Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Solubilidade do Problema de Dirichlet para a equação das superfícies de curvatura média constante em domínios ilimitados e não-convexos

Lisany Gonzalez de Souza

Porto Alegre
Rio Grande do Sul - Brasil
Novembro de 2011

Dissertação apresentada por Lisany Gonzalez de Souza[a] ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Pura na Área de Concentração de Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll
Co-orientadora: Profa. Dra. Lisandra Sauer

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Cíntia Rodrigues de Araújo Peixoto
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
Prof. Dra. Lisandra de Oliveira Sauer
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Data da Defesa: 30/09/2011

[a]Bolsista do CNPQ de setembro de 2009 a julho de 2011.

Pelo bom saber da geometria,
O mestre Euclides fundou
A guilda da geometria
Em terra egípcia principiou.
No Egito ele ensinou largamente
Em diversas terras em toda parte;
Muitos anos depois, eu o sei,
Antes de a guilda chegar a esta terra.
Esta guilda chegou à Inglaterra,
Como ora lhes digo,
Nos dias antigos do bom rei Athelstane.

AGRADECIMENTOS

Minha nota de agradecimento vai para todos que se empenharam na minha formação, especialmente aos meus orientadores: à Profa. Dra. Silvia Lopes pela primeira experiência em pesquisa, ao Prof. Dr. Wagner Côrtes pela segunda experiência em pesquisa, ao Prof. Dr. Jaime Ripoll pelo desafio constante, apoio total e pela terceira experiência em pesquisa.

Na hora de escrever em linguagem *Latex*, contei com a bagagem de aprendizado que trouxe do LCPM, sobre a orientação da profa. Sílvia Lopes. Já no primeiro relatório ela exigiu que eu escrevesse em *Latex*, o que na época foi um parto. Hoje entendo que foi um ganho de tempo para o trabalho de escrever a dissertação. Tem que ver como ficou o relatório, hoje eu olho e fico com vergonha. A todo momento me lembrei do prof. Cleber Bisognin, atual docente da Ufrgs, e que muito me ajudou no LCPM, quando doutorando de Séries Temporais.

Da minha temporada sob a orientação do prof. Wagner fiquei com os conselhos de estar sempre preparado para tudo e principalmente o exemplo prático de levar a vida acadêmica com bom-humor e com equilíbrio. Eu juro que eu tentei me envolver com a Álgebra Não-Comutativa.

Também à Profa. Dra. Lisandra Sauer sou grata pelo acompanhamento da dissertação desde a etapa de preparação até a apresentação e pelas explicações detalhadas da sua tese de doutorado. Ao Prof. Dr. Leonardo Bonorino agradeço pelas aulas divertidas e bem explanadas de Equações Diferenciais Parciais mas principalmente pelo pronto-socorro em EDP na hora de escrever a dissertação.

À minha amiga empreendedora Magda, devo muito do jogo de cintura pra enfrentar as dificuldades que vão surgindo pelo caminho desde a graduação. Sempre me recomendava a fazer uma prece e a falar com fulano de tal, ou trabalhar e confiar numa capacidade que eu nem sabia que possuía. Reconheço finalmente a importância da colaboração dos colegas do grupo que ajudaram de uma ou outra forma na realização deste trabalho: a Miriam, a Patrícia e o Álvaro.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos com detalhes as provas de três teoremas e algumas de suas consequências sobre a questão da existência e unicidade de soluções para o Problema de Dirichlet para a Equação das Superfícies de Curvatura Média Constante H sobre domínios Ω limitados do plano não necessariamente convexos. As hipóteses relacionam a condição do círculo exterior de Ω, a norma C^2 do dado do bordo e H.

ABSTRACT

In this work we present with detail the proof of three theorems and some of its consequences on existence and uniqueness of solutions to the Dirichlet Problem for the Constant Mean Curvature H Surface Equation on a bounded not necessarily convex domain Ω of the plane. The hypothesis relates the exterior circle condition of Ω, the C^2 norm of boundary date and H.

Página

SUMÁRIO

1 Introdução

Este trabalho é uma dissertação sobre a tese de doutorado da profa. Lisandra Sauer, docente da UfPel e pós-graduada pela Ufrgs em 2009. Também foram incluídos alguns resultados da dissertação de mestrado dela aqui porque são fundamentos importantes e indispensáveis para a tese. Outro texto inserido e discutido na parte teórica é um comentário detalhado a respeito do método da continuidade em uma versão facilitada, que procura usar formas mais simples de teoremas importantes de [GT] e também linearizar o problema em questão, este que é quase-linear como veremos em seguida. O comentário é da autoria do prof. Jaime, sempre preocupado em simplificar a vida da gente. Não que ele dê moleza na hora de a gente escrever o próprio texto.

Outras fontes de pesquisa auxiliares foram a dissertação de mestrado da Miriam e a tese de doutorado do Ari, ambos ex-alunos do prof. Jaime. Das discussões com o prof. Leonardo incluí uma figura em folha de caderno pautada. Pode parecer um pouco tosco, mas o propósito de eu ter colocado esta figura assim sem ter passado a limpo numa folha em branco antes, é preservar na memória a mão-de-obra que deu escrever esta dissertação. Além disso, também é uma espécie de divulgação das figuras que o prof. Leonardo tão habilmente desenha.

É interessante observar que a opinião popular afirma que ser estudante de matemática é sinônimo de ser inteligente. Sempre ouço isto a todo momento. E quando ouço isto respondo que ser estudante de matemática é sinônimo de gostar de desafio. E provo isso dizendo que colegas inteligentes desistiram da matemática e passaram em concursos difíceis pra servidor público ou em vestibulares difíceis para outros cursos menos desafiadores. Outra prova ainda mais convincente é o que a minha ex-orientadora no método Kumon, afirmava sobre os estudantes de matemática. Não sei se me fiz entender, eu não fui aluna do Kumon, fui auxiliar da unidade Moinhos de Vento. A orientadora da unidade na época era a Fumiko, que é formada em Pedagogia e muitas vezes observou alunos esforçados se destacarem mais nos estudos de matemática do que alunos inteligentes. É bem verdade, é claro, que se estuda matemática por outros motivos que não os desafios somente. Se fosse só por desafio a gente ia escalar o Everest.

Quanto aos outros não sei, mas de mim digo que quando terminei de escrever a dissertação fiquei com uma sensação de fim de festa, mas também de alívio e de dever cumprido. Não é o fim, eu me acostumei a levar projetos paralelos para que eu sempre tenha alguma coisa em que me entreter.

A sequência que a dissertação seguirá, pode ser vista no sumário. Após a introdução temos, na segunda seção, uma revisão de Geometria Diferencial; na terceira, de Equações Diferenciais de Segunda Ordem Elípticas; na quarta, são apresentados o problema e os teoremas que procuram solucioná-lo; na quinta, é relembrado o nosso bem conhecido método da continuidade; na sexta, são desenvolvidas as demonstrações dos teoremas, com o máximo possível de explicações que um estudante de mestrado consegue acrescentar a uma tese de doutorado.

2 REVISÃO DE GEOMETRIA

2.1 Superfícies

Começamos por introduzir a noção de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.1.1 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x} : U \longrightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

(i) $\mathbf{x}$ *é diferenciável*[1]*;*

(ii) $\mathbf{x}$ *é um homeomorfismo;*

(iii) *(condição de regularidade) Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

A aplicação $\mathbf{x}$ é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de p. A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada uma vizinhança coordenada.

No que segue mostraremos que o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ é uma superfície regular chamada de 'superfície do tipo gráfico'.

Proposição 2.1.1 *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável então o gráfico de f, isto é, o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.*

Demonstração: Basta mostrar que a aplicação $\mathbf{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. A condição (i) é verificada sem problemas e condição (ii) também

[1] Diferenciável aqui significa infinitamente diferenciável.

não oferece dificuldade uma vez que $\partial(x,z)/\partial(u,v) \equiv 1$. Finalmente, cada ponto (x,y,z) do gráfico é a imagem por $\mathbf{x}$ de um único ponto $(x,y) \in U$. Consequentemente, $\mathbf{x}$ é bijetiva, e como $\mathbf{x^{-1}}$ é a restrição ao gráfico de f da projeção $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x,y,z) = (x,y)$, segue que $\mathbf{x^{-1}}$ é contínua. $\square$

Portanto, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, o gráfico de u - denotado $Graf(u)$ - é uma superfície regular do $\mathbb{R}^3$.

2.2 Curvatura Média

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e N um campo de vetores unitário normal a S. Dado $p \in S$ seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ uma parametrização local de S em torno de p e

$$N(p) = -\frac{u_x \times u_y}{|u_x \times u_y|}(u^{-1}(p)),$$

onde $\times$ é o produto vetorial.

Definindo $E = \langle u_x, u_x\rangle$, $F = \langle u_x, u_y\rangle$, $G = \langle u_y, u_y\rangle$, $e = \langle N, u_{xx}\rangle$, $f = \langle N, u_{xy}\rangle$, $g = \langle N, u_{yy}\rangle$, a expressão em coordenadas locais da curvatura média de S em p relativa ao vetor normal N e à parametrização u é dada por

$$H(p) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

onde E,F,G; e,f,g são originados pela primeira e segunda formas fundamentais respectivamente.

Entretanto este valor independe da parametrização de S em p e a prova de tal pode ser vista em [6].

Definição 2.2.1 *Dado $H \in \mathbb{R}$, dizemos que a superfície S tem curvatura média constante H com relação ao vetor normal $N(p)$ se, e somente se, $H(p) \equiv H$, para todo $p \in S$.*

Proposição 2.2.1 *Sejam $H \in \mathbb{R}$ e $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$Graf(v)$ tem curvatura média constante H com relação a N satisfazendo $\langle N, e_3 \rangle \leq 0$, onde $e_3 = (0, 0, 1)$;*

(ii) $\left(1 + {v_x}^2\right) v_{yy} - 2v_x v_y v_{xy} + \left(1 + {v_y}^2\right) v_{xx} + 2H \left(1 + |\nabla v|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0$;

(iii) $\operatorname{div}\dfrac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} + 2H = 0.$

Demonstração: Tomando a parametrização $u(x, y) = (x, y, v(x, y))$ para $Graf(v)$ decorre que

$$N(p) = -\frac{u_x(p) \times u_y(p)}{|u_x(p) \times u_y(p)|}$$

satisfaz $\langle N, e_3 \rangle \leq 0$, de modo que $Graf(v)$ tem curvatura média constante H em relação à N se, se somente se,

$$2H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \tag{2.2.1}$$

Observe que

$$u_x = (1, 0, v_x), \quad u_y = (0, 1, v_y),$$

$$u_x \times u_y = (-v_x, -v_y, 1), \quad |u_x \times u_y|^2 = 1 + |\nabla v|^2,$$

$$E = 1 + {v_x}^2, \quad F = v_x v_y, \quad G = 1 + {v_y}^2,$$

$$N(x, y) = -\left(-\frac{v_x}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}, -\frac{v_y}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}\right),$$

$$e = -\frac{v_{xx}}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}, \quad f = -\frac{v_{xy}}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}, \quad g = -\frac{v_y y}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}}.$$

Substituindo os valores acima em (2.2.1) temos que

$$2H = \frac{-\left(1 + {v_x}^2\right) v_{yy} + 2v_x v_y v_{xy} - \left(1 + {v_y}^2\right) v_{xx}}{\left(1 + |\nabla v|^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left(1 + {v_x}^2\right) v_{yy} - 2v_x v_y v_{xy} + \left(1 + {v_y}^2\right) v_{xx} + 2H \left(1 + |\nabla v|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

o que mostra a equivalência entre (i) e (ii).

Para mostrar a equivalência entre (ii) e (iii) note que $\nabla v = (v_x, v_y)$ implica $|\nabla v| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$. Assim,

$$\operatorname{div}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1+{v_x}^2+{v_y}^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1+{v_x}^2+{v_y}^2}}\right) + 2H = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{v_x}{\sqrt{1+{v_x}^2+{v_y}^2}}\right)_x + \left(\frac{v_y}{\sqrt{1+{v_x}^2+{v_y}^2}}\right)_y + 2H = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\left(1+{v_x}^2\right) v_{yy} - 2v_x v_y v_{xy} + \left(1+{v_y}^2\right) v_{xx} + 2H\left(1+|\nabla v|^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+{v_x}^2+{v_y}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left(1+{v_x}^2\right) v_{yy} - 2v_x v_y v_{xy} + \left(1+{v_y}^2\right) v_{xx} + 2H\left(1+|\nabla v|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

□

3 ESTUDO DOS OPERADORES

3.1 O Espaço de Hölder

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Dizemos que u se estende continuamente a $\overline{\Omega}$ se dado $p \in \partial\Omega$ para quaisquer sequências $(p_n) \subset \Omega$ e $(q_n) \subset \Omega$ satisfazendo $p_n \to p$ e $q_n \to p$ existem os limites $\lim_{n\to\infty} u(p_n)$, $\lim_{n\to\infty} u(q_n)$ e, $\lim_{n\to\infty} u(p_n) = \lim_{n\to\infty} u(q_n)$.

Denotamos $C^k(\overline{\Omega})$ como o espaço das aplicações $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são diferenciáveis até a ordem k em Ω e tais derivadas se extendem continuamente a $\overline{\Omega}$.

Definição 3.1.1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-necessariamente limitado e u definida em D. Dizemos que u é uniformemente Hölder contínua com expoente $0 < \alpha \leq 1$ em D se a quantidade*

$$[u]_{\alpha,D} := \sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

é finita; e localmente Hölder contínua com expoente α em D se u é uniformemente Hölder contínua com expoente α em subconjuntos compactos de D. Se D é compacto, estes dois conceitos coincidem.

A continuidade local do tipo Hölder tem uma propriedade importante de que se u é Hölder contínua com expoente α em D então u também é Hölder contínua com expoente β em D para todo $\beta \leq \alpha$. Veja a justificativa:

$$\begin{aligned} \frac{|u(x)-u(y)|}{|y-x|^\beta} &= |y-x|^{\alpha-\beta}\frac{|u(x)-u(y)|}{|y-x|^\alpha} \\ &\leq (diam\, K)^{\alpha-\beta} \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|y-x|^\alpha} \end{aligned}$$

para qualquer compacto $K \subseteq D$.

Observe que, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, se $u \in C^0(\overline{\Omega})$ é uniformemente Hölder contínua com expoente α em Ω então também o é em $\overline{\Omega}$ e, portanto, é localmente Hölder contínua com expoente α em $\overline{\Omega}$ visto que $\overline{\Omega}$ é compacto. Pela propriedade anterior, u é localmente Hölder contínua com expoente β em $\overline{\Omega}$ para todo $\beta \leq \alpha$. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, segue que u é uniformemente Hölder contínua com expoente β em $\overline{\Omega}$ para todo $\beta \leq \alpha$. Logo, por definição, u é localmente Hölder contínua com expoente β em Ω para todo $\beta \leq \alpha$.

A continuidade do tipo Hölder mostra-se uma medida quantitativa de continuidade que é especialmente adequada ao estudo de equações diferenciais parciais. Este fato sugere uma extensão natural dos bem-conhecidos espaços de funções continuamente diferenciáveis.

Definição 3.1.2 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e k um inteiro não-negativo. O espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ $\left(C^{k,\alpha}(\Omega)\right)$ é definido como o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ $\left(C^k(\Omega)\right)$ consistindo das funções cujas derivadas parciais de ordem k são uniformemente (localmente) Hölder contínuas com expoente α em Ω.*

Para simplificar usaremos a notação

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^{\alpha}(\overline{\Omega}), \qquad C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{\alpha}(\Omega).$$

Também, pondo

$$C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^{k}(\overline{\Omega}), \qquad C^{k,0}(\Omega) = C^{k}(\Omega)$$

podemos incluir estes espaços entre os espaços $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $C^{k,\alpha}(\Omega)$ respectivamente.

Com as semi-normas

$$[u]_{k,0,\Omega} = \sup_{|\beta|=k} \sup_{\overline{\Omega}} \left| D^{\beta} u \right| \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$[u]_{k,\alpha,\Omega} = \sup_{|\beta|=k} \left[D^{\beta} u \right]_{\alpha,\Omega} = \left[D^{k} u \right]_{\alpha,\Omega}$$

podemos definir as seguintes normas

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{j=0}^{k} [u]_{j,0,\Omega} \tag{3.1.1}$$

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + [u]_{k,\alpha,\Omega}. \tag{3.1.2}$$

Os espaços $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ munidos da norma (3.1.2) são completos, ou seja, de Banach, e são chamados Espaços de Hölder.

Suavidade na fronteira do tipo $C^{2,\alpha}$, conforme a definição que segue, será recorrente em nosso trabalho. [2]

Definição 3.1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Dizemos que Ω e sua fronteira $\partial\Omega$ são de classe $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, se em cada $p \in \partial\Omega$ existem uma bola B de raio δ e centro p, D um aberto contido em $\mathbb{R}^2$ e uma aplicação bijetiva $\psi : B \longrightarrow D$ tal que:*
i) $\psi(\Omega \cap B) \subset \mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$;
ii) $\psi(\partial\Omega \cap B) \subset \partial\mathbb{R}^2_+$;
iii) $\psi \in C^{2,\alpha}(B)$;
iv) $\psi^{-1} \in C^{2,\alpha}(D)$.

Segue da definição acima que um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ é também de classe $C^{j,\beta}$ desde que $j + \beta < 2 + \alpha$, $0 < \alpha, \beta < 1$.

3.2 Operadores Elípticos Lineares

No que segue faremos uso da seguinte notação:

$$D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},\ D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ \triangle = \sum_{i=1}^{n} D_{ii},\ \nabla = \sum_{k=1}^{n} D_k\, e_k,\ \mathrm{div} = \sum_{k=1}^{n} D_k$$

onde e_k são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado. Um operador diferencial linear elíptico de segunda ordem*

$$L : C^2(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

[2]Esta definição se encontra em [3] seção 6.2.

é um operador diferencial da forma

$$L(u)(x) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, D_i u(x) + c(x)u(x), \tag{3.2.3}$$

$$a_{ij}, b_i, c \in C^0(\overline{\Omega}),$$

onde $(a_{ij}(x)) = (a_{ji}(x))$ *tem auto-valores positivos* $\Lambda(x) \geq \lambda(x) \geq 0$. *A elipticidade destas equações é expressada pelo fato de que a matriz dos coeficientes* $A = (a_{ij})$ *é, em cada caso, positiva definida, ou seja,* $\langle A\xi, \xi\rangle > 0, \quad \forall \xi \neq 0.$

Isto implica que

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

para todo $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. *De fato, como A é contínua no conjunto compacto* S^{n-1}, *a casca esférica de raio 1, temos*

$$\bar{\lambda} = \min_{|\xi|=1} \langle A\xi, \xi\rangle = \min_{\xi \in S^{n-1}} \langle A\xi, \xi\rangle = \langle A\xi_0, \xi_0\rangle > 0.$$

Pelos mesmos motivos temos

$$\bar{\Lambda} = \max_{|\xi|=1} \langle A\xi, \xi\rangle = \max_{\xi \in S^{n-1}} \langle A\xi, \xi\rangle = \left\langle A\xi^0, \xi^0\right\rangle > 0.$$

Agora, observe que, como A é simétrica, existe uma base ortonormal de autovalores de A, portanto A pode ser diagonalizada. Logo $\bar{\lambda} = \lambda$ *e* $\bar{\Lambda} = \Lambda$.

Denotamos

$$\lambda_{\min} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \lambda, \quad \Lambda_{\max} = \max_{x \in \overline{\Omega}} \Lambda.$$

Se existir alguma constante $\delta > 0$ tal que $\delta < \lambda_{\min}$ então L é dito estritamente elíptico. Além disso, se existir Δ tal que $\Lambda_{\max} < \Delta$ então L é dito fortemente elíptico. E, se $\dfrac{\Lambda}{\lambda}$ é limitado em Ω dizemos que L é uniformemente elíptico.

Uma propriedade fundamental no estudo dos operadores elípticos lineares é o Princípio Fraco do Máximo [3].

[3]É o teorema 3.1 de [3].

Teorema 3.2.1 *Seja L um operador linear elíptico no domínio limitado Ω. Suponha que $c = 0$ em Ω. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

a) *Se $L(u) \geq 0$ então $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$,*

b) *Se $L(u) \leq 0$ então $\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$.*

Vamos supor mais geralmente que $c \leq 0$ em Ω. Sejam $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$. Com estas definições apresentamos uma consequência deste teorema.

Corolário 3.2.1 *Seja L um operador linear elíptico no domínio limitado Ω. Suponha que $c = 0$ em Ω. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

a) *Se $L(u) \geq 0$ então $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$,*

b) *Se $L(u) \leq 0$ então $\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-$,*

c) *Se $L(u) = 0$ então $\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$.*

Outra consequência do Princípio Fraco do Máximo, que será importante para o estudo em questão, é uma estimativa[4] simples da norma C^0 para soluções da equação não-homogênea $L(u) = f$, com $c \leq 0$ em domínios limitados.

Teorema 3.2.2 *Se $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfazem a equação $L(u) = f$ então existe $C = C(\mathrm{diam}\Omega, 1/\lambda_{min} \sup |b_i|)$ tal que*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} \frac{|f|_0}{\lambda_{min}}.$$

Dado um operador linear elíptico L obtemos as seguintes estimativas[5] globais para soluções da equação não homogênea $L(v) = f$ definidas em domínios $C^{2,\alpha}$, com dados no bordo $C^{2,\alpha}$:

Teorema 3.2.3 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{2,\alpha}$ e seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução de $L(v) = f$, onde L é estritamente elíptico, $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e os coeficientes de L satisfazem, para alguma constante positiva M*

$$|a_{ij}|_{0,\alpha}, |b_i|_{0,\alpha}, |c|_{0,\alpha} \leq M.$$

[4] É o teorema 3.7 de [3].

[5] Este é o teorema 6.6 de [3].

Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *e suponha que* $u = \varphi$ *em* $\partial\Omega$*. Então existe*

$$C = C(n, \alpha, \lambda_{min}, \Omega, M, |\varphi|_{2,\alpha,\Omega})$$

tal que

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq (|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}).$$

O próximo teorema[6] é bastante útil, serve para provar a Hölder continuidade.

Teorema 3.2.4 *Seja* Ω *um domínio* $C^{k+2,\alpha}$ *e seja* $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$*. Suponha que* u *é uma função* $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *satisfazendo* $L(u) = f$ *em* Ω*,* $u = \varphi$ *em* $\partial\Omega$*, onde* f *e os coeficientes do operador estritamente elíptico linear* L *pertencem a* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$*. Então* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$*.*

Outro resultado bastante útil é o teorema[7] que prova a sobrejetividade de um operador estritamente elíptico om coeficientes em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$.

Teorema 3.2.5 *Seja* L *um operador estritamente elíptico em um domínio limitado* Ω*, com coeficientes em* $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $c \leq 0$*. Seja* $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$*. Suponha que* Ω *é um domínio* $C^{2,\alpha}$ *e que* $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$*. Então o problema de Dirichlet*

$$L(u) = f \text{ em } \Omega, \quad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega,$$

tem uma única solução e esta pertence a $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$*.*

O teorema[8] a seguir permite obter o que chamamos de estimativas de Hölder para o gradiente.

Teorema 3.2.6 *Seja* Ω *um domínio* $C^{2,\alpha}$*. Seja* $L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *um operador linear elíptico. Sejam* $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$*,* $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ *e* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *uma solução de* $L(u) = f$ *satisfazendo* $u = \varphi$ *em* $\partial\Omega$*. Então existem*

$$\beta = \beta\left(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \Omega, |\varphi|_2, |f/\lambda_{\min}|_0\right) \text{ e } C = C\left(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \Omega, |\varphi|_2, |f/\lambda_{\min}|_0\right)$$

tais que

$$|u|_{1,\beta} \leq C.$$

[6] É o Teorema 6.19 de [3].
[7] É o teorema 6.14 de [3].
[8] É um caso particular do Teorema 13.7 de [3].

Concluímos esta subseção com as *desigualdades*[9] *de interpolação global* em domínios suaves.

Lema 3.2.1 *Suponha que* $j + \beta < k + \alpha$, *onde* $j = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, *e* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. *Seja* Ω *um domínio* $C^{k,\alpha}$ *em* $\mathbb{R}^n$, *e assuma que* $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Então para* $\varepsilon > 0$ *e alguma constante* $C = C(\varepsilon, j, k, \Omega)$ *nós temos*

$$|u|_{j,\beta} \leq C|u|_0 + \varepsilon |u|_{k,\alpha}.$$

3.3 Operadores Elípticos Quase-Lineares

Mais adiante nesta seção veremos que um operador quase-linear pode ser linearizado, ou seja, colocado em forma linear. Dessa forma podemos aplicar os resultados da teoria linear para um operador não-linear.

Definição 3.3.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio limitado. Um operador diferencial quase-linear elíptico de segunda ordem*

$$Q : C^2(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

é um operador diferencial da forma

$$\begin{aligned} Q(u)(x) &= \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, u, \nabla u)\, D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{2} b_i(x, u, \nabla u)\, D_i u(x) \\ &+ c(x, u, \nabla u)u(x), \quad a_{ij}, b_i, c \in C^0(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u)\, D_{ij}u(x) + b(x, u, \nabla u),$$

onde a matriz de coeficientes $(a_{ij}(x, z, p)) = (a_{ji}(x, z, p))$ *tem auto-valores positivos* $\Lambda(x, z, p) \geq \lambda(x, z, p) \geq 0$. *As funções* $a_{ij}(x, z, p), i, j = 1, 2, b(x, z, p)$ *estão definidas para todos os valores de* $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

[9] É o Lema 6.35 de [3].

Seja $\mathcal{U}$ um subconjunto de $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Dizemos que o operador Q é elíptico em $\mathcal{U}$ se a matriz dos coeficientes $(a_{ij}(x,z,p))$ é positiva para todo $(x,z,p)\in\mathcal{U}$. Portanto

$$0<\lambda(x,z,p)|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\leq\Lambda(x,z,p)|\xi|^2$$

para todo $(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ e para todo $(x,z,p)\in\mathcal{U}$.

Se, além disso, Λ/λ é limitado em $\mathcal{U}$ dizemos que Q é uniformemente elíptico em U. Se Q é elíptico (uniformemente elíptico) em todo o conjunto $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ então simplesmente diremos que Q é elíptico (uniformemente elíptico) em Ω. Se $u\in C^1(\Omega)$ e a matriz $(a_{ij}(x,u(x),\nabla u(x))$ é positiva para todo $x\in\Omega$, diremos que Q é elíptico com respeito a u.

Definição 3.3.2 *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ e $H\in\mathbb{R}$. Definimos o operador curvatura média constante Q_H como a aplicação*

$$Q_H: C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\longrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega})$$

tal que

$$Q_H(u)=\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+2H.$$

Podemos reescrever o operador Q_H numa forma não-divergente usando a propriedade $\operatorname{div}(fG)=(\nabla f)\,G+f\operatorname{div}G$ com $f=\dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$, $G=\nabla u$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\nabla u\Big)+2H\iff\\
&\nabla\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\nabla u+\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\operatorname{div}(\nabla u)+2H\iff\\
&\frac{-1}{2\Big(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\Big)^3}\,2|\nabla u|\,\nabla(|\nabla u|)\,\nabla u+\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\triangle u+2H\iff\\
&\frac{-1}{\Big(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\Big)^3}\,|\nabla u|\,\frac{1}{2|\nabla u|}\,2\Big(D^2u\,\nabla u\Big)^{\perp}\,\nabla u+\frac{\triangle u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}+2H\iff\\
&\frac{\triangle u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}-\frac{1}{\Big(\sqrt{1+|\nabla u|^2}\Big)^3}\,\underbrace{\Big\langle D^2u\,\nabla u,\nabla u\Big\rangle}_{\Delta}+2H.
\end{aligned}$$

Lembramos que na Proposição 2.2.1 já provamos uma propriedade importante do operador Q_H: Se u é uma solução de $Q_H(v) = 0$ então o gráfico de u em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície de curvatura média constante H com respeito à direção normal ao longo do semi-eixo negativo x_3. E a recíproca dessa afirmação também é verdadeira, i.e., se o gráfico de u tem curvatura média constante H então $Q_H(u) = 0$. No que segue veremos uma consequência desta proposição.

Proposição 3.3.1 *Q_H é um operador elíptico quase-linear.*

Demonstração: Como consequência da demonstração da Proposição 2.2.1 temos que Q_H é equivalente a

$$\frac{\left(1+{u_y}^2\right)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}u_{xx} - \frac{2u_x u_y}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}u_{xy} + \frac{\left(1+{u_x}^2\right)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}u_{yy} + 2H = 0,$$

cuja matriz

$$[a_{ij}] = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\left(1+{u_y}^2\right)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{2u_x u_y}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{2u_x u_y}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{\left(1+{u_x}^2\right)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array}\right]$$

tem autovalores

$$\lambda = \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \Lambda = \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

os quais são ambos positivos. □

O teorema[10] a seguir é fundamental para o que vamos provar.

Teorema 3.3.1 ***Princípio da Comparação:*** *Sejam $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazendo $Qu \geq Qv$ em Ω, $u \leq v$ sobre $\partial\Omega$, onde*

i)o operador Q é localmente uniformemente elíptico com respeito a u ou v;

ii) os coeficientes a_{ij} são independentes de z;

iii) o coeficiente b é não-crescente em z para cada $(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$;

[10] É o Teorema 10.1 de [3].

iv) os coeficientes a_{ij}, b são continuamente diferenciáveis com respeito às variáveis p em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Então segue que $u \leq v$ em Ω. Além disso, se $Qu > Qv$ em Ω, $u \leq v$ sobre $\partial\Omega$ e as condições i),ii), e iii) valem (mas não necessariamente iv)), temos a desigualdade estrita $u < v$ em Ω.

Demonstração: A idéia é aplicar o Princípio Fraco do Máximo, Teorema 3.2.1, provando que a diferença $w := u - v$ satisfaz uma EDP linear elíptica com $c = 0$. Pela hipótese $ii)$ $a_{ij}(x, u, Du) = a_{ij}(x, Du)$. Aplicando a hipótese $i)$ vamos assumir que Q é elíptico com respeito a u. Então nós temos

$$\begin{aligned} Q(u) - Q(v) &= \sum_{i,j=1}^{2} \Big[a_{ij}(x, Du)D_{ij}(u - v) + (a_{ij}(x, Du) - a_{ij}(x, Dv))\, D_{ij}v\Big] \\ &+ \; b(x, u, Du) - b(x, u, Dv) + b(x, u, Dv) - b(x, v, Dv) \geq 0. \end{aligned}$$

Pela hipótese $iv)$ e pelo Teorema do Valor Médio podemos garantir a existência de funções localmente limitadas b_i tais que

$$\Big[a_{ij}(x, Du) - a_{ij}(x, Dv)\Big]D_{ij}v + b(x, u, Du) - b(x, uDv) := b_i(x)D_i w.$$

Escrevendo

$$\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid w(x) > 0\}$$

$$a_{ij}(x) := a_{ij}(x, Du)$$

vemos que

$$L(w) := \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)D_{ij}w + b_i D_i w \geq 0$$

em Ω^+ visto que, pela hipótese $iii)$, temos $b(x, u, Dv) \leq b(x, v, Dv)$. Além disso, $w \leq 0$ em $\partial\Omega$. Segue do Corolário 3.2.1 $a)$ que $w \leq 0$ em Ω. Se $Q(u) > Q(v)$ em Ω, a função w não pode assumir um máximo não-negativo em Ω. Logo $w < 0$ em Ω. Se Q é elíptico com respeito a v o resultado segue do Corolário 3.2.1 $b)$. □

É fácil ver que o operador Q_H satisfaz as hipóteses do Princípio da Comparação.

Antes de mais nada precisamos de outra definição. Em geometria espacial, uma calota esférica é uma porção de uma esfera cortada por um plano. Se o plano passa através do centro da esfera, de modo que a altura da calota é igual ao raio da esfera, a calota esférica é chamada um hemisfério. A figura abaixo mostra uma calota esférica de altura h e raio a cortada de uma esfera de raio R. Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$(R-h)^2 + a^2 = R^2 \Longrightarrow (R-h)^2 = R^2 - a^2.$$

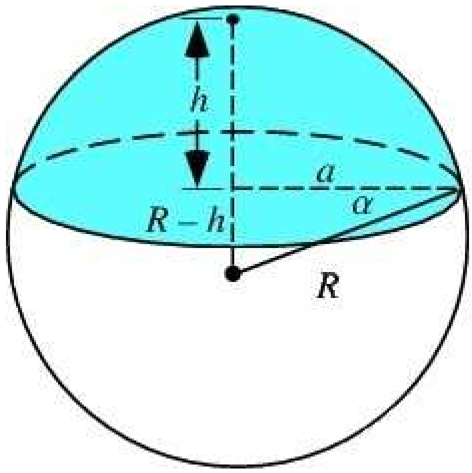

Figura 3.3.1: Calota Esférica

Como $R = \dfrac{1}{H}$ para a esfera, a igualdade acima pode ser reescrita assim:

$$\left(\frac{1}{H^2} - h\right)^2 = \frac{1}{H^2} - a^2.$$

Uma consequência deste teorema é a Estimativa de Altura para o operador Q_H em domínios limitados:

Corolário 3.3.1 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ domínio limitado contido num disco D de raio R e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tal que $Q_H(u) = 0$ em Ω. Se $H = 0$ então*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|. \tag{3.3.4}$$

Se $0 < H \leq 1/R$ então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{1}{H}. \tag{3.3.5}$$

Demonstração: Suponhamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ seja solução de $Q_0(v) = 0$ em Ω. Começamos por transformar o problema não-linear $Q_0(u) = 0$ em um linear, a fim de usar o Teorema 3.2.2. Pela Proposição 2.2.1 podemos escrever Q_H em coordenadas (x, y) como

$$Q_H(u) = \frac{\left(1 + {u_x}^2\right)}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{yy} - \frac{2u_x u_y}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{xy} + \frac{\left(1 + {u_y}^2\right)}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{xx} + 2H.$$

Com estas hipóteses, definimos

$$f_H = -2H \left(1 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

e

$$\begin{aligned} L_H : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad &\to \quad C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \\ v \quad &\longmapsto \quad \left(1 + u_y^2\right) v_{xx} - 2u_x u_y v_{xy} + \left(1 + u_x^2\right) v_{yy}. \end{aligned}$$

Para mostrar (3.3.4) basta aplicar o Teorema 3.2.2 à equação linearizada $L_0(u) = 0$.

Agora vamos mostrar (3.3.5). Por hipótese sabemos que existe uma calota esférica no semi-espaço $x_3 \geq 0$ com curvatura média H e bordo ∂D. Seja (a, b) o centro de D. Esta calota esférica é o gráfico da função

$$v_1(x_1,x_2) \ := \ \sqrt{\frac{1}{H^2}-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}-\sqrt{\frac{1}{H^2}-R^2}$$

$$(x_1-a)^2+(x_2-b)^2 \leq R^2,$$

que é uma solução para Q_H em Ω. De fato, pois v_1 é uma superfície de curvatura média constante H. Seja $v := v_1|_{\overline{\Omega}}$. Note que $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ pois

$$D_i v \frac{x_i}{\sqrt{\frac{1}{H^2}-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}} \qquad i=1,2,$$

$$D_{12}v = -\frac{x_i x_j}{\left(\sqrt{\frac{1}{H^2}-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}\right)^3},$$

$$D_{ii}v = -\frac{x_i^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{H^2}-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}\right)^3}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{H^2}-(x_1-a)^2-(x_2-b)^2}} \qquad i=1,2.$$

Sejam M e N respectivamente o supremo e o ínfimo de u em $\partial\Omega$. Portanto $Q_H(v+M) = Q_H(v) = 0$ e $Q_H(v+N) = Q_H(v) = 0$ em Ω. Como $v \geq 0$ temos $v+M \geq M$ em $\overline{\Omega}$ que implica $v+M \geq u$ em $\partial\Omega$. Por outro lado, temos $v - \sup_{\overline{\Omega}} v + N \leq N$ em $\overline{\Omega}$ que implica $v - \sup_{\overline{\Omega}} v + N \leq u$ em $\partial\Omega$. Além disso, $Q_H(u) = 0$ em Ω por hipótese.

Resumindo

$$\left.\begin{array}{ll} Q_H(u)=0 & \text{em } \Omega \\ Q_H(v+M)=0 & \text{em } \Omega \\ v+M \geq u & \text{em } \partial\Omega \end{array}\right\} (1)$$

$\Longrightarrow v+M \geq u$ em $\partial\Omega$, $\quad Q_H(u) = 0 = Q_H(v+M)$ em Ω; e, também

$$\left.\begin{array}{ll} Q_H(u)=0 & \text{em } \Omega \\ Q_H(v+N)=0 & \text{em } \Omega \\ v-\sup_{\overline{\Omega}} v+N \leq u & \text{em } \partial\Omega \end{array}\right\} (2)$$

$\Longrightarrow v - \sup_{\overline{\Omega}} v + N \leq u$ em $\partial\Omega$, $\quad Q_H(u) = 0 = Q_H(v+N)$ em Ω.

Concluímos de (1) pelo Teorema 3.3.1, o Princípio da Comparação, que

$$v + M \geq u \text{ em } \Omega \quad \Longrightarrow$$

$$\sup_{\Omega}(v + M) \geq \sup_{\Omega} u \quad \Longrightarrow$$

$$\sup_{D \supseteq \Omega}(v + M) \geq \sup_{\Omega}(v + M) \geq \sup_{\Omega} u \quad \Longrightarrow$$

$$\sup_{\Omega} u \leq M + \sup_{D} v \quad \Longrightarrow$$

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + \frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R^2};$$

e concluímos de (2) que

$$v - \sup_{\overline{\Omega}} v + N \leq u \text{ em } \Omega \quad \Longrightarrow$$

$$\inf_{\Omega}(v - \inf_{\overline{\Omega}} v + N) \leq \inf_{\Omega} u \quad \Longrightarrow$$

$$\inf_{D \supseteq \Omega}(v - \sup_{\overline{\Omega}} v + N) \leq \inf_{\Omega}(v - \sup_{\overline{\Omega}} v + N) \leq \inf_{\Omega} u \quad \Longrightarrow$$

$$\inf_{\Omega} u \geq N + \inf_{D}(v - \sup_{\overline{\Omega}} v) \quad \Longrightarrow$$

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u + \inf_{D} v - \sup_{\overline{\Omega}} v = \inf_{\partial\Omega} u - \frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{H^2} - R^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\sup_{\Omega}(-u) \leq \sup_{\partial\Omega}(-u) + \frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R^2}.$$

Logo

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R^2}. \tag{3.3.6}$$

Para finalizar observe que

$$\frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R^2} \leq \frac{1}{H}.$$

□

A consequência a seguir também tem sua importância no estudo de operadores quase-lineares. É comumente chamada de Princípio do Máximo para a Diferença.

Corolário 3.3.2 *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tais que $Q_H(u) = 0 = Q_H(v)$ em Ω. Então*

$$\sup_{\Omega} |u - v| = \sup_{\partial\Omega} |u - v|.$$

Um teorema de unicidade para o Problema de Dirichlet associado ao operador Q_H segue imediatamente do Princípio do Máximo para a Diferença.

Teorema 3.3.2 *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, tais que $Q_H(u) = 0 = Q_H(v)$ em Ω, $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u \equiv v$ em Ω.*

Um resultado fundamental no estudo do operador Q_H é o Princípio do Máximo para o Gradiente.[11]

Teorema 3.3.3 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ uma solução de $Q_H(v) = 0$. Então*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

[11] É um caso particular do Teorema 15.1 de [3].

4 APRESENTAÇÃO

4.1 Apresentação do Problema

O problema de Dirichlet no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ para a equação das superfícies de curvatura média constante (CMC) $H \geq 0$ e dados de contorno suaves consiste na determinação da existência e unicidade de soluções para o sistema

$$(1.0.1) \quad \begin{cases} Q_H[u] := \operatorname{div} \dfrac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + 2H = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um domínio $C^{2,\alpha}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ e $0 < \alpha < 1$.

Suavidade na fronteira é uma das condições para obtermos estimativas *a priori* no bordo de um domínio, da solução do problema de Dirichlet associado a um certo operador elíptico linear ou quase-linear. A outra condição é a suavidade dos dados de contorno da solução do problema. Portanto tais hipóteses sobre os dados no bordo e o bordo em si mesmo são necessárias para a obtenção de estimativas *a priori* no bordo da solução de (1.0.1).

O Problema de Dirichlet para a Equação das Superfícies de CMC em domínios limitados vem sendo estudado ao longo de décadas. No caso mínimo, ie, $H = 0$, convém lembrar o trabalho de R. Finn [4], que, em 1954, mostrou ser a convexidade do domínio, uma condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema (1.0.1) independente do dado no bordo. No caso $H > 0$ a convexidade não implica na existência de solução para o problema (1.0.1) nem na situação mais simples $\varphi = 0$. Felizmente, J. Serrin [8] obteve, em 1968, uma condição, para a solução do problema para um domínio convexo independente do dado no bordo, envolvendo a curvatura do bordo de Ω, o valor numérico de H e a dimensão do espaço - no caso do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ a condição é que a curvatura k do bordo seja maior ou igual a $2H$. Mais precisamente apresentamos o Teorema de Serrin:

Teorema 4.1.1 *Seja $H \geq 0$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio suave, limitado, cujo bordo* *tem curvatura k em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo $k \geq 2H$. Seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ Então o problema*

$$\begin{cases} Q_H(u) = 0, & u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ u|\partial\Omega = \varphi, \end{cases}$$

tem solução única.

Contudo, é bastante conhecido que em muitos casos existe solução para o problema (1.0.1) mesmo que a condição de Serrin não seja satisfeita, inclusive em domínios não-convexos. Exemplos explícitos podem ser construídos. Veja J. Ripoll [2] para isto. Por exemplo, se $k \geq H$ então existe solução para $\varphi = 0$.

Se a condição de Serrin sobre os domínios não é requerida é necessário ter algumas suposições extra sobre o problema (1.0.1) para garantir sua solubilidade e é natural buscar por condições relacionando o domínio, os dados de contorno e a curvatura média. Diversos trabalhos tem considerado situações como esta ou similares tanto no caso de domínio limitado como no caso ilimitado. A despeito disto, um resultado mais geral de existência de soluções para o problema (1.0.1) está ainda por vir. Observamos que todos os artigos publicados até hoje ou consideram o caso de domínio não-convexo com dado de contorno nulo ou dados de contorno mais gerais porém no caso de domínio convexo.

Os resultados acima incluem-se em um mais recente assunto de pesquisa promissor: existência e unicidade e outras questões relacionadas ao problema de Dirichlet para a equação das mínimas e das superfícies de curvatura média constante em espaços produto da forma $M \times \mathbb{R}$ onde M é uma variedade riemanniana. Neste trabalho estamos considerando $M = \mathbb{R}^2$.

Neste trabalho obtemos quatro resultados gerais na solubilidade de (1.0.1) a partir de condições envolvendo a norma C^2 do dado do bordo, a curvatura média H e o raio exterior r do domínio Ω.

4.2 APRESENTAÇÃO DOS TEOREMAS

4.2.1 Primeiro Teorema

Algumas definições são necessárias antes de apresentar o teorema.

Lembramos que Ω satisfaz a condição de círculo exterior com raio r se, dado $p \in \partial\Omega$ existe um círculo $C_r(p)$ de raio r tal que $p \in \partial C_r(p)$ e $C_r(p)$ está contido em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$.

Será sempre suposto nas hipóteses a seguir que Ω é um domínio $C^{2,\alpha}$ satisfazendo a condição de círculo exterior com raio r.

Dada $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ podemos estendê-la para uma função $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Nestas hipóteses definimos

$$
\begin{aligned}
M &= \sup_{x\in\partial\Omega} \varphi(x) - \inf_{x\in\partial\Omega} \varphi(x), \\
A_1 &= \sup_{x\in\Omega} |D\varphi(x)|, \quad A_2 = \sup_{x\in\Omega} |D^2\varphi(x)|, \\
C &= \max\{A_1, A_2\} \ \text{ onde } \ |D^2\varphi(x)| = |D_{11}\varphi| + |D_{12}\varphi| + |D_{22}\varphi|
\end{aligned}
$$

Teorema 4.2.1 *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$. Assuma que r satisfaz a hipótese*

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{6M(3C^3+3C^2+4C+1)} - 1\right), 1\right\}. \tag{4.2.1}$$

Então existe uma solução limitada para (1.0.1) *com $H = 0$ e é única.*

É notável o fato de que não existe unicidade sem a suposição de limitação com relação ao domínio Ω. Um contra-exemplo trivial é dado por dois semi-planos com uma linha reta em comum como fronteira (Figura [**?**]).

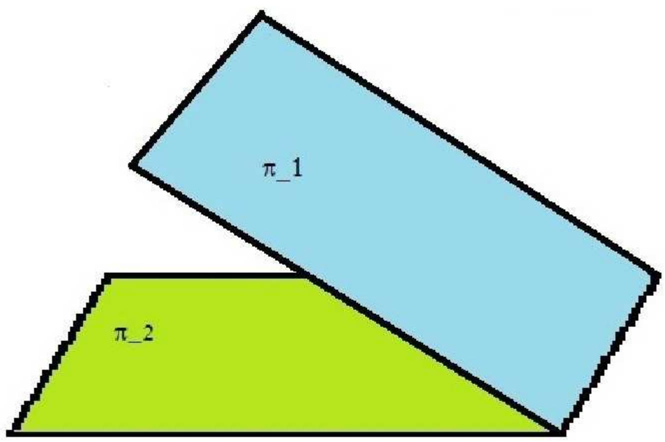

Figura 4.2.2: Semi-planos

Observamos que é possível incluir o caso $0 < r < 1$. Podemos dilatar o domínio Ω por um fator $1/r$ logo o raio r do novo círculo exterior satisfaz a condição $r \geq 1$ (Figura [**?**]). Se o novo r também satisfizer a condição $r \geq 2\left(e^{6M(3C^3+3C^2+4C+1)} - 1\right)$ então vale (4.2.1) e, portanto, o Teorema 4.2.1.

Observe que o Teorema 4.2.1 recupera o resultado clássico de R. Finn [4] visto que a condição (4.2.1) é completamente satisfeita se Ω é convexo. De fato, podemos tomar um círculo com raio $r = \infty$ neste caso, ou seja, uma reta tangente. Isto prova o seguinte corolário:

Corolário 4.2.1 *Se Ω é um domínio limitado convexo em $\mathbb{R}^2$ então o problema* (1.0.1) *com $H = 0$ possui uma única solução limitada, para cada $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$.*

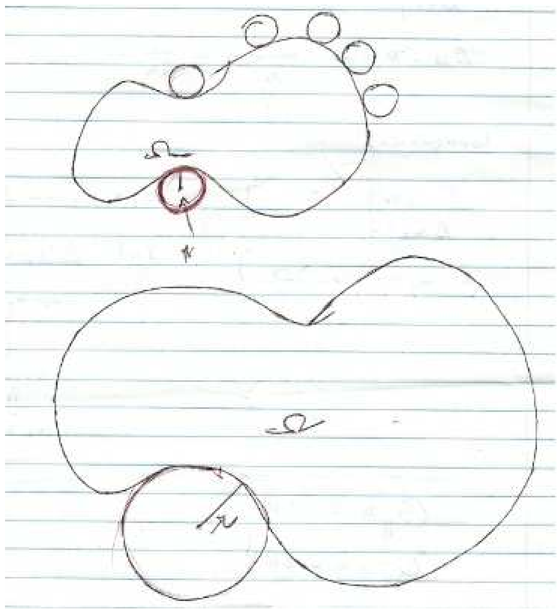

Figura 4.2.3: Efeito da Dilatação de Ω sobre r

4.2.2 Segundo Teorema

Para os dois próximos resultados, usamos a notação:

$$\begin{aligned} \phi &:= 64(C^3 + C^2 + C + 1)H^3 + 16(8C^3 + 9C^2 + 10C + 7)H^2 + \\ &+ 12(7C^3 + 8C^2 + 10C + 5)H + 6(3C^3 + 3C^2 + 4C + 1) \end{aligned}$$

e, para $tH \leq 1$

$$h_{t,H} := \frac{t^2 H}{1 + \sqrt{1 - (tH)^2}}.$$

Teorema 4.2.2 *Seja $H \geq 0$ real e Ω um domínio contido em um disco de raio R. Assuma que M e C são finitas e que são válidas as hipóteses*

$$RH \leq 1; \tag{4.2.2}$$

$$He^{\phi(M + h_{R,H})} \leq 1; \tag{4.2.3}$$

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{\phi(M + h_{R,H})} - 1\right), 1\right\}. \tag{4.2.4}$$

Então existe uma única solução para o problema (1.0.1).

É notável o fato de que (4.2.2) e (4.2.3) são satisfeitas se $H = 0$. Também (4.2.4) reduz-se a (4.2.1) quando $H = 0$. Daí decorre que o Teorema 4.2.1 é um corolário do Teorema 4.2.2 quando $H = 0$.

Observamos, que neste caso, ou seja, quando $H > 0$ não é possível fazer uma dilatação do domínio, pois H diminuiria.

4.2.3 Terceiro Teorema

Definição 4.2.1 *Uma faixa de largura $d > 0$ é uma região planar conexa Λ limitada por duas linhas retas paralelas r e s separadas por uma distância d.*

Teorema 4.2.3 *Seja $H \geq 0$ um número real e seja Ω um domínio limitado de uma faixa Λ de largura $2d$. Assuma que são válidas as hipóteses*

$$2dH \leq 1;$$

$$He^{\phi(M+\frac{h_{d,H}}{2})} \leq 1;$$

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{\phi(M+h_{d,H})} - 1\right), 1\right\}.$$

Então o problema (1.0.1) *é solúvel e a solução é única.*

5 O Método da Continuidade

Para investigar a existência de soluções do problema de Dirichlet associado ao operador curvatura média constante usamos o Método da Continuidade, o qual tem a seguinte forma: Definimos

$$V = \{t \in [0,1] : \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}); Q_{tH}(u_t), u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}$$

e mostramos, que sob certas hipóteses envolvendo Ω e φ, o conjunto V coincide com [0,1] o que garante a solubilidade do problema (1.0.1). Como V é não-vazio pois $t = 0 \in V$, com $u_0 = 0$, basta mostrar que V é aberto e fechado em [0,1].

Antes de desenvolver o método é necessário fazer uma rápida revisão de espaços métricos, apenas algumas definições, e teoremas.

Definição 5.0.2 *Um conjunto E de funções $f : M \to N$ onde M, N são espaços métricos é dito equicontínuo se*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; d(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon, \; \forall y \in M, \;\; \forall f \in E.$$

Definição 5.0.3 *Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito relativamente compacto quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto.*

O Teorema de Ascoli-Arzelá é um dos resultados mais importantes da teoria de espaços métricos compactos.

Teorema 5.0.4 *Seja K compacto e seja E um conjunto de aplicações contínuas $f : K \to N$. A fim de que $E \subseteq C(K; N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*
i) E seja equicontínuo;
ii) Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x)$ seja relativamente compacto em N.

Antes de apresentar uma consequência muito útil deste teorema fazemos mais uma definiçãozinha.

Definição 5.0.4 *Um conjunto de aplicações $f : M \to N$ é dito pontualmente limitado quando para cada $x \in M$, o conjunto $E(x) \subseteq M$ for limitado. De maneira análoga definimos sequência pontualmente limitada.*

Corolário 5.0.2 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Então toda sequência equicontínua e pontualmente limitada de aplicações $f_n : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ possui uma subsequência que converge uniformemente em cada parte compacta de M.*

Deste corolário decorre um lema a ser utilizado na prova do fechamento de V e, posteriormente, na demonstração de um dos teoremas.

Lema 5.0.1 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Seja $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ uma sequência equicontínua e limitada. Então existe uma subsequência f_{n_k} de f_n e uma aplicação $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f_{n_k} \to f$ uniformemente em qualquer compacto $K \subseteq \Omega$.*

Demonstração: Seja $K \subseteq \Omega$ compacto. Por hipótese (f_n) é uma sequência limitada e equicontínua em K. Portanto, pelo corolário (5.0.2), existe uma subsequência f_{n_k} e uma função f_K tal que $f_{n_k} \longrightarrow f_k$ uniformemente em K.

Queremos, agora, mostrar que f não depende do compacto K. Seja

$$K_j = \left\{ x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j} \right\} \cap \overline{B_j(0)} = \bigcup_{y \in \partial\Omega} \left(B_{\frac{1}{j}}(y) \right)^C \cap \overline{B_j(0)}.$$

Logo K_j é fechado e limitado - portanto, compacto. Além disso,

- $K_j \subseteq K_{j+1}$
- $\bigcup_{j=1} K_j = \Omega$.

Para j=1, aplicamos o corolário para obter uma subsequência (f_n^1) da sequência (f_n) e uma função f_{K_1} tal que $f_n^1 \to f_{K_1}$ uniformemente em K_1.

Para j=2, reaplicamos o corolário para obter uma subsequência (f_n^2) da sequência (f_n^1) e uma função f_{K_2} tal que $f_n^2 \to f_{K_2}$ uniformemente em K_2.

Indutivamente, supondo que já tenha sido extraída uma subsequência (f_n^i), obtemos ainda, pelo corolário, uma subsequência (f_n^{i+1}) de (f_n^i) e uma função $f_{K_{i+1}}$ tal que $f_n^i \to f_{K_{i+1}}$ uniformemente em K_{i+1}.

Temos

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{f_n^{11}} & f_n^{12} & f_n^{13} & f_n^{14} & f_n^{15} & \cdots & \longrightarrow & f_{K_1} \\
f_n^{21} & \mathbf{f_n^{22}} & f_n^{23} & f_n^{24} & f_n^{25} & \cdots & \longrightarrow & f_{K_2} \\
f_n^{31} & f_n^{32} & \mathbf{f_n^{33}} & f_n^{34} & f_n^{35} & \cdots & \longrightarrow & f_{K_3} \\
f_n^{41} & f_n^{42} & f_n^{43} & \mathbf{f_n^{44}} & f_n^{45} & \cdots & \longrightarrow & f_{K_4} \\
f_n^{51} & f_n^{52} & f_n^{53} & f_n^{54} & \mathbf{f_n^{55}} & \cdots & \longrightarrow & f_{K_5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Agora, fazemos uso do processo de diagonalização, ou seja, tomamos a subsequência (g_i) de (f_n) dada por

$$g_i = f_n^{ii}.$$

Observe que g_i é um elemento de (f_n^i) para todo $n \geq i$. Logo, (g_i) é subsequência de (f_n^i) a partir do i-ésimo elemento. Portanto $g_i \longrightarrow f_{K_j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ pois se $x \in K_j \subseteq K_{j+1}$ então

$$f_{K_j}(x) \longleftarrow f_n^{j+1}(x) \longrightarrow f_{K_{j+1}}(x) \quad \Longrightarrow \quad f_{K_j}(x) = f_{K_{j+1}}(x).$$

Concluímos que $f_{K_{j+1}}|_{K_j} = f_{K_j}$. $\square$

Lema 5.0.2 *Dados $w, u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $p \in \partial\Omega$, então temos a seguinte estimativa, se $w(p) = u(p) = v(p)$ e $w \leq u \leq v$*

$$|\nabla u(p)| \leq \max\{|\nabla w(p)|, |\nabla v(p)|\}.$$

Demonstração: Seja $M^2 = M_0 = \max\{|\nabla w(p)|, |\nabla v(p)|\}$ e $\overrightarrow{\eta}$ o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ em p apontando para o interior de Ω. Seja $\overrightarrow{a}$ um vetor unitário tal que $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\eta} \rangle \geq 0$ e seja $\gamma : [0, l] \to \overline{\Omega}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0^+) = \overrightarrow{a}$. Pela definição de derivada em $\partial\Omega$, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta \leq l$ tal que para todo $t \in (0, \delta)$,

$$-M^2 - \varepsilon \leq \frac{w(\gamma(t)) - w(p)}{t} \leq \frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t} \leq \frac{v(\gamma(t)) - v(p)}{t} \leq M^2 + \varepsilon,$$

de modo que

$$\left|\frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t}\right| \leq M^2 + \varepsilon.$$

Fazendo t tender a zero obtemos

$$\langle \nabla u(p), \overrightarrow{a} \rangle = \nabla u(\gamma(0))\, \gamma'(0^+) = \left|\lim_{t \to 0} \frac{u(\gamma(t)) - u(p)}{t}\right| \leq M^2 + \varepsilon.$$

Portanto, fazendo ε tender a zero por sua vez chegamos a

$$\langle \nabla u(p), \overrightarrow{a} \rangle \leq M^2.$$

Por fim tomando $\overrightarrow{a} = \nabla u(p)$ segue que

$$|\nabla u(p)|^2 = \langle \nabla u(p), \nabla u(p) \rangle \leq M^2.$$

$\square$

Para provar a abertura de V vamos precisar de um resultado de Análise Funcional.

Proposição 5.0.1 *Sejam $(E, \|\ \|_E)$ e $(F, \|\ \|_F)$ espaços de Banach e $L : E \to F$ uma aplicação linear. Então são equivalentes:*
i) L é contínua;
ii) L é contínua em $0 \in E$;
iii)Existe $C > 0$ tal que $\| L(x) \|_F \leq\ C \| x \|_E$ para todo $x \in E$.

5.1 A Abertura

Dado $t_0 \in V$, queremos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subseteq V$. Começamos definindo o conjunto

$$C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) : v|\partial\Omega = 0\},$$

com o qual, definimos a aplicação $T : [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ dada por

$$T(t,w) = Q_{tH}(w + t\varphi).$$

Uma vez que $t_0 \in V$, existe $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $Q_{t_0 H}(u_{t_0}) = 0$ e $u_{t_0}|\partial\Omega = t_0\varphi$, assim, pondo $w_0 = u_{t_0} - t_0\varphi$, temos $T(t_0, w_0) = 0$ com $w_0 \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Queremos mostrar que a equação

$$T(t,w) = 0$$

define uma função $w = w(t)$ em uma vizinhança de t_0 com $w_0 = w(t_0)$. Para tanto, faremos uso do Teorema da Função Implícita em um Espaço de Banach:

Teorema 5.1.1 *Sejam E, F, G espaços de Banach e $T : E\times F \to G$ uma função de classe C^1. Seja $(t_0, w_0) \in (E \times F)$ tal que $T(t_0, w_0) = 0$ e $D_2T(t_0, w_0) : F \to G$ um homeomorfismo linear de F sobre G. Então existe uma vizinhança aberta $U \times V$ de (t_0, w_0) em $E \times F$ tal que, para todo $t \in U$, existe um e somente um $w = w(t) \in V$ satisfazendo*

$$T(t, w(t)) = 0.$$

Além disso, a função $w : U \to V$ é C^1.

Para aplicarmos o teorema citado ao nosso problema temos que mostrar, que a aplicação $T : [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é de classe C^1, e que $D_2T(t_0, w_0) : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um homeomorfismo linear, ou seja, uma bijeção contínua com inversa contínua.

Seja $L = D_2T(H, w_0)$. Usando métodos do cálculo diferencial podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
L(v) &= \frac{1+u_y^2}{1+|\nabla u|^{3/2}}v_{xx} - \frac{2u_xu_y}{1+|\nabla u|^{3/2}}v_{xx} + \frac{1+u_x^2}{1+|\nabla u|^{3/2}}v_{yy} \\
&+ \frac{2u_xu_{yx} - 2u_yu_{yx} + 6Hu_x\left(1+|\nabla u|^2\right)^{1/2}}{1+|\nabla u|^{3/2}}v_x \\
&+ \frac{2u_yu_{yx} - 2u_xu_{yx} + 6Hu_y\left(1+|\nabla u|^2\right)^{1/2}}{1+|\nabla u|^{3/2}}v_y.
\end{aligned}$$

Observe que a matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$ deste operador é dada por

$$A = \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1+u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Logo, os auto-valores de A, ou seja, os zeros da equação,

$$\lambda^2 - \frac{2+|\nabla u|^2}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}\lambda - \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^2} = 0$$

respectivamente o mínimo e o máximo, são

$$\lambda_1 = \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}.$$

Como Ω é limitado e $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$M = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u|.$$

Definindo

$$\delta = \frac{1}{(1+M^2)^{3/2}}$$

temos que $0 < \delta \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$, donde concluímos que L é um operador fortemente elíptico.

L **é contínua:** Dada $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ basta mostrar, pela Preposição 5.0.1, que

$$|L(u)|_{0,\alpha} \leq C|u|_{2,\alpha}$$

para alguma constante C independente de u. Pela desigualdade triangular e pela continuidade das derivadas primeiras no compacto $\overline{\Omega}$ decorre que

$$|L(u)|_{0,\alpha} \leq C_1|v_{xx}|_{0,\alpha} + C_2|v_{xy}|_{0,\alpha} + C_3|v_{yy}|_{0,\alpha} + C_4|v_x|_{0,\alpha} + C_5|v_y|_{0,\alpha}.$$

Pela definição de norma $C^{2,\alpha}$ e C^{α} obtemos

$$|u|_{2,\alpha} = \sup_{\overline{\Omega}} |u| + \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u| + \sup_{\overline{\Omega}} |D^2 u| + \left[D^2 u\right]_{\alpha}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
|u_{ij}|_\alpha &= |u_{ij}|_{0,\alpha} = \sup_{\overline{\Omega}} |u_{ij}| + [u_{ij}]_\alpha \leq |u|_{2,\alpha}, \\
|u|_{1,\alpha} &= \sup_{\overline{\Omega}} |u_i| + \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u_i| + [Dv_i]_\alpha \leq |u|_{2,\alpha}, \\
|u_i|_0 &= \sup_{\overline{\Omega}} |u_i| \leq |u|_{2,\alpha} \quad \forall\, i,j \ \in \ \{x,y\}.
\end{aligned}$$

O Lema 3.2.1 por sua vez, nos fornece uma redução: dado $\varepsilon > 0$ existe $K = K(\varepsilon, \Omega)$ constante tal que

$$|v_i|_{0,\alpha} \leq K|v_i|_0 + \varepsilon |v_i|_{1,\alpha} \leq (K+\varepsilon)|u|_{2,\alpha}.$$

L **é injetiva:** Como já observamos anteriormente, L é um operador linear elíptico com $c = 0$. Portanto satisfaz as hipóteses do Corolário 3.2.1. Dados $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $u = v$ em $\partial\Omega$ e $L(u) = L(v)$ segue do referido corolário que $u = v$ em Ω.

L **é sobrejetiva:** Podemos usar aqui o Teorema 3.2.5 pois L é estritamente elíptico com $c = 0$ e, além disso, tem coeficientes em $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Assim, dada $g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ existe um único $h \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $L(h) = g$.

L^{-1} **é contínua:** Dada $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, basta mostrar, pela Proposição 5.0.1, que

$$|L^{-1}(f)|_{2,\alpha} \leq C|f|_\alpha,$$

onde C é uma constante que não depende de f. Seja $u \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $L(u) = f$. Como L é elíptico com $c = 0$ podemos aplicar o Teorema 3.2.2 para obter

$$|u|_0 = \sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C_1|f|_0 = C_1|f|_0.$$

Além disso, como L é estritamente elíptico e $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ obtemos

$$|u|_{2,\alpha} \leq C_2\left(|u|_0 + |f|_\alpha\right).$$

Das duas equações acima segue que

$$|u|_{2,\alpha} \leq C_2\left(C_1|f|_0 + |f|_\alpha\right) \leq C|f|_\alpha.$$

Visto que, em nenhum momento usamos qualquer hipótese adicional nesta parte, a abertura de V é valida em qualquer situação.

5.2 O Fechamento

Dada uma sequência $t_n \in V$ tal que $t_n \to t \in [0,1]$, queremos mostrar que $t \in V$. Como $t_n \in V$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $Q_{t_n H}(u_n) = 0$ e $u_n|_{\partial\Omega} = t_n\varphi$. Na sequência provamos a existência de uma subsequência u_{n_k} de u_n e de uma aplicação $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que u_{n_k} converge a u na norma $C^{2,\alpha}$, ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} |u_{n_k} - u|_{2,\alpha} = 0.$$

Conforme observamos anteriormente, a aplicação $T : [0,1] \times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ dada por $T(t,w) = Q_{tH}(w)$ é contínua. Portanto,

$$\begin{aligned} Q_{tH}(u) &= T(t,u) = T\left(\lim_{k\to\infty}(t_{n_k}, u_{n_k})\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} T(t_{n_k}, u_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} Q_{t_{n_k}H}(u_{n_k}) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$u|_{\partial\Omega} = \lim_{k\to\infty}(u_{n_k}|_{\partial\Omega}) = \lim_{k\to\infty}(t_{n_k}\varphi) = t\varphi.$$

Destas considerações podemos concluir que $t \in V$.

O primeiro passo é mostrar a existência de estimativas uniformes da norma $C^{2,\gamma}$ para algum $\gamma \le \alpha$, da sequência (u_n), ou seja, a existência de uma constante M tal que

$$|u_n|_{2,\gamma,\Omega} \le M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De posse delas, temos, pela definição de norma $C^{2,\gamma}$ as seguintes estimativas:

$$[D_i\, u_n]_{0,\Omega} \leq M, \qquad [u_n]_{0,\Omega} \leq M, \quad \forall\, i \in \{1,2\} \tag{5.2.1}$$

$$[D_{ij}\, u_n]_{0,\Omega} \leq M, \qquad [D_i\, u_n]_{0,\Omega} \leq M, \quad \forall\, i,j \in \{1,2\} \tag{5.2.2}$$

$$[D_{ij}\, u_n]_{0,\alpha,\Omega} \leq M, \qquad [D_{ij}\, u_n]_{0,\Omega} \leq M \quad \forall\, i,j \in \{1,2\}. \tag{5.2.3}$$

Pelo Lema 5.0.1, as duas estimativas em (5.2.1) garantem a existência de uma subsequência u_{n_k} de u_n e uma aplicação $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $u_{n_k} \to u$ uniformemente em qualquer compacto $K \subseteq \overline{\Omega}$. De fato, estas estimativas implicam que (u_n) é uma sequência limitada e equicontínua em K. Novamente, pelo mesmo teorema, as estimativas em (5.2.2) garantem a existência de uma subsequência $D_i\, u_{n_k}$ de $D_i\, u_n$ e uma aplicação $v_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $D_i\, u_{n_k} \to v_i$ uniformemente em qualquer compacto $K \subseteq \overline{\Omega}$. E, pelas estimativas em (5.2.3), obtemos uma subsequência $D_{ij}\, u_{n_k}$ de $D_{ij}\, u_n$ e uma aplicação $w_{ij} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $D_{ij}\, u_{n_k} \to w_{ij}$ uniformemente em qualquer compacto $K \subseteq \overline{\Omega}$. Segue desses três resultados que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Além disso, $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, pois pela primeira estimativa em (5.2.1), temos

$$|D_{ij}\, u_n(y) - D_{ij}\, u_n(x)| \leq C_K |y-x|^\gamma \quad \Longrightarrow \quad |D_{ij}\, u(y) - D_{ij}\, u(x)| \leq C_K |y-x|^\gamma.$$

Portanto

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|D_{ij}\, u(y) - D_{ij}\, u(x)|}{|y-x|^\gamma} \leq C_K.$$

Para provar que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ usamos o Teorema (3.2.4). Começamos por transformar o problema não-linear $Q_H(v) = 0$ em um linear. Pela proposição (2.2.1) podemos escrever Q_H em coordenadas (x,y) como

$$Q_H(u) = \frac{(1 + {u_x}^2)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{yy} - \frac{2u_x u_y}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{xy} + \frac{(1 + {u_y}^2)}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}}} u_{xx} + 2H.$$

Supomos agora que dada $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ seja uma solução de $Q_H(v) = 0$ em Ω satisfazendo $u = \varphi$ em $\partial\Omega$. Com estas hipóteses, definimos

$$f_H = -2H \left(1 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

e

$$\begin{aligned} L_H : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) &\rightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \\ v &\longmapsto \left(1+u_y^2\right) v_{xx} - 2u_x u_y v_{xy} + \left(1+u_x^2\right) v_{yy}. \end{aligned}$$

Observe que, como $u \in C^2(\overline{\Omega})$, temos $u_x, u_y \in C^1(\overline{\Omega})$ e, portanto, os coeficientes do operador L_H, bem como f_H também pertencem, e em particular a $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$.

Além disso, das definições acima, é imediato ver, que u satisfaz $L_H(u) = f_H$ em Ω e $u = \varphi$ em $\partial\Omega$.

Podemos, portanto, aplicar o teorema mencionado para concluir que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Para encontrar as estimativas desejadas fazemos uma redução da norma $C^{2,\alpha}$ de u_n para a norma $C^{1,\alpha}$ e outra redução desta última, para a norma C^1 de u_n. Esta segunda redução é conhecida como as "estimativas de Hölder para o gradiente".

Observe que, como $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, temos $u_x, u_y \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e, portanto, os coeficientes do operador L_H, bem como f_H também pertencem, e em particular a $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Observe também que os autovalores de L_H são $\lambda_{\min} = 1$ e $\lambda_{\max} = 1 + |\nabla u|^2$, que são as raízes da equação

$$\left(1+u_y^2-\lambda\right)\left(1+u_x^2-\lambda\right) + u_x^2 u_y^2 = 0.$$

Além disso, u satisfaz $L_H(u) = f_H$ em Ω e $u = \varphi$ em $\partial\Omega$.

Podemos, portanto, aplicar o Teorema (3.2.3) para concluir que

$$|u|_{2,\alpha} \leq C_1\left(|u|_0 + |f_H|_{0,\alpha}\right)$$

onde $C_1 = C_1(n, \alpha, \lambda_{\min}, \Omega, |\varphi|_{2,\alpha}, M)$ sendo que M é uma cota superior arbitrária para $|1+u_x^2|_{0,\alpha}, |1+u_y^2|_{0,\alpha}, |u_x u_y|_{0,\alpha}$. Concluímos disto, que M pode ser obtido através de uma estimativa de $|\nabla u|_{0,\alpha}$, ou seja, $M = M(|\nabla u|_{0,\alpha}) = M(|u|_{1,\alpha})$.

Também a norma $|f_H|_{0,\alpha}$ pode ser obtida a partir de uma estimativa de $|u|_{1,\alpha}$, por definição. Finalmente, decorre do Teorema (3.2.2) que

$$\begin{aligned} |u|_0 &= \sup_{\Omega}|u| \leq \sup_{\partial\Omega}|u| + C_2|f_H| \leq \sup_{\partial\Omega}|u| + C_2|f_H|_0 \\ &\leq \sup_{\partial\Omega}|\varphi| + C_2|f_H|_{0,\alpha} \leq \sup_{\overline{\Omega}}|\varphi| + C_2|f_H|_{0,\alpha} \\ &\leq |\varphi|_{2,\alpha} + C_2|f_H|_{0,\alpha}. \end{aligned}$$

onde C_2 depende apenas do diâmetro de Ω pois os b_i são todos nulos.

Podemos então escrever:

Teorema 5.2.1 *Seja Ω um domínio limitado $C^{2,\alpha}$ e seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução de $Q_H(v) = 0$ em Ω satisfazendo $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, então existe*

$$C = C(n, \alpha, \Omega, |\varphi|_{2,\alpha}, |u|_{1,\alpha})$$

tal que

$$|u|_{2,\alpha} \leq C_1 \left(|\varphi|_{2,\alpha} + (C_2 + 1)|f_H|_{0,\alpha}\right) = C.$$

Desse teorema e do Teorema 3.2.6 decorre a outra redução:

Seja Ω um domínio limitado $C^{2,\alpha}$ e seja $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução de $Q_H(v) = 0$ em Ω satisfazendo $u = \varphi$ em $\partial\Omega$. Seja M tal que $|\nabla u| \leq M$. Então existem

$$0 < \gamma = \gamma(M, \Omega, |\varphi|_2) \leq \alpha \text{ e } C = C(M, \Omega, |\varphi|_2)$$

tais que $|u|_{2,\gamma} \leq C$.

O segundo e último passo é reduzir as estimativas globais do gradiente a estimativas no bordo. Faremos isso usando o Princípio do Máximo para o Gradiente. Ver teorema (3.3.3). Todavia, ainda é necessário obter estimativas do gradiente de uma solução arbitrária no bordo.

Segue do Teorema 3.3.1 e do Lema 5.0.2 que para estimarmos o gradiente no bordo de uma solução do problema (1.0.1), então, é suficiente encontrarmos, para todo $p \in \Omega$, funções w_p^-, w_p^+ satisfazendo as definições de barreira local inferior e superior. Relembramos a seguir a definição de barreira:[12]

Definição 5.2.1 *Seja $p \in \partial\Omega$ dado. Dizemos que o problema* (1.0.1) *admite barreiras locais superior e inferior em p se existe uma vizinhança $\mathcal{N}_p$ de p em $\overline{\Omega}$ e funções $w_p^+, w_p^- \in C^2(\mathcal{N}_p)$ tais que*

$$\begin{array}{rcl} w_p^-(p) & = & \varphi(p) \;\; = \;\; w_p^+(p), \\ Q_H[w_p^+] \;\leq\; 0 & e & Q_H[w_p^-] \;\geq\; 0 \quad \text{em}\, \mathcal{N}_p \end{array}$$

e, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução de (1.0.1) *então*

$$w_p^-(x) \leq u(x) \leq w_p^+(x) \quad \forall x \in \partial\mathcal{N}_p.$$

De forma análoga definimos barreira global como segue:

Definição 5.2.2 *Seja $p \in \partial\Omega$ dado. Dizemos que o problema* (1.0.1) *admite barreiras globais superior e inferior em p se existem funções $w_p^+, w_p^- \in C^2(\overline{\Omega})$ tais que*

$$\begin{array}{rcl} w_p^-(p) & = & \varphi(p) \;\; = \;\; w_p^+(p), \\ Q_H[w_p^+] \;\leq\; 0 & e & Q_H[w_p^-] \;\geq\; 0 \quad \text{em}\, \overline{\Omega} \end{array}$$

e, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução de (1.0.1) *então*

$$w_p^-(x) \leq u(x) \leq w_p^+(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Além disso, tais funções devem ter o gradiente limitado no bordo de Ω, i.e., devem ser tais que

$$\sup_{p \in \partial\Omega} \max\left\{|\nabla w_p^+(p)|, |\nabla w_p^-(p)|\right\} \leq M$$

para alguma constante M.

[12] Está em [3] página 333.

6 DEMONSTRAÇÕES

Os teoremas são provados utilizando técnicas clássicas de EDP elípticas onde podemos destacar a construção de barreiras apropriadas e a aplicação do método da continuidade. Como usamos uma barreira logarítmica, em todos teoremas aparece uma hipótese do tipo exponencial.

6.1 Primeiro Teorema

Teorema 6.1.1 *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$. Assuma que r satisfaz a hipótese*

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{6M(3C^3+3C^2+4C+1)} - 1\right), 1\right\}. \tag{6.1.1}$$

Então existe uma solução limitada para (1.0.1) com $H = 0$ e é única.

Demonstração:

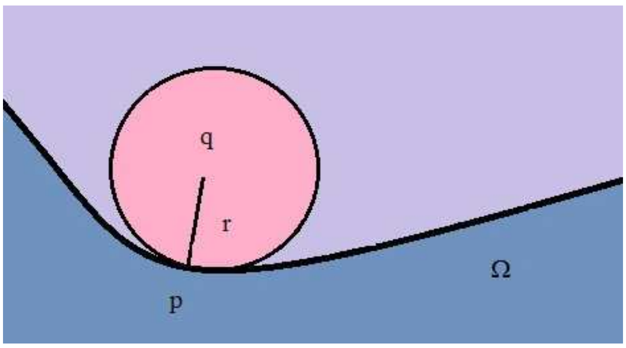

Figura 6.1.1: Círculo Exterior em p

Assumimos s.p.g. que $\varphi \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Escolhemos $p \in \partial\Omega$. Seja q o centro do círculo tangente a $\partial\Omega$ em p com raio r e contido em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$. Seja C_r tal círculo. Definindo

$$d(x) = d(x, \partial C_r) = |x - q| - r, \; x \in \Omega \tag{6.1.2}$$

obtemos

$$d(p) = |p - q| - r = r - r = 0, \tag{6.1.3}$$

e, para $x = (x_1, x_2) \in \Omega$,

$$\left.\begin{array}{ll} D_1 d(x) = \dfrac{x_1 - q_1}{|x-q|}, & D_2 d(x) = \dfrac{x_2 - q_2}{|x-q|} \\ D_{11} d(x) = \dfrac{(x_2 - q_2)^2}{|x-q|^3}, & D_{22} d(x) = \dfrac{(x_1 - q_1)^2}{|x-q|^3} \\ D_{12} d(x) = \dfrac{-(x_1 - q_1)(x_2 - q_2)}{|x-q|^3}, & D_{21} d(x) = \dfrac{-(x_2 - q_2)(x_1 - q_1)}{|x-q|^3} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$|\nabla d(x)| = \sqrt{{D_1}^2 d(x) + {D_2}^2 d(x)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\nabla d(x)| = 1 \tag{6.1.4}$$

e

$$\triangle d(x) = D_{11} d(x) + D_{22} d(x) = \frac{1}{|x-q|} \quad \Longrightarrow \quad \triangle d(x) = \frac{1}{|x-q|}. \tag{6.1.5}$$

Fixamos $x \in \Omega$ e definimos $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ pondo $\tilde{e}_1 = \nabla d(x)$ e $\tilde{e}_2$ ortogonal a $\tilde{e}_1$. Definimos

$$\tilde{D}_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{e}_i},\ \tilde{D}_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{e}_i \tilde{e}_j},\ i, j \in \{1, 2\}.$$

Mostramos então a partir de

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 = (D_1 d(x), D_2 d(x)) \quad &= \quad \frac{(x_1 - q_1, x_2 - q_2)}{|x-q|}, \\ \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = \delta_{12} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{e}_2 \quad &= \quad -\frac{(x_2 - q_2, q_1 - x_1)}{|x-q|} \end{aligned}$$

que

$$\tilde{D}_{11} d(x) \quad = \quad 0, \tag{6.1.6}$$

$$\tilde{D}_{ij} d(x) \quad = \quad 0 \ \ se \ \ i, j \neq 1. \tag{6.1.7}$$

De fato, pois

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_1 d(x) &= \left\langle \tilde{\nabla} d(x), \tilde{e}_1 \right\rangle = \left\langle \nabla d(x), \tilde{e}_1 \right\rangle = \left\langle \nabla d(x), \nabla d(x) \right\rangle = 1, \\
\tilde{D}_2 d(x) &= \left\langle \tilde{\nabla} d(x), \tilde{e}_2 \right\rangle = \left\langle \nabla d(x), \tilde{e}_2 \right\rangle = \left\langle \nabla d(x), \left(\nabla d(x)\right)^{\perp} \right\rangle = 0, \\
\tilde{D}_{11} d(x) &= \left\langle \tilde{\nabla} \tilde{D}_1 d(x), \tilde{e}_1 \right\rangle = \left\langle \nabla \tilde{D}_1 d(x), \tilde{e}_1 \right\rangle = 0, \\
\tilde{D}_{12} d(x) &= \tilde{D}_{22} d(x) = \tilde{D}_{21} d(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Agora colocamos este resultado à parte e prosseguimos definindo

$$
w(x) = \varphi(x) + \psi\left(d(x)\right), \ x \in \Omega, \tag{6.1.8}
$$

onde

$$
\psi(t) = \delta \ln(bt+1), \ t > 0 \tag{6.1.9}
$$

e provamos que w é uma barreira local superior em p com convenientes escolhas de constantes $\delta > 0$ e $b > 0$.

Note que

$$
Q_0[w] = \left(1 + |\nabla w|^2\right) \triangle w - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} w \ = \tag{6.1.10}
$$

$$
\sum_{i,j=1}^{2} \Big[\left(1 + |\nabla w|^2\right) \delta_{ij} - D_i w D_j w \Big] \left(\psi'' D_i d D_j d + \psi'(d) D_{ij} d + D_{ij}\varphi\right). \tag{6.1.11}
$$

Começamos abrindo o somatório em (6.1.11) e, após usamos o Teorema de Schwarz - que assegura a simetria da derivada segunda - para escrever:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{2}\Big[\left(1+|\nabla w|^2\right)\delta_{ij}-D_iwD_jw\Big]\left(\psi'' D_idD_jd+\psi'(d)D_{ij}d+D_{ij}\varphi\right)\\
= \quad &\Big[\left(1+|\nabla w|^2\right)-(D_1w)^2\Big]\left(\psi''(D_1d)^2+\psi'(d)D_{11}d+D_{11}\varphi\right)\\
&+\Big[\left(1+|\nabla w|^2\right)-(D_1w)^2\Big]\left(\psi''(D_1d)^2+\psi'(d)D_{11}d+D_{11}\varphi\right)\\
&-D_1wD_2w(\psi'' D_1dD_2d+\psi'(d)D_{12}d+D_{12}\varphi)\\
&-D_2wD_1w(\psi'' D_2dD_1d+\psi'(d)D_{21}d+D_{21}\varphi)\\
= \quad &\left(1+|\nabla w|^2\right)(D_{11}\varphi+D_{22}\varphi)-(D_1w)^2D_{11}\varphi-(D_2w)^2D_{22}\varphi\\
&+\left(1+|\nabla w|^2\right)\left(\psi''(D_1d)^2+\psi'(d)D_{11}d+\psi''(D_2d)^2+\psi'(d)D_{22}d\right)\\
&-(D_1w)^2\left(\psi''(D_1d)^2+\psi'(d)D_{11}d\right)-(D_2w)^2\left(\psi''(D_2d)^2+\psi'(d)D_{22}d\right)\\
&-2D_1wD_2w(\psi'' D_1dD_2d+\psi'(d)D_{12}d+D_{12}\varphi).
\end{aligned}
$$

Prosseguimos abrindo o somatório em (6.1.10), substituindo w em $\triangle\Omega$ e operando com o laplaciano:

$$
\begin{aligned}
&\left(1+|\nabla w|^2\right)\triangle w-\sum_{i,j=1}^{2}D_iwD_jwD_{ij}w\\
= \quad &\left(1+|\nabla w|^2\right)\triangle\Big(\varphi+\psi(d)\Big)-\\
&\Big[(D_1w)^2D_{11}w+2D_1wD_2wD_{12}w+(D_2w)^2D_{22}w\Big]\\
= \quad &\left(1+|\nabla w|^2\right)(D_{11}\varphi+D_{22}\varphi)+\left(1+|\nabla w|^2\right)(\psi''(d)(D_1d)^2+\psi'(d)D_{11}d+\\
&\psi''(d)(D_2d)^2+\psi'(d)D_{22}d)-(D_1w)^2D_{11}\varphi-2D_1wD_2wD_{12}\varphi-(D_2w)^2D_{22}\varphi-\\
&(D_1w)^2\left(\psi''(D_1d)^2+\psi'(d)D_{11}d\right)-2D_1wD_2w(\psi'' D_1dD_2d+\psi'(d)D_{12}d)-\\
&(D_2w)^2\left(\psi''(D_2d)^2+\psi'(d)D_{22}d\right).
\end{aligned}
$$

Definindo $A_{ij} = \Big[\left(1+|\nabla w|^2\right)\delta_{ij} - D_iwD_jw\Big]$ obtemos

$$\begin{aligned}
Q_0[w] &= \sum_{i,j=1}^{2}\Big[\left(1+|\nabla w|^2\right)\delta_{ij} - D_iwD_jw\Big](\psi''(d)D_idD_jd + \psi'(d)D_{ij}d) + D_{ij}\varphi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(\psi''(d)D_idD_jd + \psi'(d)D_{ij}d + D_{ij}\varphi) \\
&= \psi''(d)\underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}D_idD_jd}_{A} + \psi'(d)\underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}D_{ij}d}_{E} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}D_{ij}\varphi}_{B}.
\end{aligned}$$

Para estimar A observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}\xi_i\xi_j &= \Big[\left(1+|\nabla w|^2\right) - (D_1w)^2\Big](\xi_1)^2 - D_1wD_2w\xi_1\xi_2 - \\
&\quad D_2wD_1w\xi_2\xi_1 + \Big[\left(1+|\nabla w|^2\right) - (D_2w)^2\Big](\xi_2)^2 \\
&= (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (D_2w)^2(\xi_1)^2 - 2D_1wD_2w\xi_1\xi_2 + (D_1w)^2(\xi_2)^2 \\
&= (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (D_2w\xi_1 - D_1w\xi_2)^2
\end{aligned}$$

donde concluimos que

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}\xi_i\xi_j \geq (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 = |\xi|^2, (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

de modo que por (6.1.4)

$$A \geq |\nabla d|^2 = 1.$$

Por (6.1.9) temos

$$\psi''(d) = \frac{-\delta b^2}{(bs+1)^2} \leq 0,$$

donde concluimos que

$$\psi''(d)\,A \leq \psi''(d),$$

o que implica

$$Q_0[w] \leq \psi''(d) + \psi'(d)\underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}D_{ij}d}_{E} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}D_{ij}\varphi}_{B}.$$

Em B abrimos o somatório e substituimos A_{ij} usando a simetria da derivada segunda:

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{i,j=1}^{2} \Big[\left(1+|\nabla w|^2\right)\delta_{ij} - D_i w D_j w \Big] D_{ij}\varphi \\
&= \Big[\left(1+|\nabla w|^2\right) - (D_1 w)^2 \Big] D_{11}\varphi - 2D_1 w D_2 w D_{12}\varphi + \Big[\left(1+|\nabla w|^2\right) - (D_2 w)^2 \Big] D_{22}\varphi \\
&\leq \left(1+(D_2 w)^2\right)|D_{11}\varphi| + 2|D_1 w||D_2 w||D_{12}\varphi| + \left(1+(D_1 w)^2\right)|D_{22}\varphi| \\
&\leq \left(1+(\nabla w)^2\right)(|D_{11}\varphi| + |D_{22}\varphi|) + 2|D_1 w||D_2 w||D_{12}\varphi|.
\end{aligned}$$

Agora, como

$$2|D_1 w||D_2 w| \leq |\nabla w|^2 \leq |\nabla w|^2 + 1,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
B &\leq \left(1+|\nabla w|^2\right)(|D_{11}\varphi| + |D_{22}\varphi|) + \left(1+|\nabla w|^2\right)|D_{12}\varphi| \\
&= \left(1+|\nabla w|^2\right)(|D_{11}\varphi| + |D_{12}\varphi| + |D_{22}\varphi|) \\
&= \left(1+|\nabla w|^2\right)|D^2\varphi|.
\end{aligned}$$

Portanto

$$Q_0[w] \leq \psi''(d) + \psi'(d) \underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} d}_{E} + \left(1+|\nabla w|^2\right)|D^2\varphi|.$$

Para estimar

$$E = \left(1+|\nabla w|^2\right)(\triangle d) - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} d,$$

note que

$$D_i w = D_i\varphi + \psi'(d) D_i d,$$

donde concluímos que

$$\sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{ij} d = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{2} \left(\psi'^2 D_i d + 2\psi' D_i\varphi\right) D_j d D_{ij} d}_{J} +$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} D_i\varphi D_j\varphi D_{ij} d.$$

Por (6.1.4) temos $\sum_{i,j=1}^{2} D_j d D_{ij} d = 0$ donde $J = 0$.

Segue que

$$\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} D_{ij} d = \left(1 + |\nabla w|^2\right)(\triangle d) - \sum_{i,j=1}^{2} D_i\varphi D_j\varphi D_{ij} d.$$

Dado x $\in \Omega$ fixo, por (6.1.6) e (6.1.7) obtemos que

$$\sum_{i,j=1}^{2} D_i\varphi D_j\varphi D_{ij}\varphi = \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{D}_i\varphi \tilde{D}_j\varphi \tilde{D}_{ij}\varphi = 0.$$

Logo $E \leq \left(1 + |\nabla w|^2\right)(\triangle d)$ e, portanto,

$$Q_0[w] \leq \psi''(d) + \psi'(d)\left(1 + |\nabla w|^2\right)(\triangle d) + \left(1 + |\nabla w|^2\right)|D^2\varphi|.$$

Segue de $|\nabla w|^2 \leq (|\nabla\varphi| + \psi')^2 = |\nabla\varphi|^2 + 2\psi'|\nabla\varphi| + (\psi')^2$ que

$$\begin{aligned}
Q_0[w] &\leq \psi'' + \psi'\left(1 + |\nabla\varphi|^2 + 2\psi'|\nabla\varphi| + (\psi')^2\right)(\triangle d) \\
&\quad + \left(1 + |\nabla\varphi|^2 + 2\psi'|\nabla\varphi| + (\psi')^2\right)|D^2\varphi| \\
&\leq \psi'' + (\psi')^3(\triangle d) + \left(2|\nabla\varphi|(\triangle d) + |D^2\varphi|\right)(\psi')^2 \\
&\quad + \left((\triangle d) + |\nabla\varphi|^2(\triangle d) + 2|\nabla\varphi||D^2\varphi|\right)\psi' \\
&\quad + |D^2\varphi|\left(1 + |\nabla\varphi|^2\right) \\
&\leq \psi'' + (\psi')^3(\triangle d) + \left(2C(\triangle d) + C\right)(\psi')^2 \\
&\quad + \left((\triangle d) + C^2(\triangle d) + 2C^2\right)\psi' + C + C^3.
\end{aligned}$$

Visto que (6.1.2) implica $|x - q| \geq r$, por (6.1.5) temos $\triangle d(x) = \frac{1}{|x-q|} \leq \frac{1}{r}$, donde concluímos que

$$\begin{aligned}
Q_0[w] &\leq \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)(\psi')^2 \\
&\quad + \left(\frac{1 + C^2}{r} + 2C^2\right)\psi' + C + C^3.
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

Por (6.1.9) temos

$$\begin{aligned} Q_0[w] &\leq -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{(\delta b)^3}{(bd+1)^3} + \left(\frac{2C}{r} + C\right)\frac{(\delta b)^2}{(bd+1)^2} \\ &\quad + \left(\frac{1+C^2}{r} + 2C^2\right)\frac{\delta b}{bd+1} + C + C^3. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{(\delta b)^3}{(bd+1)^3} \\ = & -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2}\underbrace{\left[1 - \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\delta^2 b}{bd+1}\right]}_{F} \end{aligned}$$

onde $F \leq 0$ se $\dfrac{b}{bd+1} \leq \dfrac{r}{\delta^2}$.

Escolhendo $b = \dfrac{r}{2\delta^2}$ obtemos

$$-\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{(\delta b)^3}{(bd+1)^3} = -\frac{\delta r^2}{(rd+2\delta^2)^2}\underbrace{\left[1 - \frac{\delta^2}{rd+2\delta^2}\right]}_{\geq 1}$$

$$= -\frac{\delta r^2}{2(rd+2\delta^2)^2}\left[2 - \frac{2\delta^2}{rd+2\delta^2}\right] \leq -\frac{\delta r^2}{2(rd+2\delta^2)^2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} Q_0[w] &\leq -\frac{\delta r^2}{2(rd+2\delta^2)^2} + \left(\frac{2C}{r} + C\right)\frac{(\delta r)^2}{(rd+2\delta^2)^2} \\ &\quad + \left(\frac{1+C^2}{r} + 2C^2\right)\frac{\delta r}{rd+2\delta^2} + C + C^3 \\ &= \frac{1}{2(2\delta^2+dr)^2}\left(2C^3(dr)^2 + 8C^3 dr\delta^2 + 8C^3\delta^4 + 4C^2 dr^2\delta\right. \\ &\quad + 2C^2 dr\delta + 8C^2 r\delta^3 + 4C^2\delta^3 + 2C(dr)^2 + 8Cdr\delta^2 + 2C(r\delta)^2 \\ &\quad \left. + 4Cr\delta^2 + 8C\delta^4 + 2dr\delta + 4\delta^3 - r^2\delta\right). \end{aligned}$$

Reescrevendo as expressões entre parênteses como um polinômio quadrático em d, temos $Q_0[w] \leq 0$ se

$$\begin{aligned} & \left(2C^3r^2 + 2Cr^2\right)d^2 + \left(8C^3r\delta^2 + 4(Cr)^2\delta + 2C^2r\delta + 8Cr\delta^2 + 2r\delta\right)d \\ & + 8C^3\delta^4 + 8C^2r\delta^3 + 4C^2\delta^3 + 2C(r\delta)^2 + 4Cr\delta^2 + 8C\delta^4 - r^2\delta + 4\delta^3 \leq 0. \end{aligned}$$

Para $0 \leq d \leq \delta$ temos

$$\begin{aligned}
& \left(2C^3r^2 + 2Cr^2\right) d^2 + \left(8C^3r\delta^2 + 4(Cr)^2\delta + 2C^2r\delta + 8Cr\delta^2 + 2r\delta\right) d \\
& +8C^3\delta^4 + 8C^2r\delta^3 + 4C^2\delta^3 + 2C(r\delta)^2 + 4Cr\delta^2 + 8C\delta^4 - r^2\delta + 4\delta^3 \\
\leq \; & \left(2C^3r^2 + 2Cr^2\right) \delta^2 + \left(8C^3r\delta^2 + 4(Cr)^2\delta + 2C^2r\delta + 8Cr\delta^2 + 2r\delta\right) \delta \\
& +8C^3\delta^4 + 8C^2r\delta^3 + 4C^2\delta^3 + 2C(r\delta)^2 + 4Cr\delta^2 + 8C\delta^4 - r^2\delta + 4\delta^3 \\
= \; & \delta\Big[\left(8C^3 + 8C\right) \delta^3 + \left(8C^2r + 8C^3r + 8Cr + 4C^2 + 4\right) \delta^2 \\
& + \left(2C^3r^2 + 4(Cr)^2 + 2C^2r + 4Cr^2 + 4Cr + 2r\right) \delta - r^2\Big].
\end{aligned}$$

Consequentemente, quando $\delta \leq 1$ temos que $Q_0[w] \leq 0$ para $0 \leq d \leq \delta$ se

$$\begin{aligned}
& \delta\Big[\left(8C^3 + 8C\right) \delta^3 + \left(8C^2r + 8C^3r + 8Cr + 4C^2 + 4\right) \delta^2 \\
& + \left(2C^3r^2 + 4(Cr)^2 + 2C^2r + 4Cr^2 + 4Cr + 2r\right) \delta - r^2\Big] \\
\leq \; & \left(8C^3 + 8C\right) \delta + \left(8C^2r + 8C^3r + 8Cr + 4C^2 + 4\right) \delta \\
& + \left(2C^3r^2 + 4(Cr)^2 + 2C^2r + 4Cr^2 + 4Cr + 2r\right) \delta - r^2.
\end{aligned}$$

Agora reescrevendo os coeficientes de δ como um polinômio quadrático em r e isolando δ obtemos que $Q_0[w] \leq 0$ para $0 \leq d \leq \delta \leq 1$ se

$$\delta \leq \frac{r^2}{(2C^3 + 4C^2 + 4C)r^2 + (8C^3 + 10C^2 + 12C + 2)r + 8C^3 + 4C^2 + 8C + 4} := f(r).$$

Podemos mostrar pelos métodos do cálculo diferencial, usando o fato de que C é não-negativo, que $f(r)$ é crescente. De fato, basta mostrar que a derivada de f é não-negativa. Então temos que

$$\frac{1}{18C^3 + 18C^2 + 24C + 6} = f(1) \leq f(r), \quad \forall r \geq 1$$

que é o caso, por hipótese, de modo que $Q_0[w] \leq 0$ se $0 \leq d \leq \delta$ para

$$\delta = \frac{1}{18C^3 + 18C^2 + 24C + 6}.$$

Em suma, definindo δ como acima, e tomando $b = \dfrac{r}{2\delta^2}$, temos que $Q_0[w] \leq 0$ em $\mathcal{N}_p := \{x \in \Omega \mid 0 \leq d(x) \leq \delta\}$. Além disso $w(p) = \varphi(p)$ visto que por (6.1.3)

$\psi\left(d(p)\right) = \psi(0) = 0$. Consequentemente, para garantir que w é uma barreira local superior para Q_0 em p é suficiente provar que w satisfaz

$$w|_{\partial\mathcal{N}_p} \geq u|_{\partial\mathcal{N}_p}, \tag{6.1.13}$$

se u é uma solução de $Q_0[v] = 0$ satisfazendo $v|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Note que com as escolhas acima temos

$$\psi(d) = \frac{1}{18C^3 + 18C^2 + 24C + 6} \ln\left(\frac{r(18C^3 + 18C^2 + 24C + 6)^2}{2} d + 1\right).$$

Em $\partial\mathcal{N}_p \cap \partial\Omega$ temos $u = \varphi$. Além disso, como $d \geq 0$ em $\partial\Omega$ temos $\psi(d) \geq 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, da definição de w segue que (6.1.13) é satisfeita nestes pontos.

Pela Estimativa de Altura para Q_0 (3.3.4) obtemos que

$$\sup_{\Omega} |u| \leq M.$$

De fato, pois

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |\varphi| = \sup_{\partial\Omega} |\varphi| - 0 = \sup_{\partial\Omega} |\varphi| - \inf_{\partial\Omega} |\varphi| = M.$$

Observe que em $\partial\mathcal{N}_p \backslash \partial\Omega$ temos $d = \delta$, logo

$$w(x) = \varphi(x) + \psi(\delta) \geq \psi(\delta)$$

pois foi assumido no início que $\varphi \geq 0$ em $\overline{\Omega}$.

Segue que (6.1.13) é satisfeita nesses pontos se $\psi(\delta) \geq M$, i.e., se

$$\frac{\ln\left(\frac{r(18C^3+18C^2+24C+6)^2}{2}\frac{1}{18C^3+18C^2+24C+6} + 1\right)}{18C^3 + 18C^2 + 24C + 6} \geq M.$$

Esta última desigualdade é implicada pela hipótese (6.1.1) :

$$r \geq 2\left(e^{6M(3C^3+3C^2+4C+1)} - 1\right).$$

De fato, pois a função ln é crescente, e daí segue que

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{r(18C^3+18C^2+24C+6)^2}{2}\frac{1}{18C^3+18C^2+24C+6}+1\right) &= \\
\ln\left(\frac{r(18C^3+18C^2+24C+6)}{2}+1\right) &\geq \\
\ln\left(\frac{r(18C^3+18C^2+24C+6)}{2}\right) &\geq \\
\ln\left[2\left(e^{6M(3C^3+3C^2+4C+1)}\right)\frac{(18C^3+18C^2+24C+6)}{2}\right] &= \\
\ln\left(e^{6M(3C^3+3C^2+4C+1)}(18C^3+18C^2+24C+6)\right) &= \\
\big(6M(3C^3+3C^2+4C+1)\big)+\ln\big((18C^3+18C^2+24C+6)\big) &\geq \\
M\left(6(3C^3+3C^2+4C+1)\right).
\end{aligned}
$$

Pelo que foi exposto, acabamos de provar que w é uma barreira local superior para Q_0 em p. Para encontrar uma barreira local inferior para Q_0 em p tomamos $\overline{w}=\varphi-\psi$ para ψ como em (6.1.9).

Observando agora que se a condição (6.1.1) é satisfeita para um dado φ então é também satisfeita para $t\varphi$, $t\in[0,1]$, podemos concluir esta demonstração usando o Método da Continuidade. Com efeito, definindo

$$V=\{t\in[0,1]\,|\,\exists u_t\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega});Q_0[u_t]=0,u_t|_{\partial\Omega}=t\varphi\}$$

temos que $V\neq\emptyset$ visto que $t=0\in V$; além disso, V é ao mesmo tempo aberto e fechado em $[0,1]$. De fato, como discutimos no Capítulo 5, V é aberto pelo teorema da função implícita; e, também é fechado pelas estimativas uniformes para o gradiente no bordo, que construímos com as barreiras acima, para a família de problemas de Dirichlet definida em V. Logo $V=[0,1]$ e, portanto, $t=1\in V$.

A unicidade é garantida pelo Teorema 3.3.2. $\square$

6.2 Segundo Teorema

Teorema 6.2.1 *Seja $H \geq 0$ real e Ω um domínio contido em um disco de raio R. Assuma que M e C são finitas e que são válidas as hipóteses*

$$RH \leq 1; \tag{6.2.1}$$

$$He^{\phi(M+h_{R,H})} \leq 1; \tag{6.2.2}$$

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{\phi(M+h_{R,H})} - 1\right), 1\right\}. \tag{6.2.3}$$

Então existe uma única solução para o problema (1.0.1).

Demonstração:

Observe que de (6.2.3) obtemos que r satisfaz a hipótese do Teorema 6.1.1

$$\begin{aligned} r &\geq \max\left\{2\left(e^{\phi(M+h_{R,H})} - 1\right), 1\right\} \\ &\geq \max\left\{2\left(e^{6M(3C^3+3C^2+4C+1)} - 1\right), 1\right\} \end{aligned}$$

de modo que existe uma solução $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Q_0[v] = 0$ em Ω satisfazendo $v|_{\partial\Omega} = \varphi$. Logo

$$\begin{aligned} Q_H[v] &= Q_0[v] + 2H\left(1 + |\nabla v|^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2H\left(1 + |\nabla v|^2\right)^{\frac{3}{2}} \geq 0. \end{aligned}$$

Além disso $v(p) = \varphi(p)$, $\forall p \in \partial\Omega$ visto que $v|_{\partial\Omega} = \varphi$. E também $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ se u é uma solução do problema (1.0.1) com $H = 0$. Destas três afirmações segue que v é uma barreira global inferior com respeito a Q_H e φ.

As barreiras superiores são locais. Para construí-las escolhemos um ponto $p \in \partial\Omega$ e definimos d e w como no teorema anterior. Agora procuramos por valores de δ e b tais que w seja uma barreira local superior para Q_H e φ em p.

Temos então

$$
\begin{aligned}
Q_H[w] &= \left(1+|\nabla w|^2\right)\nabla w - \sum_{i,j=1}^{2} D_i w D_j w D_{i,j} w + 2H\Big(1+|\nabla w|^2\Big)^{\frac{3}{2}} \\
&= Q_0[w] + 2H\Big(1+|\nabla w|^2\Big)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

de modo que, por (6.1.12), obtemos

$$
\begin{aligned}
Q_H[w] &\leq \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)(\psi')^2 \\
&\quad + \left(\frac{1+C^2}{r} + 2C^2\right)\psi' + C + C^3 + 2H\Big(1+|\nabla w|^2\Big)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Observe que $\left(1+|\nabla w|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + |\nabla w|$ e, por (5.1.8) temos $|\nabla w| \leq |\nabla \varphi| + \psi' \leq C + \psi'$, portanto segue que

$$
\begin{aligned}
Q_H[w] &\leq \psi'' + \left(\frac{1}{r}\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C\right)(\psi')^2 \\
&\quad + \left(\frac{1+C^2}{r} + 2C^2\right)\psi' + C + C^3 + 2H\left(1 + (C+\psi')^2\right)(1 + C + \psi') \\
&= \psi'' + \left(\frac{1}{r} + 2H\right)(\psi')^3 + \left(\frac{2C}{r} + C + 2H + 6HC\right)(\psi')^2 \\
&\quad + \left(\frac{1+C^2}{r} + 2C^2 + 2H + 6HC^2 + 4HC\right)\psi' \\
&\quad + \Big(1 + C^2\Big)(C + 2H(1+C)).
\end{aligned}
$$

Daqui em diante, as estimativas seguem as mesma linhas das estimativas obtidas no Teorema 5.1.1. De fato, para $H = 0$ as estimativas que acabaram de ser obtidas coincidem com aquelas obtidas no referido teorema.

De (6.1.9) segue que

$$
\begin{aligned}
Q_H[w] &\leq -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r} + 2H\right)\frac{(\delta b)^3}{(bd+1)^3} + \left(\frac{2C}{r} + C + 2H + 6HC\right)\frac{(\delta b)^2}{(bd+1)^2} \\
&\quad + \left(\frac{1+C^2}{r} + 2C^2 + 2H + 6HC^2 + 4HC\right)\frac{\delta b}{bd+1} \\
&\quad + \Big(1 + C^2\Big)(C + 2H(1+C)).
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
I = -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left(\frac{1}{r}+2H\right)\frac{(\delta b)^3}{(bd+1)^3} \\
= \quad -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2}\underbrace{\left[1-\left(\frac{1}{r}+2H\right)\frac{\delta^2 b}{bd+1}\right]}_{J}
\end{aligned}
$$

e que esta expressão é não-positiva se $J \geq 0$, ou seja, se

$$
\frac{b}{bd+1} \leq \frac{1}{\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}.
$$

Escolhendo $b = \dfrac{1}{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{\delta b^2}{(bd+1)^2} + \left[1-\left(\frac{1}{r}+2H\right)\frac{(\delta^2 b)}{(bd+1)}\right] \\
&= \quad -\frac{\delta}{\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2}\underbrace{\left[-\frac{\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}{d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}\right]}_{\geq 1} \\
&= \quad -\frac{\delta}{2\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2}\underbrace{\left[2-\frac{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}{d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)}\right]}_{\geq 1} \\
&\leq \quad -\frac{\delta}{2\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
Q_0[w] \quad &\leq \quad -\frac{\delta}{2\left(d+2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)\right)^2} + \left(\frac{2C}{r}+C+2H+6HC\right)\frac{(\delta r)^2}{(rd+2\delta^2+4H\delta^2 r)^2} \\
&+\left(\frac{1+C^2}{r}+2C^2+2H+6HC^2+4HC\right)\frac{\delta r}{rd+2\delta^2+4H\delta^2 r} \\
&+\left(1+C^2\right)(C+2H(1+C)) \\
&= \quad \frac{1}{2(2\delta^2+dr+4Hr\delta^2)^2}\Bigg[\left(2Cr^2+4Hr^2+2C^3r^2+4CHr^2+4C^2Hr^2+4C^3Hr^2\right)d^2 \\
&+\Big(32C^3(Hr\delta)^2+16C^3H(r\delta)^2+16C^3Hr\delta^2+8C^3r\delta^2+32(CHr\delta)^2+12H\delta(Cr)^2
\end{aligned}
$$

$$+16Hr(C\delta)^2+4(Cr)^2\delta+2C^2r\delta+32C(Hr\delta)^2+16CH(r\delta)^2+8CHr^2\delta+16CHr\delta^2\Big)d$$
$$+\Big(8Cr\delta^2+32(Hr\delta)^2+4Hr^2\delta+16Hr\delta^2+2r\delta+64(CH)^3r^2\delta^4+32C^3(Hr)^2\delta^4$$
$$+64C^3H^2r\delta^4+32C^3Hr\delta^4+16C^3H\delta^4+8C^3\delta^4+64(Cr)^2H^3\delta^4+48(CHr)^2\delta^3$$
$$+64(CH)^2r\delta^4+16(Cr)^2H\delta^3+40C^2Hr\delta^3+16C^2H\delta^4+8C^2r\delta^3+8C^2\delta^3$$
$$+64Cr^2H^3\delta^4+32C(Hr)^2\delta^4+32C(Hr)^2\delta^3+64CrH^2\delta^4+12CH(r\delta)^2+32CHr\delta^4$$
$$+16CHr\delta^3+16CH\delta^4+2C(r\delta)^2+4Cr\delta^2+8C\delta^4+64r^2H^3\delta^4+16(Hr)^2\delta^3$$
$$+64H^2r\delta^4+4H(r\delta)^2 16Hr\delta^3+16H\delta^4-r^2\delta+4\delta^3\Big)\Bigg].$$

Então temos que $Q_H[w]\leq 0$ se a expressão que está entre colchetes for não-negativa, ou seja, temos $Q_H[w]\leq 0$ se

$$\Big(2Cr^2+4Hr^2+2C^3r^2+4CHr^2+4C^2Hr^2+4C^3Hr^2\Big)d^2$$
$$+\Big(32C^3(Hr\delta)^2+16C^3H(r\delta)^2+16C^3Hr\delta^2+8C^3r\delta^2+32(CHr\delta)^2+12H\delta(Cr)^2$$
$$+16Hr(C\delta)^2+4(Cr)^2\delta+2C^2r\delta+32C(Hr\delta)^2+16CH(r\delta)^2+8CHr^2\delta+16CHr\delta^2\Big)d$$
$$+\Big(8Cr\delta^2+32(Hr\delta)^2+4Hr^2\delta+16Hr\delta^2+2r\delta+64(CH)^3r^2\delta^4+32C^3(Hr)^2\delta^4$$
$$+64C^3H^2r\delta^4+32C^3Hr\delta^4+16C^3H\delta^4+8C^3\delta^4+64(Cr)^2H^3\delta^4+48(CHr)^2\delta^3$$
$$+64(CH)^2r\delta^4+16(Cr)^2H\delta^3+40C^2Hr\delta^3+16C^2H\delta^4+8C^2r\delta^3+8C^2\delta^3$$
$$+64Cr^2H^3\delta^4+32C(Hr)^2\delta^4+32C(Hr)^2\delta^3+64CrH^2\delta^4+12CH(r\delta)^2+32CHr\delta^4$$
$$+16CHr\delta^3+16CH\delta^4+2C(r\delta)^2+4Cr\delta^2+8C\delta^4+64r^2H^3\delta^4+16(Hr)^2\delta^3$$
$$+64H^2r\delta^4+4H(r\delta)^2 16Hr\delta^3+16H\delta^4-r^2\delta+4\delta^3\Big)\leq 0.$$

Para $0\leq d\leq \delta$ temos

$$\Big(2Cr^2+4Hr^2+2C^3r^2+4CHr^2+4C^2Hr^2+4C^3Hr^2\Big)d^2$$
$$+\Big(32C^3(Hr\delta)^2+16C^3H(r\delta)^2+16C^3Hr\delta^2+8C^3r\delta^2+32(CHr\delta)^2+12H\delta(Cr)^2$$
$$+16Hr(C\delta)^2+4(Cr)^2\delta+2C^2r\delta+32C(Hr\delta)^2+16CH(r\delta)^2+8CHr^2\delta+16CHr\delta^2\Big)d$$
$$+\Big(8Cr\delta^2+32(Hr\delta)^2+4Hr^2\delta+16Hr\delta^2+2r\delta+64(CH)^3r^2\delta^4+32C^3(Hr)^2\delta^4$$
$$+64C^3H^2r\delta^4+32C^3Hr\delta^4+16C^3H\delta^4+8C^3\delta^4+64(Cr)^2H^3\delta^4+48(CHr)^2\delta^3$$
$$+64(CH)^2r\delta^4+16(Cr)^2H\delta^3+40C^2Hr\delta^3+16C^2H\delta^4+8C^2r\delta^3+8C^2\delta^3$$

$$
\begin{aligned}
&+64Cr^2H^3\delta^4+32C(Hr)^2\delta^4+32C(Hr)^2\delta^3+64CrH^2\delta^4+12CH(r\delta)^2+32CHr\delta^4\\
&+16CHr\delta^3+16CH\delta^4+2C(r\delta)^2+4Cr\delta^2+8C\delta^4+64r^2H^3\delta^4+16(Hr)^2\delta^3\\
&+64H^2r\delta^4+4H(r\delta)^2 16Hr\delta^3+16H\delta^4-r^2\delta+4\delta^3\Big)\\
\leq\ &\Big(2Cr^2+4Hr^2+2C^3r^2+4CHr^2+4C^2Hr^2+4C^3Hr^2\Big)\delta^2\\
&+\Big(32C^3(Hr\delta)^2+16C^3H(r\delta)^2+16C^3Hr\delta^2+8C^3r\delta^2+32(CHr\delta)^2+12H\delta(Cr)^2\\
&+16Hr(C\delta)^2+4(Cr)^2\delta+2C^2r\delta+32C(Hr\delta)^2+16CH(r\delta)^2+8CHr^2\delta+16CHr\delta^2\Big)\delta\\
&+\Big(8Cr\delta^2+32(Hr\delta)^2+4Hr^2\delta+16Hr\delta^2+2r\delta+64(CH)^3r^2\delta^4+32C^3(Hr)^2\delta^4\\
&+64C^3H^2r\delta^4+32C^3Hr\delta^4+16C^3H\delta^4+8C^3\delta^4+64(Cr)^2H^3\delta^4+48(CHr)^2\delta^3\\
&+64(CH)^2r\delta^4+16(Cr)^2H\delta^3+40C^2Hr\delta^3+16C^2H\delta^4+8C^2r\delta^3+8C^2\delta^3\\
&+64Cr^2H^3\delta^4+32C(Hr)^2\delta^4+32C(Hr)^2\delta^3+64CrH^2\delta^4+12CH(r\delta)^2+32CHr\delta^4\\
&+16CHr\delta^3+16CH\delta^4+2C(r\delta)^2+4Cr\delta^2+8C\delta^4+64r^2H^3\delta^4+16(Hr)^2\delta^3\\
&+64H^2r\delta^4+4H(r\delta)^2 16Hr\delta^3+16H\delta^4-r^2\delta+4\delta^3\Big).
\end{aligned}
$$

Reescrevendo esta última expressão como um polinômio em δ e fatorando δ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\delta\Big[\ \big(64(CH)^3r^2+32C^3(Hr)^2+64C^3H^2r+32C^3Hr+16C^3H+8C^3+64H^3(Cr)^2\\
&+64(CH)^2r+16C^2H+64CH^3r^2+32C(Hr)^2+64CrH^2+32CHr+16CH+8C\\
&+64H^3r^2+64H^2r+16H\big)\,\delta^3+\big(32C^3(Hr)^2+16Hr^2C^3+16HrC^3+80(CHr)^2\\
&+16H(Cr)^2+48HrC^2+64C(Hr)^2+16CHr^2+32CHr+48(Hr)^2\\
&+32Hr+8C^2r+8C^3r+8Cr+4C^2+4\big)\,\delta^2+\big(2C^3r^2+4(Cr)^2\\
&+2C^2r+4Cr^2+4Cr+2r\big)\,\delta-r^2\Big].
\end{aligned}
$$

Consequentemente, escolhendo $\delta\leq 1$ temos que $Q_H[w]\leq 0$ para $0\leq d\leq\delta$ se

$$
\begin{aligned}
&\big(64(CH)^3r^2+32C^3(Hr)^2+64C^3H^2r+32C^3Hr+16C^3H+8C^3+64H^3(Cr)^2\\
&+64(CH)^2r+16C^2H+64CH^3r^2+32C(Hr)^2+64CrH^2+32CHr+16CH+8C\\
&+64H^3r^2+64H^2r+16H\big)\,\delta^3+\big(32C^3(Hr)^2+16Hr^2C^3+16HrC^3+80(CHr)^2\\
&+16H(Cr)^2+48HrC^2+64C(Hr)^2+16CHr^2+32CHr+48(Hr)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+32Hr+8C^2r+8C^3r+8Cr+4C^2+4\big)\,\delta^2+\big(2C^3r^2+4(Cr)^2\\
&+2C^2r+4Cr^2+4Cr+2r\big)\,\delta-r^2\leq 0.
\end{aligned}
$$

Agora reescrevendo os coeficientes de δ como um polinômio quadrático em r e isolando δ obtemos que $Q_H[w]\leq 0$ para $0\leq d\leq\delta\leq 1$ se $\delta\leq\dfrac{r^2}{\alpha r^2+\beta r+\gamma}:=f(r)$, onde

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (64(C^3+C^2+C+1))H^3+(64C^3+80C^2+96C+48)H^2\\
&\quad+(20C^3+32C^2+40C+12)H+(2C^3+4C^2+4C),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= (64(C^3+C^2+C+1))H^2+(48(C^3+C^2)+32(2C+1))H\\
&\quad+(8C^3+10C^2+12C+2)\ \ e
\end{aligned}
$$

$$
\gamma = (16(C^3+C^2+C+1))H+(4(2C^3+C^2+2C+1)).
$$

Mostramos pelos métodos do cálculo diferencial, usando o fato de que C é não-negativo, que $f(r)$ é crescente. Então tem-se que

$$
\delta:=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}=f(1)\leq f(r),\ \ \forall r\geq 1
$$

que é o caso, por hipótese, de modo que $Q_0[w]\leq 0$ se $0\leq d\leq\delta$ para $\delta=\dfrac{1}{\phi}$, onde

$$
\begin{aligned}
\phi &= (64(C^3+C^2+C+1))H^3+(16(8C^3+9C^2+10C+7))H^2\\
&\quad(12(7C^3+8C^2+10C+5))H+6(3C^3+3C^2+4C+1).
\end{aligned}
$$

Em suma, definindo δ como acima, e tomando

$$
b=\frac{1}{2\delta^2\left(\frac{1}{r}+2H\right)},
$$

temos que $Q_H[w]\leq 0$ em $\mathcal{N}_p:=\{x\in\Omega\mid 0\leq d(x)\leq\delta\}$. Além disso $w(p)=\varphi(p)$ visto que $\psi\left(d(p)\right)=\psi(0)=0$ por (6.1.3). Consequentemente, para garantir que w é uma barreira local superior para Q_H em $\mathcal{N}_p$ é suficiente provar que w satisfaz

$$
w|_{\partial\mathcal{N}_p}\geq u|_{\partial\mathcal{N}_p}, \tag{6.2.4}
$$

se u é uma solução de $Q_H[v]=0$ satisfazendo $v|_{\partial\Omega}=\varphi$.

Note que com as escolhas acima temos

$$\psi(d) = \frac{1}{\phi} \ln \left(\frac{\phi^2}{2\left(\frac{1}{r} + 2H\right)} d + 1 \right). \tag{6.2.5}$$

Em $\partial \mathcal{N}_p \cap \partial\Omega$ temos $u = \varphi$ de modo que (6.2.4) é satisfeita nestes pontos.

Observe agora que $\sup\limits_{\Omega}|u(x)| \leq M + h_{R,H}$. Com efeito, aplicando o resultado (3.3.6) obtemos

$$\sup_{\Omega} |u(x)| \leq M + \frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R^2} = M + \frac{R^2 H}{1 + \sqrt{1 - (RH)^2}} = M + h_{R,H}.$$

De fato, pois $\frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - R^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1 - (RH)^2}{H^2}} \\
&= \frac{1}{H} - \frac{\sqrt{1 - (RH)^2}}{H} \\
&= \frac{R^2 H}{(RH)^2} - \frac{R^2 H \sqrt{1 - (RH)^2}}{(RH)^2} \\
&= \frac{R^2 H - R^2 H \sqrt{1 - (RH)^2}}{(RH)^2} \\
&= \frac{\left(R^2 H\right)\left(1 - \sqrt{1 - (RH)^2}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 - (RH)^2}\right)\left(1 - \sqrt{1 - (RH)^2}\right)} \\
&= \frac{R^2 H}{1 + \sqrt{1 - (RH)^2}}.
\end{aligned}$$

Observe que em $\partial \mathcal{N}_p \backslash \partial\Omega$ temos

$$w(x) = \varphi(x) + \psi(\delta) \geq \psi(\delta)$$

pois foi assumido no início que $\varphi \geq 0$ em $\overline{\Omega}$.

Portanto (6.2.4) é satisfeita em $\partial \mathcal{N}_p \backslash \partial\Omega$ se $\psi(\delta) \geq M + h_{R,H}$, i.e., se

$$\frac{1}{\phi} \ln \left(\frac{\phi^2}{2\left(\frac{1}{r} + 2H\right)} \frac{1}{\phi} + 1 \right) \geq M + h_{R,H}. \tag{6.2.6}$$

Esta última desigualdade é implicada por (6.2.2) e (6.2.3). De fato, por (6.2.3) temos que

$$1 \geq \frac{2}{r}\left(e^{\phi(M+h_{R,H})} - 1\right) \tag{6.2.7}$$

e, também por (6.2.2) que

$$4 \geq 4He^{\phi(M+h_{R,H})} \geq 4H\left(e^{\phi(M+h_{R,H})} - 1\right). \tag{6.2.8}$$

Agora, somando (6.2.7) e (6.2.8) obtemos (6.2.6) :

$$\begin{aligned} 5 \geq \left(\frac{2}{r} + 4H\right)\left(e^{\phi(M+h_{R,H})} - 1\right) \qquad &\Longrightarrow \\ \phi \geq 5 \geq \left(\frac{2}{r} + 4H\right)\left(e^{\phi(M+h_{R,H})} - 1\right) \qquad &\Longrightarrow \\ \frac{1}{\phi}\ln\left(\frac{\phi}{2\left(\frac{1}{r} + 2H\right)} + 1\right) \geq M + h_{R,H}. & \end{aligned}$$

Resta observar que se as condições (6.2.1), (6.2.2) e (6.3.3) são satisfeitas para H e φ então também são satisfeitas para tH e $t\varphi$ com $0 \leq t \leq 1$. De fato, pois

$$RtH \leq RH \leq 1$$

prova a afirmação para (6.2.1), além disso $h_{\Omega,tH} \leq h_{\Omega,H}$:

$$\begin{aligned} R^2tH &\leq R^2H \\ \Longrightarrow -R^2tH &\geq -R^2H \\ \Longrightarrow 1 - R(tH)^2 &\geq 1 - (RH)^2 \\ \Longrightarrow \sqrt{1 - R(tH)^2} &\geq \sqrt{1 - (RH)^2} \\ \Longrightarrow 1 + \sqrt{1 - R(tH)^2} &\geq 1 + \sqrt{1 - (RH)^2} \\ \Longrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{1 - R(tH)^2}} &\leq \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (RH)^2}} \\ \Longrightarrow \frac{R^2tH}{1 + \sqrt{1 - R(tH)^2}} &\leq \frac{R^2H}{1 + \sqrt{1 - (RH)^2}} \end{aligned}$$

portanto definindo $M_t := \sup_{\Omega} t\varphi$ obtemos

$$tHe^{t\phi(M_t+h_{\Omega,tH})} \leq He^{\phi(M+h_{\Omega,H})} \leq 1$$

que prova a afirmação para (6.2.2) e, também

$$\begin{aligned} e^{t\phi(M_t+h_{\Omega,tH})} &\leq e^{\phi(M+h_{\Omega,H})} \\ \Longrightarrow 2\left(e^{t\phi(M_t+h_{\Omega,tH})}-1\right) &\leq 2\left(e^{\phi(M+h_{\Omega,H})}-1\right) \leq r \end{aligned}$$

prova a afirmação para (6.3.3).

A parte de existência deste teorema é agora obtida pelo Método da Continuidade e a unicidade é garantida pelo Teorema 3.3.2. $\square$

6.3 Terceiro Teorema

Em geometria espacial, uma calota cilíndrica é um pedaço de um cilindro cortado por um plano. A figura abaixo mostra uma calota cilíndrica de altura h e raio d cortada de uma esfera de raio R. Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$(R-h)^2 + d^2 = R^2 \Longrightarrow (R-h)^2 = R^2 - d^2.$$

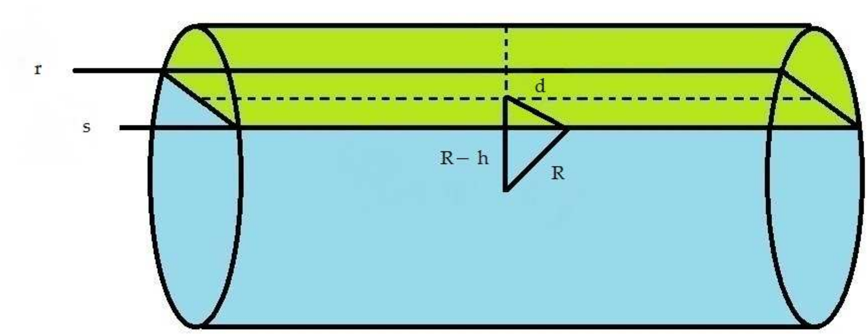

Figura 6.3.2: Calota Cilíndrica

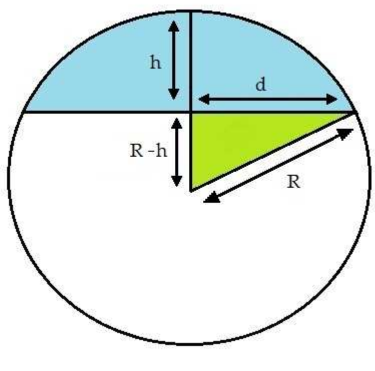

Figura 6.3.3: Calota Cilíndrica de Perfil

Como $R = \dfrac{1}{2H}$ para o cilindro, a igualdade acima pode ser reescrita assim:

$$\left(\frac{1}{4H^2} - h\right)^2 = \frac{1}{4H^2} - d^2.$$

Teorema 6.3.1 *Seja $H \geq 0$ um número real e seja Ω um domínio limitado de uma faixa Λ de largura $\bar{d} = 2d$ contida em $\mathbb{R}^2$. Assuma que são válidas as hipóteses*

$$\bar{d}H \leq 1; \tag{6.3.1}$$

$$He^{\phi(M+\frac{h_{d,H}}{2})} \leq 1; \tag{6.3.2}$$

$$r \geq \max\left\{2\left(e^{\phi(M+h_{d,H})} - 1\right), 1\right\}. \tag{6.3.3}$$

Então o problema (1.0.1) é solúvel e a solução é única.

Demonstração:

Os passos são exatamente como na prova do Teorema 6.2.1 até a obtenção da expressão de $\psi(d)$ em (6.2.5). Daquele ponto em diante observamos que, ao invés da estimativa de altura $\sup_\Omega |u(x)| \leq M + h_{R,H}$ temos a estimativa $\sup_\Omega |u(x)| \leq M + \dfrac{h_{d,H}}{2}$. Isto segue do fato que, pelo Teorema 3.3.1, o Princípio da Comparação, o gráfico de u tem que estar abaixo da translação vertical, M unidades acima, da calota do cilindro de curvatura média constante H, que tem como limite as linhas retas da faixa Λ. A justificativa desta parte segue o mesmo raciocínio da estimativa (3.3.6). A prova então termina como no Teorema 6.2.1. $\square$

Referências

[1] Ripoll, J. e Sauer, L. "A note on the Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Nonconvex Planar Domains", Revista Matemática Contemporânea, Vol. 34, 2008.

[2] Ripoll, J. "Some Characterization, uniqueness and existence results for Euclidean graphs of constant mean curvature with planar boundary", *Pacific Journal of Math., Vol. 198, n^o 1, 2001.*

[3] Gilbarg, D. e Trudinger, N.S, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", *Springer-Verlag, 2^{nd} edition, 1998.*

[4] Finn, R. "On equations of Minimal Surface Type", *Annals of Mathematics, n^o 60, págs. 397-416, 1954.*

[5] Evans, L. "Partial Differential Equations", *American Mathematical Society, 1998.*

[6] Carmo, M. P. do "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies", *Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.*

[7] Serrin, J. "The Dirichlet Problem for Surfaces of Constant Mean Curvature", *Proc. of London Math. Society, (3) 21, 361-384, 1970.*

[8] Serrin, J. "The Problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables", *Philos. Trans. Roy. Soc. Londo Ser. A 264 págs 413-496.*