

2805

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

EFEITOS DE RAIOS DE LARMOR FINITOS NAS
INSTABILIDADES POR TEMPERATURA IÔNICA ANISOTRÔPICA
EM PLASMAS INOMOGÊNEOS DE ALTO BETA*

João Goedert

FT 52. (Dep.)
Tese realizada sob a orientação do Dr. J. P. Mondt e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do Grau de Doutor em Ciências.

* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior (CAPES), através do Plano Institucional de Capacitação Docente (PICD); Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

Porto Alegre

1979

AGRADECIMENTOS

A J.P.Mondt pela orientação segura e incentivo contínuo; a Darcy Dillenburg por sugestões, discussões, leitura e correções da versão preliminar, bem como pelo apoio constante; a J. D.Gaffey, Jr. por discussões proveitosas, incentivo e sugestões; a C.S.Wu e H.P.Freund pelo incentivo inicial indispensável; a V. E.Herscovitz, H.O.Girotti e Th.A.J.Maris pela convivência e experiência com que sempre pude contar; a R.S.Schneider e demais componentes do Grupo de Plasma do IF-UFRGS com quem pude discutir muitas idéias; a todos os colegas deste Departamento pelo convívio gratificante;

A Direção do IF-UFRGS pelo inestricto apoio material recebido; a Zuleika Berto pela presteza dos serviços bibliográficos; a Cecilia do Amaral pelo cuidadoso serviço datilográfico; a Cleto Tartarelli pelo esmerado serviço de desenho; a todo o pessoal de apoio técnico-administrativo pela eficiência e zelo no atendimento;

Aos integrantes do Centro de Processamento de Dados da UFRGS pela assistência na utilização do computador;

A UFPB e aos colegas do DF-UFPB donde estive afastado para realização deste projeto.

Porto Alegre, junho de 1979.

João Goedert

RESUMO

A partir da teoria híbrida cinética foi, recentemente, deduzida uma equação de autovalores para as perturbações eletromagnéticas de frequências $\omega \sim \omega_{ci}$ em θ -pinches não colisionais e anisotrópicos na temperatura de íons. Esta equação é aqui reduzida a duas equações diferenciais ordinárias, de segunda ordem e homogêneas, mediante uma expansão no raio de Larmor dos íons térmicos. O termo de ordem zero desta expansão reproduz a relação de dispersão para plasmas homogêneos anisotrópicos enquanto que o termo de ordem ϵ^2 (primeira correção não nula) contém, entre outras, ressonâncias de Cherenkov, as quais não compareciam no tratamento homogêneo; mostra-se que estas ressonâncias acontecem para velocidades $\sim v_{th} / \sqrt{\beta_{th}}$ e números de onda típicos dos modos instáveis no caso homogêneo o que ressalta a importância do efeito na estabilidade dos modos íon-ciclotrônicos de Alfvén. O mecanismo físico de base para este fenômeno é discutido e apontado como um efeito FLR de maior importância. Para um plasma encerrado num cilindro perfeitamente condutor são estabelecidas condições de contorno que refletem a existência de relação de dispersão global. Deduz-se ainda uma relação de dispersão local, válida para meios fracamente inhomogêneos e que é analisada numericamente revelando substancial redução das razões de crescimento previstas pelo tratamento homogêneo.

ABSTRACT

From hybrid-kinetic theory an eigenvalue equation for electromagnetic perturbations with $\omega \sim \omega_{ci}$ in collisionless theta-pinches with anisotropic ion energy was recently derived. In the present work this equation is reduced to two ordinary second order linear differential equations by an expansion in the thermal ion Larmor radius. The zeroth order expression yields the usual dispersion relation for anisotropic homogeneous plasmas whereas the second order terms (first significant correction) contain Cherenkov resonances, absent in the former treatment, which are reached for speeds $\sim v_{th} / \sqrt{\beta_{th}}$ and wavenumbers typical of unstable modes in the homogeneous case, indicating their importance on the stability of modes driven by ion energy anisotropy. These equations are supplemented by appropriate boundary conditions for the case when the plasma is surrounded by a perfectly conducting cylindrical wall. The physical mechanics underlying the influence of Cherenkov resonance parallel to the confining magnetic field as a FLR effect on stability behaviour is illustrated. For weak inhomogeneities a local dispersion relation is obtained and numerically analyzed to show significant reduction of growth rate as compared to the homogeneous results.

I N D I C E

I - INTRODUÇÃO	1
II - OS MODELOS HÍBRIDOS CINÉTICOS	
Introdução	7
II.1 - Efeitos de Raios de Larmor Finitos - Considerações Gerais e Modelo de Fluido de Vlasov	8
II.2 - O Modelo Híbrido Cinético	11
II.3 - Obtenção de Equação de Autovalores	16
III - EQUAÇÕES BÁSICAS PARA UM θ -PINCH DE ALTO BETA	
Introdução	27
III.1 - A Instabilidade das Ondas Ion-Ciclotrônicas em Plasmas de Alto Beta	27
III.2 - A Configuração de Equilíbrio	30
III.3 - As Equações Básicas	34
III.4 - O Termo de Força Magnetohidrodinâmica Ideal	38
IV - ORDENAÇÃO E EXPANSÃO NO RAI0 DE LARMOR DE IONS	
Introdução	42
IV.1 - Ordenação Básica e Regime de Oscilações	42
IV.2 - A Expansão das Perturbações na Pressão de Elêtrons	45
IV.3 - A Expansão da Integral Orbital \bar{S}	47
IV.4 - O Termo de Força Inercial	53
IV.5 - O Limite para Plasma Espacialmente Homogêneo	57
V - RESSONÂNCIA DE CHERENKOV COMO EFEITO FLR	
Introdução	62
V.1 - A Equação de Autovalores	62
V.2 - Sobre as Condições de Contorno	66
V.3 - Considerações Adicionais a Respeito da Ressonância de Cherenkov	69

VI - ANÁLISE LOCAL E NUMÉRICA	
Introdução	73
VI.1 - A Estabilidade na Análise Local	73
VI.2 - Uma Possível Especificação de Equilíbrio	77
VI.3 - Os Resultados Numéricos	80
VII - CONCLUSÕES	92
APÊNDICE A	97
APÊNDICE B	100
REFERÊNCIAS	113

I - INTRODUÇÃO

O θ -pinch foi aparentemente uma das primeiras [66] posições como dispositivo candidato a produzir a fusão termonuclear controlada, e, dada a simplicidade de sua geometria cilíndrica e linhas de campo magnético uniformes, constitui-se no mais maleável dos esquemas ainda em estudo. Experimentalmente eles podem produzir altas densidades ($N > 10^{16} \text{ cm}^{-3}$) associadas a temperaturas de íons relativamente elevadas ($T_i > 3 \text{ keV}$) sem apresentar muitas das piores instabilidades previstas na magnetohidrodinâmica. Apesar da evolução e desenvolvimento de novas e mais complicadas máquinas de fusão, o θ -pinch ainda mantém papel importante no programa de fusão termonuclear [60-64].

Uma das características mais peculiares destes aparelhos é sua capacidade de funcionar como compressor radial aumentando, com isto, a temperatura do plasma, primordialmente na direção perpendicular ao campo magnético aplicado. Este aquecimento anisotrópico é, em parte, justificado pela própria compressão adiabática que, contudo, não se presta a uma explicação completa do fenômeno. Mais recentemente, vários autores [11,38-41], demonstraram a importância exercida, neste aquecimento anômalo, pelo aparecimento de micro-instabilidades. Tais micro-instabilidades são geradas por correntes de deriva e participam de maneira muito efetiva no processo de aquecimento anisotrópico (gerando $T_{i\perp} > T_{i\parallel}$).

A magnetohidrodinâmica, por tratar o plasma colisionalmente, adota, como hipótese de trabalho, a isotropia na energia de todas as suas componentes. Entretanto plasmas não colli-

sionais como os gerados em θ -pinches de altas temperaturas e altos betas (Scylla IV-P, Linear Scyllac e Scylla IV-3, por exemplo), [60-64], não podem ser apropriadamente descritos nem pela magnetohidrodinâmica clássica [26,32,33] (plasma colisional) nem pelas teorias de centros de guia [13-31] (raio de Larmor, para todas as espécies presentes, muito menores que a distância típica de inhomogeneidade). Mesmo assim os elétrons sempre podem ser supostos isotrópicos em escalas de tempo da ordem de $\sqrt{2}/\sqrt{\beta_{e\perp}}\omega_{ce}$, onde ω_{ce} é a frequência de ciclotron para elétrons e $\beta_{e\perp}$ é o valor de beta para elétrons na direção perpendicular ao campo magnético aplicado. Este decaimento da anisotropia de elétrons é justificado com base na existência de modos de whistler fortemente instáveis [43-45]. Entretanto não se conhece um mecanismo semelhante pelo qual a energia de íons possa ser isotropizada numa escala temporal comparável àquela dos elétrons. A obtenção de uma justificativa para este fenômeno, caso ele de fato ocorra, é crucial para a validação das hipóteses básicas da magnetohidrodinâmica ideal. O que presentemente se conhecem são mecanismos que explicam e justificam apenas parcialmente a existência de isotropização para energia de íons. Este é o caso do estudo da estabilidade quasi-linear [46] de um plasma homogêneo sem colisões e de alto beta em presença de anisotropia. Neste meio a anisotropia alimenta a instabilidade de modos íon-ciclotrônicos de Alfvén [46-48] os quais desempenham para com os íons um papel muito semelhante àquele desempenhado para com os elétrons pelos modos instáveis de whistler. Entretanto, estes modos íon-ciclotrônicos não se mostraram tão eficientes quanto os modos de whistler. Ao menos o estudo quasi-linear acima mencio

nado, prevê a persistência de uma anisotropia residual ($T_{i\perp} = 2.5 T_{i\parallel}$) de forma que continuamos carentes de uma explicação mais conclusiva.

O objetivo deste trabalho é investigar a influência da inhomogeneidade espacial nas propriedades de estabilidade dos referidos modos íon-ciclotrônicos de Alfvén instáveis em presença de anisotropia e em plasmas não colisionais de alto beta. Dado que nos θ -pinches tanto o perfil de densidade como o de campo magnético são usualmente difusos e de forma a produzirem razões de raios de Larmor para íons por distância característica de inhomogeneidade finita [4,6-10] mas, menor que a unidade [55], conclue-se que não se pode desconsiderar, a priori, a existência de correntes de deriva no equilíbrio. Também há de se lembrar que o gradiente radial de pressão de íons no equilíbrio tende a gerar um campo elétrico radial que pode interagir com as perturbações das linhas de campo magnético associadas com a onda íon-ciclotrônica. Esta interação pode se dar por intermédio dos elétrons que se apresentam "congelados" às linhas de campo magnético. Em adição, como já foi demonstrado [50,51], a existência de pressão finita de elétrons juntamente com seus efeitos cinéticos ao longo de \vec{B} , podem gerar contribuições à dinâmica dos íons. Em particular, perturbações na pressão paralela dos elétrons podem dar origem a perturbações de campo elétrico paralelo movendo-se com a onda. Conseqüentemente devemos estar de sobrelaviso para a possível ocorrência de efeitos de ressonância que poderão afetar de forma significativa as características de estabilidade das supra mencionadas ondas de Alfvén.

Todas estas peculiaridades de plasmas não colisionais

de alto beta, inomogêneos e anisotrôpicos, podem facilmente ser levadas em consideração quando se emprega, na sua descrição, um modelo híbrido cinético, recentemente proposto [35,36], e do qual foi derivada [37,50,51] uma equação de autovalores para os deslocamentos de linhas de força do campo magnético. Neste modelo, os elétrons são descritos como centros de guia (raio de Larmor para elétrons muito menor que a distância típica de inomogeneidade espacial, frequências muito mais baixas que as frequências de ciclotron de elétron) enquanto que os íons são tratados cineticamente pela equação de Vlasov sem expansão. A equação deduzida deste modelo descreve a estabilidade de perturbações eletromagnéticas na configuração de equilíbrio de um θ -pinch linear, com perfis de densidade e campo magnético arbitrariamente difusos na direção radial. Esta equação constitui-se no ponto de partida da presente investigação.

A organização deste estudo segue o esquema abaixo:

Iniciamos no Capítulo II exibindo as linhas e idéias essenciais dos modelos de Fluido de Vlasov [1] e Modelo Híbrido Cinético [35,36] prosseguindo com a apresentação dos pontos-chaves através dos quais se deve passar para obter a mencionada equação de autovalores. Este é basicamente um capítulo de revisão e tem como única finalidade mostrar a conexão da equação que aqui é ponto de partida com o que se conhece de mais bem estabelecido em física de plasma ou seja a descrição inteiramente cinética.

O Capítulo III é reservado à descrição do problema físico e escolha do equilíbrio e faixa de frequência a estudar. Ainda neste capítulo apresentamos a forma expandida do termo de

força magnetohidrodinâmica ideal o qual é parte integrante da equação de autovalores. No Capítulo IV apresentamos as hipóteses modelísticas adicionais mediante as quais podemos efetuar uma expansão dos termos remanescentes [termos à direita de (II.50)]. O resultado desta expansão é posteriormente empregado (Capítulo V) para a obtenção de um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e homogêneo e apropriado para o estudo de estabilidade das ondas íon-ciclotrônicas de frequência $\omega \sim \omega_{ci}$ (onde ω_{ci} é a frequência de ciclotron para íons). Ainda no Capítulo IV mostramos como a referida expansão reproduz, em ordem zero, a relação de dispersão dos modos íon-ciclotrônicos de Alfvén instáveis em presença de anisotropia, num meio homogêneo.

No Capítulo V tratamos da equação de autovalores na sua forma expandida e correta até segunda ordem no parâmetro de expansão ($\epsilon = r_{Li}/L_{\perp}$, onde $r_{Li} \equiv$ raio de Larmor para íons e $L_{\perp} \equiv$ distância típica de inhomogeneidade); apontamos a existência de uma relação de dispersão de caráter global e chamamos a atenção para a ocorrência de um efeito novo, na forma de ressonâncias de Cherenkov. Em seguida, discutimos a relevância deste efeito em plasmas de alto beta e apresentamos um mecanismo físico pelo qual esta ressonância poderia contribuir para a isotropização da energia dos íons.

No Capítulo VI deduzimos e, após especificar uma distribuição de equilíbrio e perfil de densidade para os íons, analisamos numericamente uma relação de dispersão de caráter local. Esta análise numérica mostra que as conhecidas razões de crescimento dos modos íon-ciclotrônicos de Alfvén [46] são substan-

cialmente reduzidas, sobretudo para anisotropia moderada e para números de ondas azimutal e radial de mais alta ordem. Este amortecimento revela a ocorrência de um processo mais acentuado de transferência de energia de uma direção para a outra, indicando, claramente, que a inclusão dos efeitos de raios de Larmor Finitos na descrição de plasmas de alto beta e inhomogêneos pode contribuir para a explicação dos fenômenos de isotropização da energia dos íons.

Finalmente no Capítulo VII encerramos o estudo apresentando as conclusões e comentários finais.

II - OS MODELOS HÍBRIDOS CINÉTICOS

Introdução

Pretendemos, neste capítulo, situar o leitor com relação ao tipo de plasma que nos propomos estudar e, sobretudo, com relação ao modelo matemático empregado na sua descrição.

Convém ressaltar desde já que os modelos híbridos cinéticos aqui comentados foram idealizados para plasma de alto beta e livre de colisões. Mais precisamente pretende-se descrever fenômenos que ocorrem em escalas de tempo mais curtas que ν_{ei}^{-1} (frequência de colisões entre elétrons e íons) em plasmas confinados por campos magnéticos. Normalmente $\nu_{ei} < \omega_{ci}$ (frequência de ciclotron para íons) de forma que a faixa de frequências visada por estes modelos fica caracterizada por $|\omega| \sim \omega_{ci}$, podendo estender-se, em alguns casos, até frequências mais altas como $|\omega|^2 \leq \omega_{LH}^2 = \omega_{ce}\omega_{ci}$ ($\omega_{LH} \equiv$ frequência híbrida inferior).

Na primeira seção damos uma visão geral do comportamento de um plasma num θ -pinch de alto beta, em sua fase de implosão (ou fase imediata à implosão), comentamos a possibilidade de se adotar descrições alternativas em tais circunstâncias e resumimos as características básicas do Modelo de Fluido de Vlasov proposto por J.P.Freidberg.

Na seção de número dois fazemos um resumo das hipóteses físicas e tratamento matemático de que se compõe o Modelo Híbrido Cinético criado por D.A.D'Ippolito e R.C.Davidson. Finalmente, numa última seção, traçamos as linhas básicas do trata

mento proposto por J.P.Mondt, mediante o qual, do modelo Híbrido Cinético se pode obter uma equação de autovalores apropriada para o estudo da estabilidade de plasmas de alto beta.

II.1 - Efeitos de Raios de Larmor Finitos - Considerações Gerais e Modelo de Fluido de Vlasov

A importância dos efeitos de Raio de Larmor Finitos, (FLR, para usar a mesma abreviação corrente na literatura em inglês) em conexão com experimentos em pinches* de alta densidade, tem sido apontada há bastante tempo [1,2]. Nestas máquinas os elétrons são fortemente magnetizados apresentando-se praticamente congeladas as linhas de \vec{B} , mas, os íons, freqüentemente, circulam com raios de Larmor de magnitude comparável à distância típica da inomogeneidade [4,6-10] a qual é, por sua vez, da ordem de grandeza do raio da coluna de plasma [1,3,12].

Sistemas como este não podem ser apropriadamente descritos nem pela magnetohidrodinâmica ideal [26,32,33] nem pelos modelos de centros de guia [13-31]. No primeiro caso supõe-se um plasma predominantemente caracterizado por colisões; e, mesmo na presença de campos magnéticos fortes (o que não conduz, necessariamente, à situações de alto beta) a magnetohidrodinâmica fornece apenas uma descrição parcial do plasma. Em suma, nestas circunstâncias, obtêm-se um conjunto completo de equações hidro

* Não encontrando tradução apropriada para o termo "pinch", neste contexto, preferimos usá-lo como no original.

dinâmicas [17] mediante o uso de momentos de ordem mais alta da equação de Vlasov. No entanto, esta extensão da magnetohidrodinâmica só é válida na direção perpendicular a \vec{B}^0 , nada sendo proposto com relação a dinâmica das partículas na direção paralela ao campo magnético. Já os modelos de centros de guia são válidos para perturbações de frequências mais baixas ($|\omega| \ll \omega_{cj}$, $j = i, e$) e forte magnetização ($r_{Lj} \ll L_{\perp}$, com $j = i, e$ e L_{\perp} distância típica de inhomogeneidade na direção perpendicular a \vec{B}^0). Em outras palavras, nos modelos de centros de guia tanto os elétrons como os íons são supostos circulando com raios de Larmor muito menores que a escala de variação espacial de grandezas de equilíbrio.

Uma descrição exata em termos de equação de Vlasov para íons e elétrons além de impraticável do ponto de vista da estrutura matemática [5] (excessão feita a poucos casos de simetria especial) é totalmente dispensável pois os raios de Larmor dos elétrons são, tipicamente, muito menores do que a mencionada distância de variação espacial das grandezas de equilíbrio. Contudo, em se tratando dos íons, não se pode evitar um tratamento cinético completo. Surge então a idéia de base de toda a família de modelos híbrido cinéticos: manter a equação de Vlasov para íons e substituir a equação de Vlasov para elétrons por outra suficientemente simples para permitir o tratamento matemático, mas, ao mesmo tempo tão equivalente quanto possível para não prejudicar a descrição do plasma.

Neste sentido o modelo de Fluido de Vlasov proposto por J.P.Freidberg [1] foi o primeiro a aparecer. Nele os elétrons são descritos como um fluido destituído de massa e livre

de pressões e satisfazendo a

$$\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}/c = 0 \quad . \quad (II.1)$$

Sua aplicabilidade se ajusta muito bem a regimes onde $|\omega| \lesssim \omega_{ci}$, $|\omega| \gg v_{ei}$ e $T_e/T_i \ll 1$. (Aqui ω é a frequência complexa das oscilações, T_e a temperatura dos elétrons e T_i a temperatura dos íons). O modelo prestou-se eminentemente a comparações com a magnetohidrodinâmica clássica e teve seu maior êxito ao demonstrar a importância dos efeitos FLR na redução das razões de crescimento [1,34] previstas pela primeira para aqueles modos com número de onda azimutal $m > 1$.

Além destes êxitos inegáveis cabe-lhe ainda o mérito de haver estimulado a formulação de modelos híbridos cinéticos de maior abrangência [35,36], aptos a descreverem fenômenos que ocorrem em escala de tempos mais curtas como aqueles caracterizados por oscilações com frequência até $\omega^2 \lesssim \omega_{ce} \omega_{ci}$. Tais oscilações estão presentes na fase de implosão e fase imediata à implosão [36] dos pinches de alta densidade. Nestas fases o modelo de Fluido de Vlasov não seria mais indicado por não conter informação a respeito da inércia dos elétrons, na direção paralela ao campo magnético, a qual assume tanto maior importância quanto mais alta for a frequência das oscilações. Ademais, a compressão da coluna de plasma pelo campo magnético pode elevar as temperaturas tanto dos íons como de elétrons de modo a não se ter mais $T_e/T_i \ll 1$ e sim uma razão finita [46] (tipicamente $3T_e = 2T_{i\perp} + T_{i\parallel}$, onde \perp e \parallel referem-se às direções perpendiculares e paralelas, respectivamente, ao campo magnético de equilí

brio). Esta deficiência foi recentemente reparada [56] pela adição de um termo extra na equação (II.1) o qual introduz, no modelo, os efeitos de pressão de elétrons.

Uma dupla generalização do modelo de Fluido de Vlasov (T_e/T_i finito e manutenção de efeitos cinéticos dos elétrons paralelamente a \vec{B}) é obtida no modelo Híbrido Cinético proposto por D.A.D'Ippolito e R.C.Davidson. Exporemos, a seguir, as idéias e equações básicas pertinentes àquele modelo.

II.2 - O Modelo Híbrido Cinético

Semelhantemente ao modelo de Fluido de Vlasov no modelo Híbrido Cinético [35,36] não se faz nenhuma hipótese a respeito da magnitude do raio de Larmor para íons. Estes, portanto, são descritos por uma equação de Vlasov completa:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + \frac{e}{m_i} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v \right\} f_i(\vec{x}, \vec{v}, t) = 0, \quad (\text{II.2})$$

onde $f_i(\vec{x}, \vec{v}, t)$ é a função distribuição de íons no espaço de fase (\vec{x}, \vec{v}) , $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ é o campo elétrico, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$ o campo magnético, e a carga dos íons, m_i a sua massa e c a velocidade da luz no vácuo.

Para os elétrons a idéia básica é expandir sua equação de Vlasov no parâmetro

$$\epsilon = \frac{r_{Le}}{L_\perp} \ll 1 \quad (\text{II.3})$$

onde r_{Le} é o raio de Larmor para elétrons e L_{\perp} a distância típica de inhomogeneidade espacial transversal a \vec{B}^0 . A mesma expansão é aplicada consistentemente no tocante à acuidade, nas equações para os campos eletromagnéticos. Com este procedimento são obtidas descrições em qualquer ordem de precisão desejada. Para o caso particular de frequências em torno de $|\omega| \leq \omega_{ci}$ (caso em que estaremos mais interessados) é suficiente adotar a ordem de descrição mais baixa [35,36] como ponto de partida para o estudo da estabilidade das ondas ion-ciclotrônicas de Alfvén. Estas são as ondas eletromagnéticas tipicamente transversais e que se tornam instáveis, se beta for finito, sempre que $T_{i\perp} > T_{i\parallel}$.

Como o objetivo maior é incluir no modelo, para os elétrons, não mais do que os efeitos de temperatura finita e os efeitos cinéticos paralelos a \vec{B} , é suficiente considerar junto com (II.3) apenas frequências satisfazendo

$$|\omega| \ll |\omega_{ce}| \quad (\text{II.4})$$

onde ω_{ce} é a frequência de ciclotron para elétrons. Finalmente, numa tal expansão necessita-se relacionar coordenadas espaciais e temporal de uma forma conveniente em termos de velocidades características [22]. Estas relações determinarão os efeitos físicos a serem mantidos em uma dada descrição de ordem ϵ^m . No modelo híbrido cinético adota-se

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_{ce}} &\sim \frac{r_{Le}}{L_{\perp}} = \epsilon, \\ \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} &\sim \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \sim \frac{r_{Le}}{\lambda_{De}} \sim 1, \\ \frac{cE_{\parallel}}{Bv_e} &\sim \epsilon, \\ \frac{V_E^0}{v_e} &\sim 1. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Esta ordenação permite maximizar o conteúdo físico do modelo [35] podendo ser relaxada sempre que o problema prático em estudo o permitir ou requerer. Em (II.5) r_{Le} é o raio de Larmor para elétrons, L_{\perp} e L_{\parallel} as distâncias típicas de inhomogeneidade perpendicular e paralela a \vec{B} , ω_{pe} $\left[\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi N(r)e^2}{m_e} \right]$, com $N(r)$ a densidade espacial de elétrons, $-e$ a carga e m_e a massa de um elétron] a frequência de plasma para os elétrons, $\lambda_{De} = v_e/\omega_{pe}\sqrt{2}$ o comprimento de Debye, V_E^0 a velocidade de deriva transversal dos elétrons $\left[\vec{V}_E^0 = c(\vec{E}^0 \times \vec{B}^0)/B^{02} \right]$, E_{\parallel} a componente de \vec{E} paralelamente a \vec{B} , B o módulo do campo magnético \vec{B} e v_e a velocidade térmica dos elétrons ($v_e^2 = 2T_e/m_e$).

Paralelamente expressa-se

$$f_e = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m (\bar{f}_m + \tilde{f}_m) \quad , \quad (II.6)$$

onde as partes dependente e independente de fase de f_e são definidas por

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \bar{f}_m = \bar{f}_m \quad ,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \tilde{f}_m = 0 \quad . \quad (II.7)$$

Feita a expansão da equação de Vlasov para elétrons e usada f_e na forma (II.6), obtêm-se, comparando termos de mesma ordem em ϵ , uma série de equações onde todos os termos possuem a mesma ordem de grandeza. A partir delas constroem-se modelos em qualquer ordem m de precisão, mediante um procedimento duplo: primeiro é obtida uma equação para \bar{f}_m tomando a média da equação de

ordem $m+1$ sobre um período de Larmor, do ângulo de fase ϕ , segundo determina-se \tilde{f}_m efetuando uma integração indefinida, sobre ϕ , na equação de ordem m . Procedendo desta forma com $m=0,1,2,\dots$, pode-se construir, ordem por ordem, descrições de qualquer grau de correção. Na sua ordem mais baixa é obtido:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_E + v_{||} \vec{n}) \cdot \nabla + \left(\vec{V}_E \cdot \vec{n} - \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \vec{n} \cdot \nabla \ln B \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e}{m_e} E_{||} \right) \frac{\partial}{\partial v_{||}} + \left[v_{||} \vec{n} \cdot \nabla \ln B - (\vec{I} - \vec{n} \vec{n}) : \nabla \vec{V}_E \right] \right. \\ \left. \cdot v_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}^2} \right\} f_e(\vec{x}, v_{\perp}^2, v_{||}, t) = 0 \quad (II.8)$$

onde $f_e(\vec{x}, v_{\perp}^2, v_{||}, t)$ é a função distribuição (independente de fase mas com v_{\perp} e $v_{||}$ funções de posição) dos centros de guia dos elétrons, escrita no referencial de deriva transversal, \vec{n} é o vetor unitário localmente paralelo a \vec{B} , \vec{I} é a diádica unitária, os subíndices \perp e $||$ indicam componentes de vetor paralelas e perpendiculares ao campo magnético \vec{B} e o ponto sobre uma variável denota

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_E + v_{||} \vec{n}) \cdot \nabla \quad (II.9)$$

A evolução temporal dos campos eletromagnéticos é determinada consistentemente pelas equações:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_E \cdot \nabla \right) \nabla \ln B = (\vec{n} \vec{n} - \vec{I}) : \nabla \vec{V}_E - \frac{c E_{||}}{B} \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{n}) \quad , \quad (II.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_E \cdot \nabla \right) \vec{n} = (\vec{n} \vec{n} - \vec{I}) \cdot \left(\frac{c E_{||}}{B} \nabla \times \vec{n} - \vec{n} \cdot \nabla \vec{V}_E \right) + \frac{c}{B} \vec{n} \times \nabla E \quad , \quad (II.11)$$

$$\omega_{pe}^2 E_{||} = \vec{n} \cdot \left[\nabla \cdot \left(\frac{4\pi e}{m_i} \vec{\Pi}_i - \frac{4\pi e}{m_e} \vec{\Pi}_e \right) \right], \quad (II.12)$$

$$\vec{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{M}_i + Nm_e \vec{V}_E + m_i \vec{n} \int d^3v v_{||} \vec{f}_e + \right. \\ \left. + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} \right) + \vec{n} \times \nabla \cdot (\vec{\Pi}_i + \vec{\Pi}_e - \vec{T}) = 0. \quad (II.13)$$

Em (II.12) e (II.13) $N = N_i \equiv N_e \bar{n}$ é a densidade de uma espécie, \vec{T} é o tensor de tensão eletromagnética

$$\vec{T} = \frac{1}{4\pi} \left[\vec{B}\vec{B} + \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} (B^2 + E^2) \vec{I} \right] \quad (II.14)$$

e $\vec{\Pi}_i$ e $\vec{\Pi}_e$ são os tensores de tensão elástica sobre os íons e os elétrons definidos por

$$\vec{\Pi}_i = m_i \int d^3v \vec{v}\vec{v} f_i \quad (II.15)$$

$$\vec{\Pi}_e = P_{e\perp} (\vec{I} - \vec{n}\vec{n}) + P_{e||} \vec{n}\vec{n} + Nm_e \vec{V}_E \vec{V}_E + \\ + m_e (\vec{n}\vec{V}_E + \vec{V}_E \vec{n}) \int d^3v v_{||} \vec{f}_e \quad (II.16)$$

onde as pressões paralela e perpendicular são definidas a partir da distribuição de centros de guia

$$P_{e\perp} = \frac{m_e}{2} \int d^3v v_{\perp}^2 \vec{f}_e, \quad (II.17)$$

$$P_{e||} = m_e \int d^3v v_{||}^2 \vec{f}_e \quad (II.18)$$

e \vec{M}_i é a densidade de momentum de íons dada por

$$\vec{M}_i = m_i \int d^3v \vec{v} f_i . \quad (II.19)$$

Nas equações acima, e em geral, neste trabalho, indicamos por $\int d^3v$ a integral tripla $\int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \int_0^{2\pi} d\phi$.

O conjunto de equações (II.2), (II.8) e (II.10)-(II.13) suplementado pelas definições (II.14)-(II.19) constitui uma descrição fechada (em ordem mais baixa) para o sistema caracterizado por (II.3)-(II.5). Note-se que os ingredientes principais deste modelo são basicamente:

1 - Íons inteiramente cinéticos, de modo a que os efeitos FLR, são retidos da maneira mais completa.

2 - Elétrons descritos como centros de guia; são tomados em conta sua temperatura finita e seus efeitos cinéticos ao longo de \vec{B} . Como, por outro lado, não são incluídos em (II.8) nenhum efeito de deriva de polarização ou de $\nabla \vec{B}$, não se poderá aplicar o presente modelo à análise de perturbações de mais altas frequências como aquelas caracterizadas por $|\omega|^2 \approx \omega_{LH}^2 = \omega_{ce} \omega_{ci}$, ficando sua aplicabilidade restrita a situações com $|\omega| \lesssim \omega_{ci}$. Para as mencionadas regiões de mais altas frequências dever-se-ia empregar um modelo [35] de ordem mais elevada, apropriado para o exame de instabilidade que ocorra nestas escalas de tempo mais rápidas.

II.3 - Obtenção de Equação de Autovalores

A descrição representada pelas equações (II.2), (II.8) e

(II.10)-(II.13) foi recentemente usada [37] para a obtenção de uma equação de autovalores na variável $\vec{\xi}_\perp$, o deslocamento de linhas de força de campo magnético. O procedimento envolve, na sua concepção, uma linearização das equações que compõem o modelo Híbrido Cinético juntamente com a adoção de um regime de equilíbrio tanto para elétrons como para íons mais algumas hipóteses simplificadoras adicionais.

Inicialmente supõe-se um equilíbrio azimutalmente simétrico ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$) e independente de z ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$).

Impõe-se também, na análise da estabilidade, que todas as perturbações assumam a dependência:

$$\delta\psi(\vec{x}, t) = \delta\tilde{\psi}(r) \exp[i(m\theta + k_z z - \omega t)] \quad (\text{II.20})$$

onde m é o número de onda azimutal, k_z é o número de onda na direção z e $\omega = \omega_r + i\gamma$ é a frequência complexa das oscilações. Supõe-se que os íons não transportam correntes no equilíbrio, i.e., $\vec{V}_i^0 = \int d^3v \vec{v} f_i^0 = 0$. A justificativa para esta hipótese deveria ser necessariamente de origem experimental. Aqui ela é introduzida com base na sua conveniência teórica mas admitimos que o modelo seria sensivelmente melhorado com alguma generalização que adotasse $\vec{V}_i \neq 0$ como ponto de partida. Entretanto, cremos que a hipótese de frequência de perturbação relativamente alta ($|\omega| \lesssim \omega_{ci}$) forneça um embasamento bastante seguro para a sua validade prática, uma vez que os íons, por sua inércia, necessitam de tempos relativamente longos para realizarem movimentos de deriva. Ademais a suposição de que os raios de Larmor para os íons tem magnitude comparável a distância típica da inhomogenei

dade espacial corrobora esta hipótese uma vez que, nestas circunstâncias, os íons não dispõem de suficiente espaço para completar giros de Larmor.

São desprezados os termos inerciais na dinâmica de elétrons [eqs. (II.13)-(II.16)] uma aproximação de validade ampla sempre que $|\omega| \lesssim \omega_{ci}$ e desde que a velocidade de deriva transversal seja menor que a velocidade térmica dos elétrons (i.e: $v_E^2 \ll v_e^2$). Neste contexto e considerando a hipótese de quasineutralidade ($N_i \approx N_e$) estamos também aptos a abandonar as componentes de campo elétrico do tensor de tensão eletromagnética \vec{T} . Finalmente o termo $\vec{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} \right)$ é desprezado em comparação a $\vec{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{M}_i$ na eq. (II.13). Esta aproximação é válida quando $v_A^2/c^2 = \omega_{ci}^2/\omega_{pi}^2 \ll 1$ o que sempre acontece em pinches de alta densidade.

Feitas todas estas aproximações reduz-se a eq.(II.13)

a

$$\vec{n} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \vec{M}_i + \nabla \cdot \left[\vec{T}_i + \vec{P}_e + \frac{1}{4\pi} (\vec{B}\vec{B} - \frac{B^2}{2} \vec{I}) \right] \right\} = 0 \quad (II.21)$$

onde

$$\vec{P}_e = P_{e\perp} (\vec{I} - \vec{n}\vec{n}) + P_{e\parallel} \vec{n}\vec{n} \quad (II.22)$$

A equação (II.12) é também simplificada: despreza-se o termo proporcional a $(m_e/m_i)^{1/2}$ e se aproxima E_{\parallel} por

$$\omega_{pe}^2 E_{\parallel} = - \frac{4\pi e}{m_e} \vec{n} \cdot (\nabla \cdot \vec{P}_e) \quad (II.23)$$

Em continuação todas as grandezas são escritas como um valor de equilíbrio mais uma perturbação

$$\psi = \psi^0 + \delta\psi$$

(II.24)

onde $\delta\psi$ tem sua dependência em θ , z e t fixada por (II.20). Após esta linearização as equações que descrevem os campos eletromagnéticos assumem a forma:

$$\begin{aligned} i(\omega - m\omega_E - k_z V_{Ez}^0) \frac{\delta B}{B^0} - \delta \vec{V}_E \cdot \nabla \ln B^0 = \\ = \nabla \cdot \delta \vec{V}_{E\perp} - \delta \vec{n} \cdot (\vec{n}^0 \cdot \nabla) \vec{V}_E^0 - \vec{n}^0 \cdot (\delta \vec{n} \cdot \nabla) \vec{V}_E^0 \\ + \frac{c \delta E_{\parallel}}{B^0} \vec{n}^0 \cdot (\nabla \times \vec{n}^0) \quad , \end{aligned} \quad (II.25)$$

$$\begin{aligned} i(\omega - m\omega_E - k_z V_{Ez}^0) \delta \vec{n} - \omega_E \delta n_r \vec{e}_\theta - \delta V_{Er} \frac{\partial \vec{n}^0}{\partial r} = \\ = (\vec{n}^0 n_\theta^0 - \vec{e}_\theta) \frac{n_\theta^0}{r} \delta V_{Er} - i(k_z n_z^0 + m \frac{n_\theta^0}{r}) \delta \vec{V}_{E\perp}^0 - \delta n_r \frac{\partial \vec{V}_E^0}{\partial r} \\ + \frac{c}{B^0} \frac{n_\theta^0{}^2}{r} (n_\theta^0 \vec{e}_z - n_z^0 \vec{e}_\theta) \delta E_{\parallel} + \vec{n}^0 \delta n_r \left(n_\theta^0 \frac{\partial V_{E\theta}^0}{\partial r} + n_z^0 \frac{\partial V_{Ez}^0}{\partial r} \right) \\ - \vec{n}^0 n_\theta^0 \omega_E \delta n_r - \frac{c}{B^0} \vec{n}^0 \times \delta E_{\parallel} \quad , \end{aligned} \quad (II.26)$$

$$\vec{n}^0 \times (\nabla \cdot \delta \vec{\Pi}_i - i\omega \delta \vec{M}_i) + \vec{n}^0 \times \nabla \cdot \delta \vec{P}_e =$$

$$\vec{n}^0 \times \frac{1}{4\pi} \left\{ (\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}^0 + (\nabla \times \vec{B}^0) \times \delta \vec{B} \right\} \quad , \quad (II.27)$$

$$\delta E_{\parallel} = -\frac{T_e}{e} \delta \vec{n} \cdot \nabla \ln N - i \left(k_z n_z^0 + \frac{m n_\theta^0}{r} \right) \frac{\delta P_{e\parallel}}{eN} \quad (II.28)$$

onde se definiu

$$\omega_E(r) = V_{E\theta}^0(r)/r \quad , \quad (\text{II.29})$$

$$\delta \vec{V}_{E\perp} = (\vec{I} - \vec{n}\vec{n}) \cdot \delta \vec{V}_E \quad , \quad (\text{II.30})$$

se fez uso de $\vec{P}_e^0 = N(r) T_e \vec{I}$ [vide eq. (II.35)] e

$$\begin{aligned} \delta \vec{M}_i &= m_i \int d^3v \vec{v} \delta f_i \quad , \\ \delta \vec{H}_i &= m_i \int d^3v \vec{v} \vec{v} \delta f_i \quad , \\ \delta \vec{P}_e &= \delta P_{e\perp} (\vec{I} - \vec{n}\vec{n}) + \delta P_{e\parallel} \vec{n}^0 \vec{n}^0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

com

$$\begin{aligned} \delta P_{e\parallel} &= m_e \int d^3v v_{\parallel}^2 \delta \bar{f}_e \\ \delta P_{e\perp} &= \frac{1}{2} m_e \int d^3v v_{\perp}^2 \delta \bar{f}_e \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Para os íons a equação linearizada de Vlasov tem a forma

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + \frac{e}{m_i} \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \cdot \nabla_v \right\} \delta f_i &= \\ = - \frac{e}{m_i} \left(\delta \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \delta \vec{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v f_i^0 & \quad (\text{II.33}) \end{aligned}$$

a qual é integrada em t' de $-\infty$ a t (valores iniciais são abandonados com vistas na análise da instabilidade [26,52]) fornecendo

$$\delta f_i(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\frac{e}{m_i} \int_{-\infty}^t dt' \left[\delta \vec{E}(\vec{x}', t') + \frac{\vec{v}' \times \delta \vec{B}(\vec{x}', t')}{c} \right] \cdot \nabla_{v'} \bar{f}_i^0(\vec{x}', \vec{v}', t') \quad (\text{II.34})$$

onde $\vec{x}'(t')$ e $\vec{v}'(t')$ são as trajetórias de partículas nos campos de equilíbrio atendendo as condições iniciais $\vec{x}'(t'=t) = \vec{x}$, $\vec{v}'(t'=t) = \vec{v}$. Este valor de δf_i é usado para determinar a contribuição do termo $\nabla \cdot \delta \vec{\Pi}_i - i\omega \delta \vec{M}_i$ à equação macroscópica de força eq. (II.27).

Para os elétrons [eq. (II.8)] se obtém a expressão (II.37) abaixo, após supor que sua distribuição de equilíbrio é uma maxwelliana

$$\bar{f}_e^0 = \bar{f}_{eM}^0 = N(r) \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e}{2T_e} v^2 \right) \quad (\text{II.35})$$

e que

$$\vec{E}^0(\vec{x}) = E_r^0(r) \hat{e}_r = -\frac{\partial \phi^0(r)}{\partial r} \hat{e}_r \quad (\text{II.36})$$

$$\vec{B}^0(\vec{x}) = B_z^0(r) \hat{e}_z + B_\theta^0(r) \hat{e}_\theta$$

Futuramente se fará uma hipótese mais restritiva sobre a forma de $\vec{B}^0(\vec{x})$ (particularmente que $B_\theta^0 \equiv 0$). Diante disto se obtém:

$$\begin{aligned}
\delta \bar{f}_e = & \left(-i \left(\omega - m\omega_E - k_z V_{Ez}^0 - k_z n_z^0 v_{||} - m n_\theta^0 \frac{v_{||}}{r} \right) \right)^{-1} \\
& \cdot \left\{ \delta V_{Er} \frac{\partial}{\partial r} \ln N + v_{||} \left[\delta n_r \frac{\partial}{\partial r} \ln N + \delta V_{Er} \frac{m_e}{T_e} n_\theta^0 \omega_E \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{m_e}{T_e} \vec{V}_E^0 \cdot \frac{\partial \vec{n}^0}{\partial r} \delta V_{Er} + \frac{e \delta E_{||}}{T_e} - \frac{m_e}{T_e} \omega_E V_{E\theta}^0 \delta n_r \right] \right. \\
& + v_{||}^2 \left[\frac{m_e}{T_e} \frac{n_\theta^0}{r} \delta V_{Er} - \frac{m_e}{T_e} \omega_E n_\theta^0 \delta n_r - \frac{m_e}{T_e} \delta n_r \vec{V}_E^0 \cdot \frac{\partial \vec{n}^0}{\partial r} \right] \\
& + \frac{m_e v_\perp^2}{2T_e} \left[\nabla \cdot \delta \vec{V}_{E\perp} - \delta \vec{n} \cdot (\vec{n}^0 \cdot \nabla) \vec{V}_E^0 - \vec{n}^0 \cdot (\delta \vec{n} \cdot \nabla) \vec{V}_E^0 \right. \\
& \left. - \frac{n_\theta^0}{r} \delta V_{Er} \right] \left. \right\} + \frac{m_e v_{||}}{T_e} (\delta \vec{n} \cdot \vec{V}_E^0) \bar{f}_{eM}^0 \quad (II.37)
\end{aligned}$$

De posse de uma expressão para $\delta \bar{f}_e$ se poderá determinar as perturbações $\delta \vec{P}_e$ e $\delta E_{||}$. Em suma as eqs. (II.25), (II.28), (II.34) e (II.37) suplementadas pelas definições (II.29) - (II.32) e pelas hipóteses (II.35) e (II.36) constituem um sistema fechado de equações lineares aptas a descreverem as propriedades de estabilidade do sistema.

Antes é contudo necessário especificar o equilíbrio dos íons para dar sentido a vários termos presentes no sistema de equações. A análise pode ser (e foi) feita [37] para diversos tipos de equilíbrio. Como porém estaremos interessados em estudar os efeitos de anisotropia adotaremos a classe de equilíbrio do tipo

$$f_i^0 = f_i^0(H_\perp, H_z) \quad (II.38)$$

onde $H_{\perp}(H_z)$ é a energia dos íons na direção perpendicular (paralela) ao campo magnético de equilíbrio

$$H_z = \frac{1}{2} m_i v_z^2, \quad (\text{II.39})$$

$$H_{\perp} = \frac{m_i}{2} v_{\perp}^2 + e\phi_0(r). \quad (\text{II.40})$$

É fácil demonstrar que (II.38) satisfaz a equação para os íons no estado estacionário sempre que $B_{\theta}^0 = 0$, o que é adotado por razões de simplicidade. Adota-se também o calibre [1]

$$\delta A_z = 0, \quad (\text{II.41})$$

para a perturbação no potencial vetor. Nestas circunstâncias o deslocamento de linhas de campo magnético pode ser definido pela relação

$$\delta \vec{A} = \vec{\xi}_{\perp} \times \vec{B}^0. \quad (\text{II.42})$$

Alimentadas todas estas hipóteses na equação (II.34) para δf_i e efetuando uma seqüência de transformações apropriadas obtêm-se que

$$\begin{aligned} \delta f_i(\vec{x}, \vec{v}, t) = e\delta\phi(\vec{x}, t) \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \\ + e i \omega \lambda m_i \vec{\xi}_{\perp} \cdot \vec{v} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} - i \omega \lambda \bar{S} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

onde

$$\lambda = 1 + \frac{(k_z v_z / \omega)}{\partial f_i^0 / \partial H_{\perp}} \left(\frac{1}{m_i v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} f_i^0 - \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \right) \quad (\text{II.44})$$

e onde

$$\begin{aligned} \bar{S} &= m_i \int_{-\infty}^t dt' \vec{v}' \cdot \frac{d}{dt'} \vec{\xi}_{\perp}(\vec{x}', t') \\ &+ T_e \int_{-\infty}^t dt' \vec{\xi}_{\perp}(\vec{x}', t') \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \ln N(r') \\ &- \int_{-\infty}^t dt' \delta P_{e\parallel}(r') / N(r') \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Voltando à eq. (II.34) operamos sobre ela com $\vec{n}^0 \times m_i \int d^3v$ obtendo

$$\begin{aligned} \vec{n}^0 \times (\nabla \cdot \delta \vec{\Pi}_i - i\omega \delta \vec{M}_i) &= \vec{n}^0 \times \left[e \int d^3v \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \delta f_i \right. \\ &\left. + e \int d^3v \left(\delta \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \delta \vec{B}}{c} \right) f_i^0 \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Substituindo δf_i de (II.43) em (II.46) e manipulando apropriadamente todas as variáveis e hipóteses em jogo se obtém

$$\begin{aligned} \vec{n}^0 \times (\nabla \cdot \delta \vec{\Pi}_i - i\omega \delta \vec{M}_i) &= \vec{n}^0 \times \left\{ -i\omega e \int d^3v \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \right. \\ &\left. \bar{S} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} - \nabla \delta P_{e\parallel} - \nabla \left[\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla P_{\perp}(r) \right] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Substituindo agora o lado esquerdo de (II.47) na equação da força (II.27) e empregando o valor de $\delta \vec{P}_e$ obtido a par

tir do equilíbrio de elétrons fica-se com:

$$\begin{aligned}
 -i\omega e \int d^3v \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \bar{S} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} + \nabla_{\perp} (\delta P_{e\perp} - \delta P_{e\parallel}) = \\
 = \nabla_{\perp} (\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla P_{\perp}) + \frac{ik_z}{4\pi} B_z^0 \delta \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{4\pi} \nabla_{\perp} (B_z^0 \delta B) \quad . \quad (II.48)
 \end{aligned}$$

Finalmente observando que o lado direito de (II.48) pode ser identificado como a componente perpendicular da força magnetohidrodinâmica ideal clássica [32]

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{mhd} \equiv \nabla (\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla P_{\perp}) + \frac{1}{4\pi} \left\{ (\nabla \times \vec{B}^0) \times [\nabla \times (\vec{\xi}_{\perp} \times \vec{B}^0)] \right. \\
 \left. + \nabla \times [\nabla \times (\vec{\xi}_{\perp} \times \vec{B}^0)] \times \vec{B}^0 \right\} \quad (II.49)
 \end{aligned}$$

chega-se à anunciada equação de autovalores

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{mhd}(\vec{\xi}_{\perp}) = -i\omega e \int d^3v \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \bar{S} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \\
 + \nabla_{\perp} (\delta P_{e\perp} - \delta P_{e\parallel}) \quad , \quad (II.50)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \bar{S} = \lambda \int_{-\infty}^t dt' \left[m_i \vec{v}' \cdot \frac{d}{dt'} \vec{\xi}_{\perp}(\vec{x}', t') - T_e \xi_r(\vec{x}', t') \right. \\
 \left. \times \frac{\partial}{\partial r'} \ln N(r') - \frac{\delta P_{e\parallel}}{N(r')}(\vec{x}', t') \right] + (1-\lambda) m_i \vec{\xi}_{\perp} \cdot \vec{v} \quad . \quad (II.51)
 \end{aligned}$$

Estas serão as equações de partida para a derivação de relação de dispersão para plasmas de alto beta e anisotrópi

cos na presença de efeitos FLR. Nos capítulos que se seguem expandiremos uma vez mais esta equação de autovalores reduzindo-a, com isto, a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias homogêneas nas variáveis ξ_r e ξ_θ . Estabelecidas condições de contorno apropriadas (também homogêneas) teremos então um problema inteiramente homogêneo e, ao menos de forma implícita, disporemos de uma relação de dispersão válida para a fase de implosão (ou imediata à implosão) de θ -pinches de alta densidade e aplicável a perturbações de frequência típica $|\omega| \leq \omega_{ci}$. A referida expansão é feita no parâmetro $\epsilon \equiv \frac{r_{Li}}{L_\perp} < 1$ e é aplicada, consistentemente, em todos os termos da equação (II.50). Já em ordem zero a expansão fornece a relação de dispersão correta para plasmas homogêneos e anisotrópicos na temperatura sendo que a seguinte contribuição não nula será de ordem ϵ^2 e mostrará a existência de harmônicos de segunda ordem nas ressonâncias de ciclotron além de um efeito até agora desconhecido na forma de uma ressonância de Cherenkov [57-59]. Ambos os efeitos se revelaram de importância significativa na redução das razões de crescimentos dos modos ionociclotrônicos de Alfvén instáveis quando $T_{i\perp} > T_{i\parallel}$.

III - EQUAÇÕES BÁSICAS PARA UM θ -PINCH DE ALTO BETA

Introdução

Neste capítulo abordamos vários tópicos relacionados com o θ -pinch em sua fase de implosão ou imediata à implosão. Conjuntamente apresentamos o modelo matemático empregado na sua descrição.

Na secção inicial colocamos o problema físico tal como ele é encontrado e discutido na literatura corrente. Na secção de número dois apresentamos a situação geral de equilíbrio adotado e apontamos o tipo de onda a que o modelo parece melhor se adaptar. Na terceira secção introduzimos as equações básicas da teoria híbrido-cinética e a correspondente equação de autovalores dela derivada. Paralelamente fazemos uma apreciação da viabilidade do seu emprego para uma análise das oscilações do plasma. Finalmente numa última secção, como que adiantando um trabalho futuro, apresentamos a expansão da força magnetohidrodinâmica clássica ideal no parâmetro $\epsilon = r_{Li}/L_{\perp}$ (raio de Larmor para íons por distância típica de inhomogeneidade) e a reescrevemos numa base apropriada para uso posterior.

III.1 - A Instabilidade de Ondas Ion-Ciclotrônicas em Plasmas de Alto Beta

Durante a fase de implosão desenvolvem-se, nos θ -pinches de alto beta, acentuadas anisotropias nas distribuições de

energia tanto de íons como de elétrons. Este fenômeno é, em grande parte, consequência do aquecimento anômalo originado pelo estabelecimento de micro-instabilidades [11,38-42] criadas em resposta à aparição de correntes de deriva. Entretanto, o mecanismo não é de todo conhecido. A compressão adiabática certamente desempenha papel importante neste aquecimento, mas, não pode fornecer uma explicação completa.

Os elétrons, no entanto, são rapidamente isotropizados dado o aparecimento de modos de whistler de grande amplitude [43-45] os quais forçam o decaimento da energia de elétrons, numa escala de tempos da ordem de $\sqrt{2/(\beta_{e\perp} \omega_{ce}^2)}$. (Aqui $\beta_{e\perp} = 8\pi N(r) T_{e\perp} / |B_z^0(r)|^2$ é o valor de beta para elétrons na direção perpendicular ao campo magnético de equilíbrio).

Com relação aos íons, ignora-se, até o presente momento, o mecanismo pelo qual a sua energia é isotropizada, inexistindo, conseqüentemente, estimativa teórica da rapidez com que ela acontece. Em se tratando do caso espacialmente homogêneo, sem colisões e de alto beta, um estudo quase-linear [46] de modos ciclotrônicos de origem anisotrópica [46-48] prevê a isotropização parcial da temperatura dos íons numa escala temporal equivalente a vários períodos de giro de íons. Entretanto persiste, no caso, um efeito residual significativo ($T_{i\perp} \sim 2.5 T_{i\parallel}$) mesmo após decorridos vários períodos de giro. Uma explicação recentemente proposta [49] para este efeito, apoia-se no estímulo das perturbações do campo magnético devido às perturbações no movimento orbital dos íons. Na ausência de perturbações do campo magnético os íons apresentam-se com seus momentos magnéticos alinhados i.e. todos giram em planos paralelos colocados perpendi

cularmente a \vec{B}^0 . Havendo uma perturbação em \vec{B}^0 estes planos de giro perdem seu paralelismo e iniciam um movimento de oscilação (precessão do momento angular, $\dot{\vec{L}} = \vec{\omega} \times \vec{B}_\perp$, em torno de \vec{B}^0), transferindo energia cinética da direção perpendicular para a paralela. À medida que a perturbação de campo cresce (instabilidade) o movimento de precessão cresce proporcionalmente acentuando esta transferência de energia de uma direção para a outra. O processo é mantido até que a instabilidade seja saturada.

Não podemos ignorar, por outro lado, que num θ -pinch usual, tanto o perfil de densidade como o de campo magnético são necessariamente difusos: o quociente do raio de Larmor para íons pela distância típica de inhomogeneidade é freqüentemente finita embora quase sempre um pouco menor que a unidade [41,55]. Conseqüentemente é natural esperar que a inhomogeneidade espacial desempenhe papel relevante na estabilidade dos modos íon-ciclotrônicos sustentados por anisotropias.

A presença de inhomogeneidades como as apontadas no parágrafo anterior sugere que não se pode, de antemão, desprezar as correntes de deriva no equilíbrio inicial. Semelhantemente o campo elétrico radial de equilíbrio, criado pelo gradiente radial de pressão, pode interagir com o campo magnético das ondas, devendo portanto ser incluído na análise. Em adição já foi apontado [37,50] que tanto a pressão de elétrons como seus efeitos cinéticos ao longo das linhas de \vec{B} podem contribuir para as correções devidas aos efeitos de raios de Larmor finitos. Particularmente, perturbações na pressão paralela de elétrons podem ocasionar perturbações de campo elétrico também na direção paralela. Tratando-se então de ondas que se propagam paralelamente a

\vec{B}^0 é de se esperar que apareçam efeitos de ressonância os quais poderão afetar sensivelmente suas características de estabilidade.

III.2 - A Configuração de Equilíbrio

Com o objetivo de analisar os efeitos de inhomogeneidade espacial mencionada em III.1 consideraremos, no que segue, um θ -pinch com geometria e configuração de equilíbrio dadas pela Figura 1, abaixo.

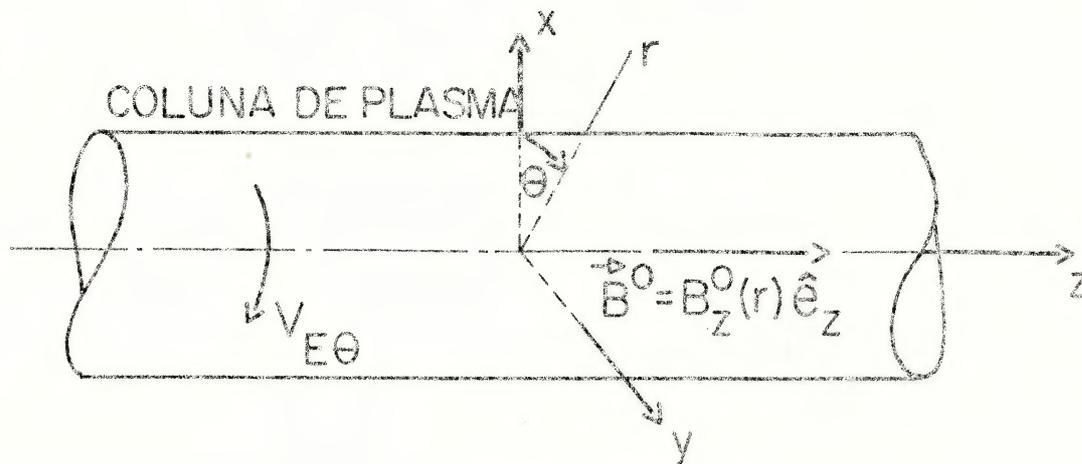


Figura 1.

Em particular estaremos interessados nas perturbações eletromagnéticas do equilíbrio estático definido por:

$$\vec{E}^0(\vec{x}) = E_r^0(r) \hat{e}_r = -\frac{\partial \phi^0}{\partial r}(r) \hat{e}_r, \quad (\text{III.1})$$

$$\vec{B}^0(\vec{x}) = B_z^0(r) \hat{e}_z. \quad (\text{III.2})$$

A presença de um campo radial de equilíbrio \bar{e} decorre, como se verá logo adiante, da hipótese de que as únicas correntes de equilíbrio são aquelas transportadas por elétrons.

Centrado o interesse nas perturbações (sustentadas por anisotropias) com frequências em torno de frequência de plasma para íons

$$\omega \sim \omega_{ci} = \frac{|e| B_z^0}{m_i c}, \quad (\text{III.3})$$

estes não disporão de suficiente tempo para completar movimentos de deriva. A hipótese fica fortalecida em situações onde os raios de Larmor são finitos pois nestes casos não só lhes falta o tempo como também o espaço necessário para efetuar giros de Larmor. Estas considerações, mais o fato de ser esta uma hipótese de trabalho freqüentemente empregada [1,37,50,51,56-59] nos encoraja a adota-la. Conseqüentemente nesta classe de equilíbrios as únicas constantes do movimento de íons serão as energias paralela e perpendicular e conseqüentemente teremos:

$$f_i^0 = f_i^0(H_{\perp}, H_z) \quad (\text{III.4})$$

onde

$$H_{\perp} = \frac{1}{2} m_i v_{\perp}^2 + e\phi^0(r) \quad (\text{III.5})$$

e

$$H_z = \frac{1}{2} m_i v_z^2. \quad (\text{III.6})$$

A equação (III.4) tem como implicação imediata o fato de que, no equilíbrio, os íons são confinados por ação puramente eletrostática:

$$\nabla P_{i\perp}^0 = eN\vec{E}^0 \quad . \quad (\text{III.7})$$

Este resultado provém da particular dependência de f_i^0 em r através de H_\perp , pois T_i , por hipótese, independe de r e

$$\begin{aligned} \nabla P_{i\perp}^0 &= \nabla \int m_i \vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\perp f_i^0(H_\perp, H_z) d^3v = \\ &= -e\vec{E}^0 \int m_i \vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\perp \frac{\partial f_i^0}{\partial H_\perp} d^3v = \\ &= e\vec{E}^0 N \quad , \end{aligned}$$

após uma integração por partes.

Já os elétrons, por se adotar

$$|\omega| \ll \omega_{ce} \quad , \quad r_{Le} \ll L_\perp \quad , \quad (\text{III.8})$$

dispõem de suficiente tempo e espaço para realizar movimentos de deriva transportando corrente. Por estas razões eles, contrariamente aos íons, são magneticamente confinados, i.e: semi-congelados (T_e não necessariamente nula) às linhas de campo. Sua velocidade média será a soma

$$\vec{v}_e^0 = \vec{v}_E^0 + \vec{v}_{de}^0 \quad , \quad (\text{III.9})$$

da velocidade de deriva transversal aos campos (típica do com

portamento de partículas), com a velocidade de deriva diamagnética (típica do seu aspecto de fluido), e onde

$$\vec{V}_E^0 = \frac{c \vec{E}^0 \times \vec{B}^0}{B^{02}} , \quad (\text{III.10})$$

$$\vec{V}_{de}^0 = \frac{c T_e \nabla N \times \vec{B}^0}{e N B^{02}} . \quad (\text{III.11})$$

Supomos ainda, para os elétrons no equilíbrio, uma distribuição maxwelliana isotrópica e a temperatura constante no espaço e escrita no referencial de deriva. A existência dos modos não lineares instáveis de whistler [43] garante a rápida isotropização de sua energia. Em decorrência a pressão de elétrons assume a forma

$$P_e^0 = N(r) T_e , \quad (\text{III.12})$$

grandeza esta que está diretamente relacionada com os campos de equilíbrio e a pressão de íons através da equação de balanço de pressões

$$\frac{d}{dr} \left[p_{i\perp}^0(r) + N(r) T_e + \frac{B_z^{02}(r)}{8\pi} \right] = 0 . \quad (\text{III.13})$$

Afora este vínculo entre as grandezas mencionadas nenhum outro é imposto, sendo então possível determinar unívoca e livremente (a menos de constante aditiva) qualquer uma delas sempre que as duas outras tiverem sido fixadas.

As perturbações desta configuração de equilíbrio se não supostas da forma

$$\delta\psi = \delta\tilde{\psi}(r) \exp[i(m\theta + k_z z - \omega t)] \quad (\text{III.14})$$

onde $\omega = \omega_r + iy$ é a frequência própria tomada complexa, k_z é o número de ondas paralelo à z (direção do campo magnético de equilíbrio) e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é o número de onda azimutal.

III.3 - As Equações Básicas

Conforme já mencionado no capítulo anterior e na introdução do presente, descreveremos uma coluna de plasma como a representada pela Figura 1 mediante o emprego de um modelo híbrido-cinético.

Tendo em vista a adoção de $|\omega| \ll \omega_{ce}$, $r_{Le} \ll L_\perp$ (equação (III.8)) pode-se obter uma equação cinética para elétrons mediante a expansão de sua equação de Vlasov [35,36]. Tal equação retém toda a informação relativa ao movimento dos elétrons paralelamente as linhas de campo magnético mas, em contrapartida contém apenas a informação a respeito do movimento médio de deriva dos mesmos no que tange à direção perpendicular.

Para os íons, entretanto, adotou-se $\omega \sim \omega_{ci}$ (equação III.3) e $\frac{r_{Li}}{L_\perp}$ finito, de forma que uma expansão similar de sua equação de movimento não seria justificável. Conseqüentemente os íons são descritos pela equação de Vlasov não expandida.

Paralelamente à expansão da equação de movimento de

elétrons e fazendo uso da ordenação corrente na teoria híbrido-cinética [35,36] expande-se também, de forma consistente no tocante à acuidade, as equações de campo eletromagnético.

No capítulo anterior resumimos como, partindo de uma tal descrição híbrido-cinética, se chega a uma equação integro-diferencial [37,50,51] (equação de autovalores) para os deslocamentos $\vec{\xi}_{\perp}$ das linhas de campo magnético (eq. (II.50)).

Basicamente $\vec{\xi}_{\perp}$ é definido por

$$\vec{\xi}_{\perp} = \frac{\vec{B}^0 \times \delta \vec{A}}{B^0{}^2} \quad , \quad (\text{III.15})$$

onde $\delta \vec{A} = \vec{\xi}_{\perp} \times \vec{B}^0$ é a perturbação do potencial vetor sobre o qual se impôs a condição [1,37,51] de calibre

$$\delta A_z = 0 \quad . \quad (\text{III.16})$$

Visando uma expressão mais conveniente da equação integro-diferencial acima mencionada, adotamos o símbolo \vec{F}_{mhd} para representar o termo de força da magnetohidrodinâmica ideal e incompressível:

$$\vec{F}_{\text{mhd}}(\vec{\xi}_{\perp}) = \nabla(\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla P^0) + \frac{1}{4\pi} \left\{ (\nabla \times \vec{B}^0) \times \delta \vec{B} + (\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}^0 \right\} \quad . \quad (\text{III.17})$$

Na secção (III.4), adiante, mostramos como, mediante a escolha de um calibre apropriado se pode escrever $\delta \vec{B}$ em termos de \vec{B}^0 e $\vec{\xi}_{\perp}$. Desta forma (III.17) e (II.49) são idênticas, a menos de calibre. Em (III.17) $\vec{p}_{\perp}^0 = \vec{p}_{i\perp}^0 + \vec{p}_e^0$, ou seja, \vec{p}_{\perp}^0 é a pressão cinética total perpendicular a \vec{B}^0 . Em termos deste sim-

bolo a equação de autovalores tem a forma:

$$\vec{F}_{\text{mhd}}(\vec{\xi}_{\perp}) = -i\omega e \int d^3v \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \bar{S} \frac{\partial f_i}{\partial H_{\perp}} + \nabla (\delta P_{e\perp} - \delta P_{e\parallel}) , \quad (\text{III.18})$$

onde o primeiro termo à direita, termo inercial, contém a informação relativa a inércia dos elétrons enquanto que o último, termo de pressão, representa o efeito de temperatura finita dos elétrons.

Em (III.18) as perturbações de pressão de elétrons ($\delta P_{e\perp}$ e $\delta P_{e\parallel}$) são funções explícitas de $\vec{\xi}_{\perp}$ e suas expressões finais são apresentadas no Apêndice A. A integral orbital \bar{S} é definida [37,50,51] por:

$$\bar{S} \equiv \lambda \int_{-\infty}^t dt' \left[m_i \vec{v}' \cdot \frac{d}{dt'} \vec{\xi}_{\perp}(\vec{x}', t') - T_e \xi_r(\vec{x}', t') \frac{d \ln N(r')}{dr'} - \frac{\delta P_{e\parallel}}{N(r')}(\vec{x}', t') \right] + (1-\lambda) m_i \vec{\xi}_{\perp} \cdot \vec{v} , \quad (\text{III.19})$$

onde a integração é entendida ao longo das órbitas não perturbadas dos íons:

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \vec{v}' , \quad (\text{III.20})$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{e}{m_i} \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v}' \times \vec{B}^0}{c} \right) ,$$

sendo ainda λ definida [37,51] como

$$\lambda = 1 + \frac{k_z v_z}{\omega} \left(\frac{\partial f_i^0 / \partial H_z}{\partial f_i^0 / \partial H_{\perp}} - 1 \right) . \quad (\text{III.21})$$

A forma (III.18) constitui-se numa equação para ξ_{\perp} . Usualmente dever-se-ia resolvê-la de forma exata e, mediante o emprego de condições de contorno apropriadas obter-se-ia um espectro de frequências possíveis para o plasma em questão. Alternativamente poder-se-ia ainda tentar o estabelecimento de condição de solubilidade para a mesma, condição esta expressável na forma de alguma relação de dispersão.

Tais objetivos mostraram-se contudo demais ambiciosos. Superamos, nos capítulos subsequentes, parte dos obstáculos encontrados expandindo uma vez mais a equação (III.18) no parâmetro $\epsilon = r_{Li}/L_{\perp}$. Tal parâmetro se presta a esta expansão adicional porque embora o raio de Larmor dos íons seja, na prática, comparável à distância típica de inhomogeneidade, o seu quociente é muito freqüentemente menor que a unidade [41,55] conduzindo a desenvolvimentos em série que certamente apresentam boa convergência.

Este programa é desenvolvido com sucesso nos capítulos IV e V onde se obtém um sistema de duas equações de segunda ordem linear e homogêneo para ξ_{\perp} . Adotando-se então condições de contorno apropriadas tem-se em mãos um sistema linear homogêneo passível ao menos de análise numérica imediata. Posteriormente (Capítulo VI) deduzimos e analisamos com mais detalhes uma relação de dispersão de validade local obtendo-se então resultados numéricos explícitos e manifestamente interessantes do ponto de vista do conhecimento detalhado do comportamento de plasmas de alto beta em máquinas lineares.

III.4 - O Termo de Força Magnetohidrodinâmica Ideal

Conforme já foi mencionado, a equação (III.18) será ex pan di da no parâmetro $\epsilon = r_{Lj}/L_{\perp}$ para dela se obter uma equação de autovalores que seja mais tratável quer do ponto de vista do estudo das soluções possíveis, quer daquele da existência de con di ç õ e s de sol u b i l i d a d e. Semelhante expansão deverá ser efetuada, consistentemente, no termo de força magnetohidrodinâmica bem co mo demais termos lá presentes.

Tendo por fim organizar a sistemática que levará a equação (V.2), dividimos o trabalho em etapas, apresentando nes ta altura, a expansão de \vec{F}_{mhd} e reservando para o Capítulo IV a expansão dos termos remanescentes.

Entretanto, é fundamental adiantar aqui que a ex pan si õ do termo inercial (termo na integral em \hat{S}) apresentará con tri bu i ç õ e s não nulas em ordem zero e em segunda ordem em ϵ , es ta com suficiente conteúdo físico-matemático (bem como grau de complexidade) para justificar uma interrupção do processo. Assim sendo, também para o termo de força magnetohidrodinâmica es te nder e mos a expansão até segunda ordem apenas. O ponto de partida será a equação exata (III.17). Para a configuração de equi l í b ri o inicial fixada pelas equações (III.1) e (III.2) teremos

$$\vec{F}_{mhd} = \nabla(\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla \vec{p}_{\perp}^0) + \frac{1}{4\pi} \{(\nabla \times \vec{B}^0) \times \delta \vec{B} + (\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}^0\} \quad (III.22)$$

Por outro lado, formando o produto vetorial de $\vec{\xi}_{\perp}$ [equação (III.15)] com \vec{B}^0 obtemos

$$\vec{B}^0 \times \vec{\xi}_\perp = \vec{n} \times (\vec{n} \times \delta\vec{A}) \quad (\text{III.23})$$

onde \vec{n} é o vetor unitário na direção de \vec{B}^0 . Tendo em conta o calibre (III.16), da (III.23) se obtêm, diretamente,

$$\delta\vec{A} = \vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0 \quad (\text{III.24})$$

Entretanto,

$$\delta\vec{B} = \nabla \times \delta\vec{A} \quad ,$$

ficando então

$$\delta\vec{B} = \nabla \times (\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0) \quad (\text{III.25})$$

Por outro lado, da equação de balanço de pressões (III.13) retiramos

$$\nabla P_\perp^0 = -\frac{1}{4\pi} B_Z^0 \nabla B_Z^0 \quad (\text{III.26})$$

Substituindo (III.25) e (III.26) em (III.22) obtêm-se, após algumas manipulações algébricas:

$$\vec{F}_{\text{mhd}}(\vec{\xi}_\perp) = -\frac{k_Z^2 B_Z^0{}^2}{4\pi} \vec{\xi}_\perp + \frac{B_Z^0{}^2}{4\pi} \nabla_\perp (\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp) + \frac{\hat{e}_r}{4\pi} \left(\frac{d}{dr} B_Z^0 \right) \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \quad (\text{III.27})$$

A equação (III.27) será mais convenientemente expressada, para uso futuro, na base $(\hat{e}_+, \hat{e}_-, \hat{e}_z)$ onde

$$\hat{e}_z = \vec{n} = \vec{B}^0 / B^0 \quad (\text{III.28})$$

e onde \hat{e}_+ e \hat{e}_- são relacionados com \hat{e}_x e \hat{e}_y (unitários nas direções x e y) mediante

$$\hat{e}_\pm \equiv 2^{-1/2}(\hat{e}_x \mp i\hat{e}_y); \hat{e}_x = 2^{-1/2}(\hat{e}_+ + \hat{e}_-), \hat{e}_y = 2^{-1/2}i(\hat{e}_+ - \hat{e}_-). \quad (\text{III.29})$$

Nesta nova base a (III.27) pode ser expressa como

$$\vec{F}_{\text{mhd}} = \sum_s \frac{\hat{e}_s B_z^{o2}}{4\pi\sqrt{2}} \exp(is\theta) (\ddot{\xi}_r + F_{rs}\dot{\xi}_r + F_{\theta s}\dot{\xi}_\theta + G_{rs}\xi_r + G_{\theta s}\xi_\theta), \quad (\text{III.30})$$

onde a soma \hat{e} sobre $s = +1, -1$, o ponto denota derivada em relação a r , ξ_r é a componente radial de $\vec{\xi}_\perp$, ξ_θ sua componente na direção θ e

$$\begin{aligned} F_{rs} &\equiv \frac{1-ms}{r} + \frac{d\ln B_z^{o2}}{dr}, \\ F_{\theta r} &\equiv \frac{im}{r}, \\ G_{rs} &\equiv \frac{1+ms}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \ln B_z^{o2}}{\partial r} - k_z^2, \\ G_{\theta s} &\equiv \frac{im}{r^2} (1+sm) + \frac{im}{r} \frac{d\ln B_z^{o2}}{dr} - isk_z^2. \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Neste trabalho convencionamos não indicar, no somatório, os limites inferior e superior, quando se trata de soma sobre $+1$ e -1 apenas.

Observe-se que dentro do contexto das ordenações a serem estabelecidas em (IV.2), para aqueles números de ondas de maior razão de crescimento no caso homogêneo [46], se tem $k_z r_{Li} \sim 1$

e o termo dominante da força magnetohidrodinâmica (III.22) será o coeficiente de ξ_{\perp} . Esta observação é indispensável quando em (IV.4) demonstramos que em ordem zero recuperamos a expressão corrente [46,52] para a relação de dispersão dos modos íon-ciclôtrônicos de Alfvén num meio homogêneo e em presença de anisotropia.

IV - ORDENAÇÃO E EXPANSÃO NO RAIO DE LARMOR DE IONS

Introdução

O objetivo primordial deste capítulo é apresentar as hipóteses modelísticas adicionais, físicas e matemáticas, que conduzirão (Capítulo V) a uma expressão da equação de autovalores (III.18), bem mais tratável tanto do ponto de vista analítico como sobretudo numérico.

Na secção de número um apresentamos as hipóteses básicas e fixamos o regime de oscilações que nos vai interessar. Em continuação expandimos o termo de pressão de elétrons (segunda secção) e calculamos a expressão de \hat{S} [eq.(III.19)] adotando a presença de instabilidade e independência de fase inicial (secção de número três). Na quarta secção damos a forma explícita do termo de força inercial. Finalmente na última secção reobtemos a relação de dispersão para ondas eletromagnéticas transversais de propagação paralela a \vec{B}^0 e de baixa frequência, mediante o uso de apenas termos dominantes na referida expansão.

IV.1 - Ordenação Básica e Regime de Oscilações

Conforme já mencionado, em θ -pinches de alto beta, é freqüente a configuração onde o raio de Larmor para ions é finito (da mesma ordem de grandeza da distância típica de inhomogeneidade), mas, geralmente um pouco menor que esta. Desta forma o parâmetro:

$$\epsilon = \frac{r_{Li}}{L_{\perp}} < 1 \quad , \quad (\text{IV.1})$$

onde $L_{\perp} = \left| \frac{\partial}{\partial r} \ln N \right|^{-1}$ é a distância característica de inhomogeneidade na densidade de partículas na direção perpendicular ao campo magnético de equilíbrio, se presta como parâmetro de expansão adicional. Tal expansão será levada a efeito nos termos de força inercial e de pressão de elétrons presentes na equação de autovalores (III.18).

Contudo, por não pretendermos restringir nosso estudo a ondas transversais de propagação paralela a \vec{B}^0 apenas, δB_z não será suposto pequeno comparado a δB_{\perp} . Desta escolha decorre que as linhas de campo magnético não terão o comportamento de fluido incompressível, i.é, devemos adotar

$$\left| \nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} \right| \sim \frac{\xi_{\perp}}{L_{\perp}} \quad . \quad (\text{IV.2})$$

Esta ordenação do $\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp}$ provém diretamente da divergência nula de \vec{B} donde se obtém

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta B_z + \nabla \cdot \delta \vec{B}_{\perp} = 0 \quad . \quad (\text{IV.3})$$

Fazendo uso da expressão de $\delta \vec{B}$ em termos de $\vec{\xi}_{\perp}$ [equação (III.25)] mais a dependência explícita em z das grandezas perturbadas [equação (III.14)] chegamos a

$$B_z^0 \nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} + \vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla B_z^0 + \delta B_z = 0 \quad . \quad (\text{IV.4})$$

Considerado δB_z finito e ∇B_z^0 também finito (presença de inhomogeneidade), resulta que, em geral, $\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp$ deverá ser finito, donde a escolha da ordenação (IV.2).

Já a escolha do regime de oscilações a ser considerado, toma por base o estudo do caso espacialmente homogêneo [45]. Naquela configuração, os modos íon-ciclotrônicos sustentados por anisotropia moderada ($v_{i\perp} \sim v_{i\parallel}$) que apresentam maior instabilidade são aqueles de números de onda em torno de

$$|k_z| \sim \frac{\omega_{pi}}{c}, \quad (IV.5)$$

com $\omega_{pi} = (4\pi n e^2 / m_i)^{1/2}$ sendo a frequência de plasma para íons. Desta forma é natural centrar a atenção neste regime. Em decorrência se obtêm para plasmas de alto beta

$$k_z r_{Li} \sim \frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}} \frac{v_{i\perp}}{c} \sim \sqrt{\beta_{i\perp}} \sim 1, \quad (IV.6)$$

onde $v_{i\perp}$ é a velocidade térmica perpendicular e

$$\beta_{i\perp} = \frac{8\pi p_{i\perp}^0}{B_z^2} \sim 1, \quad (IV.7)$$

é o valor de beta perpendicular interno para íons.

Observe-se que a ordenação definida por (IV.1), (IV.2), (IV.5) e (IV.7) admite, como possibilidade, o eventual aparecimento de ressonâncias de Cherenkov paralelamente ao campo magnético: pode-se vir a ter

$$\omega - k_z v_z = 0 \quad (IV.8)$$

e acontecendo para velocidades de onda em torno da velocidade térmica de íons ($v_{i\parallel} \sim v_z$). Como se verá, para que tal ressonância aconteça é suficiente considerar anisotropias moderadas.

$$v_{i\perp} \sim v_{i\parallel} \quad , \quad (IV.9)$$

ou equivalentemente,

$$(T_{i\perp}/T_{i\parallel})^{1/2} \sim 1 \quad . \quad (IV.10)$$

Esta configuração de fraca anisotropia será objeto de atenção maior quando abordarmos a análise numérica da relação de dispersão local para os modos íon-ciclotrônicos obtida no Capítulo VI.

IV.2 - A Expansão das Perturbações na Pressão de Elêtrons

Da ordenação acima imposta resulta que os termos de pressão eletrônica presentes na integral orbital \tilde{S} obedecem a seguinte razão, quando comparados com seu termo dominante:

$$\int_{-\infty}^t dt' m_i \vec{v}' \cdot \frac{d\vec{\xi}_{\perp}(\vec{x}', t')}{dt'} : T_e \int_{-\infty}^t dt' \xi_r \frac{d \ln N(r')}{dr'} : \int_{-\infty}^t dt' \frac{\delta P_{e\parallel}(\vec{x}', t')}{N(r')} \quad ,$$

donde

$$m_i v_i \omega_{ci} \xi_{\perp} : \frac{T_e \xi_{\perp}}{L_{\perp}} : \frac{\delta P_{e\parallel}}{N} \quad ,$$

ou

$$m_i v_i \omega_{ci} : \frac{1}{2} \frac{m_i v_i^2}{L_\perp} : \frac{1}{2} \frac{m_i v_i^2}{L_\perp} ,$$

ou

$$1 : \frac{v_i}{\omega_{ci} L_\perp} : \frac{v_i}{\omega_{ci} L_\perp} ,$$

ou

$$1 : \frac{r_{Li}}{L_\perp} : \frac{r_{Li}}{L_\perp} , \quad (\text{IV.11})$$

onde usamos o resultado do Apêndice A que estabelece ser o termo dominante de $\delta P_{e\parallel}$ igual a

$$\delta P_{e\parallel 0} = -NT_e \left(\xi_r \frac{\partial \ln N}{\partial r} + \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \right) . \quad (\text{IV.12})$$

Em adição, o termo dominante de $\delta P_{e\perp}$ (novamente conforme Apêndice A) assume a forma

$$\delta P_{e\perp 0} = \delta P_{e\parallel 0} + NT_e \frac{\omega}{k_z v_e} Z \left(\frac{\omega}{k_z v_e} \right) \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp , \quad (\text{IV.13})$$

onde $Z(x)$ é a função dispersão de Fried-Conte também definida no mesmo apêndice. (Como, tipicamente $|\omega|/k_z \ll v_e$, a anisotropia na perturbação da pressão de elétrons será certamente muito pequena).

Consequentemente se obtêm de (IV.11)-(IV.13)

$$\left| \nabla_\perp (\delta P_{e\perp} - \delta P_{e\parallel}) \right| \left| -i\omega e \int d^3v \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \bar{S} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_\perp} \right| \lesssim \epsilon^2 . \quad (\text{IV.14})$$

Das equações (IV.11) a (IV.14), conclue-se que a perturbação na pressão de elétrons precisa ser computada apenas até primeira ordem em ϵ a fim de se obter uma equação de autovalores que seja correta até ordem ϵ^2 inclusive. As expressões de ordem zero (IV.12) e (IV.13) contribuem em primeira ordem e os termos de primeira ordem, como se pode ver, são nulos, (Cf. Apêndice A) i.ê:

$$\delta P_{e\perp}^{(1)} = 0 = \delta P_{e\parallel}^{(1)} \quad (\text{IV.15})$$

não havendo, portanto, outra contribuição à equação de autovalores até ordem ϵ^2 inclusive.

IV.3 - A Expansão da Integral Orbital \bar{S}

Com base na equação (III.19) podemos definir \bar{S} como

$$\lambda \bar{S} \equiv \bar{S} - m_i \bar{\xi}_{\perp} \cdot \vec{v} = \lambda \int_{-\infty}^t dt' \left[-m_i \bar{\xi}_{\perp} \cdot \frac{d\vec{v}'}{dt'} - T_e \bar{\xi}_r(\vec{x}', t') - \frac{\delta P_{e\parallel}}{N(r')}(\vec{x}', t') \right] \quad (\text{IV.16})$$

o qual deve então obedecer à equação

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = -\frac{e}{c} \bar{\xi}_{\perp} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}^0) + T_e \nabla \cdot \bar{\xi}_{\perp} - e \vec{E}^0 \cdot \bar{\xi}_{\perp}, \quad (\text{IV.17})$$

onde o operador $\frac{d}{dt}$ denota

$$\frac{d}{dt} = -i\omega + \vec{v} \cdot \nabla + \frac{e}{m_i} \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \cdot \nabla_v \quad (IV.18)$$

Deve-se aqui notar que em (IV.17)

$$T_e \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp - e \vec{E}^0 \cdot \vec{\xi}_\perp = e \delta \phi \quad (IV.19)$$

onde $\delta \phi$ é o potencial eletrostático perturbado [37,50,51]. Observe-se ainda que este termo, portanto o potencial, é a correção devida ao raio de Larmor finito para a dinâmica dos íons.

Da ordem imposta [eq.(III.3) e eqs.(IV.1), (IV.6)] segue-se que, em primeira aproximação, o operador $\frac{d}{dt}$ assume a forma

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_0 = -i\Omega - \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (IV.20)$$

onde ϕ é o ângulo azimutal no espaço de velocidades e onde definimos

$$\Omega \equiv \omega - k_z v_z \quad (IV.21)$$

Na obtenção de (IV.20) fez-se uso da identidade

$$\frac{e}{m_i} \left(\frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \cdot \nabla_v = -\omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (IV.22)$$

e da equação (III.7). O campo elétrico juntamente com o termo $\vec{v} \cdot \nabla_\perp \sim v_{i\perp}/L_\perp \sim \omega_{ci} r_{Li}/L_\perp$ são manifestamente de ordem maior e são contribuem para a correção de primeira ordem do operador derivada temporal:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_1 = \vec{v} \cdot \nabla_{\perp} + \frac{e}{m_i} \vec{E}^0 \cdot \nabla_v \quad . \quad (\text{IV.23})$$

Todos os demais termos em $\frac{d}{dt}$ são identicamente nulos.

Expandindo igualmente \bar{S} e desdobrando a equação (IV.17) em seus sucessivos termos de ordem crescente obtemos:

$$(i\Omega + \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bar{S}_0 = \frac{e}{c} \vec{\xi}_{\perp} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}^0) \quad ; \quad (\text{IV.24})$$

$$(i\Omega + \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bar{S}_1 = (\vec{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} + \frac{e}{m_i} \vec{E}^0 \cdot \nabla_v) \bar{S}_0 - T_e \nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} + e \vec{E}^0 \cdot \vec{\xi}_{\perp} \quad ; \quad (\text{IV.25})$$

$$(i\Omega + \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bar{S}_2 = (\vec{v}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} + \frac{e}{m_i} \vec{E}^0 \cdot \nabla_v) \bar{S}_1 \quad . \quad (\text{IV.26})$$

A fim de executar a integração no ângulo ϕ adotaremos também aqui a base ortonormal definida em (III.29). Em termos dela se pode expressar

$$\vec{v} \times \vec{B}^0 = -iv B_z^0 2^{-1/2} (\hat{e}_+ e^{i\phi} - \hat{e}_- e^{-i\phi}) \quad . \quad (\text{IV.27})$$

De maneira geral, podemos introduzir os operadores ∇_{\pm} e as componentes de vetores ψ_{\pm} mediante as relações

$$\begin{aligned} \nabla_{\pm} &\equiv 2^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i \frac{\partial}{\partial y} \right) ; & \psi_{\pm} &\equiv 2^{-1/2} (\psi_x \mp i\psi_y) \quad ; \\ \frac{\partial}{\partial x} &= 2^{-1/2} (\nabla_+ + \nabla_-) \quad ; & \psi_x &= 2^{-1/2} (\psi_+ + \psi_-) \quad ; \\ \frac{\partial}{\partial y} &= 2^{-1/2} i (\nabla_+ - \nabla_-) \quad ; & \psi_y &= 2^{-1/2} i (\psi_+ - \psi_-) \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Empregando as expressões acima podemos, de imediato, reescrever a (IV.24) como

$$(i\Omega + \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bar{S}_0 = \sum_s \sigma_s e^{is\phi} , \quad (IV.29)$$

onde σ_s é definida como

$$\sigma_s = \frac{-siev_{\perp} B_z^0 \xi_s}{\sqrt{2} c} , \quad (IV.30)$$

com $s = +1, -1$.

Similarmente podemos escrever a equação diferencial orbital em primeira ordem como

$$(i\Omega + \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bar{S}_1 = \sum_s \exp(is\phi) \left[\frac{v_{\perp} \nabla_s}{\sqrt{2}} + \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{is}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \bar{S}_0 - \sigma_0 , \quad (IV.31)$$

desde que se observe que

$$\vec{v}_{\perp} \cdot \nabla = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_s v_{\perp} \exp(is\phi) \nabla_s , \quad (IV.32)$$

$$\frac{e}{m_i} \vec{E}^0 \cdot \nabla_v = \sum_s \exp(is\phi) \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{is}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \quad (IV.33)$$

e se tenha definido

$$\rho_s \equiv \frac{eE_r^0}{2m_i} \exp(-is\theta) \quad (IV.34)$$

e

$$\sigma_0 \equiv T_e \nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} - e \vec{E}^0 \cdot \vec{\xi}_{\perp} \quad (IV.35)$$

com $s = +1, -1$.

Seguindo um procedimento idêntico e usando a (IV.31) e (IV.32), podemos ainda reescrever a equação diferencial orbital em segunda ordem como:

$$(i\Omega + \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial \phi}) \bar{S}_2 = \sum_s \exp(is\phi) \left[v_{\perp} \nabla_s + \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{is}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \bar{S}_1 . \quad (IV.36)$$

O passo seguinte será a determinação de soluções das equações (IV.29), (IV.31) e (IV.36). Necessitamos, entretanto, de uma condição adicional para que as referidas soluções sejam únicas. A condição que adotamos é a de que as soluções independam da fase inicial do ângulo ϕ . Esta condição mais a de que elas sejam instáveis $\text{Im}(\omega) > 0$ garante que a solução da equação de ordem zero tenha a forma

$$\bar{S}_0 = \omega_{ci}^{-1} \sum_s \int_{-\infty}^{\phi} d\phi' \exp[-i\Lambda(\phi - \phi')] \sigma_s \exp(is\phi') , \quad (IV.37)$$

onde definimos

$$\Lambda \equiv \frac{\Omega}{\omega_{ci}} . \quad (IV.38)$$

Efetuada agora uma integração trivial chegamos a que

$$\bar{S}_0 = \sum_s \mu_s \exp(is\phi) , \quad (IV.39)$$

com μ_s definido por

$$\mu_s \equiv - \frac{sm_i v_{\perp} \xi_s}{\sqrt{2} (\Lambda + s)} . \quad (IV.40)$$

Por argumentos e procedimentos idênticos obtemos também as soluções das equações diferenciais orbitais em primeira e segunda ordem, respectivamente,

$$\bar{S}_1 = -i \sum_{p,s} \exp[i(p+s)\phi] [\Omega + (p+s)\omega_{ci}]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} v_{\perp} \nabla_s + \frac{\rho_s}{v_{\perp}} (1-ps) \right] \mu_p + i\sigma_0 \Omega^{-1}, \quad (\text{IV.41})$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_2 = & - \sum_{p,q,s} \exp[i(p+q+s)\phi] [\Omega + (p+q+s)\omega_{ci}]^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} v_{\perp} \nabla_s + \rho_s \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{s(p+q)}{v_{\perp}} \right] \right\} \\ & \left\{ [\Omega + (p+q)\omega_{ci}]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} v_{\perp} \nabla_q + \frac{\rho_q}{v_{\perp}} (1-pq) \right] \mu_p \right\} + \\ & + \sum_s \exp(is\phi) [\Omega - (\Omega + s\omega_{ci})]^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} v_{\perp} \nabla_s \sigma_0. \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Finalmente retomamos a definição de \bar{S} e, após observar que $m_i \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{\xi}_{\perp} \sim \bar{S}$ é de ordem zero, segue de (IV.16), (IV.39), (IV.41) e (IV.42) que

$$\bar{S}_0 = \lambda \sum_s \mu_s \exp(is\phi) + m_i \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{\xi}_{\perp}, \quad (\text{IV.43})$$

$$\bar{S}_1 = \lambda \bar{S}_1, \quad (\text{IV.44})$$

$$\bar{S}_2 = \lambda \bar{S}_2. \quad (\text{IV.45})$$

Estes serão os valores que usaremos, na secção seguinte, para o cálculo do termo de força inercial da equação de autovalores. Como já mencionado eles são corretos até ordem ϵ^2 e como veremos carregam suficiente conteúdo físico para justificar o nível de aproximação.

IV.4 - 0 Termo de Força Inercial

Nesta secção calcularemos o termo de força inercial da equação de autovalores (III.18) dentro da mesma ordem de aproximação que a já usada na secção anterior para o cálculo das integrais orbitais. Denotaremos este termo pelo símbolo \vec{F} sendo sua forma exata dada pela expressão

$$\vec{F} \equiv -i\omega e \int d^3v \left(\vec{E}^0 + \frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \tilde{S} \quad , \quad (\text{IV.46})$$

e os termos de ordem zero, um e dois dados, respectivamente, por

$$\vec{F}_0 \equiv -i\omega e \int d^3v \left(\frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \tilde{S}_0 \quad , \quad (\text{IV.47})$$

$$\vec{F}_1 \equiv -i\omega e \int d^3v \vec{E}^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \tilde{S}_0 - i\omega e \int d^3v \left(\frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \tilde{S}_1 \quad , \quad (\text{IV.48})$$

$$\vec{F}_2 \equiv -i\omega e \int d^3v \vec{E}^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \tilde{S}_1 - i\omega e \int d^3v \left(\frac{\vec{v} \times \vec{B}^0}{c} \right) \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \tilde{S}_2 \quad , \quad (\text{IV.49})$$

com \tilde{S}_0 , \tilde{S}_1 e \tilde{S}_2 fornecidos por (IV.43) a (IV.45).

A integração no ângulo azimutal ϕ pode ser efetuada de imediato, reduzindo-se, com isto, as integrais triplas a integrais duplas. Para o termo de ordem zero achamos

$$\vec{F}_0 = \frac{i\omega e}{c} N \vec{\xi}_{\perp} \times \vec{B}^0 - \frac{\omega e^2 B^0{}^2}{2c^2} \int_S I_{0s} \hat{e}_s \xi_{-s} \quad , \quad (\text{IV.50})$$

onde definimos a integral de velocidades

$$I_{0s} \equiv \int d^3v \frac{v_{\perp}^2 \lambda}{(\Omega - s\omega_{ci})} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \quad (IV.51)$$

Para o termo de primeira ordem obtemos um vetor iden-
ticamente nulo

$$\vec{F}_1 = 0 \quad (IV.52)$$

pois todos os integrandos [vide eqs. (IV.41), (IV.44) e (IV.48)]
são proporcionais a $\exp(is\phi)$ com $s \neq 0$.

Finalmente, substituindo as equações (IV.42) e (IV.43)
em (IV.49), e efetuando a integração em ϕ , achamos

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 = & e\omega_0 \vec{E}^0 I_0 - \sqrt{2}\mu c \vec{E}^0 \sum_s s (I_s \nabla_s \xi_{-s} + I_{2s} \xi_{-s}) - \sqrt{2} \frac{\mu c}{e} \sum_s s I_s \hat{e}_s \nabla_{-s} \sigma_0 - \\ & - \sum_{p,q,s,t} \hat{e}_t \rho_t \mu \delta_{p+q+s+t,0} \left(\frac{B_z^0}{\sqrt{2}} I_{3,pqs}^{(4)} \nabla_q \nabla_s \xi_p + \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} I_{4,pqs}^{(4)} + \right. \right. \\ & + B_z^0 \rho_s [2 - s(p+q)] I_{3,pqs}^{(2)} \left. \right\} \nabla_q \xi_p + [(1-pq) \rho_q B_z^0 I_{3,pqs}^{(2)} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} I_{5,pqs}^{(4)}] \nabla_s \xi_p + \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} I_{6,pqs}^{(4)} + (1-pq) I_{7,pqs}^{(2)} + \right. \\ & \left. + [2 - s(p+q)] \rho_s I_{5,pqs}^{(2)} \right\} \xi_p \quad , \quad (IV.53) \end{aligned}$$

onde adotamos as seguintes definições:

$$I_0 \equiv \int d^3v \frac{\lambda}{\Omega} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \quad , \quad (IV.54)$$

$$I_s \equiv \int d^3v v_{\perp}^2 \lambda \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \left[\Omega (\Omega - s\omega_{ci}) \right]^{-1} \quad , \quad (IV.55)$$

$$I_{2s} \equiv \int d^3v \frac{\lambda}{\Omega} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \left[\frac{v_{\perp}^2}{B_z^0} \nabla_s \left(\frac{B_z^0}{\Omega - s\omega_{ci}} \right) + \frac{2^{3/2} \rho_s}{\Omega - s\omega_{ci}} \right], \quad (\text{IV.56})$$

$$I_{3,pqs}^{(n)} \equiv \int d^3v v_{\perp}^{n\lambda} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} (\Omega + p\omega_{ci})^{-1} \left[\Omega + (p+q)\omega_{ci} \right]^{-1} \\ \times \left[\Omega + (p+q+s)\omega_{ci} \right]^{-1}, \quad (\text{IV.57})$$

$$I_{4,pqs}^{(n)} \equiv \int d^3v v_{\perp}^{n\lambda} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \left[\Omega + (p+q+s)\omega_{ci} \right]^{-1} \\ \times \nabla_s \left\{ \frac{B_z^0}{(\Omega + p\omega_{ci}) \left[\Omega + (p+q)\omega_{ci} \right]} \right\}, \quad (\text{IV.58})$$

$$I_{5,pqs}^{(n)} \equiv \int d^3v v_{\perp}^{n\lambda} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \left[\Omega + (p+q+s)\omega_{ci} \right]^{-1} \\ \times \left[\Omega + (p+q)\omega_{ci} \right]^{-1} \nabla_q \left(\frac{B_z^0}{\Omega + p\omega_{ci}} \right) \quad (\text{IV.59})$$

$$I_{6,pqs}^{(n)} \equiv \int d^3v v_{\perp}^{n\lambda} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \left[\Omega + (p+q+s)\omega_{ci} \right]^{-1} \\ \times \nabla_s \left\{ \left[\Omega + (p+q)\omega_{ci} \right]^{-1} \nabla_q \left(\frac{B_z^0}{\Omega + p\omega_{ci}} \right) \right\}, \quad (\text{IV.60})$$

$$I_{7,pqs}^{(n)} \equiv \int d^3v v_{\perp}^{n\lambda} \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \left[\Omega + (p+q+s)\omega_{ci} \right]^{-1} \\ \times \nabla_s \left\{ \left[\Omega + (p+q)\omega_{ci} \right]^{-1} B_z^0 \rho_q \left[\Omega + p\omega_{ci} \right]^{-1} \right\}, \quad (\text{IV.61})$$

e onde se designa

$$\mu \equiv \frac{e^2 B_z^0 \omega}{2^{3/2} c^2} \quad . \quad (\text{IV.62})$$

Tendo facilitado o cálculo das integrais na componente angular ϕ da velocidade, a representação de \vec{v} na base $(\hat{e}_+, \hat{e}_-, \hat{e}_z)$ completou seu papel principal. Como, por outro lado, adotamos uma simetria cilíndrica para a configuração de equilíbrio \bar{e} natural procurarmos uma representação de \vec{v} em termos de ξ_r e ξ_θ , as componentes radial e azimutal de $\vec{\xi}_\perp$. Também os operadores ∇_s devem ser substituídos por operadores mais convencionais em termos de $\frac{\partial}{\partial r}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Obtêm-se isto expressando

$$\nabla_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-is\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - s \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad . \quad (\text{IV.63})$$

Semelhantemente e pelo uso das equações (IV.28) podemos escrever

$$\xi_s \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-is\theta} (\xi_r - is \xi_\theta) \quad . \quad (\text{IV.64})$$

Finalmente, lembrada a dependência explícita em θ de ξ_s , podemos obter:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \xi_s \equiv i(m-s)\xi_s \quad . \quad (\text{IV.65})$$

Mediante o uso destas expressões [eqs. (IV.63), (IV.64), (IV.65)] juntamente com a forma de \vec{v}_0 e \vec{v}_1 [eqs. (IV.50), (IV.52)], e a equação (IV.53) para \vec{v}_2 podemos escrever \vec{v} , correta até or

dem ϵ^2 , inclusive, como

$$\vec{f} = \sum_s e^{is\theta} (A_{rs} \ddot{\xi}_r + A_{\theta s} \ddot{\xi}_\theta + B_{rs} \dot{\xi}_r + B_{\theta s} \dot{\xi}_\theta + C_{rs} \xi_r + C_{\theta s} \xi_\theta) \bar{e}_s, \quad (\text{IV.66})$$

onde o ponto denota derivada com relação a r e os coeficientes A , B e C são funções de r , ω , k_z , m e demais parâmetros do plasma. Em trabalho anterior [57-59] demos a forma explícita destes coeficientes. Entretanto, aqui, se revelará mais eficiente (sobretudo com relação à análise local e numérica posterior) separar claramente os termos em ordem zero dos termos em ordem ϵ^2 . Isto é feito, com mais detalhes, no Capítulo V.

IV.5 - O Limite para Plasma Espacialmente Homogêneo

A validade das expansões usadas para a equação de autovalores (III.18) bem como o modelo híbrido-cinético em si mesmo é aqui testada no limite de plasma espacialmente homogêneo. Semelhante teste de validade é efetuado com a derivação da relação de dispersão para perturbações eletromagnéticas transversais e de propagação paralela a \vec{B}^0 . Para tanto escreveremos a equação de autovalores (III.18) em ordem zero em ϵ , usando apenas o termo dominante de (III.27), a expressão de \vec{f}_0 dada por (IV.50) e abandonando o termo de pressão eletrônica que como visto [equação (IV.3)] só contribui em primeira ordem. Com isto a equação de autovalores se reduz a uma simples equação algébrica da forma

$$-\frac{k_z^2}{4\pi} B_z^0 \vec{\xi}_\perp \approx \vec{F}_0 = \frac{i\omega e}{c} (\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0) - \frac{e^2 B_z^0}{2c^2} \sum_s I_{os} \vec{e}_s \xi_s \quad (IV.67)$$

Fazendo, em seguida, uso das relações (III.29) e (IV.28) podemos obter

$$\sum_s I_{os} \vec{e}_s \xi_s = \frac{I_{o+} + I_{o-}}{2} \vec{\xi}_\perp + \frac{I_{o+} - I_{o-}}{2} (\vec{e}_x \xi_x - \vec{e}_y \xi_y) \quad (IV.68)$$

ou então

$$\sum_s I_{os} \vec{e}_s \xi_s = \frac{I_{o+} + I_{o-}}{2} \vec{\xi}_\perp + i \frac{I_{o+} - I_{o-}}{2} \frac{\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0}{B^0} \quad (IV.69)$$

de forma que a (IV.67) pode ser reescrita como

$$-\frac{k_z^2}{4\pi} \vec{\xi}_\perp = \frac{i\omega e N}{c} \frac{\vec{\xi}_\perp \times \vec{n}}{B_z^0} - \frac{\omega e^2}{2c^2} \frac{I_{o+} + I_{o-}}{2c^2} \vec{\xi}_\perp - \frac{i\omega e^2}{2c^2} \frac{I_{o+} - I_{o-}}{2} (\vec{\xi}_\perp \times \vec{n}) \quad (IV.70)$$

Se observarmos aqui que $(\vec{\xi}_\perp, \vec{\xi}_\perp \times \vec{n})$ formam uma base ortogonal no plano perpendicular a \vec{B}^0 , podemos então separar, de imediato, as componentes de (IV.70) que após pequenos rearranjos podem ser escritas na forma

$$k_z^2 c^2 = \pi e^2 \omega (I_{o+} + I_{o-}) \quad (IV.71)$$

$$\omega_{pe}^2 = \pi e^2 \omega_{ce} (I_{o+} - I_{o-})$$

Multiplicando a primeira das equações do sistema (IV.71) por ω_{ce} , a segunda por ω e somando e subtraindo uma da outra, termo a termo, obteremos duas outras equações equivalentes e que

podem ser escritas numa única forma

$$k_z^2 c^2 = -s\omega \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} + 2\pi e^2 \omega I_{0-s} . \quad (IV.72)$$

A (IV.71) é a relação de dispersão anunciada tendo contudo validade assegurada para qualquer distribuição inicial de Ions. Se particularizarmos

$$f_i^0(H_\perp, v_z) = N_0 \left(\frac{m_i}{2\pi T_{i||}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_i v_z^2}{2T_{i||}}\right) f_\perp(H_\perp) , \quad (IV.73)$$

ou seja, adotarmos f_i^0 maxwelliana na direção z mantendo, contudo, seu caráter arbitrário na direção perpendicular, obteremos

$$2\pi e^2 \omega I_{0s} = \omega_{pi}^2 \left\{ \frac{\omega}{k_z v_{i||}} I_{0z} \left(\frac{\omega - s\omega_{ci}}{k_z v_{i||}} \right) + \left(\frac{I_0^3}{v_{i||}^2} - I_0 \right) \left[1 + \frac{\omega - s\omega_{ci}}{k_z v_{i||}} z \left(\frac{\omega - s\omega_{ci}}{k_z v_{i||}} \right) \right] \right\} \quad (IV.74)$$

onde

$$I_0^n = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp^n f_\perp(H_\perp) . \quad (IV.75)$$

A (IV.72) com seu último termo a direita substituído por (IV.74) e (IV.75) constitui-se na relação de dispersão, em ordem zero, para a classe de equilíbrios acima especificada.

Finalmente, numa última particularização de f_i^0 , podemos reduzi-la a uma bi-maxwelliana a temperaturas constantes mas distintas nas duas direções, adotando

$$f_{\perp}(H_{\perp}) = \frac{m_i}{2\pi T_{i\perp}} \exp\left(-\frac{H_{\perp}}{T_{i\perp}}\right), \quad (\text{IV.76})$$

quando então podemos determinar

$$\begin{aligned} I_0^1 &= 1, \\ I_0^3 &= \frac{2T_{i\perp}}{m_i} \equiv v_{i\perp}^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

Nesta situação de equilíbrio completamente específica do recuperamos um resultado bem conhecido [52] e cuja validade já fora demonstrada anteriormente [37] no contexto da equação de autovalores (III.18) aqui adotada:

$$\begin{aligned} k_z^2 c^2 = \pm \omega \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} + \omega_{pi}^2 \left\{ \frac{\omega}{k_z v_{i\parallel}} Z\left(\frac{\omega \pm \omega_{ci}}{k_z v_{i\parallel}}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}} - 1\right) \left[1 + \frac{\omega \pm \omega_{ci}}{k_z v_{i\parallel}} Z\left(\frac{\omega \pm \omega_{ci}}{k_z v_{i\parallel}}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.78})$$

Convém observar que a relação de dispersão (IV.78) tem validade mais ampla no sentido de que podemos considerar não apenas bimaxwellianas, mas, qualquer distribuição de íons que seja maxwelliana na direção z tão somente. Para tanto é suficiente definir, como feito na referência 46, uma temperatura efetiva $T_{i\perp} = m_i I_0^3 / 2$ e normalizar f_{\perp} de modo a ter $I_0^1 = 1$.

Fica assim estabelecido um vínculo claro entre o tipo de expansão que adotamos e os resultados que se conhecem na literatura, para ondas eletromagnéticas transversais de propagação paralela a \vec{B}^0 , para o caso de oscilações de baixa frequên-

cia $|\omega| \lesssim \omega_{ci}$, na presença de anisotropia da temperatura.

V - RESSONÂNCIA DE CHERENKOV COMO EFEITO FLR

Introdução

Neste capítulo abordaremos a equação de autovalores na sua forma expandida e correta até ordem ϵ^2 . A primeira seção será devotada a obtenção desta equação. Na seção de número dois apresentamos um conjunto de condições de contorno o qual se revela superdeterminado. A condição em excesso é então apontada como a relação de dispersão do plasma. Na terceira seção observamos a existência de termos com ressonância de Cherenkov nos coeficientes do sistema de equações de autovalores, comentamos sua relevância como um efeito FLR em plasmas de alto beta e apresentamos um mecanismo físico pelo qual esta ressonância poderia transferir energias de íons da direção perpendicular para a direção paralela.

V.1 - A Equação de Autovalores

Estamos, nesta altura, aptos a obter a versão expandida de (III.18). Para tanto coletamos os diversos termos em ordem zero e ordem ϵ^2 de que ela é composta nesta aproximação, e os reescrevemos na base polarizada (\tilde{e}_+ , \tilde{e}_-). Para \vec{F}_{mhd} usamos a (III.27), para o termo de pressão de elétrons empregamos as equações (IV.12) e (IV.13) e finalmente para o termo de força inercial \vec{F} usamos (IV.53) suplementada pelas definições (IV.54)-(IV.62). Observando que

$$\nabla_{\perp} = \sum_s \tilde{e}_{-s} \nabla_s, \quad (V.1)$$

e empregando (IV.63) juntamente com a dependência explícita das grandezas perturbadas em θ , equação (III.14), podemos eliminar as derivadas em relação a esta variável angular e ficar com uma equação diferencial em r . Na sua forma mais geral, quando expandida, a equação (III.18) passa a ser:

$$D_s^0 \zeta_s + D_s^+ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \zeta_s + D_{-s}^- \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \zeta_{-s} = 0 \quad (V.2)$$

onde definimos

$$\zeta_s = \xi_r - is\xi_{\theta}, \quad (V.3)$$

$$D_s^0 = k_z^2 c^2 - s\omega \frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}} + 4\omega_{ci}^2 J_s^{21}, \quad (V.4)$$

$$D_s^+ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = A_s^+ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(m-s)^2}{r^2} \right] + B_s^+ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-ms}{r} \right) + C_s^+, \quad (V.5)$$

$$D_{-s}^- \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = A_s^- \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1+2ms}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m^2-1}{r^2} \right] + B_s^- \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1+ms}{r} \right) + C_s^-, \quad (V.6)$$

$$A_s^+ = J^Z - \frac{c^2}{2} - 2v^2 J_0^{21} + 2v^2 J_s^{21} - J_0^{41} + 2J_s^{41} - J_{2s}^{41}, \quad (V.7)$$

$$A_s^- = J^Z - \frac{c^2}{2} - 2v^2 J_0^{21} + 2v^2 J_s^{21} - J_0^{41} + \frac{1}{2} J_s^{41} - \frac{1}{2} J_{-s}^{41}, \quad (V.8)$$

$$B_s^+ = \bar{N}J^Z + \bar{B}(2sJ_{2s}^{42} - 2sJ_s^{42} - c^2) + \bar{\rho}(16J_s^{21} - 8J_0^{21} - 8J_{2s}^{21} - 8v^2J_0^{01}) , \quad (V.9)$$

$$B_s^- = \bar{N}J^Z + \bar{B}(sJ_{-s}^{42} - \frac{1}{2}J_{-s}^{41} + \frac{1}{2}J_s^{41} - c^2) + \bar{\rho}(8J_{-s}^{21} - 8J_0^{21} - 8v^2J_0^{01}) , \quad (V.10)$$

$$\begin{aligned} C_s^+ = & 4 \frac{\bar{B}}{r} (1 - ms)(J_s^{41} - J_{2s}^{41} - sJ_{2s}^{42}) + 8 \frac{\bar{\rho}}{r} (1 - ms)(sJ_s^{22} - 2J_s^{21} + 2J_{2s}^{21}) + \\ & + 16\bar{\rho}\bar{\rho}J_s^{01} + 4s(\bar{\rho} + \bar{\rho}/r) J_s^{22} - 2(\bar{B} + \bar{B}/r)(J_{2s}^{41} - J_s^{41} + sJ_s^{42}) + \\ & + \bar{B}\bar{B}(2J_s^{43} + 4sJ_{2s}^{42} + 4J_{2s}^{41} - 4J_s^{41}) + \bar{\rho}\bar{B}(16J_s^{21} - 20sJ_s^{22} - 16J_{2s}^{21}) , \end{aligned} \quad (V.11)$$

$$\begin{aligned} C_s^- = & 16\bar{\rho}\bar{\rho}J_{-s}^{01} + \frac{1}{4}(\bar{B} - \bar{B}/r)(J_s^{41} - J_{-s}^{41} + 2sJ_{-s}^{42}) + \bar{B}\bar{B}J_{-s}^{43} + 2(\bar{\rho} - \bar{\rho}/r)(J_{-s}^{21} - J_s^{21}) + \\ & + \bar{\rho}\bar{B}(2J_s^{21} - 2J_{-s}^{21} + 8sJ_{-s}^{22}) . \end{aligned} \quad (V.12)$$

Em (V.4) e (V.7)-(V.12) denotamos

$$J^Z = \frac{v^2}{2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \frac{\omega}{k_z v_e} Z\left(\frac{\omega}{k_z v_e}\right) , \quad (V.13)$$

$$J_p^{NM} = -\frac{1}{2} \pi e^2 \frac{\omega}{\omega_{ci}^3} \int d^3v v_{\perp}^N \frac{\partial f_i^0}{\partial H_{\perp}} \frac{\lambda}{(\Lambda + p)^M} , \quad (V.14)$$

$$v^2 = T_e/m_i , \quad (V.15)$$

$$\bar{B} = \frac{d}{dr} \ln B_z^0(r) , \quad (V.16)$$

$$\hat{N} = \frac{d}{dr} \ln N(r) ; \quad \hat{\tilde{N}} = \frac{d}{dr} \hat{N} , \quad (V.17)$$

$$\hat{\rho} = \frac{eE_r^0}{2m_i} , \quad (V.18)$$

$$\hat{\tilde{B}} = \frac{d}{dr} \hat{B} , \quad (V.19)$$

$$\hat{\tilde{\rho}} = \frac{d}{dr} \hat{\rho} , \quad (V.20)$$

sendo que os demais símbolos já foram definidos anteriormente.

Comparando o primeiro termo de (V.2) com (IV.72) concluimos que

$$D_s^0 \zeta_s = 0 \quad (V.21)$$

é a relação de dispersão para o caso homogêneo anisotrópico [37, 46,52] pertinente às ondas polarizadas à direita ou à esquerda conforme seja s igual a $+1$ ou -1 , respectivamente.

Como se vê, não obtemos, com a expansão, uma relação de dispersão explícita, mas, um sistema de duas equações diferenciais ordinárias, lineares, homogêneas e de segunda ordem, nas variáveis $\zeta_s = \xi_r - is\xi_\theta$. Entretanto, uma informação relevante, concernente ao mecanismo físico que determina o comportamento das perturbações, é obtida por simples inspeção dos coeficientes do sistema (V.2). As expressões para as correções à relação de dispersão do plasma homogêneo anisotrópico [eq.(V.5), (V.6)] contêm termos em J_{2s}^{NM} , que representam harmônicos de segunda ordem nas ressonâncias de ciclotron, mais termos proporcionais a

J_0^{NM} que representam ressonâncias de Cherenkov. Esta última ressonância acontece entre íons térmicos (como veremos adiante) e a onda eletromagnética perturbada, sendo, claramente, um efeito FLR o qual estava completamente ausente no tratamento de plasma homogêneo. Adiante comentaremos, em mais detalhes, este fenômeno, apresentando então o que consideramos uma possível justificativa para o fato de, na prática, se ter isotropização de energia de íons numa escala de tempos mais rápida do que as previstas nos modelos usuais.

V.2 - Sobre as Condições de Contorno

O sistema (V.2), por si só, não representa uma descrição completa do plasma, a menos que lhe acrescentemos condições de contorno apropriadas. Novamente deparamos com um problema em cilindro pois as condições de contorno para um plasma de laboratório são necessariamente complicadas. Por isto limitar-nos-emos a uma situação hipotética e que se aproxima da realidade experimental apenas em casos especiais. Dado nosso interesse em θ -pinches, supomos então que temos em mãos uma coluna de plasma encerrada num cilindro perfeitamente condutor, longo e de raio R_C . Sendo as paredes perfeitamente condutoras, decorre, da lei de Faraday que a componente tangencial de \vec{E} deve se anular em R_C .

Em suma, se tem

$$\delta E_z = 0 \quad r \rightarrow R_C, \quad (V.22)$$

$$\delta E_\theta = 0 \quad r \rightarrow R_C. \quad (V.23)$$

Sabe-se, por outro lado, que a perturbação no campo elétrico \vec{E} é dada por [37,50]:

$$\delta\vec{E} = -\nabla\left[\frac{\delta P_{en}}{eN} + \frac{\vec{v}_e^0}{c} \cdot (\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0)\right] + \frac{i\omega}{c} \vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0 \quad (V.24)$$

Como o termo de ordem zero para $\delta\vec{P}_e$, \vec{v}_e^0 contribue em segunda ordem para \vec{E} , podemos fazer uso da expressão (IV.12) para substituir em (V.24) obtendo

$$\delta\vec{E} = \nabla\left[\frac{T_e}{e} \left(\xi_r \frac{\partial \ln N}{\partial r} + \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp\right) - \frac{\vec{v}_e^0}{c} \cdot (\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0)\right] + \frac{i\omega}{c} \vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0 \quad (V.25)$$

Observando que as grandezas de equilíbrio não dependem de z , e que as perturbadas tem a dependência em z fixada por (III.14) e empregando (V.22) concluímos que

$$\delta E_\theta \vec{e}_\theta = \frac{i\omega}{c} \vec{\xi}_\perp \times \vec{B}^0, \quad r \rightarrow R_c \quad (V.26)$$

donde, pela (V.23), decorre

$$\xi_r = 0, \quad r \rightarrow R_c \quad (V.27)$$

Usando este resultado, mais o fato de que \vec{v}_e^0 são suas componente na direção θ [eq.(III.9)-(III.11)], para substituir na componente z de (V.25) obtemos

$$\delta E_z = ik_z \frac{T_e}{e} \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp, \quad r \rightarrow R_c, \quad (V.28)$$

ou seja

$$\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} = 0 \quad , \quad r \rightarrow R_C \quad . \quad (V.29)$$

A (V.29) é ainda equivalente a

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} = -\frac{im}{R_C} \xi_{\theta} \quad , \quad r \rightarrow R_C \quad . \quad (V.30)$$

As condições (V.27), (V.30), para ξ_r e ξ_{θ} , são facilmente expressáveis em termos de ζ_+ e ζ_- . Nestas componentes teremos

$$\zeta_+ + \zeta_- = 0 \quad , \quad r \rightarrow R_C \quad ; \quad (V.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\zeta_+ + \zeta_-) = \frac{m}{R_C} (\zeta_+ - \zeta_-) \quad , \quad r \rightarrow R_C \quad .$$

As relações (V.31) formam a totalidade das condições de contorno junto às paredes do cilindro. O que parece uma carência de condições de contorno poderá, no entanto, constituir-se num excesso de condições de contorno se lembrarmos que, sendo o problema totalmente homogêneo (equação mais condições de contorno homogêneas) uma das quatro constantes de integração deverá permanecer arbitrária. A última condição é obtida da própria forma da equação: como $r=0$ é ponto de singularidade de ambas as equações, muito provavelmente, duas das quatro soluções linearmente independentes de (V.2), serão divergentes em $r=0$. Isto forçará o anulamento de duas das quatro constantes de integração iniciais. Desta forma, uma das condições (V.31) será a relação de dispersão do plasma em estudo.

O grande inconveniente com esta forma de relação de dispersão é que ela só será realmente útil no caso de se poder resolver exatamente o sistema acoplado (V.2) satisfazendo as condições de contorno (V.31). Esta é uma tarefa que nos parece, no momento, totalmente impraticável, ao menos do ponto de vista analítico. Restam, contudo, alternativas igualmente aceitáveis como a da análise numérica, ou outras, de aplicabilidade menos ampla, como o método da função tentativa de Freidberg [1], ou o da análise local. Esta última tem a vantagem de fornecer, de imediato, uma relação de dispersão de fácil manejo numa análise numérica. No capítulo seguinte abordaremos o caso da análise local por ser esta mais simples e mais frequentemente empregada [26,53,54,57-59].

V.3 - Considerações Adicionais a Respeito da Ressonância de Cherenkov

É possível que a ressonância de Cherenkov, manifestada pela presença de integrais do tipo J_0^{NM} nos coeficientes de (V.2), contribua apreciavelmente para a isotropização das energias de íons, numa escala de tempos comparável àquela dos elétrons. Ao menos a análise numérica da relação de dispersão local derivada no Capítulo VI, revela que a referida ressonância de Cherenkov é responsável por grande parcela ($\sim 30\%$) da redução das razões de crescimento dos modos íon-ciclotrônicos de Alfvén instáveis por presença de anisotropia.

O mecanismo físico deste fenômeno pode ser facilmente

entendido, se lembrarmos que mesmo o campo elétrico de equilíbrio, que está na direção radial, pode acelerar elétrons na direção z , sempre que o campo magnético de equilíbrio (direção z) for perturbado. Este fato é decorrência, de um lado do quase congelamento dos elétrons às linhas de força de \vec{B} , e de outro, da liberdade que os elétrons gozam de se locomover livremente ao longo destas linhas. Qualquer oscilação em \vec{E}^0 provoca (Figura 2) um reescalonamento na concentração de elétrons sobre as linhas de \vec{B} o que claramente provoca um reescalonamento na distribuição dos íons através da preservação da quase-neutralidade ($N_e \cong N_i = N$).

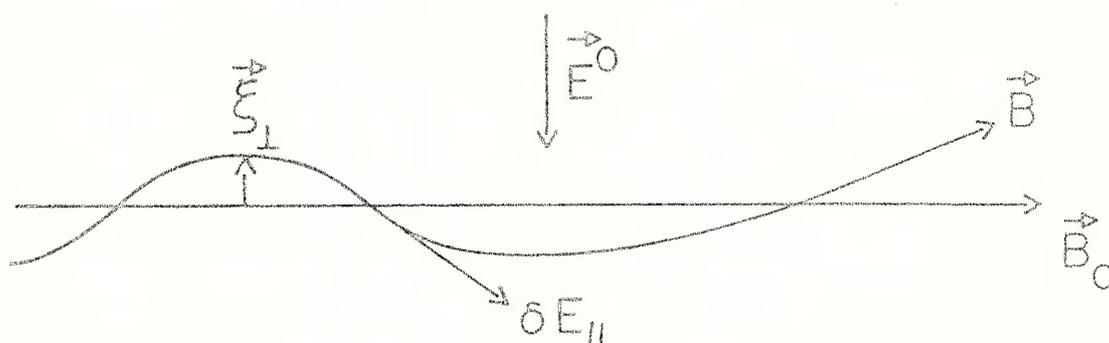


Figura 2.

Vejamos agora, com mais detalhes, como se desenvolve este efeito. Para exemplo consideraremos uma onda eletromagnética movendo-se paralelamente a \vec{B}^0 . No caso em que $T_e = 0$ os elétrons anulam qualquer componente de campo elétrico paralela a \vec{B} , i.e. $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ em todos os pontos. Conseqüentemente o campo elétrico radial de equilíbrio gerado pelo gradiente de pressão de íons (III.7) terá sua componente paralela às linhas de \vec{B} anulada, o que equivale a uma rotação seguida de uma contração de \vec{E}^0 .

Em decorrência, aparecerá uma componente de \vec{E} na direção de propagação da onda. Esta perturbação ($ik_z \vec{E}^0 \cdot \vec{\xi}_\perp \hat{e}_z$) no campo elétrico radial de equilíbrio se propaga, com a onda, e certamente poderá entrar em ressonância com partículas.

No caso de temperatura de elétrons finita ($T_e \neq 0$), qualquer componente paralela de \vec{E} pode ser contrabalançada por perturbações na pressão de elétrons. Este fato pode ser entendido a partir da lei de Ohm generalizada na direção paralela a \vec{B} , ou seja [35,37,50,51]:

$$\omega_{pe}^2 E_{\parallel} = - \frac{4\pi e \vec{B}}{m_e B} \cdot (\nabla \cdot \vec{P}_e) \quad , \quad (V.32)$$

a qual pode gerar uma contribuição adicional (tipicamente $-ik_z \frac{T_e}{e} \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \hat{e}_z$) à componente de \vec{E} na direção z.

É importante observar que ambas as contribuições a δE_z originam efeitos FLR na dinâmica dos íons. Na equação (IV.17) as ordens de grandeza dos termos (considerados da esquerda para a direita) estão na razão $1:\epsilon:\epsilon$ onde $\epsilon = r_{Li}/L_\perp$. Em ordem zero, $\delta\phi$ [37,50,51] [eq. (IV.19)]

$$\delta\phi = \frac{T_e}{e} \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp - \vec{E}^0 \cdot \vec{\xi}_\perp \quad (V.33)$$

deve ser ignorado e não se terá ressonância de Cherenkov, mas, apenas ressonância de cíclotron, como no caso espacialmente homogêneo.

Mais importante ainda nos parece apontar que a referida ressonância acontece, em plasma de alto beta, entre íons térmicos e aquele modo que no caso homogêneo apresenta maior razão

de crescimento. Trata-se do modo [46] de número de onda

$$ck_z \sim \omega_{pi} \quad (V.34)$$

Usando este número de onda e $\omega \sim \omega_{ci}$ na condição de ressonância ($\omega - k_z v_z \approx 0$) obtemos

$$v_z \approx v_{i||} / \sqrt{\beta_{i||}} \quad (V.35)$$

e, portanto, para alto beta ($\beta_{i\perp} \sim 1$) e anisotropia moderada $v_{i\perp} \sim v_{i||} \Rightarrow \beta_{i\perp} \sim \beta_{i||}$, teremos $v_z \sim v_{i||}$. Isto mostra a importância da ressonância de Cherenkov como um efeito FLR em plasma de alto beta. A hipótese de alto beta é fundamental para a relevância deste efeito pois para $\beta_{i||} \ll 1$ a onda eletrostática gerada pelos efeitos FLR iria se mover com velocidade alta demais para poder ressonar com íons térmicos. O mesmo também seria verdade nas situações de fortes anisotropias com $T_{i\perp}$ muito diferente de $T_{i||}$, o que ocasionaria velocidades de onda muito diferentes da velocidade térmica dos íons, originando ressonância apenas com uma minoria insignificante de partículas.

VI - ANÁLISE LOCAL E NUMÉRICA

Introdução

Dedicaremos este capítulo ao estudo de uma situação particular mas de interesse amplo, visando testar até ao nível de análise numérica, a validade e a relevância da descrição proposta nos capítulos anteriores. Entretanto o tratamento analítico do problema global de autovalores nos parece impraticável enquanto que sua análise numérica pode se tornar muito dispendiosa. Por isso, limitar-nos-emos a uma análise local cuja validade será certamente tanto maior, quanto menor for o grau de inhomogeneidade na densidade de partículas.

Usando este procedimento, obtemos na seção (VI.1), uma equação algébrica que pode ser analisada numericamente por técnicas usuais. Para tanto é necessário ainda adotar um equilíbrio e um perfil de densidade para os íons. Esta escolha foi feita na seção de número dois. Finalmente na última seção apresentamos e discutimos os resultados numéricos obtidos desta análise.

VI.1 - A Estabilidade na Análise Local

Nesta seção abordaremos o caso em que a escala típica de variação espacial dos deslocamentos de linhas de campo magnético ξ_s é muito menor do que a distância típica da inhomogeneidade na densidade $L_{\perp} = 1 / \left| \frac{\partial n N}{\partial r} \right|$:

$$1/\left|\frac{\partial}{\partial r} \ln \xi_s\right| \ll L_{\perp} . \quad (\text{VI.1})$$

Em outros termos, estaremos considerando o caso limite de inhomogeneidade fraca. Para pontos relativamente distantes da origem, $r \gg 1/\left|\frac{\partial}{\partial r} \ln \xi_s\right|$, podemos proceder a uma análise local, assumindo que os coeficientes da equação (V.2) são constantes locais e que

$$\zeta_s = \bar{\zeta}_s \exp(ik_r r) . \quad (\text{VI.2})$$

Nestas condições a referida equação toma a forma algébrica

$$\left[D_s^0 + D_s^+(ik_r)\right] \bar{\zeta}_s + D_{-s}^-(ik_r) \bar{\zeta}_{-s} = 0 , \quad (\text{VI.3})$$

da qual se obtêm, diretamente, a relação de dispersão

$$\left[D_+^0 + D_+^+(ik_r)\right] \left[D_-^0 + D_-^+(ik_r)\right] - D_-^-(ik_r) D_+^-(ik_r) = 0 . \quad (\text{VI.4})$$

A equação (VI.4) é matematicamente muito semelhante à relação de dispersão do caso homogêneo, já mencionada na secção 5 do Capítulo IV [eq. (IV.72)]. Como veremos adiante, para os íons no equilíbrio com uma distribuição bimaxwelliana, ela assume uma forma bastante semelhante àquela dada por (IV.78). Antes, porém, de analisarmos, em mais detalhes, as semelhanças e diferenças entre os casos homogêneo e não homogêneo, relembremos que D_s^{\pm} é de ordem ϵ^2 quando comparado a D_s^0 . Feita esta observação é imediato concluir que em (VI.4) existem termos de ordem ϵ^4 e

que, dentro do nosso esquema de ordenação, são na verdade irrelevantes. Eliminados os termos de ordem ϵ^4 em (VI.4) ficaremos com a relação

$$D_+^0 D_-^0 + D_+^0 D_-^+(ik_r) + D_-^0 D_+^+(ik_r) = 0 \quad , \quad (\text{VI.5})$$

para descrever a estabilidade do plasma inhomogêneo nesta análise local. Observemos que a par da semelhança matemática entre (VI.5) e (IV.72) existe uma diferença notável; no caso homogêneo há separação da relação de dispersão para os modos polarizados à direita e à esquerda, o mesmo não acontecendo neste tratamento de plasma não homogêneo. Entretanto, este acoplamento entre as relações de dispersão para as ondas de diferentes polarizações é muito fraco, sendo essencialmente de ordem ϵ^4 . Efetivamente, se em (VI.5) reincorporamos o termo $D_-^+(ik_r) D_+^+(ik_r)$, que é de ordem ϵ^4 , podemos reescrevê-la na forma

$$\left[D_+^0 + D_+^+(ik_r) \right] \cdot \left[D_-^0 + D_-^+(ik_r) \right] = 0 \quad , \quad (\text{VI.6})$$

ou seja

$$D_s^0 + D_s^+(ik_r) = 0 \quad , \quad (\text{VI.7})$$

com $s = +1, -1$ para ondas polarizadas à direita e à esquerda, respectivamente. A (VI.7) é então a relação de dispersão, dentro do contexto da análise local, válida para um plasma não homogêneo, anisotrópico, de alto beta e correta até ordem ϵ^2 inclusive.

Como se vê, obtemos uma relação de dispersão para cada polarização sendo que a única correção para a relação de dispersão do plasma homogêneo anisotrópico (IV.72) vem através do termo $D_S^+(ik_r)$. Cabe observar aqui que a (VI.7) ou a (VI.5), tal como a equação (V.2), diferencia-se fundamentalmente do caso homogêneo pela ocorrência de ressonâncias de Cherenkov. Como já visto [secção (V.3)], tal ressonância se dá entre ondas eletromagnéticas transversais de propagação paralela a \vec{B} e íons térmicos, podendo transferir energias de íons da direção perpendicular à direção paralela.

O fato de D_S^- não contribuir para a forma final da relação de dispersão talvez possa ser reforçado, do ponto de vista físico, pelo seguinte argumento:

Dada uma frequência complexa $\omega = \omega_r + i\gamma$, somente uma das ondas, dentre as de diferentes polarizações, será amplificada (instabilidade) enquanto que a outra será amortecida. Isto fará com que os deslocamentos de linhas de campo magnético associados com diferentes ondas desempenhem, na instabilidade, papéis muito diferentes. Como D_S^- atua em ζ_{-S} , o deslocamento associado à onda amortecida, é natural esperar que seu papel na relação de dispersão seja muito menos relevante que o de D_S^+ (o qual atua em ζ_S , o deslocamento associado à onda amplificada). Ao menos a análise numérica local revelou que, ao se passar de uma polarização à outra, a parte real da frequência muda de sinal, quando se consideram os modos íon-ciclotrônicos de Alfvén instáveis. Desta forma, um ponto (ω, k_z) no qual uma determinada onda é instável, para uma polarização, não o será para a outra. Isto corrobora a hipótese de que quando uma polarização está sendo am

plificada a outra estará sendo amortecida e vice-versa.

VI.2 - Uma Possível Especificação de Equilíbrio

Nesta secção reduziremos as integrais de velocidade J_p^{NM} , definidas em (V.14) e que aparecem em (V.7) a (V.12), às expressões em termos da função Z de Fried-Conte dada no Apêndice A. Também especificaremos um perfil de densidade a ser usado, e, a partir dele, determinaremos todas as demais grandezas até aqui arbitrárias em (VI.5). Embora o objetivo primordial seja adotar uma situação de equilíbrio que admita uma análise numérica posterior, as expressões obtidas terão validade mais ampla, podendo inclusive ser usadas para um estudo da equação geral (V.2) com as condições de contorno (V.31).

Adotando, para os íons no equilíbrio,

$$f_i^0 = N(r) \frac{m_i}{2\pi T_{i\perp}} \left(\frac{m_i}{2\pi T_{i\parallel}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_i v_z^2}{2T_{i\parallel}} - \frac{m_i v_\perp^2}{2T_{i\perp}}\right), \quad (\text{VI.8})$$

e usando a (III.21) para determinar a forma de λ , podemos reduzir a equação (V.14) a expressão

$$J_\ell^{NM} = \frac{1}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega_{ci}^2} \omega \left(\frac{N}{2}\right)! v_{i\perp}^{N-2} \left(-\frac{\omega_{ci}}{k_z v_{i\parallel}}\right)^M \frac{1}{(M-1)!} \left[Z^{(M-1)}(\omega_\ell) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}}\right) \frac{k_z v_{i\parallel}}{\omega} Z^{(M)}(\omega_\ell) \right], \quad (\text{VI.9})$$

onde

$$\omega_{\ell} = \frac{\omega - \ell \omega_{ci}}{k_z v_i} , \quad (\text{VI.10})$$

e

$$Z^{(M)}(x) = \frac{\partial^M}{\partial x^M} Z(x) . \quad (\text{VI.11})$$

Note-se que N s̄o assume os valores 0, 2 e 4 estando, com isto, perfeitamente especificado o fatorial de $N/2$. Tamb̄em M s̄o assume os valores 1, 2 e 3, sendo o termo entre colchetes à direita de (VI.9) um termo tamb̄em presente no caso homoḡeneo (IV.78) quando M igual a 1 e N igual a 2.

Com esta express̄o para J_p^{NM} tanto a equaç̄o de autovalores (V.2) como a relaç̄o de dispers̄o local (VI.5) ou (VI.7) ficam completamente especificadas a menos do perfil de densidade $N(r)$. Observe-se que aqui, contrariamente ao que acontece com o caso homoḡeneo ou equivalentemente com a aproximaç̄o de ordem zero (IV.72), n̄o ̄e possıvel definir uma temperatura perpendicular generalizada e evitar a explicitaç̄o da depend̄ncia de f_i^0 em v_{\perp} . Isto se deve ao fato do aparecimento de momentos de quarta ordem (J_p^{4M}) na definiç̄o de D_s^{\pm} . Entretanto, em se tratando de equilıbrıo bimaxwelliano a express̄o (VI.9) ̄e totalmente geral podendo inclusive ser empregada numa an̄lise global do problema de autovalores definido por (V.2) e (V.31).

Para completar as especificaç̄es necess̄rias a uma an̄lise num̄rica da relaç̄o de dispers̄o (VI.5), adotaremos um perfil de densidade de forma gaussiana

$$N(r) = N_0 \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right) , \quad (\text{VI.12})$$

donde resulta [37]

$$B_z^0(r) = B_\infty \left[1 - \bar{\beta} \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right) \right]^{1/2}, \quad (\text{VI.13})$$

$$\bar{p} = -\frac{(v_{i\perp}^2 + v_{i\parallel}^2)r}{2m_i R_0^2}, \quad (\text{VI.14})$$

$$\bar{p} = -\frac{(v_{i\perp}^2 + v_{i\parallel}^2)}{2m_i R_0^2}, \quad (\text{VI.15})$$

$$\bar{N} = -\frac{2r}{R_0^2}, \quad (\text{VI.16})$$

$$\bar{B} = \frac{\bar{\beta} r}{R_0^2 \left[\bar{\beta} - \exp\left(\frac{r^2}{R_0^2}\right) \right]} \quad (\text{VI.17})$$

$$\bar{B} = \frac{\bar{\beta}}{R_0^2 \left[\bar{\beta} - \exp\left(\frac{r^2}{R_0^2}\right) \right]} \left[\frac{2r^2}{R_0^2} \frac{\exp\left(\frac{r^2}{R_0^2}\right)}{\left[\bar{\beta} - \exp\left(\frac{r^2}{R_0^2}\right) \right]} + 1 \right]. \quad (\text{VI.18})$$

Em (VI.13), (VI.17) e (VI.18) $\bar{\beta}$ é o valor de β total $\left[\beta = 8\pi(P_i^0 + P_e^0)/B_\infty^2 \right]$ calculado no eixo do cilindro com B_∞ o valor do campo magnético no vácuo.

É importante notar que qualquer outro perfil de densidade de interesse experimental ou teórico pode igualmente ser adotado. Escolhido $N(r)$ obtem-se $B^0(r)$ da equação de balanço de pressões (III.13), enquanto que a (III.7) fornece $E^0(r)$. A cons

tante aditiva, bem como as temperaturas pertinentes, são escolhidas posteriormente e de acordo com o sistema a ser estudado.

Com o equilíbrio acima especificado procederemos, na secção seguinte, à apresentação e discussão dos resultados da análise numérica da relação de dispersão (VI.5).

VI.3 - Os Resultados Numéricos

A relação de dispersão local (VI.5) foi analisada numericamente para frequências em torno de ω_{ci} e números de onda em torno de ω_{pi}/c , os quais são típicos das ondas ion-ciclotrônicas de Alfvén e que apresentam instabilidade na presença de anisotropia ($T_{i\perp} > T_{i\parallel}$), no tratamento do plasma homogêneo [46].

Os resultados são manifestamente interessantes e revelam uma redução de até 50% nas razões de crescimentos destes modos. Esta redução é decorrência dos efeitos FLR através das ressonâncias de ciclotrons normais J_S^{NM} (já presentes no tratamento homogêneo), e ressonâncias de Cherenkov J_0^{NM} e harmônicos de segunda ordem das ressonâncias de ciclotron J_{2S}^{NM} , que representam as correções mais típicas (antes desconhecidas) deste modelo.

Na análise numérica de (VI.5) empregamos, para o cálculo da função Z de Fried e Conte uma rotina gentilmente fornecida por S.P.Gary e na determinação de suas raízes complexas uma técnica proposta por J.A.Ward [65], (Down Hill Process) com algumas modificações. Os detalhes do código estão no Apêndice B. Basicamente, a sub-rotina REF, usando PDF que calcula Z e suas derivadas, fornece os valores da relação de dispersão. A sub-ro

tina FALCON determina os zeros de REF.

A precisão do zero $\bar{\epsilon}$ é determinada consistentemente com a precisão da teoria. Em particular, adotamos como precisão da raiz, δ tal que

$$\delta \leq \epsilon^2/10 \quad (\text{VI.19})$$

onde ϵ é o parâmetro de expansão r_{Li}/L_{\perp} . EQUIL fornece os parâmetros do equilíbrio enquanto que MAIN comanda a análise em geral. Todo o código foi escrito em FORTRAN IV e comentários foram inseridos de forma a facilitar o entendimento de suas várias funções.

Os valores dos parâmetros (densidade no eixo, campo magnético em R_0 , temperaturas e valores de β) foram escolhidos tendo-se em mente θ -pinches de alto β e altas temperaturas e que são tratados como não colisionais. Nesta linha estão basicamente as máquinas da família Scylla: Scylla IV-P [60-62], Linear Scyllac [62,63], Scylla IV-1 e Scylla IV-3 [62,64]. Neles o campo magnético máximo varia de 40 kG a 100 kG e a densidade no eixo oscila entre 10^{16} e 10^{17} cm^{-3} podendo, em simulações de computador [62], ir até 10^{19} $\text{cm}^{-3} \sim 1$ atm.

Para obter maior simplificação e redução de número de gráficos, fixamos a temperatura perpendicular dos íons em 2 keV o que é valor típico, e, seguindo o procedimento do tratamento homogêneo [46], mantemos

$$T_e = (2T_{i\perp} + T_{i\parallel})/3 \quad (\text{VI.20})$$

Entretanto, observadas estas relações entre as diver

sas temperaturas, pode-se facilmente inferir a aplicabilidade e validade dos resultados para $T_{i\perp}$ variando em torno deste valor típico de 2 keV. Adicionalmente, pode-se substituir a relação (VI.20) por qualquer outra mediante a simples troca de um cartão na sub-rotina EQUIL.

Como já mencionado o perfil de densidade foi escolhido gaussiano. Esta é uma prática corrente e tem base experimental [63]. Experimentalmente o decaimento exponencial (valor de R_0) é tipicamente da ordem de .8 a 1 cm. A esta faixa de posição ($r \sim R_0$) é a que atribuímos maior importância em nossa análise local. Isto porque supomos que a análise local tenha maior validade nas regiões onde $r \leq L_{\perp}$. Com o perfil gaussiano

$$L_{\perp} = R_0^2/2r \quad , \quad (\text{VI.21})$$

donde se infere que, fixado R_0 , o plasma será, localmente, tanto mais homogêneo quanto menor for r em unidades de R_0 .

Todo o resultado da análise numérica da relação (VI.5) está condensado nos gráficos apresentados nas Figuras 3 a 7. Na Figura 3 apresentamos a razão de crescimento γ em unidades de ω_{ci} para os modos de números de ondas k_z em unidades de ω_{pi}/c , para m (número de onda azimutal) igual a 2, N_0 (densidade no eixo) igual a $4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, campo magnético em R_0 $B(R_0) = 70 \text{ kG}$ e anisotropia $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 5$. A análise foi feita na posição relativa $r/R_0 = .8$ e para números de onda radial k_r tal que $k_r R_0 = 10$. Com isto fica garantida a hipótese (VI.1) de que $k_r \gg \left| \frac{\partial \ln N}{\partial r} \right| = L_{\perp}^{-1} = 1.6/R_0$. Nesta posição se obtêm, localmente, $\beta_{i\perp} = 1.05$, $\beta_{i\parallel} = .21$ e $\beta_e = .77$ com $r_{Li} \approx .15 \text{ cm}$.

Em decorrência, para R_0 em centímetros:

$$\epsilon = \frac{r_{Li}}{L_{\perp}} \leq .3/R_0, \quad (\text{VI.22})$$

e k_z , para o modo de maior razão de crescimento, é da ordem de 6 cm^{-1} de forma que $k_z r_{Li} \approx 1$ conforme esperado. Da (VI.22) se tem que quando $R_0 \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ e se deve obter o resultado homogêneo, o que de fato ocorre. Mais importante talvez é observar que quando a inomogeneidade cresce muito ($R_0 < .3$) a análise perde o sentido pois neste caso teríamos $\epsilon > 1$ não se podendo obter convergência na teoria. Como já mencionado, o valor experimental típico de R_0 [63] é .8 a 1.0 cm o que produz ϵ com valores entre .3 e .4. Como se pode ver (Figura 3), para este valor típico, as razões de crescimento ficam reduzidas de aproximadamente 40% e a largura do espectro instável fica reduzida à metade. É interessante notar que o ponto marginal inferior permanece praticamente fixo enquanto que o ponto de estabilidade marginal superior desce com o crescimento da inomogeneidade. Ainda da Figura 3 pode-se perceber que mesmo uma fraca inomogeneidade ($R_0 = .500$) já produz uma sensível redução de crescimento (da ordem de 5%). Mostramos também, numericamente, a importância das ressonâncias de Cherenkov: a curva tracejada dá a razão de crescimento dos modos íon-ciclotrônicos de Alfvén para a mesma situação que a curva cheia marcada com " $R_0 = 5$ ", mas, com todas as ressonâncias de Cherenkov removidas. Como se pode ver, a ressonância de Cherenkov é responsável por aproximadamente 30% da redução total.

Na Figura 4 apresentamos a parte real da frequência

dos modos instáveis válido para os mesmos parâmetros que os da Figura 3. Como se pode notar, pequenas inhomogeneidades ($R_0 = 500$, por exemplo) não produzem modificações sensíveis nas velocidades de grupo. Entretanto para os casos de maior interesse experimental ($R_0 \approx 1$) estas são fortemente modificadas: aumento de aproximadamente 25% na velocidade de grupo da onda de maior razão de crescimento.

Na Figura 5 representamos γ_M (razão de crescimento máximo) por m e por $k_r R_0$ mantidos todos os demais parâmetros iguais aos da Figura 3 para $R_0 = 5$. A linha horizontal tracejada indica o valor de γ_M/ω_{ci} para o tratamento de plasma homogêneo (sem efeitos FLR). A curva marcada com m dá as razões de crescimento máximo em unidades de ω_{ci} quando m varia de 1 a 30. Nota-se que os modos azimutais são tanto mais amortecidos quanto maior seu número de onda. Entretanto uma saturação em torno de 50% é claramente visível para modos com números de onda superiores a 20.

Ainda na Figura 5, a curva marcada com $k_r R_0$ dá a mesma razão de crescimento com números de onda k_r variando ($k_r R_0$ indo de aproximadamente 2 a 30) e m fixo em $m = 2$. Também para este número de onda o amortecimento aumenta com o aumento de k_r aparecendo igualmente (embora de forma menos conclusiva) uma saturação (da ordem de 40%) para aqueles modos com $k_r R_0$ maiores que da ordem de 25.

Na Figura 6 apresentamos α , a razão das razões de crescimento máximo ($\alpha =$ razão de crescimento com efeitos FLR por razão de crescimento do tratamento homogêneo) em função da anisotropia $T_{i\perp}/T_{i\parallel}$. Conjuntamente (linha tracejada) colocamos o valor de $\beta_{i\perp}$ em termos das razões de temperaturas. Os demais parâ

metros são mantidos iguais aos da Figura 3 com $R_0 = 5$. Como esperado, para anisotropia moderada ($T_{i\perp}/T_{i\parallel} \leq 5$), a redução é maior (da ordem de 20%) sendo que esta redução diminui e se estabiliza em torno dos 10% para anisotropias mais acentuadas ($T_{i\perp}/T_{i\parallel} \geq 10$).

Finalmente a Figura 7 apresenta a mesma razão α como função da posição relativa r/R_0 e demais parâmetros como na Figura 3 com $R_0 = 5$. Para pontos com r/R_0 menores que .8 os resultados estão apenas indicados pois nesta região, para o valor de $B(R_0)$ escolhido, $\beta_{i\perp}$ cresce muito acima do valor 1 perdendo seu interesse experimental em θ -pinches. Este fato está ligado à escolha de perfil gaussiano para a densidade. Acreditamos que a adoção de outro perfil mais realista elimine este disparo no valor de $\beta_{i\perp}$ quando $r/R_0 \rightarrow 0$. Em todo o caso a presente teoria não pretende analisar a estabilidade em toda a faixa de variação de r , mas, apenas naquela faixa onde $r \gg \left| \frac{\partial}{\partial r} \ln \xi_s \right|^{-1}$. Como neste particular caso $R_0 = 5$ e $k_r R_0 = 10$ donde $k_r = 2$ segue-se então que a faixa de validade deve satisfazer

$$\frac{r}{R_0} \gg \frac{k_r^{-1} r}{R_0} = .1 \quad (\text{VI.23})$$

o que é perfeitamente coerente com a faixa $r/R_0 > .7$ apresentada na Figura 7. Nas condições de interesse experimental e para a fase final de implosão ou de pós-implosão o diâmetro da coluna de plasma fica da mesma ordem de grandeza da distância típica da inhomogeneidade $\left[L_{\perp} = R_0^2/2r = \left(\frac{R_0}{r} \right) \cdot \frac{R_0}{2} \right]$ o que mostra que a presente análise de estabilidade cobre aproximadamente a região onde r é maior que metade do raio da coluna de plasma, ou seja,

75% do volume total de plasma em estudo.

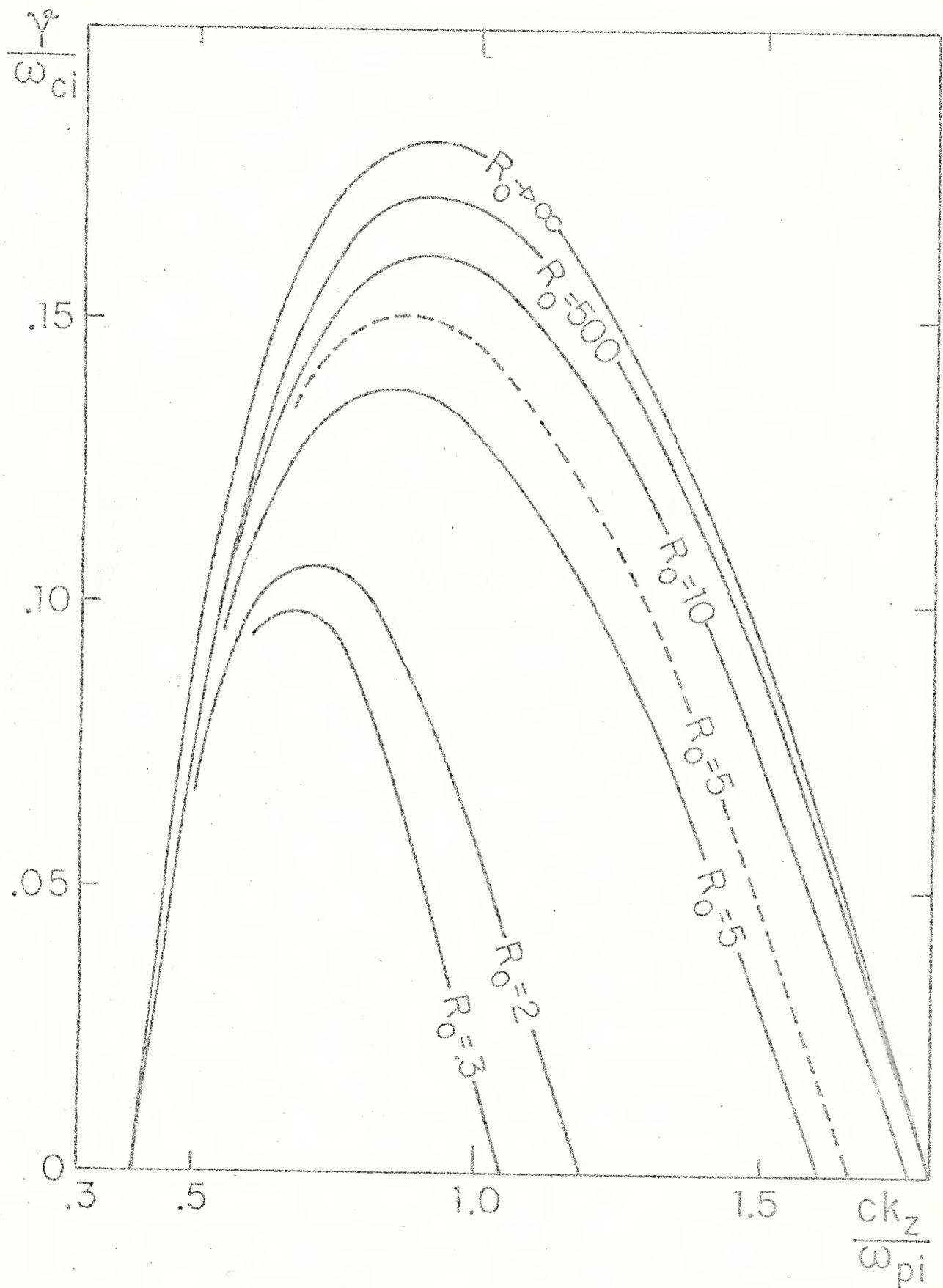


Figura 3 - Razões de crescimento para perfil gaussiano. $N_0 = 4\exp(16)$,
 $B(R_0) = 70 \text{ kG}$, $r/R_0 = .8$, $m = 2$, $k_r R_0 = 10$, $\beta_{i\perp} = 1.05$,
 $\beta_{ii} = .21$, $\beta_e = .77$, $k_z r_{Li} = 1.02$ e $\epsilon \ll .3/R_0$.

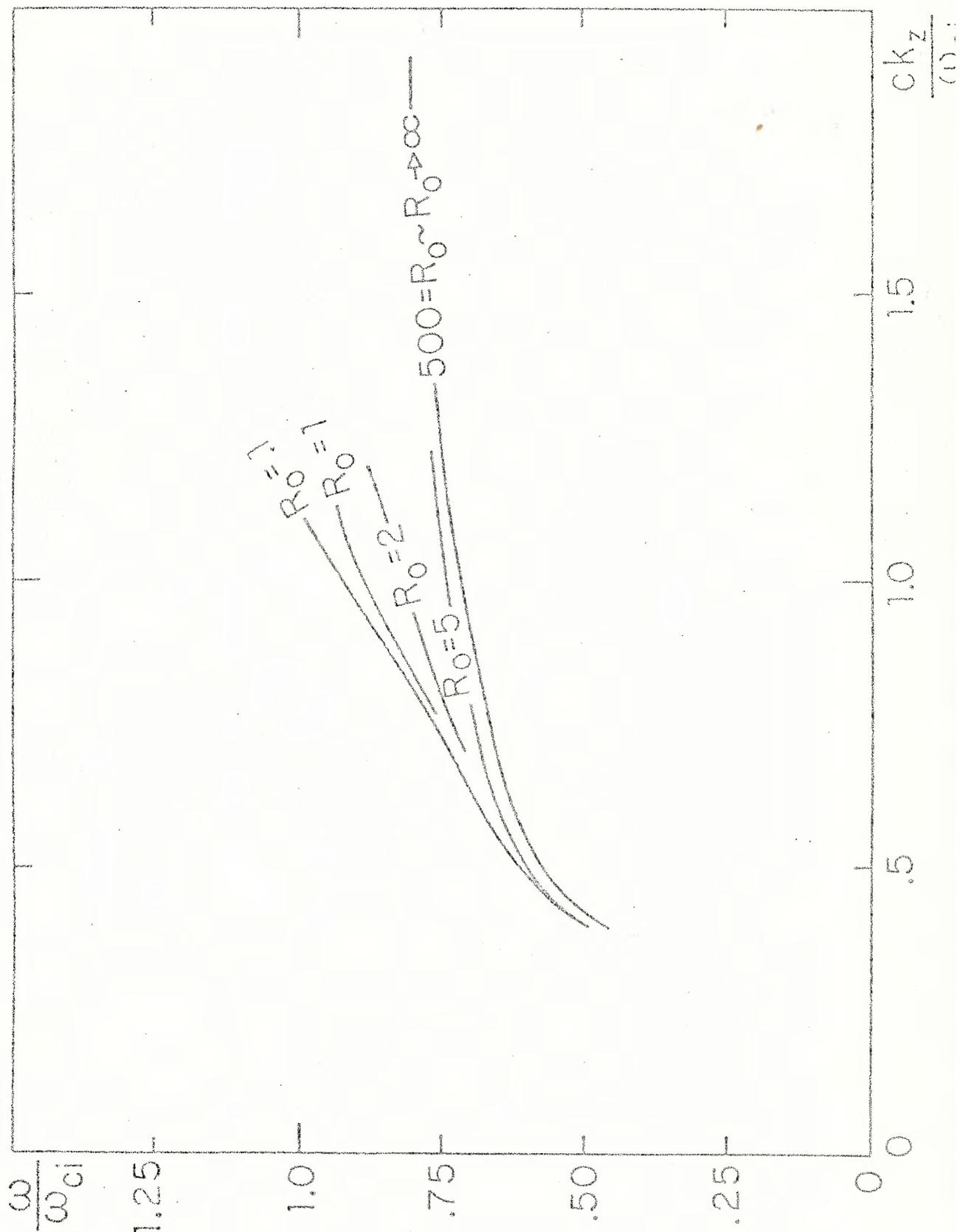


Figura 4 - Parte real da frequência dos modos instáveis para os mesmos parâmetros que os da Figura 3.

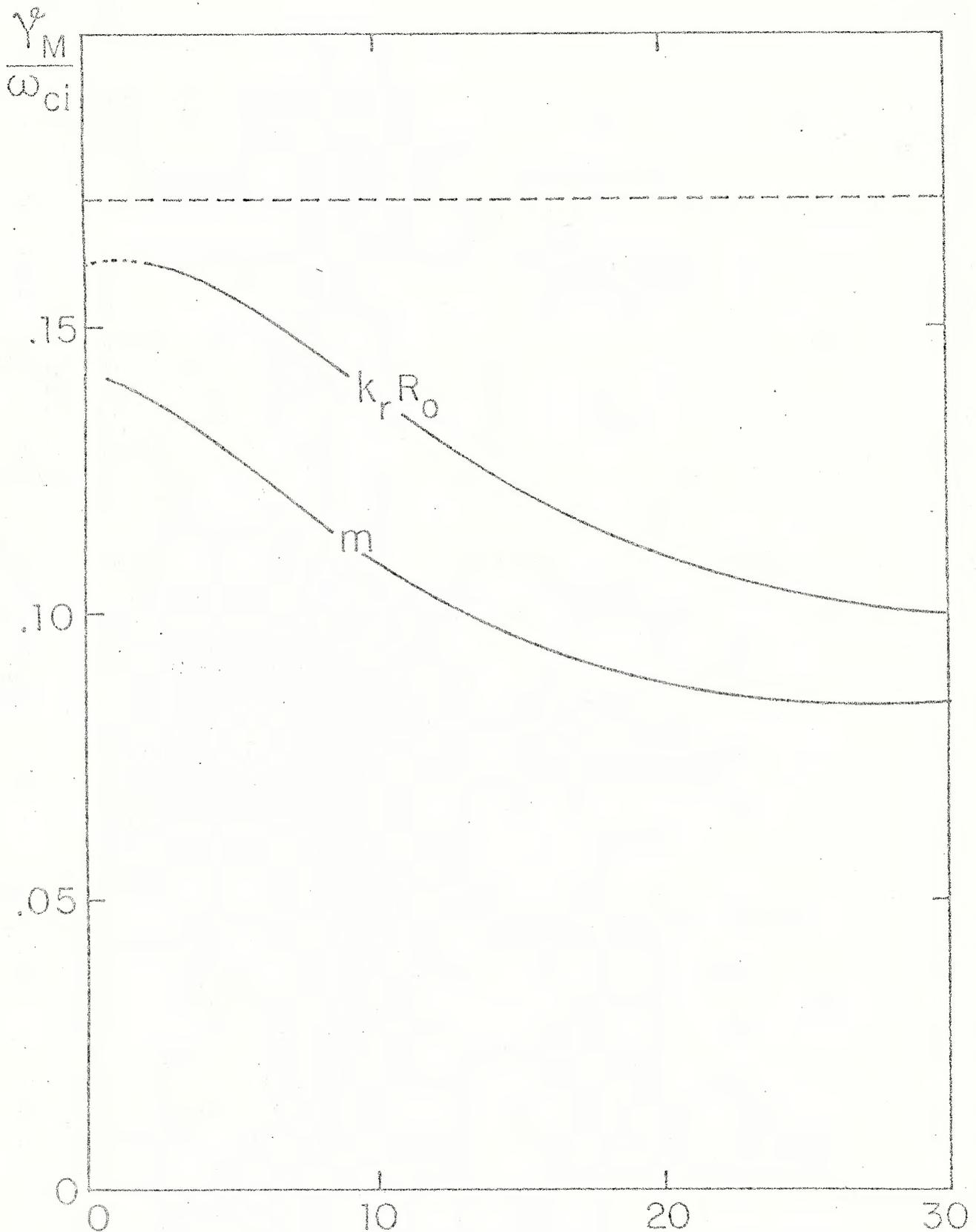


Figura 5 - Razões de crescimento máximo (γ_M) por número de onda azimutal (m) e por número de onda radial ($k_r R_0$). A linha tracejada dá o valor de γ_M no caso homogêneo. Todos os outros parâmetros como na Figura 3 com $R_0 = 5$.

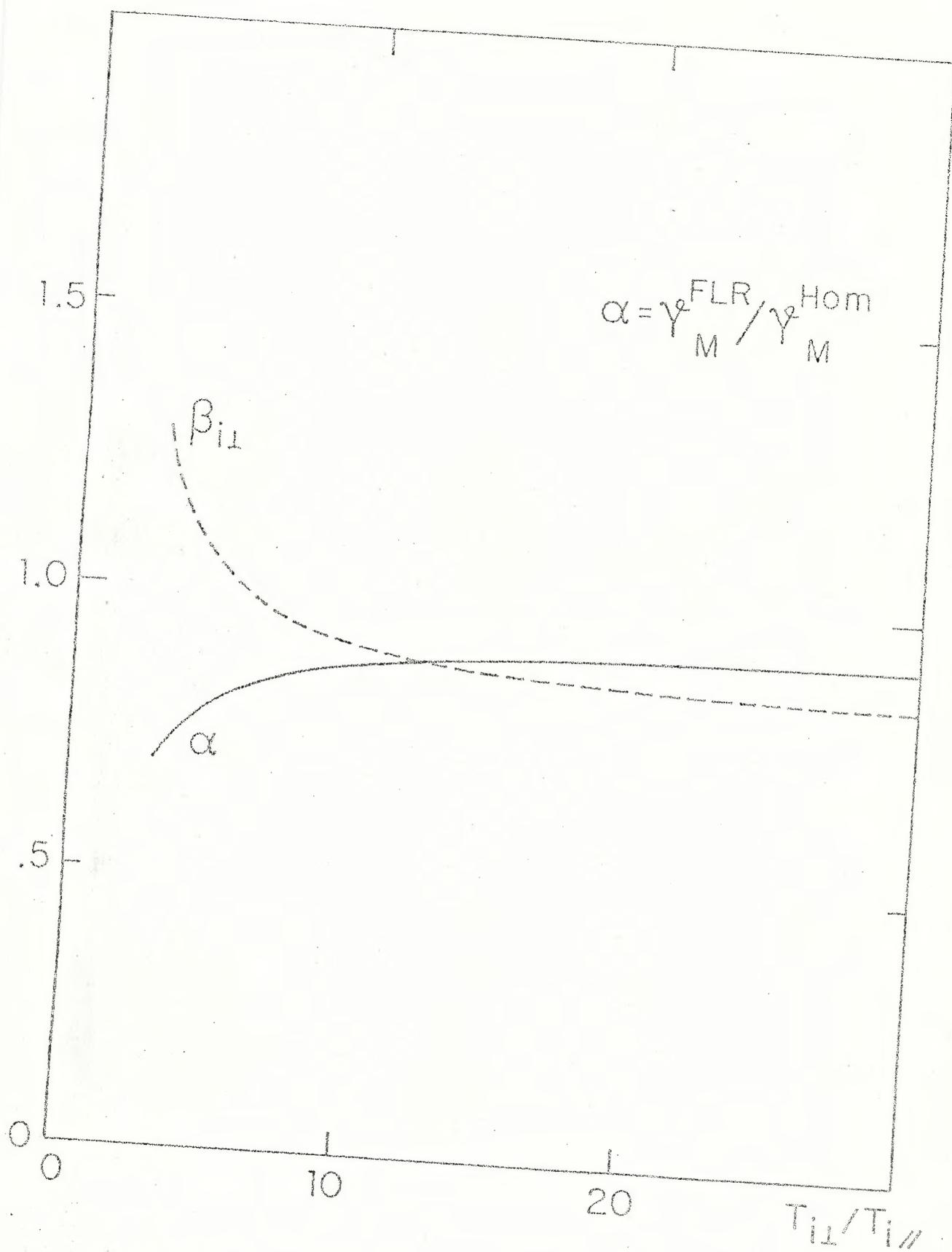


Figura 6 - Razão das razões de crescimento por razão de temperaturas. A curva tracejada dá o valor de $\beta_{i\perp}$. Demais parâmetros como na Figura 3 com $R_0 = 5$.

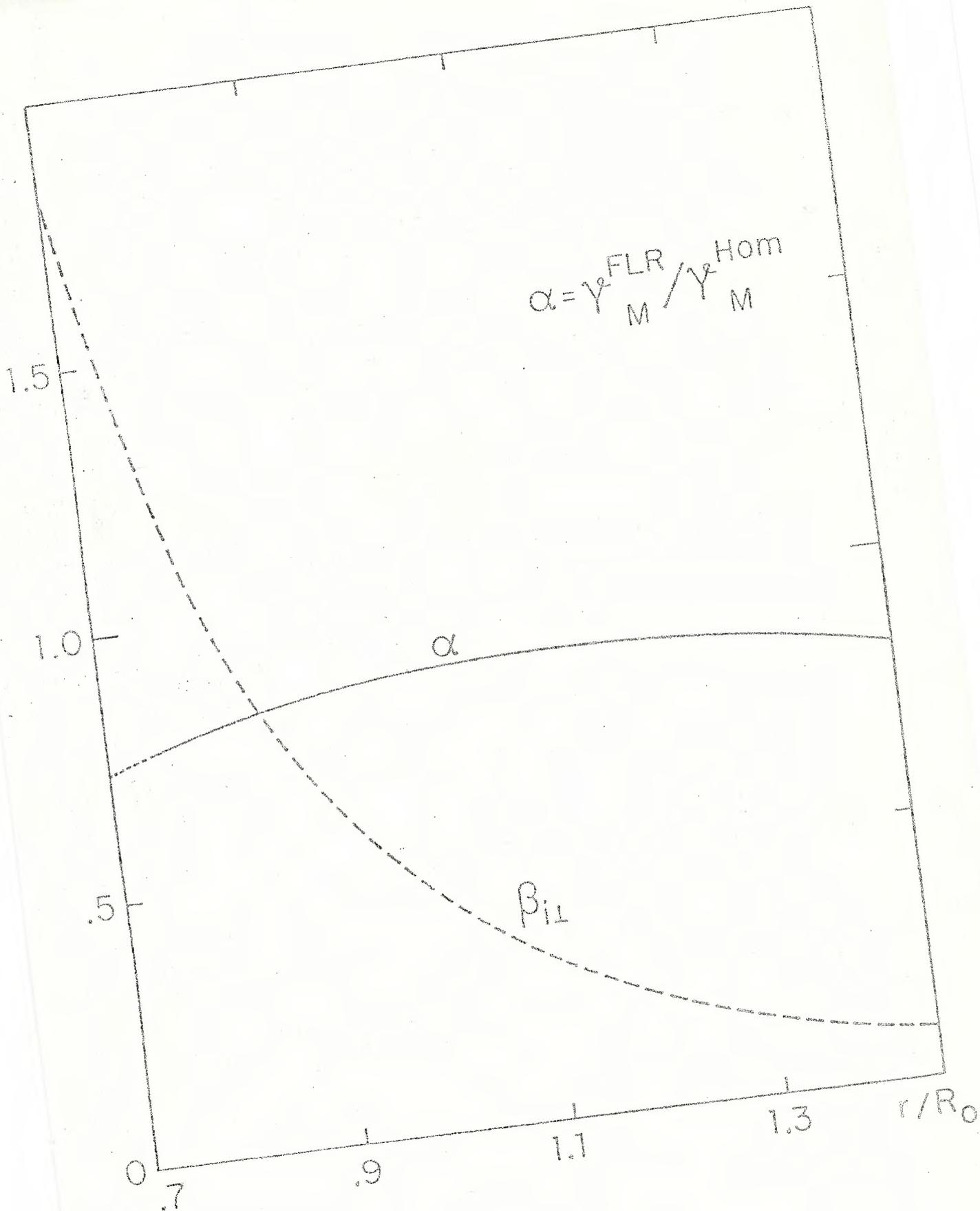


Figura 7 - Mesma razão α e valor de β_{\perp} por posição relativa. Também aqui todos os demais parâmetros tem os valores dos da Figura 3 com $R_0 = 5$.

VII - CONCLUSÕES

Investigamos, neste trabalho, os efeitos FLR (r_{Li}/L_{\perp} finito) na estabilidade linear dos modos eletromagnéticos de frequência $\omega \sim \omega_{ci}$, na presença de anisotropia ($T_{i\perp} > T_{i\parallel}$), em plasmas de alto beta e não colisionais. Tais modos são sabidamente instáveis no caso homogêneo [46] sendo sua instabilidade de origem puramente anisotrópica.

No Capítulo II apresentamos as linhas mestras do modelo de Fluido de Vlasov [1] e modelo Híbrido Cinético [35,36] no qual os íons são tratados pela equação de Vlasov não expandida e os elétrons são descritos como centros de guia. Deste último foi recentemente derivada [37,50,51] uma equação de autovalores [eq. (II.50)] para as perturbações eletromagnéticas do equilíbrio em θ -pinches de alto beta e livre de colisões. No Capítulo III colocamos o problema físico tal como ele é encontrado e discutido na literatura corrente e especificamos o equilíbrio adotado. Em seguida (Capítulo IV e V) fazemos uso de uma expansão adicional (em $\epsilon = r_{Li}/L_{\perp} < 1$) para com ela reduzir a referida equação de autovalores a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas e de segunda ordem [eq.(V.2)]. Esta equação já foi discutida anteriormente [57-59] sendo que no presente trabalho elaboramos, em mais detalhes, a forma analítica dos coeficientes [expressões (V.5) a (V.20)], bem como separamos de forma mais conveniente seus termos dominantes ($D_S^0 \zeta_S$) dos termos em $\epsilon^2 (D_S^{\pm} \zeta_S)$. Mostramos ainda [secção (IV.5)] que em sua primeira aproximação a teoria reproduz [eq.(IV.78)] a relação de dispersão correta para plasmas homogêneos anisotrópicos [46].

Como $r=0$ é ponto de contração do sistema de coordenadas cilíndricas adotado sendo também ponto de singularidade de ambas as equações componentes do sistema, concluimos pela existência de duas condições de contorno efetivas na origem: a imposição de ξ_{\perp} finito na origem implica no anulamento de duas das quatro constantes de integração. Para o caso de plasma encerrado num cilindro perfeitamente condutor determinamos duas outras condições de contorno independentes junto à parede [sec.(V.2)]. Conseqüentemente (por ser o problema homogêneo) o número efetivo de condições de contorno disponíveis excede em um o número de constantes a determinar. A condição em excesso é apontada como a relação de dispersão global do problema. Maiores elaborações desta relação de dispersão não nos pareceram viáveis ao menos do ponto de vista analítico. Entretanto destacamos o fato de os coeficientes do sistema conterem integrais de velocidade J_0^{NM} onde ocorrem denominadores do tipo $(\omega - k_z v_z)$ e que representam ressonâncias de Cherenkov. Este é um efeito FLR que estava totalmente ausente no tratamento de plasma homogêneo e que (mostramos posteriormente) desempenha papel de importância capital na redução das razões de crescimentos dos modos íon-ciclotrônicos de Alfvén. Este efeito de ressonância tem sua origem na correção FLR da dinâmica dos íons [37,50,51]. Provém, basicamente da introdução de perturbações do potencial eletrostático [eq.(IV.19)] as quais podem ser geradas por dois efeitos distintos: (1) o gradiente de pressão de íons no equilíbrio produz um campo elétrico de equilíbrio; conseqüentemente, cada vez que as linhas de campo magnético são perturbadas aparecem, em associação, perturbações eletrostáticas. Isto se deve ao fato de os elétrons serem tratados

como centros de guia mantendo-se, contudo, seu caráter cinético ao longo das linhas de \vec{B} , o que lhes permite anular, rapidamente, qualquer componente de \vec{E} nesta direção. (2) Qualquer distúrbio eletrostático na direção do campo magnético total poderá ser sustentado pelos efeitos de pressão finita de elétrons como se pode deduzir da lei de Ohm generalizada [eq.(V.32)] nesta direção. Conseqüentemente, junto com a onda eletromagnética, propaga-se uma perturbação eletrostática, dependente de r , da forma $\delta E_z \hat{e}_z$, e que pode entrar em ressonância com íons. Para anisotropia moderada ($T_{i\perp} \sim T_{i\parallel} \Rightarrow \beta_{i\perp} \sim \beta_{i\parallel}$) e números de ondas em torno do número de ondas de mais rápido crescimento no caso homogêneo ($k_z \sim \omega_{pi}/c$), a condição de ressonância é obtida para ondas com velocidade de fase $v_z = v_{i\parallel} / \sqrt{\beta_{i\parallel}}$. Disto decorre que para altos β_i a ressonância se dá entre a onda de mais rápido crescimento e íons térmicos. Estes argumentos foram apresentados na secção (V.3) onde também ressaltamos que tanto para $\beta_i \ll 1$ como para acentuadas anisotropias a ressonância de Cherenkov perde sua importância por ocorrer apenas com minoria de íons não térmicos.

Estas conclusões de caráter teórico-dedutivo foram claramente ratificadas pela análise local realizada no Capítulo VI, quando obtemos uma relação de dispersão [eq.(VI.4)] válida para os casos em que a distância típica radial de variação dos deslocamentos de linhas de campo magnético ξ_s é muito menor que a distância de inomogeneidade na densidade. Valemo-nos, ainda neste capítulo, do registro da ordem relativa de grandeza dos termos da relação de dispersão para eliminar expressões desnecessárias e simplificar convenientemente sua forma [eq.(VI.5)]. Mostramos

também que o acoplamento dos modos polarizados a direita e a esquerda é fraco (essencialmente de ordem ϵ^4) pelo que pudemos separar a relação de dispersão nos seus dois ramos: uma relação para cada modo de diferente polarização [eq.(VI.7)].

Finalmente secções (VI.2) e (VI.3) especificamos uma distribuição de equilíbrio reduzindo, com isto, as integrais de velocidade J_p^{NM} , [eq.(V.14)], às expressões em termos da função Z de Fried e Conte e suas derivadas. Tendo, em seguida, adotado um perfil gaussiano para a densidade, efetuamos uma análise numérica da relação de dispersão (VI.5). Os resultados desta análise estão condensados nas figuras 3 e 7 e mostram essencialmente uma redução de aproximadamente 30% nas razões de crescimento dos modos instáveis por presença de anisotropia, das ondas ionociclônicas de Alfvén ($\omega \sim \omega_{ci}$). Referida redução é mais acentuada para anisotropias moderadas e para números de ondas, tanto azimutais como radiais, de mais alta ordem bem como para situações de maior inhomogeneidade. Para o caso de interesse experimental ($L_{\perp} \sim$ raio da coluna de plasma) a redução total das razões de crescimento pode atingir o significativo valor de 50%.

A investigação é exhaustiva deixando como problemas abertos apenas aqueles relacionados com a análise da relação de dispersão global [eqs.(V.2) e (V.31)], cujo estudo evitamos por seu maior grau de complexidade. No que tange à relação de dispersão local, esclarecemos que a atenção foi inteiramente centrada nos modos com polarização à esquerda (por serem estes que apresentam maior razão de crescimento no tratamento homogêneo) nada se adiantando sobre sua contrapartida, os modos polarizados à direita.

Finalizando comentamos que tanto a análise local como a global poderão ser levadas a efeito (ao menos numericamente) para íons no equilíbrio não necessariamente bimaxwellianos e so bretudo para qualquer outro perfil de densidade que seja de in teresse teórico ou experimental.

APÊNDICE A

Apresentamos, neste apêndice, as fórmulas explícitas de $\delta P_{e\perp}$ e $\delta P_{e\parallel}$ em termos do deslocamento $\vec{\xi}_{\perp}$. A teoria híbrido cinética nos fornece [37,50,51]:

$$\delta P_{e\perp} = \delta I_{\perp} + \frac{L_{\perp}}{1 - L_{\parallel}} \delta I_{\parallel} \quad , \quad (A.1)$$

$$\delta P_{e\parallel} = \frac{\delta I_{\parallel}}{1 - L_{\parallel}} \quad , \quad (A.2)$$

onde as funções δI_{\perp} , δI_{\parallel} , L_{\perp} e L_{\parallel} são definidas como

$$\delta I_{\perp} \equiv \frac{i n T_e}{k_z v_e} \left\{ \delta F \frac{\partial \ln N}{\partial r} Z(\eta) + 2 Z(\eta) \delta G - \frac{2}{v_e} r \omega_E^2 \left[1 + \eta Z(\eta) \right] i k_z \xi_r \right\} \quad , \quad (A.3)$$

$$\delta I_{\parallel} \equiv \frac{2 i n T_e}{k_z v_e} \left\{ \delta F \left(\frac{\partial \ln N}{\partial r} + \delta G \right) \eta \left[1 + \eta Z(\eta) \right] - \frac{2 r \omega_E^2}{v_e} \left[\frac{1}{2} + \eta^2 + \eta^3 Z(\eta) \right] i k_z \xi_r \right\} \quad , \quad (A.4)$$

$$L_{\perp} \equiv \frac{m(-\omega_{de} + 2\omega_B)}{k_z v_e} Z(\eta) + 1 + \eta Z(\eta) \quad , \quad (A.5)$$

$$L_{\parallel} \equiv 2 \left\{ \frac{m(-\omega_{de} + \omega_B)}{k_z v_e} \eta \left[1 + \eta Z(\eta) \right] + \frac{1}{2} + \eta^2 + \eta^3 Z(\eta) \right\} \quad . \quad (A.6)$$

Nas equações (A.3) - (A.6) as frequências ω_{de} (frequência de deriva diamagnética) e ω_B (frequência de deriva por curvatura em \vec{B}) são definidas por:

$$\omega_{de} \equiv - \frac{c T_e}{e B_z^0 r} \frac{\partial \ln N}{\partial r} \quad , \quad (A.7)$$

$$\omega_B \equiv - \frac{cT_e}{eB_z^0 r} \frac{\partial \ln B_z^0}{\partial r} ; \quad (\text{A.8})$$

as funções ∂F e ∂G são dadas, em termos destas frequências e de $\vec{\xi}_\perp$, por

$$\partial F = -i(\omega - m\omega_E - m\omega_{de})\xi_r , \quad (\text{A.9})$$

$$\partial G = -im\omega_{de}\xi_r \frac{\partial \ln B_z^0}{\partial r} - i(\omega - m\omega_E)\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp . \quad (\text{A.10})$$

A função Z é a função dispersão de Fried-Conte [67]:

$$Z(\eta) \equiv \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp(-x^2)}{x - \eta} , \quad (\text{A.11})$$

sendo seu argumento η dado por

$$\eta \equiv \frac{\omega - m\omega_E}{k_z v_e} , \quad (\text{A.12})$$

com ω_E (frequência de deriva transversal aos campos) definida em termos do gradiente de pressão de íons

$$\omega_E \equiv - \frac{c\nabla P_i^0}{erB_z^0 N} . \quad (\text{A.13})$$

Da ordenação imposta ($r_{Li}/L_\perp = \epsilon < 1$ e $\omega/\omega_{ci} \sim 1$) decorre que todas as frequências de deriva são de ordem ϵ^2 quando comparadas com ω_{ci} ($\omega_{de, E, B} \sim \epsilon^2 \omega_{ci}$). Note-se também que as correções, em segunda ordem, para δP_e , não são necessárias para a obtenção

de uma equação de autovalores correta até ordem ϵ^2 inclusive [eqs.(IV.11) e (IV.14)]. Em conseqüência se pode obter, em ordem zero e primeira ordem, as seguintes equações para as perturbações paralelas e perpendiculares, na pressão de elétrons

$$\delta P_{e\parallel 0} = -NT_e \left(\xi_r \frac{\partial \ln N}{\partial r} + \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \right), \quad (\text{A.14})$$

$$\delta P_{e\perp 0} = \delta P_{e\parallel 0} + NT_e \eta_0 Z(\eta_0) \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp, \quad (\text{A.15})$$

com $\eta_0 \equiv \frac{\omega}{k_z v_e}$;

$$\delta P_{e\parallel}^{(1)} = \delta P_{e\perp}^{(1)} = 0. \quad (\text{A.16})$$

A P E N D I C E B

ESTE APENDICE TEM POR FINALIDADE LISTAR AS ROTINAS MONTADAS PELO AUTOR COM O OBJETIVO DE EFETUAR A ANALISE NUMERICA APRESENTADA NO CAPITULO VI. COMO SE PODE VER, O CODIGO E EM FORTRAN IV (VERSÃO B/6700) E ALGUNS COMENTARIOS FORAM INSERIDOS A FIM DE ORIENTAR A LEITURA.

A PRIMEIRA ROTINA (REF) EFETUA O CALCULO DO VALOR DA RELACAO DE DISPERSAO. MAIS PRECISAMENTE, AO SEU FINAL A FUNCAO REF ASSUME O VALOR DA SOMA DAS PARTES REAL E IMAGINARIAS, EM VALOR ABSOLUTO, DA RELACAO DE DISPERSAO. PARA OS VALORES DA FUNCAO Z REF EMPREGA A SUBROTINA PDF, CEDIDA POR P.S.GARY. ALGUMAS PREVISOES FORAM FEITAS QUE NAO SAO EMPREGADAS NA ANALISE APRESENTADA, MAS, QUE PODERAO SER DE UTILIDADE EM USOS POSTERIORES.

FUNCTION REF (CW)

C

IMPLICIT COMPLEX (C)

REAL N, NO, NCP, NCPP, MI

COMMON/BCDF/ CA(2,2), CB(2,2), CC(2,2), CD(2,2), CDM, CDN

COMMON/BJ/CJW, CJZ, CJ(5,3,3)

COMMON/BEQ/WCI, WPI, B, BCP, BCPP, N, NCP, NCPP, VS, VP, VI, VE

1, RCP, RCPP, WW, FT, FAT, FATD, TP, TI, RR, RD, EPS

COMMON/BREF/VKOWPI, X, M, NP, MHO, ICH

COMMON/BDATA/ PI, MI, VL, QE

C

RKZ=VKOWPI+WPI/VL

DEN=1./(RKZ+VI)

TERM=WCI+DEN

CT=FT+RKZ/CW

CFATOR=-.25+WW+CW+DEN

CFATOS=-TERM+CFATOR

CFATOT=-TERM+CFATOS+.5

CARG=CW+DEN-3.+TERM

DO 11 I=1,5

CARG=CARG+TERM

C

C QUANDO ICH IGUAL A ZERO OBTENEMOS A RELACAO DE DIS-
 C PERSAO SEM AS RESSONANCIAS DE CHERENKOV; DO CONTRA-
 C RIOS AS MESMAS SAO INCLUIDAS COMO PARTE DA RELACAO.

C

IF (ICH) 5, 6, 5

6 IF (I.EQ.3) GOTO 10

```

C
C      SE MHO FOR ZERO TER-SE-A A RELACAO DE DISPERSAO
C      DO CASO HOMOGENEO, SE NAO, A RELACAO DE DISPERSAO
C      CORRIGIDA.
C
5  IF (MHO) 25,8,25
8  IF (I.EQ.2.OR.I.EQ.4) GOTO 25
   GO TO 10
25 CALL PDF (CARG,CZ,CZD,CZDD,CZDDD)
   CJ(I,2,1)=CFATOR*(CZ+CT*CZD)
   CJ(I,2,2)=CFATOS*(CZD+CT*CZDD)
   CJ(I,2,3)=CFATOT*(CZDD+CT*CZDDD)
   IF (MHO.EQ.0) GOTO 10
   CJ(I,1,1)=FATO*CJ(I,2,1)
   CJ(I,1,2)=FATO*CJ(I,2,2)
   CJ(I,1,3)=FATO*CJ(I,2,3)
   CJ(I,3,1)=FAT*CJ(I,2,1)
   CJ(I,3,2)=FAT*CJ(I,2,2)
   CJ(I,3,3)=FAT*CJ(I,2,3)
10 CONTINUE
11 CONTINUE
   IF (MHO.EQ.0) GOTO 60
   CARG=CM/(RKZ*VE)
   CALL PDF (CARG,CZ,CZD,CZDD,CZDDD)
   CJZ=MW*VS*.5*CZ*CARG
60  CDN=RKZ*RKZ+CM*MW*WCI+4.*WCI*WCI*CJ(2,2,1)
   CDM=RKZ*RKZ-CM*WCI*MW+4.*WCI*WCI*CJ(4,2,1)
70  IF (MHO.EQ.0) GOTO 50

```

C

$$XX = -X * X$$

$$CX = \text{CMPLX}(D, X)$$

$$RM = (1. + ND) / RR$$

$$RN = (1. - ND) / RR$$

$$CCX = CX + RN$$

$$CCY = CX + RM$$

$$CXM = XX + CX / RR - RN * RN$$

$$CXN = XX + CX / RR - RM * RM$$

$$CA(1, 1) = CJZ - .5 - 2. * VS * CJ(3, 2, 1) + 2. * VS * CJ(4, 2, 1) - CJ(3, 3, 1) + 2. * CJ(4, 3, 1) - CJ(5, 3, 1)$$

$$CB(1, 1) = NCP * CJZ + BCP * (2. * CJ(5, 3, 2) - 2. * CJ(4, 3, 2) - 1.) + RCP * 1(16. * CJ(4, 2, 1) - 8. * CJ(3, 2, 1) - 8. * CJ(5, 2, 1) - 8. * VS * CJ(3, 1, 1) 1)$$

$$CC(1, 1) = 4. * BCP * RN * (CJ(4, 3, 1) - CJ(5, 3, 1) - CJ(5, 3, 2)) + 8. * 1RCP * RN * (CJ(4, 2, 2) - 2. * CJ(4, 2, 1) + 2. * CJ(5, 2, 1)) + 16. * RCP * 2RCP * CJ(4, 1, 1) - 4. * (RCP * RR) * CJ(4, 2, 2) - 2. * (BCPP + BCP / R3R) * (CJ(4, 3, 2) - CJ(4, 3, 1) + CJ(5, 3, 1)) - BCP * BCP * (4. * CJ(4, 3, 41) - 2. * CJ(4, 3, 3) - 4. * CJ(5, 3, 2) - 4. * CJ(5, 3, 1)) + RCP * BCP * (16. 5 * CJ(4, 2, 1) - 20. * CJ(4, 2, 2) - 16. * CJ(5, 2, 1))$$

$$CD(1, 1) = CA(1, 1) * CXM + CB(1, 1) * CCX + CC(1, 1)$$

C

$$CA(1, 2) = CJZ - .5 - 2. * VS * CJ(3, 2, 1) + 2. * VS * CJ(2, 2, 1) - CJ(3, 3, 1) + 2. * CJ(2, 3, 1) - CJ(1, 3, 1)$$

$$CB(1, 2) = NCP * CJZ + BCP * (2. * CJ(2, 3, 2) - 2. * CJ(1, 3, 2) - 1.) + RCP * 1(16. * CJ(2, 2, 1) - 8. * CJ(3, 2, 1) - 8. * CJ(1, 2, 1) - 8. * VS * CJ(3, 1, 1) 1)$$

$$CC(1, 2) = 4. * BCP * RN * (CJ(2, 3, 1) - CJ(1, 3, 1) + CJ(1, 3, 2)) + 8. *$$

```

1RCP+RM*(-CJ(2,2,2)-2.*CJ(2,2,1)+2.*CJ(1,2,1))+16.*RCP+
2RCP+CJ(2,1,1)-4.*(RCP+RCP/RR)*CJ(2,2,2)-2.*(BCPP+BCP/R
3R)*(-CJ(2,3,2)-CJ(2,3,1)+CJ(1,3,1))-BCP*BCP*(4.*CJ(2,3,
41)-2.*CJ(2,3,3)+4.*CJ(1,3,2)-4.*CJ(1,3,1))+RCP*BCP*(16.
5*CJ(2,2,1)+20.*CJ(2,2,2)-16.*CJ(1,2,1))

```

```

CD(1,2)=CA(1,2)+CXN+CB(1,2)+CCY+CC(1,2)

```

C

```

50 CREL=CDM+CDN+(CDM+CD(1,2)+CDN+CD(1,1))/(RO+RD)

```

```

REF=ABS(REAL(CREL))+ABS(AIMAG(CREL))

```

```

RETURN

```

```

END

```

C

C

C

C

```

SUBROUTINE FALCON(Z,ZD,EPS,J,I,IROT,XD,F,IS)

```

C

```

C DETERMINA ZEROS DE F(Z), ANALITICA - PROCESSO "DOWN HILL".

```

C

```

IMPLICIT COMPLEX (Z)

```

```

DATA ZROT1,ZROT3,XROT2/(0.,.7),(.5,.5),-.7/

```

C

```

A=XD

```

```

F=REF(Z)

```

```

IF(F-EPS)13,13,10

```

```

10 I=I+1

```

```

IF(I.GT.J) GOTO 12

```

```

IROT=0

```

```
ZD=ZD*1.1
IF (AIMAG(Z)-A) 11, 11, 14
11 Z=Z+ZD
FARRAY=F
F=REF(Z)
IF (F-EPS) 13, 13, 20
20 IF (FARRAY-F) 22, 22, 10
22 IROT=IROT+1
IROTP=IROTP+1
Z=Z-ZD
GO TO (32, 33, 34, 33, 32, 33, 36), IROT
36 XD=SQRT (REAL (ZD)**2+AIMAG (ZD)**2)
IROT=0
IF (XD-EPS) 14, 14, 32
32 ZD=ZROT1*ZD
GO TO 11
33 ZD=XROT2*ZD
GO TO 11
34 ZD=ZROT3*ZD
GO TO 11
14 IS=-1
RETURN
13 IS=0
RETURN
12 IS=1
RETURN
END
```

C

C

C

```
SUBROUTINE EQUIL(BD,NO,RT,IQL)
```

C

C

C

C

C

C

```
REAL N,NO,NCP,NCPP,MI
```

```
REAL N,NO,NCP,NCPP,MI
```

```
COMMON/BEQ/WCI,WPI,B,BCP,BCPP,N,NCP,NCPP,VS,VP,VI,VE
```

```
COMMON/BEQ/WCI,WPI,B,BCP,BCPP,N,NCP,NCPP,VS,VP,VI,VE
```

```
1,RCP,RCPP,WU,FT,FAT,FATD,TP,TI,RR,RO,EPS
```

```
1,RCP,RCPP,WU,FT,FAT,FATD,TP,TI,RR,RO,EPS
```

```
COMMON/BDATA/ PI,MI,VL,QE
```

```
COMMON/BDATA/ PI,MI,VL,QE
```

C

```
TI=TP/RT
```

```
TE=(2.*TP+TI)/3.
```

```
VP=SQRT(TP)+1.384603E6
```

```
VI=SQRT(TI)+1.384603E6
```

```
VE=SQRT(TE)+5.929995E7
```

```
NCP=-2.*RR
```

```
NCPP=-2
```

```
N=NO*EXP(-RR*RR)
```

```
VPP=VP+VP
```

```

V7I=V7I*V7I
VEE=VE+VE/1837.
VS=VEE*.5
RCP=RCPP*RR
FATOR=-4.*PI*MI
BA=FATOR*(VPP+V7I+VEE)
B00=B0*B0
B=B00+BA*N
FATOR=-FATOR*N/B
BETE=FATOR*VEE
BETP=FATOR*VPP
BETI=FATOR*V7I
BETT=BETE+BETP+BETI
BCP=.5*BA*N*NCP/B
BCPP=BCP*(NCP-2.*BCP+1./RR)
IF (B.ST.0) GOTO 10
B=-B
10 B=SQRT(B)
WCI=QE*B/(MI*VL)
RLAR=VP/WCI
WPI=SQRT(4.*PI*N*QE*QE/MI)
RLIRKZ=RLAR*WPI/VL
C
C     CALCULO DE INVARIANTES DE REF
C
WW=WPI/(WCI*VL)
WW=WW*WW

```

```

FT=.5*(VI-RT*VI)
FAT=2.*VPP
FATO=2./FAT
EPS=(RLAR*ABS(NCP))*2/10.

```

C

```

IF(IQL.EQ.1) GOTO 20
WRITE(6,/) BETT,BETP,BETI,BETE
IF(IQL.EQ.2) GOTO 20
WRITE(6,/) WCI,B,BCP,BCPP
WRITE(6,/) WPI,N,NCP,NCPP
IF(IQL.EQ.3) GOTO 20
WRITE(6,/) VS,VP,VI,VE
WRITE(6,/) RLAR,RCP,RCPP,RLIRKZ

```

20 CONTINUE

RETURN

END

C

C

C

C

SUBROUTINE MAIN

C

```

IMPLICIT COMPLEX (C)
REAL N,ND,NCP,NCPP,MI
COMMON/BEQ/WCI,WPI,B,BCP,BCPP,N,NCP,NCPP,VS,VP,VI,VE
1,RCP,RCPP,WW,FT,FAT,FATO,TP,TI,RR,RO,EPS
COMMON/BCDF/ CA(2,2),CB(2,2),CC(2,2),CD(2,2),CDM,CDN
COMMON/BJ/CJU,CJZ,CJ(5,3,3)

```

```

COMMON/BREF/VKOWPI,X,M,NP,MHO,ICH
COMMON/BDATA/PI,MI,VL,QE
DATA PI,MI,VL,QE/3.14159265,1.67E-24,3E10,4.8E-10/
DATA J,TP,NO,BO /200,2000.,4.E16,7.E4/

```

C

```

99  READ(5,/) RD,RT,RR,X,M,MHO,ICH,VKOWPO,STEP,SSTP,IQL,
    1IALT,ISAI
    IF(RD.LT.0) GOTO 89
    R=RR+RD
41  CALL EQUIL(BO,NO,RT,IQL)
    WRITE(6,/) R,TP,TI,EPS
42  IY=0
    WRITE(6,/) RD,RT,RR,X,M,MHO,ICH,VKOWPO,STEP,SSTP,IQL,
    1IALY,ISAI
    IF((ISAI-ICONTA).LT.0) GOTO 99
    CW=WCI+CMPLX(.6,.1)
    CWD=CMPLX(0,WCI+.03)
    VKOWPI=VKOWPO
    W=0
    Y=0
    XX=-WCI
    YY=XX
    DO 40 J1=1,50
    L=1
    IROTP=0
    XD=WCI
    VKOWPI=VKOWPI+STEP
    CALL FALCON(CW,CWD,EPS,J,L,IROTP,XD,F,IS)

```

```

Z=W
W=Y
Y=VKOWPI
ZZ=XX
XX=YY
YY=AIMAG(CW)
IF(IALT.EQ.1) GOTO 51
IF(YY.GT.XX) GOTO 51
J1=50

```

C

```

DETO=Y*Y*W+W*W*Z+Z*Z*Y-(Y*Y*Z+W*W*Y+Z*Z*W)
DETA=YY*W+XX*Z+ZZ*Y-(YY*Z+XX*Y+ZZ*W)
IF(DETO*DETA.EQ.0) GOTO 51
DETB=Y*Y*XX+W*W*ZZ+Z*Z*YY-(Y*Y*ZZ+W*W*YY+Z*Z*XX)
DETC=Y*Y*W*ZZ+W*W*Z*YY+Z*Z*Y*XX-(Y*Y*Z*XX+W*W*Y*ZZ+Z*Z*
1*W*YY)
X1=-.5*DETB/DETA
Y1=(DETA*X1*X1+DETB*X1+DETC)/DETO

```

C

```

51 IF(YY)30,10,10
30 IY=IY+1
10 IF(IY-5)50,50,60
50 CWD=CMPLX(0,YY-XX)
CG=CW/WCI
IF(XX.LT.0) GOTO 71
IF(F.LT.EPS) GOTO 70
CW=WCI*CMPLX(.5,.1)
71 CONTINUE

```

```
CWD=CMPLX(0, .03*WCI)
IF (IALT-1) 45,70,45
70 WRITE(6,/) IS,MHD,L,IROTP,XD,F,CG,VKDWPI
45 CONTINUE
40 CONTINUE
```

C

```
Y1=Y1/WCI
WRITE(6,/) Y1,X1
WRITE(6,24)
```

C

```
ICONTA=ICONTA+1
60 GO TO (99,20,21,22,23), IALT
20 MTEST=MHD
MHD=MH1
MH1=MTEST
CD(1,1)=0.
CD(1,2)=0.
IF (MHD.EQ.0) GOTO 42
RT=RT+SSTP
GOTO 41
21 MTEST=MHD
MHD=MH1
MH1=MTEST
CD(1,1)=0.
CD(1,2)=0.
IF (MHD.EQ.0) GOTO 42
RR=RR+SSTP
GOTO 41
```


REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FREIDBERG, J.P. Phys. Fluids, 15, 1102, 1972.
2. LEWIS, H.R. & FREIDBERG, J.P. Fifth european conference on controlled fusion and plasma physics. Grenoble, 1972.
3. CANTRELL, D.L.; ELLIS, W.R.; HARRIS, H.W.; JAHODA, F.C.; KRISTAL, R.; MACHALECK, M.D.; McCONNELL, J.R.; QUINN, W.E.; RIBE, F.L.; SAWYER, G.A.; SEIBEL, F.T.; SIEMON, R.E. Plasma physics and controlled nuclear fusion research. Vienna, International Atomic Energy Agency, 1974 (IAEA CN-33/E1-2)
4. DeSILVA, A.W.; DOVE, W.F.; SPALDING, I.J.; GOLDENBAUM, G.C. Phys. Fluids, 14, 42, 1971.
5. BATCHELOR, D.B. & DAVIDSON, R.C. J. Plasma Phys., 14, 77, 1975.
6. LITTLE, E.M.; NEWTON, A.A.; QUINN, W.E.; RIBE, F.L. Plasma physics and controlled nuclear fusion research. Vienna, International Atomic Energy Agency, 1969. v.2, p.555.
7. BURNETT, S.C.; ELLIS, W.R.; HAMMER, C.F.; HARRIS, C.W.; JAHODA, F.C. KAUFMANN, M.; QUINN, W.E.; RIBE, F.L.; SAWYER, G.A.; SIEMON, R.E.; THOMAS, K.S. Fourth international conference on plasma physics and nuclear fusion research. Madison, 1971.
8. FÜNFER, E.; KAUFMANN, M.; LOTZ, W.; NENHAUSER, J. Fourth international conference on plasma physics and nuclear fusion research. Madison, 1971.

9. CANTREL, D.L.; ELLIS, W.R.; FREEMAN, B.L.; GRIBBLE, R.F.; GUTSCHER, W.D.; JOHNSON, K.J.; KUTAC, K.F.; MILLER, G.; QUINN, W.E. Third topical conference on pulsed high beta plasmas. Oxon, UK, 1975. Paper A.1.2.
10. KAUFMANN, M. Third topical conference on pulsed high beta plasmas. Abingdon, 1975. Invited paper A.1.1.
11. DAVIDSON, R.C. & FREIDBERG, J.P. Third topical conference on pulsed high beta plasmas. Abingdon, 1975. Invited paper A.1.5.
12. FÜNFER, E.; KAUFMANN, M.; LOTZ, W.; NENHAUSER, J.; SCHRAMM, G.; SEIDEL, U. Nucl. Fusion, 15, 133, 1975.
13. CHEW, G.F.; GOLDBERGER, M.L.; LOW, F.E. Proc. R. Soc. London, A236, 112, 1956.
14. CHANDRASEKHAR, S.; KAUFMAN, A.N.; WATSON, K.M. Ann. Phys., 5, 1, 1958.
15. GRAD, H. Proceedings of the symposium on eletromagnetics and fluid dynamics of gaseous plasma. New York, Polytechnics Press, 1961.
16. _____. Proceedings of symposia in applied mathematics. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1966. v.18, p.162.
17. FRIEMAN, E.A.; DAVIDSON, R.C.; LANGDON, A.B. Phys. Fluids, 9, 1475, 1966.
18. TAYLOR, J.B. & HASTIE, R.J. Plasma Phys., 10, 479, 1968.
19. CHEUNG, L. & HORTON, W. Ann. Phys., 81, 201, 1973.
20. HASTIE, R.J.; TAYLOR, J.B.; HAAS, F.A. Ann. Phys., 41, 302, 1967.
21. ROSENBLUTH, M. & SIMON, A. Phys. Fluids, 8, 1300, 1965.

22. KENNEL, C.F. & GREENE, J.M. Ann. Phys., 38, 63, 1966.
23. VALANEJAD, E. & GREENE, J.M. Ann. Phys., 41, 492, 1967.
24. BOWERS, E. J. Plasma Phys., 6, 87, 1971.
25. RUTHERFORD, P.H. & FRIEMAN, E.A. Phys. Fluids, 11, 569, 1968.
26. KRALL, N.A. & TRIVELPIECE, A.W. Principles of plasma physics.
New York, McGraw-Hill, 1974.
27. TATARONIS, J.; GROSSMANN, W.; CHOE, J. Bull. Am. Phys. Soc.,
19, 970, 1974.
28. WEITZNER, H. Phys. Fluids, 11, 420, 1976.
29. KADISH, A. Phys. Fluids, 9, 514, 1966.
30. _____. J. Math. Phys., 8, 884, 1967.
31. PAO, Y.P. Nucl. Fusion, 14, 25, 1974.
32. BERNSTEIN, I.B.; FRIEMAN, E.A.; KRUSKAL, M.D.; KULSRUD, R.
Proc. R. Soc. London, A244, 17, 1958.
33. HAAS, F.A. & WESSON, J.A. Phys. Fluids, 9, 2472, 1966.
34. TURNER, L. Phys. Fluids, 20, 654, 1977.
35. D'IPPOLITO, D.A. & DAVIDSON, R.C. Phys. Fluids, 18, 1507,
1975.
36. D'IPPOLITO, D.A. A hybrid-kinetic model for collisionless
high- β plasmas. College Park, University of Maryland,
1975. Thesis.
37. MONDT, J.P. On the properties of high temperature plasmas:
a convergent collision integral and hybrid-kinetic sta-
bility theory. Eindhoven, University of Eindhoven, 1977.
Thesis.
38. BRETZ, N.L. & DeSILVA, A.W. Phys. Rev. Lett., 32, 138, 1974.
39. MCKENNA, K.F.; KRISTAL, R.; THOMAS, K.S. Phys. Rev. Lett.,
32, 409, 1974.

40. LIEWER, P.C. & KRALL, N.A. Phys. Fluids, 16, 1953, 1973.
41. COMMISSO, R.J. & GRIEM, H.R. Phys. Rev. Lett., 36, 1038, 1976.
42. DAVIDSON, R.C. & KRALL, N.A. Anomalous transport in high-temperature plasmas. College Park, University of Maryland, 1977. (Physics publication, 77-006)
43. DAVIDSON, R.C. & HAMMER, D.A. Phys. Fluids, 15, 1282, 1972.
44. HAMASAKI, S. & KRALL, N.A. Phys. Fluids, 16, 145, 1973.
45. OSSAKOW, S.; OTT, E.; HABER, I. Phys. Fluids, 15, 2314, 1972.
46. DAVIDSON, R.C. & OGDEN, J.M. Phys. Fluids, 18, 1045, 1975.
47. CUPERMAN, S.; GOMBEROFF, L.; STERNLIEB, A. J. Plasma Phys., 13, 259, 1975.
48. GOMBEROFF, L. & CUPERMAN, S. J. Plasma Phys., 18, 91, 1977.
49. TAJIMA, T.; MIMA, K.; DAWSON, J.M. Phys. Rev. Lett., 39, 201, 1977.
50. DAVIDSON, R.C. & MONDT, J.P. Bull. Am. Phys. Soc., 21, 1108, 1976.
51. MONDT, J.P. & DAVIDSON, R.C. 1977. Submetido a publicação.
52. MONTGOMERY, D. & TIDMAN, D. Plasma kinetic theory. New York, McGraw-Hill, 1964. p.146.
53. TANG, Ting-Wei; FU, K.Y.; FARSHORI, M.W. Plasma Phys., 21, 127, 1978.
54. BATCHELOR, D.B. Equilibrium and nonlocal stability properties of collisionless theta-pinch plasmas. College-Park, University of Maryland, 1976. Thesis.
55. LIEWER, P.C. & DAVIDSON, R.C. Nucl. Fusion, 17, 85, 1977.
56. PEARLSTEIN, L.D. & FREIDBERG, J.P. Phys. Fluids, 21, 1218, 1978.

57. GOEDERT, J. & MONDT, J.P. Finite-Larmor-radius effects on anisotropy-driven electromagnetic modes in high-beta plasmas. 1979. A ser publicado no J. Plasma Phys.
58. _____. Bull. Am. Phys. Soc., 23, 607, 1978.
59. _____. Cherenkov resonance as an FLR effect on the Alfvén-ion-cyclotron mode. In: Proceedings of the Sherwood meeting theoretical aspects of controlled thermonuclear fusion. Mount Pocono, Princeton Plasma Physics Laboratory, 1979. p. 2B23.
60. BARTSCH, R.R.; COMMISSO, R.J.; MCKENNA, K.F.; EKDAHL, C.A.; SIEMON, R.E. Bull. Am. Phys. Soc., 23, 801, 1978.
61. COMMISSO, R.J.; EKDAHL, C.A.; FREESE, K.B.; MCKENNA, K.F.; QUINN, W.E. Phys. Rev. Lett., 39, 137, 1977.
62. STOVER, E.K.; KLEVANS, E.H.; YORK, T.M. Phys. Fluids, 21, 2091, 1978.
63. THOMAS, K.S.; HARRIS, H.W.; JAHODA, F.C.; SAWYER, G.A.; SIEMON, R.E. Phys. Fluids, 17, 1314, 1974.
64. GRIBBLE, R.F.; QUINN, W.E.; SIEMON, R.E. Phys. Fluids, 14, 2042, 1971.
65. WARD, J.A. J. Assoc. Comput. Mach., 4, 148, 1957.
66. COLGATE, S.A. Conference on thermonuclear reactions. Washington, U.S. Government Printing Office, 1955. p.176. (Wash-289).
67. FRIED, B.D. & CONTE, S.D. The plasma dispersion function. New York, Academic Press, 1961.