ET2 apresenta seção transversal em T com alma de 15 cm de espessura. As figuras abaixo mostram o comportamento deste modelo estrutural frente ao carregamento aplicado. A Figura 28 mostra o diagrama carga-deslocamento, comparando os resultados experimentais aos do modelo numérico com malha quadrangular quadrática de oito nós.

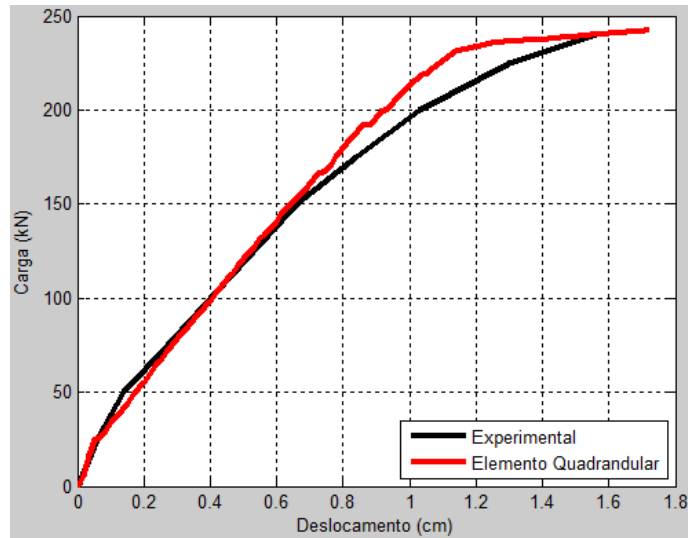


Figura 28: diagrama carga-deslocamento - modelo ET2

A evolução das tensões  $\sigma_x$ , para três diferentes etapas de carregamento, pode ser observada na Figura 29. Na Figura 30 é apresentada a evolução da fissuração nos pontos de integração. Já na Figura 31 são apresentadas as tensões nas barras de armadura para três etapas distintas do carregamento aplicado na viga.

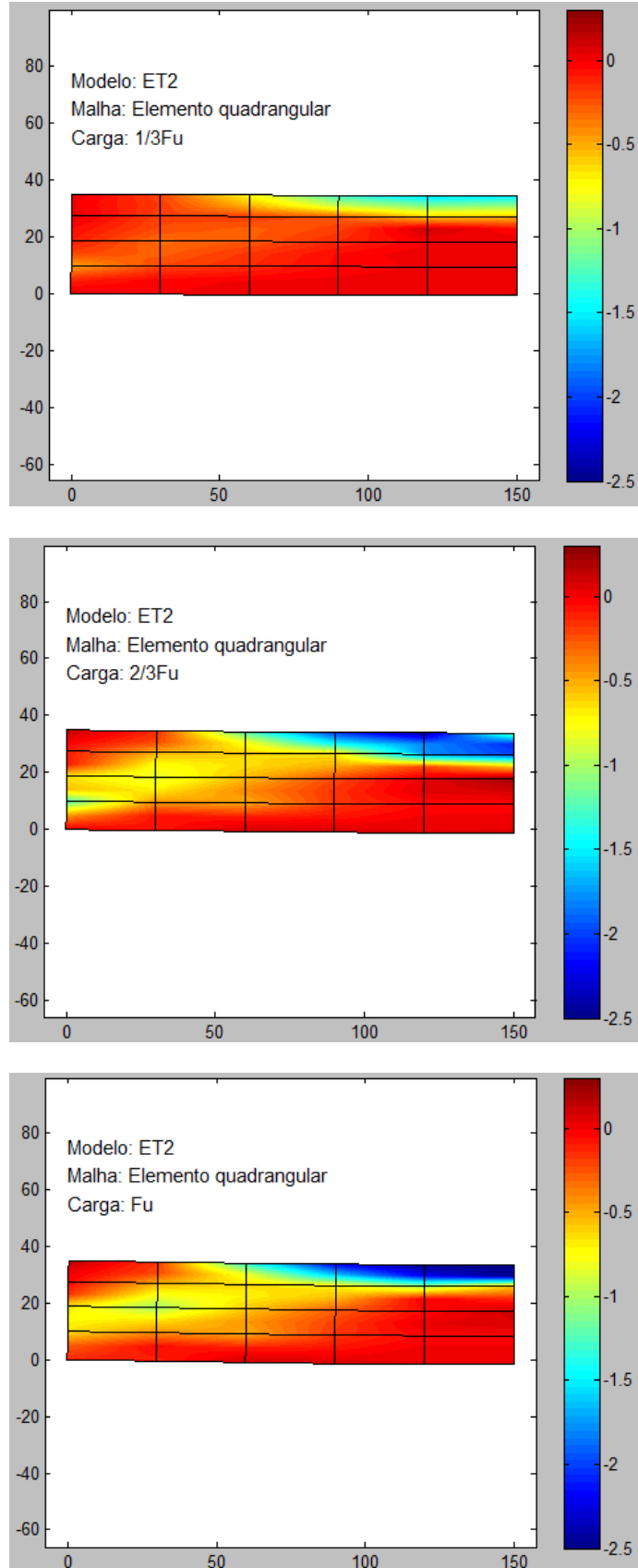


Figura 29: tensões totais no concreto ( $\text{kN/cm}^2$ ) - modelo ET2

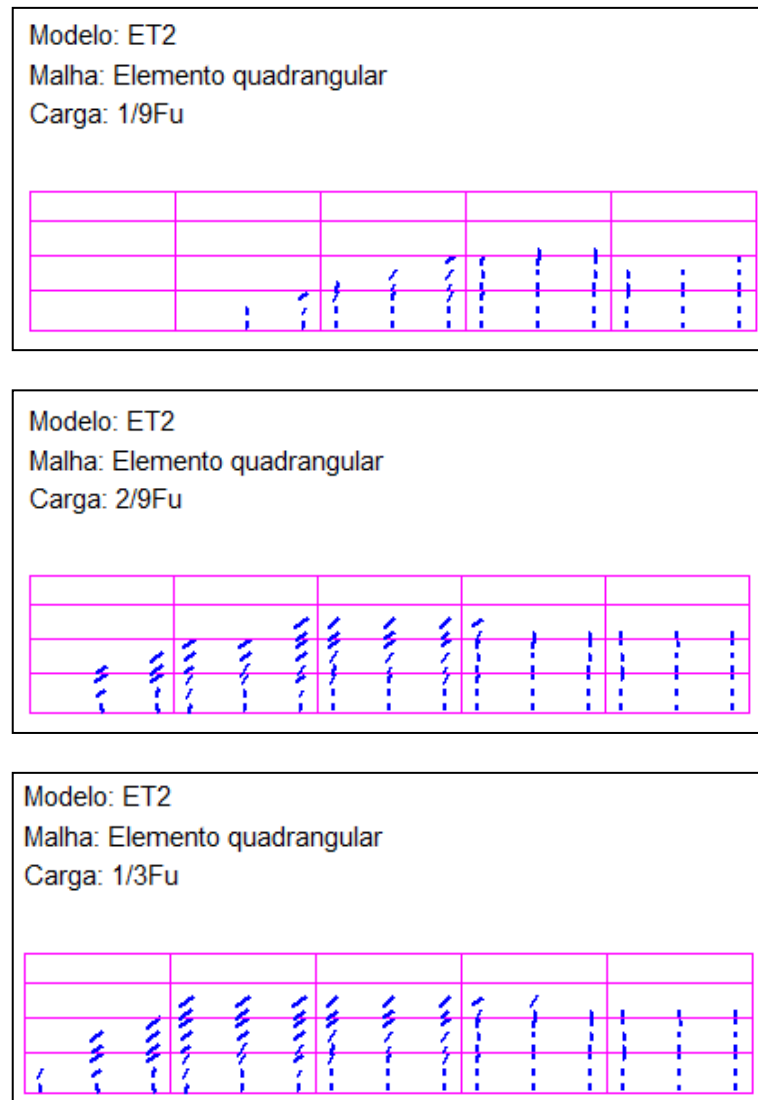
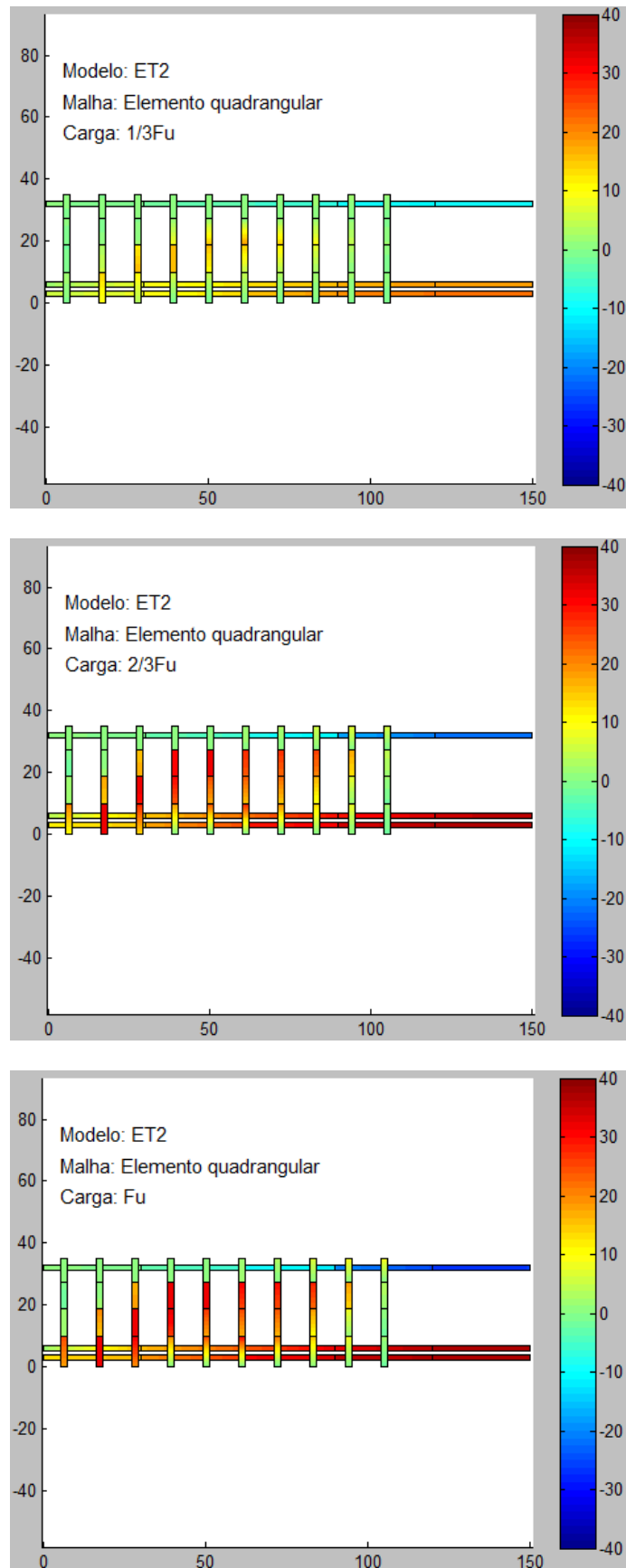


Figura 30: distribuição das fissuras - modelo ET2

Neste modelo estrutural de viga biapoiada pode-se observar o surgimento de fissuras mais inclinadas na região mais próxima do apoio. A inclinação dessas fissuras implica no surgimento de tensões maiores nos estribos distribuídos na viga.

Figura 31: tensões totais na armadura (kN/cm<sup>2</sup>) - modelo ET2



### 6.2.3 Viga ET3

A viga ET3 possui seção transversal com geometria em T, onde a espessura da alma é de 10cm. A Figura 32 apresenta a curva carga-deslocamento, comparando os resultados obtidos experimentalmente com os resultados da simulação numérica com malha de elementos quadrangulares quadrático de oito nós.

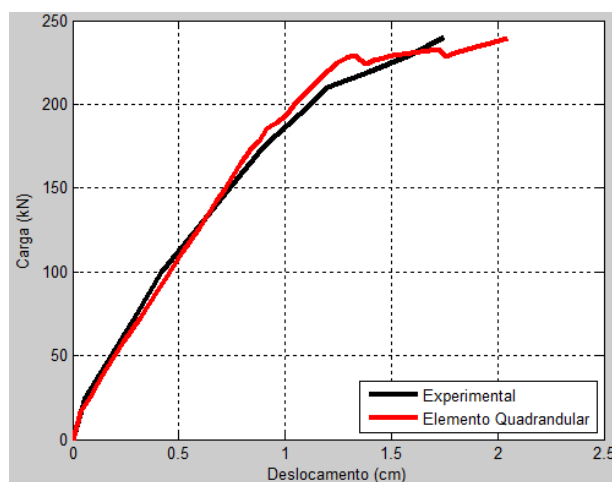


Figura 32: diagrama carga-deslocamento - modelo ET3

Verifica-se uma boa aproximação da curva obtida através da simulação numérica em relação à curva encontrada experimentalmente. Na Figura 33 apresentam-se três estágios de tensões totais suavizadas  $\sigma_x$  no concreto. Nas imagens da Figura 34 é apresentada a evolução da fissuração nos pontos de integração para cargas de  $1/9F_u$ ,  $2/9F_u$  e  $1/3F_u$ . A distribuição das tensões nas barras de armadura está apresentada na Figura 35, onde observa-se o aparecimento de tensões significativas nos estribos da viga ET3.

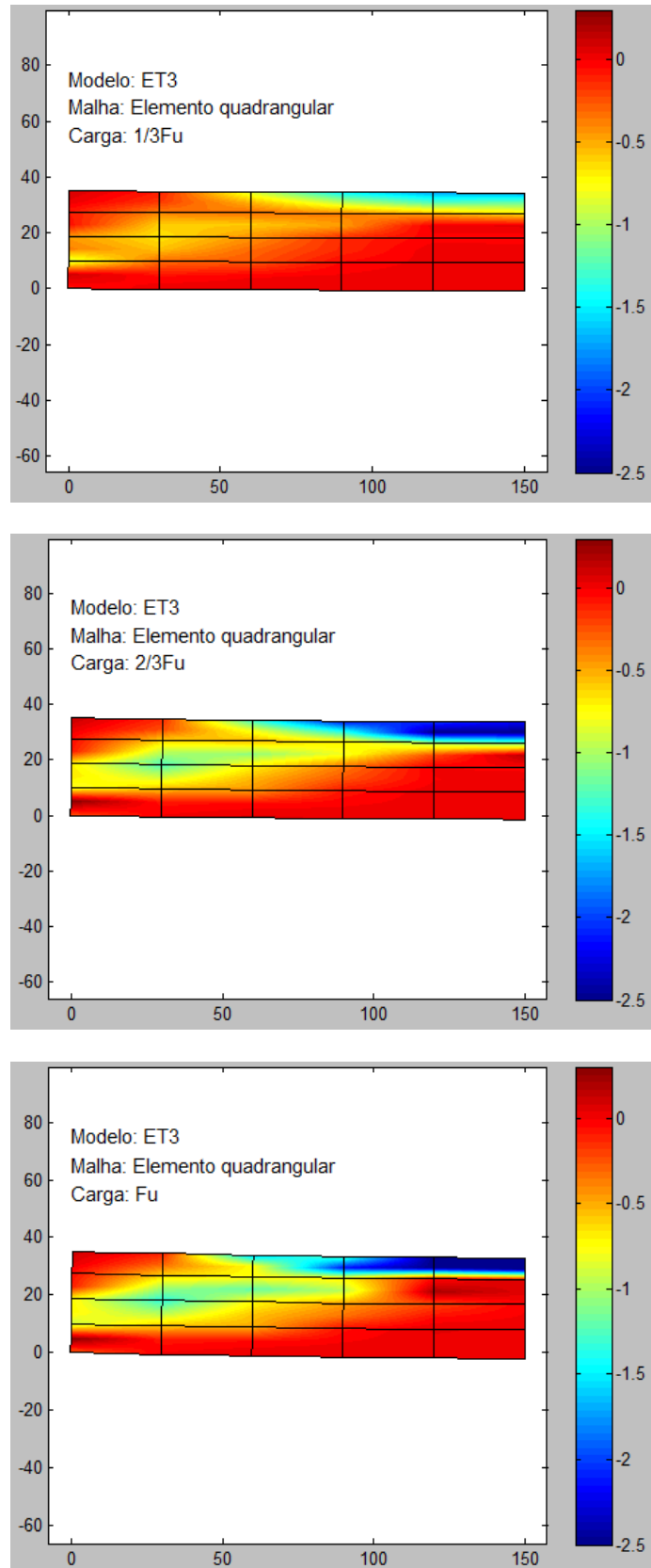


Figura 33: tensões totais no concreto ( $\text{kN}/\text{cm}^2$ ) - modelo ET3

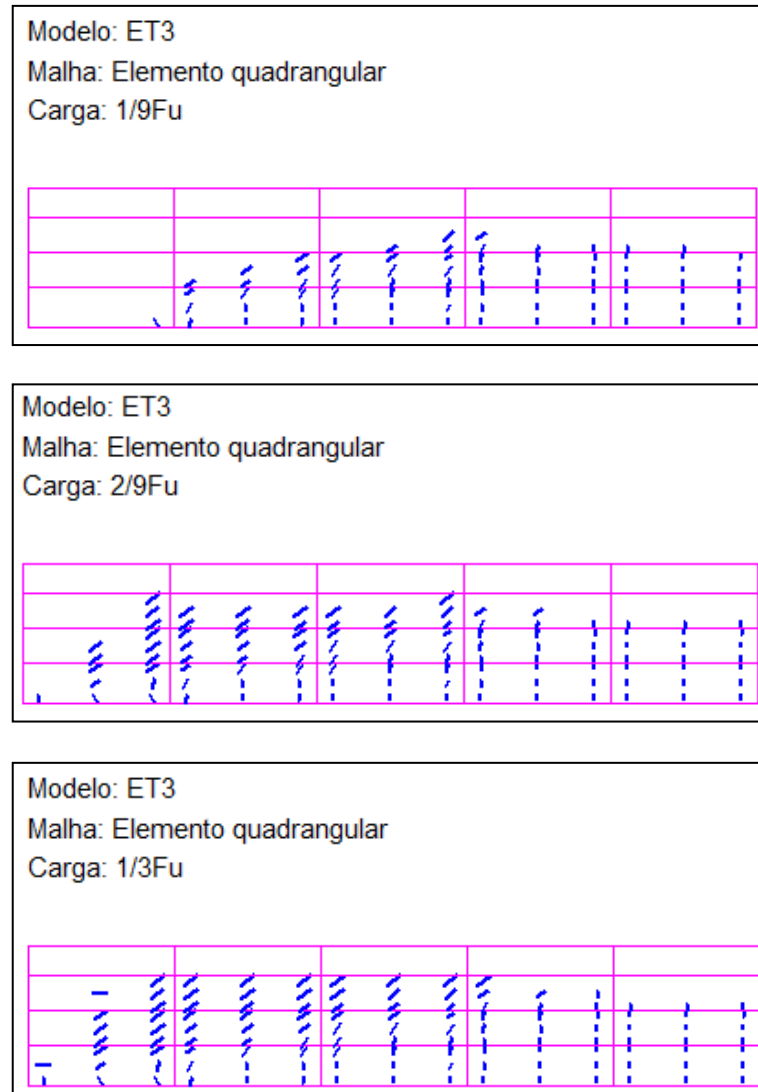


Figura 34: distribuição das fissuras - modelo ET3

Comparando-se os resultados de distribuição de fissuras da viga ET2 com a viga ET3 constata-se que mais pontos fissuram até a carga referente a  $1/3F_u$ . Além disso, essas fissuras são mais inclinadas na região próxima do apoio da viga.

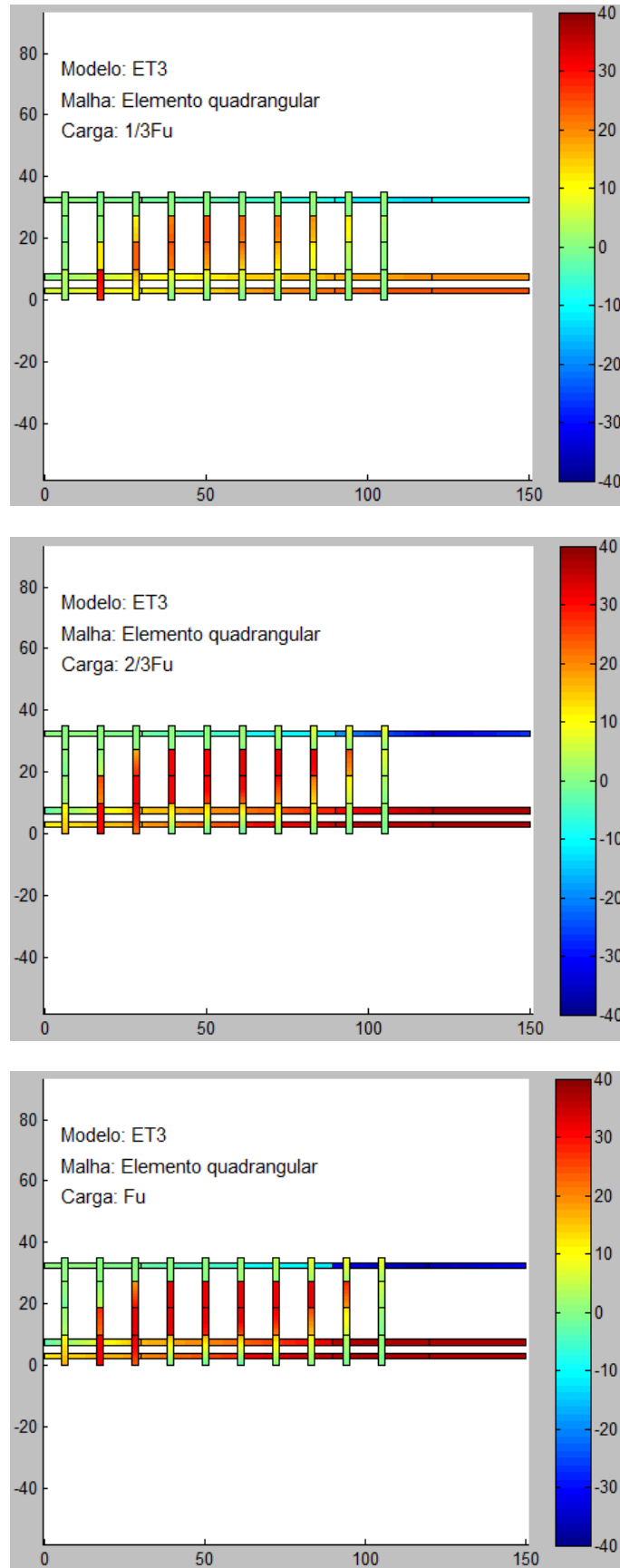


Figura 35: tensões totais na armadura (kN/cm<sup>2</sup>) - modelo ET3

## 6.2.4 Viga ET4

A viga ET4 possui seção transversal com geometria em I, onde a base da viga tem espessura de 10cm e a alma de 5cm. Na Figura 36 apresentam-se as curva cargas-deslocamento experimental e obtida através da simulação numérica para uma malha de elementos finitos quadrangulares quadráticos de oito nós.

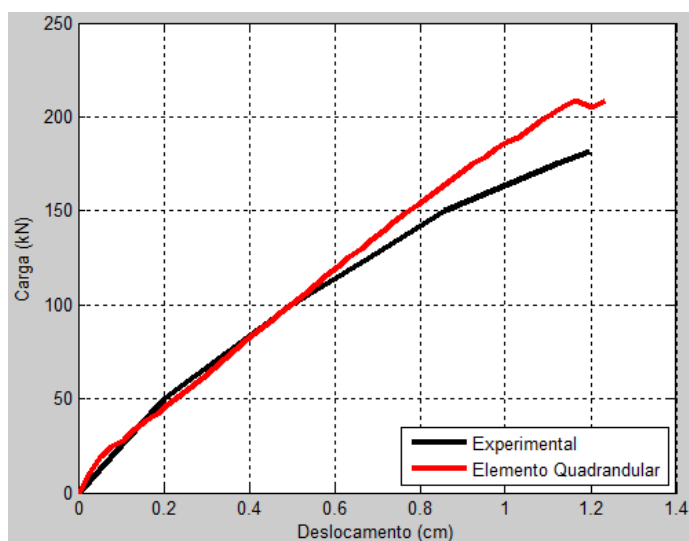


Figura 36: diagrama carga-deslocamento - modelo ET4

A curva carga-deslocamento para a viga ET4 apresenta comportamento quase linear e boa correlação dos resultados experimentais com os da simulação numérica. Nas imagens da Figura 37 apresentam-se as tensões totais  $\sigma_x$  no concreto, nas etapas de  $1/3F_u$ ,  $2/3F_u$  e  $F_u$ . A Figura 38 apresenta a evolução da distribuição das fissuras nos elementos de concreto. Por fim, a Figura 39 apresenta a evolução das tensões nas barras da armadura longitudinal e transversal.

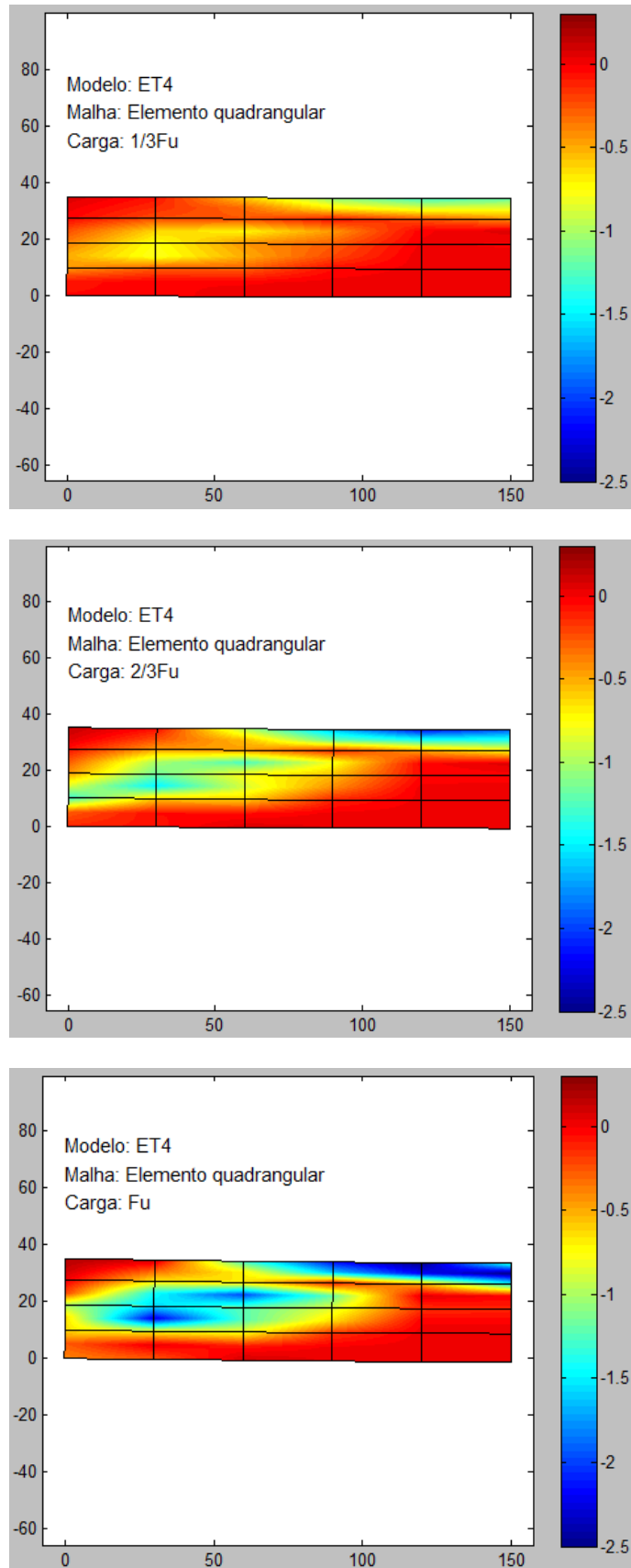


Figura 37: tensões totais no concreto (kN/cm<sup>2</sup>) - modelo ET3

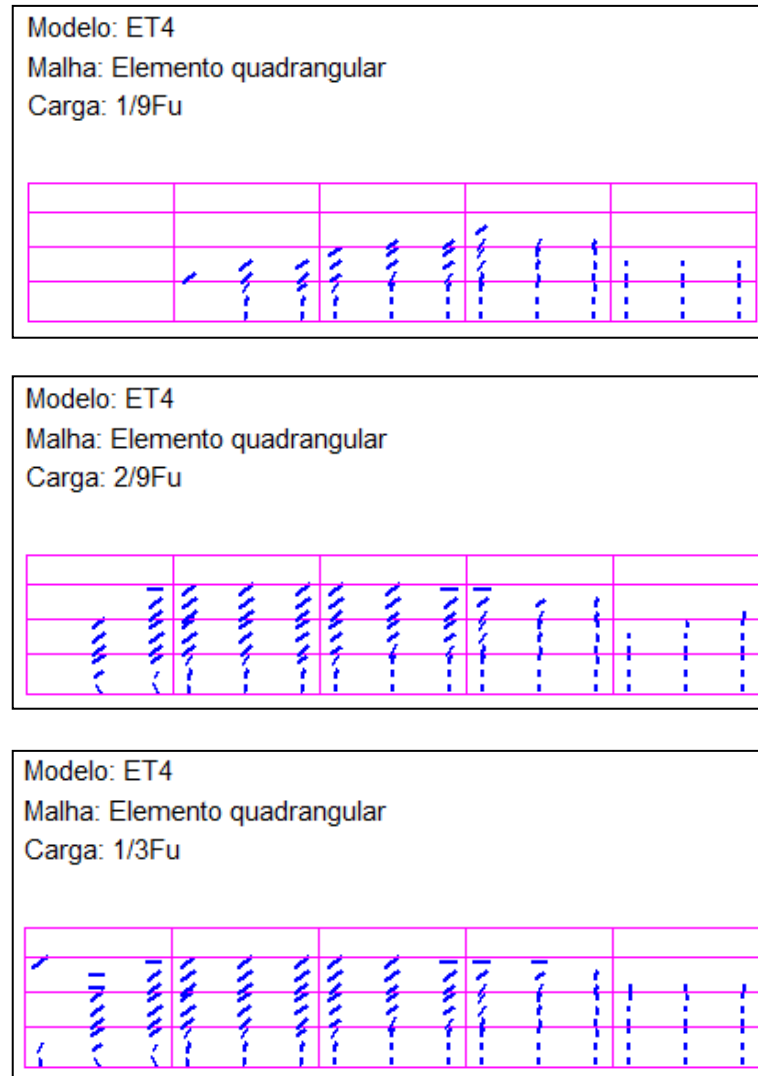


Figura 38: distribuição das fissuras - modelo ET4

A viga ET4 possui menor resistência ao esforço cortante, pois possui a menor espessura de alma dentre as quatro vigas analisadas. Por este motivo, observa-se o surgimento de um elevado número de pontos de Gauss com fissuras diagonais na região próxima ao apoio da viga para a carga de  $1/3$  de  $F_u$ .

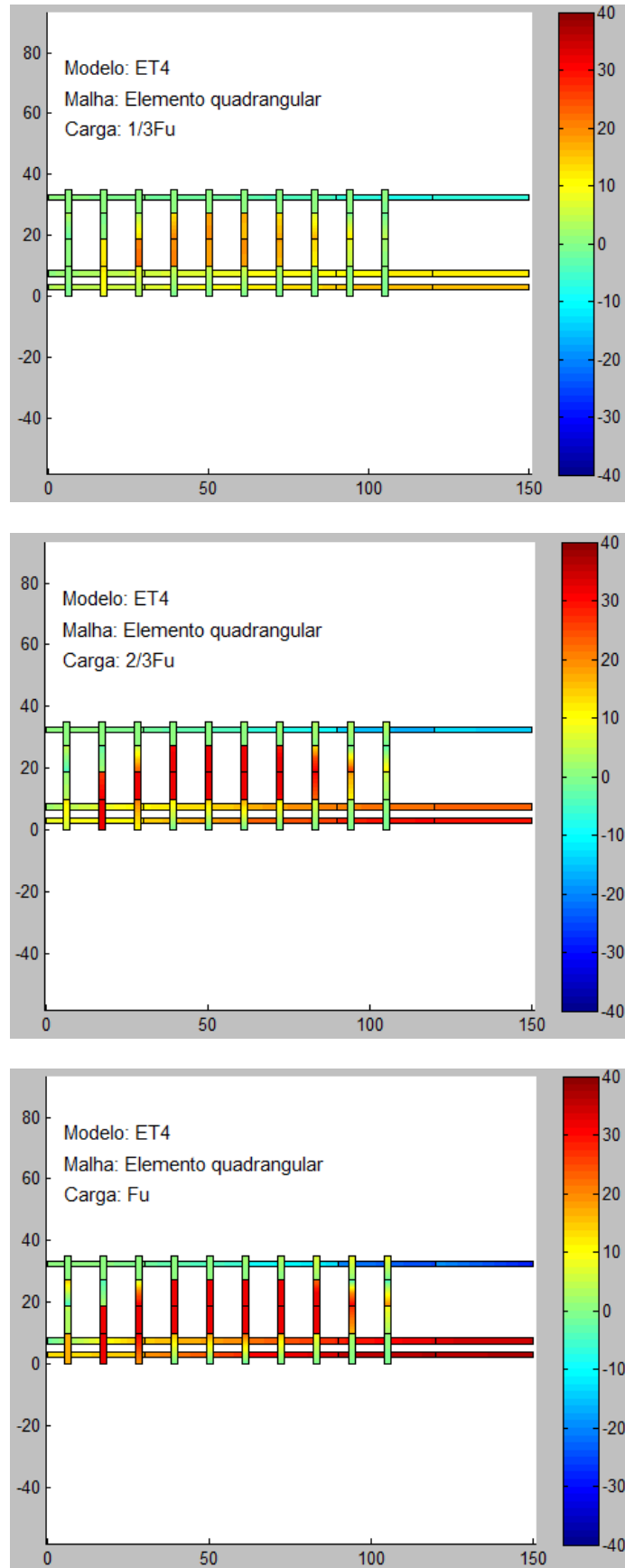


Figura 39: tensões totais na armadura (kN/cm<sup>2</sup>) - modelo ET4



Os resultados numéricos para as curvas carga-deslocamento apresentam boa aproximação com os valores experimentais para todas as vigas da série ET, ensaiada por Leonhardt e Walther (1962). Nas figuras de evolução da fissuração pode-se observar o surgimento de fissuras mais inclinadas à medida que a espessura da alma diminui, aumentando as tensões nos estribos e ocasionando a ruptura por corte.

Por fim, no diagrama de tensões axiais na armadura pode-se observar que na viga ET1, quando se atinge a carga de ruptura, a armadura inferior já se encontra no patamar de escoamento enquanto que os estribos estão levemente tracionados. Nas vigas ET2 e ET3 também se pode verificar que a armadura inferior atinge o patamar de escoamento, no entanto, os estribos também são solicitados com cargas próximas a sua tensão axial máxima. A viga ET4 atinge a tensão máxima nos estribos antes de se iniciar o processo de escoamento da armadura inferior. Desta forma fica evidente que a viga ET1 rompe por flexão, as vigas ET2 e ET3 rompem por flexão e corte e a viga ET4 rompe por corte.

### 6.3 REFINAMENTO DA MALHA DE ELEMENTOS TRIANGULARES

Os elementos quadrangulares quadráticos podem representar comportamentos complexos de tensões e deformações utilizando-se malhas com poucos elementos. Já os elementos triangulares lineares, por terem tensões e deformações constantes em sua formulação, necessitam de malhas muito mais refinadas para representar adequadamente os mesmos fenômenos no concreto armado.

Desta forma, apresenta-se neste item um estudo para estabelecer o refinamento necessário para alcançar com malhas de elementos finitos triangulares resultados semelhantes aos obtidos com os elementos quadrangulares quadráticos. Para alcançar tal objetivo, utilizou-se a viga ET1, considerada no item anterior.

Foram testadas malhas com 210, 420 e 840 elementos triangulares lineares de três nós. Os resultados observados foram da curva carga-deslocamento, tensões totais no concreto (direção X), fissuração e tensões totais nas barras de armadura. As figuras, apresentadas na sequência, mostram os resultados alcançados.

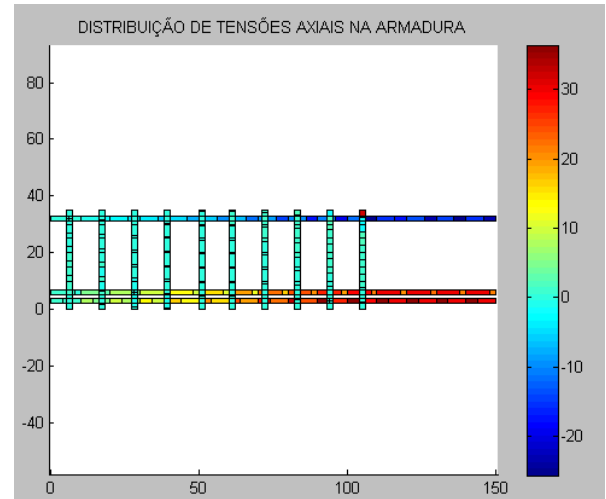
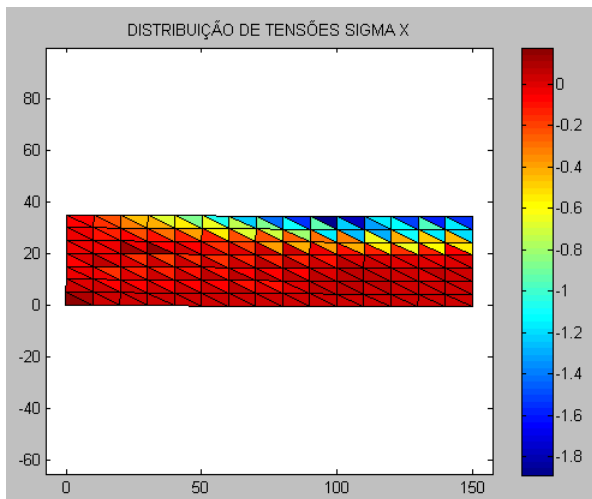
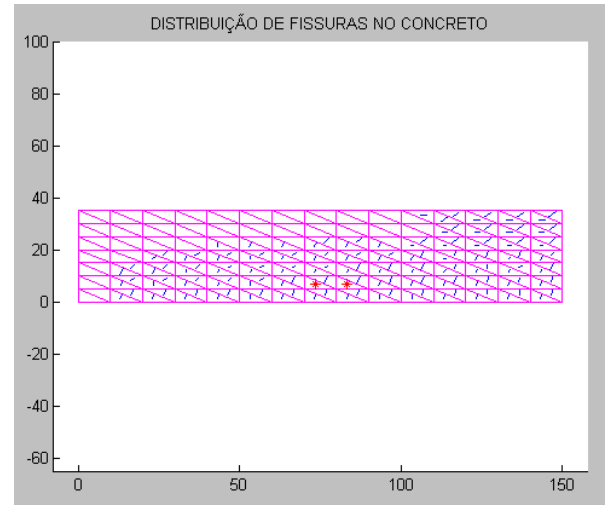
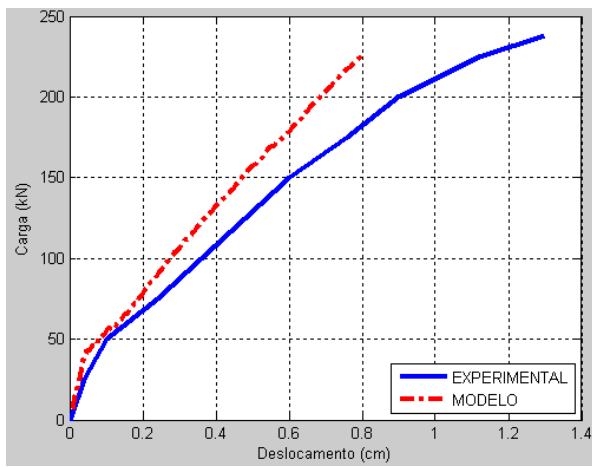


Figura 40: resultados para a carga última ( $\text{kN}/\text{cm}^2$ ) – modelo com 210 elementos triangulares lineares

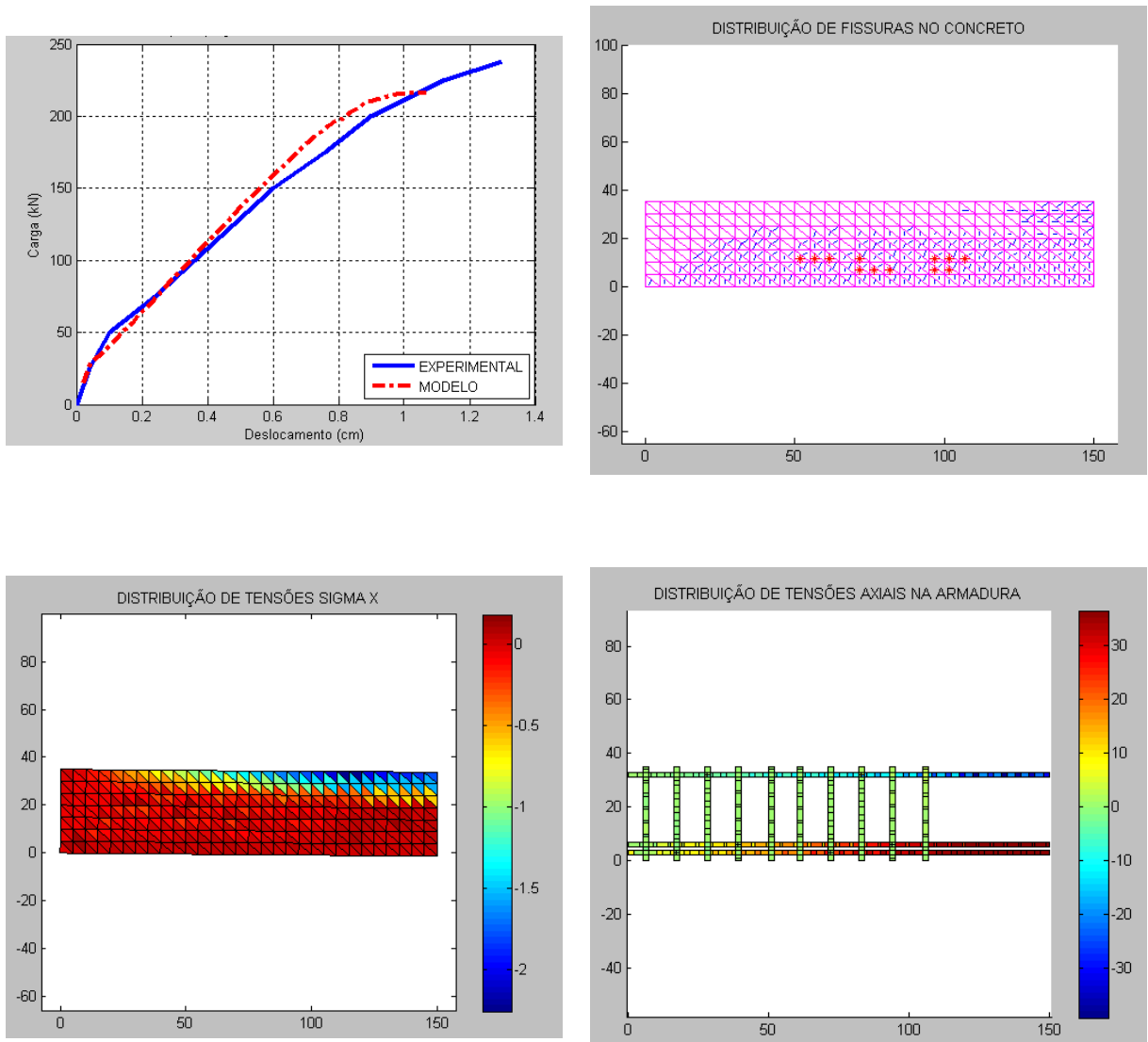


Figura 41: resultados para a carga última ( $\text{kN/cm}^2$ ) - modelo com 420 elementos triangulares lineares

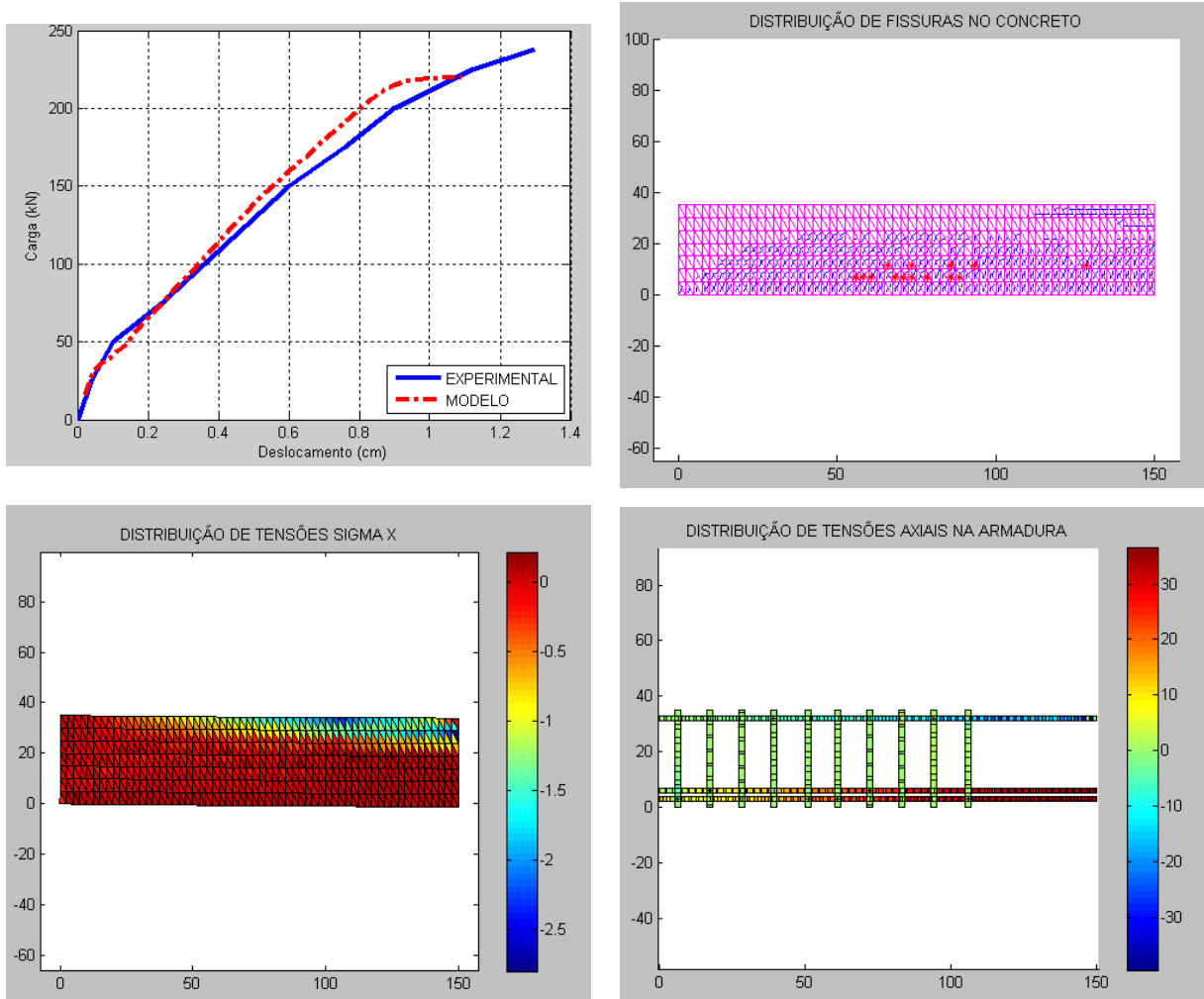


Figura 42: resultados para a carga última ( $\text{kN/cm}^2$ ) - modelo com 840 elementos triangulares lineares

Através de uma análise rápida dos resultados, pode-se verificar que a malha de 210 elementos triangulares é insuficiente, produzindo resultados insatisfatórios. As malhas de 420 e 840 elementos apresentaram resultados satisfatórios, não variando muito quando estes são comparados entre si. Por fim, concluiu-se que a malha de 420 elementos triangulares foi suficientemente refinada para apresentar resultados satisfatórios e, ao mesmo tempo, não despendeu tanto tempo computacional para apresentar bons resultados. A partir dessas informações, concluiu-se que para cada elemento quadrangular quadrático é necessária o uso de aproximadamente 20 elementos triangulares lineares. Assim, a modelagem das estruturas de nós de pórtico foi realizada com esta relação entre refinamentos e os resultados obtidos são apresentados no próximo capítulo.

## 7 ANÁLISE DE NÓS DE PÓRTICO EM CONCRETO ARMADO

O capítulo apresentado a seguir mostra a análise de nós de pórtico em concreto armado. Com o objetivo de verificar a validade da simulação numérica desenvolvida, os resultados numéricos foram comparados aos resultados experimentais disponíveis na bibliografia.

Cabe salientar que este trabalho possui algumas restrições quanto à modelagem de elementos finitos e a avaliação numérica. Conforme mencionado anteriormente, a malha de elementos triangulares trabalha com barras retas e a armadura é considerada perfeitamente aderente ao concreto.

Os modelos estruturais experimentais selecionados para comparações foram escolhidos de forma que diferentes configurações de nó de pórtico fossem analisadas. Ou seja, os modelos variam taxas e posicionamento de armaduras; espessura de pilares e vigas e resistência do concreto.

### 7.1 COMPARAÇÕES: RESULTADOS EXPERIMENTAIS E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste item, os resultados obtidos através do modelo computacional são comparados com os resultados experimentais apresentados por Roeser (2002). Ao todo, o trabalho experimental de Roeser (2002) apresenta 8 casos distintos de nós de pórtico externos e 7 casos de nós de pórtico internos. No entanto, neste trabalho são comparados os resultados de 4 desses casos, todos eles sendo nós externos.

Através da análise numérica desses modelos de Roeser (2002) pode-se fazer uma avaliação do modelo computacional. As ligações analisadas incluem alguns parâmetros, como: a rigidez do concreto, o detalhamento da armadura e a relação da altura da viga em relação à largura do

pilar. As principais características dos modelos estão apresentadas na Tabela 1 e na Tabela 2.

Modelo	Seções transversais		Concreto (MPa)
	Viga (cm)	Pilar (cm)	
RK2	30 x 15	24 x 15	57,4
RK3	30 x 15	24 x 15	57,2
RK5	30 x 15	20 x 15	54,9
RK6	30 x 15	20 x 15	86,5

Tabela 1: propriedades das seções transversais e resistência do concreto de cada nó de pórtico

Modelo	Armaduras						
	Viga		Pilar		Nó		
	Longit.	Estribo	Longit.	Estribo	Vertical	Horizontal	Diagonal
RK2	2x2 $\phi$ 20	$\phi$ 8 c/10	2x2 $\phi$ 16	$\phi$ 8 c/10	2 $\phi$ 20	3 $\phi$ 8 (gancho)	1 $\phi$ 20
RK3	2x2 $\phi$ 20	$\phi$ 8 c/10	2x2 $\phi$ 16	$\phi$ 8 c/10	2 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10 (gancho)	-
RK5	2x2 $\phi$ 25	$\phi$ 10 c/10	2x2 $\phi$ 16	$\phi$ 8 c/7,5	2 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10 (gancho)	-
RK6	2x2 $\phi$ 25	$\phi$ 10 c/10	2x2 $\phi$ 16	$\phi$ 8 c/7,5	2 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10 (gancho)	-

Tabela 2: propriedades das armaduras de cada nó de pórtico

As resistências à tração média utilizadas para as armaduras, foram:

- 62,58kN/cm<sup>2</sup> (diâmetro de 8mm)
- 54,53 kN/cm<sup>2</sup> (diâmetro de 10mm)
- 56,4 kN/cm<sup>2</sup> (diâmetro de 16mm)
- 53,73 kN/cm<sup>2</sup> (diâmetro de 20mm)
- 55,86 kN/cm<sup>2</sup> (diâmetro de 25mm)

O módulo de elasticidade do aço,  $E_s$ , é de 210 GPa.

A Figura 43 apresenta a geometria de cada ligação viga-pilar. Os pilares têm largura de 24cm nos modelos RK2 e RK3, enquanto que os pilares dos modelos RK5 e RK6 possuem largura de 20cm. As figuras apresentadas a seguir não detalham a distribuição dos estribos para simplificar a visualização das demais armaduras. A carga é aplicada na viga a uma distância de 85cm da face do pilar.

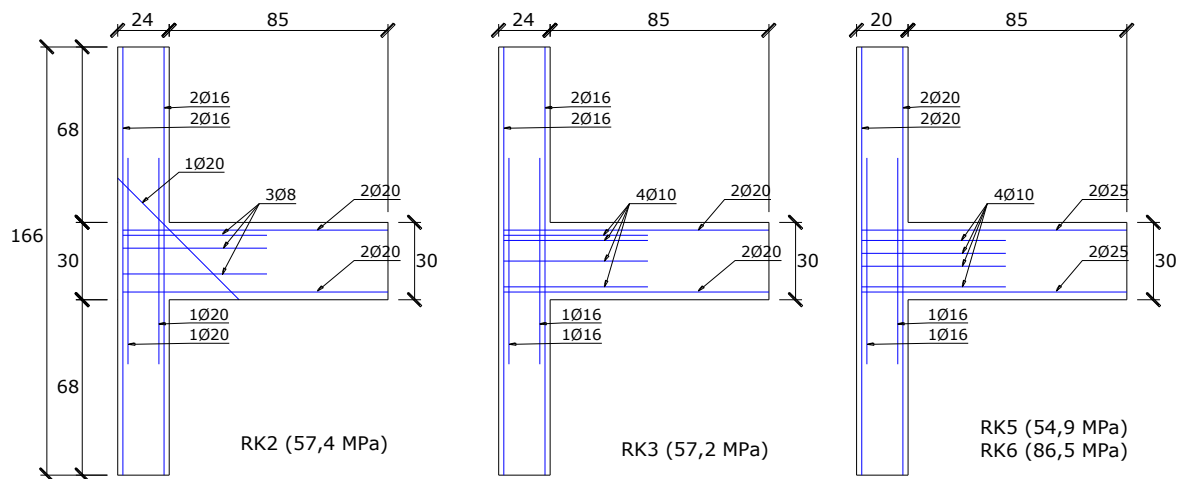


Figura 43: modelos de nós de pórtico analisados

Conforme Hegger, Sherif e Roeser(2003) os nós de pórtico apresentam dois modos de ruptura distintos. Os nós externos RK2 e RK3 têm ruptura causada pela flexão da viga, enquanto que os modelos RK5 e RK6 têm ruptura localizada no nó. Essas duas formas de ruptura podem ser definidas da seguinte forma:

- Ruptura por flexão: a curva carga-deslocamento apresenta comportamento dútil. O momento fletor máximo da viga é atingido e a armadura da atinge o escoamento
- Ruptura do nó: o momento fletor máximo da viga não pode ser atingido e uma fissura característica pode ser observada no nó. A formação da fissura é influenciada pela tensão de cisalhamento e o tipo de ancoragem da barra de armadura. Atingindo o estado último, a fissura se expande para dentro da zona de compressão e a tensão última depende da qualidade da ancoragem.

Como avaliação adicional, é verificado o comportamento da rotação relativa entre a viga e o pilar. Esta análise foi realizada na região central do nó com o objetivo de verificar os diferentes comportamentos, comparando-se uma situação com ligação rígida e outra com ligação flexível, suscetível a deformações de tração e compressão no concreto e no aço e fissuração no concreto.

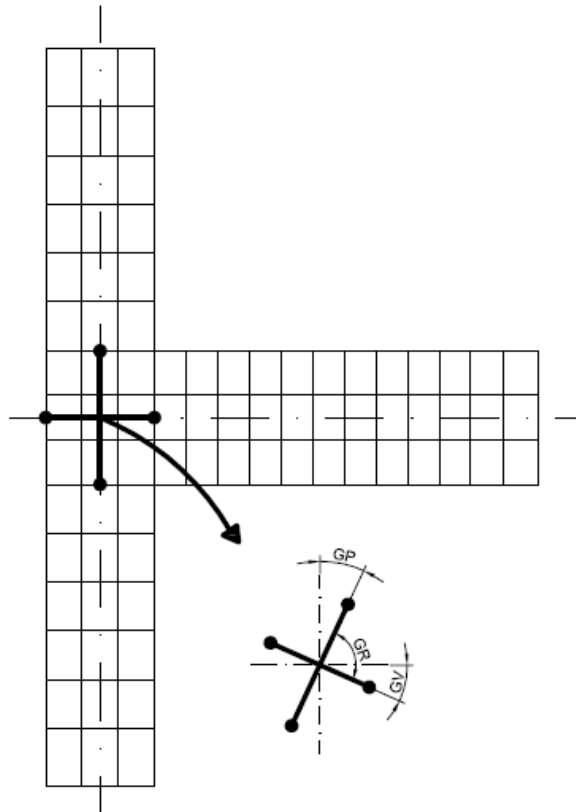


Figura 44: avaliação da rotação na região do nó

A Figura 44 mostra os pontos onde foram medidos os deslocamentos obtidos em cada incremento de deslocamento. Através dos valores de deslocamento de cada um desses pontos são calculadas três diferentes medidas angulares: giro do eixo do pilar (GP), giro do eixo da viga (GV) e o giro relativo (GR) entre a viga e o pilar. Os valores de GP e GV são obtidos através da função “distance” do MATLAB que calcula o ângulo de um segmento de reta formado por dois pontos. Através desse ângulo pode-se verificar a variação do GP em relação a uma vertical perfeita e a variação de GV em relação a um horizontal perfeita. O valor de GR é obtido da diferença entre GV e GP.

Através do deslocamento no primeiro incremento, onde ainda não se iniciou a plastificação e



fissuração, são extrapoladas retas simulando o comportamento da ligação rígida entre a viga e o pilar. Desta forma, pode-se comparar os diferentes comportamentos encontrados entre a simulação de ligação rígida e a simulação proposta neste trabalho com deformações não lineares.

### 7.1.1 Resultados experimentais

Os resultados apresentados por Roeser (2002), em sua tese de doutorado, são os gráficos de carga-deslocamento e os padrões de fissuração. O termo “w” designa o deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga.

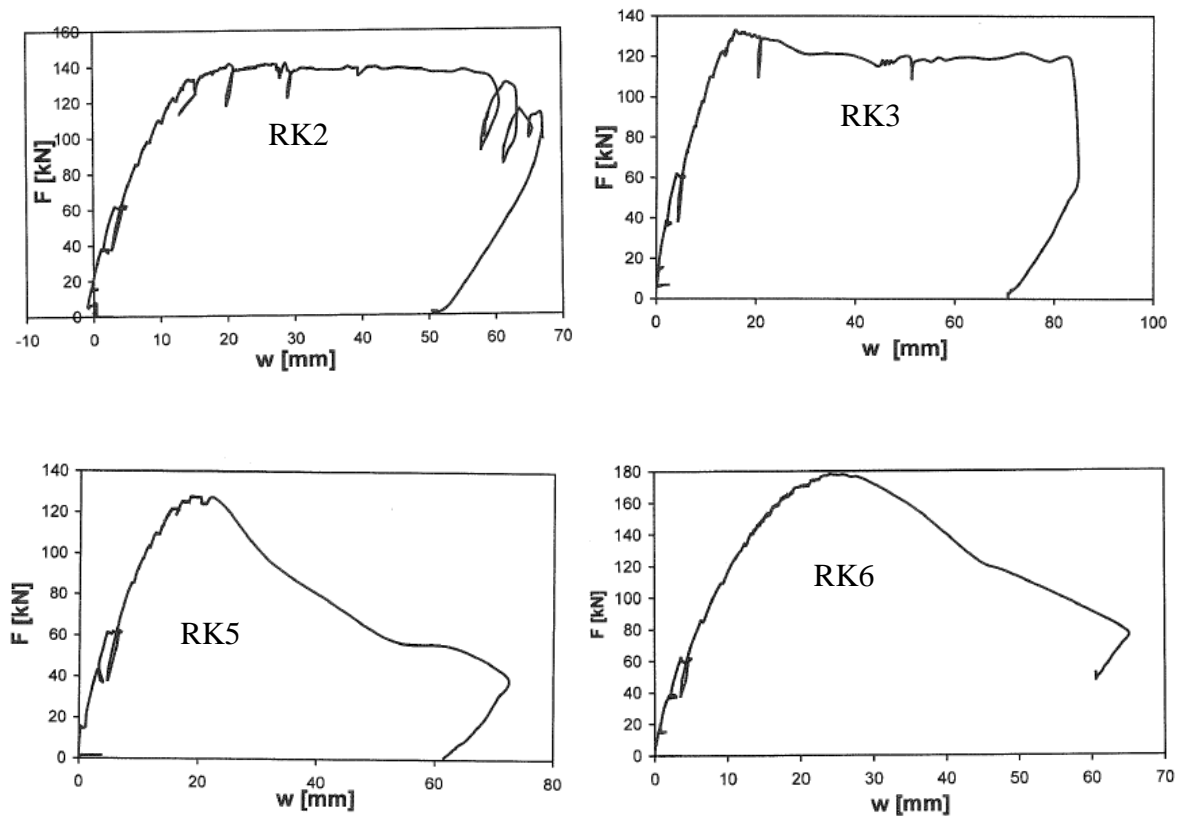


Figura 45: diagramas carga-deslocamento experimentais obtidos por Roeser (2002)

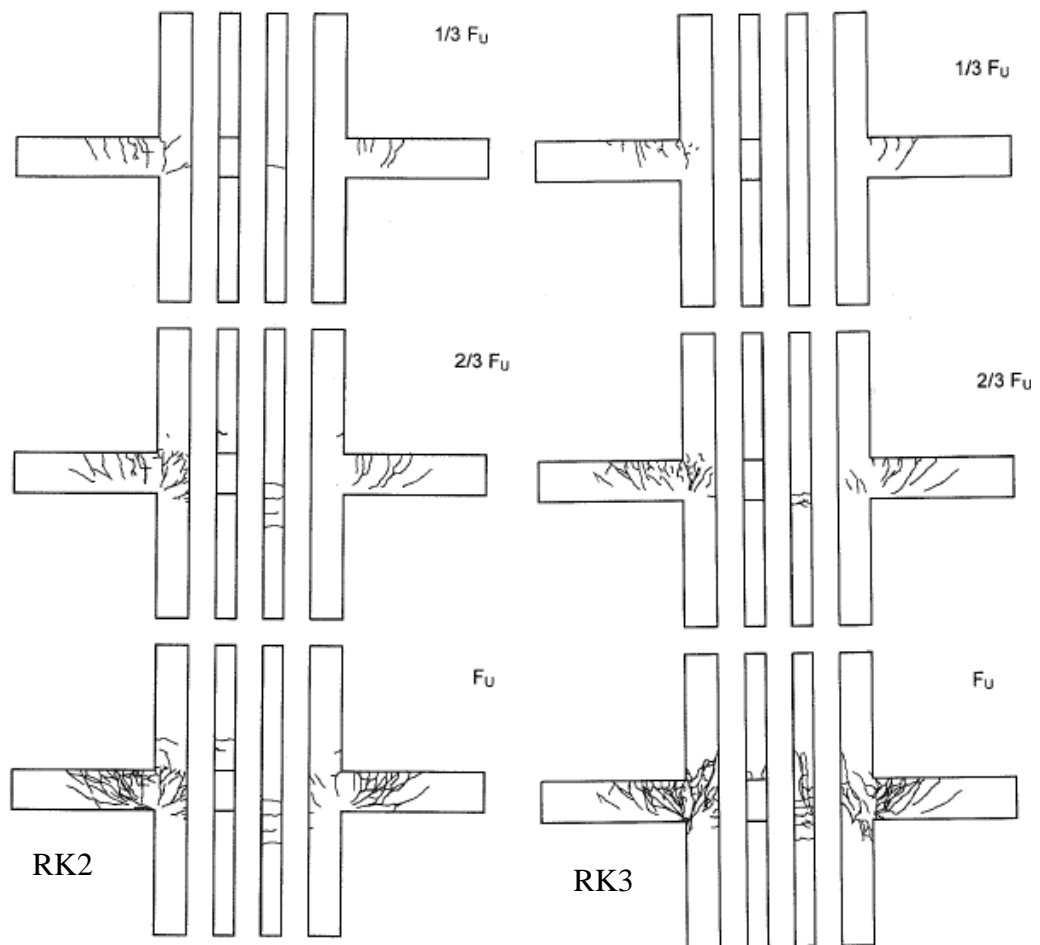


Figura 46: comportamentos de fissuração apresentados por Roeser (2002) – nós RK2 e RK3

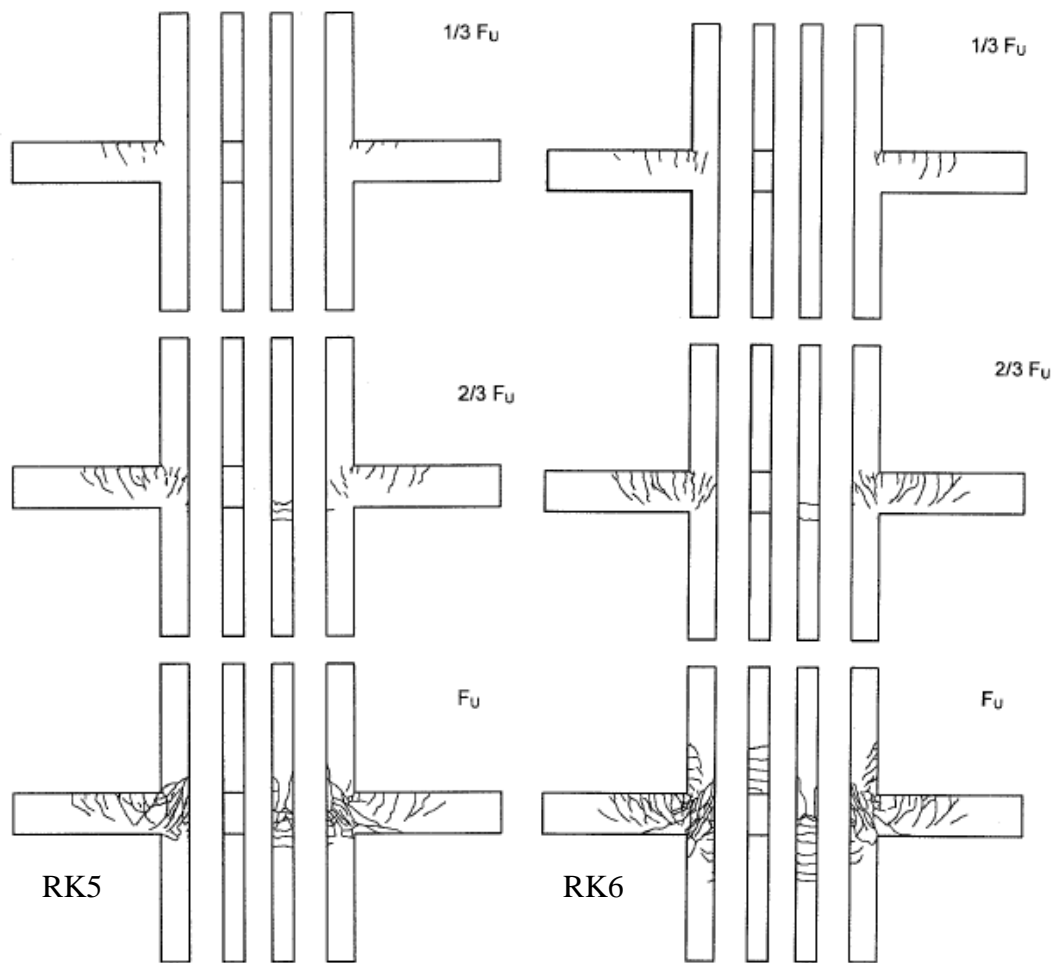


Figura 47: comportamentos de fissuração apresentados por Roeser (2002) – nós RK5 e RK6

### 7.1.2 Resultados numéricos

A modelagem numérica foi realizada utilizando-se duas malhas: uma com elementos quadriláteros quadráticos e outra com elementos triangulares lineares. Em ambas as malhas, a armadura é incorporada e modelada com elementos unidimensionais. As condições de contorno são apresentadas na Figura 48. A relação de refinamento entre a malha de elementos quadrangulares quadráticos e a malha de elementos triangulares lineares é definida no item 4.3 deste trabalho.

Em todos os modelos, inicialmente é aplicada uma carga de 500kN na extremidade superior do pilar. Após esta carga ser aplicada, inicia-se a aplicação da carga na extremidade da viga. Todas as cargas são aplicadas através de incrementos de deslocamentos que variam entre 50 e

60 incrementos. A seguir são comparados resultados de tensões no concreto e na armadura, diagramas de carga-deslocamento e fissuração. O deslocamento é medido na extremidade inferior direita da viga de cada um dos modelos propostos.

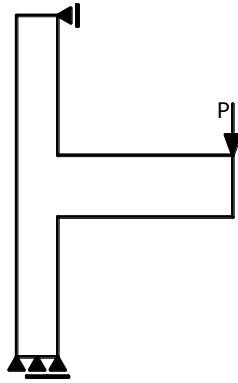


Figura 48: condições de contorno

As figuras apresentadas nos próximos itens comparam etapas de carregamento. Isto é, toma-se sempre o valor de carga última encontrada para cada malha separadamente. Através destes valores de carga última são apresentados as etapas intermediárias de cada resultado, mostrando um comparativo do desenvolvimento dos resultados encontrados

#### 7.1.2.1 MODELO RK2

A geometria e a distribuição de armaduras deste nó de pórtico podem ser observadas na Figura 43 apresentada acima. As propriedades e resistência dos materiais podem ser analisadas na Tabela 1 e na Tabela 2.

Na Figura 49 são apresentadas as curvas carga-deslocamento para as malhas de elementos finitos. Os resultados obtidos pela análise computacional, para elementos finitos quadrangulares e triangulares, ficaram próximos à resposta carga-deslocamento experimental.

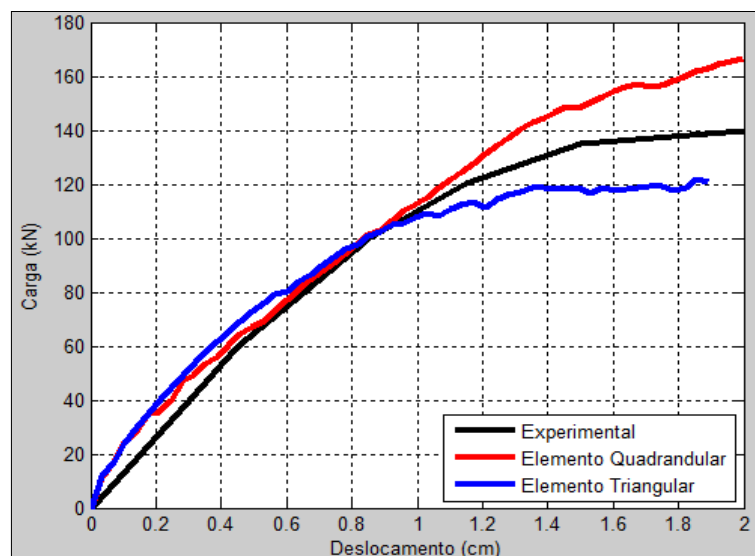


Figura 49: diagrama carga-deslocamento - modelo RK2

Na Figura 50, a rotação obtida nos resultados numéricos é avaliada através do percentual do momento último atingido pela estrutura. Esta rotação é calculada, em radianos, utilizando-se o método apresentado na Figura 44 e lá descrito. Na Figura 50 verifica-se que, a partir de aproximadamente 30% de  $M_u$ , o giro relativo entre os eixos da viga e do pilar passa a ser significativo. Este giro relativo vai se acentuando a medida que aumenta a fissuração da região nodal. As duas retas encontradas na Figura 50 mostram como seria o desenvolvimento da rotação do pilar e da viga, separadamente, se a ligação fosse considerada rígida. Ou seja, se na ligação da viga com o pilar fossem apenas consideradas as deformações elásticas dos materiais. Nestes gráficos verifica-se a perda de rigidez da região do nó quando o modelo numérico apresentado neste trabalho simula a ligação viga-pilar.

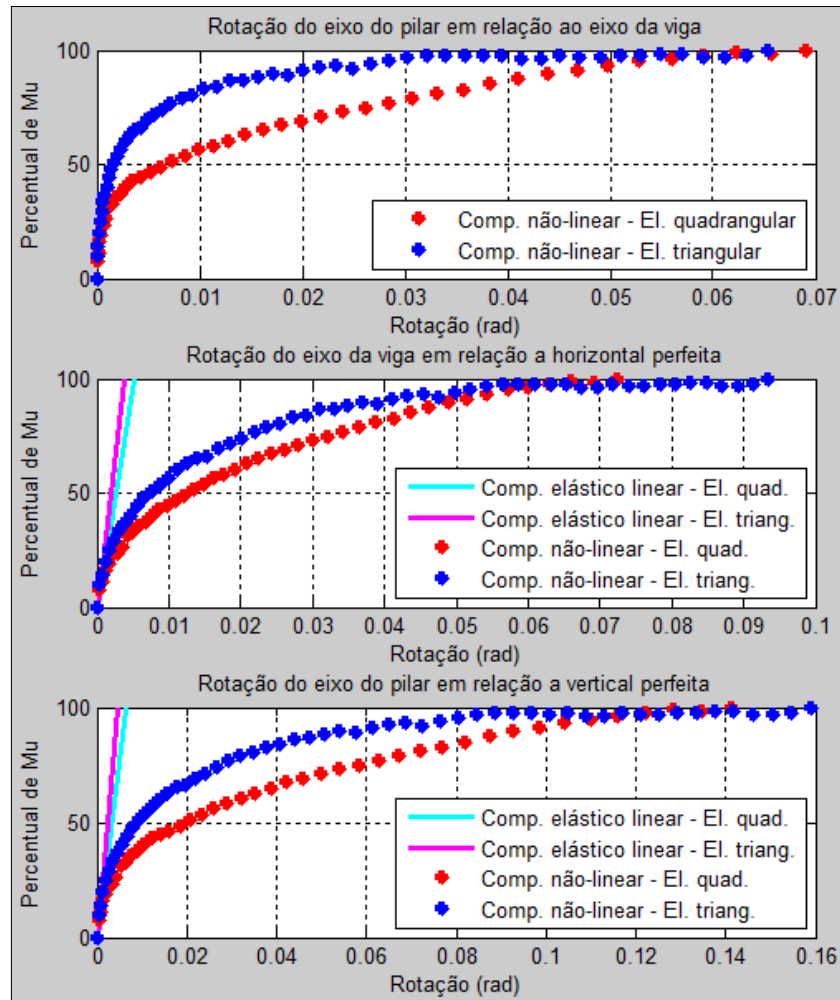


Figura 50: diagrama momento-rotação - modelo RK2

A Figura 51 e a Figura 52 apresentam distribuições de tensões normais na região nodal para diferentes níveis de carga. Nos elementos quadrangulares as tensões, obtidas nos pontos de Gauss, são extrapoladas para os nós do elemento finito. Essa extrapolação, que é calculada com equações quadráticas, pode gerar tensões muito elevadas nas extremidades do elemento, devido à grande variação de tensões entre pontos de Gauss de um mesmo elemento. Para o caso dos elementos triangulares possuem apenas um ponto de Gauss e suas equações de tensões são constantes em cada elemento. Essas variações nos graus das equações fazem com que as tensões geradas em cada malha apresentem diferenças nos locais onde as tensões sofrem maior variação.

A distribuição das tensões na direção  $y$  fica prejudicada pela carga aplicada na extremidade da viga. Essa carga é aplicada de forma concentrada em apenas um nó do elemento. Portanto, novamente, o problema surge na extrapolação de tensões da malha quadrangular.

O elemento triangular não apresenta problemas quanto à concentração de tensões no local da carga. Isto porque, este modelo de malha possui apenas um ponto de Gauss para cada elemento e a formulação numérica do modelo reduz as tensões quando o nó é esmagado.

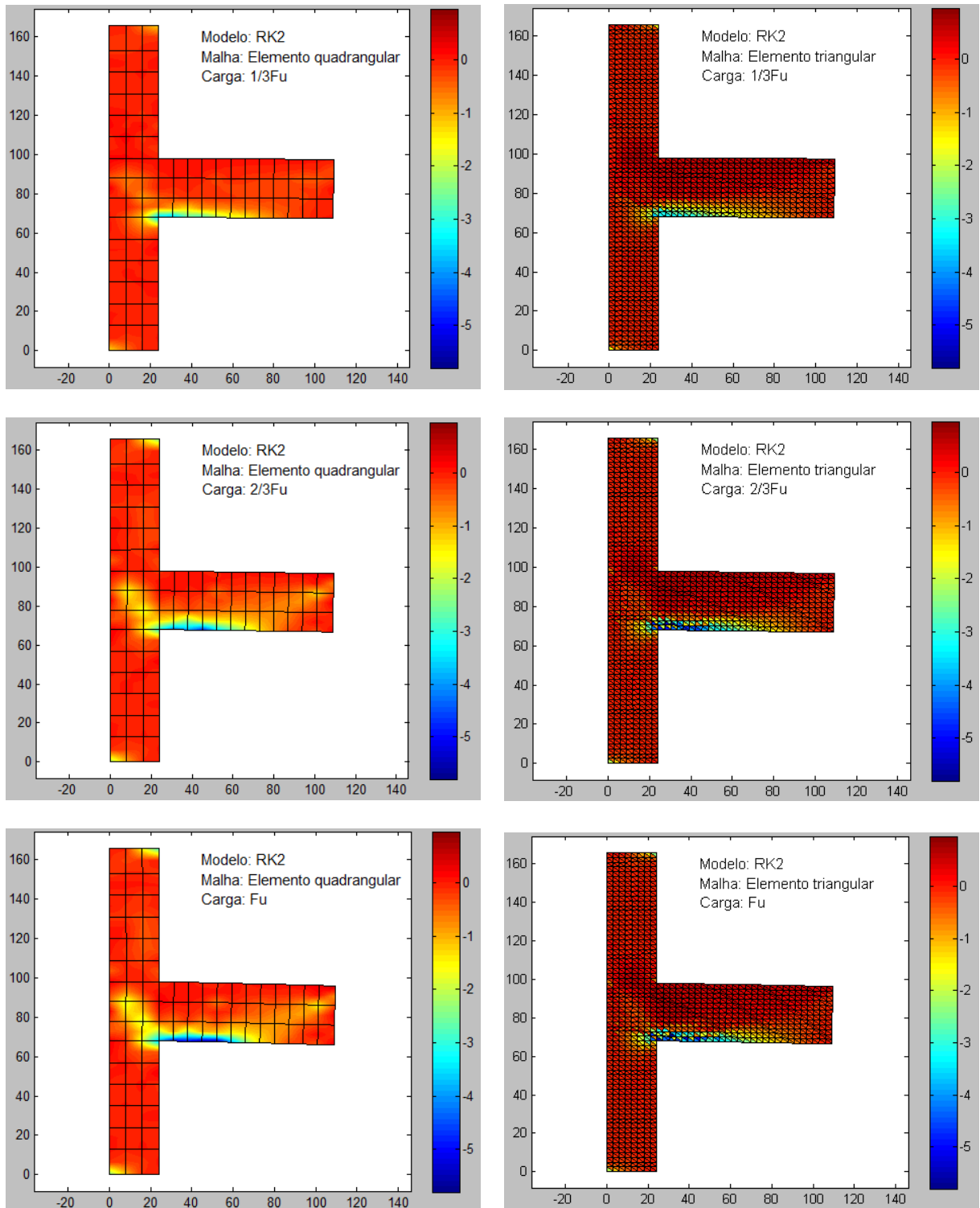


Figura 51: tensões no concreto  $\sigma_x$  ( $\text{kN/cm}^2$ ) – modelo RK2

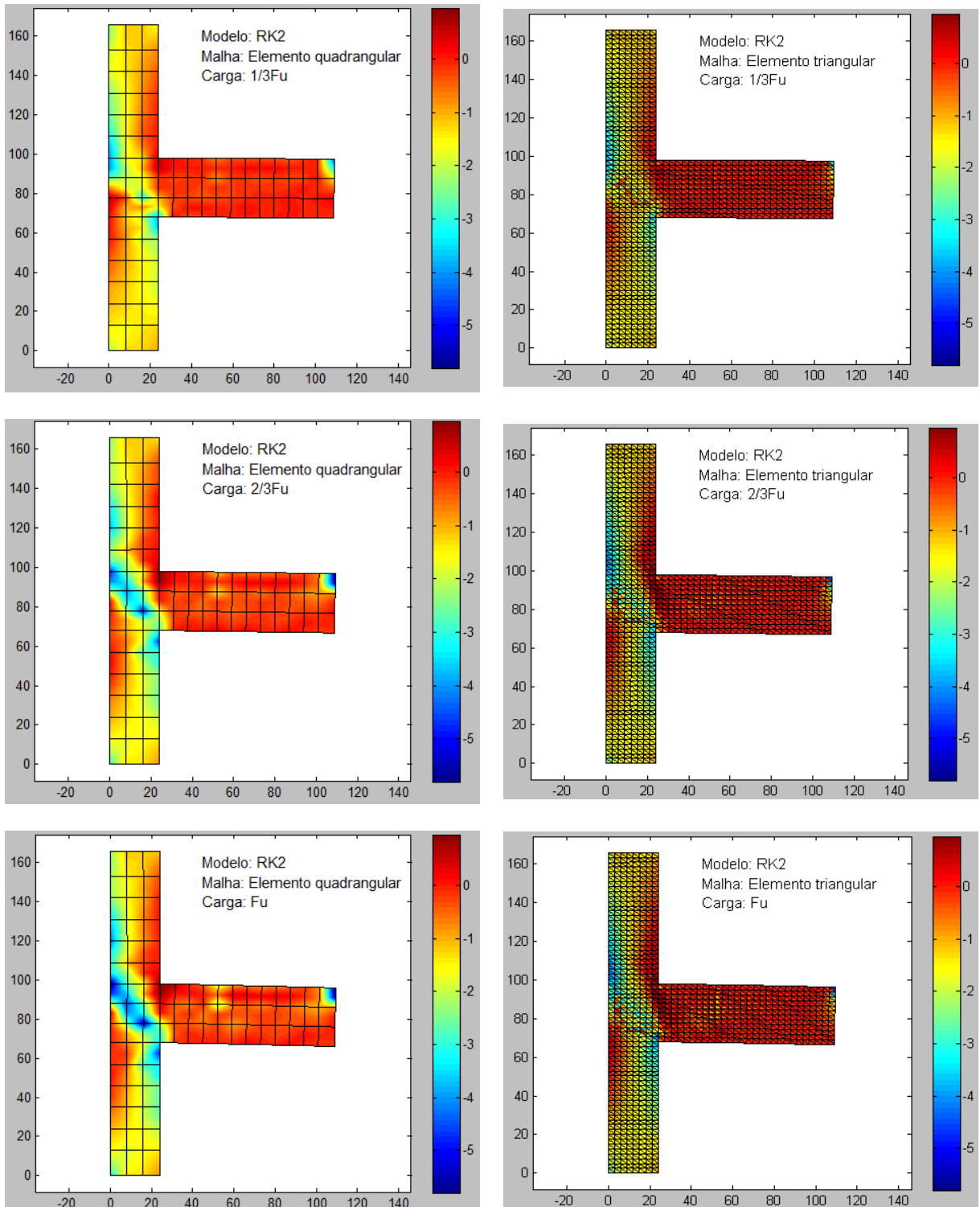


Figura 52: tensões no concreto  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo RK2



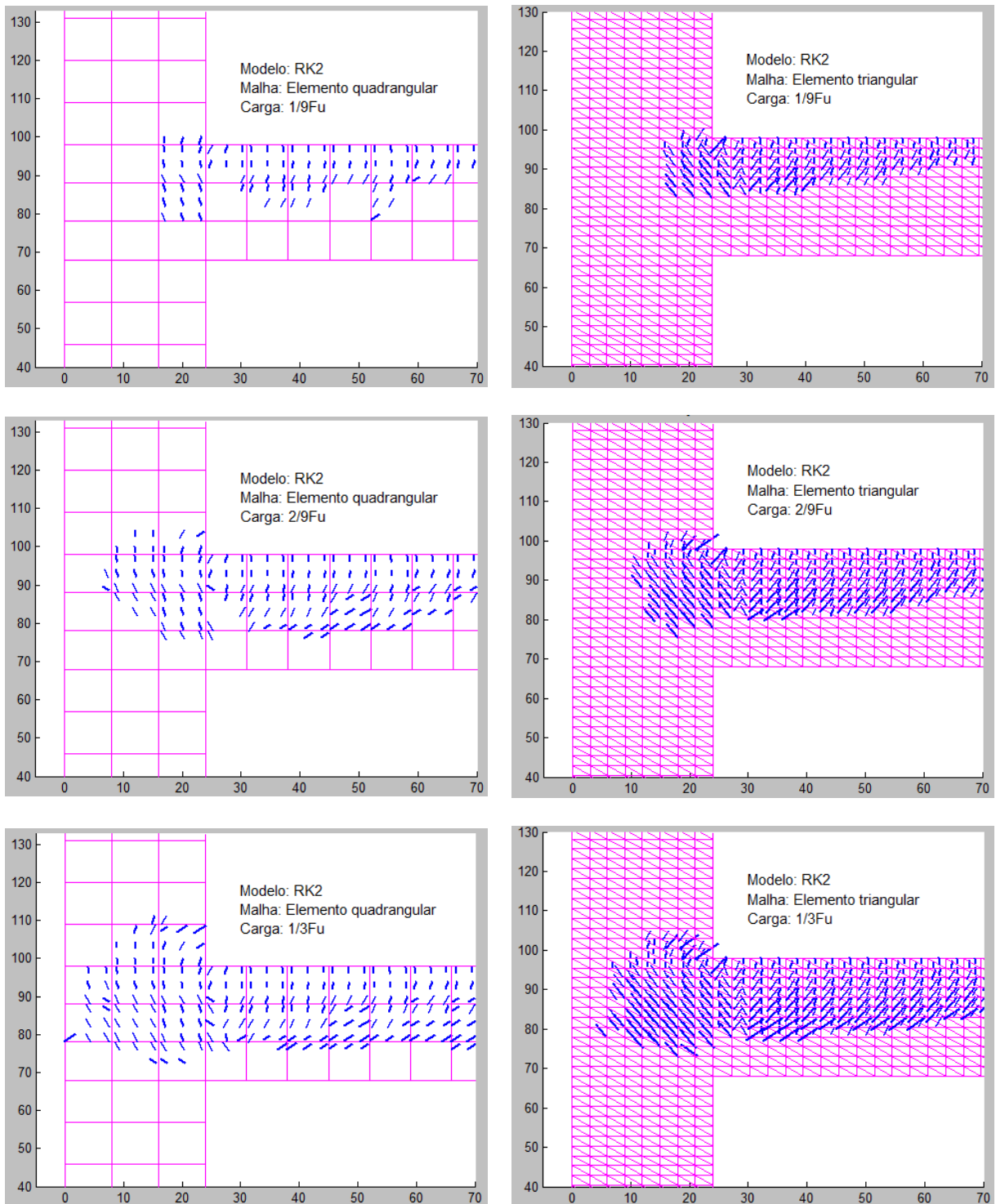


Figura 53: distribuição das fissuras – modelo RK2

Observou-se que a formação de fissuras no nó ocorre fundamentalmente no primeiro terço de carregamento. Por este motivo são apresentadas as imagens das fissuras dos pontos de Gauss para  $1/9 F_u$ ,  $2/9 F_u$  e  $1/3 F_u$ . Nestas etapas do carregamento pode-se verificar uma grande evo-

lução do número de pontos de Gauss que passam a ter estados de tensão que levam à fissuração do concreto.

Representa-se com um traço a direção da abertura das fissuras em cada ponto de Gauss de cada elemento. A malha de elementos triangulares possui um ponto de Gauss para cada elemento. Como são utilizados muitos elementos na malha triangular, a representação gráfica fica com muita informação, tornando-a confusa e de difícil compreensão do comportamento da abertura dessas fissuras. Por esse motivo, as figuras mostram ampliadamente apenas a região do nó na ligação viga-pilar.

A partir do momento em que o concreto não possui mais capacidade de suportar esforços de tração (concreto fissurado), as tensões de tração passam a ser suportadas apenas pelas barras de armadura presentes nessa região. As figuras apresentadas acima ilustram a distribuição destas tensões.

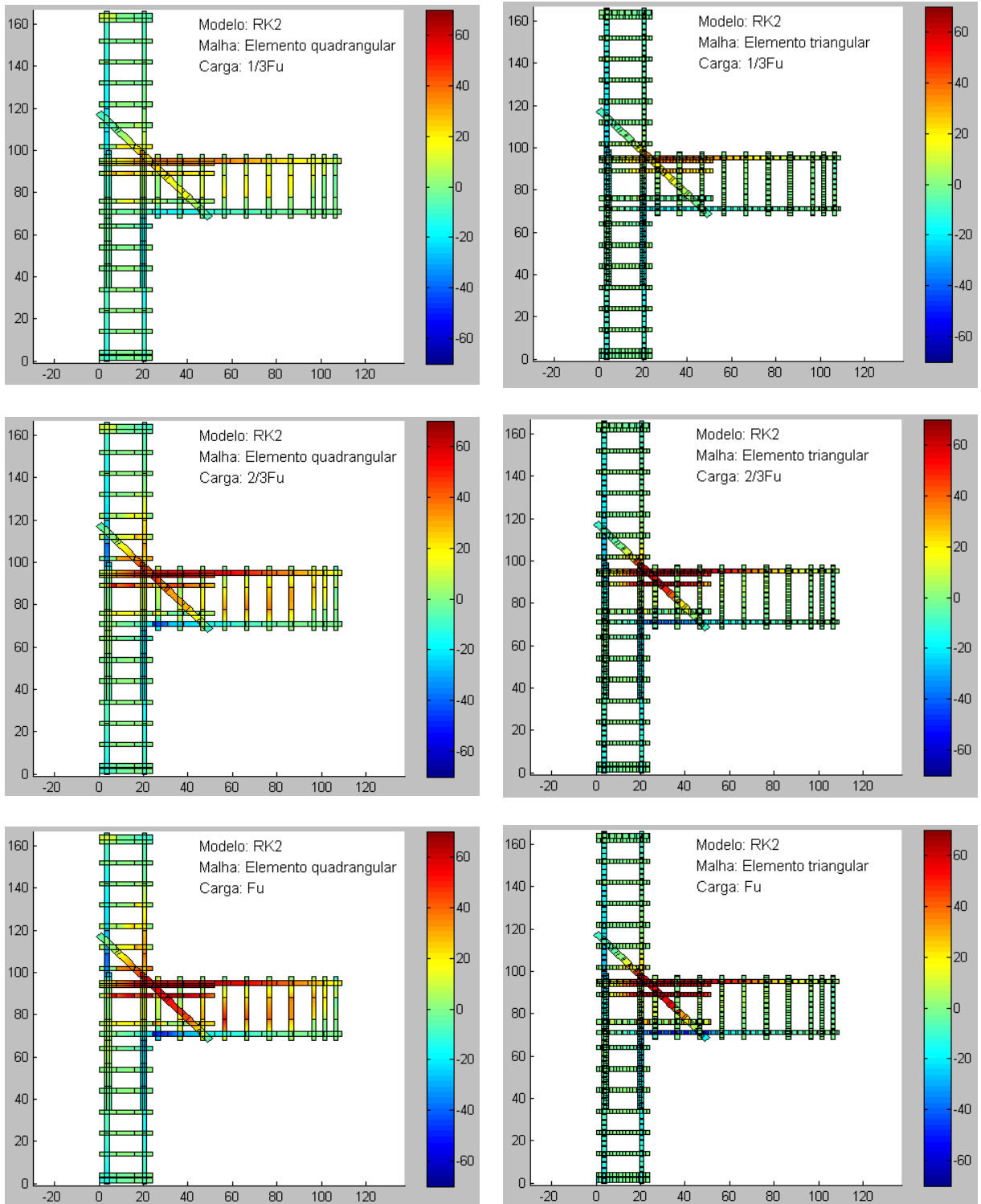


Figura 54: tensões axiais na armadura ( $\text{kN/cm}^2$ ) – modelo RK2

### 7.1.2.2 MODELO RK3

O modelo RK3 ensaiado por Roeser (2002) tem geometria muito semelhante à geometria do modelo RK2. As principais diferenças estão nas armaduras distribuídas na região nodal, onde a armadura que aparecia na diagonal entre a viga e o pilar no modelo RK2 não é mais utilizada e as armaduras dessa região passam a ser posicionadas apenas na vertical e na horizontal. O modelo experimental possui armaduras dobradas em forma de “U” que são colocadas na horizontal na região do nó. O modelo numérico adotado neste trabalho as representa como duas barras horizontais posicionadas uma sobre a outra na modelagem em duas dimensões.

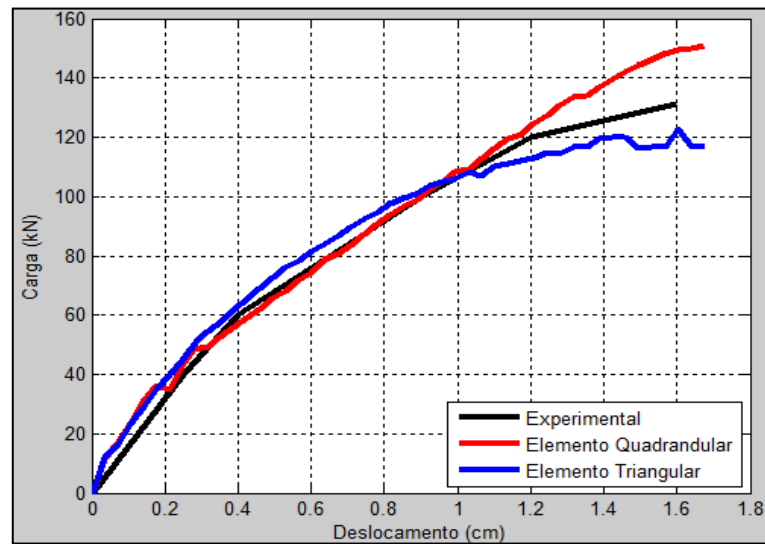


Figura 55: diagramas carga-deslocamento - modelo RK3

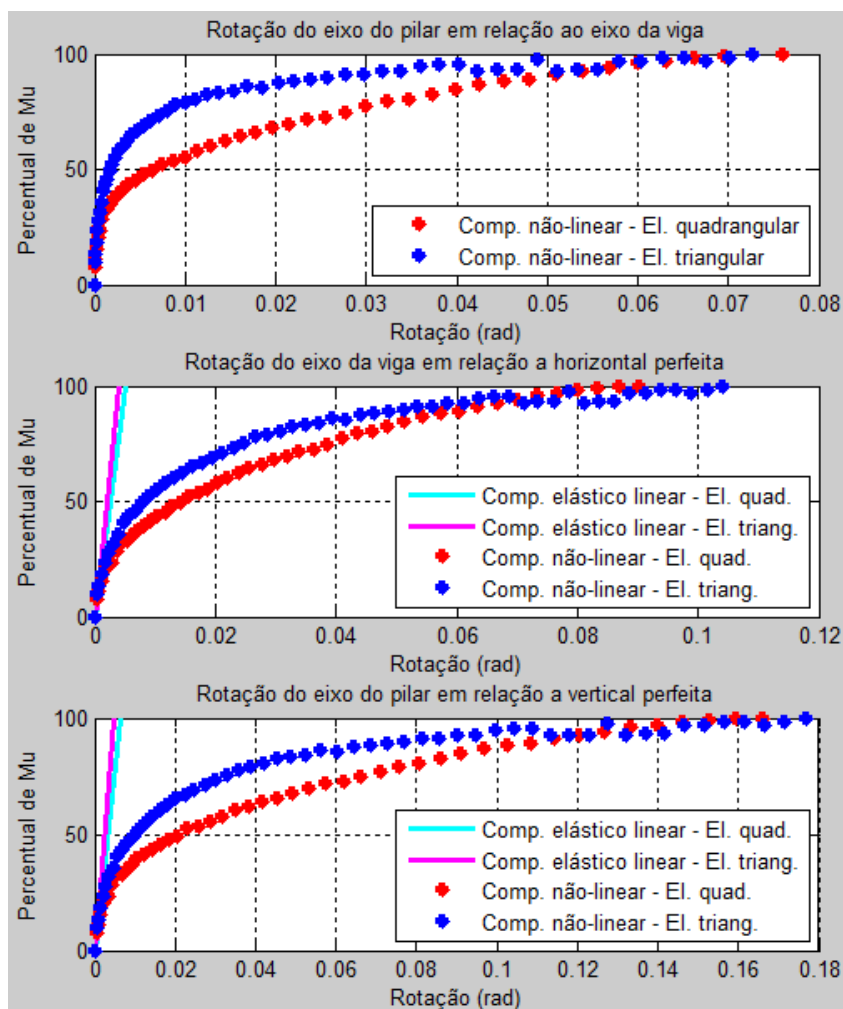


Figura 56: diagrama momento-rotação - modelo RK3

O comportamento apresentado nos gráficos de carga-deslocamento e momento-rotação é muito semelhante ao comportamento apresentado para o modelo RK2 de nó de pórtico. A malha de elementos triangulares simula uma estrutura menos rígida, assim como no modelo RK2. A Figura 56 mostra o desenvolvimento do giro dos eixos do pilar e da viga a medida que a carga é aplicada sobre o nós de pórtico. No primeiro gráfico desta figura é apresentada a rotação relativa entre estes eixos. Nos outros gráficos são apresentadas as rotações de cada um dos eixos, do pilar e da viga, em relação a um eixo vertical perfeito e outro eixo horizontal perfeito.

As figuras apresentadas abaixo mostram a distribuição das tensões totais no concreto para cargas relativas de  $1/3F_u$ ,  $2/3F_u$  e  $F_u$ . Essas imagens representam de forma satisfatória a forma como as tensões se concentram a cada incremento de carga aplicada na extremidade da viga (Figura 57 e Figura 58). Pode-se observar que ambas as malhas de elementos finitos apresen-

tam resultados semelhantes. As principais diferenças nas tensões totais iniciam-se quando a carga de ruptura se aproxima.

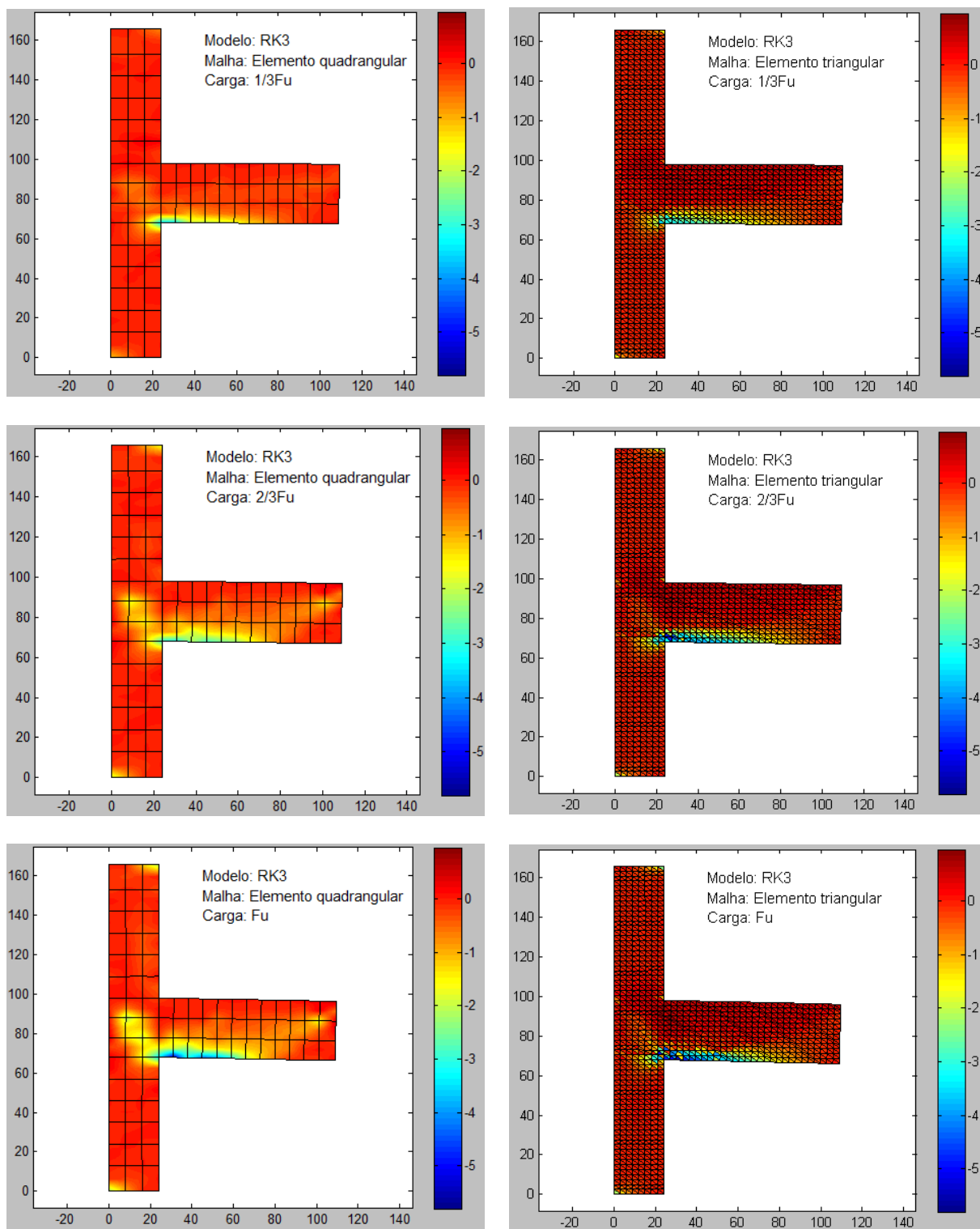


Figura 57: tensões no concreto  $\sigma_x$  (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo RK3

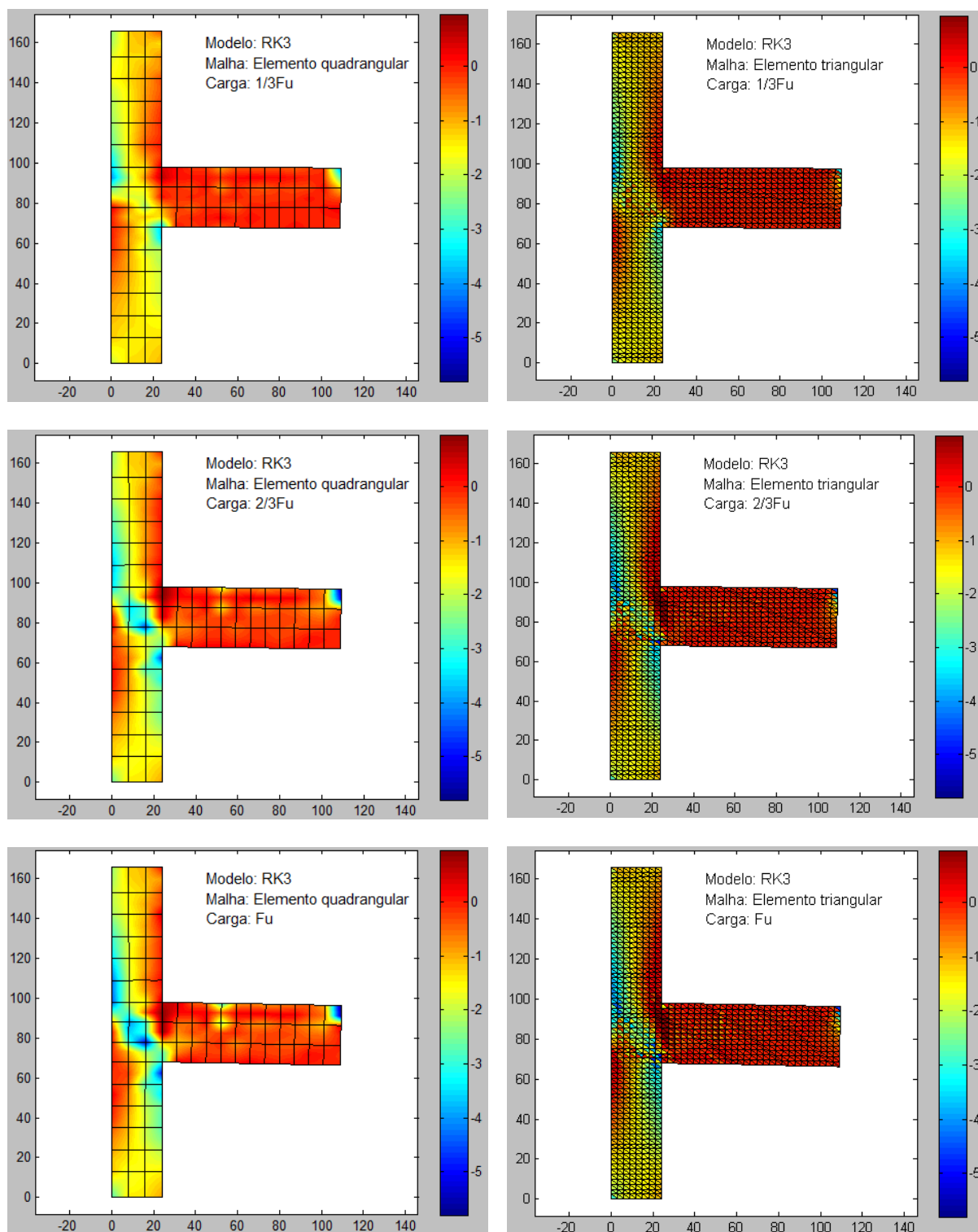


Figura 58: tensões no concreto  $\sigma_y$  ( $\text{kN/cm}^2$ ) – modelo RK3

A região do nó é apresentada em destaque nas figuras de fissuração apresentadas abaixo. Essa imagem aproximada foi obtida para melhor visualização da distribuição de fissuras.

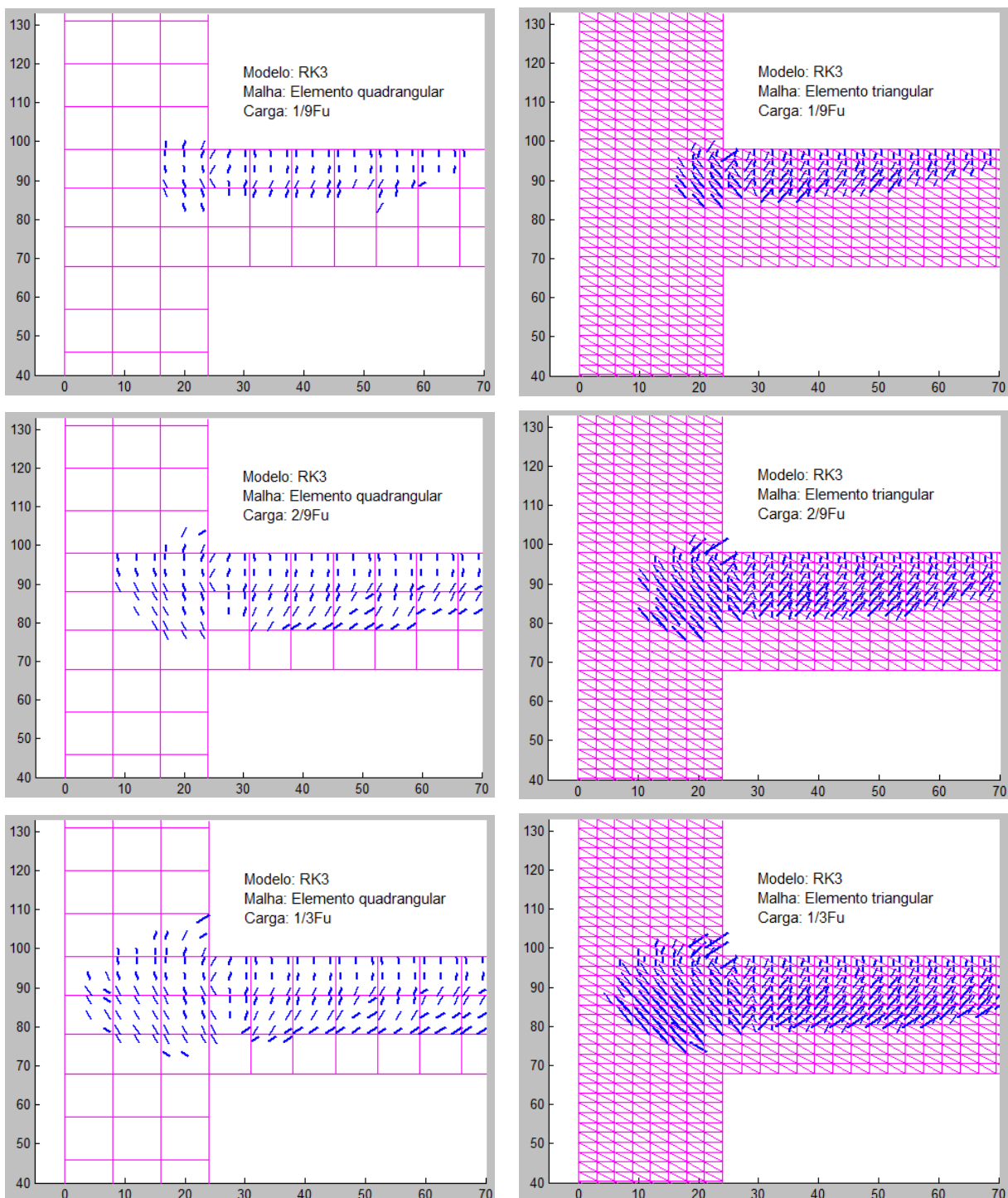


Figura 59: distribuição das fissuras – modelo RK3

Na Figura 60 são apresentadas as tensões axiais totais nas barras de armadura.



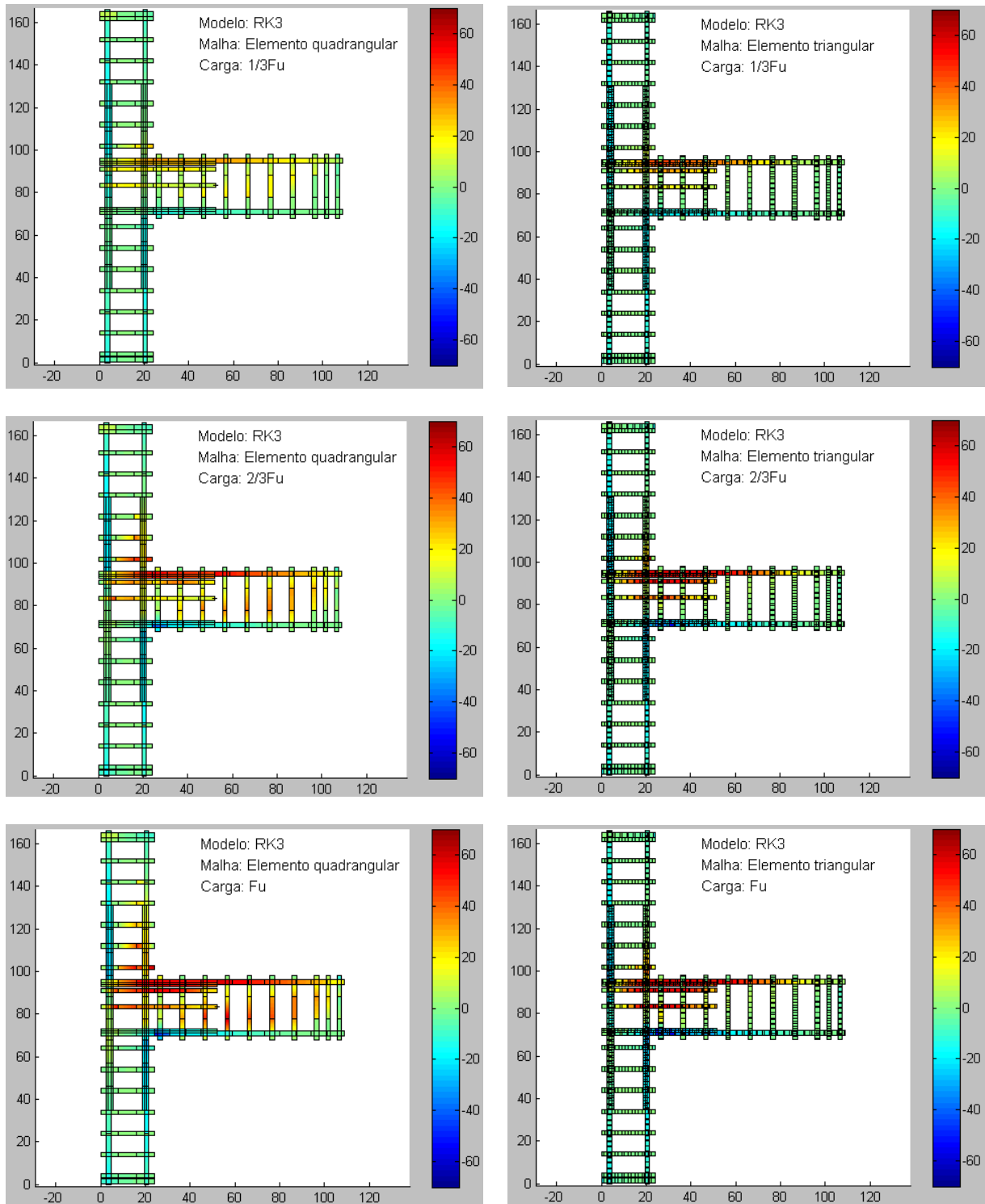


Figura 60: tensões axiais na armadura (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo RK3

### 7.1.2.3 MODELO RK5

O modelo RK5 possui uma característica diferente dos modelos já apresentados. A largura do pilar passa de 24cm para 20cm neste modelo. No entanto, a distribuição das armaduras tem geometria muito semelhante ao modelo RK3.

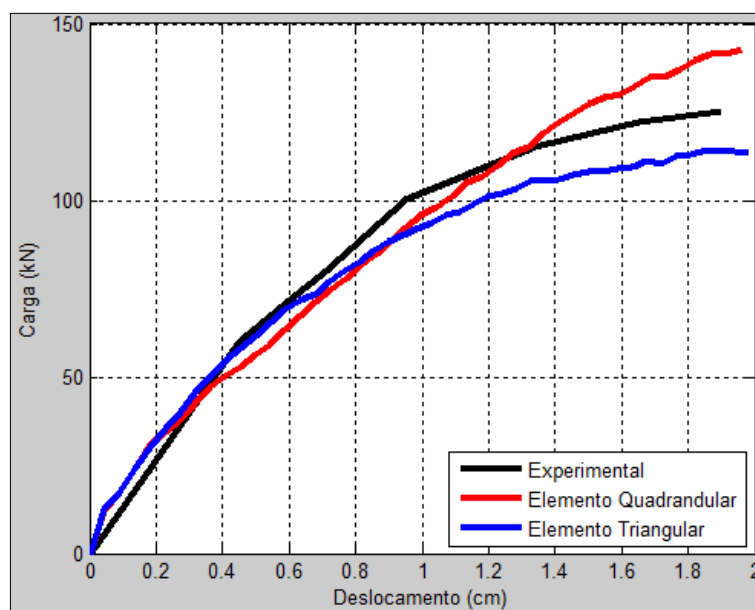


Figura 61: diagramas carga - modelo RK5

Mesmo com a modificação na largura do pilar, este modelo estrutural não apresenta grandes modificações de comportamento nas curvas de carga-deslocamento e momento-rotação quando comparadas aos modelos RK2 e RK3.

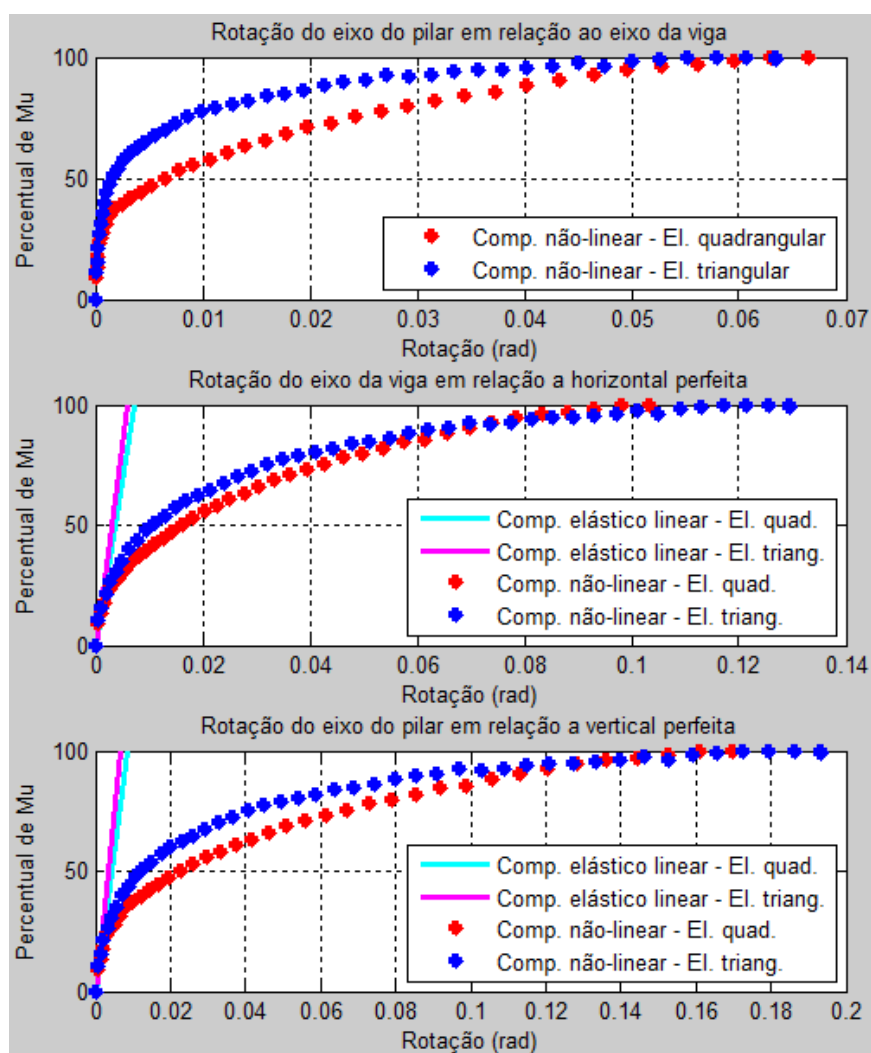


Figura 62: diagrama momento-rotação - modelo RK5

As figuras abaixo apresentam distribuição de tensões totais no concreto (nas direções x e y) em três diferentes etapas de incremento de carga.

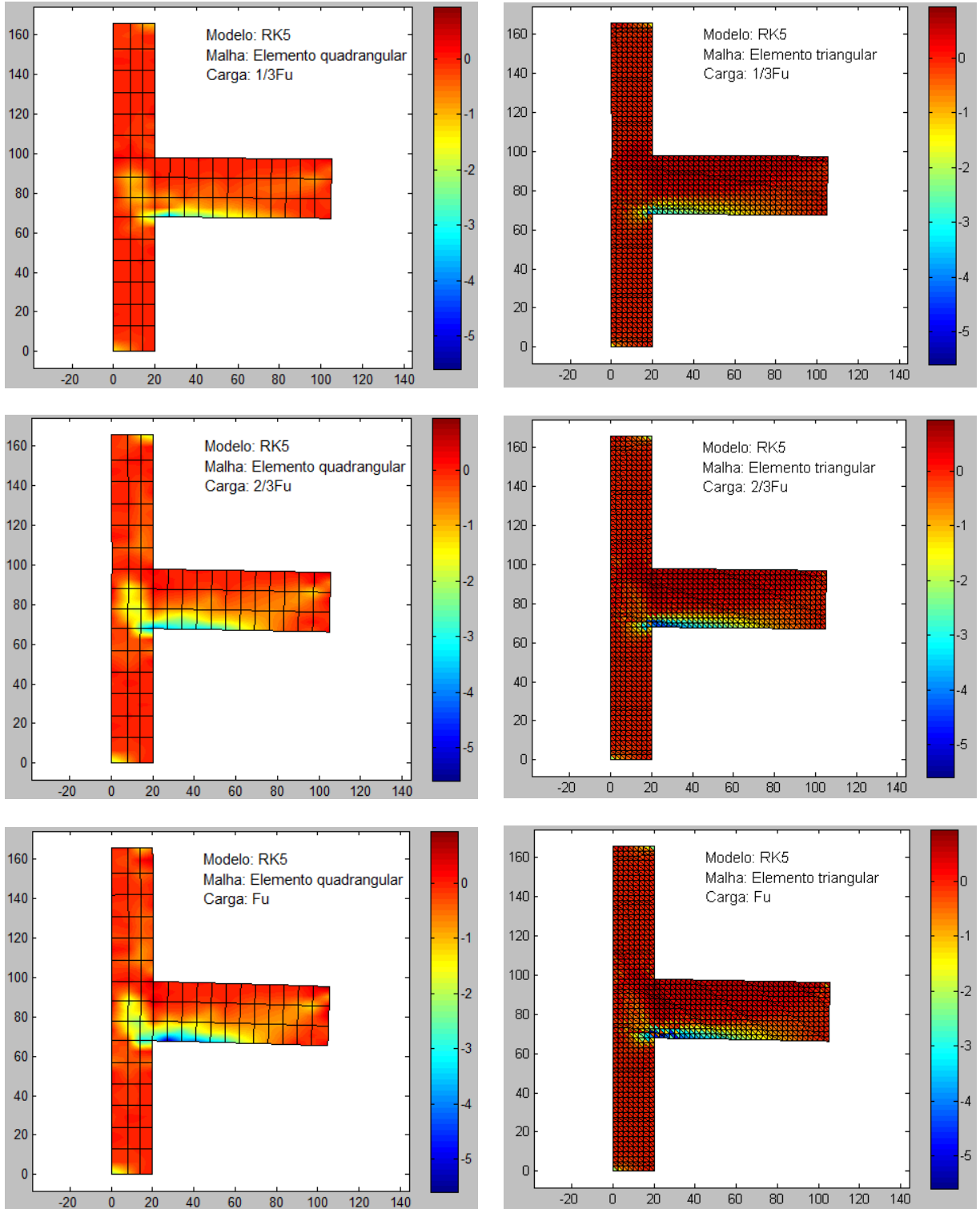


Figura 63: tensões no concreto  $\sigma_x$  ( $\text{kN/cm}^2$ ) – modelo RK5

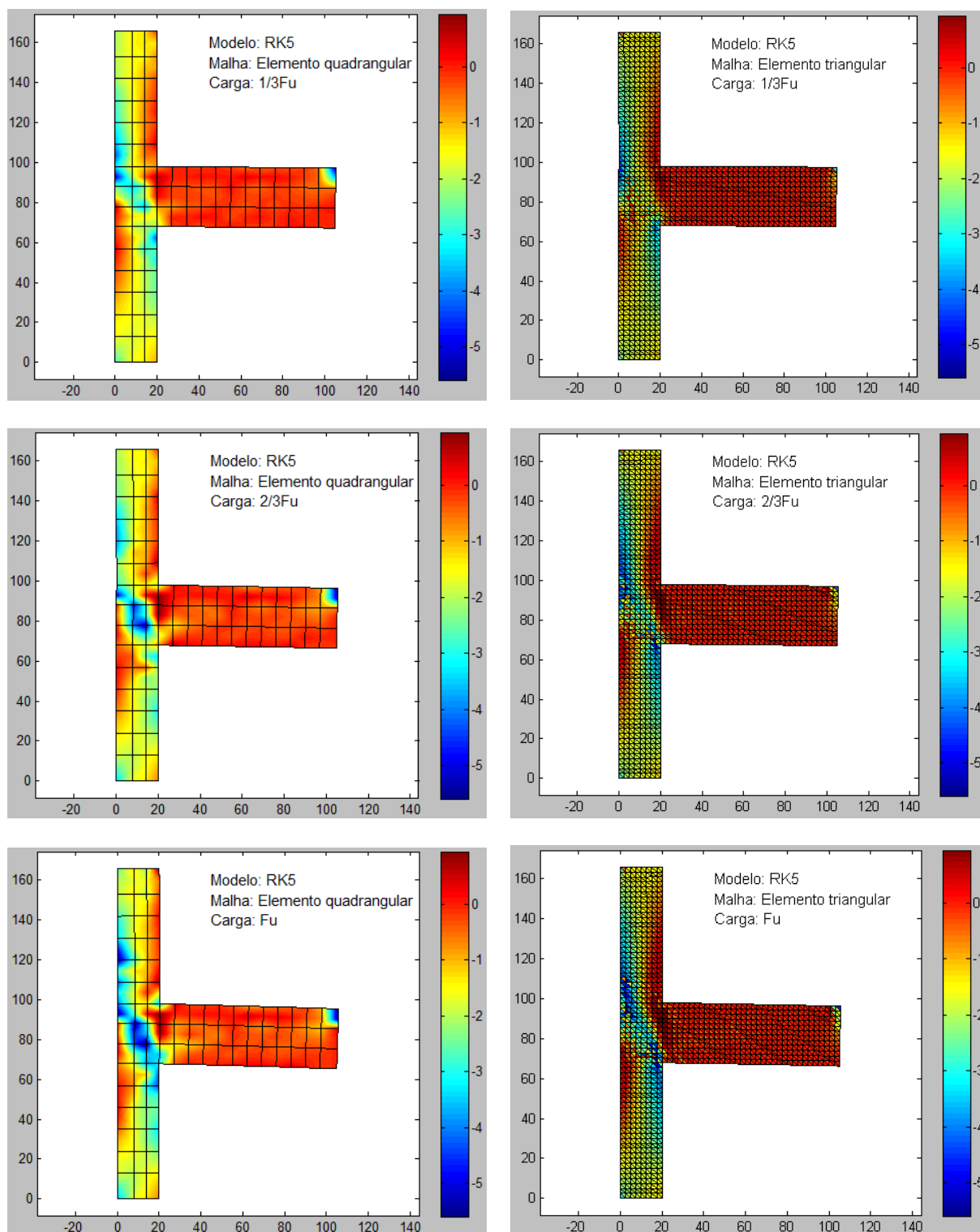


Figura 64: tensões no concreto  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo RK5

Abaixo estão apresentadas as distribuições de fissuras nos pontos de Gauss de cada elemento finito da ligação viga-pilar. São apresentadas três imagens em diferentes incrementos de carga ( $1/9 F_u$ ,  $2/9 F_u$  e  $F_u$ ).

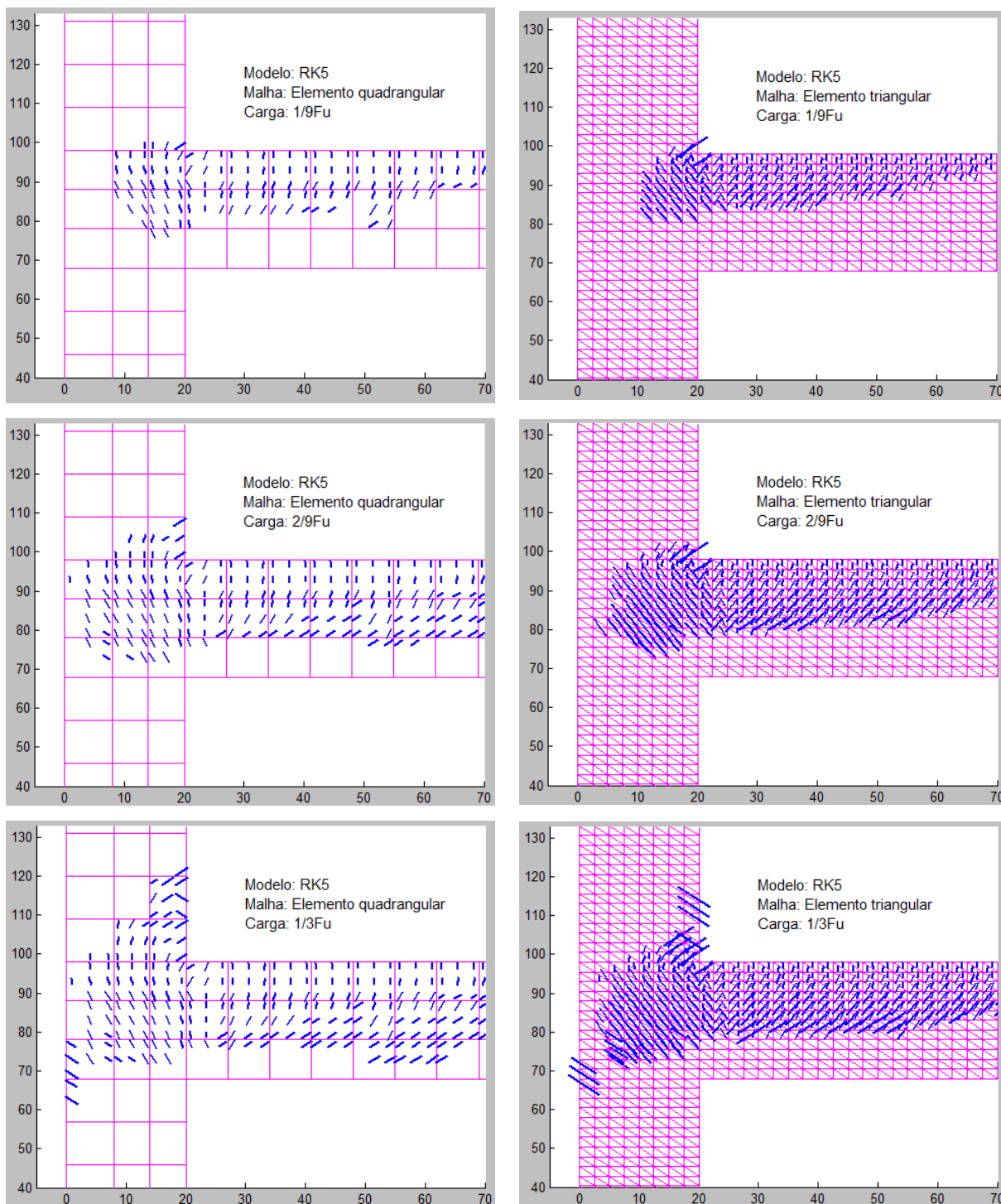


Figura 65: distribuição das fissuras – modelo RK5

Nos locais onde o material está fissurado, o concreto exerce pouca contribuição na resistência do nó. Nestes locais, a armadura é especialmente solicitada como mostram as imagens das figuras abaixo.

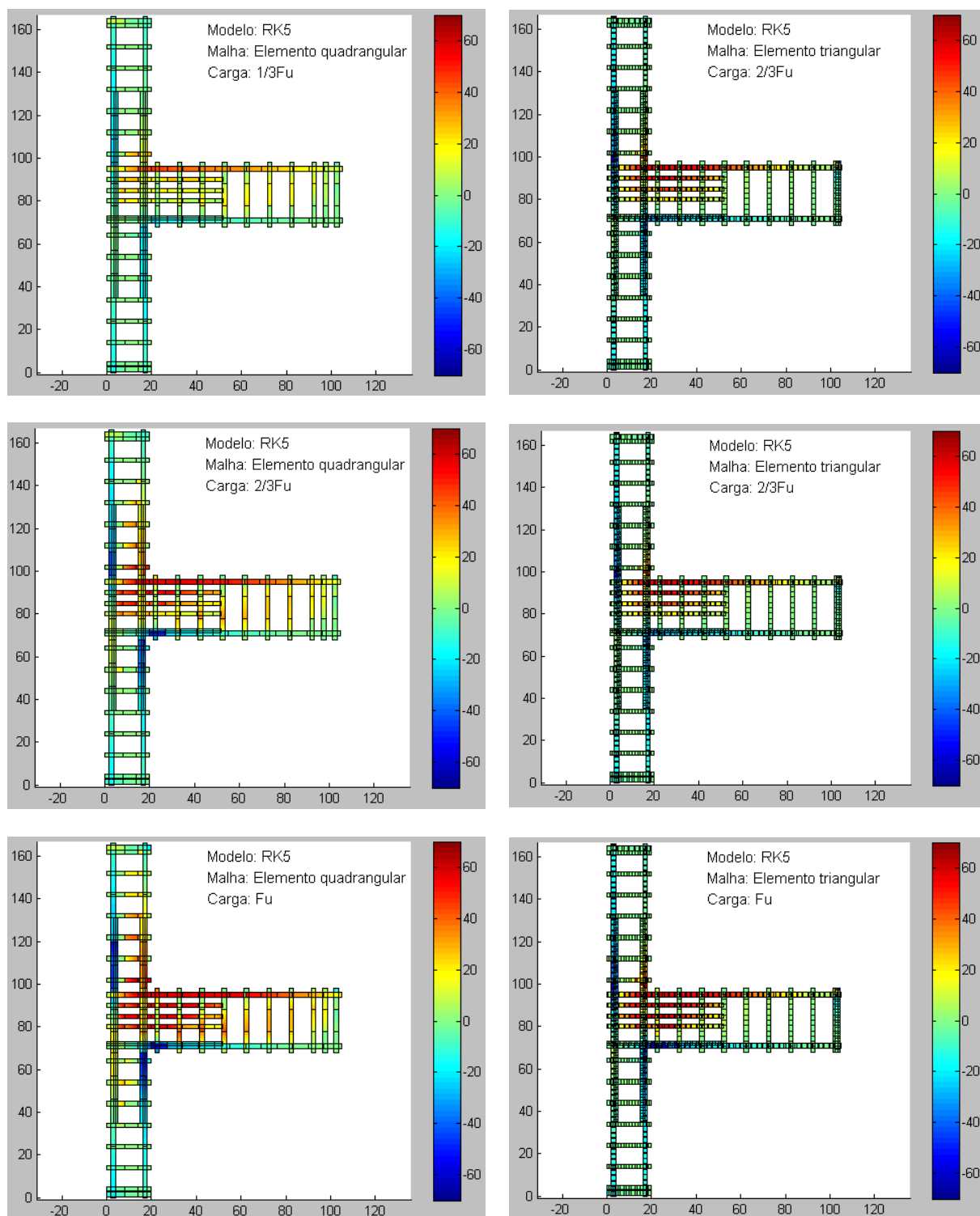


Figura 66: tensões axiais na armadura ( $\text{kN/cm}^2$ ) – modelo RK5

#### 7.1.2.4 MODELO RK6

O modelo RK6 é diferenciado dos demais modelos. Este possui concreto com resistência de 86,5 MPa. No entanto, a geometria e distribuição de armaduras são idênticas ao do modelo RK5. Abaixo estão apresentadas as figuras mostrando a curva de carga-deslocamento e de momento-rotação da estrutura de nó de pórtico.

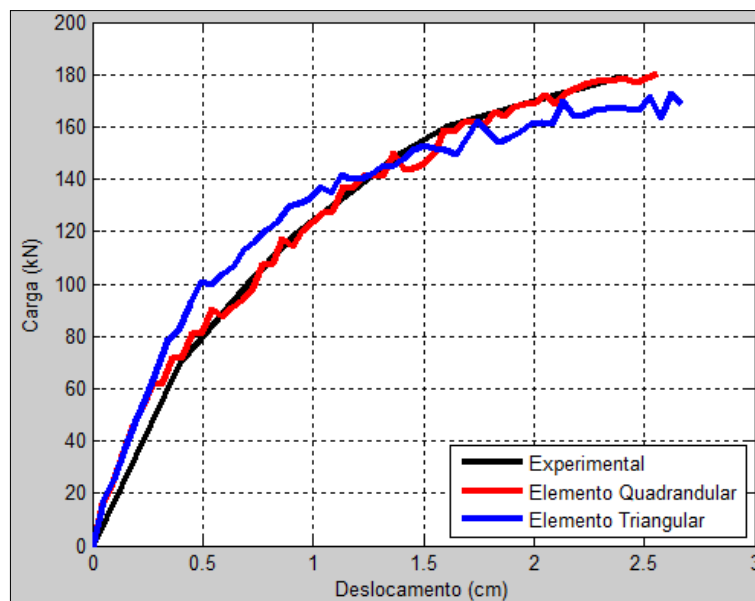


Figura 67: diagramas carga-deslocamento - modelo RK6



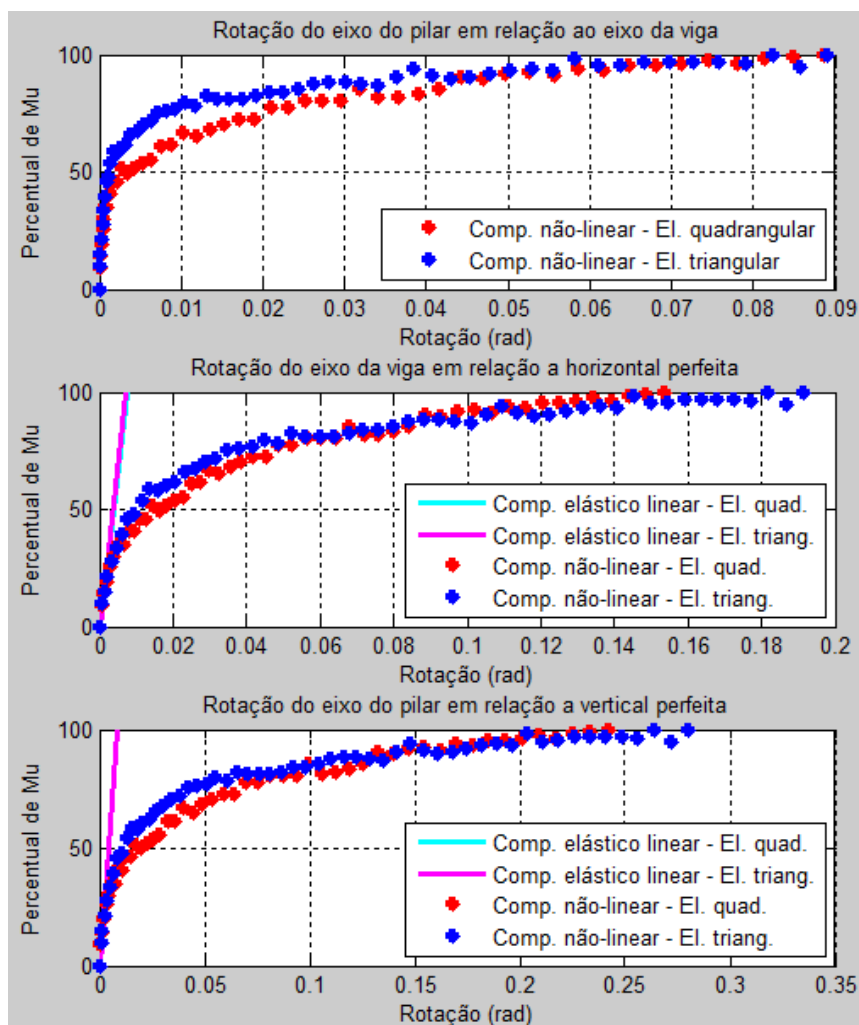


Figura 68: diagrama momento-rotação - modelo RK6

O desenvolvimento das tensões no concreto pode ser acompanhado nas figuras abaixo. Na coluna da esquerda são apresentados resultados para os modelos com malha quadrangular e na direita os modelos com malha triangular. Os resultados são apresentados para três estágios distintos de carregamento: 1/3 carga última, 2/3 carga última e carga última.

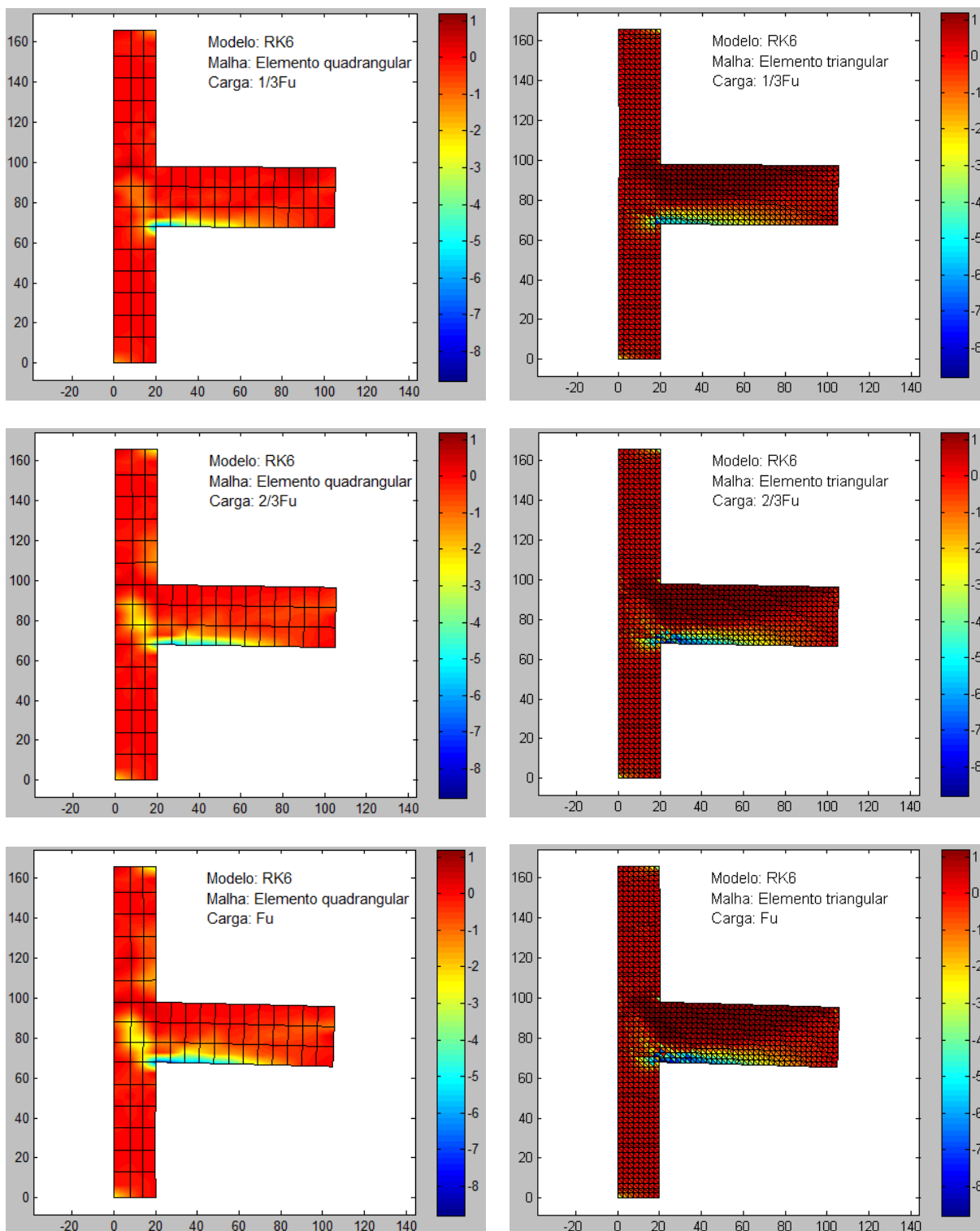


Figura 69: tensões no concreto  $\sigma_x$  (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo RK6

As figuras abaixo apresentam os resultados obtidos para as tensões no concreto na direção do eixo y.

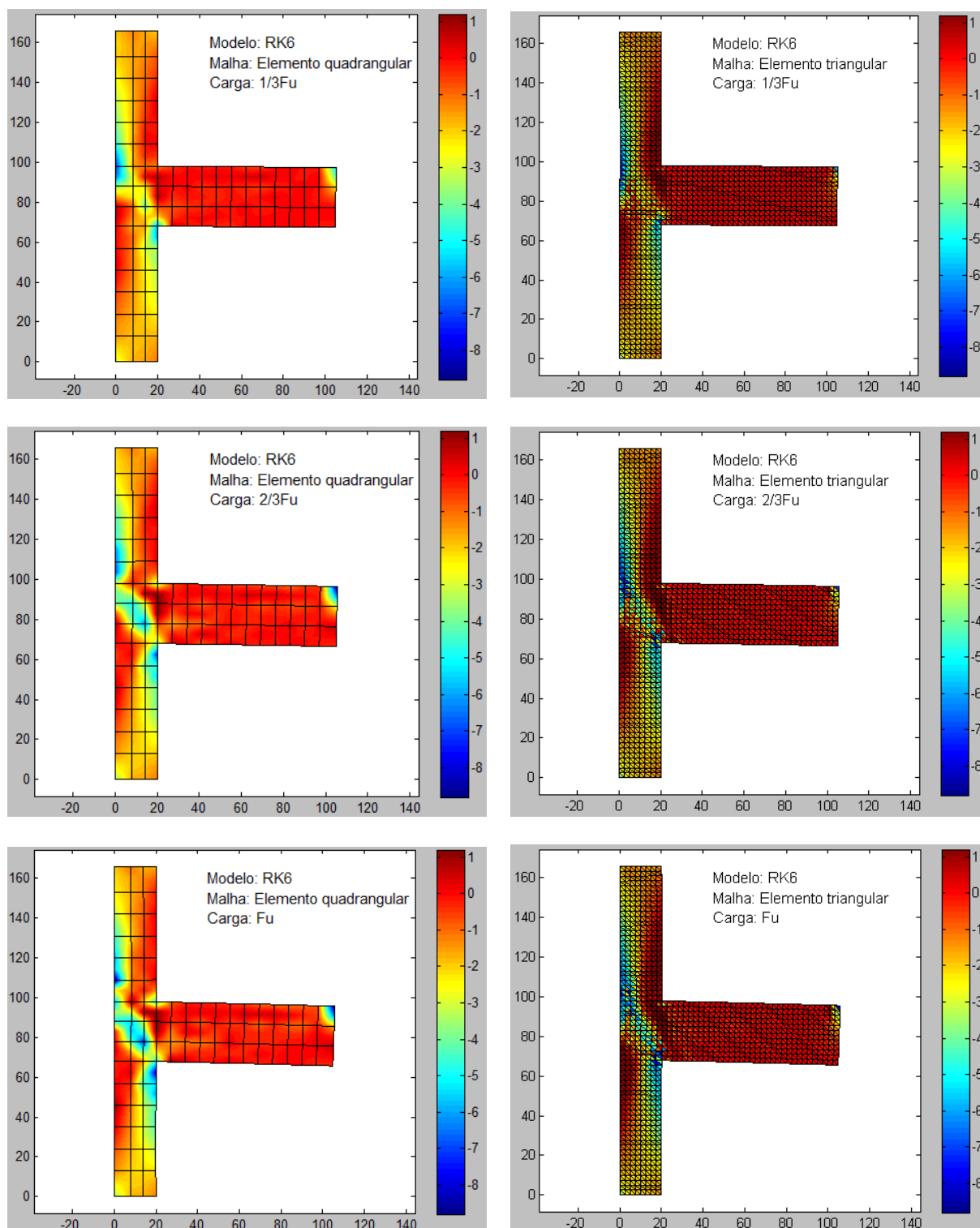


Figura 70: tensões no concreto  $\sigma_y$  (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo RK6

A fissuração no concreto pode ser observada nas figuras abaixo.

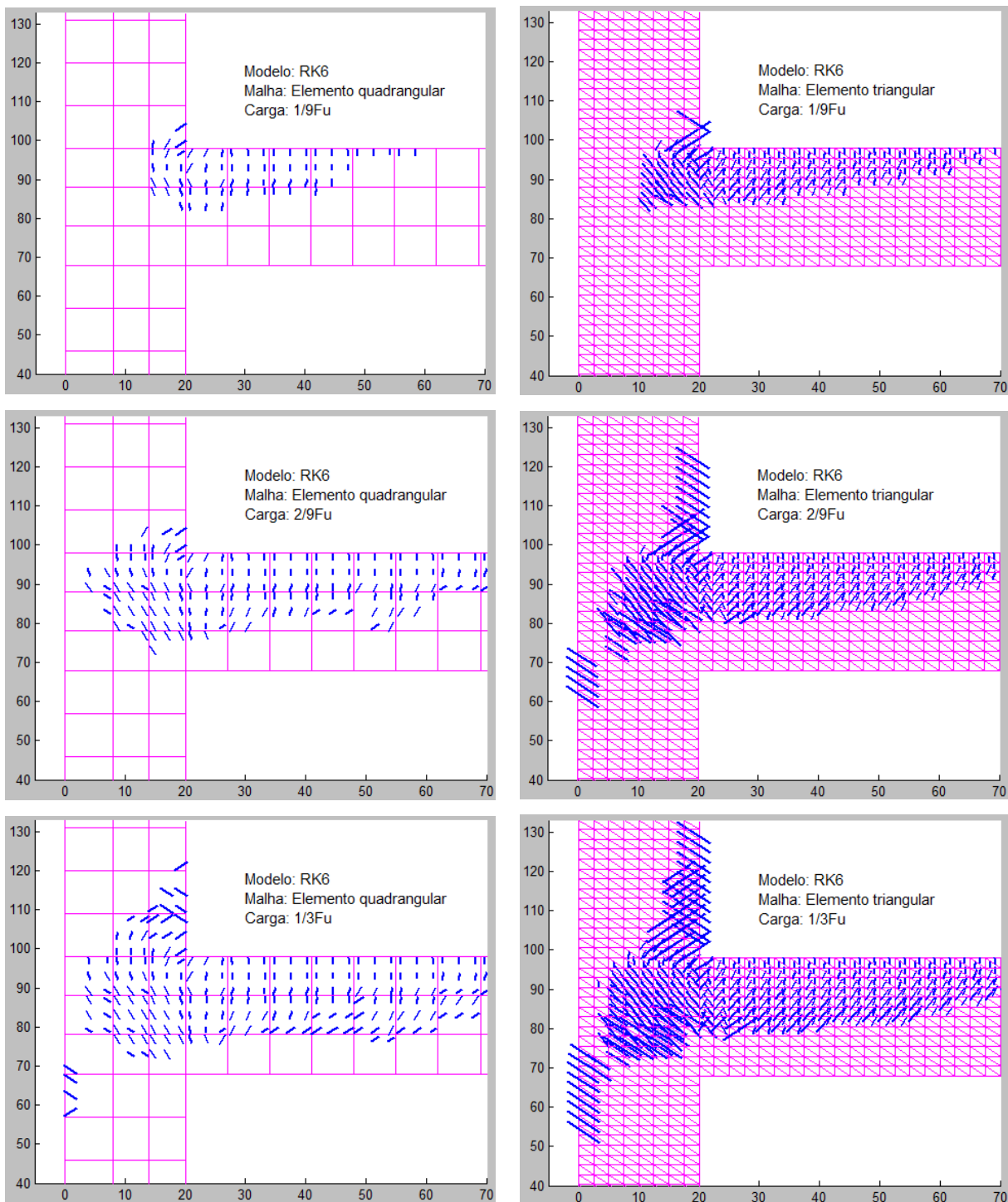


Figura 71: distribuição das fissuras – modelo RK6

Através da fissuração surgem as tensões mais acentuadas nas barras de armadura. As figuras abaixo mostram a evolução destas tensões axiais na armadura da ligação.

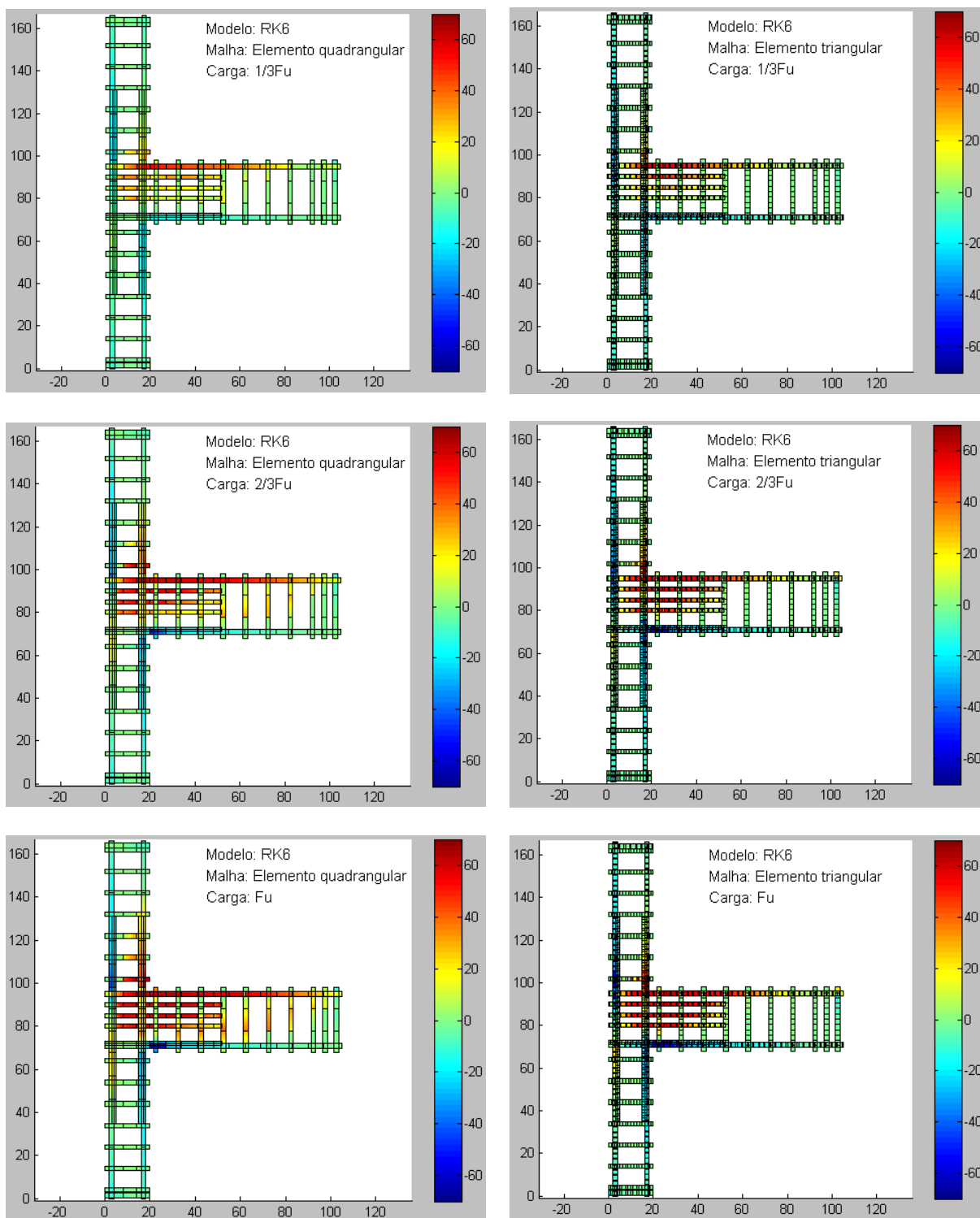


Figura 72: tensões axiais na armadura (kN/cm<sup>2</sup>) – modelo RK6

### 7.1.3 Análise dos resultados

Os itens anteriores apresentaram resultados para diferentes modelos de nós de pórtico. As principais diferenças entre cada um dos quatro modelos são as configurações de armaduras na região da ligação da viga com o pilar, a geometria da estrutura de concreto e a resistência à compressão do concreto.

Observando-se cada um dos quatro diagramas de carga-deslocamento apresentados, podem-se avaliar os modelos RK2, RK3 e RK5 com comportamento muito semelhante. Já o modelo RK6 apresentou uma curva mais oscilante e, no entanto, mais coincidente (para as duas malhas de elementos finitos) com o resultado experimental obtido por Roeser (2002).

As curvas momento-rotação apresentaram em sua totalidade variações semelhantes. A análise desta rotação verifica que a hipótese de ligação viga-pilar perfeitamente rígida é inadequada. Para cargas até o momento onde se inicia o escoamento da armadura da viga, pode-se verificar que a ligação monolítica entre a viga e o pilar deixa de ter ângulo reto. A partir do momento em que começa esta rotação relativa, os esforços na região deixam de ter o comportamento esperado. Mesmo assim, muitos softwares comerciais ainda admitem, como modelagem padrão, que a ligação permaneça rígida mesmo para esforços elevados, gerando resultados inadequados para a real resistência da ligação.

Em geral, a distribuição das tensões no concreto fica melhor apresentada com modelos com malha triangular. Em muitas situações a extrapolação das tensões dos pontos de Gauss para os nós do elemento quadrangular quadrático geram valores de tensões inadequados, principalmente na região de grande variação de tensão. Os resultados ficam satisfatórios para malhas suficientemente refinadas de elementos triangulares lineares.

Pode-se observar que a distribuição de fissuras varia pouco quando são comparados os resultados com as diferentes malhas de elementos finitos. Além disso, verificando-se os resultados de fissuração, apresentados por Roeser (2002) observa-se um comportamento semelhante, embora Roeser (2002) apresente resultados para  $1/3F_u$ ,  $2/3F_u$  e  $F_u$ . Estes resultados não podem ser comparados diretamente pela forma como a distribuição de fissuras é apresentada. No modelo distribuído, as fissuras aparecem em cada ponto de Gauss que atinge tensões de tração acima da resistência à tração do material. Esta modelagem de fissuração não permite que pontos fissurados se unam e formem fissuras predominantes, como acontece nos modelos expe-

rimentais.

Observa-se nos modelos RK2 e RK3 um padrão de fissuração localizado predominantemente na parte superior da ligação da viga com o pilar. Já para os nós RK5 e RK6 observa-se o aparecimento de fissuras mais distribuídas na face interna do pilar superior à viga e na face externa do pilar inferior à viga. Esta mudança na distribuição das fissuras desencadeia uma maior solicitação das armaduras na região do nó e do pilar e menor solicitação nas armaduras da viga. Ou seja, examinando-se detalhadamente, pode-se notar que a armadura da viga não atinge o escoamento nos modelos RK5 e RK6 e a ruptura ocorre no pilar.

Os gráficos mostrando as tensões axiais totais em cada barra de armadura apresentam resultados muito semelhantes mesmo modificando-se a malha de elementos finitos. Nos modelos RK2 e RK3 de nós de pórtico, a armadura superior da viga atinge o patamar de escoamento gerando, no diagrama carga-deslocamento, um comportamento horizontal no final de cada curva, especialmente no modelo com malha triangular linear. Nos resultados obtidos para a malha triangular, pode-se verificar que as tensões nos estribos não são tão altas quando comparadas às tensões obtidas pela malha quadrangular. É possível que esta seja uma restrição do elemento triangular em desenvolver tensões de cisalhamento.

De forma geral, os quatro modelos de nós de pórtico apresentam o comportamento esperado para a ruptura. Inicialmente é aplicada a carga no topo do pilar distribuindo tensões ao longo de todo o seu comprimento. Em seguida, inicia-se a aplicação de carga na extremidade da viga, ocasionando o surgimento das primeiras fissuras na superfície superior da viga até a extremidade da ligação da face superior da viga com o pilar. A partir deste ponto os modelos divergem para dois lados: ou inicia-se o processo de elevada compressão na face inferior da viga, esmagando o concreto, e o escoamento da armadura superior da viga, resultando na ruptura do modelo; ou a fissuração predomina na região do nó não sendo possível atingir a tensão de escoamento da armadura da viga antes da ruptura.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 8.1 CONCLUSÕES

Este trabalho teve sua motivação pelo fato de serem pouco estudadas numericamente as estruturas de nós de pórtico em concreto armado com carregamento monotônico. Estas ligações estão presentes em grande parte das estruturas de concreto armado utilizadas diariamente pela população. Por terem comportamento complexo, sua análise envolve muitos fatores que precisam ser incluídos na modelagem numérica e adequadamente adaptados a cada caso. Em grande parte das referências bibliográficas pesquisadas, encontram-se trabalhos referentes ao estudo de nós de pórtico frente a carregamentos cíclicos. Este trabalho apresenta um estudo de ligações viga-pilar submetidas a carregamentos monotônicos.

Estando concluída a modelagem numérica, esta foi colocada em teste para sua verificação. Estes testes apresentaram uma boa aproximação dos resultados numéricos frente a ensaios experimentais de vigas biapoiadas submetidas a cargas concentradas. Utilizando uma ferramenta elaborada especificamente para a visualização dos resultados, observou-se que o comportamento das tensões no concreto e no aço e a distribuição das fissuras corresponderam ao comportamento esperado para tais estruturas. Considerando a malha formada por elementos quadrangulares quadráticos de oito nós, pôde-se estimar o refinamento necessário para obtenção de resultados semelhantes com a malha de elementos finitos triangulares lineares. Nesta etapa, ficou definida a necessidade de utilização de aproximadamente 20 elementos triangulares lineares para cada elemento quadrangular quadrático.

A etapa seguinte analisou os modelos de nós de pórtico. A análise iniciou-se pela elaboração de um pré-processador para gerar as malhas de elementos triangulares lineares e quadrangulares quadráticos através de poucos comandos. Após a análise numérica realizada através do programa elaborado em FORTRAN, foram confeccionadas as imagens para representação dos resultados em MATLAB. Através dessa ferramenta, analisou-se a concordância do compor-



tamento obtido com o comportamento esperado e com as análises experimentais de Roeser (2002). Verificou-se que os elementos triangulares lineares podem ser empregados em simulações complexas de estruturas de concreto armado, pois os resultados obtidos foram satisfatórios e podem ser utilizados para estimativas numéricas futuras. Além disso, utilizando este elemento finito simplificado, pode-se abrir espaço para a implementação de códigos numéricos que exijam elementos simples para sua formulação.

Neste trabalho também se analisou a rotação relativa entre a viga e o pilar. Esta análise demonstrou que a utilização da hipótese de que a ligação viga-pilar fosse perfeitamente rígida pode gerar uma avaliação inadequada do comportamento estrutural. Em muitos softwares comerciais esta hipótese é adotada como padrão para a modelagem destas ligações. Sugere-se, então, que este conceito de ligação perfeitamente rígida seja revisto para estes casos.

## 8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para trabalhos futuros indica-se a utilização de um modelo de fissura incorporada para o estudo de nós de pórticos. Em grande parte da bibliografia referente a esta modelagem, utiliza-se elementos finitos simples lineares. Sendo assim, pode-se usar o elemento triangular linear implementado neste trabalho para a inclusão desta formulação.

A análise de nós de pórtico pode ser melhor realizada através de simulações numéricas com elementos tridimensionais. Os problemas do confinamento do concreto na região do nó poderão ser considerados e a região poderá ser melhor simulada e compreendida.

Como o deslizamento da armadura em relação ao concreto é um fator importante para a rotação relativa entre a viga e o pilar, sugere-se que esta formulação seja implementada. Desta forma, poder-se-á verificar qual será a diferença encontrada entre os modelos sem deslizamento da armadura e os modelos com esta formulação, verificando, qualitativamente e quantitativamente, a inadequação dos softwares comerciais quando estes admitem a ligação viga-pilar como perfeitamente rígida.

Sugere-se também uma melhor análise das tensões encontradas nas armaduras quando utiliza-se a malha de elementos triangulares. É possível que, adicionando-se um grau de complexidade a este elemento finito, este problema visualizado na distribuição de tensões seja resolvido.

## REFERÊNCIAS

- ALVA, G. M. S. **Estudo teórico-experimental do comportamento de nós de pórtico de concreto armado submetidos a ações cíclicas**. 2004. 218 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BAKIR, P.G.; BODUROGLU, H.M. A new equations for predicting the joint shear strength of monotonically loaded exterior beam-column joints. **Engineering Structures**. v. 24. Mar. 2002.
- CAMPOS FILHO, A. **Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático**. São Paulo: USP, 1987, 293 p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.
- CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. **Journal of the American Concrete Institute**. v. 82. n. 6. p. 877-882. 1985.
- CHEN, W. F. & HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 606p.
- CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1994. 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lausanne, 1993.
- DANTAS, A. U. **Simulação numérica dos processos de recuperação e reforço de peças estruturais em concreto armado**. Porto Alegre, PPGE/UFRRGS, 2000, 133p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- ELWI, A.E.; HRUDEY, T.M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics Division**. ASCE. v. 115. n. 4. p. 740-745. Apr. 1989.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. England: John Wiley & Sons, 2007.

GEORGOUSSIS, G. K. **Beam-Column joints in reinforced concrete**. 1980. 254 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Department of Civil and Structural Engineering. University of Manchester.

HAACH, V.G. **Análise Teórico-Experimental da Influência da Força Normal em Nós de Pórtico Externos de Concreto Armado**. 2005. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

HAMIL, S. J. **Reinforced Concrete Beam-Column Connection Behavior**. 2000. Tese (Doutorado) – School of Engineering, University of Durham, Durham.

HEGGER, J.; SHERIF, A.; ROESER, W. Nonseismic Design of Beam-Column Joints. **Structural Journal**. ACI. V.100, No. 5, P. 654-664. Set-Out. 2003.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1988.

KOTSOVOS, M.D.; PAVLOVIC, M.N. **Structural Concrete: Finite-element Analysis for Limit-state Design**. 1995. New York: Thomas Telford.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. Beiträge zur behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. **Beton und Stahlbetonbau**. v. 57. n. 7. Jul.1962.

MACHADO, M. **Aplicação do método dos elementos finites para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido submetidas a estados planos de tensão**. 2002. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, Brasil.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite Elements in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980.

OWEN, D.R.J.; HINTON, E. **Finite element programming**. London: Academic Press, 1977. 305p.

OLIVER, J.; HUESPE, A.E. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. **Computer methods in applied mechanics and engineering**. v.193. Jul. 2003.

OTTOSEN, N.S. A failure criterion of concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE. v. 103. n. 4. p. 527-535. Aug. 1977.

PARK, R.; PAULAY, T. **Reinforced concrete structures**. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1975.

PAULAY, T.; PRIESTLEY, M. J. N. **Seismic desing of reinforced concrete mansory buildings**. New York: John Wiley & Sons, 1992.

PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1992, 131p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.

RIBEIRO, A. S. **Análise de estruturas compostas por aduelas pré-moldadas de concreto com protensão externa, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. 2004. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, Brasil.

ROESER, W. **Zum Tragverhalten von Rahmenknoten aus Stahlbeton**. 2002. 152 f. Tese (Doutorado). University of Aachen, Aachen.

VOLLUM, R.L. **Desing and Analysis of Reinforced Concrete Beam-Column Joints**. 1998. Tese (Doutorado) – Faculty of Engineering, University of London, London.

ZIENKIEWICKZ, O.C. **The finite element method**. London: McGraw-Hill, 1986, 787p.

ZIENKIEWICKZ, O.C.; PHILLIPS, D.V.; OWEN, D.R.J. **Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples**. In: SEMINAR ON CONCRETE STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAZIAL STRESSES. PAPERS. Bergamo: IABSE, 1974, p.1-21.