

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Sobre o Vetor de Fiedler e as Componentes de Perron de um Grafo

por

Israel de Souza Rocha

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Porto Alegre, Janeiro de 2012.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rocha, Israel de Souza

Sobre o Vetor de Fiedler e as Componentes de Perron de um Grafo / Israel de Souza Rocha.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2012.

79 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2012.

Orientador: Trevisan, Vilmar

Dissertação: Matemática Aplicada
Vetor de Fiedler, Conectividade Algébrica, Matriz Laplaciana, Componentes de Perron

Sobre o Vetor de Fiedler e as Componentes de Perron de um Grafo

por

Israel de Souza Rocha

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Numérica e Computação Científica

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Raposo Del-Vecchio
Instituto de Matemática-UFF

Profa. Dra. Luciana Salete Buriol
Instituto de Informática-UFRGS

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Instituto de Matemática-UFRGS

Profa. Dra. Virgínia Maria Rodrigues
Instituto de Matemática-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
16 de janeiro de 2012.

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE ABREVIATURAS	vii
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRELIMINARES	4
2.1 Introdução	4
2.2 Teoria de Grafos	5
2.3 Teoria Espectral de Grafos	8
2.4 Teoria de Matrizes	11
2.4.1 Matrizes Não-negativas	11
2.4.2 Entrelaçamento de Autovalores	14
3 TEOREMA DA MONOTONICIDADE DE FIEDLER	16
3.1 Introdução	16
3.2 Resultados em Teoria de Matrizes	21
3.3 Aplicação em Teoria dos Grafos	30
4 COMPONENTES DE PERRON DE UM GRAFO	40
4.1 Introdução	40
4.2 Componentes de Perron e o Caso B	41
4.3 Componentes de Perron e o Caso A	47
5 APLICAÇÃO EM ORDENAMENTO DE ÁRVORES	55
5.1 Introdução	55

5.2 Resultados de Classificação	62
5.3 Resultados de Ordenamento	68
6 CONCLUSÃO	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

Lista de Figuras

Figura 2.1	Representação gráfica de um grafo com 5 vértices.	5
Figura 2.2	Grafo e seu grafo de blocos.	8
Figura 3.1	Numeração característica dos vértices.	17
Figura 3.2	Caso A do Teorema da Monotonicidade de Fiedler.	18
Figura 3.3	Caso B do Teorema da Monotonicidade de Fiedler.	19
Figura 3.4	Árvore com numeração característica.	20
Figura 3.5	Árvore com numeração característica e um subconjunto conexo de vértices.	32
Figura 3.6	Componentes de uma Árvore.	36
Figura 3.7	Componentes de uma Árvore.	36
Figura 5.1	Árvore com 11 vértices.	57
Figura 5.2	Um caterpillar com 20 vértices.	60

LISTA DE ABREVIATURAS

$d(v)$	grau do vértice v
P_n	caminho com n vértices
S_n	estrela com $n + 1$ vértices
K_n	grafo completo com n vértices
$a(G)$	conectividade algébrica do grafo G
$L(G)$	matriz Laplaciana do grafo G
$\mathbf{1}$	vetor com todas as entradas iguais a 1
e_i	vetor com a i -ésima entrada igual a 1 e com as entradas restantes iguais a 0
$\ x\ $	norma do vetor x
$x \perp v$	x ortogonal a v
J	matriz com todas as entradas iguais a 1
I	matriz identidade
$\sigma(A)$	espectro da matriz A
$\rho(A)$	raio espectral da matriz A
$In(A)$	inércia da matriz A
$adj(A)$	matriz adjunta da matriz A

RESUMO

Dado um grafo, sua representação através da matriz Laplaciana fornece o espectro Laplaciano do grafo. Neste trabalho, estudamos o segundo menor autovalor Laplaciano, chamado de conectividade algébrica. Chamamos qualquer autovetor associado a esse autovalor de vetor de Fiedler. Apresentamos a teoria que descreve a estrutura de um grafo através do vetor de Fiedler e as componentes de Perron de um grafo. Veremos que estudando as componentes de Perron obtemos resultados com aplicação direta no estudo da conectividade algébrica. Além disso, utilizamos estas ferramentas para obter uma ordem total pela conectividade algébrica em uma família de árvores chamadas de caterpillars [26] (um caterpillar é uma árvore na qual a remoção de todos vértices pendentes a torna um caminho).

ABSTRACT

Given a graph, its laplacian matrix representation gives the laplacian spectrum of the graph. In this work, we study the second smallest laplacian eigenvalue, called algebraic connectivity. We call any eigenvector associated with this eigenvalue a Fiedler vector. We present the theory which describes the graph structure by means of the Fiedler vector and the Perron components of a graph. We shall see that studying the Perron components we obtain results with direct application in the study of the algebraic connectivity. Moreover, we use these tools to obtain a total order by algebraic connectivity in a family of trees called caterpillars [26] (a caterpillar is a tree in which the removal of all pendant vertices make it a path).

1 INTRODUÇÃO

Um *grafo* é um par de conjuntos $G = (V, E)$, onde os elementos de E são subconjuntos de dois elementos de V . Chamamos os elementos de V de *vértices* do grafo e os elementos de E de *arestas*. Alternativamente, podemos representar um grafo utilizando matrizes. O estudo das propriedades estruturais decorrentes das matrizes que representam grafos e de suas propriedades espectrais constituem o elemento central da Teoria Espectral de Grafos.

Uma representação comum de um grafo é dada pela sua matriz Laplaciana. Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, a *matriz Laplaciana* do grafo G é a matriz de ordem n dada por $L(G) = [l_{ij}]$, onde $l_{ij} = -1$ se $v_i v_j \in E$, $l_{ii} = d(v_i)$ e $l_{ij} = 0$ nas entradas restantes. Essa matriz e, em especial, o seu segundo menor autovalor, desempenham papel relevante em diversas aplicações. No *survey* sobre matriz Laplaciana [20], alguns dos muitos resultados conhecidos sobre essa matriz são exibidos. Fiedler, em [9], mostrou que um grafo é conexo se, e somente se, seu segundo menor autovalor Laplaciano é positivo. Esse autovalor é denominado de *conectividade algébrica* e desempenha um papel fundamental em Teoria Espectral de Grafos, estando associado a diferentes invariantes como número isoperimétrico, diâmetro, conectividade de vértices e conectividade de arestas, entre outros.

Em [5, 8, 22, 10], usando a conectividade algébrica, são abordados problemas difíceis em teoria de grafos: propriedades expansoras de um grafo, grafos com peso, conectividade algébrica absoluta, número isoperimétrico e outras propriedades de um grafo. Em [2], um resumo sobre antigos e novos resultados em conectividade algébrica é fornecido.

Lembramos que uma árvore é um grafo conexo e acíclico. O problema de ordenar árvores pela conectividade algébrica é uma área de pesquisa ativa. Importantes contribuições para esse problema com árvores de ordem n e diâmetro 4

foram feitas por Zhang [30]. Os autores Shao, Guo e Shan [27] determinaram as primeiras quatro árvores de ordem $n \geq 9$ com menor conectividade algébrica. Yuan, Shao e Zhang [29] introduziram seis classes de árvores com n vértices e determinaram o ordenamento destas árvores por esse autovalor. Um dos mais importantes resultados sobre ordenamento de árvores é implicitamente dado por Fallat e Kirkland em [8]. Eles exibem a única árvore com n vértices e diâmetro d fixados que minimiza a conectividade algébrica. O problema de ordenar todas as árvores pela conectividade algébrica ainda está em aberto.

Este trabalho trata da conectividade algébrica e de seus autovetores associados. Um dos mais notáveis resultados sobre a matriz Laplaciana é o Teorema da Monotonicidade de Fiedler [3] que será demonstrado neste trabalho. Esse teorema relaciona a estrutura de vértices com qualquer autovetor associado à conectividade algébrica. Tal autovetor é comumente conhecido como *vetor de Fiedler*, assim chamado em homenagem ao matemático checo Miroslav Fiedler pelo seu trabalho pioneiro no campo [10] iniciado nos anos 70.

Mais recentemente, Kirkland, Fallat, Neumann e Shader em [17, 15] apresentaram resultados sobre o vetor de Fiedler que constituíram uma nova maneira de compreender como a conectividade algébrica se modifica quando modificamos um grafo. Esses resultados fornecem ferramentas de aplicação simples e direta que, por si só, são interessantes. De fato, isso possibilitou que muitos resultados fossem obtidos nos últimos anos [8, 16, 24, 25, 3].

Utilizando tais ferramentas, Rojo, Trevisan e o autor dessa dissertação [26] obtiveram uma ordem total pela conectividade algébrica para uma família de árvores chamadas de *caterpillars* (um *caterpillar* é uma árvore na qual a remoção de todos vértices pendentes a torna um caminho). Esse ordenamento será apresentado no último capítulo. Em [26], ainda é apresentada uma cota superior para a conectividade algébrica desses *caterpillars*, identificando a única árvore que atinge essa cota.

Neste trabalho pretendemos apresentar toda a teoria necessária, iniciada com os trabalhos de Fiedler nos anos 70, passando pelas ferramentas desenvolvidas por Kirkland e construindo a fundamentação teórica, para a aplicação em conectividade algébrica.

O Capítulo 2 introduz a terminologia e os resultados básicos em Teoria de Grafos, Teoria Espectral de Grafos e Teoria de Matrizes necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo 3, fornecemos a demonstração do Teorema da Monotonicidade de Fiedler e apresentamos exemplos a fim de elucidar seu significado e importância em um grafo.

O Capítulo 4 introduz a noção de componentes de Perron em um vértice de um grafo e mostra como a estrutura do vetor de Fiedler pode ser compreendida em termos de componentes de Perron. Isso representa um aperfeiçoamento no resultado original de Fiedler, fornecendo ferramentas que permitem estudar como se modifica a conectividade algébrica de um grafo quando efetuamos certas modificações em sua estrutura.

Por fim, no Capítulo 5 aplicamos a teoria desenvolvida, onde por meio de um ordenamento total pela conectividade algébrica de uma família de caterpillars, mostramos como a teoria pode ser utilizada para o ordenamento de grafos.

2 PRELIMINARES

Este capítulo fornece uma concisa introdução para a terminologia utilizada mais tarde neste texto. Ademais, este capítulo reúne os resultados essenciais em Teoria de Grafos, Teoria Espectral de Grafos e Teoria de Matrizes necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

2.1 Introdução

A Seção 2.2 contém um breve resumo das definições básicas em teoria de grafos. Felizmente, grande parte da terminologia padrão em teoria de grafos é intuitiva e, assim, fácil de lembrar. Por esse motivo, esta seção não se debruça nestas definições mais do que a clareza do texto exige: seu principal propósito é reunir os termos mais básicos em um único local para fácil referência posterior. A abordagem apresentada foi baseada no livro de Diestel [7].

A Seção 2.3 trata de Teoria Espectral de Grafos e traz os resultados necessários para a compreensão do texto, que envolvem a matriz Laplaciana de um grafo. Para uma discussão mais detalhada, com as devidas demonstrações, o livro [1] é uma excelente referência para os resultados básicos.

A Seção 2.4 descreve resultados clássicos em teoria de matrizes, tais como entrelaçamento de autovalores para matrizes Hermitianas e teoremas da teoria de Perron-Frobenius para matrizes não-negativas. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em livros de análise matricial como [14] e [28].

2.2 Teoria de Grafos

Um *grafo* é um par de conjuntos $G = (V, E)$, onde os elementos de E são subconjuntos de dois elementos de V . Para evitar ambiguidade de notação, assumiremos tacitamente que $V \cap E = \emptyset$. Os elementos de V são os *vértices* do grafo, os elementos de E são suas *arestas*. A maneira usual de imaginar um grafo é desenhando um ponto para cada vértice e unindo dois vértices por uma linha se esses dois vértices formam uma aresta. Uma representação gráfica de um grafo pode ser observada na Figura 2.1.

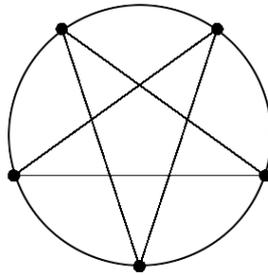


Figura 2.1: Representação gráfica de um grafo com 5 vértices.

Diremos que um vértice u é *adjacente* a um vértice v se existe uma aresta $\{u, v\} \in E$. Uma aresta e é *incidente* ao vértice v se $v \in e$. Uma aresta $\{u, v\}$ é usualmente escrita como uv .

De agora em diante, consideramos apenas grafos que não contêm *laços* (arestas ligando um vértice a ele mesmo) e sem *arestas múltiplas* (mais de uma aresta incidente ao mesmo par de vértices). Tais grafos são ditos *simples*.

O *grau* de um vértice v é o número de arestas incidentes a v e é denotado por $d(v)$.

Se $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são dois grafos, diremos que G e G' são *isomorfos*, se existe uma bijeção entre seus vértices que preserva as arestas, ou seja, $\phi : V \rightarrow V'$, com $xy \in E$ se, e somente se, $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Se $V' \subset V$ e $E' \subset E$,

diremos que G' é um *subgrafo* de G . Menos formalmente, diremos que G *contém* G' . Finalmente, $G' \subset G$ é um subgrafo *gerador* se $V' = V$.

Se U é um subconjunto de vértices, denotamos por $G - U$ o grafo obtido de G pela remoção de todos os vértices em U e de suas arestas incidentes.

Um *caminho* é um grafo não vazio $P = (V, E)$ da forma

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ e } E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}.$$

O número de arestas no caminho é o seu *tamanho*, e um caminho com k vértices é denotado por P_k .

Se $P = (V, E)$ é um caminho com tamanho $n \geq 3$, então o grafo $C = (V, E \cup \{v_n, v_1\})$ é chamado de *ciclo*.

Um grafo com n vértices em que cada vértice se liga a todos os demais é chamado de grafo *completo* e denotado por K_n .

Um grafo com $n + 1$ vértices em que existe um vértice ao qual todos os outros se ligam e nenhum outro vértice se liga a qualquer outro é chamado de *estrela* e denotado por S_n .

A *distância* entre dois vértices x e y em G é o tamanho do menor caminho ligando x e y . A maior distância entre dois vértices de G é chamada de *diâmetro* de G .

Um grafo não vazio G é dito *conexo* se quaisquer dois de seus vértices podem ser ligados por um caminho em G . Caso contrário, isto é, se existem dois vértices que não são ligados por algum caminho, então G é dito *desconexo*. Se $G = (V, E)$, um subgrafo conexo maximal de G é chamado de *componente* ou *componente conexa* de G .

Um grafo acíclico, isto é, um grafo que não contém ciclos, é chamado de *floresta*. Uma floresta conexa é chamada de *árvore*. (Assim, uma floresta é um

grafo cujas componentes são árvores.) Os vértices de grau 1 de uma árvore são suas *folhas*. Cada árvore tem no mínimo duas folhas - tome, por exemplo, os finais do maior caminho.

A *conectividade de vértices* de um grafo, denotada por $k(G)$, é o menor número de vértices que, ao serem retirados, tornam o grafo desconexo.

A *conectividade de arestas*, denotada por $k'(G)$, é o menor número de arestas que, ao serem retiradas, tornam o grafo desconexo.

Se G é um grafo conexo, um vértice v é um *ponto de articulação* ou *vértice de corte* se o grafo $G - v$ é desconexo.

Um grafo G é dito *k -conexo* ($k \in \mathbb{N}$), se $|G| > k$ e $G - X$ é conexo para cada conjunto $X \subset V$ com $|X| < k$. Em outras palavras, nenhum par de vértices pode ser separado por menos de k vértices removidos. Todo grafo (não vazio) é 0-conexo e os grafos 1-conexos são precisamente os grafos conexos não triviais.

Chamamos um subgrafo conexo maximal sem um ponto de articulação de *bloco*. Dessa forma, cada bloco é um subgrafo 2-conexo maximal, uma aresta que não está em nenhum ciclo (com seus vértices) ou um vértice isolado. Reciprocamente, todo subgrafo dessa forma é um bloco. Pela sua maximalidade, dois blocos distintos de G se intersectam em apenas um vértice, que é então um ponto de articulação de G . Consequentemente, toda aresta encontra-se em um único bloco e G é a união de seus blocos.

Em certo sentido, blocos são os análogos 2-conexos das componentes conexas, os subgrafos conexos maximais do grafo. Se, por um lado, a estrutura de G é completamente determinada por suas componentes, por outro lado, ela não é completamente capturada pela estrutura de blocos.

A seguinte construção descreve formalmente a estrutura formada pelos seus blocos. Denotando por A o conjunto de pontos de articulação de G e por \mathcal{B}

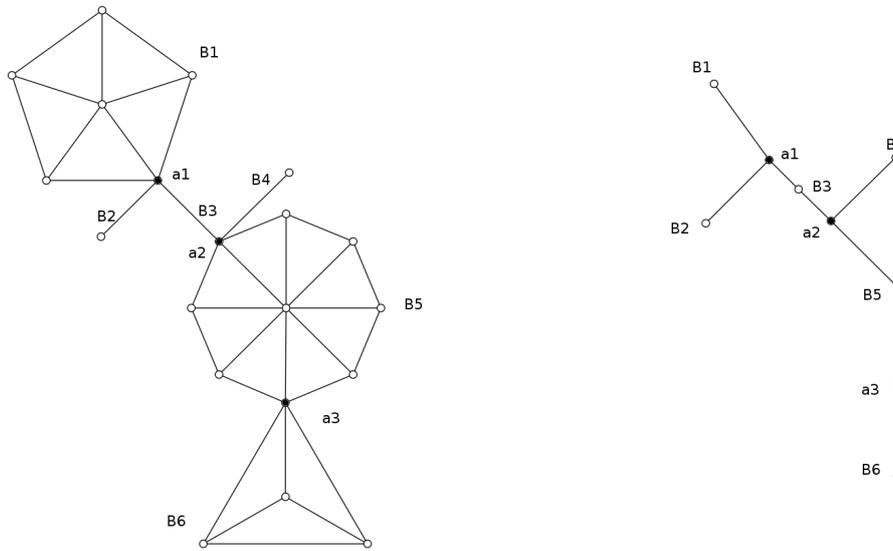


Figura 2.2: Grafo e seu grafo de blocos.

o conjunto de seus blocos, podemos formar naturalmente o grafo de blocos de G . Definimos essa estrutura como sendo o grafo no conjunto de vértices $A \cup \mathcal{B}$ e pelas arestas aB , onde $a \in B$ e $B \in \mathcal{B}$. Um grafo de blocos é mostrado na Figura 2.2.

Podemos facilmente ver que o grafo de blocos de um grafo conexo é uma árvore. De fato, diversos resultados sobre a estrutura de blocos e os pontos de articulação de um grafo podem ser encontrados na literatura. O livro [7] apresenta uma discussão mais completa a esse respeito.

2.3 Teoria Espectral de Grafos

A Teoria Espectral de Grafos estuda propriedades de grafos por meio de suas representações matriciais e de seus respectivos espectros. Em geral, a Teoria Algébrica dos Grafos estuda propriedades algébricas de funções de representação e operações em grafos, conceitos e propriedades algébricas delas decorrentes. Além disso, em Teoria Espectral de Grafos, estudam-se as propriedades estruturais decor-

rentes das matrizes que representam grafos. Estas últimas levam às propriedades espectrais das matrizes de representação, que é o elemento central da Teoria Espectral de Grafos [1].

Uma representação de um grafo frequente em Teoria Espectral de Grafos é dada pela sua matriz Laplaciana. Essa matriz e, em especial, o seu segundo menor autovalor, desempenham um papel relevante em diversas aplicações. Apresentaremos, nesta seção, o conhecido Teorema da Matriz-Árvore, que determina o número de árvores geradoras de um grafo em função dos cofatores da matriz Laplaciana.

O segundo menor autovalor e seus autovetores associados são o foco deste trabalho e, portanto, reunimos aqui os resultados relevantes para esse trabalho relacionados a eles.

Lembramos que, dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, a *matriz Laplaciana* de G é a matriz de ordem n dada por $L(G) = [l_{ij}]$, onde $l_{ij} = -1$ se $v_i v_j \in E$, $l_{ii} = d(v_i)$ e $l_{ij} = 0$ nas entradas restantes. Quando conveniente, utilizaremos apenas L para denotar a matriz Laplaciana.

No *survey* sobre matriz Laplaciana [20], alguns dos muitos resultados conhecidos sobre essa matriz são exibidos. Fiedler em [9], mostrou que um grafo é conexo se, e somente se, o seu segundo menor autovalor Laplaciano é positivo. Esse autovalor é denominado de *conectividade algébrica* e desempenha um papel fundamental em Teoria Espectral de Grafos. Denotamos a conectividade algébrica por $a(G)$. Em [2], é apresentado um resumo sobre antigos e novos resultados em conectividade algébrica.

A seguir, enunciamos um resultado bem conhecido sobre o primeiro e o segundo menor autovalor de um grafo G .

Teorema 2.1 *Seja G um grafo com n vértices e L sua matriz Laplaciana. Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ os autovalores de L . Então:*

(i) $\lambda_1 = 0$ e o vetor $\mathbf{1}$ é autovetor associado

(ii) G é conexo se, e somente se, $\lambda_2 > 0$.

Portanto, todos os autovalores de L são maiores ou iguais a zero. Para um grafo desconexo, o número de autovalores iguais a zero é precisamente o número de componentes conexas do grafo. Assim, a multiplicidade do autovalor zero é o número de componentes conexas de G .

As conectividades algébrica, de vértices e de arestas, respectivamente $a(G)$, $k(G)$ e $k'(G)$, estão relacionadas de acordo com o resultado abaixo, provado por Fiedler [9].

Teorema 2.2 *Se G não é um grafo completo então $a(G) \leq k(G) \leq k'(G)$.*

Para o grafo completo K_n , Fiedler demonstrou o seguinte fato.

Teorema 2.3 *Para o grafo completo K_n , $a(K_n) = n$.*

Outro resultado importante envolvendo a matriz Laplaciana é o Teorema da Matriz-Árvore. Uma *árvore geradora* de um grafo G é um subgrafo que tem os mesmos vértices de G e é uma árvore. A determinação do número de árvores geradoras de um grafo é um dos problemas mais antigos e famosos da teoria de grafos. Em 1847, Kirchhoff estudando circuitos elétricos, provou o resultado que ficou conhecido como Teorema da Matriz-Árvore, enunciado a seguir.

Claramente, grafos desconexos não possuem árvores geradoras. Por outro lado, todo grafo conexo tem pelo menos uma árvore geradora (se o grafo não é uma árvore, podemos remover uma aresta de cada ciclo, sucessivamente, até não haver mais ciclos. O subgrafo obtido será uma árvore geradora do grafo inicial). O Teorema da matriz-árvore na sua versão original, afirma que o número de árvores geradoras de um grafo é dado por qualquer cofator de sua matriz Laplaciana. Mais precisamente:

Teorema 2.4 (Teorema da Matriz-Árvore)

$$\text{adj}(L) = \tau(G) \cdot J,$$

onde $\tau(G)$ é o número de árvores geradoras de G e J é a matriz com todas entradas iguais a 1.

2.4 Teoria de Matrizes

As demonstrações dos teoremas enunciados aqui podem ser encontradas nos livros [14] e [28].

2.4.1 Matrizes Não-negativas

Considere matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de mesmo tamanho. Escrevemos

$$B \geq 0 \text{ se todos } b_{ij} \geq 0$$

$$B > 0 \text{ se todos } b_{ij} > 0$$

$$A \geq B \text{ se } A - B \geq 0$$

$$A > B \text{ se } A - B > 0.$$

As relações inversas \leq e $<$ são definidas similarmente. Se $A \geq 0$, diremos que A é uma matriz *não-negativa* e se $A > 0$, diremos que A é uma matriz *positiva*.

O conjunto de autovalores de uma matriz A é chamado *espectro* de A e é denotado por $\sigma(A)$. O *raio espectral* de A é o número real não-negativo $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Ou seja, ele é o raio do menor disco centrado na origem do plano complexo incluindo todos autovalores de A .

Diremos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n é *irredutível* se não existe nenhuma decomposição da forma $N_1 \cup N_2 = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_1 \neq \emptyset \neq N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i \in N_1$ e $j \in N_2$.

Teorema 2.5 *Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e $0 \leq A \leq B$, então $\rho(A) \leq \rho(B)$. Se A é irredutível, então $\rho(A) = \rho(B)$ se, e somente se, existe uma matriz de permutação P , tal que $A = PBP^T$.*

Uma matriz A_r de ordem r é uma *submatriz principal* de uma matriz A de ordem n , se A_r é obtida da matriz A pela remoção de $n - r$ linhas e das respectivas $n - r$ colunas.

Teorema 2.6 *Se A é uma matriz quadrada e $A \geq 0$ e A_r é uma submatriz principal de A , então $\rho(A_r) \leq \rho(A)$. Se A é irredutível, então $\rho(A_r) < \rho(A)$.*

A teoria de matrizes não-negativas assume sua forma mais simples e elegante para matrizes positivas e é para esse caso que Oskar Perron fez descobertas fundamentais em 1907 (apud Horn [14]). Agora, resumiremos seus principais resultados em um teorema que leva seu nome.

Teorema 2.7 (Teorema de Perron) *Se A é uma matriz quadrada e $A > 0$, então*

- (a) $\rho(A) > 0$
- (b) $\rho(A)$ é um autovalor de A
- (c) Existe um vetor x tal que $x > 0$ e $Ax = \rho(A)x$
- (d) $\rho(A)$ é um autovalor algebricamente (e, dessa forma, geometricamente) simples
- (e) $|\lambda| < \rho(A)$ para todo autovalor de A tal que $\lambda \neq \rho(A)$, ou seja, $\rho(A)$ é o único autovalor de maior módulo
- (f) $[\rho(A)^{-1}A]^m \rightarrow H$ quando $m \rightarrow \infty$, onde $H = xy^T$, $Ax = \rho(A)x$, $A^T y = \rho(A)y$, $x > 0$, $y > 0$ e $x^T y = 1$.

O único autovetor normalizado caracterizado no ítem (c) do Teorema de Perron é frequentemente chamado de *vetor de Perron* de A e $\rho(A)$ é frequentemente chamado de *raiz de Perron* de A . Obviamente, A^T é uma matriz positiva se A é positiva. Assim, o Teorema de Perron se aplica à matriz A^T também. O vetor de Perron de A^T é chamado de *vetor de Perron à esquerda* de A .

O Teorema de Perron possui muitas aplicações em Teoria Espectral de Grafos. Nesse trabalho, utilizaremos esse teorema em diversos momentos, deixando evidente seu papel fundamental em nossas demonstrações.

Quando nos deparamos com matrizes não-negativas que não são positivas, é necessário considerar uma extensão do Teorema de Perron para o caso em que nem todas as entradas da matriz são estritamente positivas.

Teorema 2.8 *Se A é uma matriz quadrada e $A \geq 0$, então $\rho(A)$ é um autovalor de A e existe um autovetor não-negativo $x \geq 0$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \rho(A)x$.*

Entretanto, sem hipóteses adicionais, não podemos ir muito além do Teorema 2.8 na generalização do Teorema de Perron para matrizes não-negativas.

Quando $A \geq 0$, o autovalor não-negativo $\rho(A)$ é chamado *raiz de Perron* de A . Visto que um autovetor associado com a raiz de Perron de uma matriz não-negativa não é necessariamente unicamente determinado (a menos quando A é positiva), não existe uma noção bem determinada de "o vetor de Perron" para uma matriz não-negativa. Por exemplo, a matriz $A = I$ possui todo vetor não-negativo como um autovetor associado com a raiz de Perron $\rho(A) = 1$.

Agora, veremos como o Teorema de Perron se generaliza para matrizes não-negativas e irredutíveis. O nome de Frobenius é associado à generalização dos resultados de Perron sobre matrizes positivas para matrizes não-negativas segundo [14], pois os primeiros resultados para tais matrizes foram obtidas por Georg Frobenius em 1912.

Teorema 2.9 (Teorema de Perron-Frobenius) *Se A é uma matriz quadrada, não-negativa e irredutível, então,*

- (a) $\rho(A) > 0$
- (b) $\rho(A)$ é um autovalor de A
- (c) *Existe um vetor x positivo tal que $Ax = \rho(A)x$*
- (d) $\rho(A)$ é um autovalor algebricamente (e, dessa forma, geometricamente) simples

O teorema garante que o autoespaço de uma matriz não-negativa e irredutível associado com a raiz de Perron é unidimensional. Para uma matriz não-negativa e irredutível, o único autovetor positivo normalizado também é chamado de *vetor de Perron*.

2.4.2 Entrelaçamento de Autovalores

Denotamos por $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ os autovalores de uma matriz A de ordem n .

Para uma matriz quadrada A definimos A^* como sendo a transposta de matriz A com suas entradas conjugadas. Quando uma matriz satisfaz $A = A^*$ dizemos que A é uma matriz *Hermitiana*. Um resultado conhecido de Álgebra Linear estabelece que todos os autovalores de uma matriz Hermitiana são reais.

O resultado a seguir relaciona os autovalores de uma matriz Hermitiana e de uma submatriz principal em forma de entrelaçamento de autovalores.

Teorema 2.10 *Considere A uma matriz Hermitiana de ordem n , r um inteiro com $1 \leq r \leq n$ e A_r uma submatriz principal de ordem r de A (obtida removendo $n - r$ linhas e suas colunas correspondentes de A). Para cada inteiro k tal que $1 \leq k \leq r$, obtemos*

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A_r) \leq \lambda_{k+n-r}(A).$$

Esse resultado, também conhecido como *princípio da inclusão*, será utilizado em vários momentos em nossas demonstrações.

3 TEOREMA DA MONOTONICIDADE DE FIEDLER

Um dos mais notáveis resultados sobre a matriz Laplaciana é o Teorema da Monotonicidade de Fiedler [3]. O objetivo deste capítulo é fornecer sua demonstração e apresentar exemplos a fim de elucidar seu significado e importância em um grafo. Esse teorema relaciona a estrutura de vértices com qualquer autovetor associado à conectividade algébrica. Tal autovetor é comumente conhecido como *vetor de Fiedler*, assim chamado em homenagem ao matemático checo Miroslav Fiedler pelo seu trabalho pioneiro no campo [10].

3.1 Introdução

Para estabelecer o teorema, Fiedler demonstrou resultados que relacionam os autovetores de uma matriz simétrica com o grau de redutibilidade de suas submatrizes principais. Assim, o teorema segue como uma aplicação desses resultados à teoria de conectividade algébrica. Neste capítulo, apresentamos inicialmente o teorema e algumas discussões para posterior demonstração.

Com esse objetivo, fornecemos agora algumas definições necessárias. Considere um grafo conexo G . Lembramos que um vértice v é um *ponto de articulação* se o grafo $G - v$ é desconexo. Uma aresta e será chamada de *ponte* se o grafo $G - e$ é desconexo. Dessa forma, pontos de articulação e pontes são precisamente vértices e arestas que não estão em nenhum ciclo. Na literatura também é comum encontrarmos o termo vértice de corte no lugar de ponto de articulação. Entretanto, utilizaremos o termo original do trabalho de Fiedler.

Nesse ponto, estamos interessados em propriedades que relacionam o vetor de Fiedler com a estrutura do grafo. Com esse propósito, rotulamos seus vértices por v_1, v_2, \dots, v_n e denotamos o vetor de Fiedler por $y = [y_i]$. As coordenadas

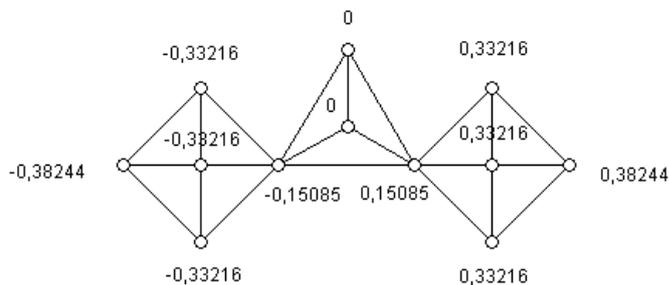


Figura 3.1: Numeração característica dos vértices.

de y podem ser atribuídas aos vértices de G de maneira natural: a coordenada y_i numera o vértice v_i . Observamos que essa numeração não depende da ordem em que escolhemos os vértices para serem rotulados. Se trocarmos os vértices v_i e v_j de lugar, estaremos trocando as respectivas linhas e colunas da matriz Laplaciana e, portanto, estaremos trocando de lugar as entradas y_i e y_j do autovetor. Assim, a numeração continua fornecendo os mesmos valores aos vértices reordenados. No trabalho original, Fiedler chama essa atribuição de valores de *numeração característica*. A numeração característica é sempre não nula e única a menos de um fator multiplicado se $a(G)$ é um autovalor simples. A Figura 3.1 possui um exemplo de numeração característica para o grafo representado.

Para melhor formulação do teorema a seguir, diremos que um caminho em um grafo é *puro* se, e somente se, ele é simples e não contém mais de dois pontos de articulação de cada bloco de G . Enunciaremos agora o principal teorema deste capítulo.

Teorema 3.1 (Teorema da Monotonicidade de Fiedler) *Considere um grafo conexo G e sua numeração característica y . Então exatamente um dos dois casos ocorre:*

Caso A: *Existe um único bloco B_0 em G que contém simultaneamente vértices po-*

sitivamente e negativamente numerados. Nesse caso, cada bloco restante tem apenas vértices com numeração positiva, negativa ou zero. Além disso, cada caminho puro P iniciando em B_0 e contendo apenas um vértice $v_k \in B_0$ possui a propriedade de que a numeração nos pontos de articulação em P forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho de acordo com $y_k > 0$, $y_k < 0$ ou $y_k = 0$; no último caso todos os vértices em P têm valor zero.

Caso B: Nenhum bloco de G contém simultaneamente vértices positivamente e negativamente numerados. Nesse caso, existe um único vértice v_z com numeração zero que possui um vizinho com numeração diferente de zero. Esse vértice é um ponto de articulação. Além disso, cada caminho puro P iniciando em v_z tem a propriedade de que a numeração nos pontos de articulação forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho. Todo caminho que contém vértices positivamente e negativamente numerados passa por v_z .

Observamos que no caso B, cada bloco contém (com exceção de v_z) apenas vértices com numeração positiva, apenas vértices com numeração negativa ou apenas vértices com numeração zero.

Vamos olhar alguns exemplos e interpretar o que o Teorema diz.

Exemplo 1 Para melhor compreensão do Teorema observe a Figura 3.2 onde ocorre o caso A.

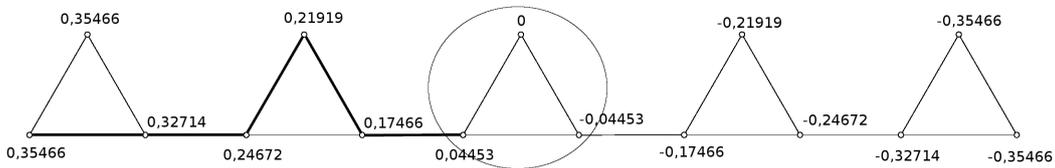


Figura 3.2: Caso A do Teorema da Monotonicidade de Fiedler. O caminho destacado é puro e o bloco destacado é o bloco B_0 .

Com exceção de um único bloco B_0 , destacado na Figura 3.2, todos os outros possuem numeração positiva ou negativa. O caminho destacado é puro e começa em um ponto de articulação em B_0 . Note que a numeração ao longo dos pontos de articulação forma uma sequência crescente.

Exemplo 2 A Figura 3.3 fornece um exemplo onde o caso B ocorre.

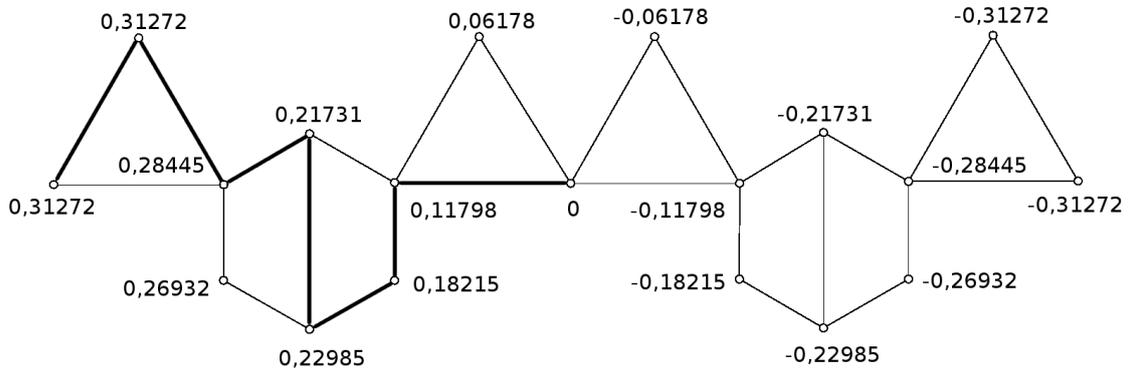


Figura 3.3: Caso B do Teorema da Monotonicidade de Fiedler. O caminho destacado é puro.

Como nenhum bloco possui simultaneamente vértices positivos e negativos, existe apenas um vértice v_z com numeração zero e com um vizinho diferente de zero. O caminho puro destacado inicia nesse vértice e a numeração em seus pontos de articulação forma uma sequência crescente.

Quando olhamos o Teorema 3.1 para o caso em que o grafo é uma árvore, podemos simplificar um pouco sua interpretação. Nesse caso, todo vértice não pendente é um ponto de articulação, e os blocos são exatamente as arestas do grafo com seus respectivos vértices. Além disso, em uma árvore todo caminho é puro.

Exemplo 3 A árvore exibida na Figura 3.4 satisfaz o caso B do Teorema, pois não possui bloco com numeração positiva e negativa. O vértice central é o vértice v_z com

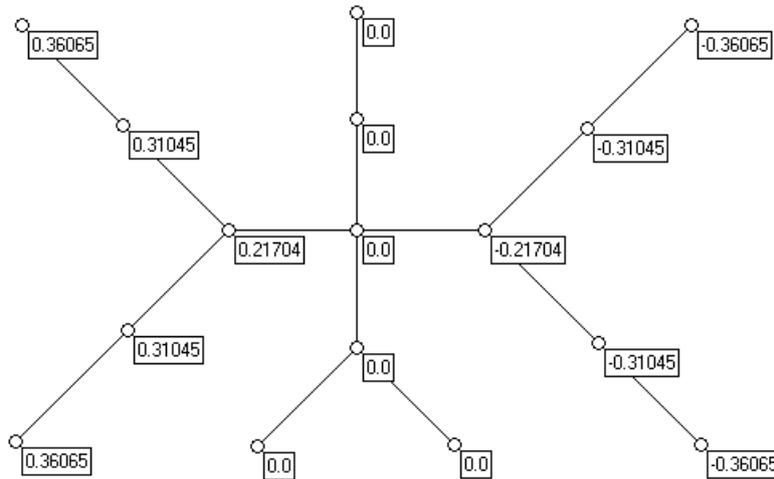


Figura 3.4: Árvore com numeração característica.

numeração zero. Se um caminho que inicia no vértice central contém outro vértice nulo, então todos os vértices nesse caminho são nulos. Quando olhamos para outro caminho iniciando no vértice central, esse caminho possui numeração crescente ou decrescente ao longo dos vértices, pois cada vértice é um ponto de articulação.

Uma questão natural é a seguinte: Podemos ter monotonicidade ao longo do caminho em vez de monotonicidade ao longo dos pontos de articulação? A resposta para isso é "Não, não para todos os caminhos". Por exemplo, o caminho puro exibido na Figura 3.3 não tem monotonicidade. Assim, outra questão seria: existe um caminho puro com monotonicidade ao longo dos seus vértices? A resposta é afirmativa e segue facilmente como consequência de um dos resultados no trabalho de Fiedler. Isso não foi observado no trabalho original, entretanto colocaremos aqui em forma de corolário.

Se W é um subconjunto de $V(G)$, dizemos que um *ramo* em W é uma componente conexa de $G - W$. Um vértice v_i é chamado de *vértice característico* de G com respeito a y se o seu valor característico é nulo com um vizinho não nulo, ou se possui um vizinho v_j tal que $y_i y_j < 0$.

Corolário 3.2 *Considere um grafo conexo G e suponha que v_k é um vértice característico de G . Suponha também que B é uma componente conexa de $G - v_k$ não contendo nenhum vértice característico de G . Se v_s é um vértice positivo em B , então existe um caminho $P = [v_k, v_1, v_2, \dots, v_s]$, com $v_i \in B$, $i \neq k$, tal que $y_k < y_1 < y_2 < \dots < y_s$.*

Demonstração A prova segue por aplicações sucessivas do Corolário 3.15. \square

Para entender o comportamento da numeração característica descrito nesta seção, precisamos estabelecer alguns resultados em teoria de matrizes. Em particular, demonstraremos fatos sobre autovetores de uma matriz simétrica e o grau de redutibilidade de suas submatrizes principais que podem ser encontrados em [10] e [12].

3.2 Resultados em Teoria de Matrizes

Lembramos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n é irredutível se não existe nenhuma decomposição da forma $N_1 \cup N_2 = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_1 \neq \emptyset \neq N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i \in N_1$ e $j \in N_2$. Investigaremos aqui apenas o caso de matrizes reais e simétricas.

Mais geralmente, permutando linhas e colunas, podemos expressar uma matriz A real, simétrica, de ordem n na forma diagonal em blocos

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

onde as submatrizes principais A_{ii} são irredutíveis. O número s é univocamente determinado e o número $s - 1$ é chamado de *grau de redutibilidade* de A . Esse grau é zero se a matriz é irredutível.

O Teorema de Perron-Frobenius afirma que uma matriz A não negativa e irredutível possui um único autovalor dominante positivo, chamado *valor ou raiz de Perron* e denotado por $\rho(A)$ ao qual corresponde um autovetor com todas entradas positivas, chamado *vetor de Perron* (veja [14] para uma discussão da teoria de Perron-Frobenius).

O seguinte fato será utilizado a seguir.

Lema 3.3 *Seja A uma matriz quadrada e considere o vetor $x \neq 0$. Sejam λ , c e σ escalares complexos. Então $Ax = \lambda x$ se, e somente se, $(c - \sigma\lambda)$ é autovalor da matriz $(cI - \sigma A)$ com autovetor associado x .*

Demonstração Observe que

$$(cI - \sigma A)x = cx - \sigma Ax = cx - \sigma\lambda x = (c - \sigma\lambda)x.$$

Logo, a afirmação fica estabelecida. \square

Os resultados a seguir estão demonstrados no trabalho [12] também elaborado por Fiedler.

Lema 3.4 *Considere uma matriz simétrica A com entradas fora da diagonal não positivas e com todos os autovalores não negativos (positiva semidefinida). Se A é irredutível e singular, então existe um vetor $y > 0$, único a menos de um fator, tal que $Ay = 0$.*

Demonstração Para uma escolha adequada de $c > 0$ temos que a matriz $cI - A \geq 0$. De acordo com o Teorema de Perron-Frobenius, sua raiz de Perron $\rho(cI - A)$ é simples e possui um único autovetor $y > 0$. Note que, pelo Lema 3.3, $c - \rho(cI - A)$ é autovalor de A com autovetor y . Portanto, $c - \rho(cI - A) \geq 0$ ou equivalentemente

$$\rho(cI - A) \leq c. \tag{3.1}$$

Como A é singular, existe x tal que $Ax = 0$. Logo, $(cI - A)x = cx$, onde fica claro que c é autovalor de $cI - A$. Dessa forma,

$$c \leq \rho(cI - A) \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), obtemos $\rho(cI - A) = c$ e, portanto, $Ay = 0$, concluindo a demonstração. \square

Corolário 3.5 *Se uma matriz A é simétrica, irredutível e com entradas fora da diagonal não positivas e existe um vetor z real tal que não é positivo nem negativo e $Az = 0$, então A não é positiva semidefinida.*

Lema 3.6 *Denote por A a matriz real, quadrada e com entradas fora da diagonal não positivas. Se todos autovalores de A são positivos, então $A^{-1} \geq 0$.*

Demonstração Para uma escolha adequada de $\sigma > 0$ temos que $V = I - \sigma A \geq 0$. Se $\rho(V)$ é a sua raiz de Perron, então pelo Lema 3.3 obtemos que $1 - \rho(V)$ é autovalor de σA . De acordo com a nossa hipótese sobre os autovalores de A , obtemos $1 - \rho(V) > 0$. Por definição, $\rho(V) > 0$ e, portanto, $0 < \rho(V) < 1$. Desse fato, podemos obter a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} V^k = (I - V)^{-1} \quad (3.3)$$

Do fato que $(I - V)^{-1} = (\sigma A)^{-1}$ e como $V^k \geq 0$ para todo k no somatório o lema fica estabelecido. \square

O resultado a seguir é enunciado sem demonstração no artigo [10]. Para fins de completude apresentaremos aqui sua demonstração.

Lema 3.7 *Se A é simétrica com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, então nenhuma submatriz principal de $\lambda_s I - A$ possui mais do que $s - 1$ autovalores negativos.*

Demonstração Primeiro, afirmamos que $\lambda_s I - A$ possui no máximo $s - 1$ autovalores negativos. Denote por y o autovetor tal que $Ay = \lambda_i y$ para algum i . Pelo Lema 3.3, $\alpha_i = (\lambda_s - \lambda_i)$ é um autovalor da matriz $\lambda_s I - A$ com autovetor y . Como $\alpha_i \geq 0$ para $i = s + 1, \dots, n$, então $\lambda_s I - A$ possui no máximo $s - 1$ autovalores negativos, como afirmado.

Agora, se B é uma submatriz principal de $\lambda_s I - A$ utilizaremos o teorema de entrelaçamento de autovalores de submatrizes para estabelecer o resultado. Denotando por $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m$, $m < n$, os autovalores de B . Como $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1} \leq 0 \leq \alpha_s$, existem no máximo $s - 1$ intervalos distintos da forma $[\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_2, \alpha_3], \dots, [\alpha_{s-1}, 0]$. Pelo teorema do entrelaçamento de autovalores, obtemos $\alpha_s \leq \beta_s$. concluimos assim que existem no máximo $s - 1$ autovalores negativos no espectro de B . \square

Como principal teorema desta seção, o teorema a seguir relaciona os autovetores de uma matriz simétrica com o grau de redutibilidade de suas submatrizes principais.

Teorema 3.8 *Considere uma matriz simétrica A de ordem n , irredutível, não negativa e com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Denote por $v = [v_i]$ um vetor coluna e por $s \in \{2, \dots, n\}$ tais que*

$$s \geq 2 \quad e \quad Av \geq \lambda_s v.$$

Se $M = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | v_i \geq 0\}$, então M é não vazio e o grau de redutibilidade da submatriz $A(M)$ não excede $s - 2$.

Demonstração Primeiramente, suponhamos que M é vazio. Então $v < 0$ e o vetor $z = -v$ satisfaz

$$z > 0 \quad e \quad Az \leq \lambda_s z. \tag{3.4}$$

Pelo Teorema de Perron-Frobenius, existe $u > 0$ tal que $A^T u = \lambda_1 u$, ou equivalentemente

$$u^T A = \lambda_1 u^T. \quad (3.5)$$

Logo,

$$u^T A z = \lambda_1 u^T z \geq \lambda_s u^T z. \quad (3.6)$$

Pelo Lema 3.4 aplicado na matriz $\lambda_1 I - A^T$ o vetor u é único a menos de um fator e λ_1 é simples, pelo Teorema de Perron-Frobenius, e, portanto, como $u^T z > 0$ e $\lambda_1 > \lambda_s$, na expressão (3.6) não ocorre igualdade para λ_s , ou seja,

$$u^T A z > \lambda_s u^T z. \quad (3.7)$$

Aplicando (3.4), podemos escrever

$$u^T A z \leq \lambda_s u^T z \quad (3.8)$$

que é uma contradição. Assim, $M \neq \emptyset$, como afirmado.

Se $M = \{1, 2, \dots, n\}$ a demonstração está pronta. Dessa forma, suponha que $\emptyset \neq M \neq \{1, 2, \dots, n\}$ e que o grau de redutibilidade de $A(M)$ é no mínimo $s - 1$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $m < n$ e que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 & A_{1,r+1} \\ 0 & A_{22} & & 0 & A_{2,r+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr} & A_{r,r+1} \\ A_{1,r+1}^T & A_{2,r+1}^T & \cdots & A_{r,r+1}^T & A_{r+1,r+1} \end{bmatrix}$$

onde $r \geq s$ e A_{ii} , para $i = 1, 2, \dots, r$, é irredutível. Podemos ver facilmente que

$$A(M) = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix}.$$

Particionando v de acordo com a matriz A , escrevemos

$$v = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(r)} \\ v^{(r+1)} \end{bmatrix}.$$

Por definição, $v^{(i)} \geq 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$ e $v^{(r+1)} < 0$. De acordo com a hipótese do teorema, $Av \geq \lambda_s v$, ou seja,

$$A_{ii}v^{(i)} + A_{i,r+1}v^{(r+1)} \geq \lambda_s v^{(i)}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.9)$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$(A_{ii} - \lambda_s I_i)v^{(i)} \geq -A_{i,r+1}v^{(r+1)}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.10)$$

Como

$$\begin{bmatrix} \lambda_s I_1 - A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_s I_2 - A_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_r - A_{rr} \end{bmatrix}$$

é uma submatriz principal de $\lambda_s I - A$, então, pela aplicação do Lema 3.7, essa matriz possui no máximo $s - 1$ autovalores negativos. Sendo $r \geq s$, então pelo menos uma das matrizes $\lambda_s I_i - A_{ii}$, digamos $\lambda_s I_1 - A_{11}$, possui exclusivamente autovalores não negativos.

Inicialmente, vamos supor que $\lambda_s I_1 - A_{11}$ é não singular e, portanto, invertível. A expressão (3.10) implica que

$$(\lambda_s I_1 - A_{11})v^{(1)} \leq A_{1,r+1}v^{(r+1)} \leq 0. \quad (3.11)$$

Como as entradas fora da diagonal de $\lambda_s I_1 - A_{11}$ são não positivas, aplicando o Lema 3.6 obtemos que $(\lambda_s I_1 - A_{11})^{-1} \geq 0$. Portanto,

$$v^{(1)} \leq (\lambda_s I_1 - A_{11})^{-1} A_{1,r+1}v^{(r+1)} \leq 0. \quad (3.12)$$

Conseqüentemente, $v^{(1)} = 0$ e $A_{1,r+1}v^{(r+1)} = 0$. Isso implica que $A_{1,r+1} = 0$, o que é uma contradição com a irredutibilidade de A .

Assim, podemos supor que $\lambda_s I_1 - A_{11}$ é singular. Pelo Lema 3.4 aplicado a A_{11}^T , existe um vetor $u^{(1)} > 0$ tal que

$$u^{(1)T}(\lambda_s I_1 - A_{11}^T) = 0. \quad (3.13)$$

Dessa forma,

$$u^{(1)T}(\lambda_s I_1 - A_{11}^T)v^{(1)} = 0. \quad (3.14)$$

Por (3.11), obtemos $(\lambda_s I_1 - A_{11})v^{(1)} \leq 0$. Logo, como $u^{(1)} > 0$ e $v^{(1)} \geq 0$, segue que $(\lambda_s I_1 - A_{11}) = 0$ e que $A_{1,r+1}v^{(r+1)} = 0$, novamente uma contradição com a irredutibilidade de A . Isso completa a demonstração. \square

Corolário 3.9 *Considere uma matriz simétrica A de ordem n , não negativa e com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Denote por $u = [u_i] > 0$ um autovetor correspondente a λ_1 e $v = [v_i]$ o autovetor correspondente a λ_2 . Então para todo $\alpha \geq 0$ a submatriz $A(M_\alpha)$ é irredutível, onde $M_\alpha = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | v_i + \alpha u_i \geq 0\}$.*

Demonstração Segue do teorema, observando que

$$A(v + \alpha u) = \lambda_2 v + \alpha \lambda_1 u \geq \lambda_2 (v + \alpha u), \quad (3.15)$$

e, portanto, $v + \alpha u$ satisfaz o teorema para $s = 2$. \square

Dada uma matriz simétrica A , definiremos sua *inércia*, denotada por $In(A)$, como sendo o vetor linha $[p, q, z]$, onde p indica o número de autovalores positivos, q o número de autovalores negativos e z o número de autovalores iguais a zero. Vamos utilizar o seguinte fato bem conhecido sobre inércia de uma matriz:

Lema 3.10 *Se A é uma matriz simétrica e S é uma matriz não singular, então $In(A) = In(S^T A S)$.*

A demonstração do resultado acima juntamente com diversos resultados relacionados à inércia de uma matriz podem ser encontrados no livro [14] .

No artigo [11], Fiedler demonstra o seguinte resultado sobre a inércia de uma matriz simétrica.

Lema 3.11 *Considere a matriz simétrica $n \times n$ particionada da forma*

$$A = \begin{bmatrix} B & c \\ c^T & d \end{bmatrix}.$$

Seja u um vetor tal que

$$Bu = 0, \quad c^T u \neq 0.$$

Então

$$In(A) = In(B) + [1, 1, -1].$$

Demonstração Claramente $u \neq 0$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que sua primeira coordenada $u_1 \neq 0$, de modo que

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \tilde{u} \end{bmatrix}, \quad u_1 \neq 0. \quad (3.16)$$

Se B e c são particionados de acordo, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \tilde{b}^T \\ \tilde{b} & \tilde{B} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \tilde{c} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Se definirmos $\beta = c^T u$, e definirmos a matriz

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & \tilde{u} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

obtemos,

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \tilde{B} & \tilde{c} \\ \beta & \tilde{c}^T & d \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Defina a matriz Q por

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta^{-1}\tilde{c} & I & 0 \\ -(2\beta)^{-1}d & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$(QP)A(QP)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & \tilde{B} & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que, para uma matriz não singular R

$$RAR^T = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B} \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Lema 3.10,

$$In(A) = In(RAR^T) = In(\tilde{B}) + In\left(\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Note que o espectro de

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

é $\{\beta, -\beta\}$ e por isso

$$In(A) = In(\tilde{B}) + [1, 1, 0]. \quad (3.20)$$

Por outro lado, se

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} u_1 & \tilde{u} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\tilde{P}B\tilde{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$In(B) = In(\tilde{B}) + [0, 0, 1]. \quad (3.21)$$

Combinado as equações (3.20) e (3.21), obtemos o resultado desejado. \square

3.3 Aplicação em Teoria dos Grafos

Nesta seção vamos estudar como a estrutura de um grafo se relaciona com sua numeração característica. Isso será feito aplicando os resultados da seção anterior. O teorema a seguir serve de motivação para um novo paradigma de algoritmos de particionamento em grafos, chamados algoritmos de particionamento espectral de grafos [21]. Esta técnica começou a ter maior atenção a partir de 1990 com o trabalho de Pothen [23], onde um algoritmo para particionamento é apresentado.

Primeiramente, observamos que um grafo G é conexo se, e somente se, sua matriz Laplaciana é irredutível. Da mesma forma, um subgrafo induzido por um conjunto W de vértices de G é conexo se, e somente se, a submatriz com entradas correspondente aos vértices em W é irredutível.

Teorema 3.12 *Considere o grafo G , conexo e com n vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Denote por $y = [y_i]$ a numeração característica de G . Para $r \geq 0$, defina*

$$V(r) = \{v_i \in V | y_i + r \geq 0\}.$$

Então o subgrafo $G(r)$ induzido pelos vértices $V(r)$ é conexo.

Demonstração Primeiro, definimos a matriz $B = -L(G)$. Observamos que as entradas na diagonal de B são negativas e as restantes são não negativas. Isso permite encontrar um σ suficientemente grande tal que $B + \sigma I$ é uma matriz não negativa. Pelo Lema 3.3, os autovetores de $L(G)$ são os mesmos de $B + \sigma I$, assim, o segundo maior autovalor de $B + \sigma I$ corresponde ao segundo menor autovalor de $L(G)$. Considere o vetor $y + re$, onde $e = (1, 1, \dots, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor 0 de $L(G)$. Utilizando esse vetor, o Corolário 3.9 implica que a submatriz $B(M)$ é irredutível, onde $M = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | y_i + r \geq 0\}$. Como as entradas da matriz $B(M)$ correspondem aos vértices em $V(r)$, então a respectiva submatriz Laplaciana também é irredutível. Portanto, $G(r)$ é conexo. \square

Notamos que uma afirmação similar pode ser provada para $r \leq 0$ e para o conjunto $W(r) = \{v_i \in V | y_i + r \leq 0\}$.

Corolário 3.13 *Nas mesmas hipóteses do teorema, se $y_i \neq 0$ para todo $v_i \in V$, então o conjunto de arestas alternantes, i.e., arestas (i, j) com $y_i y_j < 0$, forma um corte de G com duas componentes conexas.*

Demonstração Basta considerar os conjuntos

$$V(0) = \{v_i \in V | y_i \geq 0\} \quad e \quad W(0) = \{v_i \in V | y_i \leq 0\}$$

para ver que os subgrafos induzidos em $V(0)$ e $W(0)$ são conexos. \square

Teorema 3.14 *Denote por $y = [y_i]$ a numeração característica de um grafo $G = (V, E)$ conexo. Então*

$$a(G)y_i = \sum_{(v_i, v_k) \in E} (y_i - y_k), \quad \forall v_i \in V \quad (3.22)$$

e para todo $M \subset V$,

$$a(G) \sum_{v_i \in M} y_i = \sum_{\substack{(v_i, v_k) \in E \\ v_i \in M \\ v_k \notin M}} (y_i - y_k). \quad (3.23)$$

Demonstração Da igualdade $L(G)y = a(G)y$, temos para todo vértice v_i

$$a(G)y_i = y_i d(v_i) - \sum_{(v_i, v_k) \in E} y_k = \sum_{(v_i, v_k) \in E} (y_i - y_k),$$

estabelecendo (3.22). Utilizando (3.22) e somando todos os termos referentes aos vértices em M obtemos (3.23), visto que na soma os termos se cancelam quando $v_i \in M$ e $v_k \in M$. \square

Corolário 3.15 *Denote por $y = [y_i]$ a numeração característica do grafo conexo $G = (V, E)$. Se $y_i > 0$, então existe um vértice v_j tal que $(v_i, v_j) \in E$ e $y_i > y_j$.*

Demonstração Segue de (3.22), pois $a(G) > 0$ implica que $\sum_{(v_i, v_k) \in E} (y_i - y_k) > 0$. Portanto, existe $v_j \in V$ tal que $y_i > y_j$. \square

Exemplo 4 Vamos retomar o exemplo visto anteriormente observando a figura a seguir.

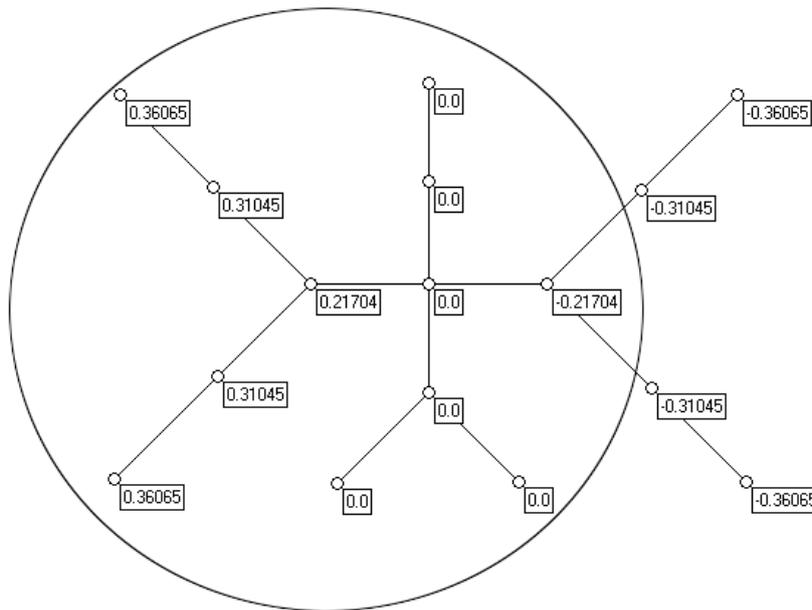


Figura 3.5: Árvore com numeração característica e um subconjunto conexo de vértices.

De acordo com o Teorema 3.12, se colocarmos $r = 0,3$, então obtemos o conjunto de vértices

$$V(0,3) = \{v_i \in V | y_i + 0,3 \geq 0\}$$

que está destacado na Figura 3.5.

Pela figura fica claro que $V(0,3)$ induz um subgrafo conexo. Além disso, observe que o vértice com numeração 0,31045 possui um vizinho com numeração menor: o vértice com valor 0,21704. Isso é o que o Corolário 3.15 está dizendo.

Agora, investigaremos propriedades da numeração característica em blocos de G .

Teorema 3.16 *Considere um grafo conexo G e sua numeração característica $y = [y_i]$. Se v_k é um ponto de articulação de G e G_0, G_1, \dots, G_r são as componentes conexas do grafo $G - v_k$, então:*

(i) *Se $y_k > 0$, exatamente uma das componentes G_i possui numeração negativa. Para todos os vértices v_s nas componentes restantes $y_s > y_k$.*

(ii) *Se $y_k = 0$ e existe uma componente G_i contendo vértices numerados positivamente e negativamente, então essa componente é a única dessa forma e todas as componentes restantes tem numeração zero.*

(iii) *Se $y_k = 0$ e nenhuma componente G_i possui vértices numerados positivamente e negativamente, então cada componente possui apenas numeração positiva, apenas numeração negativa ou apenas numeração zero.*

Demonstração Como $[1, 1, \dots, 1]^T$ é autovetor de $L(G)$, então $\sum y_i = 0$. Assim, existe um vértice em G com numeração negativa. Suponha que G_0 contém tal vértice. Para provar (i), é suficiente mostrar que todo vértice v_t com $y_t \leq y_k$ está em G_0 .

Suponha primeiro que $y_t < y_k$ para algum v_t . Então existe $\epsilon > 0$ tal que $y_k - \epsilon > 0$ e $y_k - \epsilon \geq y_t$. Pelo Teorema 3.12, o subgrafo H induzido pelos vértices $M = \{v_s \in V | y_s \leq y_k - \epsilon\}$ é conexo. Como H contém no mínimo um vértice negativo, então $H \subset G_0$ e, portanto, $v_t \in G_0$. Suponha que $y_s = y_k$ para algum vértice $v_s \in V$. Pelo Corolário 3.15, existe um vértice $v_t \in G$ adjacente a v_s com $y_t < y_s$. Sendo $v_t \neq v_k$, pela parte anterior tem-se $v_t \in G_0$ e como G_0 é uma componente conexa, então $v_s \in G_0$, concluindo a parte (i).

Vamos considerar agora o caso em que $y_k = 0$. Por conveniência, assumimos que $v_k = v_n$ e que

$$L = L(G) = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ 0 & A_1 & & 0 & c_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r & c_r \\ c_0^T & c_1^T & \cdots & c_r^T & \gamma \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde A_i corresponde aos vértices da componente conexa G_i , para $i = 0, 1, \dots, r$. Fazendo $a = a(G)$, então $L - aI$ é singular e $(L - aI)y = 0$. Particione o autovetor y de acordo com a numeração característica em cada componente G_i da forma

$$y = [y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}, 0]^T.$$

Obtemos desse modo matrizes identidade I_0, I_1, \dots, I_r de tamanhos adequados tais que

$$\begin{aligned} (A_0 - aI_0)y^{(0)} &= 0, \\ (A_1 - aI_1)y^{(1)} &= 0, \\ &\vdots \\ (A_r - aI_r)y^{(r)} &= 0. \end{aligned}$$

Vamos demonstrar a parte (ii), supondo que alguma componente, digamos G_0 , contém numeração positiva e negativa. Desse modo, $y^{(0)}$ possui entradas positivas e negativas e o Corolário 3.5 garante que $A_0 - aI_0$ não é positiva semidefinida, pois é simétrica, irredutível e possui entradas fora da diagonal não positivas. Isso significa que $A_0 - aI_0$ possui no mínimo um autovalor negativo. Afirmamos que as matrizes restantes $A_i - aI_i$, para $i = 1, 2, \dots, r$, são positivas

semidefinidas. De fato, como

$$A = \begin{bmatrix} A_0 - aI_0 & & & \\ & A_1 - aI_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r - aI_r \end{bmatrix}$$

é uma submatriz principal de $L - aI$, aplicando o Lema 3.7, A possui no máximo um autovalor negativo, e assim, $A_0 - aI_0$ possui apenas um autovalor negativo. Portanto, as matrizes $A_i - aI_i$, para $i = 1, 2, \dots, r$, são positivas semidefinidas. Suponha por contradição que $y^{(j)} \neq 0$ para algum j tal que $1 \leq j \leq r$. Como A_j é irredutível, aplicando o Corolário 3.5 vemos que $y^{(j)}$ ou é positivo ou é negativo. Além disso, $c_j \neq 0$ pois L é irredutível. Como $c_j \leq 0$, obtemos $y^{(j)T} c_j \neq 0$. Pelo Lema (3.11) aplicado ao vetor

$$v = [0, \dots, 0, y^{(j)}, 0, \dots, 0]$$

e do fato que $Av = 0$, obtemos que

$$\text{In}(L - aI) = \sum_{i=0}^r \text{In}(A_i - aI_i) + [1, 1, -1] \quad (3.25)$$

o que significa que $L - aI$ possui no mínimo dois autovalores negativos (o outro de $A_0 - aI_0$), uma contradição. Portanto, $y^{(1)} = y^{(2)} = \dots = y^{(r)} = 0$, como afirmado. Isso conclui a parte (ii).

Agora, suponha que nenhuma componente possui numeração positiva e negativa simultaneamente. Suponha também que G_0 possui um vértice com numeração não nula. Assim, como $y^{(0)} \neq 0$, temos $y^{(0)} \geq 0$ ou $y^{(0)} \leq 0$. Se, por absurdo, alguma coordenada de $y^{(0)}$ fosse zero, então aplicando o Corolário 3.5, a matriz $A_0 - aI_0$ não seria positiva semidefinida. Da mesma forma que na parte (ii) isso implicaria que $y^{(1)} = y^{(2)} = \dots = y^{(r)} = 0$, uma contradição com $\sum y_i = 0$, $y \neq 0$. Portanto, ou $y^{(0)} < 0$ ou $y^{(0)} > 0$, concluindo a demonstração. \square

Exemplo 5 A Figura 3.6 mostra uma árvore que já conhecemos. Se chamarmos de v_k o vértice com numeração 0,21074, então o grafo obtido pela remoção de v_k

possui três componentes conexas. Apenas uma componente possui vértices negativos e as componentes restantes possuem numeração maior que 0,21074, o que ilustra a parte (i) do Teorema 3.16.

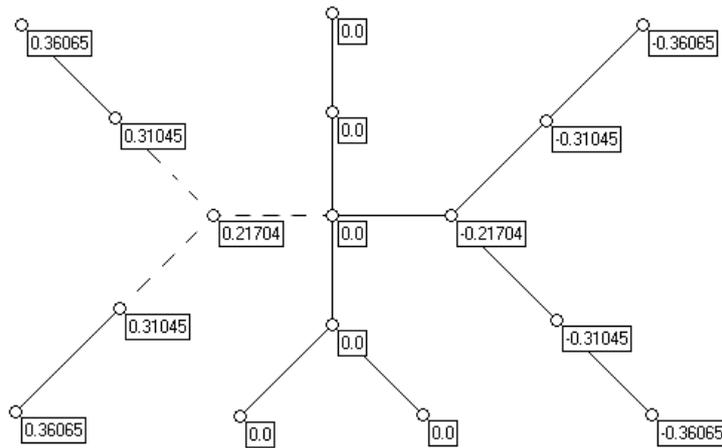


Figura 3.6: Componentes de uma Árvore.

A Figura 3.7 mostra a mesma árvore quando removemos outro vértice.

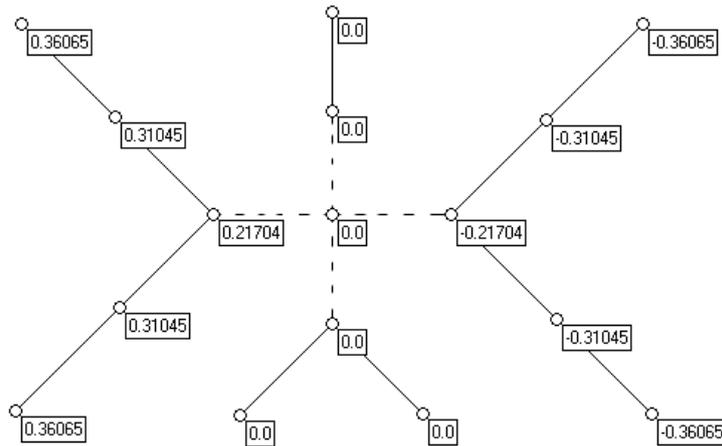


Figura 3.7: Componentes de uma Árvore.

Nessa figura, v_k é um vértice com numeração nula. Observe que nenhuma componente possui numeração positiva e negativa ao mesmo tempo. Existem

duas componentes nulas, uma componente positiva e uma componente negativa. Isso está de acordo com a parte (iii) do Teorema 3.16.

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema da Monotonicidade de Fiedler. Primeiro, observe que os casos (A) e (B) se excluem mutuamente, entretanto algum dos casos (A) ou (B) deve ocorrer, pois ou existe um bloco com numeração positiva e negativa ou não existe tal bloco. Para fins de clareza, enunciaremos novamente o teorema.

Teorema 3.17 (Teorema da Monotonicidade de Fiedler) *Considere um grafo conexo G e sua numeração característica y . Então exatamente um dos dois casos ocorre:*

Caso A: *Existe um único bloco B_0 em G que contém simultaneamente vértices positivamente e negativamente numerados. Nesse caso, cada bloco restante tem apenas vértices com numeração positiva, negativa ou zero. Além disso, cada caminho puro P iniciando em B_0 e contendo apenas um vértice $v_k \in B_0$ possui a propriedade de que a numeração nos pontos de articulação em P forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho de acordo com $y_k > 0$, $y_k < 0$ ou $y_k = 0$; no último caso todos os vértices em P têm valor zero.*

Caso B: *Nenhum bloco de G contém simultaneamente vértices positivamente e negativamente numerados. Nesse caso, existe um único vértice v_z com numeração zero que possui um vizinho com numeração diferente de zero. Esse vértice é um ponto de articulação. Além disso, cada caminho puro P iniciando em v_z tem a propriedade de que a numeração nos pontos de articulação forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho. Todo caminho que contém vértices positivamente e negativamente numerados passa por v_z .*

Demonstração Para o caso (A), denote por B_0 um bloco com numeração positiva e negativa. Se G contém apenas o bloco B_0 , então terminamos. Senão, denote por B_1 um bloco diferente de B_0 . Então, existe um ponto de articulação que separa B_1

de B_0 . Chame de G_0, G_1, \dots, G_r as componentes conexas do grafo $G - v_k$, onde G_0 contém os vértices restantes de B_0 e G_1 contém os vértices restantes de B_1 . Se $y_k > 0$, segue da parte (i) do Teorema 3.16 que todos os vértices de G_1 (e, portanto, de B_1) tem numeração positiva. Se $y_k = 0$, segue da parte (ii) do mesmo teorema que todos os vértices de G_1 (e, portanto, de B_1) tem numeração zero. Se $y_k < 0$, a numeração $-y$ também é uma numeração característica de G e, portanto, podemos aplicar novamente a parte (i) para esse caso, completando a prova da primeira parte do caso (A).

Agora, denote por P um caminho puro em G e por v_k o único vértice de P em B_0 . Chamaremos de $v_k, v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_s}$ os pontos de articulação na ordem que aparecem em P . Se $y_k > 0$, então, pelo Teorema 3.16, obtemos $y_{k_1} > y_k$. Pela aplicação do mesmo teorema aos pontos de articulação v_{k_j} , onde $1 \leq j \leq s$, obtemos que $y_{k_{j+1}} > y_{k_j}$. Isso prova que a sequência $y_k, y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_s}$ é crescente. Se $y_k < 0$, o último argumento aplicado a numeração $-y$ mostra que essa sequência decresce. Se $y_k = 0$, segue da parte (ii) do Teorema 3.16 que todos os vértices de P tem numeração zero. Assim, o caso (A) fica estabelecido.

Para o caso (B), suponha que nenhum bloco contém simultaneamente vértices positivos e negativos. Do fato que $y \neq 0$ e $\sum y_i = 0$, existe um caminho P contendo vértices positivos e negativos. Afirmamos que P contém um vértice v_z com numeração zero tal que algum de seus vizinhos tem numeração não nula. De fato, como a interseção de vértices dos blocos que estão ligados entre si contém apenas pontos de articulação e nenhum bloco contém simultaneamente vértices positivos e negativos, segue que existe tal vértice v_z . Além disso, v_z é ponto de articulação. Segue então das propriedades do Teorema 3.16 que a parte (iii) ocorre. Consequentemente, nenhum outro vértice pode ter numeração zero e vizinhos com numeração não nula. Assim, fica provada a primeira parte do caso (B).

Para a parte final, chame de P um caminho puro iniciando em v_z . Se P contém outro vértice com numeração zero, então a parte (iii) do Teorema 3.16

garante que todos os vértices em P têm numeração zero. Por outro lado, se P contém um vértice com numeração positiva (alternativamente, negativa), então todos os vértices em P , exceto v_z , possuem numeração positiva (alternativamente, negativa). Sendo que $-y$ também é uma numeração característica de G , podemos nos restringir ao primeiro caso apenas. Denotaremos por $v_z, v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_s}$ os pontos de articulação em P ordenados ao longo do caminho. Se j satisfaz $1 \leq j \leq s$, como $y_{k_j} > 0$, aplicando sucessivamente a parte (i) do Teorema 3.16 obtemos que $y_{k_{j+1}} > y_{k_j}$. Fica assim estabelecido o teorema. \square

4 COMPONENTES DE PERRON DE UM GRAFO

No capítulo anterior vimos como a estrutura de um grafo está relacionada com o autovetor associado à conectividade algébrica. Neste capítulo introduzimos a noção de componentes de Perron em um vértice de um grafo e mostramos como a estrutura do vetor de Fiedler pode ser compreendida em termos de componentes de Perron. Isso representa um aperfeiçoamento do resultado original de Fiedler, fornecendo ferramentas que permitem estudar como se modifica a conectividade algébrica de um grafo quando efetuamos certas modificações em sua estrutura.

4.1 Introdução

Suponha que G seja uma árvore. Então todo vértice que não é uma folha é um ponto de articulação, e os blocos são exatamente as arestas do grafo com seus respectivos vértices. No Teorema da Monotonicidade de Fiedler, quando o caso B ocorre, a árvore é classificada de *Tipo I*, e o vértice especial v_z é o *vértice característico*; quando o caso A ocorre, a árvore é dita ser do *Tipo II* e os vértices que são as terminações do bloco especial B_0 (que é uma aresta) são chamados de *vértices característicos* da árvore. Essas noções de vértices característicos e árvores do Tipo I e II foram utilizadas pela primeira vez por Merris em [19].

Nesse sentido, a conectividade algébrica e o vetor de Fiedler têm sido estudados intensamente nos últimos anos, veja [13, 19, 17, 15, 24, 25] por exemplo. Neste capítulo, os resultados apresentados foram estabelecidos por Kirkland et. al. em [17], entretanto foram publicados inicialmente para o caso particular de árvores em [15], onde se mostra como os vértices característicos de uma árvore podem ser discutidos tomando as componentes conexas quando se remove um vértice e olhando para as inversas das submatrizes principais da Laplaciana correspondendo

a tais componentes. Pelo estudo dos valores de Perron dessas matrizes inversas, a conectividade algébrica pode então ser descrita em termos dos valores de Perron, e o vetor de Fiedler pode ser descrito em termos dos vetores de Perron.

Como mencionado pelos autores em [17], essa abordagem com valores de Perron difere de alguns trabalhos anteriores sobre conectividade algébrica, os quais frequentemente utilizam a caracterização *minmax* da conectividade algébrica, ou seja, o fato de que a conectividade algébrica da matriz Laplaciana L pode ser vista como $\min\{x^T L x \mid x^T x = 1, x^T \mathbf{1} = 0\}$, onde $\mathbf{1}$ denota o vetor com todas entradas iguais a um.

Aqui apresentaremos os resultados de forma geral, discutindo casos particulares apenas quando conveniente à clareza do texto. Nosso objetivo neste capítulo é fornecer uma análise dos valores de Perron para grafos gerais, mostrando como os casos A e B do Teorema da Monotonicidade de Fiedler podem ser caracterizados em termos dos valores de Perron e expressar os vetores de Fiedler em termos dos vetores de Perron.

4.2 Componentes de Perron e o Caso B

Primeiramente, iniciaremos com um grafo G e sua matriz Laplaciana L . Para um vértice v do grafo, denote as componentes conexas de $G - v$ por C_1, C_2, \dots, C_k (observe que $k \geq 2$ se, e somente se, v é um ponto de articulação); para cada componente, seja $L(C_i)$ a submatriz principal de L correspondendo aos vértices de C_i . Além disso, se y é um vetor e v é um vértice de G , denotamos as entradas em y correspondendo ao vértice v por $y(v)$. O *valor de Perron* de C_i é o valor de Perron da matriz positiva $L^{-1}(C_i)$ e dizemos que C_j é uma *componente de Perron em v* se seu valor de Perron é máximo dentre todas as componentes C_1, C_2, \dots, C_k .

O leitor pode estar se perguntando se existe a inversa de $L(C_i)$. Uma maneira de provar sua existência é aplicando o Teorema da Matriz-Árvore (Teorema 2.4). Esse Teorema nos diz que o número de árvores geradoras de um grafo é dado por qualquer cofator de sua matriz Laplaciana. Para que $L(C_i)$ seja invertível, basta que zero não seja seu autovalor. Para provar que zero não é autovalor de $L(C_i)$, considere a matriz L_k obtida pela remoção da última linha e coluna de L . Suponha, sem perda de generalidade, que a matriz $L(C_i)$ é submatriz principal da matriz L_k . Quando aplicamos o Teorema da Matriz-Árvore concluímos que $\det(L_k)$ é um cofator de L e, portanto, é o número de árvores geradoras do grafo conexo que estamos estudando. Como esse grafo é conexo, então existe ao menos uma árvore geradora. Desse modo, $\det(L_k) > 0$, e assim, zero não é autovalor de L_k . Agora, aplicando o resultado de entrelaçamento de autovalores, sabemos que os autovalores de $L(C_i)$ entrelaçam os autovalores de L_k . Como a matriz L_k possui apenas autovalores positivos, pois seus autovalores entrelaçam os autovalores de L , obtemos que zero também não é autovalor de $L(C_i)$. E assim, concluímos que $L(C_i)$ é invertível.

Lema 4.1 *Suponhamos que uma matriz A é invertível, bem como a matriz*

$$B = \begin{bmatrix} A & -c \\ -c^T & d \end{bmatrix},$$

onde $d \in \mathfrak{R}$ e c é um vetor coluna. Então

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(d - c^T A^{-1} c)} \begin{bmatrix} A^{-1} c \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^T A^{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração Reescrevendo o lado direito da equação acima e chamando essa matriz de C , obtemos

$$C = \begin{bmatrix} A^{-1} + \frac{A^{-1} c c^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1} c} & \frac{A^{-1} c}{d - c^T A^{-1} c} \\ \frac{c^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1} c} & \frac{1}{d - c^T A^{-1} c} \end{bmatrix}.$$

Mostraremos por meio de um cálculo simples que se

$$X = BC,$$

então $X = I$. De fato,

$$X_{11} = A \left(A^{-1} + \frac{A^{-1}cc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} \right) - \frac{cc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} = I + \frac{cc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} - \frac{cc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} = I.$$

$$X_{12} = \frac{AA^{-1}c - c}{d - c^T A^{-1}c} = 0.$$

$$\begin{aligned} X_{21} &= -c^T \left(A^{-1} + \frac{A^{-1}cc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} \right) + \frac{dc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} \\ &= -c^T A^{-1} - \frac{c^T A^{-1}cc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} + \frac{dc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} \\ &= \frac{-dc^T A^{-1} + c^T A^{-1}cc^T A^{-1} + c^T A^{-1}cc^T A^{-1} + dc^T A^{-1}}{d - c^T A^{-1}c} = 0 \end{aligned}$$

$$X_{22} = \frac{-cA^{-1}c + d}{d - c^T A^{-1}c} = 1.$$

Isso conclui a demonstração. \square

Um fato que usaremos a seguir é que se A e B são o conjunto de vértices de dois subgrafos tais $A \subset B$ e $G(B)$ é conexo, então $L(A)^{-1}$ é dominada entrada por entrada por uma submatriz principal de $L(B)^{-1}$. Quando isso ocorrer utilizaremos a notação $L(A)^{-1} \ll L(B)^{-1}$.

Para ver que isso é verdade, considere o conjunto C , obtido pela remoção de algum vértice de B . Se $L(C)^{-1} \ll L(B)^{-1}$, então podemos aplicar esse fato sucessivamente removendo vértices de B e teremos que $L(A)^{-1} \ll L(B)^{-1}$. Para provar isso, suponha que o vértice removido corresponda a última linha da matriz $L(B)$ e considere $L(B)$ da forma

$$L(B) = \begin{bmatrix} L(C) & -c \\ -c^T & d \end{bmatrix}.$$

Pela aplicação do Lema 4.1, obtemos que

$$L(B)^{-1} = \begin{bmatrix} L(C)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(d - c^T L(C)^{-1}c)} \begin{bmatrix} L(C)^{-1}c \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^T L(C)^{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, é fácil ver que a última entrada de $L(B)^{-1}$ vale

$$\frac{1}{(d - c^T L(C)^{-1} c)}.$$

Pelo Lema 3.6 obtemos $L(B)^{-1} \geq 0$, então

$$\frac{1}{(d - c^T L(C)^{-1} c)} > 0.$$

Logo, pela expressão de $L(B)^{-1}$ e como $L(C)^{-1} > 0$, claramente $L(C)^{-1} \ll L(B)^{-1}$, como afirmado.

Uma consequência importante desse fato é que o Teorema 2.5 garante que $\rho(L(C)^{-1}) < \rho(L(B)^{-1})$ (observe que, sendo $G(B)$ conexo, a matriz $L(B)$ é irredutível).

Observamos que pode existir mais de uma componente de Perron em um vértice, e como o seguinte resultado mostra, essa circunstância pode ser de certo interesse.

Teorema 4.2 *Considere um grafo conexo G . O caso B do Teorema da Monotonicidade de Fiedler ocorre se, e somente se, existem duas ou mais componentes de Perron em algum vértice v . Nesse caso,*

$$a(G) = \frac{1}{\rho(L(C)^{-1})}$$

para toda componente de Perron C em v e $v = v_z$, onde v_z é o vértice com numeração zero no caso B do Teorema da Monotonicidade de Fiedler. Além disso, para todo vértice $v \neq v_z$, a única componente de Perron em v é a componente contendo v_z .

Demonstração Denote por C_1, C_2, \dots, C_k as componentes conexas de $G - v_z$ e por y o vetor de Fiedler. Suponha sem perda de generalidade que

$$L = \begin{bmatrix} L(C_1) & & & & a_1 \\ & L(C_2) & & & a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & L(C_k) & a_k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & d \end{bmatrix}$$

é a matriz Laplaciana de G e $y = [y_1, y_2, \dots, y_k, 0]^T$. Denotando por $a = a(G)$, temos para $1 \leq i \leq k$

$$L(C_i)y_i = ay_i. \quad (4.1)$$

Se o caso B vale, então note que em pelo menos uma das equações y_i possui todas entradas positivas e em pelo menos um dos casos y_i possui todas entradas negativas. Isso se deve ao fato de que $\sum y_i = 0$ e, portanto, existem entradas positivas e negativas em y e o caso B garante que temos todas entradas de mesmo sinal em y_i . Para tais equações, como $a > 0$, podemos escrever

$$L(C_i)^{-1}y_i = \frac{1}{a}y_i \quad (4.2)$$

Pelo Teorema de Perron-Frobenius, o único autovetor com todas entradas de mesmo sinal é o vetor de Perron. Portanto, vemos que y_i é um vetor de Perron para $L(C_i)^{-1}$. Além disso, como $\sum y_i = 0$, concluimos que existem no mínimo duas componentes, C_1 e C_2 (cada uma contendo apenas vértices positivos ou negativos), cujo valor de Perron é igual a $1/a$.

Afirmamos que C_1 e C_2 são componentes de Perron em v_z . Suponha, por contradição, que isso não seja verdade. Então existiria uma outra componente, digamos C_3 , cujo valor de Perron é maior que $1/a$. Chamando de x o vetor de Perron de $L(C_3)^{-1}$, normalizado tal que $\mathbf{1}^T x = 1$, e definindo $u = y_1/\mathbf{1}^T y_1$, considere o vetor

$$w = [u, 0, \dots, 0, -x, 0, \dots, 0]^T,$$

que evidentemente é ortogonal à

$$[1, 1, \dots, 1].$$

Do fato que

$$w^T L w = a u^T u + \frac{1}{\rho(L(C_3)^{-1})} x^T x < a u^T u + a x^T x = a w w^T \quad (4.3)$$

obtemos uma contradição com o fato de que a conectividade algébrica pode ser caracterizada da forma

$$a(G) = \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathbf{1}}} x^T L x. \quad (4.4)$$

Dessa forma, obtemos que C_1 e C_2 são de fato as componentes de Perron em v_z . Isso conclui um lado da demonstração.

Reciprocamente, suponha que existem duas componentes de Perron em algum v , denotadas por C_1 e C_2 . Denote por x_1 e x_2 os vetores de Perron para $L(C_1)^{-1}$ e $L(C_2)^{-1}$, respectivamente, um deles positivo e o outro negativo, e normalizados de modo que $a_1^T x_1 + a_2^T x_2 = 0$ (isso é possível pois a_1 e a_2 são não positivos e não são o vetor de zeros). É fácil ver que o vetor $y = [x_1, x_2, 0, \dots, 0]^T$ é um autovetor de L correspondendo ao autovalor $1/\rho(L(C_1)^{-1})$. Pelas desigualdades de entrelaçamento de autovalores para uma matriz simétrica, como $L(C_1)$ é uma submatriz principal de L , segue que

$$0 < 1/\rho(L(C_1)^{-1}) \leq a.$$

Entretanto, como $1/\rho(L(C_1)^{-1})$ também é autovalor de L , temos que $1/\rho(L(C_1)^{-1}) = a$. Desse modo, y é um vetor de Fiedler para o tipo descrito no Caso B e o vértice $v = v_z$. Consequentemente, o caso B vale se, e somente se, existem duas ou mais componentes de Perron em v .

Finalmente, suponha que v é um vértice de G com $v \neq v_z$ e que existe no mínimo duas componentes de Perron em v_z . Denote por C_v a componente de $G - v_z$ que contém v . Então para toda componente A de $G - v$ que não contém

v_z , obtemos $A \subset C_v$. Se B é a componente em v que contém v_z , como existem no mínimo duas componentes de Perron em v_z , uma delas, digamos C_0 está estritamente contida em B . Sendo $A \subset C_v$, obtemos que $L(A)^{-1}$ é dominada entrada por entrada por uma submatriz principal de $L(C_v)^{-1}$, ou seja, $L(A)^{-1} \ll L(C_v)^{-1}$; como visto anteriormente, obtemos $\rho(L(A)^{-1}) < \rho(L(C_v)^{-1})$. Como $C_0 \subseteq B$, pelo mesmo motivo, obtemos

$$\rho(L(A)^{-1}) < \rho(L(C_v)^{-1}) \leq \rho(L(C_0)^{-1}) \leq \rho(L(B)^{-1}). \quad (4.5)$$

Portanto, a única componente de Perron em v é B , a componente contendo v_z . \square

Corolário 4.3 *Se G é um grafo conexo, então o caso A do Teorema da Monotonicidade de Fiedler vale se, e somente se, existe uma única componente de Perron em cada vértice de G . O caso B do Teorema de Fiedler ocorre se, e somente se, existe um único vértice no qual existem duas ou mais componentes de Perron.*

Demonstração Do teorema anterior, vemos que se existem duas ou mais componentes de Perron em algum vértice, então o caso A não pode ocorrer para nenhum vetor de Fiedler. Reciprocamente, se existe uma única componente de Perron em cada vértice, o caso B não pode ocorrer para todo vetor de Fiedler, assim o caso A precisa valer para todo vetor de Fiedler. A afirmação relacionada ao caso B é apenas uma reformulação do Teorema. \square

4.3 Componentes de Perron e o Caso A

O objetivo desta seção é apresentar resultados que relacionam as componentes de Perron, com o caso A do Teorema da Monotonicidade de Fiedler. Para que isso seja possível, iniciamos com um resultado preliminar. O Lema 4.1 nos leva ao seguinte resultado.

Lema 4.4 *Suponha que temos um grafo conexo G e que C é um subconjunto de vértices que induz um subgrafo conexo de G . Seja $v \in C$ um ponto de articulação tal que todo caminho de um vértice em C até um vértice em $G - C$ passa através de v . Denote por w o número de arestas entre v e os vértices em $G - C$. Se os vértices são nomeados de modo que v seja o último dentre os vértices em C , então*

$$L(C)^{-1} = \begin{bmatrix} L(C - v)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{w}J,$$

onde J é a matriz com o número 1 em todas entradas.

Demonstração Suponha que as componentes conexas de $C - v$ são A_1, A_2, \dots, A_m . Então como $L\mathbf{1} = 0$, a matriz $L(C)$ pode ser escrita da forma

$$L(C) = \begin{bmatrix} L(A_1) & & & & -L(A_1)\mathbf{1} \\ & L(A_2) & & & -L(A_2)\mathbf{1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & L(A_m) & -L(A_m)\mathbf{1} \\ -\mathbf{1}^T L(A_1) & -\mathbf{1}^T L(A_2) & \cdots & -\mathbf{1}^T L(A_m) & d \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde

$$d = w + \mathbf{1}^T L(A_1)\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}^T L(A_m)\mathbf{1} = w + \mathbf{1}^T L(C - v)\mathbf{1}. \quad (4.7)$$

Aplicando o Lema 4.1 para a matriz $A = L(C - v)$ e com $c = L(C - v)\mathbf{1}$, obtemos

$$L(C)^{-1} = \begin{bmatrix} L(C - v)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{d - \mathbf{1}^T L(C - v)^T \mathbf{1}} \begin{bmatrix} L(C - v)^{-1} L(C - v)\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}^T L(C - v) L(C - v) & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L(C-v)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{d - \mathbf{1}^T L(C-v) \mathbf{1}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Por (4.7), obtemos

$$L(C)^{-1} = \begin{bmatrix} L(C-v)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{w} J.$$

Isso conclui a demonstração. \square

O resultado a seguir fornece uma expressão para a conectividade algébrica quando o caso A do Teorema da Monotonicidade de Fiedler ocorre. Para maior clareza do enunciado a seguir definiremos componente imprópria de um grafo. Considere um grafo G em que o caso A do Teorema da Monotonicidade de Fiedler ocorre. Se v é um ponto de articulação de G , denote B_0 o único bloco de G contendo vértices positivos e negativos, e por C_0 o conjunto de vértices na componente conexa de $G - v$ que contém vértices em B_0 . Chamamos C_0 de uma *componente imprópria no vértice v* .

Teorema 4.5 *Considere um grafo G com conectividade algébrica $a = a(G)$ em que o caso A do Teorema da monotonicidade de Fiedler ocorre (ou seja, existe uma única componente de Perron em cada vértice). Denote por y um vetor de Fiedler para o grafo G . Se v é um ponto de articulação de G , denote por C_0 uma componente imprópria em v e por C_1 os vértices em $G - C_0$. Permute e particione a matriz Laplaciana na forma*

$$\begin{bmatrix} & & 0 & \cdots & 0 \\ & L(C_1) & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & -\theta^T \\ 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & -\theta & L(C_0) \\ 0 & \cdots & 0 & & \end{bmatrix}$$

(onde o vértice v corresponde à última linha de $L(C_1)$ e θ representa as adjacências de v com os vértices em C_0), e particione y como $y = [y_1^T y_0^T]^T$. Se $y(v) \neq 0$, então

$$L(C_1)^{-1} + \frac{\theta^T y_0}{\theta^T \mathbf{1}(\theta^T \mathbf{1}y(v) - \theta^T y_0)} J \quad (4.8)$$

é uma matriz positiva cujo valor de Perron é $1/a$ e cujo vetor de Perron é um múltiplo escalar de y_1 .

Demonstração Primeiramente, observamos que ambos os conjuntos C_1 e C_0 induzem subgrafos de G . Como o caso A ocorre, cada bloco de G , distinto de B_0 , possui somente numeração positiva, negativa ou zero para o vetor y . Suponha, sem perda de generalidade, que $y(v) > 0$; então todo bloco em C_1 ao qual v pertence é numerado positivamente e então segue que, de fato, todo vértice de C_1 é numerado positivamente por y . Dessa forma $y_1 > 0$. Suponha que existem m vértices em C_1 . Pela equação $Ly = ay$, obtemos que

$$L(C_1)y_1 - \theta^T y_0 e_m = ay_1. \quad (4.9)$$

Temos que $L\mathbf{1} = 0$, logo

$$\mathbf{1}^T L(C_1) = \theta^T \mathbf{1} e_m^T. \quad (4.10)$$

Assim,

$$\theta^T \mathbf{1}y(v) - \theta^T y_0 = \mathbf{1}^T L(C_1)y_1 - \theta^T y_0 = a\mathbf{1}y_1. \quad (4.11)$$

Além disso, reescrevendo (4.9), obtemos

$$\frac{y_1}{a} - \frac{\theta^T}{a} y_0 L(C_1)^{-1} e_m = L(C_1)^{-1} y_1. \quad (4.12)$$

Por (4.10) obtemos que

$$L(C_1)^{-1} e_m = \frac{1}{\theta^T \mathbf{1}} \mathbf{1} \quad (4.13)$$

e reescrevendo (4.11) tem-se

$$\frac{1}{a} = \frac{\mathbf{1}^T y_1}{\theta^T \mathbf{1}y(v) - \theta^T y_0}. \quad (4.14)$$

Portanto, de (4.12)-(4.14), obtemos

$$\left[L(C_1)^{-1} + \frac{\theta y_0}{\theta^T \mathbf{1}(\theta^T \mathbf{1} y(v) - \theta^T y_0)} J \right] y_1 = \frac{1}{a} y_1. \quad (4.15)$$

Pela aplicação do Lema 4.4, obtemos

$$L(C_1)^{-1} \geq \frac{1}{\theta^T \mathbf{1}} J.$$

Além disso, como $y(v) > 0$ e por (4.11), obtemos que

$$\theta^T \mathbf{1} y(v) - \theta^T y_0 > 0.$$

Portanto, segue que

$$\frac{\theta y_0}{\theta^T \mathbf{1}(\theta^T \mathbf{1} y(v) - \theta^T y_0)} > -\frac{1}{\theta^T \mathbf{1}}$$

e usando o Lema 4.4, tem-se que

$$L(C_1)^{-1} + \frac{\theta y_0}{\theta^T \mathbf{1}(\theta^T \mathbf{1} y(v) - \theta^T y_0)} J$$

é uma matriz positiva. Consequentemente, por (4.15), a é o recíproco do valor de Perron dessa matriz e y_1 é o vetor de Perron correspondente. \square

No início deste capítulo, mencionamos que a teoria de conectividade algébrica está sendo particularmente bastante estudada para árvores. O próximo resultado mostra como, em certas circunstâncias, um grafo exibe propriedades similares às de uma árvore do Tipo II. Para um grafo G suponha que existe uma aresta $\{i, j\}$ que não está em nenhum ciclo de G . Dizemos que i e j tem *componente de Perron mútua* se, e somente se, a única componente de Perron no vértice i contém o vértice j e a única componente de Perron em j contém i . Evidentemente, esse é o caso se, e somente se, a única componente de Perron em cada vértice de G contém um ou ambos os vértices i e j .

Teorema 4.6 *Considere o grafo G com conectividade algébrica a . Suponha que existe uma aresta $\{i, j\}$ que não está em nenhum ciclo de G . Denote a componente*

em j contendo i por C_i e a componente em i contendo j por C_j . Então i e j tem componente de Perron mútua se, e somente se, existe $\gamma \in (0, 1)$ tal que

$$\rho(L(C_i)^{-1} - \gamma J) = \rho(L(C_j)^{-1} - (1 - \gamma)J) = \frac{1}{a}. \quad (4.16)$$

Demonstração A condição da componente de Perron mútua é equivalente à condição de que, para cada vértice, existe uma única componente de Perron que contém um ou ambos os vértices i e j . Assim, a aresta $\{i, j\}$ é o único bloco com vértices positivos e negativos, pois para cada vértice a componente de Perron contém vértices no bloco B_0 . Além disso, pelo Corolário 4.3, G satisfaz o caso A do Teorema da monotonicidade de Fiedler. Pela aplicação do Teorema 4.5 com $v = i$, a condição que para cada vértice, existe uma única componente de Perron que contém um ou ambos os vértices i e j , implica a existência de tal γ , fazendo

$$\gamma = -\frac{\theta^T y_0}{\theta^T \mathbf{1}(\theta^T \mathbf{1}y(i) - \theta^T y_0)}$$

no teorema. Como $\theta^T = e_j$, então $\theta^T y_0 = y_j$ e $\theta^T \mathbf{1} = 1$. Assim,

$$\gamma = -\frac{y_j}{y_i - y_j}.$$

Pelo mesmo argumento utilizando o Teorema 4.5 com $v = j$, obtemos

$$\gamma = -\frac{y_i}{y_j - y_i}.$$

Reciprocamente, se existe tal γ , suponha sem perda de generalidade, que

$$L = \begin{bmatrix} & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & & \vdots \\ & & L(C_i) & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & & \\ 0 & & & 0 & & & L(C_j) & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix}.$$

Denote por v_1 e v_2 os vetores de Perron de $L(C_i)^{-1} - \gamma J$ e $L(C_j)^{-1} - (1 - \gamma)J$, respectivamente, normalizados de modo que $\mathbf{1}^T v_1 = \mathbf{1}^T v_2 = 1$. Temos que

$$L(C_i)^{-1}v_1 - \gamma Jv_1 = \frac{1}{a}v_1$$

e que

$$L(C_j)^{-1}v_2 - (1 - \gamma)Jv_2 = \frac{1}{a}v_2.$$

Queremos mostrar que o vetor $[-v_1^T v_2^T]^T$ é autovetor de L correspondendo à a .

Com essa finalidade, sendo $J = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$, tem-se

$$L(C_i)^{-1}v_1 - \gamma\mathbf{1}\mathbf{1}^T v_1 = L(C_i)^{-1}v_1 - \gamma\mathbf{1}\mathbf{1}^T v_2 = \frac{1}{a}v_1. \quad (4.17)$$

Portanto, se a última linha de $L(C_i)$ é a k -ésima linha de L , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}e_k^T v_1 &= e_k^T L(C_i)^{-1}v_1 - \gamma e_k^T \mathbf{1}\mathbf{1}^T v_1 \\ &= e_k^T L(C_i)^{-1}v_1 - \gamma \mathbf{1}^T v_1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pelo Lema 4.4,

$$e_k^T L(C_i)^{-1} = \mathbf{1}^T. \quad (4.19)$$

Assim,

$$\frac{1}{a}e_k^T v_1 = \mathbf{1}^T v_1 - \gamma \mathbf{1}^T v_1 = (1 - \gamma)\mathbf{1}^T v_2. \quad (4.20)$$

Similarmente, o cálculo usando $L(C_j)^{-1}v_2 - (1 - \gamma)Jv_2 = \frac{1}{a}v_2$ mostra que

$$\frac{1}{a}e_1^T v_2 = \gamma \mathbf{1}^T v_1. \quad (4.21)$$

Assim, obtemos de (4.20) e (4.21) que

$$\frac{1}{a}v_1 = L(C_i)^{-1}v_1 - \gamma\mathbf{1}\mathbf{1}^T v_1 \quad (4.22)$$

$$= L(C_i)^{-1}v_1 - \frac{1}{a}\mathbf{1}e_1^T v_2 \quad (4.23)$$

$$= L(C_i)^{-1}v_1 - \frac{1}{a}L(C_i)^{-1}e_k e_1^T v_2. \quad (4.24)$$

De modo que $av_1 - e_k e_1^T v_2 = L(C_i)v_1$, ou equivalentemente, $-L(C_i)v_1 + e_k e_1^T v_2 = -av_1$. Similarmente $L(C_j)v_2 + e_1 e_k^T v_1 = av_2$. Isso mostra que o vetor $[-v_1^T v_2^T]^T$

é autovetor de L correspondendo à a . Pelo Teorema de Perron-Frobenius, $v_1 > 0$ e $v_2 > 0$, então $i - j$ é o único bloco contendo vértices positivos e negativos simultaneamente. Pelo Teorema, 4.5 i e j possuem componentes de Perron mútuas. Isso conclui a demonstração. \square

5 APLICAÇÃO EM ORDENAMENTO DE ÁRVORES

No capítulo anterior apresentamos resultados relacionando componentes de Perron com a conectividade algébrica. Essas ferramentas fornecem uma maneira simples de comparar a conectividade algébrica de algumas árvores. Neste capítulo mostraremos como podemos utilizar a teoria desenvolvida para ordenar uma classe de árvores pela conectividade algébrica. O resultado que apresentamos aqui está em [26]. Nessa publicação, além de fazer o ordenamento das árvores dessa classe, conseguimos classificar todas como sendo do Tipo I ou do Tipo II. Também fornecemos uma cota superior para a conectividade algébrica nessa classe e exibimos qual árvore atinge essa cota.

5.1 Introdução

Até agora, os resultados sobre o vetor de Fiedler e as componentes de Perron foram apresentados para grafos. Neste capítulo, aplicaremos os resultados para o caso particular de árvores. Sendo assim, alguns dos enunciados se simplificam consideravelmente. Por esse motivo, reescrevemos alguns dos enunciados que necessitaremos posteriormente.

Com essa finalidade, considere um vértice k de uma árvore T . Chamamos de *ramo* de T em k alguma das componentes conexas de $T - k$ obtida de T pela remoção do vértice k e as arestas adjacentes com k . Defina o conjunto $P_{i,j,k}$ como sendo o conjunto de arestas de T que estão em ambos os caminhos do vértice i ao vértice k e no caminho do vértice j ao vértice k . O lema que segue tem um papel fundamental na técnica que apresentaremos e foi publicado por Kirkland em [15], onde foram estudadas as componentes de Perron de árvores.

Lema 5.1 *Considere uma árvore T com n vértices. Denote por L_k a submatriz principal da matriz Laplaciana $L(T)$ obtida pela remoção da k -ésima coluna e da k -ésima linha de $L(T)$. Então a entrada (i, j) de L_k^{-1} é igual ao número de arestas em $P_{i,j,k}$.*

Demonstração Sem perda de generalidade, podemos supor $k = n$. Faremos a prova por indução em n . Note que o caso $n = 2$ segue do fato que existe apenas uma árvore com dois vértices: a árvore com matriz Laplaciana da forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, obtemos $L_k^{-1} = [1]$. Assim, suponha que o resultado vale para algum $n_0 - 1 \geq 2$ e que T é uma árvore com n_0 vértices v_1, v_2, \dots, v_{n_0} . Novamente, sem perda de generalidade, podemos tomar o vértice v_1 como sendo um vértice pendente de T adjacente ao vértice v_2 .

Denote por M a matriz Laplaciana da árvore T' induzida pelos vértices v_2, v_3, \dots, v_{n_0} . Denote por M_{n_0} a submatriz principal de M formada pela remoção de sua última linha e coluna. Segue que

$$L_{n_0} = \begin{bmatrix} 1 & -e_1^T \\ -e_1 & M_{n_0} + e_1 e_1^T \end{bmatrix}.$$

Um cálculo simples nos fornece

$$L_{n_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + e_1^T M_{n_0}^{-1} e_1 & e_1^T M_{n_0}^{-1} \\ M_{n_0}^{-1} e_1 & M_{n_0}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Agora, se $i, j \geq 2$, a fórmula para a entrada (i, j) da matriz L_{n_0} segue pela hipótese de indução. Além disso, se $j \geq 2$, note que o conjunto $P_{1,j,k}$ é o mesmo que $P_{2,j,k}$. Esse conjunto também é o mesmo em T' . Logo, as expressões para $(1, j)$ e $(j, 1)$ são facilmente obtidas. Finalmente, como o vértice v_1 de T é um vértice

pendente adjacente ao vértice v_2 , obtemos que $P_{1,1,k} = P_{2,2,k} \cup \{\{v_1, v_2\}\}$. Assim, podemos concluir que

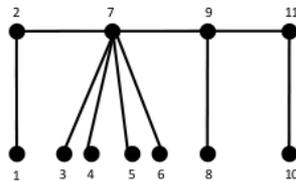
$$|P_{1,1,k}| = 1 + |P_{2,2,k}| = 1 + e_1^T M_{n_0}^{-1} e_1$$

e isso nos leva a expressão para a entrada $(1, 1)$ de $L_{n_0}^{-1}$. Isso conclui o passo de indução e a demonstração. \square

Desse modo, o Teorema acima nos diz que a entrada (i, j) de L_k^{-1} é positiva se, e somente se, os vértices i e j estão no mesmo ramo de T no vértice k . Consequentemente, há uma rotulação dos vértices de T tal que L_k^{-1} é semelhante a uma matriz diagonal em blocos na qual o número de blocos diagonais é o grau do vértice k . Além disso, cada bloco diagonal é uma matriz positiva que corresponde a um único ramo em k . Esta matriz é chamada de *matriz gargalo* para esse ramo em k . Da Teoria de Perron-Frobenius para matrizes não-negativas, segue que cada bloco diagonal tem um autovalor simples igual ao seu raio espectral, a sua raiz de Perron ou valor de Perron.

Chamamos um ramo de *ramo de Perron* se o seu valor de Perron é igual ao raio espectral de L_k^{-1} . Isso significa que dentre todos os ramos, o ramo de Perron é o que possui maior raio espectral.

Exemplo 6 Considere a árvore abaixo



*Figura 5.1: Árvore com 11 vértices.
No vértice 9 temos 3 ramos.*

Então

$$L_9^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes gargalo para os ramos no vértice 9 são as matrizes

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = [1], \quad B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Claramente o ramo com vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 é o ramo de Perron no vértice 9 da árvore. Isso se deve ao fato de que as matrizes B_2 e B_3 são submatrizes principais da matriz B_1 , logo, da teoria de Perron-Frobenius para matrizes não-negativas, sabemos que $\rho(B_1) > \rho(B_2)$ e $\rho(B_1) > \rho(B_3)$.

Mas o que isso significa na estrutura dessa árvore? Significa que um ramo é uma subárvore do outro ramo.

Essa ideia será utilizada diversas vezes em nossa demonstração. Portanto, para uma árvore, sempre que um ramo for subárvore de outro ramo, concluiremos que o ramo maior é o ramo de Perron.

Reescrevendo o Teorema 4.6 quando o grafo não contém ciclos, obtemos

Teorema 5.2 *Denote por i e j vértices adjacentes de T . Então T é uma árvore do tipo II com vértices característicos i e j se, e somente se, existe $0 < \gamma < 1$ tal que*

$$\rho(M - \gamma J) = \rho(\widehat{M} - (1 - \gamma) J)$$

onde M é a matriz gargalo do ramo em j contendo i e \widehat{M} é a matriz gargalo do ramo em i contendo j . Além disso, se isso ocorre então

$$\frac{1}{a(T)} = \rho(M - \gamma J) = \rho(\widehat{M} - (1 - \gamma) J). \quad (5.1)$$

Corolário 5.3 *T é do tipo II com vértices característicos i e j se, e somente se, (1) os vértices i e j são adjacentes, (2) o ramo em i que contém o vértice j é o único ramo de Perron em i , e (3) o ramo em j contendo o vértice i é o único ramo de Perron em j .*

Da mesma forma, reescrevendo o Teorema 4.2 quando o grafo não contém ciclos, obtemos

Teorema 5.4 *T é do tipo I com vértice característico k se, e somente se, existem dois ou mais ramos de Perron de T em k . Nesse caso,*

$$a(T) = \frac{1}{\rho(L_k^{-1})}.$$

Corolário 5.5 *T é do tipo I se, e somente se, existe exatamente um vértice no qual existem dois ou mais ramos de Perron. T é do tipo II se, e somente se, em cada vértice existe um único ramo de Perron.*

Procedemos agora com a descrição de uma classe especial de árvores que será de nosso interesse. Um caterpillar é uma árvore na qual a remoção de todos vértices pendentes a torna um caminho. Denote por P_n o caminho com n vértices

e S_p a estrela de $p + 1$ vértices. Defina $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_{d-1}]$ onde $p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, \dots, p_{d-1} \geq 1$. Considere $C(\mathbf{p})$ o caterpillar obtido das estrelas $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots, S_{p_{d-1}}$ e do caminho P_{d-1} identificando a raiz de S_{p_i} com o i -ésimo vértice de P_{d-1} . Defina

$$\mathbf{C} = \{C(\mathbf{p}) : p_1 + p_2 + \dots + p_{d-1} = n - d + 1\}.$$

Facilmente, podemos ver que qualquer caterpillar em \mathbf{C} é um caterpillar de n vértices e diâmetro d . Em [25], é dada uma ordem completa pela conectividade algébrica nas subclasses

$$\mathbf{C}_1 = \{C(p_1, 1, \dots, 1, p_{d-1}) \in \mathbf{C} : p_1 \leq p_{d-1}\},$$

$$\mathbf{C}_{\frac{d-1}{2}} = \left\{ C\left(1, \dots, 1, p_{\frac{d-1}{2}}, p_{\frac{d+1}{2}}, 1, \dots, 1\right) \in \mathbf{C} : p_{\frac{d-1}{2}} \leq p_{\frac{d+1}{2}} \right\}$$

sempre que d é ímpar, e para $1 < k < \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ em

$$\mathbf{C}_k = \{C(1, \dots, 1, p_k, 1, \dots, 1, p_{d-k}, 1, \dots, 1) \in \mathbf{C} : p_k \leq p_{d-k}\}.$$

Considere n, d e q inteiros positivos dados tais que $n \geq d + (d - 2)q$, $d \geq 3$ e $q \geq 1$. Defina $r = n - (d - 1) - (d - 2)q$. Nós estudamos a subclasse especial

$$\mathbf{A}_q = \{A_q(k) \in \mathbf{C} : p_j = q \text{ para } j \neq k \text{ e } p_k = r\}.$$

Exemplo 7 Se $n = 20, d = 7, q = 2$ e $k = 2$ então $p_2 = r = 4$ e o caterpillar $A_2(2)$ é como na figura.

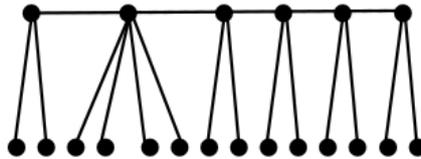


Figura 5.2: Um caterpillar com 20 vértices.

Em nossa pesquisa, provamos que para $1 \leq k \leq \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$, a conectividade algébrica de $A_q(k) \in \mathbf{A}_q$ é uma função estritamente crescente, sempre que $r > q$. Neste capítulo vamos demonstrar esse fato.

A partir de agora, denote por v_1, v_2, \dots, v_{d-1} os vértices do caminho P_{d-1} . Denote por $B(T, v_i, v_j)$ o ramo de $T \in \mathbf{C}$ no vértice v_i contendo o vértice v_j e denote por $M(T, v_i, v_j)$ a matriz gargalo de $B(T, v_i, v_j)$. Observamos que para qualquer árvore, nenhuma folha é um vértice característico. Para ver que isso é verdade suponha, por contradição, que uma folha f é um vértice característico. Se a árvore fosse do Tipo I, então haveriam dois ramos de Perron em f , o que não é verdade, pois existe apenas um ramo em f . Portanto, essa árvore é do Tipo II. Portanto, o vértice vizinho de f , digamos g , também seria um vértice característico. Desse modo, o ramo de Perron em g deveria conter f , ou seja, seria um ramo com um único vértice. Por outro lado, f é uma subárvore de qualquer ramo, contradizendo o fato de ser o ramo de Perron. Portanto, nenhuma folha é um vértice característico. Deste fato, do Teorema 5.2 e do Teorema 5.4, temos

Lema 5.6 *Se $C \in \mathbf{C}$ é do tipo II e v_i e v_{i+1} são seus vértices característicos, então existe $0 < \gamma < 1$ tal que*

$$\frac{1}{a(C)} = \rho(M(C, v_{i+1}, v_1) - \gamma J) = \rho(M(C, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma) J). \quad (5.2)$$

Lema 5.7 *Se $C \in \mathbf{C}$ é do tipo I e v_i é seu vértice característico, então*

$$\frac{1}{a(C)} = \rho(M(C, v_i, v_1)) = \rho(M(C, v_i, v_{d-1})). \quad (5.3)$$

Nesse ponto, é notável o caráter estrutural da técnica. Quando modificamos a estrutura de alguma árvore, modificamos alguns de seus ramos de Perron e, conseqüentemente, suas matrizes gargalo. Mas os lemas acima nos fornecem uma relação entre conectividade algébrica e as matrizes gargalo, ou seja, uma relação entre conectividade algébrica e as modificações feitas na árvore. Assim, se for possível

comparar o raio espectral das matrizes gargalo mediante as modificações feitas, será possível comparar a conectividade algébrica. Na próxima seção utilizaremos essa noção com mais rigor e demonstraremos nosso principal resultado: a ordem total na subclasse \mathbf{A}_q .

5.2 Resultados de Classificação

Para matrizes não negativas A e B , quando B é irredutível, escreveremos $A \ll B$ para simbolizar que existe uma matriz de permutação P tal que PAP^T é dominada entrada a entrada por uma submatriz principal de B sempre que a ordem de A é estritamente menor que a ordem de B , ou dominada entrada a entrada por B , com a desigualdade estrita no mínimo em uma entrada, sempre que A e B têm a mesma ordem. Da teoria de Perron-Frobenius para matrizes não negativas, mais precisamente, dos Teoremas 2.5 e 2.6, se A e B são matrizes não negativas, B é irredutível, e $A \ll B$ então $\rho(A) < \rho(B)$. Nesta seção usaremos esse fato diversas vezes.

Lema 5.8 *Seja $s = \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$. (a) Se $d = 2s$, então $A_q(s)$ é uma árvore do Tipo I com vértice característico v_s .*

(b) Se $r < q$, com $k \neq s$ quando $d = 2s$, então $A_q(k)$ é uma árvore do Tipo II com vértices característicos v_s and v_{s+1} .

Demonstração (a) Considere o caso em que $d = 2s$. Vemos facilmente que em v_s , o caterpillar $A_q(s)$ tem dois ramos de Perron. Então, do Corolário 5.5, $A_q(s)$ é uma árvore do Tipo I com vértice característico v_s .

(b) Como $A_q(k)$ e $A_q(d-k)$ são caterpillars isomorfos, podemos fornecer a prova apenas para $1 \leq k \leq s$. Pela hipótese, $r < q$ com $k \neq s$ quando $d = 2s$.

Defina $C = A_q(k)$. Para $r < q$, mostraremos que

$$M(C, v_{s+1}, v_{d-1}) \ll M(C, v_{s+1}, v_1).$$

Para o ramo $B(C, v_{s+1}, v_1)$, chame de A a subárvore que contém os vértices $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_s$ e as suas respectivas folhas. Para o ramo $B(C, v_{s+1}, v_{d-1})$, chame de A' a subárvore que contém os vértices $v_{s+1}, v_{s+2}, \dots, v_{d-k}$ e as suas respectivas folhas. Desse modo, as subárvores A e A' são isomorfas. Além disso, vértices que estão associados no isomorfismo, estão à mesma distância do vértice v_{s+1} . Desse modo, pelo Lema 5.1, as entradas correspondentes nas suas respectivas matrizes gargalo são iguais. Para o ramo $B(C, v_{s+1}, v_1)$, chame de B a subárvore que contém os vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} e as suas respectivas folhas. Para o ramo $B(C, v_{s+1}, v_{d-1})$, chame de B' a subárvore que contém os vértices $v_{d-k+1}, v_{d-k+2}, \dots, v_{d-1}$ e as suas respectivas folhas. Da mesma forma, as subárvores B e B' são isomorfas. Nessas subárvores, se $w \in B$ e $u \in B'$ são vértices que estão associados no isomorfismo, então as distâncias de w à v_{s+1} e u à v_{s+1} , são tais que

$$d(w, v_{s+1}) = d(u, v_{s+1}) + 1.$$

Desse modo, pelo Lema 5.1, as entradas correspondentes de w na sua respectiva matriz gargalo são estritamente maiores que as entradas correspondentes de u . Portanto, podemos escrever

$$M(C, v_{s+1}, v_{d-1}) \ll M(C, v_{s+1}, v_1).$$

Além disso, como $B(C, v_s, v_1)$ é subgrafo de $B(C, v_s, v_{d-1})$

$$M(C, v_s, v_1) \ll M(C, v_s, v_{d-1}).$$

Então $B(C, v_{s+1}, v_1)$ é o único ramo de Perron de C em v_{s+1} contendo v_s e $B(C, v_s, v_{d-1})$ é o único ramo de Perron de C em v_s contendo v_{s+1} . Portanto, do Corolário 5.3, $C = A(k)$ é do Tipo *II* com vértices característicos v_s e v_{s+1} . \square

Lema 5.9 *Seja $s = \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$. Considere $r > q$ e $1 \leq k \leq s - 1$.*

(a) *Se $A_q(k+1)$ é uma árvore do Tipo I, então $A_q(k)$ é uma árvore do Tipo II.*

(b) *Se $A_q(k+1)$ é uma árvore do Tipo II, então $A_q(k)$ é uma árvore do Tipo II.*

Demonstração Definindo $C_1 = A_q(k)$ e $C_2 = A_q(k+1)$.

(a) Suponha que C_2 é do Tipo I com vértice característico v_j . Assim, temos

$$\frac{1}{a(C_2)} = \rho(M(C_2, v_j, v_1)) = \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1})). \quad (5.4)$$

Temos que provar que C_1 é do Tipo II. Do contrário, suponha que C_1 é do Tipo I com vértice característico v_i . Então

$$\frac{1}{a(C_1)} = \rho(M(C_1, v_i, v_1)) = \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})). \quad (5.5)$$

Como $r > q$, se $j < i$, então $B(C_1, v_i, v_{d-1})$ é uma subárvore de $B(C_2, v_j, v_{d-1})$, logo

$$M(C_1, v_i, v_{d-1}) \ll M(C_2, v_j, v_{d-1})$$

Se $j = i$, então $B(C_1, v_i, v_{d-1})$ e $B(C_2, v_j, v_{d-1})$ são isomorfos, logo

$$M(C_1, v_i, v_{d-1}) = M(C_2, v_j, v_{d-1}).$$

Agora, mostraremos que

$$M(C_2, v_j, v_1) \ll M(C_1, v_i, v_1).$$

Para isso, considere o caterpillar C_2 e sua subárvore A formada pelos vértices v_1, v_2, \dots, v_j juntamente com q de seus respectivos vértices pendentes. Considere também o caterpillar C_1 e sua subárvore B formada pelos vértices v_1, v_2, \dots, v_j juntamente com q de seus respectivos vértices pendentes. Claramente, as subárvores A e B são isomorfas. Nessas subárvores, se $w \in A$ e $u \in B$ são vértices que estão associados no isomorfismo, como $j \leq i$, então as distâncias de w à v_j e u à v_i , são tais que

$$d(w, v_j) \leq d(u, v_i).$$

Desse modo, pelo Lema 5.1, as entradas correspondentes de w na sua respectiva matriz gargalo são maiores ou iguais que as entradas correspondentes de u . Agora, observe que os vértices de $B(C_2, v_j, v_1)$ que não estão na subárvore A , são exatamente $r - q$ vértices pendentes ao vértice v_{k+1} . Além disso, existem $r - q$ vértices pendentes ao vértice v_k no ramo $B(C_1, v_i, v_1)$, tais vértices estão mais distantes de v_i em C_1 do que os $r - q$ pendentes no ramo C_2 estão de v_j em C_2 . Isso mostra que

$$M(C_2, v_j, v_1) \ll M(C_1, v_i, v_1). \quad (5.6)$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})) &\leq \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1})) \\ &= \rho(M(C_2, v_j, v_1)) < \rho(M(C_1, v_i, v_1)). \end{aligned}$$

o que contradiz (5.5). Além disso, se $j > i$, e como $B(C_2, v_j, v_{d-1})$ é subárvore de $B(C_1, v_i, v_{d-1})$, então

$$M(C_2, v_j, v_{d-1}) \ll M(C_1, v_i, v_{d-1}).$$

Pelo mesmo motivo,

$$M(C_1, v_i, v_1) \ll M(C_2, v_j, v_1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1})) &< \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})) \\ &= \rho(M(C_1, v_i, v_1)) < \rho(M(C_2, v_j, v_1)). \end{aligned}$$

o que contradiz (5.5). Portanto, C_1 é uma árvore do Tipo II.

(b) Suponha que C_2 é do Tipo II com vértices característicos v_j e v_{j+1} .

Então

$$\rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1)) > \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_{d-1})) \quad (5.7)$$

$$\rho(M(C_2, v_j, v_{d-1})) > \rho(M(C_2, v_j, v_1)) \quad (5.8)$$

e existe $0 < \gamma_2 < 1$ tal que

$$\frac{1}{a(C_2)} = \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1) - \gamma_2 J) = \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2) J). \quad (5.9)$$

Precisamos provar que C_1 é do Tipo II. Do contrário, suponha que C_1 é do Tipo I com vértice característico v_i . Então vale a equação (5.5). Temos $r > q$. Se $j > i$, como $B(C_2, v_j, v_{d-1})$ é subárvore de $B(C_1, v_i, v_{d-1})$, então

$$M(C_2, v_j, v_{d-1}) \ll M(C_1, v_i, v_{d-1}).$$

Pelo mesmo motivo,

$$M(C_1, v_i, v_1) \ll M(C_2, v_j, v_1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1})) &< \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})) \\ &= \rho(M(C_1, v_i, v_1)) < \rho(M(C_2, v_j, v_1)) \end{aligned}$$

o que contradiz (5.8). Se $j < i$, então

$$M(C_2, v_{j+1}, v_{d-1}) = M(C_1, v_i, v_{d-1}) \text{ ou } M(C_2, v_{j+1}, v_{d-1}) \gg M(C_1, v_i, v_{d-1}).$$

Pelo mesmo argumento utilizado para obter a expressão (5.6), podemos escrever

$$M(C_1, v_i, v_1) \gg M(C_2, v_{j+1}, v_1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_{d-1})) &\geq \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})) \\ &= \rho(M(C_1, v_i, v_1)) > \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1)) \end{aligned}$$

o que contradiz (5.7). Finalmente, se $i = j$, como $B(C_1, v_i, v_{d-1})$ e $B(C_2, v_j, v_{d-1})$ são isomorfos, então

$$M(C_1, v_i, v_{d-1}) = M(C_2, v_j, v_{d-1}). \quad (5.10)$$

Agora, observe que pelo mesmo argumento utilizado para obter a expressão (5.6), podemos obter

$$M(C_2, v_j, v_1) \gg M(C_1, v_i, v_1).$$

Como $M(C_2, v_j, v_1)$ é uma submatriz de $M(C_2, v_{j+1}, v_1) - J$, então obtemos

$$M(C_2, v_{j+i}, v_1) - J \gg M(C_2, v_j, v_1) \gg M(C_1, v_i, v_1) \quad (5.11)$$

De (5.9) e (5.10), obtemos

$$\frac{1}{a(C_1)} = \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})) \quad (5.12)$$

$$> \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J) = \frac{1}{a(C_2)}. \quad (5.13)$$

De (5.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_2)} &= \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1) - \gamma_2 J) \\ &> \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1) - J) \\ &> \rho(M(C_1, v_i, v_1)) \\ &= \frac{1}{a(C_1)}. \end{aligned}$$

o que contradiz (5.13). Logo C_1 é uma árvore do Tipo II. \square

Lema 5.10 *Seja $s = \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$. Se $r \neq q$, os caterpillars em \mathbf{A}_q são do tipo II, exceto para $A_q(s)$ quando $d = 2s$.*

Demonstração Como $A_q(k)$ e $A_q(d-k)$ são isomorfos, é suficiente provar o resultado para $1 \leq k \leq s$. Primeiramente, trataremos do caso em que $d = 2s$. Considere o caterpillar $A_q(s)$. Podemos ver que em v_s o caterpillar $A_q(s)$ tem dois ramos de Perron e dessa forma, do Corolário 5.5, é uma árvore do tipo I.

Pela parte (a) do Lema 5.9, a árvore $A_q(s-1)$ é do Tipo II. Agora, por sucessivas aplicações da parte (b) do Lema 5.9, obtemos que

$$A_q(s-1), A_q(s-2), \dots, A_q(2), A_q(1) \quad (5.14)$$

são árvores do Tipo II.

Agora, considere $d = 2s + 1$. Vemos facilmente que $A_q(s)$ é do Tipo II, com vértices característicos v_s e v_{s+1} . Então, novamente pelas sucessivas aplicações da parte (b) do Lema 5.9, obtemos que

$$A_q(s-1), A_q(s-2), \dots, A_q(2), A_q(1) \quad (5.15)$$

são árvores do Tipo II, concluindo a demonstração. \square

A propósito, notamos que, em [24], está provado que $A_1(s)$, para $d = 2s$ ou $d = 2s + 1$, é o único caterpillar que maximiza a conectividade algébrica dentre todos os caterpillars em \mathbf{C} .

Nesse ponto, é conveniente notar que, se A é uma matriz não-negativa e irredutível, então $\rho(A)$ aumenta estritamente quando alguma entrada de A aumenta estritamente (Teorema 2.5 implica essa afirmação).

5.3 Resultados de Ordenamento

Agora, estamos prontos para estabelecer uma ordem completa na classe \mathbf{A}_q .

Teorema 5.11 *Seja $s = \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$. Se $r < q$ então a conectividade algébrica de $A_q(k)$ é uma função estritamente decrescente em $1 \leq k \leq s$.*

Demonstração Considere k tal que $1 \leq k \leq s - 1$, com $k + 1 \neq s$ quando $d = 2s$. Denote $C_1 = A_q(k)$ e $C_2 = A_q(k + 1)$. Pelo Lema 5.8, parte (b), C_1 e C_2 são ambos do Tipo II com vértice característico v_s e v_{s+1} . Pelo Lema 5.6, existem $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 0$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_{s+1}, v_1) - \gamma_1 J) \\ &= \rho(M(C_1, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1) J) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(C_2)} &= \rho(M(C_2, v_{s+1}, v_1) - \gamma_2 J) \\ &= \rho(M(C_2, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2) J).\end{aligned}$$

Como $r < q$, obtemos $M(C_1, v_{s+1}, v_1) \ll M(C_2, v_{s+1}, v_1)$. Além disso, $M(C_1, v_s, v_{d-1}) = M(C_2, v_s, v_{d-1})$. Então

$$M(C_1, v_{s+1}, v_1) - \gamma J \ll M(C_2, v_{s+1}, v_1) - \gamma J \quad (5.16)$$

e

$$M(C_1, v_s, v_{d-1}) - \gamma J = M(C_2, v_s, v_{d-1}) - \gamma J \quad (5.17)$$

para todo $0 < \gamma < 1$. Se $\gamma_1 = \gamma_2$ então, de (5.17),

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1) J) \\ &= \rho(M(C_2, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2) J) = \frac{1}{a(C_2)}.\end{aligned} \quad (5.18)$$

Além disso, usando (5.16),

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_{s+1}, v_1) - \gamma_1 J) \\ &< \rho(M(C_2, v_{s+1}, v_1) - \gamma_2 J) = \frac{1}{a(C_2)}\end{aligned}$$

o que contradiz (5.18). Assim, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Notamos que $M(C_1, v_s, v_{d-1}) = M(C_2, v_s, v_{d-1})$.

Se $\gamma_1 > \gamma_2$ então

$$M(C_1, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1) J \gg M(C_2, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2) J$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1) J) \\ &> \rho(M(C_2, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2) J) = \frac{1}{a(C_2)}.\end{aligned} \quad (5.19)$$

Além disso, usando (5.16),

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_{s+1}, v_1) - \gamma_1 J) = \rho(M(C_2, v_{s+1}, v_1) - \gamma_1 J) \\ &< \rho(M(C_2, v_{s+1}, v_1) - \gamma_2 J) = \frac{1}{a(C_2)}\end{aligned}$$

que contradiz (5.19). Conseqüentemente, $\gamma_1 < \gamma_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \\ &< \rho(M(C_2, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J) = \frac{1}{a(C_2)}. \end{aligned}$$

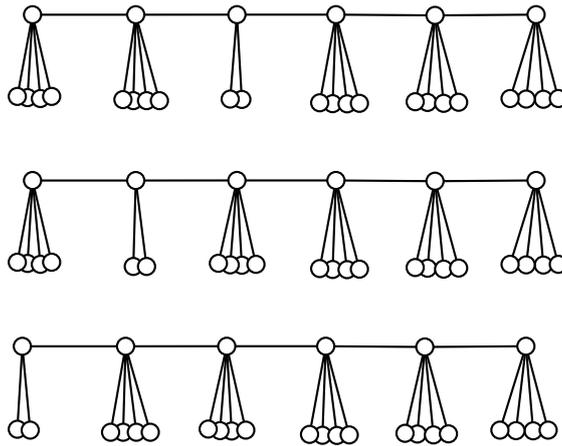
Assim, $a(C_1) > a(C_2)$.

Falta estudar o caso $k + 1 = s$ quando $d = 2s$. Denote $C_1 = A_q(s - 1)$ e $C = A_q(s)$. Como $r < q$, do Lema 5.8, parte (b), os vértices característicos de C_1 são v_s e v_{s+1} . Pelo Lema 5.8, parte (a), C_2 é uma árvore do Tipo I com vértice característico v_s . Temos que $M(C_1, v_s, v_{d-1}) = M(C_2, v_s, v_{d-1})$. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_s, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \\ &< \rho(M(C_1, v_s, v_{d-1})) = \rho(M(C_2, v_s, v_{d-1})) = \frac{1}{a(C_2)}. \end{aligned}$$

Logo $a(C_1) > a(C_2)$. \square

Exemplo 8 *As figuras abaixo estão dispostas em ordem crescente de conectividade algébrica, de acordo com o ordenamento fornecido pelo Teorema 5.11.*



Teorema 5.12 *Seja $s = \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$. Para $1 \leq k \leq s$, se $r > q$ então a conectividade algébrica de $A_q(k)$ é uma função estritamente crescente.*

Demonstração Iniciamos considerando o caso $k = s$ quando $d = 2s$. Seja $C_1 = A_q(s-1)$ e $C_2 = A_q(s)$. Queremos mostrar que $a(C_1) < a(C_2)$. Sabemos que C_1 é do tipo *II* e C_2 é do tipo *I* com vértice característico v_s . Do Lema 5.6, os vértices característicos de C_1 são v_{s-1} e v_s . Desse modo, existe $0 < \gamma_1 < 1$ tal que

$$\frac{1}{a(C_1)} = \rho(M(C_1, v_s, v_1) - \gamma_1 J) = \rho(M(C_1, v_{s-1}, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \quad (5.20)$$

e

$$\frac{1}{a(C_2)} = \rho(M(C_2, v_s, v_1)) = \rho(M(C_2, v_s, v_{d-1})). \quad (5.21)$$

Como $r > q$, temos $M(C_1, v_{s-1}, v_{d-1}) - J \gg M(C_2, v_s, v_{d-1})$. Então

$$\frac{1}{a(C_1)} = \rho(M(C_1, v_{s-1}, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \quad (5.22)$$

$$> \rho(M(C_1, v_{s-1}, v_{d-1}) - J) > \rho(M(C_2, v_s, v_{d-1})) = \frac{1}{a(C_2)}. \quad (5.23)$$

Segue que $a(C_1) < a(C_2)$ quando $d = 2s$, como afirmado.

Seja $1 \leq k \leq \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$ e $k \neq s$ sempre que $d = 2s$. Seja $C_1 = A_q(k)$ e $C_2 = A_q(k-1)$. Pelo Lema 5.10, sabemos que C_1 e C_2 são árvores do Tipo II. Denote por v_i e v_{i+1} os vértices característicos de C_1 e por v_j e v_{j+1} os vértices característicos de C_2 . Afirmamos que $j \geq i$. Suponha por absurdo que $j < i$. Então, pelo mesmo argumento utilizado na expressão (5.6), obtemos

$$M(C_1, v_{j+1}, v_1) \gg M(C_2, v_{j+1}, v_1).$$

Portanto,

$$\rho(M(C_1, v_{j+1}, v_1)) > \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1)). \quad (5.24)$$

Como v_j e v_{j+1} são os vértices característicos de C_2 e

$$M(C_2, v_{j+1}, v_{d-1}) = M(C_1, v_{j+1}, v_{d-1}),$$

obtemos

$$\rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1)) > \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1)) = \rho(M(C_1, v_{j+1}, v_{d-1})). \quad (5.25)$$

Portanto, de (5.24) e (5.25), obtemos

$$\rho(M(C_1, v_{j+1}, v_1)) > \rho(M(C_1, v_{j+1}, v_{d-1})). \quad (5.26)$$

Além disso, $j < i$ implica

$$M(C_1, v_j, v_{d-1}) \gg M(C_1, v_i, v_{d-1})$$

e

$$M(C_1, v_i, v_1) \gg M(C_1, v_j, v_1).$$

Portanto

$$\rho(M(C_1, v_j, v_{d-1})) > \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})) \quad (5.27)$$

e

$$\rho(M(C_1, v_i, v_1)) > \rho(M(C_1, v_j, v_1)). \quad (5.28)$$

Como v_i e v_{i+1} são os vértices característicos de C_1 , temos

$$\rho(M(C_1, v_i, v_{d-1})) > \rho(M(C_1, v_i, v_1)). \quad (5.29)$$

Sendo assim, das desigualdades (5.27-5.29), obtemos

$$\rho(M(C_1, v_j, v_{d-1})) > \rho(M(C_1, v_j, v_1)). \quad (5.30)$$

Das desigualdades (5.26) e (5.30) concluímos que v_j e v_{j+1} são os vértices característicos de C_1 , uma contradição, pois v_i e v_{i+1} são seus vértices característicos. Logo, concluímos que $j \geq i$, como afirmado. Desse modo, existem $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ tais que

$$\frac{1}{a(C_1)} = \rho(M(C_1, v_{i+1}, v_1) - \gamma_1 J) = \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \quad (5.31)$$

e

$$\frac{1}{a(C_2)} = \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1) - \gamma_2 J) = \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J). \quad (5.32)$$

Temos que $j = i$ ou $j > i$. Suponha que $j = i$. Assim,

$$M(C_1, v_i, v_{d-1}) = M(C_2, v_j, v_{d-1}) \text{ e } M(C_2, v_{j+1}, v_1) \ll M(C_1, v_{i+1}, v_1).$$

$$M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma)J = M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma)J \quad (5.33)$$

e

$$M(C_2, v_{j+1}, v_1) - \gamma J \ll M(C_1, v_{i+1}, v_1) - \gamma J \quad (5.34)$$

para todo $0 < \gamma < 1$. Se $\gamma_1 = \gamma_2$, então por (5.33), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \\ &= \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J) = \frac{1}{a(C_2)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Além disso, usando (5.34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_{i+1}, v_1) - \gamma_1 J) \\ &> \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1) - \gamma_2 J) = \frac{1}{a(C_2)} \end{aligned}$$

o que é uma contradição com (5.35). Portanto, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Temos que $M(C_1, v_i, v_{d-1}) = M(C_2, v_j, v_{d-1})$. Suponha por contradição que $\gamma_1 < \gamma_2$, então

$$M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J = M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \\ &< \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J) = \frac{1}{a(C_2)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Além disso, usando (5.34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_{i+1}, v_1) - \gamma_1 J) \\ &> \rho(M(C_2, v_{j+1}, v_1) - \gamma_2 J) = \frac{1}{a(C_2)} \end{aligned}$$

o que contradiz (5.36). Consequentemente, $\gamma_1 > \gamma_2$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \\ &> \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J) = \frac{1}{a(C_2)}. \end{aligned}$$

Assim, provamos que $a(C_1) < a(C_2)$ quando $i = j$. Finalmente, supondo $j > i$, obtemos

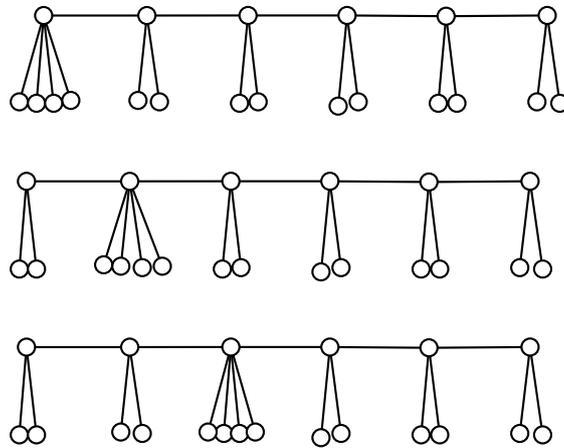
$$M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J \gg M(C_2, v_j, v_{d-1}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(C_1)} &= \rho(M(C_1, v_i, v_{d-1}) - (1 - \gamma_1)J) \\ &> \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1})) \\ &> \rho(M(C_2, v_j, v_{d-1}) - (1 - \gamma_2)J) = \frac{1}{a(C_2)}. \end{aligned}$$

Assim, provamos que $a(C_1) < a(C_2)$ quando $i < j$, o que completa a demonstração. \square

Exemplo 9 *As figuras abaixo estão dispostas em ordem crescente de conectividade algébrica, de acordo com o ordenamento fornecido pelo Teorema 5.12.*



6 CONCLUSÃO

Vimos aqui como a estrutura do grafo se relaciona com o vetor de Fiedler. Através da noção de componentes de Perron em um vértice de um grafo, mostramos como a estrutura do vetor de Fiedler pode ser compreendida em termos de componentes de Perron. Também conseguimos obter resultados classificando e ordenando pela conectividade algébrica todas as árvores de uma família de caterpillars.

Os resultados envolvendo componentes de Perron de um grafo representaram um avanço no resultado original de Fiedler, fornecendo ferramentas que permitiram estudar como se modifica a conectividade algébrica de um grafo quando efetuamos certas modificações em sua estrutura.

Contudo, percebemos que a teoria existente e as ferramentas que utilizam o vetor de Fiedler possuem certas limitações, não descrevendo grafos com certas estruturas, como por exemplo grafos que não possuem um vértice de corte. Nesse caso, não se conhece como a numeração característica se comporta. Portanto, um dos tópicos de pesquisa futuros é compreender como a numeração característica pode descrever grafos mais gerais. De fato, poucos resultados são conhecidos sobre grafos com ciclos descritos pelo vetor de Fiedler. Mais geralmente, essa abordagem não aparece na literatura descrevendo grafos 2-conexos.

Subsequentemente, caso esse autovetor se mostre adequado para algumas estruturas mais gerais, outro tópico de pesquisa será o desenvolvimento de ferramentas que descrevam a conectividade algébrica através do vetor de Fiedler. Como feito anteriormente por Kirkland, essas ferramentas forneceriam novas possibilidades para ordenamento de grafos pela conectividade algébrica. Desse modo, o desenvolvimento de uma teoria mais geral sobre o vetor de Fiedler criaria uma nova perspectiva para o estudo da conectividade algébrica.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, A. M. M., Del-Vecchio, R., Vinagre, C. and Stevanovic, D. **Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações**, SBMAC, (2007).
- [2] ABREU, A. M. M. **Old and new results on algebraic connectivity of graphs**, Linear Algebra and its Applications, Vol. 423, (2007), 53-73.
- [3] BAPAT, R. B., Lal, K. and Pati S. **On algebraic connectivity of graphs with at most two points of articulation in each block**, Linear and Multilinear Algebra, Aceito (2011).
- [4] BELHAIZA, S., Abreu, N. M. M., Hansen, P. and Oliveira C. S. **VNS for extremal graphs 11. Bounds on algebraic connectivity**, in: Avis, Herzt, Marcotte (Eds.), Graph Theory and Combinatorial Optimization, vol. 8, Springer, (2005)
- [5] BERMAN, A., Zhang, X-D. **Lower bounds for the eigenvalues of Laplacian matrices**, Linear Algebra Appl. 316 (2000)
- [6] CVETKOVIC, D., Cangalovic, V. and Kovacevic-Vujcic V. **Optimization and highly informative graph invariants**, Tech. Report University Belgrade, 2002
- [7] DIESTEL, R. **Graph theory**, Springer-Verlag, 2006.
- [8] FALLAT, S. and Kirkland, S. **Extremizing algebraic connectivity subject to graph theoretic constraints**, The Electronic Journal of Linear Algebra, Vol 3, 1998, pp. 48-74.
- [9] FIEDLER, M. **Algebraic connectivity of graphs**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), 298-305.

- [10] FIEDLER, M. **A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 4, 619-633
- [11] FIEDLER, M. **Eigenvectors of Acyclic Matrices**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 4, 607-618
- [12] FIEDLER, M. **On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors**, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 3, 382-400
- [13] GRONE, R. and Merris, R. **Ordering trees by algebraic connectivity.**, Graphs and Combinatorics, Vol. 6, (1990), 229-237.
- [14] HORN, R. A. and Johnson, C. R. **Matrix Analysis**, Cambridge University Press, (1985).
- [15] KIRKLAND, S., Neumann, M. and Shader, B. **Characteristic vertices of weighted trees via Perron values**, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 40, (1996), pp. 187-203.
- [16] KIRKLAND, S. and Neumann, M, **Algebraic connectivity of weighted trees under perturbation**, Linear and Multilinear Algebra 42:187-203 (1997).
- [17] KIRKLAND, S. and Fallat, S. **Perron Components and Algebraic Connectivity for Weighted Graphs**, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 44, (1998), pp. 131-148.
- [18] MAAS, C. **Transportation in graphs and the admittance spectrum**, Discrete Appl. Math. 16 (1987) 31.
- [19] MERRIS, R. **Characteristic vertices of trees**, Linear and Multilinear Algebra, Vol. 22, (1987), pp. 115-131.

- [20] MERRIS, R. **Laplacian Matrices of Graphs: A Survey**, Linear Algebra and its Applications, Vol. 197 (1994), 198:143-176.
- [21] MOHAR, B. **The Laplacian spectrum of graphs**, Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Vol. 2, Ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann, A. J. Schwenk, Wiley, (1991), pp. 871-898.
- [22] MOHAR, B. **Eigenvalues, diameter and mean distance in graphs**, Graphs Combinatorics, vol. 7, (1991).
- [23] POTHEN, A., Simon, H. D. and Liou, K-P **Partitioning Sparse Matrices with Eigenvectors of Graphs**, SIAM. J. Matrix Anal. Appl. 11, (1990), pp. 430-452.
- [24] ROJO, O., Medina, L., Abreu, N. M. M. and Justel, C. **On the algebraic connectivity of some of caterpillars: a sharp upper bound and a total ordering**, Linear Algebra and its Applications, Vol. 432, (2010), 586-605.
- [25] ROJO, O., Medina, L., Abreu, N. M. M. and Justel, C. **Extremal algebraic connectivities of certain caterpillar classes and symmetric caterpillars**, Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 20, (2010), pp. 136-157.
- [26] ROJO, O., Rocha, I., Trevisan, V. **Algebraic connectivity on a subclass of caterpillars**, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Vol. 37, (2011), pp. 153-158.
- [27] SHAO, J-Y., Guo, J-M., Shan, H-Y. **The ordering of trees and connected graphs by algebraic connectivity**, Linear Algebra Appl. 428 (2008) 1421-1438.

- [28] VARGA, R. S. **Matrix Iterative Analysis**, Prentice-Hall, Inc., (1965).
- [29] YUAN, X-Y., Shao, J-Y. and Zhang, L. **The six classes of trees with the largest algebraic connectivity**, Discrete Appl. Math. 156 (2008) 757-769.
- [30] ZHANG, X-D. **Ordering trees with algebraic connectivity and diameter**, Linear Algebra Appl. 427 (2007) 301-312.

Índice Remissivo

- árvore, 2, 55
 - de Tipo I, 40
 - de Tipo II, 40
- aresta, 1, 5
 - incidente, 5
- bloco, 7
- caminho, 6, 59
 - puro, 17
- caterpillar, 59
- ciclo, 6
- componente
 - conexa, 6
 - de Perron, 41
 - de Perron mútua, 51
 - imprópria, 49
- conectividade
 - algébrica, 1, 9
 - de arestas, 7
 - de vértices, 7
- diâmetro, 6, 60
- distância, 6
- espectro, 11
- estrela, 6
- floresta, 6
- folha, 7
- grafo, 1, 5
 - acíclico, 6
 - completo, 6
 - conexo, 6
 - desconexo, 6
 - isomorfo, 5
 - k-conexo, 7
 - simples, 5
- grau, 5
 - de redutibilidade, 21
- inércia, 27
- laço, 5
- matriz
 - gargalo, 57
 - irreduzível, 11
 - Laplaciana, 1, 9
 - não-negativa, 11
 - positiva, 11
- numeração característica, 17, 30
- ponto de articulação, 7
- raio espectral, 11
- raiz de Perron, 12
- ramo, 20, 55
 - de Perron, 57
- subgrafo, 6

submatriz principal, 12

vértice, 1, 5

 adjacente, 5

 característico, 20, 40

 de corte, 7

valor de Perron, 41

vetor de Fiedler, 2

vetor de Perron, 12