

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ADVECTIVO-DIFUSIVA UTILIZANDO REGRAS PARA
MANIPULAÇÃO DE EXPONENCIAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS E SIMETRIAS
DE LIE: APLICAÇÕES EM ENGENHARIA AMBIENTAL

por

Cristiana Andrade Poffal

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, novembro de 2005

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ADVECTIVO-DIFUSIVA UTILIZANDO REGRAS PARA
MANIPULAÇÃO DE EXPONENCIAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS E SIMETRIAS
DE LIE: APLICAÇÕES EM ENGENHARIA AMBIENTAL

por

Cristiana Andrade Poffal
Mestre em Matemática Aplicada

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Jorge Rodolfo Zabadal

Aprovada por:

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas, PUC/RS

Prof. Dra. Adriane Prisco Petry, PROMEC

Prof. Dr. Sérgio Bogado Leite,

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 25 de novembro de 2005.

Aos meus amados pais, Paulo e Sonia,
ao meu amor, Eduardo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por ter me dado a vida, a coragem para ultrapassar todos os obstáculos, a perseverança para que eu não desistisse de continuar a árdua caminhada até findar este trabalho.

Aos meus pais, Paulo e Sonia, pelo amor, dedicação, pela vida, por tudo... desde o princípio. Ao meu pai, pelos ensinamentos, pelo exemplo de honestidade, sinceridade e humildade. Sem seu estímulo e conversas jamais teria chegado aqui. À minha mãe, pelo amor, pela companhia, pela compreensão e apoio em todos os momentos.

Aos meus avós Omar e Íris, Rubem e Jurema pelo amor e carinho.

Ao meu amor, Eduardo, pela paciência, pelo companheirismo, pela compreensão, pelo amor incondicional e pelo sorriso que ilumina minha vida.

Ao meu tio e padrinho Silvio por toda força, atenção e carinho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Zabadal, pela dedicação e paciência, pelas lições de bom humor e diplomacia, pelo exemplo como professor e orientador, certamente não há outro igual.

Aos compadres Valdecir e Rejane pelo incentivo.

À Luana e à Giovana pelo doce sorriso e pelas brincadeiras que me fizeram sorrir e esquecer por alguns instantes as dificuldades.

A todos familiares e amigos que torceram pelo sucesso na realização deste trabalho.

RESUMO

Vários métodos analíticos, numéricos e híbridos podem ser utilizados na solução de problemas de difusão e difusão-advecção. O objetivo deste trabalho é apresentar dois métodos analíticos para obtenção de soluções em forma fechada da equação advectivo-difusiva em coordenadas cartesianas que descreve problemas de dispersão de poluentes na água e na atmosfera. Um deles é baseado em regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais, e o outro consiste na aplicação de simetrias de Lie admitidas por uma equação diferencial parcial linear. Desenvolvem-se regras para manipulação de exponenciais de operadores diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes e para operadores advectivo-difusivos. Nos casos em que essas regras não podem ser aplicadas utiliza-se uma formulação para a obtenção de simetrias de Lie, admitidas por uma equação diferencial, via mapeamento. Define-se um operador diferencial com a propriedade de transformar soluções analíticas de uma dada equação diferencial em novas soluções analíticas da mesma equação. Nas aplicações referentes à dispersão de poluentes na água, resolve-se a equação advectivo-difusiva bidimensional com coeficientes variáveis, realizando uma mudança de variáveis de modo a reescrevê-la em termos do potencial velocidade e da função corrente correspondentes ao respectivo escoamento potencial, estendendo a solução para domínios de contornos arbitrários. Na aplicação referente ao problema de dispersão de poluentes na atmosfera, realiza-se uma mudança de variáveis de modo a obter uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes na qual se possam aplicar as regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais. Os resultados numéricos obtidos são comparados com dados disponíveis na literatura. Diversas vantagens da aplicação das formulações apresentadas podem ser citadas, a saber, o aumento da velocidade de processamento, permitindo a obtenção de solução em tempo real; a redução da quantidade de memória requerida na realização de operações necessárias para a obtenção da solução analítica; a possibilidade de dispensar a discretização do domínio em algumas situações.

ABSTRACT

SOLUTION OF THE ADVECTION-DIFFUSION EQUATION USING RULES FOR MANIPULATION OF EXPONENTIAL OF DIFFERENTIAL OPERATORS AND LIE SYMMETRIES: APPLICATIONS IN ENVIRONMENTAL ENGINEERING

Several analytical, numerical and hybrid methods can be used to solve diffusion and advection diffusion problems. The aim of this work is to present two analytical methods to obtain closed form solutions of the advection diffusion equation in a Cartesian coordinate system which describes the pollutant dispersion in water and in the atmosphere: one is based on rules for manipulation of exponential of differential operators, and the other, consists on the application of Lie symmetries admitted by the partial differential equation. Rules for manipulation of exponential of second order differential operators with constant coefficients and for manipulation of exponential of advection-diffusion operators are developed. In cases in which the rules can not be applied, a formulation to obtain Lie symmetries admitted by a partial differential equation, via mapping, is used. A differential operator which transforms analytical solutions of a given differential equation in new analytical solutions of the same equation is defined. Considering problems of pollutant dispersion in water, a change of variables is applied to the two-dimensional advection diffusion equation with variable coefficients in order to write it in terms of the velocity potential and of the stream function that correspond to the potential flow, extending the solution to domains of arbitrary geometry. In order to solve the problem related to pollutant dispersion in the atmosphere, a change of variables is performed in order to obtain a partial differential equation with constant coefficients in which the rules for manipulation of exponential of differential operators can be applied. Numerical results are compared with available data in literature. Many advantages of the application of the rules for manipulation of differential operators can be cited: the increasing of the processing speed which allows obtaining the solution in real time, the reduction of the amount of memory required to perform the post-processing tasks in order to obtain the analytical solution, the possibility dispensing the domain discretization in some cases.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão Bibliográfica.....	4
2	REGRAS OPERACIONAIS PARA MANIPULAÇÃO DE EXPONENCIAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS	8
2.1	Regra para a manipulação de exponencial de um operador diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes	8
2.2	Regra para a manipulação de exponencial de um operador diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes.....	11
2.3	Regra de manipulação de exponencial de operadores diferenciais com coeficientes variáveis.....	13
2.3.1	Obtenção das variáveis h e g	16
3	OBTENÇÃO DE SIMETRIAS DE LIE VIA MAPEAMENTO	19
3.1	Construção do operador diferencial responsável pelo mapeamento	19
4	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ADVECTIVO-DIFUSIVA APLICADA À DISPERSÃO DE CONTAMINANTES NA ÁGUA	27
4.1	Descrição matemática do problema	27
4.2	Obtenção da equação advectivo-difusiva em coordenadas curvilíneas ortogonais	30
4.3	Solução da equação advectivo-difusiva em coordenadas curvilíneas aplicada à dispersão de poluentes provenientes de redes de esgoto	34
4.4	Solução da equação advectivo-difusiva em coordenadas curvilíneas aplicada à simulação de acidentes com cargas tóxicas	38

5	PROBLEMA DE DISPERSÃO DE CONTAMINANTES NO AR.....	40
5.1	Descrição matemática do problema.....	40
5.2	Processo de obtenção da solução.....	41
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	46
6.1	Problemas de dispersão de contaminantes na água	46
6.1.1	Simulação de dispersão de cargas de esgoto	49
6.1.1.1	Simulação na região do Gasômetro.....	51
6.1.1.2	Simulação na região do Estaleiro Só	54
6.1.1.3	Simulação para região de Ipanema	56
6.1.1.4	Simulação para região de Belém Novo	58
6.1.1.5	Simulação para região do Lami	60
6.1.2	Simulação de acidentes com cargas tóxicas	63
6.1.2.1	Simulação de acidente com cargas tóxicas próximo a Déa Coufal	65
6.1.2.2	Simulação de acidente com cargas tóxicas próximo a Riocell	67
6.2	Problemas de Dispersão de Contaminantes no Ar	70
7	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	79
	APÊNDICE I	86
	APÊNDICE II	104

LISTA DE SÍMBOLOS

$a(x, y)$	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
$b(x, y)$	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
A	Operador diferencial	
B	Operador diferencial	
C	Concentração de poluente	[kg/m ³]
$c_0(x, y)$	Condição inicial do problema de dispersão de poluentes	[kg/m ³]
D	Coefficiente de difusão	[m ² /s]
$f(x)$	Função que representa a margem no problema de dispersão de poluentes na água	
f_k	Soluções exatas de uma equação diferencial	
$F1$	Função arbitrária obtida como solução de uma equação diferencial	
g	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
h	Variável no mapeamento entre equações diferenciais	
h_e	Altura da camada limite estável	[m]
h_F	Altura da fonte	[m]
I	Operador identidade	
k	Constante de decaimento do poluente	[s ⁻¹]
K_x	Coefficiente de difusão na direção x	[m ² /s]
K_y	Coefficiente de difusão na direção y	[m ² /s]
K_z	Coefficiente de difusão na direção z	[m ² /s]
L	Comprimento de Monin-Obukov no experimento de Minnesota	[m]
Q	Termo de fonte da equação advectivo-difusiva	[Kg/m ³ /s]
t	Tempo decorrido desde o despejo da carga	[s]
u	Componente da velocidade na direção x	[m/s]
U_∞	Velocidade do escoamento livre	[m/s]
v	Componente da velocidade na direção y	[m/s]
w	Componente da velocidade na direção z	[m/s]
x	Coordenada cartesiana	[m]
y	Coordenada cartesiana	[m]
z	Coordenada cartesiana	[m]

LISTA DE SÍMBOLOS GREGOS

α	Parâmetro no ajuste da função corrente	
β	Parâmetro no ajuste da função corrente	
α_1	Constante experimental usada para determinar o comprimento de Monin-Obukov	
α_2	Constante experimental usada para determinar o comprimento de Monin-Obukov	
$\delta(x)$	Função Delta de Dirac	
Λ	Comprimento de Monin-Obukov local	[m]
Φ	Potencial Velocidade	
Φ_0	Abscissa do centro da mancha no sistema de coordenadas curvilíneas	[m]
Ψ	Função corrente	
Ψ_0	Ordenada do centro da mancha no sistema de coordenadas curvilíneas	[m]
ω	Variável da transformada de Fourier	

ÍNDICE DE FIGURAS

6.1	Mapa temático do lago Guaíba	47
6.2	Distribuição de concentração de coliformes na região do Gasômetro obtida por soluções formais	52
6.3	Distribuição de concentração de coliformes na região do Gasômetro obtida por transformada de Fourier	53
6.4	Distribuição de concentração de coliformes na região do Gasômetro obtida por soluções formais com o modelo de cinética utilizado por Lersch et al. (1999)	54
6.5	Distribuição de concentração de coliformes na região do Estaleiro Só obtida por soluções formais.....	55
6.6	Distribuição de concentração de coliformes na região do Estaleiro Só obtida por Lersch et al (1999)	56
6.7	Distribuição de concentração de coliformes na região de Ipanema obtida por soluções formais.....	57
6.8	Distribuição de concentração de coliformes na região de Ipanema obtida por transformada de Fourier	58
6.9	Distribuição de concentração de coliformes na região de Belém Novo obtida por soluções formais	59
6.10	Distribuição de concentração de coliformes na região de Belém Novo obtida por Lersch et al (1999)	60
6.11	Distribuição de concentração de coliformes no Lami obtida por soluções formais ..	61
6.12	Distribuição de concentração de coliformes no Lami obtida por Lersch et al (1999)	62
6.13	Local de despejo próximo à Déa Coufal e trajetória a mancha	65
6.14	Extensão da mancha poluente próximo ao Arado Velho obtida por simetrias de Lie	66
6.15	Extensão da mancha poluente próximo ao Arado Velho obtida por Zabadal (2000)	67
6.16	Local de despejo e trajetória a mancha próximo à Riocell	68
6.17	Extensão da mancha poluente próximo à Barra do Ribeiro obtida por simetrias de Lie	69
6.18	Extensão da mancha poluente próximo ao Arado Velho obtida por Zabadal (2000)	70
6.19	Evolução temporal da concentração para $z = 80$ m com fonte puntual a 12,5m do solo	74

6.20 Comparativo de evolução temporal da concentração de contaminante para $z=80\text{m}$ com fonte puntual a 12,5m do solo entre os resultados do método proposto e os de Moura (1995)	75
---	----

ÍNDICE DE TABELAS

6.1	Classificação das águas doces quanto à concentração de coliformes fecais	51
-----	--	----

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o interesse no estudo de dispersão de contaminantes na atmosfera e em meio aquático tem aumentado consideravelmente em consequência dos problemas ambientais causados tanto pelo aumento da população, quanto pelo desenvolvimento industrial e tecnológico.

A equação advectivo-difusiva que descreve matematicamente esses fenômenos de dispersão de contaminantes é dada por

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} + kC = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + Q, \quad (1.1)$$

onde C é a concentração de contaminante, t é o tempo decorrido desde a emissão do contaminante, K_x , K_y e K_z correspondem aos coeficientes de difusão nas respectivas variáveis espaciais, u , v e w são as componentes do vetor velocidade nas direções x , y e z , respectivamente, k é a constante de decaimento do poluente e Q é o termo de fonte.

Diversos métodos analíticos, numéricos e híbridos para resolver a equação (1.1) podem ser encontrados na literatura (Zwillinger, 1997), mas ainda não são conhecidas soluções analíticas para diversos problemas de grande interesse em engenharia ambiental. O emprego de soluções analíticas possui várias vantagens em relação às numéricas: a solução é expressa em forma fechada e os códigos-fonte baseados nestas soluções são executados em um tempo menor de processamento, uma vez que há uma redução no número de operações a serem realizadas e, em consequência disso, há uma diminuição significativa da quantidade de memória requerida para a execução das rotinas necessárias para a obtenção da solução.

O objetivo deste trabalho é apresentar dois métodos analíticos para obtenção de soluções para a equação advectivo-difusiva em coordenadas cartesianas que descreve os fenômenos de dispersão de contaminantes no ar e na água. Um dos métodos consiste na

obtenção, via mapeamento, das simetrias de Lie admitidas pela equação diferencial parcial a ser resolvida, isto é, mudanças de variáveis que ao serem aplicadas a uma equação diferencial preservam sua forma, de modo que transformam soluções analíticas em novas soluções analíticas da equação original. Essas novas soluções contêm maior número de elementos arbitrários (funções ou constantes) podendo, assim, satisfazer a uma classe mais ampla de condições de contorno. O outro se baseia na aplicação de regras para manipulação de exponenciais de operadores diferenciais presentes na solução formal da equação diferencial parcial. Essas regras são utilizadas para transformar soluções formais em expressões de fácil implementação.

Desenvolvem-se regras para a manipulação de exponenciais dos operadores diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes e para operadores advectivo-difusivos com coeficientes variáveis, presentes na solução formal da equação diferencial parcial que descreve o problema de dispersão de poluentes na atmosfera. Sophus Lie obteve a regra para manipulação de exponencial de operadores diferenciais de primeira ordem (Ibragimov, 1995). A aplicação dessas regras tem se mostrado eficiente na solução de problemas em mecânica quântica (Zabadal et al., 2001) e mecânica dos fluidos (Zabadal et al., 2004^a), e estão começando a ser utilizadas para solucionar problemas em dispersão de contaminantes no ar (Zabadal et al., 2004^b) e na água (Zabadal et al., 2005^a).

Nas situações onde as regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais não podem ser aplicadas, utiliza-se a formulação para a obtenção, via mapeamento, das simetrias de Lie admitidas por estas equações diferenciais parciais lineares.

A utilização das simetrias de Lie tem o intuito de viabilizar a obtenção de soluções analíticas em microcomputadores, reduzindo a quantidade de memória requerida na realização das operações necessárias para a obtenção da solução analítica, aumentando consideravelmente a velocidade de processamento e permitindo, dessa forma, a determinação de soluções em tempo real. Em muitas situações, o emprego de simetrias de Lie dispensa a discretização do domínio.

Com o objetivo de mostrar a eficiência das formulações propostas, apresentam-se simulações de dispersão de poluentes na água e na atmosfera. Na aplicação em poluição aquática são simulados separadamente dois tipos de problemas: a propagação de poluentes provenientes de descargas de esgoto doméstico e a dispersão de contaminantes devido à ocorrência de acidentes com cargas tóxicas causados por embarcações. No problema relativo à emissão de cargas de esgoto, o principal objetivo consiste na avaliação da qualidade da água através da análise da concentração de coliformes fecais como indicativo do comprometimento ambiental da água por descargas de esgoto doméstico. Esta análise possibilita a obtenção de dados para que as autoridades competentes possam planejar as localizações de estações de tratamento de esgoto e

divulgar os locais impróprios para banho e lazer à população. Já no caso de acidentes com cargas tóxicas, o principal objetivo é avaliar o impacto ambiental causado pelo derramamento de uma substância tóxica em um corpo hídrico, avaliando, em tempo real, as áreas afetadas e o tempo de residência correspondente, acompanhando a trajetória do despejo e estimando sua extensão junto a pontos de interesse. Dessa forma, é possível determinar a gravidade do problema, permitindo que as autoridades competentes sejam alertadas e tomem medidas preventivas, como, por exemplo, fechar as estações de abastecimento de água atingidas, evitando que a população receba esta água contaminada. Em poluição atmosférica, considera-se a camada limite estável e simula-se a dispersão vertical de contaminantes emitidos por uma chaminé, correspondente a uma fonte puntual. Esta aplicação é importante para a análise da qualidade do ar.

A fim de se obter soluções em poluição aquática, realiza-se uma mudança de variáveis na equação advectivo-difusiva bidimensional, reescrevendo-a em termos de funções arbitrárias do potencial velocidade e da função corrente correspondentes ao respectivo escoamento potencial. Essa mudança de variáveis tem como objetivo mapear a equação original em uma outra equação diferencial parcial com coeficientes constantes, além de estender a aplicação do método a domínios de geometrias irregulares. Em poluição atmosférica, resolve-se a equação advectivo-difusiva considerando apenas difusão vertical e utilizando o coeficiente de dispersão obtido por Degrazia et al. (1992). No processo de solução desse problema são desenvolvidas as regras de manipulação para exponenciais de operadores difusivos com coeficientes variáveis, que podem ser utilizadas em domínios cujos contornos são suaves.

Este trabalho encontra-se estruturado em sete capítulos. No capítulo 2, mostram-se as regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais. No capítulo 3, apresenta-se a formulação para obtenção, via mapeamento, de simetrias de Lie admitidas por equações diferenciais parciais lineares. No capítulo 4, descreve-se o processo de obtenção das soluções da equação advectivo-difusiva com coeficientes variáveis relativo à dispersão de contaminantes na água, considerando-se separadamente os problemas de dispersão de contaminantes provenientes da emissão de cargas de esgoto e de acidentes com cargas tóxicas causados por embarcações. No capítulo 5, mostra-se a solução da equação advectivo-difusiva aplicada à dispersão de contaminantes na atmosfera. No capítulo 6, apresentam-se os resultados numéricos obtidos para as simulações realizadas. Finalmente, no capítulo 7, resumem-se as conclusões decorrentes das formulações propostas e sugerem-se trabalhos futuros.

1.1 Revisão Bibliográfica

Diversos métodos numéricos podem ser utilizados para resolver a equação advectivo-difusiva, entre eles podem ser citados, o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos. O primeiro aproxima as derivadas parciais das equações diferenciais por quocientes de diferenças de valores das variáveis incógnitas escolhidos em pontos discretos do domínio de cálculo. Dependendo da forma como são obtidas as equações de diferenças, o esquema numérico pode ser explícito ou implícito. No esquema explícito, as variáveis incógnitas têm seus valores definidos, em cada ponto do espaço, em função dos valores conhecidos dos intervalos de tempos anteriores. Quando isto não acontece, o esquema é implícito e resultam sistemas de equações algébricas onde as variáveis incógnitas são resolvidas simultaneamente a cada intervalo de tempo, geralmente em uma linha de espaço com condições de contorno definidas. Os simuladores que utilizam formulações em diferenças finitas em problemas cujo domínio possui geometria simples possuem boa velocidade de processamento e requerem quantidade de memória aceitável para os modelos de computadores atuais. Já em domínios com geometria de maior complexidade, a geração de malhas retangulares exige a discretização em um número elevado de elementos, sendo assim, se faz necessário o uso de malhas com densidade variável (Carnaham, 1972; Ortega et al., 1981; Böhm, 1981; Reali et al., 1984; Silveira, 1986; Greenspan et al., 1988; Casalas, 1996; Yang et al., 1998, Garcia, 1997) ou o emprego de coordenadas curvilíneas que se adaptem à geometria dos contornos (Churchill, 1975; Spiegel, 1977; Hauser et al., 1986). Rajar et al., em 1997, desenvolveram e aplicaram modelos bi e tridimensionais hidrodinâmicos, de transporte e dispersão baseados no esquema de diferenças finitas com a combinação de diferenças central e ascendente.

O método dos elementos finitos é versátil na representação de geometrias complexas, uma vez que possui geradores automáticos de malhas triangulares e hexagonais, permite a variação no tamanho dos elementos que compõem a malha e as condições de contorno podem ser facilmente implementadas (Dhaubabel et al., 1987; Silvestrini, 1989; Schettini, 1991). Mpimpas et al., em 2001, utilizaram o algoritmo bidimensional de elementos finitos associado à lógica *fuzzy* para obtenção de solução para a equação advectivo-difusiva que descreve as variáveis de qualidade da água. Em 2005, Silveira et al. apresentaram um modelo de dispersão de poluentes na atmosfera para regiões de relevo complexo, com base em um campo de ventos, utilizando o método de volumes finitos na solução das equações de conservação de massa de espécie química.

Também podem ser citados métodos híbridos utilizados para resolver problemas de advectivo-difusivos. Em 1991, Zabadal utilizou um método variacional (Reddy, 1986) que consistia na combinação da formulação variacional Petrov-Galerkin e um esquema de discretização virtual, no qual eram consideradas apenas a área e as coordenadas do centro dos elementos para efetuar numericamente a integração dos operadores diferenciais através do domínio. Esta formulação foi utilizada na simulação de propagação de coliformes fecais e oxigênio, produzindo bons resultados e apresentando velocidade de processamento aceitável. Porém, a escolha de funções de base depende essencialmente da natureza dos cenários a serem simulados e até o presente momento não foi elaborado um processo sistemático de seleção ou de construção de bases.

Em 1999, Lersch et al. desenvolveram uma formulação baseada na aplicação da transformada de Fourier para a obtenção de soluções aproximadas em forma fechada para a equação advectivo-difusiva em duas dimensões. Em 2000, Zabadal propôs uma extensão do método de supressão de componentes, desenvolvido com a finalidade de obter uma solução em forma fechada para problemas de poluição aquática. Esta formulação baseia-se no ajuste de funções presentes na solução formal por polinômios e gera bons resultados, mas apresenta o inconveniente de exigir uma quantidade elevada de operações simbólicas envolvendo as funções de base para a construção da solução final.

Zabadal et al. (2004^a) simularam o escoamento viscoso bidimensional em torno de corpos de geometrias arbitrárias. Resolveram a equação de Helmholtz, utilizando as regras de manipulação dos operadores diferenciais para obter uma solução em forma fechada para vorticidade. Também em 2004, Zabadal et al. (2004^b) resolveram um problema de dispersão de contaminantes no ar, considerando apenas a difusão vertical com o intuito de verificar a eficiência da aplicação das regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais neste tipo de problema. Ainda no mesmo ano, Zabadal et al. (2004^c) propuseram um método híbrido de obtenção de solução para problemas difusivos bidimensionais em regime estacionário em poluição aquática para corpos hídricos de contornos arbitrários. Este método utiliza variáveis complexas a fim de mapear a equação de Poisson no plano e uma transformação conforme é aplicada para converter o domínio em uma região retangular. Neste mesmo ano, Zabadal et al. (2004^d) apresentaram as regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais de segunda ordem e para operadores advectivo-difusivos. Dattoli et al., em 1998, apresentaram identidades operatórias de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais que foram aplicadas na solução de problemas em mecânica clássica e mecânica quântica.

Em 2005, Zabadal et al. (2005^a) propuseram um método baseado na aplicação das regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais para obtenção de solução para um problema em dispersão de poluentes em um corpo hídrico que se comporta como uma lâmina d'água. O problema supunha que o poluente não atingiria as margens em nenhuma região de sua trajetória e considerava que o campo de velocidades era localmente constante e previamente conhecido, o que acarretava a aplicação de um processo iterativo no qual cada solução obtida era utilizada como condição de passagem por pontos para a região seguinte. Também em 2005, Zabadal et al. (2005^b) propuseram um método baseado em um esquema iterativo para obtenção de uma seqüência soluções analíticas para a equação advectivo-difusiva aplicada a problemas de dispersão de poluentes na água.

Na década de 90, a transformada de Laplace foi bastante utilizada para obter soluções analíticas para a equação que descreve a dispersão de poluentes. Em 1995, Moura et al. obtiveram uma solução analítica para a equação difusiva considerando apenas dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável utilizando o coeficiente de dispersão proposto por Degrazia et al. (1992). Pires (1996) resolveu o mesmo problema para uma camada limite convectiva. Também em 1996, Moreira, utilizou o mesmo método para propor uma solução para o problema de dispersão bidimensional estacionário em uma camada limite convectiva. Em 2000, Moreira apresentou um modelo analítico para obtenção de solução da equação advectivo-difusiva baseado na discretização da camada limite. Em cada camada, a equação é resolvida através da transformada de Laplace considerando valores médios para o coeficiente de dispersão vertical e para a velocidade do vento. Em 2005, Moreira et al., obteve uma solução analítica para a equação advectivo-difusiva considerando fechamento não-local da turbulência na camada limite convectiva usando a transformada de Laplace.

Há também os sistemas baseados em transformações integrais que produzem soluções aproximadas em forma fechada utilizando sistemas de computação simbólica. Dentre eles, o método das transformadas integrais generalizadas constitui um algoritmo eficiente na avaliação de soluções analíticas para problemas lineares ou passíveis de linearização. O processo de aplicação da GITT (*General Integral Transform Technique*) consiste na solução do problema de Sturm-Liouville associado; na expansão da função incógnita em uma série em termos das autofunções obtidas; na substituição dessa série na equação advectivo-difusiva; na utilização da propriedade de ortogonalidade das autofunções, o que determina um sistema de equações diferenciais ordinárias, chamadas de equações transformadas; a resolução desse sistema fornece soluções exatas do problema. Em 1999, Moura obteve soluções analíticas para a equação

estacionária bidimensional e tridimensional através do uso da transformada integral generalizada para situações em que o contaminante está sujeito a turbulência homogênea e as velocidades do vento médio são uniformes. Em 2004, Buske obteve uma solução para um problema bidimensional advectivo-difusivo estacionário, considerando o coeficiente de dispersão variável, usando a transformada integral generalizada, na qual o sistema de equações transformadas é resolvido pela transformada de Laplace com inversão analítica. Em 2005, Costa et al. obtiveram uma solução analítica para a equação advectivo-difusiva bidimensional pelo método ADMM (*Advection Diffusion Multilayer Method*) que torna possível reproduzir o campo de concentração superficial de poluentes liberados por uma fonte contínua na camada limite estável. Também em 2005, Buske et al. apresentaram uma solução analítica para a concentração de contaminante na atmosfera resolvendo analiticamente a equação advectivo-difusiva bidimensional estacionária pelo método GILTT.

2 REGRAS OPERACIONAIS PARA MANIPULAÇÃO DE EXPONENCIAIS DE OPERADORES DIFERENCIAIS

A teoria de Lie teve suas origens no final do século XIX quando Marius Sophus Lie descobriu que os métodos utilizados para resolver as equações diferenciais a variáveis separáveis, homogêneas e exatas eram casos especiais de um processo de integração geral baseado na invariância da equação diferencial ordinária sobre grupos contínuos de simetria (Boyer, 2001). Estes grupos, conhecidos como grupos de Lie, tiveram impacto em várias áreas da matemática, física e engenharia (Ibragimov, 1995). Suas aplicações incluem diversos campos como análise numérica (Ibragimov, 1995), mecânica quântica (Zabada et al., 2001) e mecânica dos fluidos (Ibragimov, 1995; Zabada et al., 2004^a).

Neste capítulo, mostram-se as regras para manipulação de exponenciais de operadores diferenciais que foram aplicadas na solução da equação advectivo-difusiva. A aplicação dessas regras tem como principal objetivo tornar soluções formais das equações diferenciais, expressões de fácil implementação.

2.1 Regra para a Manipulação de Exponencial de um Operador Diferencial de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Nesta seção é apresentada a regra de manipulação para a exponencial de um operador diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes.

Considera-se uma equação diferencial de primeira ordem do tipo

$$\frac{dF}{dt} = AF, \quad (2.1)$$

cuja solução formal é dada por

$$F(t) = e^{\int_0^t A ds} F_0, \quad (2.2)$$

onde F_0 denota o valor da função para $t = 0$ (Zill, 2001).

Se A for um operador diferencial, isto é, por exemplo, se $A = -u \frac{\partial}{\partial x}$, tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -u \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (2.3)$$

então, a partir da solução formal dada por (2.2), obtém-se

$$F(x, t) = \left[e^{-\int_0^t u \frac{\partial}{\partial x} ds} \right] F_0(x). \quad (2.4)$$

Se u for considerado constante, a equação (2.4) pode ser reescrita como

$$F(x, t) = \left[e^{-ut \frac{\partial}{\partial x}} \right] F_0(x). \quad (2.5)$$

Aplica-se o operador $e^{-ut \frac{\partial}{\partial x}}$ sobre a função $F_0(x)$ utilizando a série de Taylor para a função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots, \quad (2.6)$$

e obtém-se

$$e^{-ut \frac{\partial}{\partial x}} = I - ut \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!} \left(ut \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(ut \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(ut \frac{\partial}{\partial x} \right)^k. \quad (2.7)$$

Ou seja,

$$e^{-ut \frac{\partial}{\partial x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(ut \frac{\partial}{\partial x} \right)^k. \quad (2.8)$$

Aplicando (2.8) em (2.5), tem-se

$$F(x,t) = \left[e^{-ut \frac{\partial}{\partial x}} \right] F_0(x) = F_0(x) - ut \frac{\partial}{\partial x} F_0(x) + \frac{1}{2!} \left(ut \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 F_0(x) - \frac{1}{3!} \left(ut \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 F_0(x) + \dots, \quad (2.9)$$

que pode ser reescrita como

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(ut \frac{\partial}{\partial x} \right)^k F_0(x). \quad (2.10)$$

Isto é,

$$F(x,t) = F_0(x) - ut \left. \frac{\partial F_0(x)}{\partial x} \right|_x + \frac{(ut)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 F_0(x)}{\partial x^2} \right|_x - \frac{(ut)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 F_0(x)}{\partial x^3} \right|_x + \dots, \quad (2.11)$$

ou ainda,

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (ut)^k \left. \frac{\partial^k F_0(x)}{\partial x^k} \right|_x. \quad (2.12)$$

Sabe-se que

$$F_0(x + \Delta x) = F_0(x) + \Delta x \left. \frac{\partial F_0}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \right|_x + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 F_0}{\partial x^3} \right|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^k}{k!} \left. \frac{\partial^k F_0}{\partial x^k} \right|_x \quad (2.13)$$

e se $\Delta x = -ut$ em (2.13), a comparação de (2.11) e (2.13) leva a

$$F(x,t) = F_0(x - ut). \quad (2.14)$$

Assim, obtém-se a regra para a exponencial de um operador diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes

$$\left[e^{c \frac{\partial}{\partial x}} \right] F(x) = F(x+c). \quad (2.15)$$

2.2 Regra para a Manipulação de Exponencial de um Operador Diferencial de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Nesta seção, apresenta-se a regra para a manipulação da exponencial de operador diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes (Zabada^d et al, 2004).

Considera-se uma equação diferencial de segunda ordem do tipo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = k \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (2.16)$$

cuja solução formal é dada por

$$F(x,t) = \left[e^{kt \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right] F(x,0). \quad (2.17)$$

Nesse caso, na prática, não é possível utilizar a série de Taylor para calcular $F(x,t)$ e obter uma propriedade análoga à deduzida para o operador diferencial de primeira ordem.

Para o desenvolvimento da regra para o operador diferencial de segunda ordem, considera-se o seguinte problema difusivo em meio infinito

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = k \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ F(x,0) = f_0(x). \end{cases} \quad (2.18)$$

Aplica-se a transformada de Fourier em (2.18) na variável x e obtém-se um novo problema (Kreyzig, 1993)

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{F}(\omega, t)}{\partial t} = -k\omega^2 \bar{F}(\omega, t) \\ \bar{F}(\omega, 0) = \bar{f}(\omega), \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $\bar{F}(\omega, t)$ corresponde à transformada de Fourier da função $F(x, t)$, ou seja, $\bar{F}(\omega, t) = \mathfrak{S}\{F(x, t)\}$; as transformadas de Fourier de $\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t)$ e $f_0(x)$ são dadas por

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t)\right\} = -\omega^2 \bar{F}(\omega, t) \quad (2.20)$$

e

$$\mathfrak{S}\{f_0(x)\} = \bar{f}(\omega), \quad (2.21)$$

respectivamente.

Resolvendo o problema (2.19), tem-se

$$\bar{F}(\omega, t) = e^{-k\omega^2 t} \bar{f}(\omega). \quad (2.22)$$

A transformada inversa de Fourier leva a

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-k\omega^2 t} \bar{f}(\omega) d\omega. \quad (2.23)$$

Como

$$\mathfrak{S}^{-1}\{e^{-k\omega^2 t}\} = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad (2.24)$$

pode-se utilizar o teorema da convolução e escrever

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} * f_0(x) \right], \quad (2.25)$$

onde o símbolo * representa o operador de convolução.

Então, chega-se a

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{4kt}} f_0(u) du, \quad (2.26)$$

que é a solução para o problema descrito por (2.18).

Finalmente, escreve-se a regra para a exponencial de um operador diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\left[e^{tk \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right] f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{4kt}} f_0(u) du. \quad (2.27)$$

2.3 Regra para Manipulação de Exponenciais de Operadores Diferenciais com Coeficientes Variáveis

As regras apresentadas anteriormente não podem ser aplicadas nos casos onde os coeficientes dos operadores diferenciais presentes na exponencial são variáveis. Em virtude disso, utiliza-se um mapeamento na equação original a fim de obter uma nova equação diferencial com coeficientes constantes que permite a aplicação das regras apresentadas. A solução assim obtida é também solução da equação original.

Com o intuito de obter uma regra para o caso de operadores diferenciais com coeficientes variáveis, considera-se o problema

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}, \quad (2.28)$$

sujeito à condição inicial

$$f(x,0) = Q(x). \quad (2.29)$$

A fim de que as regras obtidas para coeficientes constantes possam ser aplicadas, realiza-se uma mudança de variáveis sobre a equação (2.28) com o objetivo de obter uma nova equação diferencial parcial onde coeficientes dos operadores diferenciais são constantes, isto é, escreve-se

$$\frac{\partial f(h, g, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(h, g, t)}{\partial g} + \frac{\partial^2 f(h, g, t)}{\partial h^2}, \quad (2.30)$$

cuja solução formal é

$$f(h, g, t) = \left[e^{t \left(\frac{\partial}{\partial g} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \right)} \right] f(h, g, 0), \quad (2.31)$$

onde as variáveis h e g , obtidas através da regra da cadeia, são representadas por

$$h = \int \frac{1}{\sqrt{A(x)}} dx \quad (2.32)$$

e

$$g = \int \frac{2}{2B(x) - A'(x)} dx. \quad (2.33)$$

A obtenção da equação (2.30) em termos de g e h é mostrada na próxima subseção.

Aplicando a regra de manipulação para a exponencial de um operador diferencial de segunda ordem, dada pela equação (2.27), na variável h de (2.31), tem-se

$$f(h, g, t) = \left[e^{t \frac{\partial}{\partial g}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} f(h - \phi, g, 0) d\phi \right]. \quad (2.34)$$

A condição inicial dada pela equação (2.29) pode ser escrita em termos de h , ou seja,

$$f_0(h) = f_0(x(h)) = Q(x(h)), \quad (2.35)$$

onde $x(h)$ corresponde à inversa de $h(x)$.

Assim, a equação (2.34) pode ser reescrita como

$$f(h, g, t) = \left[e^{t \frac{\partial}{\partial g}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} Q(x(h - \phi)) d\phi \right]. \quad (2.36)$$

Uma vez que h pode ser escrito indiretamente em termos de g , obtém-se

$$f(h, g, t) = \left[e^{t \frac{\partial}{\partial g}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} Q(x(h(x(g)) - \phi)) d\phi \right]. \quad (2.37)$$

Aplicando a regra para a manipulação da exponencial do operador diferencial de primeira ordem dada pela equação (2.15) na variável g , obtém-se

$$f(h, g, t) = \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} Q(x(h(x(g+t)) - \phi)) d\phi \right]. \quad (2.38)$$

Como g pode ser reescrito em função de x , a solução da equação (2.28) pode ser expressa em termos das variáveis x e t , isto é,

$$f(x, t) = \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} Q(x(h(x(g(x)+t)) - \phi)) d\phi \right]. \quad (2.39)$$

Portanto, escreve-se a regra de manipulação para a exponencial de um operador advectivo-difusivo como

$$f(x,t) = \left[e^{t \left(A(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)} \right] f(x,0) = \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} Q(x(h(x(g(x)+t)) - \phi)) d\phi \right]. \quad (2.40)$$

Apesar do processo de obtenção da solução dada por (2.40) para o problema descrito pelas equações (2.28) e (2.29) parecer oneroso, ele é deduzido apenas uma vez. É importante salientar que a regra está sendo apresentada em forma genérica, sem a especificação dos parâmetros envolvidos na aplicação. Quando aplicada a exemplos práticos, o processo de obtenção da solução se torna direto.

2.3.1 Obtenção das Variáveis h e g

Nesta subsecção, mostra-se o processo de obtenção da equação diferencial parcial com coeficientes constantes representada pela equação (2.30) e das funções h e g representadas pelas equações (2.32) e (2.33), respectivamente.

Primeiramente, escreve-se

$$A(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial}{\partial g}, \quad (2.41)$$

utilizando a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.42)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial g} = \frac{1}{\left(\frac{dg}{dx} \right)} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.43)$$

Derivando a equação (2.42) em relação a h , obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)} \frac{\partial}{\partial x} \right], \quad (2.44)$$

isto é,

$\frac{\partial^2}{\partial h^2} = - \frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)^3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$	(2.45)
--	--------

Substituindo as equações (2.43) e (2.45) na equação (2.41), chega-se a

$$A(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left\{ \frac{1}{\left(\frac{dg}{dx} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)^3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.46)$$

onde os coeficientes dos operadores diferenciais de primeira e segunda ordem podem ser igualados em ambos membros da equação (2.46) de modo que

$$A(x) = \frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)^2} \quad (2.47)$$

e

$$B(x) = \frac{1}{\left(\frac{dg}{dx} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{dh}{dx} \right)^3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (2.48)$$

Assim, pode-se escrever que

$$h(x) = \int \frac{1}{\sqrt{A(x)}} dx. \quad (2.49)$$

Como

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{\sqrt{A(x)}} \quad (2.50)$$

e

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{1}{2\sqrt{[A(x)]^3}} \frac{dA(x)}{dx}, \quad (2.51)$$

então, a partir da equação (2.48) chega-se a

$$g(x) = \int \frac{2}{2B(x) - A'(x)} dx. \quad (2.52)$$

No próximo capítulo, apresenta-se uma formulação para obtenção de simetrias de Lie admitidas por uma equação diferencial parcial para os casos onde as regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais não podem ser aplicadas.

3 OBTENÇÃO DE SIMETRIAS DE LIE VIA MAPEAMENTO

Na literatura os métodos mais comuns para obtenção de simetrias de Lie são a substituição direta (Bluman, 1989), baseada na regra da cadeia, e os grupos de Lie (Olver, 1993; Ibragimov, 1995).

Em certos tipos de equações, as regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais não podem ser aplicadas, então se utiliza uma formulação para a obtenção das simetrias de Lie admitidas por estas equações diferenciais parciais lineares (Beck, 2005). Esta formulação é baseada no mapeamento entre equações diferenciais, que dispensa o uso de grupos de Lie, e pode ser aplicada a equações diferenciais parciais lineares de ordem arbitrária.

3.1 Construção do Operador Diferencial Responsável pelo Mapeamento

O problema de contorno descrito pela equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} - D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.1)$$

para $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < +\infty$, com condições

$$f(x_0, y) = f_0(y) \quad (3.2)$$

e

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (3.3)$$

não pode ser resolvido através da aplicação das regras apresentadas no capítulo 2, pois a variável independente x aparece no termo advectivo e no difusivo.

Com o intuito de obter uma solução analítica para o problema descrito pelas equações (3.1), (3.2) e (3.3) utiliza-se uma formulação para a obtenção de simetrias de Lie admitidas pela equação (3.1), via mapeamento. Para tanto, define-se o operador diferencial linear

$$B = p_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + p_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + p_3(x, y) I, \quad (3.4)$$

onde I é operador identidade e $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$ e $p_3(x, y)$ são coeficientes a serem determinados. O operador B possui a propriedade de transformar soluções analíticas de uma equação diferencial parcial linear em novas soluções analíticas da mesma equação. A vantagem do emprego do operador B é que cada nova solução possui um número maior de elementos arbitrários, podendo satisfazer a um conjunto mais amplo de condições de contorno.

Dessa forma, sendo f_1 uma solução analítica de (3.1), cujo operador diferencial pode ser definido como

$$A = \frac{\partial}{\partial x} - D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (3.5)$$

então, aplicação do operador diferencial A sobre f_1 resulta zero, isto é,

$$Af_1 = 0. \quad (3.6)$$

Como o operador B gera novas soluções analíticas da equação diferencial, pode-se escrever que

$$Bf_1 = g, \quad (3.7)$$

onde g é uma nova solução de (3.1) e conseqüentemente,

$$Ag = 0 \quad (3.8)$$

e assim

$$ABf_1 = 0. \quad (3.9)$$

A solução do sistema formado por (3.6) e (3.9) define explicitamente os coeficientes $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$ e $p_3(x, y)$ do operador B . Calculando $ABf = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_1(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) \\
& + p_1(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_2(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) + \\
& 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \right) + p_2(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x, y) \right) + \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_3(x, y) \right) f(x, y) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + p_3(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) + \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_1(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_1(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \right) + \\
& p_1(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} f(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_2(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) + \\
& 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_2(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right) + p_2(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x, y) \right) + \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_3(x, y) \right) f(x, y) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_3(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) + p_3(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right) - \\
& \left(\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) - p_1(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} p_2(x, y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) - \\
& p_2(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, y) \right) f(x, y) - p_3(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = 0.
\end{aligned} \quad (3.10)$$

Agrupando os coeficientes de $f(x, y)$ e de suas derivadas, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_2(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_2(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_3(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} p_2(x, y) \right) \right] \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\
& + 2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} p_2(x, y) \right) \right] \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} p_2(x, y) \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + \\
& \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_1(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_1(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_2(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) \right) \right] \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
& \left[\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_3(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_3(x, y) \right] f = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Uma forma possível de satisfazer esta equação, consiste em impor que cada coeficiente de $f(x)$ e de suas derivadas seja nulo. Obtém-se, então, o sistema

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_2(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_2(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_3(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} p_2(x, y) \right) = 0 \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} p_2(x, y) \right) = 0 \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} p_1(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_1(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} p_2(x, y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) \right) = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} p_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} p_2(x, y) = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_3(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_3(x, y) = 0. \tag{3.16}$$

Pelas equações (3.13) e (3.15), pode-se afirmar que as funções $p_1(x, y)$ e $p_2(x, y)$ satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, então $\nabla^2 p_1 = \nabla^2 p_2 = 0$. Em consequência disso, as equações (3.12) e (3.14) levam a $\nabla^2 p_3 = 0$. Da equação (3.16), deduz-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} p_3(x, y) = 0 \tag{3.17}$$

e se pode escrever que

$$p_3(x, y) = p_3(y). \quad (3.18)$$

Dessa forma, o operador B pode ser reescrito como

$$B = p_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + p_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + p_3(y)I. \quad (3.19)$$

Utilizando (3.19), recalcula-se $ABf = 0$, reagrupam-se os coeficientes de $f(x, y)$ e de suas derivadas e através de sua análise chega-se a

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} p_3(x, y) = 0, \quad (3.20)$$

o que permite concluir que $p_3(x, y)$ é uma função linear em y , isto é,

$$p_3(y) = \eta_1 \cdot y + \eta_2. \quad (3.21)$$

Substitui-se a equação (3.21) em (3.19), reescrevendo-se o operador B da forma

$$B = p_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + p_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + (\eta_1 \cdot y + \eta_2)I, \quad (3.22)$$

recalcula-se $ABf = 0$, reagrupam-se os coeficientes de $f(x, y)$ e de suas derivadas e através de sua análise chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial x} p_2(x, y) = 2\eta_1. \quad (3.23)$$

Como consequência de (3.23), tem-se

$$p_2(x) = 2\eta_1 \cdot x + \eta_3. \quad (3.24)$$

Substitui-se a equação (3.24) em (3.22) e o operador B fica reescrito como

$$B = p_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + (2\eta_1 \cdot x + \eta_3) \frac{\partial}{\partial y} + (\eta_1 \cdot y + \eta_2) I, \quad (3.25)$$

recalcula-se $ABf = 0$, reagrupam-se os coeficientes de $f(x, y)$ e de suas derivadas e obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} p_1(x, y) = 0 \quad (3.26)$$

e

$$4\eta_1 + 2 \frac{\partial}{\partial y} p_1(x, y) = 0. \quad (3.27)$$

Assim,

$$p_1(y) = -2\eta_1 \cdot y + \eta_4. \quad (3.28)$$

Substitui-se a equação (3.28) em (3.25) e o operador B aplicado à função $f(x, y)$ corresponde a

$$Bf = (\eta_4 - 2\eta_1 \cdot y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + (\eta_3 + 2\eta_1 \cdot x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + (\eta_2 + \eta_1 \cdot y) f(x, y). \quad (3.29)$$

Uma vez que o operador B transforma soluções analíticas da equação (3.1) em novas soluções analíticas, pode-se efetuar um processo iterativo definido como

$$f_{k+1} = Bf_k, \quad (3.30)$$

através do qual obtém-se uma seqüência de soluções analíticas, onde cada nova solução contém um número maior de constantes arbitrárias. Esse processo iterativo pode ser evitado resolvendo-se a equação diferencial

$$Bf = f, \quad (3.31)$$

que produz a solução invariante em relação à aplicação do operador B sendo, portanto, a solução mais geral passível de obtenção através do método proposto. A solução da equação (3.31) contém uma função arbitrária ao invés de constantes arbitrárias, o que facilita a aplicação das condições de contorno.

A solução da equação (3.31) é

$$f(x, y) = F1(-\eta_2 x^2 - \eta_3 \cdot x + \eta_4 \cdot y - \eta_2 \cdot y^2) \cdot \exp\left(\frac{2x\sqrt{\eta_2^2} + (2\eta_1 + \eta_4)\arctan\left(\frac{(2\eta_2 x + \eta_3)\sqrt{\eta_2^2}}{\eta_2\sqrt{(-\eta_4 + 2\eta_2 \cdot y)^2}}\right)}{4\sqrt{\eta_2^2}}\right), \quad (3.32)$$

onde $F1$ denota uma função arbitrária.

Na solução dada por (3.32), aplicam-se condições de contorno de modo a escrever a solução para o problema descrito pelas equações (3.1), (3.2) e (3.3). A condição (3.3) é aplicada através do conceito de reflexão no contorno (Crank, 1975)

$$f(x, y) = F1(-\eta_2 x^2 - \eta_3 \cdot x + \eta_4 \cdot y - \eta_2 \cdot y^2) \cdot \exp\left(\frac{2x\sqrt{\eta_2^2} + (2\eta_1 + \eta_4)\arctan\left(\frac{(2\eta_2 x + \eta_3)\sqrt{\eta_2^2}}{\eta_2\sqrt{(-\eta_4 + 2\eta_2 \cdot y)^2}}\right)}{4\sqrt{\eta_2^2}}\right) + F1(-\eta_2 x^2 - \eta_3 \cdot x - \eta_4 \cdot y - \eta_2 \cdot y^2) \cdot \exp\left(\frac{2x\sqrt{\eta_2^2} + (2\eta_1 + \eta_4)\arctan\left(\frac{(2\eta_2 x + \eta_3)\sqrt{\eta_2^2}}{\eta_2\sqrt{(-\eta_4 - 2\eta_2 \cdot y)^2}}\right)}{4\sqrt{\eta_2^2}}\right). \quad (3.33)$$

A condição (3.2) permite que se determine a função arbitrária $F1$.

Neste trabalho, utiliza-se essa formulação para obtenção de simetrias de Lie para resolver a equação advectivo-difusiva que descreve o problema de dispersão de contaminantes na água, aplicado ao derramamento de substâncias tóxicas por um navio em um corpo hídrico.

No próximo capítulo, resolve-se a equação advectivo-difusiva que descreve matematicamente os problemas de dispersão de contaminantes na água, considerando-se um corpo hídrico que se comporta como uma lâmina d'água. A fim de obter a solução, faz-se uma mudança de variáveis na equação advectivo-difusiva em coordenadas cartesianas e, no novo sistema de coordenadas, resolvem-se os problemas de dispersão de poluentes provenientes de redes de esgoto e do derramamento de substâncias tóxicas provocados por um navio. No primeiro caso, aplicam-se as regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais com coeficientes constantes apresentadas no capítulo 2; no segundo caso, aplica-se a formulação apresentada neste capítulo.

4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO ADVECTIVO-DIFUSIVA APLICADA À DISPERSÃO DE CONTAMINANTES NA ÁGUA

A equação advectivo-difusiva que descreve matematicamente o problema de dispersão de contaminantes na água não pode ser resolvida através da aplicação direta das regras apresentadas no capítulo 2, uma vez que há necessidade de se considerar a geometria das margens envolvidas no problema e que as componentes do vetor velocidade não são constantes. Com isso, o processo de obtenção da solução consiste na realização de uma mudança de variáveis na equação advectivo-difusiva, reescrevendo-a em termos de funções arbitrárias da função corrente (Ψ) e do potencial velocidade (Φ) correspondentes ao respectivo escoamento potencial. Esta mudança de variáveis permite a obtenção da solução do problema de dispersão de cargas provenientes de redes de esgoto através das regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais mostradas no capítulo 2 e a utilização da formulação mostrada no capítulo 3 para determinar a solução para o problema de dispersão de poluentes provenientes de um acidente com cargas tóxicas ocasionado por uma embarcação.

4.1 Descrição Matemática do Problema

O fenômeno de dispersão de contaminantes em um corpo hídrico que se comporta como uma lâmina d'água pode ser descrito matematicamente pela equação advectivo-difusiva bidimensional em regime transiente

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - kC + Q(x, y), \quad (4.1)$$

onde C é a concentração de contaminante, D é o coeficiente de difusão, u e v são as componentes da velocidade de escoamento nas direções x e y , respectivamente, k é a constante de decaimento do poluente, t é o tempo decorrido desde o despejo da carga e $Q(x, y)$ é o termo de fonte correspondente às emissões de cargas ao longo do corpo hídrico. Neste trabalho, o termo de fonte será substituído por condições de passagem por pontos, logo a equação (4.1) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - kC. \quad (4.2)$$

Aplicando o método de separação de variáveis e assumindo que o campo de velocidades é estacionário e que a cinética de degradação do poluente constitui um evento independente da difusão e da advecção ao longo do corpo hídrico, pode-se escrever

$$C(x, y, t) = \tau(t) \cdot c(x, y). \quad (4.3)$$

Substituindo a equação (4.3) em (4.2) e dividindo ambos os membros da equação resultante por $\tau(t) \cdot c(x, y)$, obtém-se

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} + k = -u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} + D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) = \lambda, \quad (4.4)$$

onde λ corresponde à constante de separação.

Pode-se escrever o sistema

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} + k = \lambda \quad (4.5)$$

$$-u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} + D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) = \lambda. \quad (4.6)$$

Resolvendo a equação (4.5), tem-se

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-(k-\lambda)t}. \quad (4.7)$$

Como o expoente $k - \lambda$ da equação (4.7) corresponde ao valor da própria constante de decaimento do poluente, então o valor da constante de separação λ deve ser nulo, de modo que se obtém o sistema

$$\frac{d\tau}{dt} + k\tau = 0 \quad (4.8)$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (4.9)$$

A solução para $\tau(t)$ é dada por (4.7), considerando $\lambda = 0$:

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-kt}. \quad (4.10)$$

A solução formal de (4.9) pode ser obtida isolando-se o termo advectivo na variável x e é dada por

$$c(x, y) = \left[e^{\frac{D}{u} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D}{u} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{v}{u} \frac{\partial}{\partial y}} \right] c_0(x, y). \quad (4.11)$$

As regras de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais apresentadas no capítulo dois não podem ser aplicadas diretamente à equação (4.11), pois os coeficientes dos operadores diferenciais não são constantes. Se o campo de velocidades fosse considerado localmente constante, então as regras do capítulo dois poderiam ser aplicadas diretamente à equação (4.2), e a solução assim obtida seria válida apenas para uma pequena região nas proximidades da trajetória percorrida pelo centro do despejo. Nesse caso, essa solução deveria ser empregada como nova condição de passagem por pontos para o problema, a partir do qual um processo iterativo seria realizado e produziria sucessivas distribuições de concentração do contaminante (Zabadal et al., 2005^a).

A fim de obter uma solução válida para todo o domínio, realiza-se uma mudança de variáveis de modo a reescrever a equação (4.9) em termos de novas coordenadas ortogonais a e

b que correspondem a funções arbitrárias do potencial velocidade (Φ) e da função corrente (Ψ), respectivamente. A nova equação tem como objetivo mapear a geometria do corpo hídrico em um domínio retangular nas variáveis a e b .

O processo de mudança de variáveis que determina a equação no novo sistema de coordenadas é mostrado na próxima seção.

4.2 Obtenção da Equação Advectivo-Difusiva em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

A equação (4.9) pode ser expressa em termos de novas variáveis $a(x, y)$ e $b(x, y)$.

Utilizando a regra da cadeia, escreve-se

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y}, \quad (4.13)$$

simplificando a notação

$$\frac{\partial a}{\partial x} = a_x, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = a_y, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = b_x, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial b}{\partial y} = b_y, \quad (4.17)$$

e aplicando nas equações (4.12) e (4.13), obtém-se

$$\frac{\partial c}{\partial x} = a_x \frac{\partial c}{\partial a} + b_x \frac{\partial c}{\partial b} \quad (4.18)$$

e

$$\frac{\partial c}{\partial y} = a_y \frac{\partial c}{\partial a} + b_y \frac{\partial c}{\partial b}. \quad (4.19)$$

Aplicando a regra do produto de derivadas e a regra da cadeia, obtêm-se as expressões para as derivadas de segunda ordem da equação (4.9), isto é,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = a_{xx} \frac{\partial c}{\partial a} + a_x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} + 2a_x b_x \frac{\partial^2 c}{\partial a \partial b} + b_{xx} \frac{\partial c}{\partial b} + b_x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial b^2} \quad (4.20)$$

e

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = a_{yy} \frac{\partial c}{\partial a} + a_y^2 \frac{\partial^2 c}{\partial a^2} + 2a_y b_y \frac{\partial^2 c}{\partial a \partial b} + b_{yy} \frac{\partial c}{\partial b} + b_y^2 \frac{\partial^2 c}{\partial b^2}, \quad (4.21)$$

onde

$$a_{xx} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \quad (4.22)$$

$$a_{yy} = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}, \quad (4.23)$$

$$b_{xx} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \quad (4.24)$$

e

$$b_{yy} = \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}. \quad (4.25)$$

Substituindo as expressões correspondentes na equação (4.9), chega-se a

$$\begin{aligned} & (ua_x + va_y - Da_{xx} - Da_{yy})\frac{\partial c}{\partial a} + (ub_x + vb_y - Db_{xx} - Db_{yy})\frac{\partial c}{\partial b} - D(a_x^2 + a_y^2)\frac{\partial^2 c}{\partial a^2} \\ & - D(b_x^2 + b_y^2)\frac{\partial^2 c}{\partial b^2} - 2D(a_x b_x + a_y b_y)\frac{\partial^2 c}{\partial a \partial b} = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A equação (4.26) pode ser simplificada se as novas variáveis constituírem um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, isto é, se

$$\nabla a \cdot \nabla b = 0, \quad (4.27)$$

então a equação (4.26) se reduz a

$$\begin{aligned} & (ua_x + va_y - Da_{xx} - Da_{yy})\frac{\partial c}{\partial a} + (ub_x + vb_y - Db_{xx} - Db_{yy})\frac{\partial c}{\partial b} - D(a_x^2 + a_y^2)\frac{\partial^2 c}{\partial a^2} \\ & - D(b_x^2 + b_y^2)\frac{\partial^2 c}{\partial b^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Observando a forma da equação (4.28) e considerando a possibilidade de se utilizar uma formulação independente da geometria do corpo hídrico, constata-se que é possível efetuar um mapeamento que resulta na seguinte equação alvo

$$\frac{\partial c}{\partial a} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial a^2}\right), \quad (4.29)$$

onde as variáveis a e b são, respectivamente, funções arbitrárias do potencial velocidade (Φ) e da função corrente (Ψ) que descrevem o escoamento potencial.

Comparando-se as equações (4.28) e (4.29), chega-se a

$$ua_x + va_y - Da_{xx} - Da_{yy} = 1, \quad (4.30)$$

$$ub_x + vb_y - Db_{xx} - Db_{yy} = 0, \quad (4.31)$$

$$(a_x^2 + a_y^2) = 1 \quad (4.32)$$

e

$$(b_x^2 + b_y^2) = 1. \quad (4.33)$$

A ausência do termo de primeira ordem em b na equação (4.29) é decorrência do fato de que o transporte advectivo só ocorre ao longo das linhas de corrente, ou seja, não há fluxo na direção normal à corrente principal do escoamento. A partir da equação (4.29) é possível produzir cenários de dispersão de contaminantes relativos a duas aplicações de grande importância em engenharia ambiental: a propagação de cargas emitidas por redes de esgoto e a simulação de acidentes com cargas tóxicas.

Para a primeira aplicação não se faz necessário considerar o termo de difusão longitudinal, uma vez que o despejo de cargas de esgoto sofre reposição contínua ao longo do tempo, então a equação (4.29) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial c}{\partial a} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial b^2} \right) = 0 \quad (4.34)$$

e se obtém sua solução através da regra de manipulação de exponencial de um operador diferencial de segunda ordem apresentada no capítulo 2.

Já a segunda aplicação requer o emprego da equação completa (4.29) uma vez que em um acidente com cargas tóxicas o despejo é efetuado apenas uma vez, sem que haja reposição. Nesta situação, obtém-se a solução através da formulação para obtenção de simetrias de Lie admitidas por equações diferenciais mostrada no capítulo anterior.

O fato das funções a e b constituírem funções arbitrárias de Φ e Ψ torna possível considerar o desenvolvimento de camada limite hidrodinâmica no escoamento. Neste trabalho, utiliza-se $a(x, y) = \Phi$ e $b(x, y) = \Psi$, pois na aplicação a ser simulada no Lago Guaíba este efeito não é relevante.

Na próxima seção, desenvolve-se o processo de obtenção de solução para o problema de dispersão de poluentes emitidos por redes de esgoto.

4.3 Solução da Equação Advectivo-Difusiva em Coordenadas Curvilíneas Aplicada à Dispersão de Poluentes Provenientes de Redes de Esgoto

O problema descrito por

$$\frac{\partial c}{\partial \Phi} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2} \right) = 0, \quad (4.35)$$

para $-\infty < \Phi < +\infty$, $0 < \Psi < +\infty$, sujeito à condição por passagem de pontos nas vizinhanças do local de despejo, que define a forma deste despejo

$$c(\Phi_0, \Psi) = c_0(\Psi) \quad (4.36)$$

e à condição de contorno

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \Psi} \right|_{\Psi=0} = 0, \quad (4.37)$$

é resolvido através da aplicação das regras apresentadas no segundo capítulo.

A solução formal da equação (4.35) é

$$c(\Phi, \Psi) = \left[e^{\Phi D \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2}} \right] c_0(\Psi). \quad (4.38)$$

Uma vez que o coeficiente do operador diferencial da exponencial presente na solução formal é constante, aplica-se a regra de manipulação para a exponencial do operador diferencial de segunda ordem (2.27) à equação (4.38) e obtém-se

$$c(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\sqrt{4D\Phi\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi D}} c_0(\Psi - \alpha) d\alpha. \quad (4.39)$$

Essa solução é válida para os casos em que não ocorre *splash*, ou seja, quando a mancha não atinge a margem em nenhuma região de sua trajetória. Isto significa que a solução é

válida para meio infinito. Utilizando o conceito de reflexão no contorno (Crank, 1975), a partir de (4.39) pode-se obter uma solução que satisfaça a condição de contorno (4.37)

$$c(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\sqrt{4D\Phi\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi D}} c_0(\Psi - \alpha) d\alpha + \frac{1}{\sqrt{4D\Phi\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi D}} c_0(-\Psi - \alpha) d\alpha. \quad (4.40)$$

A função representada por (4.40) possui derivada normal nula no contorno e é solução analítica de (4.35).

A fim de escrever a solução descrita por (4.40) no sistema de coordenadas originais, utiliza-se uma expressão para a função corrente a partir do ajuste da função que descreve o contorno do corpo hídrico, e através das equações de Cauchy-Riemann, calcula-se o potencial velocidade. De modo a alcançar esse objetivo, podem-se combinar funções correntes básicas que forneçam uma linha de corrente que corresponda ao formato da margem e a combinação assim obtida pode ser usada para descrever o escoamento potencial em torno desta margem. Este é o método da composição de escoamentos (Munson et al., 1997). Por exemplo,

$$\Psi(x, y) = U \cdot y + f(x, y) \quad (4.41)$$

representa a composição da função corrente para o escoamento uniforme com a função corrente correspondente a uma margem arbitrária.

Através das equações de Cauchy-Riemann dadas por (Ávila, 2000)

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \quad (4.42)$$

e

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \quad (4.43)$$

encontra-se uma expressão para o potencial velocidade $\Phi(x, y)$. Uma vez que $\Phi(x, y)$ é a função harmônica conjugada de $\Psi(x, y)$ e já que o escoamento é potencial, obedece às equações (4.42) e (4.43), então $\Phi(x, y)$ e $\Psi(x, y)$ satisfazem à equação de Laplace.

Ou seja, partindo da equação (4.42), obtém-se

$$\Phi(x, y) = \int \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} dx + M(y), \quad (4.44)$$

onde $M(y)$ representa uma função arbitrária a ser calculada através da equação (4.43). Derivando a equação (4.44) em relação a y e (4.41) em relação a x e substituindo as expressões resultantes em (4.43), chega-se a

$$M(y) = -\int \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} dx - \int \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} dy + C. \quad (4.45)$$

Substituindo a equação (4.45) em (4.44), obtém-se a expressão para o potencial velocidade $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = -\int \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} dy + C. \quad (4.46)$$

Utilizando a equação (4.41), o potencial velocidade pode ser reescrito como

$$\Phi(x, y) = U \cdot x - \int \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + C. \quad (4.47)$$

Substituindo as equações (4.41) e (4.47) em (4.40) tem-se a solução de (4.9) em termos das variáveis originais

$$c(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4D\Phi(x, y)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi(x, y)D}} [c_0(\Psi(x, y) - \alpha) + c_0(-\Psi(x, y) - \alpha)] d\alpha. \quad (4.48)$$

Considerando-se apenas uma carga poluente, pode-se escrever a concentração do contaminante descrita pela equação (4.2) para qualquer ponto do domínio em questão como

$$C(x, y, t) = \frac{e^{-kt}}{\sqrt{4D\Phi(x, y)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi(x, y)D}} [c_0(\Psi(x, y) - \alpha) + c_0(-\Psi(x, y) - \alpha)] d\alpha, \quad (4.49)$$

onde

$$t = \int_{x_0}^{x_f} \frac{dx}{\Psi_y} \quad (4.50)$$

e x_0 é o ponto inicial e x_f é o ponto final da trajetória da carga considerada.

Ao se considerar mais de uma carga poluente, escreve-se

$$C(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{e^{-kt_i}}{\sqrt{4D\Phi(x, y)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi(x, y)D}} [c_i(\Psi(x, y) - \alpha) + c_i(-\Psi(x, y) - \alpha)] d\alpha \right] \quad (4.51)$$

onde n é o número de cargas poluentes na região considerada, $c_i(\Psi)$ corresponde à condição de passagem por pontos que define a forma do despejo i e

$$t_i = \int_{x_{0i}}^{x_{fi}} \frac{dx}{\Psi_y}. \quad (4.52)$$

Nesta equação, x_{0i} e x_{fi} correspondem, respectivamente, ao ponto inicial e ao ponto final de interesse do despejo i .

As cargas poluentes, que possuem baixa vazão em relação à corrente principal do rio, sofrem uma diluição inicial nas vizinhanças do despejo. As condições de passagem por pontos levam em conta este fenômeno e são calculadas por

$$c_i(x, y) = \left(\frac{q_i}{q_i + q} \right) c_b, \quad (4.53)$$

onde q_i é a vazão da carga i , q corresponde à vazão do corpo hídrico e c_b é a concentração da carga bruta i emitida.

4.4 Solução da Equação Advectivo-Difusiva em Coordenadas Curvilíneas Aplicada à Simulação de Acidentes com Cargas Tóxicas

O problema descrito por

$$\frac{\partial c}{\partial \Phi} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \Phi^2} \right) = 0, \quad (4.54)$$

para $-\infty < \Phi < +\infty$, $0 < \Psi < +\infty$, sujeito à condição por passagem de pontos

$$c(\Phi_0, \Psi) = c_0(\Psi) \quad (4.55)$$

e à condição de contorno

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \Psi} \right|_{\Psi=0} = 0, \quad (4.56)$$

não pode ser resolvido através da aplicação das regras apresentadas no segundo capítulo, pois a variável independente Φ aparece no termo advectivo e no difusivo.

Com o intuito de resolver o problema descrito por (4.54), (4.55) e (4.56) utiliza-se a formulação para obtenção de simetrias de Lie admitidas por equações diferenciais parciais lineares mostrada no capítulo 3. Portanto, o processo de solução de (4.54) é análogo ao usado para resolver (3.1) cuja solução é descrita por (3.33). Assim, utilizando (3.33) e substituindo x por Φ e y por Ψ pode-se escrever a solução de (4.54) como

$$\begin{aligned}
c(\Phi, \Psi) = & F1(-\eta_2 \Phi^2 - \eta_3 \cdot \Phi + \eta_4 \cdot \Psi - \eta_2 \cdot \Psi^2) \cdot \\
& \exp \left(\frac{2\Phi\sqrt{\eta_2^2} + (2\eta_1 + \eta_4) \arctan \left(\frac{(2\eta_2 \Phi + \eta_3)\sqrt{\eta_2^2}}{\eta_2 \sqrt{(-\eta_4 + 2\eta_2 \cdot \Psi)^2}} \right)}{4\sqrt{\eta_2^2}} \right) \\
& + F1(-\eta_2 \Phi^2 - \eta_3 \cdot \Phi - \eta_4 \cdot \Psi - \eta_2 \cdot \Psi^2) \cdot \\
& \exp \left(\frac{2\Phi\sqrt{\eta_2^2} + (2\eta_1 + \eta_4) \arctan \left(\frac{(2\eta_2 \Phi + \eta_3)\sqrt{\eta_2^2}}{\eta_2 \sqrt{(-\eta_4 - 2\eta_2 \cdot \Psi)^2}} \right)}{4\sqrt{\eta_2^2}} \right).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

A fim de escrever a solução descrita por (4.57) no sistema de coordenadas originais, utilizam-se as mesmas expressões para a função corrente e para o potencial velocidade do processo descrito na seção anterior.

No próximo capítulo, mostra-se o processo de obtenção da solução da equação advectivo-difusiva que descreve a dispersão de contaminantes na atmosfera. No capítulo 6, mostram-se os resultados numéricos obtidos para as duas aplicações de problemas de dispersão de contaminantes na água em algumas regiões do lago Guaíba.

5 PROBLEMA DE DISPERSÃO DE CONTAMINANTES NO AR

A regra para manipulação de exponenciais de operadores diferenciais com coeficientes variáveis obtida no capítulo dois pode ser aplicada na obtenção da solução da equação advectivo-difusiva que descreve a dispersão de contaminantes na atmosfera.

5.1 Descrição Matemática do Problema

Na atmosfera, em uma camada limite estável, o problema de dispersão vertical de contaminantes emitidos por uma fonte puntual pode ser descrito por

$$\frac{\partial C}{\partial t} + w(z) \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (5.1)$$

para $0 < z < h_e$, sujeito à condição inicial

$$C(z,0) = Q \delta(z - h_f), \quad (5.2)$$

onde C é a concentração média de contaminante, Q , a intensidade da fonte localizada a uma altura h_f , h_e é a altura da camada limite estável, $w(z)$ corresponde à componente vertical do vetor que representa a velocidade do vento, t é o tempo desde o despejo da carga e K_z é o coeficiente de difusão na direção vertical.

5.2 Processo de Obtenção da Solução

A fim de obter a solução do problema descrito pelas equações (5.1) e (5.2), aplica-se a regra de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais com coeficientes variáveis, uma vez que K_z é um coeficiente de difusão variável. Assim, reescrevem-se os termos difusivo e advectivo da equação (5.1) em termos de novas variáveis de modo a tornar seus coeficientes constantes

$$K_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial K_z}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} - w(z) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial}{\partial g}. \quad (5.3)$$

Utilizando-se a regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{\left(\frac{dh}{dz} \right)} \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.4)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial g} = \frac{1}{\left(\frac{dg}{dz} \right)} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Derivando a equação (5.4) em relação a h , obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{\left(\frac{dh}{dz} \right)} \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (5.6)$$

isto é,

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} = -\frac{1}{\left(\frac{dh}{dz}\right)^3} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\left(\frac{dh}{dz}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.7)$$

Substituindo (5.5) e (5.7) em (5.3), chega-se a

$$K_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial K_z}{\partial z} - w(z)\right) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\left(\frac{dh}{dz}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left\{ \frac{1}{\left(\frac{dg}{dz}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{dh}{dz}\right)^3} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.8)$$

onde os coeficientes dos operadores diferenciais de primeira e segunda ordem podem ser igualados em ambos membros da equação (5.8) de modo que

$$K_z = \frac{1}{\left(\frac{dh}{dz}\right)^2} \quad (5.9)$$

e

$$\left(\frac{\partial K_z}{\partial z} - w(z)\right) = \frac{1}{\left(\frac{dg}{dz}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{dh}{dz}\right)^3} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}. \quad (5.10)$$

Assim, pode-se escrever que

$$h(z) = \int \frac{1}{\sqrt{K_z}} dz. \quad (5.11)$$

Como

$$\frac{dh}{dz} = \frac{1}{\sqrt{K_z}} \quad (5.12)$$

e

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = -\frac{1}{2\sqrt{K_z^3}} \frac{dK_z}{dz}, \quad (5.13)$$

então

$$g(z) = 2 \int \left(\frac{dK_z}{dz} - 2w(z) \right)^{-1} dz. \quad (5.14)$$

A equação,

$$\frac{\partial C(h, g, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 C(h, g, t)}{\partial h^2} + \frac{\partial C(h, g, t)}{\partial g}, \quad (5.15)$$

obtida após a mudança de variável, tem como solução formal

$$C(h, g, t) = \left[e^{t \left(\frac{\partial}{\partial g} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \right)} \right] [C(h, g, 0)]. \quad (5.16)$$

Aplicando a regra de manipulação para a exponencial de um operador diferencial de segunda ordem (2.27) na variável h da equação (5.16), tem-se

$$C(h, g, t) = \left[e^{t \frac{\partial}{\partial g}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{4t\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} C(h - \phi, g, 0) d\phi \right]. \quad (5.17)$$

A condição inicial descrita por (5.2) pode ser reescrita em termos de h , ou seja,

$$C(z, 0) = Q \delta(z(h) - h_f), \quad (5.18)$$

onde $z(h)$ corresponde à inversa de $h(z)$.

Substituindo a condição inicial dada por (5.18) na equação (5.17), obtém-se

$$C(h, g, t) = \left[e^{t \frac{\partial}{\partial g}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{4t\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} Q \delta(z(h-\phi) - h_f) d\phi \right]. \quad (5.19)$$

Na equação (5.19), a integral pode ser resolvida como (Azambuja, 1964)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\phi^2}{4t}} \delta(z(h-\phi) - h_f) d\phi = \frac{e^{-\frac{\phi_1^2(h)}{4t}}}{|p'(\phi_1(h))|} + \frac{e^{-\frac{\phi_2^2(h)}{4t}}}{|p'(\phi_2(h))|}, \quad (5.20)$$

onde $p(\phi) = z(h-\phi) - h_f$ e $\phi_1(h)$ e $\phi_2(h)$ correspondem aos zeros de $p(\phi)$.

Logo, a equação (5.19) pode ser expressa como

$$C(h, g, t) = \left[e^{t \frac{\partial}{\partial g}} \right] \left[\frac{Q}{\sqrt{4t\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{\phi_1^2(h)}{4t}}}{|p'(\phi_1)|} + \frac{e^{-\frac{\phi_2^2(h)}{4t}}}{|p'(\phi_2)|} \right) \right]. \quad (5.21)$$

A fim de se aplicar a regra de manipulação do operador diferencial de primeira ordem na variável g é necessário reescrever (5.21) em termos dessa variável. Assim, h é expressa indiretamente em termos de g , obtendo-se

$$C(h, g, t) = \left[e^{t \frac{\partial}{\partial g}} \right] \left[\frac{Q}{\sqrt{4t\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{\phi_1^2(h(z(g)))}}{4t}}{|p'(\phi_1(h(z(g))))|} + \frac{e^{-\frac{\phi_2^2(h(z(g)))}}{4t}}{|p'(\phi_2(h(z(g))))|} \right) \right]. \quad (5.22)$$

Aplicando a regra para a exponencial do operador diferencial de primeira ordem dada pela equação (2.15) na variável g , obtém-se

$$C(g, t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{e^{-\frac{\phi_1^2(h(z(g+t)))}}{4t}}{|p'(\phi_1(h(z(g+t))))|} + \frac{e^{-\frac{\phi_2^2(h(z(g+t)))}}{4t}}{|p'(\phi_2(h(z(g+t))))|} \right]. \quad (5.23)$$

Como g pode ser reescrita em função de z , a solução da equação (5.1) pode ser expressa em termos das variáveis z e t , isto é,

$$C(z, t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi t}} \left[\frac{e^{-\frac{\phi_1^2(h(z(g(z)+t)))}{4t}}}{|p'(\phi_1(h(z(g(z)+t))))|} + \frac{e^{-\frac{\phi_2^2(h(z(g(z)+t)))}{4t}}}{|p'(\phi_2(h(z(g(z)+t))))|} \right]. \quad (5.24)$$

A solução dada pela equação (5.24) representa a concentração de contaminantes em termos das variáveis z e t , sendo válida para qualquer forma do coeficiente de difusão K_z e da componente da velocidade na direção z representada por $w(z)$. Assim, quando escolhidas as formas do K_z e de $w(z)$, todas as funções que aparecem na equação (5.24) podem ser explicitadas.

No próximo capítulo, apresentam-se o desenvolvimento para obtenção das soluções dos problemas de dispersão de poluentes no água e no ar e os resultados numéricos.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados numéricos obtidos para os problemas de dispersão de contaminantes na água e no ar, através da aplicação das formulações propostas. As soluções em forma fechada para os problemas de dispersão de poluentes na água foram obtidas no Maple V e implementadas no *Visual Basic* 6.0 para gerar os mapas de distribuições de concentração. A solução para o problema de dispersão de poluentes no ar foi obtida no Maple V.

6.1 Problemas de Dispersão de Contaminantes na Água

A fim de exemplificar a eficiência dos métodos de solução de equações diferenciais parciais propostos por este trabalho, simulam-se problemas de dispersão de poluentes em regiões do lago Guaíba.

Porto Alegre, a capital do estado do Rio Grande do Sul, situa-se às margens deste lago e a população desta cidade é abastecida pela água dele proveniente. Por este motivo, há um grande interesse no estudo e no desenvolvimento de mecanismos para prevenir problemas no abastecimento de água que podem ser causados, por exemplo, pelo derramamento de substâncias tóxicas por embarcações, que podem contaminar a água e atingir a população. Além disso, há grande interesse no planejamento de redes de esgoto visando a balneabilidade de determinadas regiões do corpo hídrico.

A figura 6.1 mostra um mapa temático do lago Guaíba, que possui uma superfície de 470km^2 , numa extensão de 50km de comprimento e profundidade média de 4m (Bendati et al., 2003). Devido a essas dimensões, pode-se afirmar que constitui um corpo hídrico que se comporta como uma lâmina d'água, e conseqüentemente, o fenômeno de dispersão de poluentes neste lago pode ser descrito matematicamente pela equação advectivo-difusiva bidimensional:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - kC + Q(x, y). \quad (6.1)$$

Neste trabalho, o termo de fonte de reposição de cargas do escoamento será substituído por condições de passagem por pontos.



Figura 6.1: Mapa temático do lago Guaíba

Assim, o fenômeno de dispersão de poluentes pode ser descrito pela equação

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - kC, \quad (6.2)$$

sujeita a uma condição de contorno de segunda espécie junto às margens e a uma condição de passagem por pontos que especifica a forma inicial do despejo.

Conforme resultado do capítulo 4, a solução formal da equação (6.2) é dada por

$$C(x, y, t) = e^{-kt} \left[e^{\frac{D}{u} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D}{u} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{v}{u} \frac{\partial}{\partial y}} \right] C_0(x, y). \quad (6.3)$$

Com o intuito de se obter uma solução válida para todo o domínio, aplica-se o método de separação de variáveis e se realiza a mudança de variáveis, descrita no capítulo 4, para reescrever a parte estacionária da equação (6.2) em termos da função corrente Ψ e do potencial velocidade Φ relativos ao escoamento potencial e obtém-se

$$\frac{\partial c}{\partial \Phi} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \Phi^2} \right), \quad (6.4)$$

sujeita à condição de passagem por pontos nas vizinhanças do local do despejo inicialmente considerado puntual e com concentração c_0 em coordenadas curvilíneas e à condição de contorno

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \Psi} \right|_{\Psi=0} = 0, \quad (6.5)$$

onde a condição de passagem por pontos substitui o termo de fonte relativo à reposição de cargas do escoamento, e a condição de contorno dada por (6.5) indica que a concentração não varia na direção transversal à linha de corrente $\Psi = 0$ (relativa à margem).

O emprego da solução obtida na simulação de cenários de dispersão de poluentes provenientes de emissários de esgoto é mostrada na próxima subseção, e os resultados obtidos são comparados com as estimativas encontradas no método baseado em transformada de Fourier descrito por Lersch et al. (1999) e implementado no sistema EFLUMAT 980.

6.1.1 Simulação de dispersão de cargas de esgoto

A aplicação relativa à simulação da dispersão de cargas de esgoto em um corpo hídrico tem fundamental importância no planejamento de redes de esgoto e na análise das condições de balneabilidade de certas regiões do corpo hídrico.

Neste tipo de fenômeno, o processo de difusão é dominante na direção transversal às linhas de corrente. Assim, em coordenadas curvilíneas, o problema de dispersão de cargas de esgoto é descrito pela equação

$$\frac{\partial c}{\partial \Phi} - D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2} \right) = 0, \quad (6.6)$$

sujeita à condição de contorno dada por (6.5) e à condição de passagem por pontos

$$c(\Phi_0, \Psi) = c_0 \delta(\Psi - \Psi_0) \quad (6.7)$$

A solução formal da equação (6.6) é

$$c(\Phi, \Psi) = \left[e^{\Phi D \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2}} \right] c_0(\Psi). \quad (6.8)$$

Neste caso, o coeficiente do operador diferencial é constante, então a regra de manipulação para exponencial do operador diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes (2.27) pode ser aplicada sobre a variável Ψ e, obtém-se:

$$c(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\sqrt{4D\Phi\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi D}} c_0(\Psi - \alpha) d\alpha. \quad (6.9)$$

Substituindo a condição de passagem por pontos (6.7) em (6.9), tem-se

$$c(\Phi, \Psi) = \frac{c_0}{\sqrt{4D\Phi\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4\Phi D}} \delta(\Psi - \Psi_0 - \alpha) d\alpha. \quad (6.10)$$

Utilizando as propriedades da função Delta de Dirac (Azambuja, 1964), a integral de (6.10) pode ser calculada e chega-se a

$$c(\Phi, \Psi) = \frac{c_0}{\sqrt{4D\Phi\pi}} \left[e^{-\frac{(\Psi-\Psi_0)^2}{4\Phi D}} \right]. \quad (6.11)$$

A fim de que a solução (6.11) satisfaça à condição de contorno na margem dada por (6.5), utiliza-se o conceito de reflexão no contorno (Crank, 1975) e escreve-se

$$c(\Phi, \Psi) = \frac{c_0}{\sqrt{4D\Phi\pi}} \left[e^{-\frac{(\Psi-\Psi_0)^2}{4\Phi D}} + e^{-\frac{(-\Psi+\Psi_0)^2}{4\Phi D}} \right], \quad (6.12)$$

que é a solução para o problema descrito por (6.5), (6.6) e (6.7) em coordenadas curvilíneas.

Com o intuito de se escrever a solução dada por (6.12) em termos das variáveis originais x e y , utiliza-se a função corrente na forma

$$\Psi(x, y) = U_\infty \cdot y + a \cdot \arctan[b \cdot (y - f(x))], \quad (6.13)$$

onde a e b são constantes de ajuste, U_∞ é a velocidade do escoamento livre e $f(x)$ corresponde à função que representa a margem do domínio a ser considerado. Neste trabalho, usam-se $a = 800$ e $b = 0,01$. O potencial velocidade Φ é calculado a partir da aplicação das equações de Cauchy-Riemann, conforme descrito no capítulo 4. A substituição das expressões para Ψ e Φ na equação (6.12) permite escrever a solução de (6.7) em coordenadas cartesianas. Considerando-se várias cargas poluentes, a concentração de poluente em qualquer ponto do domínio considerado é

$$C(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-kt_i} c_i}{\sqrt{4D(\Phi(x, y))\pi}} \left[e^{-\frac{(\Psi(x, y) - \Psi_i)^2}{4\Phi(x, y)D}} + e^{-\frac{(-\Psi(x, y) + \Psi_i)^2}{4\Phi(x, y)D}} \right], \quad (6.14)$$

que corresponde à solução de (6.2), onde n é o número de cargas poluentes na região considerada, $D = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ e $k = 3,61 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (Zabadal, 1991). Os valores de c_i são

calculados pela equação (4.53), onde os valores das concentrações das cargas brutas e das vazões podem ser encontrados na tabela do Apêndice II. Os valores para t_i são calculados a partir da equação (4.52). Os valores de Ψ_i são calculados substituindo as coordenadas do centro do despejo na equação (6.13).

A seguir apresentam-se simulações para algumas regiões do lago Guaíba e comparam-se os resultados obtidos com os resultados de Lersch et al. (1999). A legenda dos mapas mostrados se baseia na resolução nº 20 de 1986 do CONAMA (Conselho Nacional do Meio Ambiente) que classifica as águas doces, em ordem crescente quanto à concentração de coliformes fecais, em classes especial, 1, 2, 3 e 4, estabelecendo a concentração máxima de coliformes que podem estar presentes em 100ml de água, de modo a ser compatível com sua utilização para determinadas finalidades. A tabela 6.1 mostra os valores de concentração em organismos por 100 ml para cada uma dessas classes (Bendati et al., 2003).

Tabela 6.1: Classificação das águas doces quanto à concentração de coliformes fecais

Classe	Concentração (C) (org/100ml)
Especial	$C=0$
1	$0 < C < 200$
2	$200 \leq C < 1.000$
3	$1.000 \leq C < 4.000$
4	$C \geq 4.000$

Na análise de balneabilidade são consideradas próprias para banho as águas que se enquadrem nas classes especial, 1 e 2. Adota-se o índice de coliformes fecais como o melhor indicativo do comprometimento ambiental da água por descargas de esgoto domésticos.

6.1.1.1 Simulação na região do Gasômetro

Para esta simulação, consideram-se $U_\infty = 0,12$ m/s e as contribuições das cargas de índice 2, 3, 5 a 20, 38 a 40 que constam na tabela do apêndice II com suas respectivas concentrações, localizações e vazões.

A figura 6.2 mostra o resultado obtido para a distribuição de concentração de coliformes fecais na região do Gasômetro através do método proposto. Observando-se a legenda

constata-se que nesta região a água é imprópria para banho de acordo com a classificação adotada pelo CONAMA.

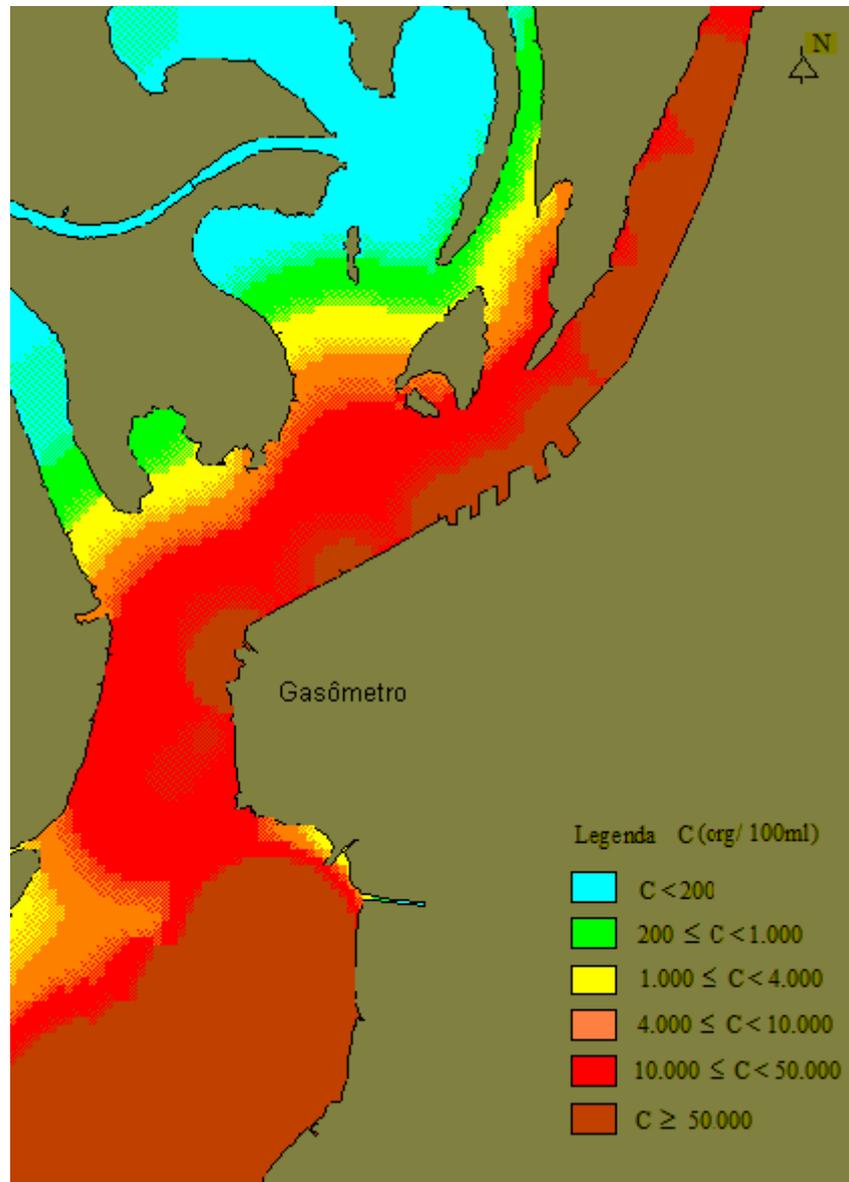


Figura 6.2: Distribuição de concentração de coliformes na região do Gasômetro obtida por soluções formais

A figura 6.3 mostra o mapa de distribuição de concentração na mesma região, que foi obtido pelo método baseado na transformada de Fourier (Lersch et al., 1999). Os mapas mostram resultados semelhantes, embora a concentração de coliformes obtida pelo método proposto seja ligeiramente superior. Isto acontece porque neste trabalho foi utilizado um modelo de cinética de primeira ordem para o decaimento do poluente, que não é o mesmo usado por Lersch et al. (1999). O modelo de cinética adotado por Lersch et al. se baseia em um ajuste de curvas realizado a partir de dados experimentais obtidos em laboratório em meio de cultura. Apesar de

aparentemente este último modelo constituir um refinamento em relação ao utilizado no trabalho proposto, o desvio quadrático médio entre os dados experimentais (SISLAB, 2001) e o modelo de Lersch et al. (1999) é de 30%, sendo da ordem de 20% em relação ao modelo aqui utilizado.

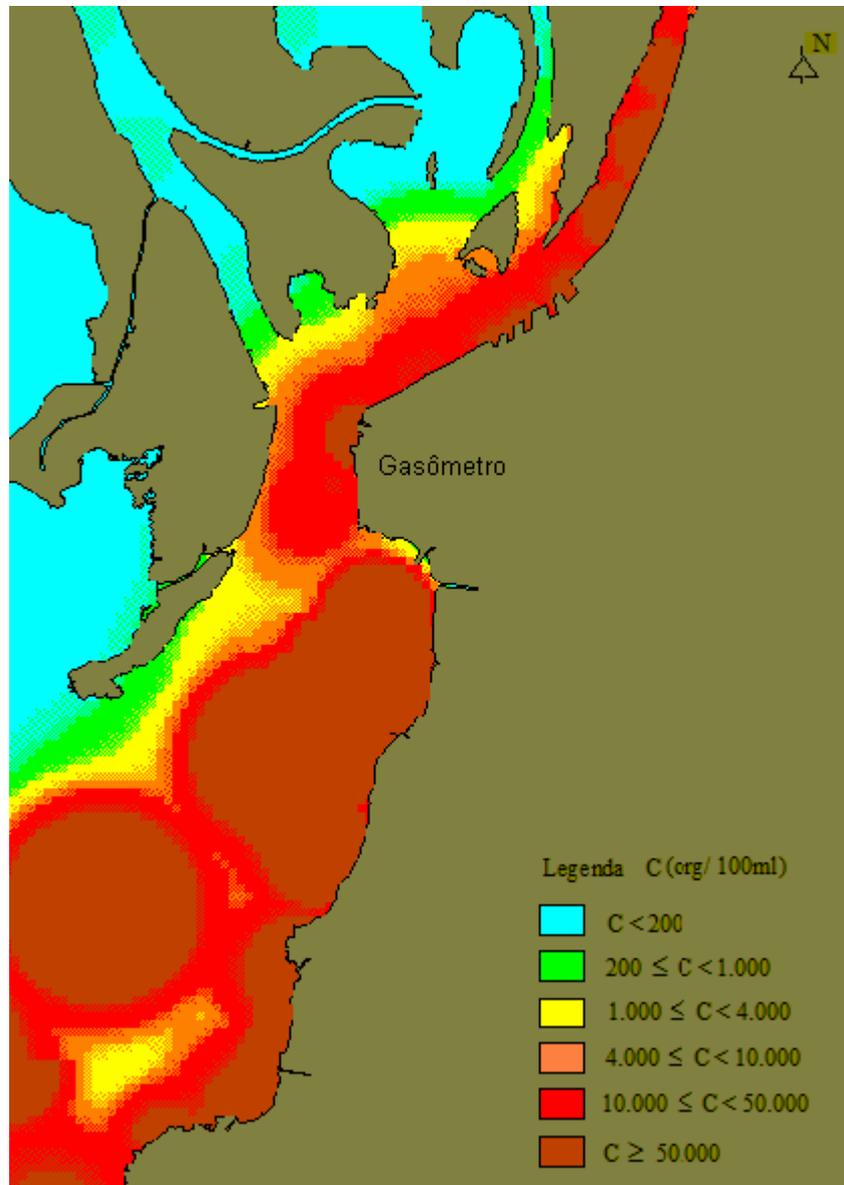


Figura 6.3: Distribuição de concentração de coliformes na região do Gasômetro obtida por transformada de Fourier

A figura 6.4 mostra um mapa de distribuição de concentração de coliformes obtido utilizando o método proposto por este trabalho utilizando o modelo de cinética adotado por Lersch et al.. Observa-se que a diferença no modelo cinético faz com que os valores para a concentração de coliformes se tornem inferiores. O mapa de distribuição de concentração de coliformes mostrado na figura 6.4 é semelhante ao mostrado pela figura 6.3.

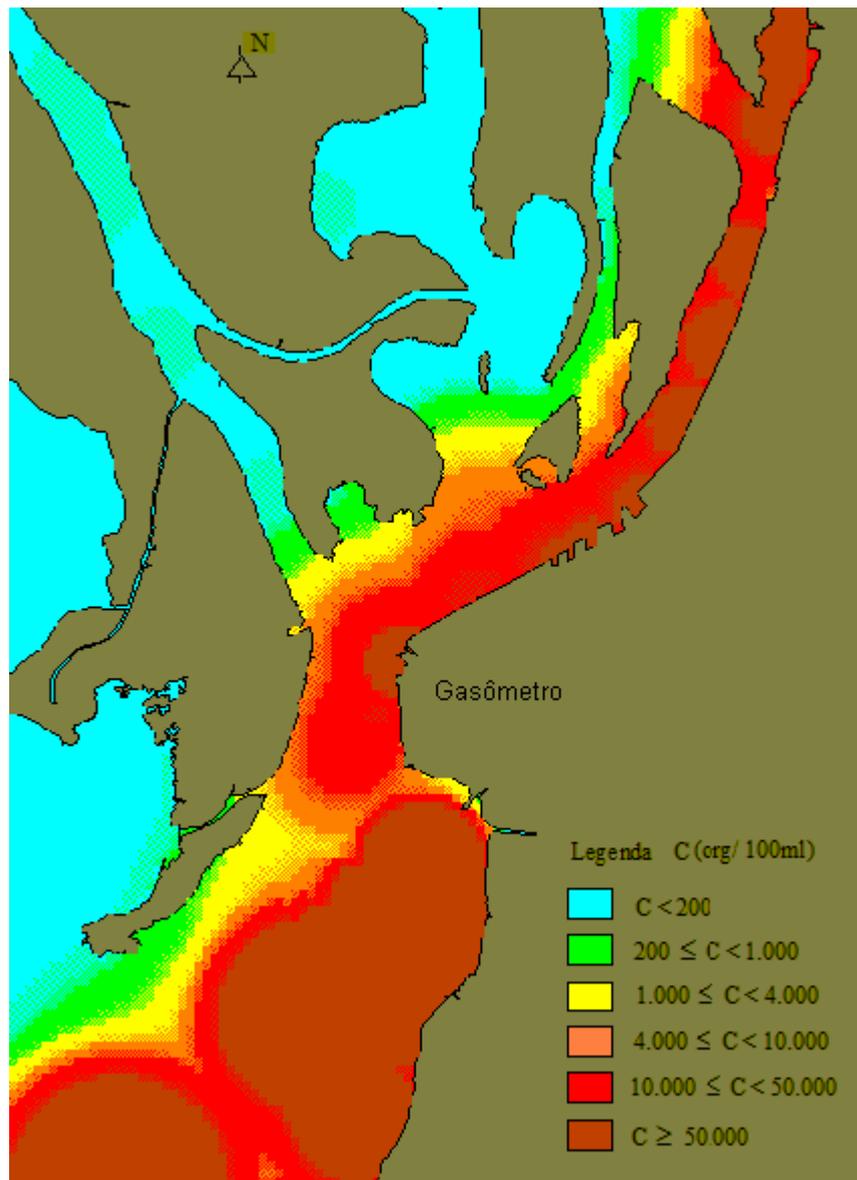


Figura 6.4: Distribuição de concentração de coliformes na região do Gasômetro obtida por soluções formais com o modelo de cinética utilizado por Lersch et al.(1999)

6.1.1.2 Simulação para região do Estaleiro Só

A fim de se obter a distribuição de concentração de coliformes para a região do Estaleiro Só, consideram-se $U_{\infty} = 0,15$ m/s e as contribuições das cargas de índice 2 a 25, 38 a 40 que constam na tabela do apêndice II com suas respectivas concentrações, localizações e vazões.

A figura 6.5 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais na região do Estaleiro Só através do método proposto. Observa-se que nesta região a água é

imprópria para banho, estando maior parte da região próxima à margem leste na classe 4 de classificação do CONAMA, com concentração maior que 50.000 organismos por 100 ml.

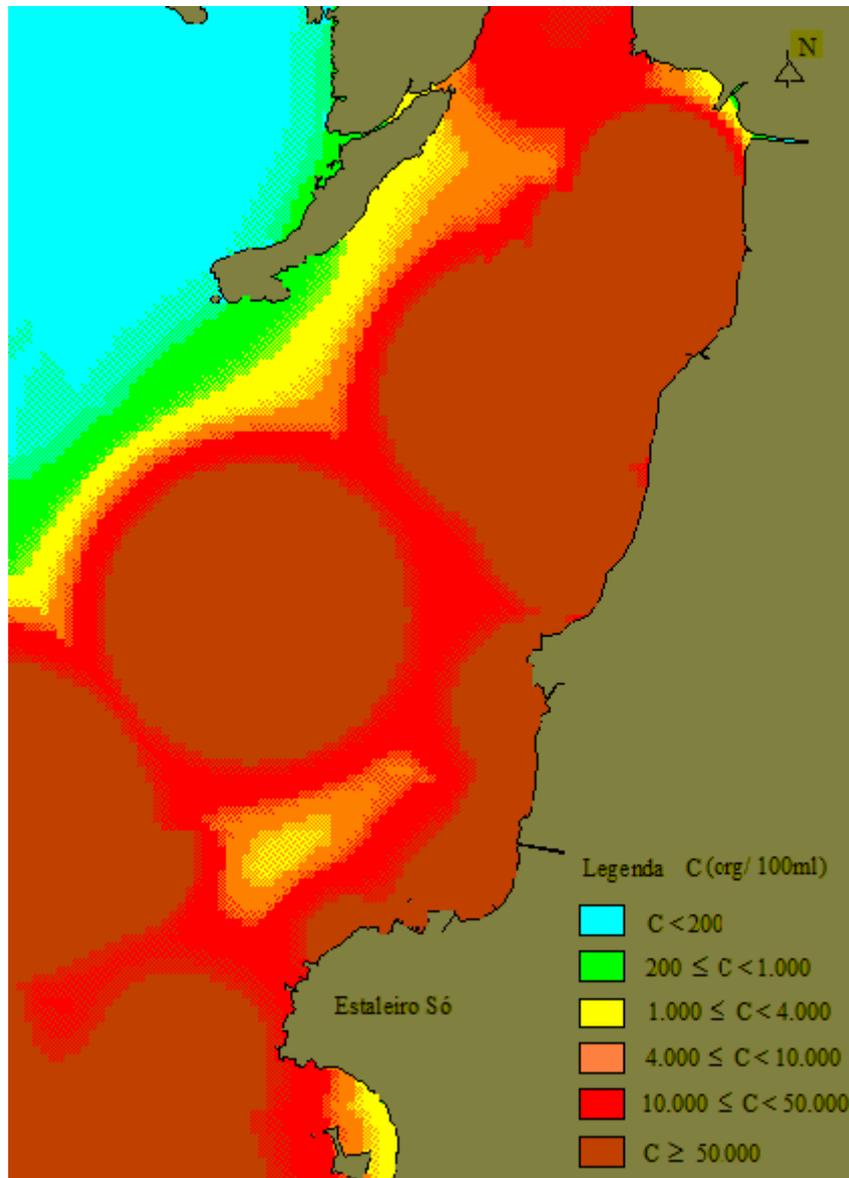


Figura 6.5: Distribuição de concentração de coliformes na região do Estaleiro Só obtida por soluções formais

A figura 6.6 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais na região do Estaleiro Só através do método baseado em transformada de Fourier. Os dois resultados apresentam desvios semelhantes aos verificados na região do Gasômetro em relação aos dados experimentais (SISLAB, 2001).

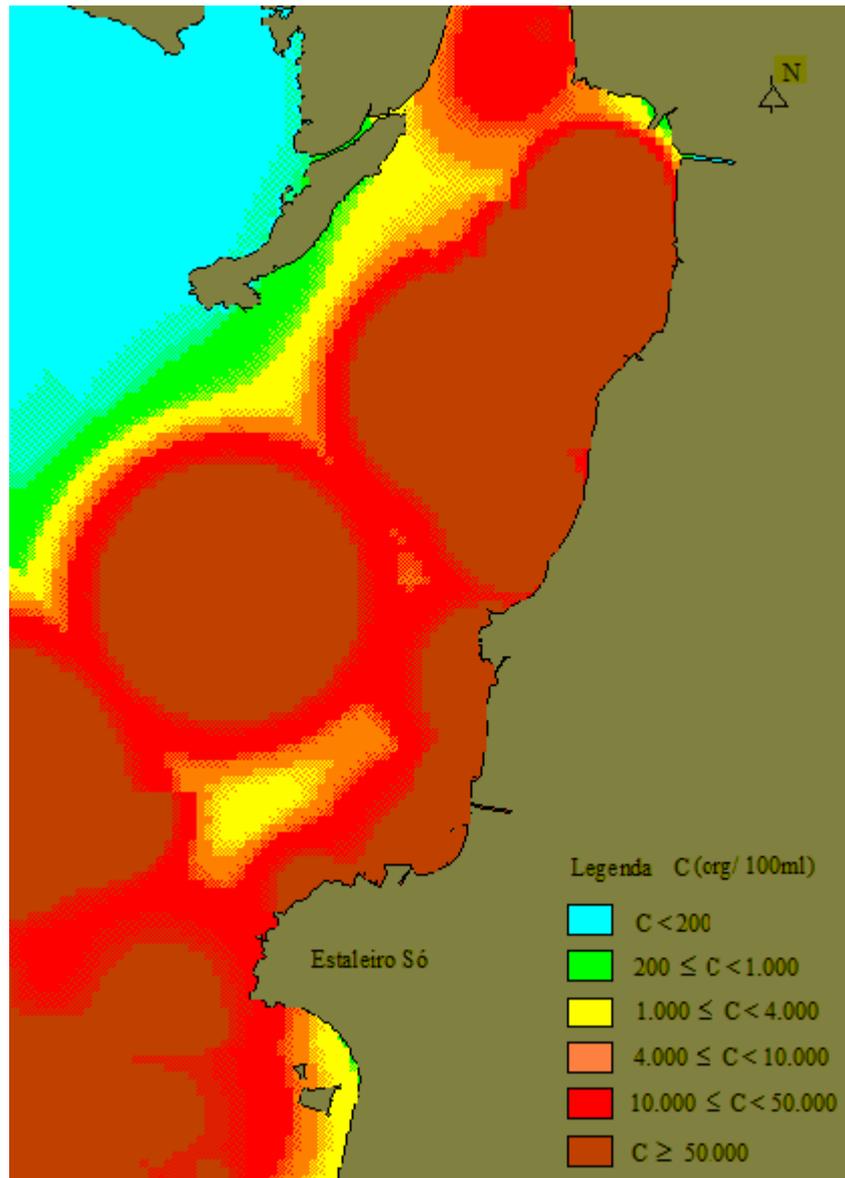


Figura 6.6: Distribuição de concentração de coliformes na região do Estaleiro Só obtida por Lersch et al. (1999)

6.1.1.3 Simulação para região de Ipanema

A fim de se obter a distribuição de concentração de coliformes para a região de Ipanema, consideram-se $U_{\infty} = 0,07$ m/s e as contribuições das cargas de índice 2 a 27, 38 a 40 que constam na tabela do apêndice II com suas respectivas concentrações, localizações e vazões.

A figura 6.7 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais na região de Ipanema através do método proposto. O mapa mostra grande comprometimento da margem leste, mas há uma região que apresenta qualidade da água nas classes 1 e 2. Apesar de

haver uma região que pode ser considerada balneável no mapa, dados experimentais mostram que não há regiões balneáveis em Ipanema. Os dois métodos apresentam resultados ligeiramente inferiores aos dados experimentais (SISLAB, 2001), porque não há possibilidade de se considerar as cargas distribuídas provenientes de obras irregulares e fossas clandestinas, ou seja, há outras cargas de esgotos que não podem ser levadas em conta, uma vez que não há controle sobre estes dados.

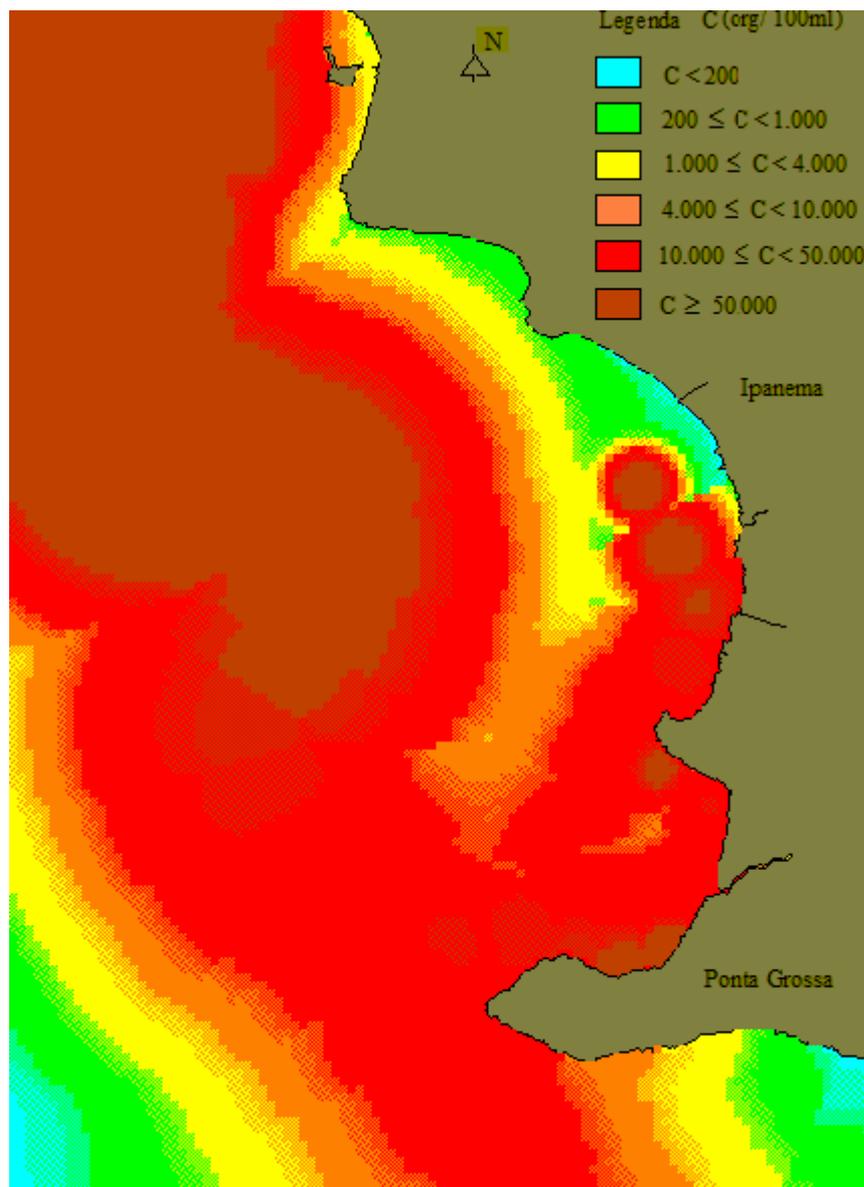


Figura 6.7: Distribuição de concentração de coliformes na região de Ipanema obtida por soluções formais

A figura 6.8 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais na região de Ipanema obtido por Lersch et al. (1999) e apresenta valores inferiores para a concentração.

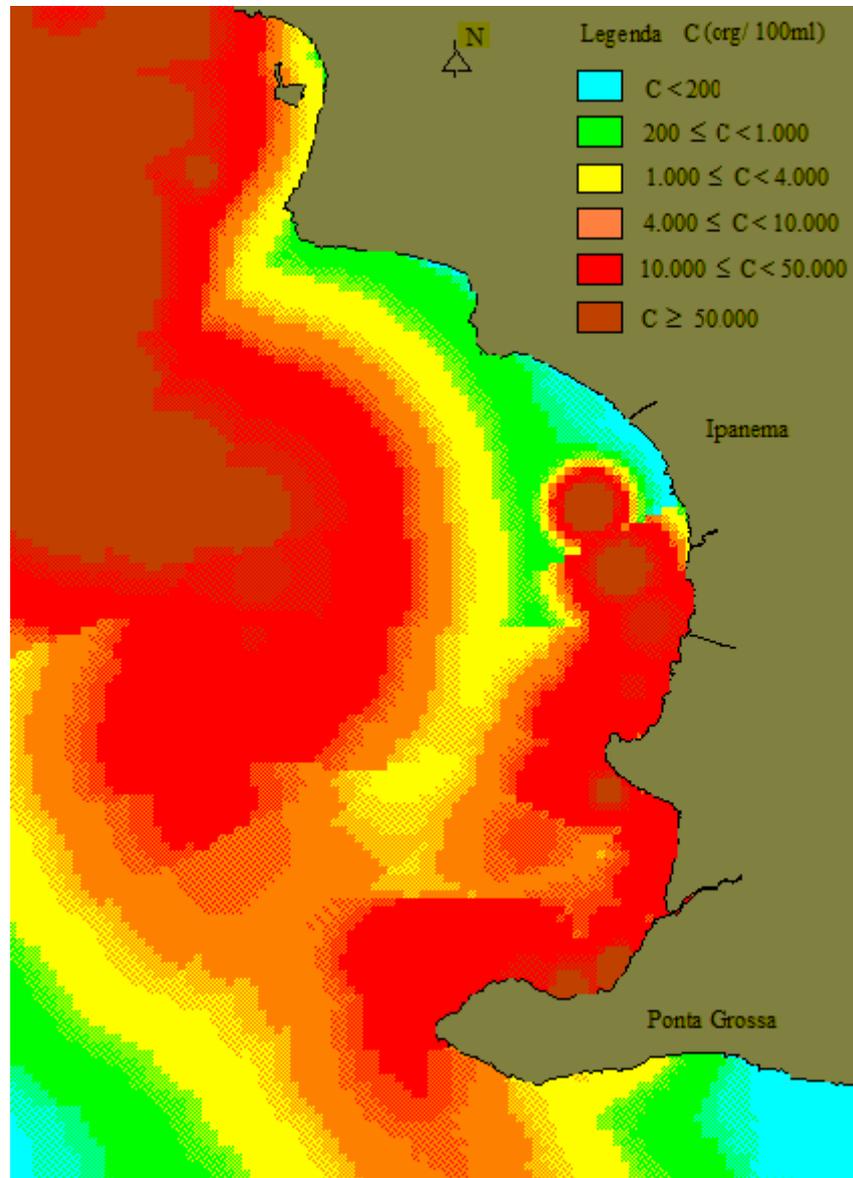


Figura 6.8: Distribuição de concentração de coliformes na região de Ipanema obtida por transformada de Fourier

6.1.1.4 Simulação para região de Belém Novo

A fim de se obter a distribuição de concentração de coliformes para a região de Belém Novo, consideram-se $U_{\infty} = 0,06$ m/s e as contribuições das cargas de índice 2 a 29, 34 a

36, 38 a 40 que constam na tabela do apêndice II com suas respectivas concentrações, localizações e vazões.

A figura 6.9 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais na região de Belém Novo através do método proposto.

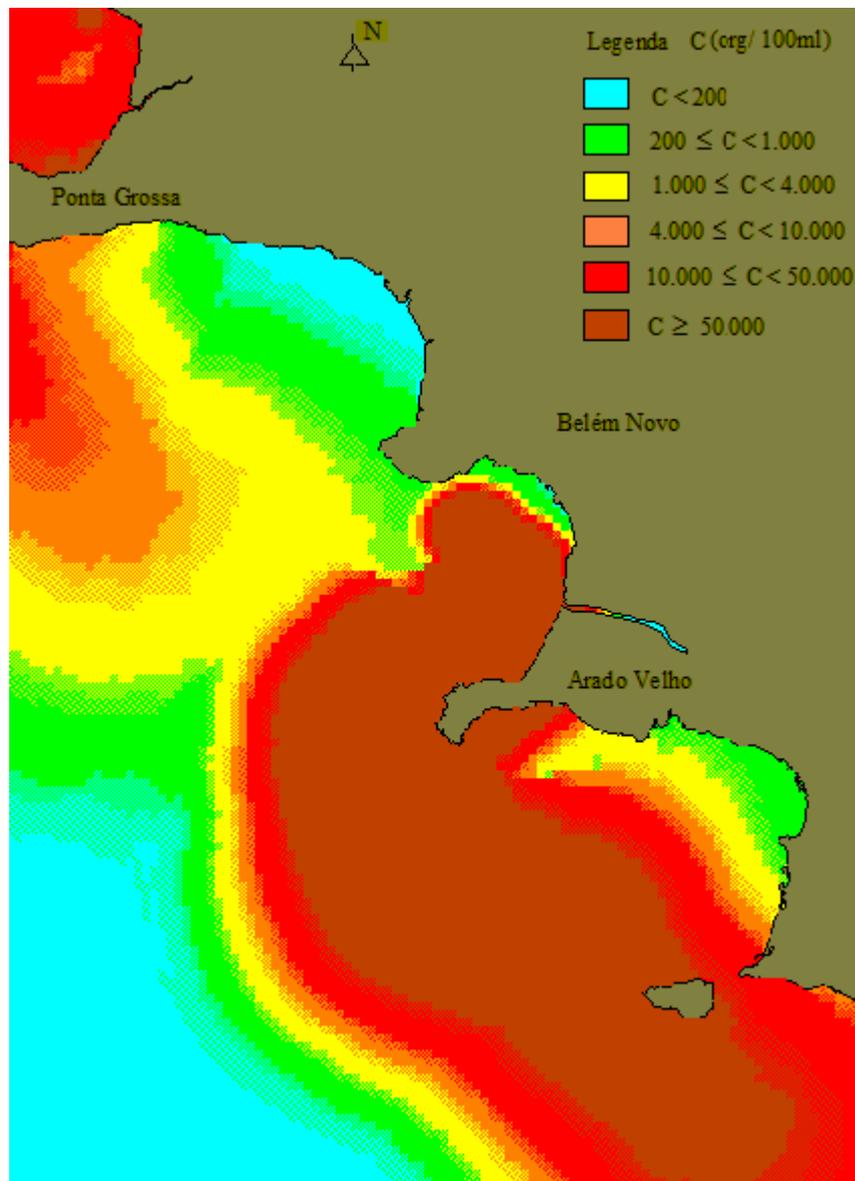


Figura 6.9: Distribuição de concentração de coliformes na região de Belém Novo obtida por soluções formais

A figura 6.10 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais na região de Belém Novo através do método baseado em transformada de Fourier. Nas faixas de concentração mais baixas, além do desvio provocado pelo uso de diferentes modelos cinéticos, a própria discretização da rampa de cores, por ser mais fina, causa a impressão de que os

resultados obtidos apresentam desvios maiores em relação ao modelo de Lersch et al. (1999), mas o desvio quadrático médio entre os dados experimentais (SISLAB, 2001) e o modelo de Lersch et al. (1999) é de 30%, sendo da ordem de 20% em relação ao modelo aqui utilizado.

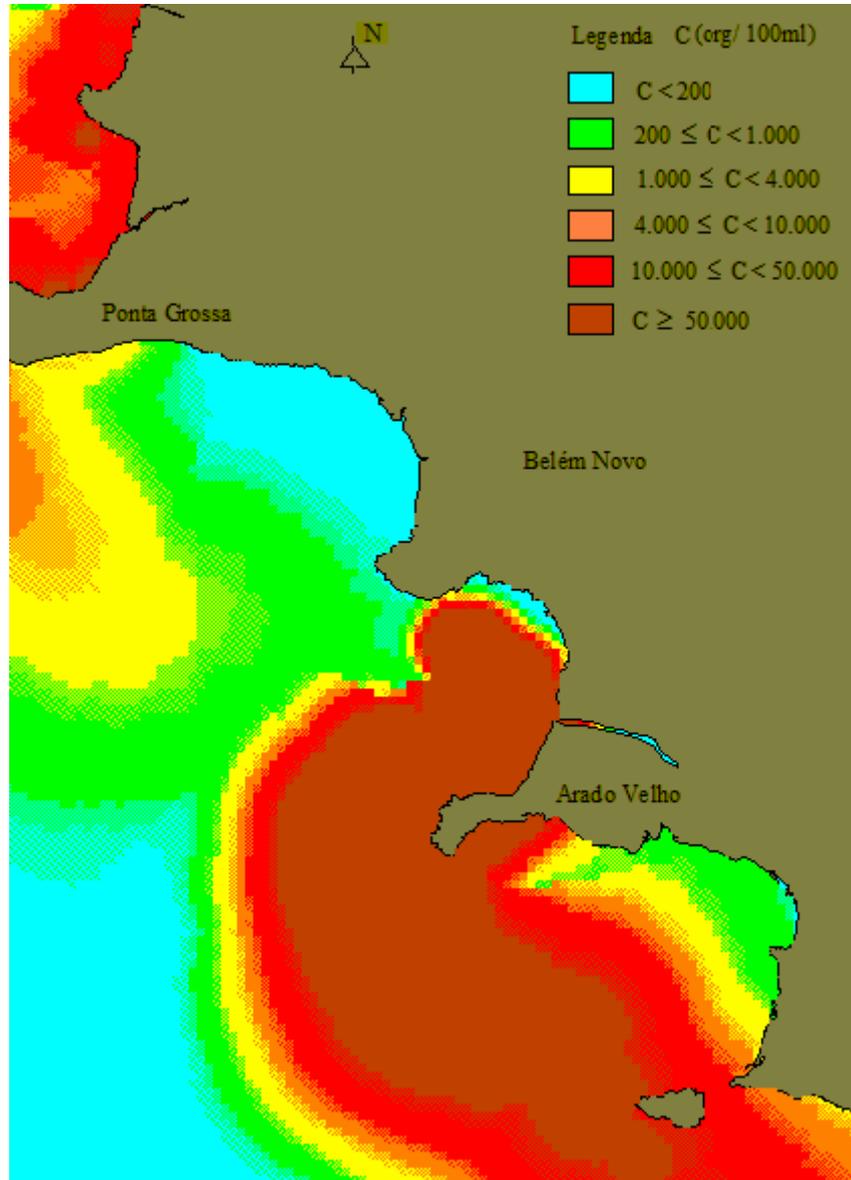


Figura 6.10: Distribuição de concentração de coliformes na região de Belém Novo obtida por Lersch et al. (1999)

6.1.1.5 Simulação para região do Lami

A fim de se obter a distribuição de concentração de coliformes para a região do Lami, consideram-se $U_{\infty} = 0,03 \text{ m/s}$ e as contribuições de todas as cargas que constam na tabela do apêndice II com suas respectivas concentrações, localizações e vazões.

A figura 6.11 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais na região do Lami através do método proposto. Esta região sob o ponto de vista do padrão de qualidade da água se encontra nas classes 1 e 2, sendo assim, é considerada balneável.

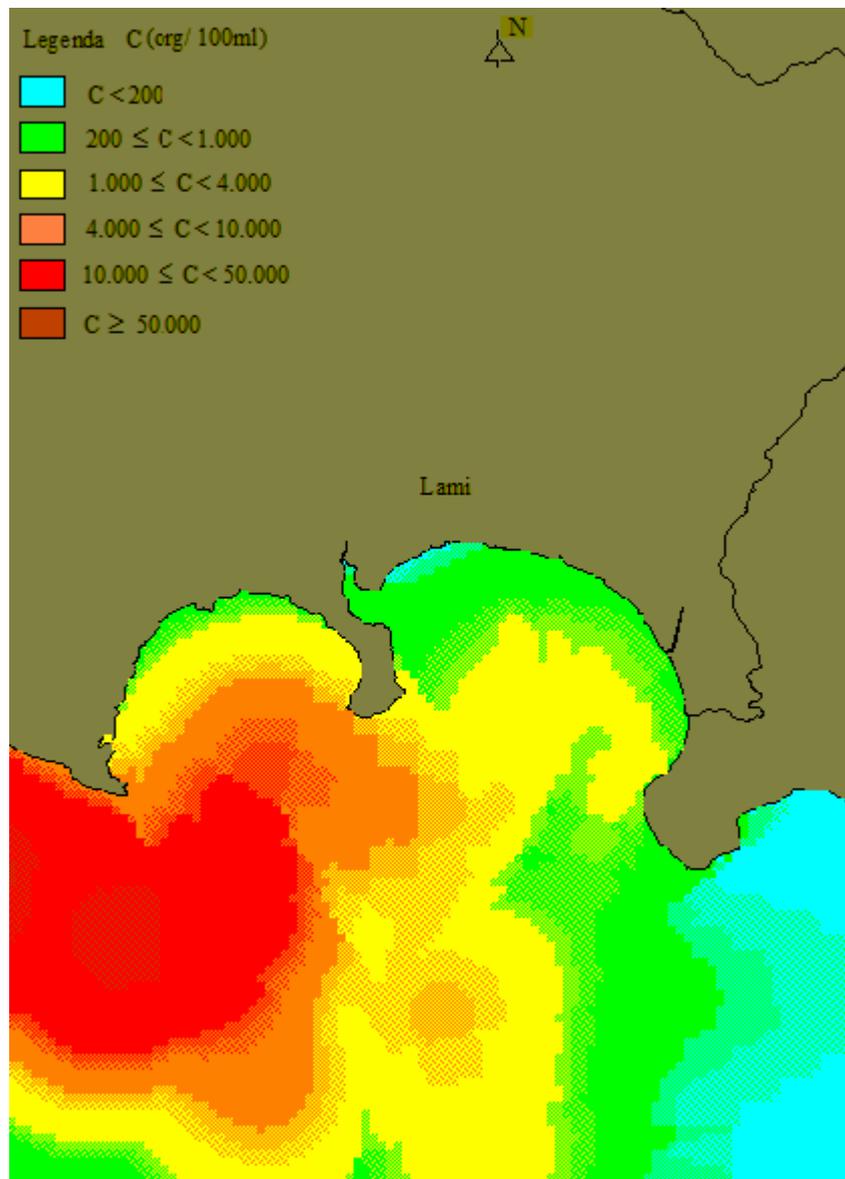


Figura 6.11: Distribuição de concentração de coliformes no Lami obtida por soluções formais

A figura 6.12 mostra o mapa de distribuição de concentração de coliformes fecais no Lami através do método apresentado por Lersch et al. (1999) baseado em transformada de Fourier. Na análise dos mapas verifica-se que a qualidade da água melhora de montante para jusante, isto é, na região do Gasômetro se enquadra na classe 4, já no Lami, na classe 2. Quanto mais próximo da Lagoa dos Patos, melhor a sua qualidade.

Um mapa completo de distribuição de concentração de coliformes, considerando-se 48 cargas de esgoto em toda extensão do Lago Guaíba é gerado em aproximadamente 5 minutos em um microcomputador Semprom com processador de 2.4GHz e 512Mb de RAM. O mesmo microcomputador gera o mesmo cenário para o método de Lersch et al. (1999) em aproximadamente 25 minutos. Cabe salientar que o tempo de processamento depende do número de cargas de esgoto considerado e da região de interesse. O mapa de distribuição de concentração na região do Gasômetro foi obtido em bem menos tempo.

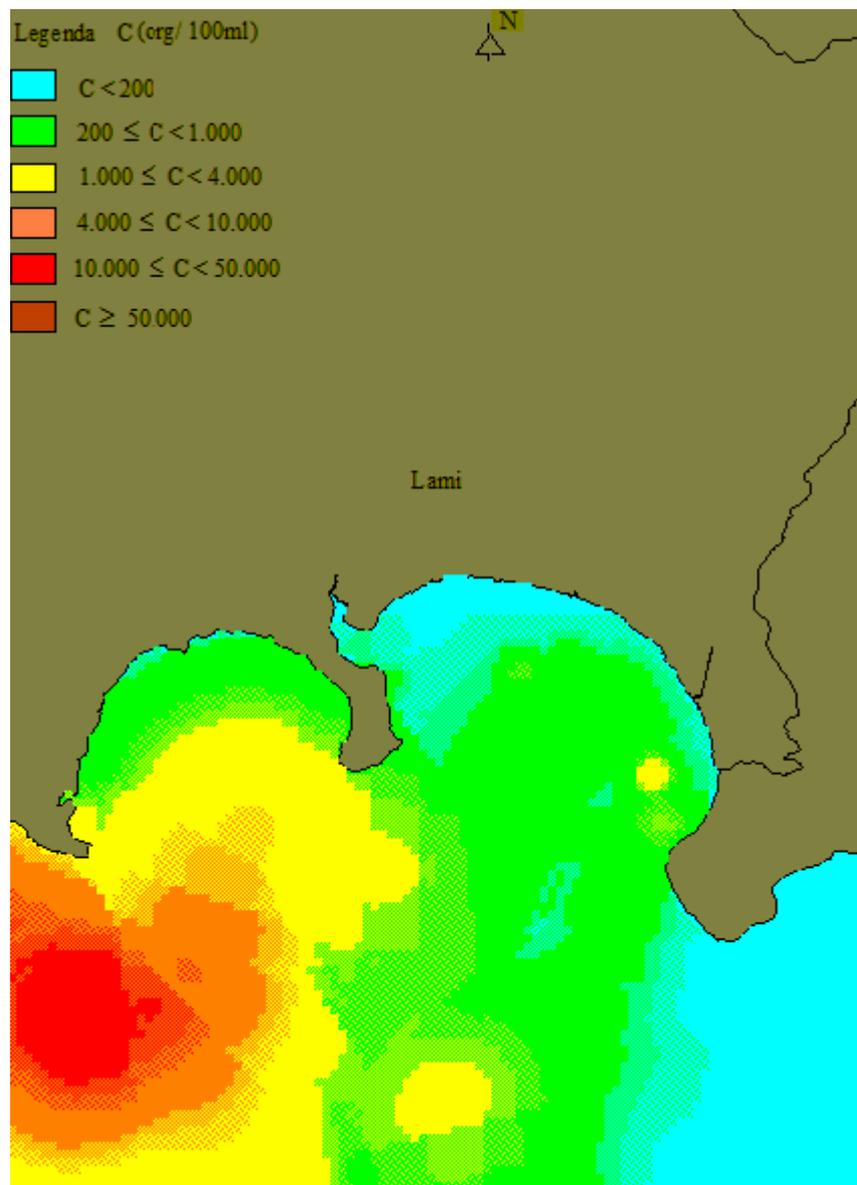


Figura 6.12: Distribuição de concentração de coliformes no Lami obtida por Lersch et al. (1999)

6.1.2 Simulação de acidentes com cargas tóxicas

A aplicação relativa à simulação de acidentes com cargas tóxicas é importante devido à necessidade de se avaliar o impacto ambiental causado pelo derramamento de uma substância tóxica sobre o ecossistema aquático, bem como na rede de abastecimento de água. Em tempo real, devem-se ter condições de avaliar se áreas de captação de água serão atingidas pela mancha para que as autoridades competentes possam ser alertadas e tomem medidas preventivas, como o fechamento das captações atingidas, de modo que a população não venha a consumir a água contaminada. Também podem ser realizadas operações emergenciais para contenção e remoção da mancha.

Neste tipo de aplicação, a equação obtida em coordenadas curvilíneas (6.4) deve ser resolvida em sua forma completa, isto é,

$$\frac{\partial c}{\partial \Phi} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \Psi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \Phi^2} \right) \quad (6.15)$$

sujeita à condição de contorno

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \Psi} \right|_{\Psi=0} = 0. \quad (6.16)$$

Neste problema, a forma inicial do despejo é aproximada por

$$c(\Phi_0, \Psi) = 2,5 \cdot (0,058\Phi_0^2 - 0,0047 \cdot \Phi_0 + 0,15 \cdot \Psi + 0,058 \cdot \Psi^2) \cdot \exp(-0,5 \cdot \Phi_0) \cdot \exp \left(-1,37 \cdot \arctan \left(\frac{(-0,116\Phi_0 + 0,0047)}{\sqrt{(-0,15 - 0,116 \cdot \Psi)^2}} \right) \right), \quad (6.17)$$

que corresponde à condição de passagem por pontos, explicitando a função $F1$ na equação (4.57).

Como mencionado no capítulo 4, o problema descrito por (6.15) é resolvido através da formulação para obtenção de simetrias de Lie admitidas por equações diferenciais, apresentada no capítulo 3, cuja solução é

$$c(\Phi, \Psi) = (0,058\Phi^2 - 0,0047 \cdot \Phi + 0,15 \cdot \Psi + 0,058 \cdot \Psi^2) \cdot \exp\left(0,5\Phi + 1,36 \arctan\left(\frac{(0,116\Phi - 0,0047)}{\sqrt{(-0,15 - 0,116 \cdot \Psi)^2}}\right)\right). \quad (6.18)$$

É importante salientar que o resultado está escrito em termos da função corrente e do potencial velocidade, pois nesta aplicação também não se considera o desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica, devido à escala geográfica do problema. A fim de que a solução (6.18) satisfaça à condição de contorno na margem, dada por (6.16), utiliza-se o conceito de reflexão no contorno (Crank, 1975), obtendo-se

$$c(\Phi, \Psi) = (0,058\Phi^2 - 0,0047 \cdot \Phi + 0,15 \cdot \Psi + 0,058 \cdot \Psi^2) \cdot \exp\left(0,5\Phi + 1,36 \arctan\left(\frac{(0,116\Phi - 0,0047)}{\sqrt{(-0,15 - 0,116 \cdot \Psi)^2}}\right)\right) + (0,058\Phi^2 - 0,0047 \cdot \Phi - 0,15 \cdot \Psi + 0,058 \cdot \Psi^2) \cdot \exp\left(0,5\Phi + 1,36 \arctan\left(\frac{(0,116\Phi - 0,0047)}{\sqrt{(-0,15 + 0,116 \cdot \Psi)^2}}\right)\right). \quad (6.19)$$

A aplicação da condição de passagem por pontos (6.17) determina a forma da função arbitrária F1 da equação (6.19). A fim de se escrever a solução nas coordenadas originais x e y , utiliza-se a função corrente dada por (6.13) e o potencial velocidade Φ é calculado a partir da aplicação das equações de Cauchy-Riemann, conforme descrito no capítulo 4. A substituição das expressões para Ψ e Φ na equação (6.19) permite escrever a solução de (6.15) em coordenadas cartesianas.

Na próxima subseção são mostrados os resultados obtidos por esta formulação, que são comparados qualitativamente com os resultados obtidos por Zabadal (2000). Os resultados obtidos pela formulação proposta por este trabalho são gerados em aproximadamente 10 segundos em um microcomputador Sempron com processador de 2.4GHz e 512Mb de RAM. No mesmo microcomputador, considerando-se os mesmos cenários, o resultado obtido por Zabadal (2000) leva 90 s para gerar o mapa que apresenta a extensão da mancha poluente próximo a uma região de interesse.

Em situações práticas, o modelo proposto é utilizado da seguinte forma: escolhe-se o ponto de despejo, observa-se a trajetória da mancha e define-se o local de interesse para avaliar o impacto ambiental. Neste ponto, obtém-se uma estimativa para a área de ação do poluente, bem

como o tempo necessário para que este atinja o local de interesse e o tempo de residência junto a este local. O fato de não haver necessidade de se acompanhar o trajeto da mancha diminui significativamente o tempo de processamento.

6.1.2.1 Simulação de acidente com cargas tóxicas próximo à Déa Coufal

Considera-se o derramamento de uma carga de 1.000m^3 de benzeno em um local próximo à rua Déa Coufal. Em Ipanema, os dados utilizados nesta simulação foram $U_{\infty} = 0,07\text{ m/s}$, $D = 5 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$.

A figura 6.13 mostra o ponto inicial do despejo, isto é, o local do acidente situado próximo à margem leste do lago Guaíba, e a trajetória da mancha. Pode-se observar que na região de Ipanema, situada entre Déa Coufal e a Ponta Grossa a trajetória se aproxima bastante da margem.



Figura 6.13: Local de despejo próximo à Déa Coufal e a trajetória da mancha

A figura 6.14 mostra a extensão da mancha na região próxima à Ponta do Arado Velho, obtida pelo método proposto, baseado em simetrias de Lie. Após cerca de 20h, a mancha poluente atinge este local.

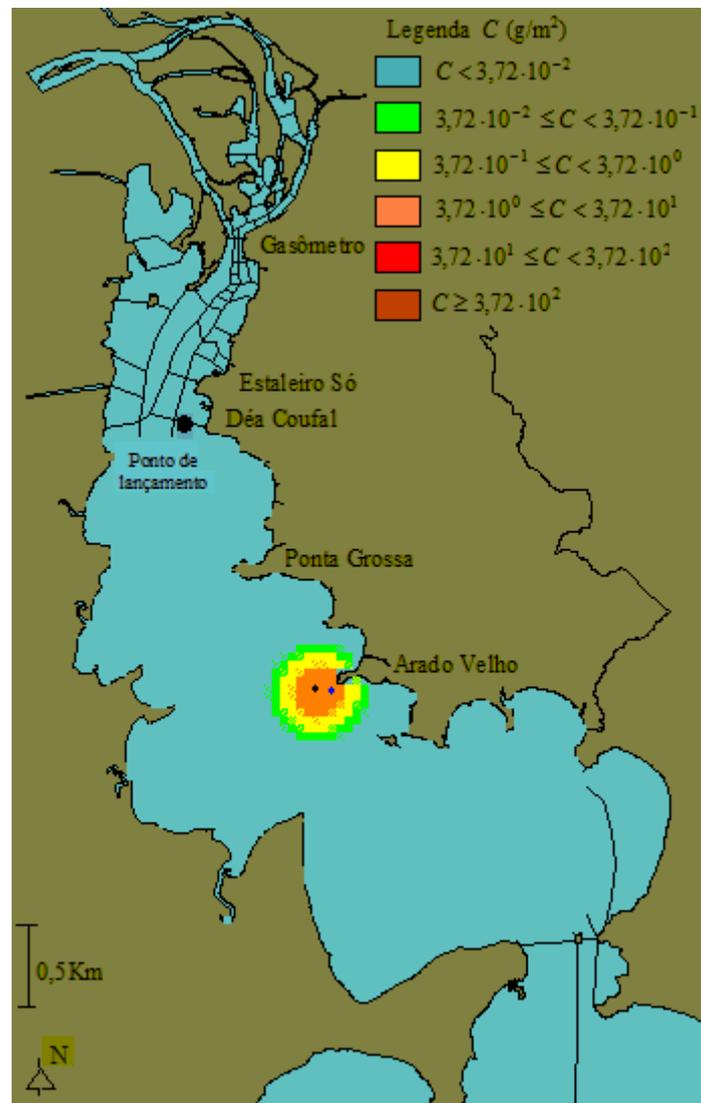


Figura 6.14: Extensão da mancha poluente próximo ao Arado Velho obtida por simetrias de Lie

A figura 6.15 mostra a extensão da mancha na região próxima ao Arado Velho obtida pelo método baseado na supressão de componentes (Zabadal, 2000). Nas duas figuras, as manchas apresentam a mesma extensão e levam o mesmo tempo para atingir a Ponta do Arado Velho.

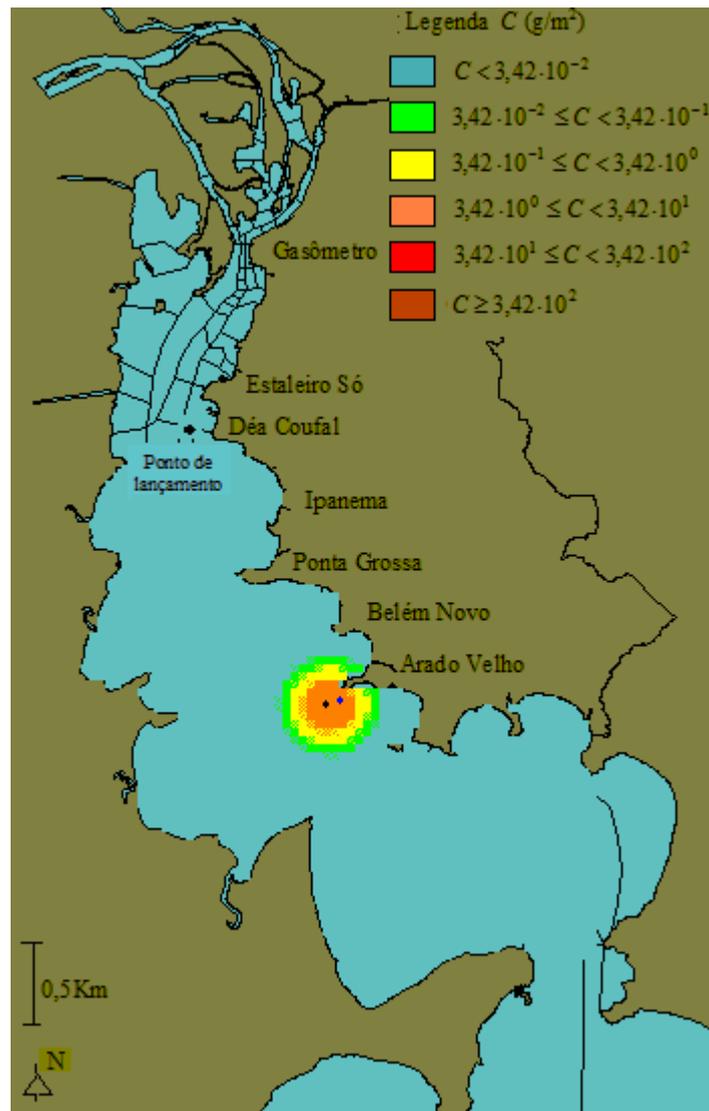


Figura 6.15: Extensão da mancha poluente próximo ao Arado Velho obtida por Zabadal (2000)

6.1.2.2 Simulação de acidente com cargas tóxicas próximo à Riocell

Considera-se o derramamento de um carga de $1.000m^3$ de benzeno em um local próximo à Riocell na margem oeste do lago Guaíba. Os dados utilizados nesta simulação foram $U_{\infty} = 0,08$ m/s, $D = 5 \cdot 10^{-4}$ m²/s.

A figura 6.16 mostra o ponto de lançamento, isto é, o local do acidente, e a trajetória da mancha. Podem-se observar as regiões que são atingidas pelo despejo ao longo desse percurso.

Conhecer a trajetória da mancha permite verificar quais áreas vão sendo atingidas ao longo de seu percurso, tornando possível identificar quais estações de tratamento de água são eventualmente comprometidas pela presença do poluente. Em caso afirmativo, pode-se analisar o

tempo de residência da mancha junto à captação atingida. Essas informações são utilizadas na tomada de decisões relativas às ações emergenciais a serem efetuadas, como, por exemplo, contenção, remoção e fechamento ou redução de vazão das captações afetadas.

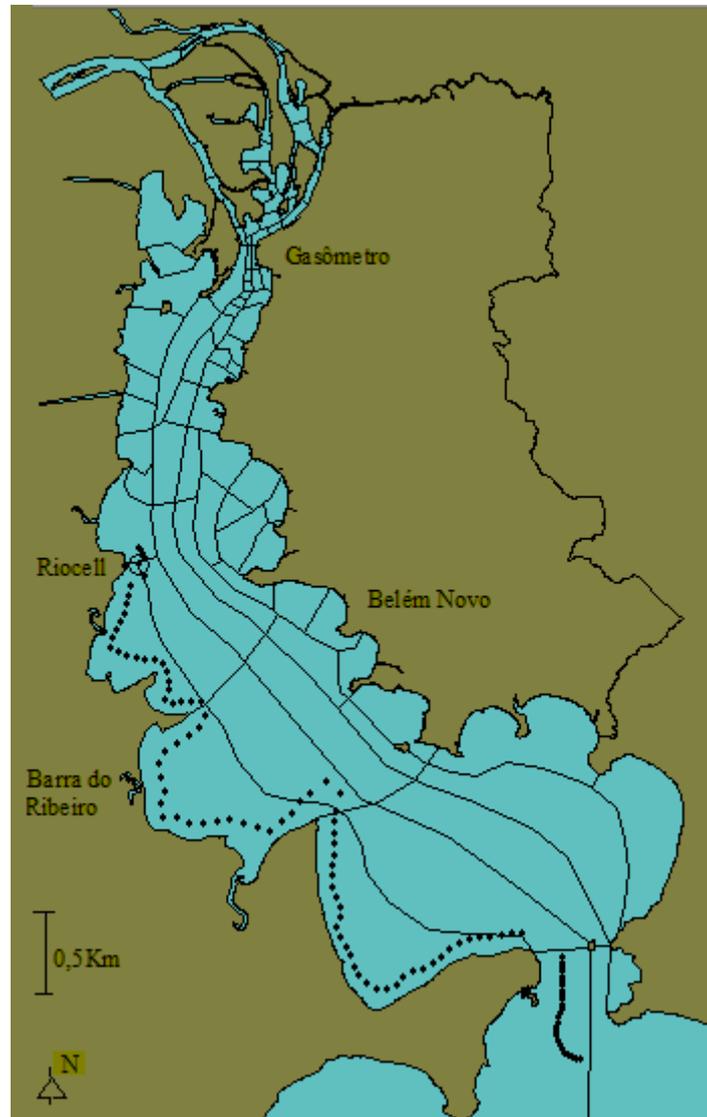


Figura 6.16: Local de despejo e trajetória da mancha próximo à Riocell

A figura 6.17 mostra a extensão da mancha na região da Barra do Ribeiro, bem próxima ao Arroio do Ribeiro, obtida pelo método baseado em simetrias de Lie. A mancha leva aproximadamente 25 horas para atingir esse local. Observa-se que a concentração máxima de benzeno nesse ponto é inferior a 30 g/m^2 .

O valor numérico da concentração mínima se encontra, via de regra, na periferia da mancha, sendo utilizado para estimar a concentração inicial que atinge a bomba de captação da

estação de tratamento. Caso a concentração esteja abaixo dos limites estabelecidos pelas autoridades sanitárias, a captação permanece em operação até que nova frente de maior concentração venha a atingi-la.

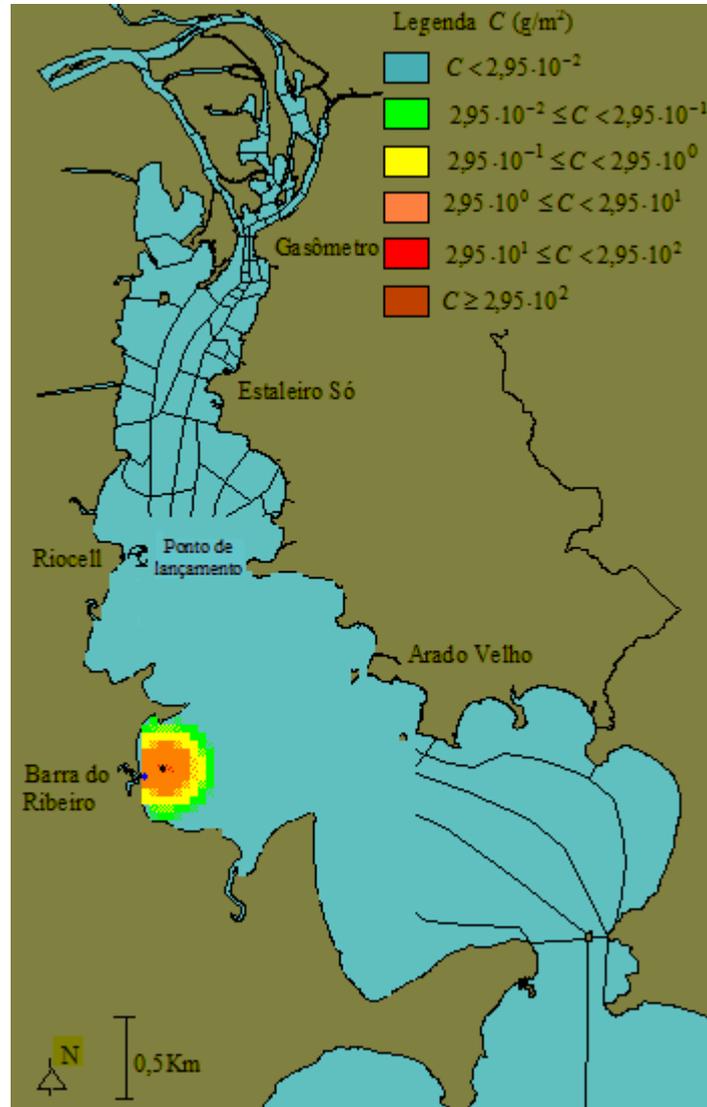


Figura 6.17: Extensão da mancha poluente próximo à Barra do Ribeiro obtida por simetrias de Lie

A figura 6.18 mostra a extensão da mancha na região da Barra do Ribeiro obtida pelo método baseado na supressão de componentes (Zabadal, 2000). Nas duas figuras, as manchas apresentam a mesma extensão, os valores das concentrações mínima e máxima têm a mesma ordem de grandeza e o tempo de deslocamento é o mesmo.

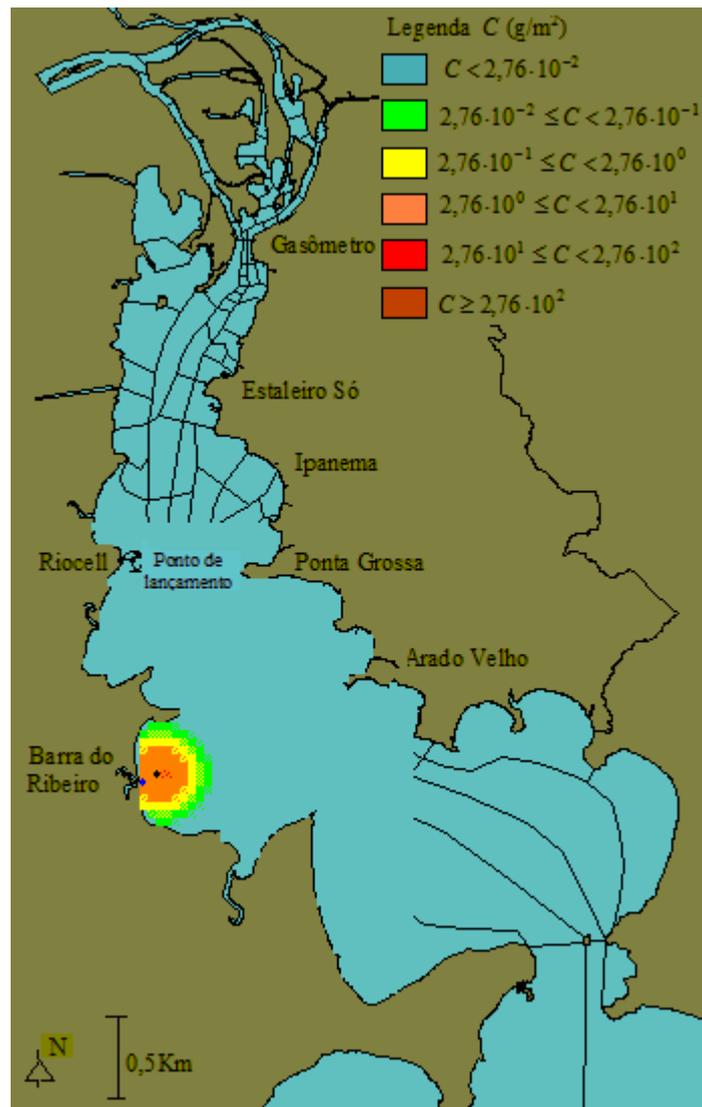


Figura 6.18: Extensão da mancha poluente próximo à Barra do Ribeiro obtida por Zabadal (2000)

Cabe salientar que as simulações efetuadas correspondem ao cenário mais pessimista do ponto de vista do impacto ambiental causado pelo derramamento, porque os valores da concentração são ligeiramente superestimados para poluentes pouco solúveis, uma vez que as bombas de captação de água se situam, em média, a 1,2 metros abaixo da superfície do corpo hídrico.

6.2 Problema de Dispersão de Contaminantes no Ar

Na atmosfera, em uma camada limite estável, o problema de dispersão de contaminantes emitidos por uma fonte puntual é descrito por

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (6.20)$$

para $0 < z < 1$ coordenada obtida através da adimensionalização da cota original $z \leftarrow \frac{z}{h_e}$, sujeito à condição inicial

$$C(z,0) = Q\delta(z - h_f), \quad (6.21)$$

onde C é a concentração média de contaminante, Q , a intensidade da fonte localizada a uma altura h_f , h_e é a altura da camada limite estável e K_z é o coeficiente de difusão.

Para fins de comparação com os resultados obtidos por Moura (1995), utiliza-se o coeficiente de difusão proposto por Degrazia (1992)

$$K_z = \frac{0,33 \left(1 - \frac{z}{h_e}\right)^{\alpha_1/2} \left(\frac{z}{h_e}\right)}{1 + 3,7 \left(\frac{z}{h_e}\right) \left(\frac{h_e}{\Lambda}\right)} u_* h_e, \quad (6.22)$$

onde $\alpha_1 = 2$, $u_* = 0,3 \text{ m/s}$, $\frac{\Lambda}{L} = \left(1 - \left(\frac{z}{h_e}\right)\right)^{[3/2\alpha_1 - \alpha_2]}$, Λ é o comprimento de Monin-Obukov local, $L = 116 \text{ m}$ é o comprimento de Monin-Obukov, z é a altura acima do solo, $\alpha_2 = 3$ (Moura, 1995). Moura, em 1995, obteve uma solução analítica para a equação difusiva considerando apenas dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável utilizando o coeficiente de dispersão proposto por Degrazia et al (1992) e aplicando a transformada de Laplace. Dividiu a camada limite estável em 40 regiões de 10m, onde utilizou valores médios para o coeficiente K_z em cada uma dessas regiões.

Como já foi mencionado no capítulo 5, neste caso, não é possível obter a solução diretamente através da aplicação das regras do capítulo 2, uma vez que K_z é um coeficiente de difusão variável. Utiliza-se o processo descrito no capítulo 5, ou seja, reescreve-se o termo difusivo da equação (6.20) em termos de novas variáveis h e g , transformado-a em uma nova equação diferencial parcial com coeficientes constantes. Utilizando a expressão para o K_z definida pela equação (6.23) e o *software* Maple V, obtém-se

$$h = 0,3608 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{z(z-400)}{10+37z}} \cdot (1,481 \cdot 10^5 + 5,479 \cdot 10^5 z)(0,2191 \cdot 10^9 - 5,479 \cdot 10^5 z) \cdot \left[\frac{\int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(1.0003377)^2 t^2)}} + 1480 \cdot \int_0^\phi \sqrt{\frac{1-(1.0003377)^2 t^2}{(1-t^2)}} dt \right] \quad (6.23)$$

$$\left. \vphantom{\int_0^\phi} \right\} \sqrt{z(z-400)}$$

onde

$$\phi = 0,675 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2,192 \cdot 10^8 - 5,479 \cdot 10^5 z} \quad (6.24)$$

e

$$g = -2,8935 \cdot 10^5 z + 3,00948 \cdot 10^5 \arctan h(0,961 \cdot 10^{-1} \cdot z + 0,2598 \cdot 10^{-1}). \quad (6.25)$$

A solução da equação (6.20) é dada por (5.24), isto é,

$$C(z,t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{e^{-\frac{\phi_1^2(h(z(g(z)+t)))}{4t}}}{|p'(\phi_1(h(z(g(z)+t))))|} + \frac{e^{-\frac{\phi_2^2(h(z(g(z)+t)))}{4t}}}{|p'(\phi_2(h(z(g(z)+t))))|} \right], \quad (6.26)$$

onde

$$p(\phi) = z(h - \phi) - h_f, \quad (6.27)$$

$$z(h - \phi) = -0,1719 \cdot 10^{-4} (h - \phi)^2 + 0,246 \cdot 10^{-3} (h - \phi) + 400,0932 \quad (6.28)$$

e $\phi_1(h)$ e $\phi_2(h)$ correspondem aos zeros de $p(\phi)$ dados por

$$\phi_1(h) = -7,141 + h + \frac{\sqrt{2,751 \cdot 10^{24} - 6,877 \cdot 10^{21} \cdot h_f}}{3,4385 \cdot 10^8} \quad (6.29)$$

e

$$\phi_2(h) = -7,141 + h - \frac{\sqrt{2,751 \cdot 10^{24} - 6,877 \cdot 10^{21} \cdot h_f}}{3,4385 \cdot 10^8}. \quad (6.30)$$

No processo de obtenção da solução $z(h)$ representa a função inversa de $h(z)$. Encontra-se a função inversa de $h(z)$ através de um ajuste de curvas. O erro médio produzido pelo ajuste de curvas é de 2,5%. Calcula-se

$$\frac{dp}{d\phi} = 0,3439 \cdot 10^{-4} \cdot h - 0,3439 \cdot 10^{-4} \phi - 0,246 \cdot 10^{-3} \quad (6.31)$$

e avalia-se a equação (6.31) em $\phi_1(h)$ e $\phi_2(h)$.

A fim de aplicar a regra de manipulação de exponenciais de operadores diferenciais de primeira ordem na variável g é necessário escrever a variável h em termos de g . Isto é possível, pois h pode ser escrito em função de z que, por sua vez, pode ser expresso em termos de g . Ou seja, substitui-se $h(z)$ por $h(z(g))$ onde $z(g)$ corresponde à inversa da função g , que foi obtida através de um ajuste de curvas

$$z(g) = 10 \cdot \arctan(0,118 \cdot 10^{-4} \cdot g - 0,922 \cdot 10^{-1}). \quad (6.32)$$

A concentração de contaminante escrita em termos de g e t é dada por

$$C(g, t) = \frac{691,147}{\sqrt{t}} \cdot \left\{ \exp\left[\frac{-0,25 \cdot 10^{-16} \cdot (-4,22 \cdot 10^9 + m(g, t))^2}{t}\right] + \exp\left[\frac{-0,25 \cdot 10^{-16} \cdot (-0,95 \cdot 10^{12} + m(g, t))^2}{t}\right] \right\}, \quad (6.33)$$

onde

$$m(g, t) = 2,335 \cdot 10^8 \cdot (z(g + t))^2 - 1,542 \cdot 10^9 \cdot z(g + t). \quad (6.34)$$

A expressão para a concentração de contaminante escrita em termos das variáveis originais z e t é obtida com a substituição de g por $g(z)$.

Com o intuito de mostrar a eficiência do método proposto, compara-se o resultado obtido com a solução de Moura (1995). Mostra-se o gráfico da evolução temporal da concentração em um ponto a 80m de uma fonte puntual localizada a 12,5 m de altura na figura 6.19.

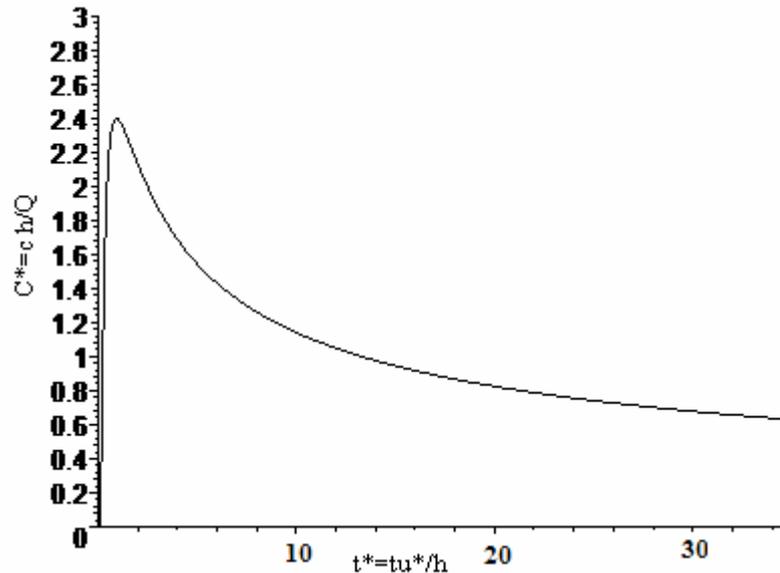


Figura 6.19: Evolução temporal da concentração para $z=80\text{m}$ com fonte puntual a 12,5m do solo

A figura 6.20 mostra a comparação entre os resultados da presente formulação com os resultados de Moura (1995). O desvio quadrático médio é de 6%.

O método proposto possui várias vantagens, entre elas, está o fato de dispensar a discretização do domínio quando se tratam de regiões de contornos suaves, não havendo a necessidade de utilizar valores médios para o coeficiente de difusão. Além disso, o tempo de processamento no software simbólico Maple V é de aproximadamente 2 s em um Pentium IV, 3,0 GHz com 1Gb de RAM.

Entretanto, há o inconveniente de se utilizar um sistema de ajuste de curvas a fim de obter uma aproximação para as funções inversas das funções h e g presentes na solução. Ocorre que todos os sistemas comerciais que efetuam ajustes de curvas utilizam o critério dos mínimos quadrados apenas sobre a função a ser ajustada, não levando em conta os desvios nas derivadas de primeira ordem. Em consequência deste fato, ajustes cujo desvio quadrático médio é aceitável para diversas finalidades práticas podem produzir erros significativos na primeira derivada, e conseqüentemente, na função inversa. Por esta razão, na obtenção da distribuição de

concentração para a variável t fixa, ocorrem desvios apreciáveis entre os resultados de Moura (1995) e o método proposto.

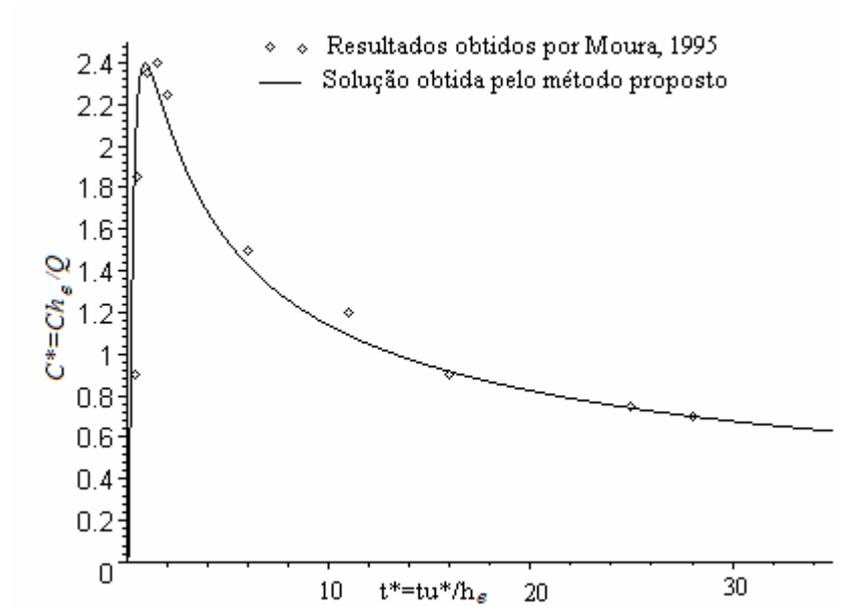


Figura 6.20: Comparativo de evolução temporal da concentração de contaminante para $z=80\text{m}$ com fonte puntual a $12,5\text{m}$ do solo entre os resultados do método proposto e os de Moura (1995).

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho utilizam-se duas formulações analíticas com o intuito de se obter soluções em forma fechada para a equação advectivo-difusiva: uma formulação baseada em regras para manipulação de exponenciais de operadores diferenciais, cujo objetivo consiste em transformar soluções formais em expressões de fácil implementação, e outra, que se baseia na obtenção, via mapeamento, das simetrias de Lie admitidas pela equação diferencial parcial. O mapeamento é realizado através da aplicação de um operador diferencial que transforma soluções analíticas em novas soluções analíticas da equação diferencial. Essas novas soluções são vantajosas porque contêm uma função arbitrária ao invés de constantes arbitrárias, o que facilita a aplicação das condições de contorno. Com o emprego do operador B, determinam-se soluções particulares de uma equação diferencial de segunda ordem através da solução de uma equação diferencial parcial de primeira ordem.

As soluções obtidas através das formulações propostas podem ser facilmente implementadas em *softwares* de computação simbólica em microcomputadores, e os códigos-fonte utilizados nas rotinas necessárias para obtenção da solução final são reduzidos, de modo que a depuração do sistema resultante se torna um processo simples. Dessa forma, há uma diminuição na quantidade de memória requerida para a execução dessas rotinas e um aumento significativo da velocidade de processamento, permitindo a obtenção de soluções em tempo real.

Além disso, as formulações desenvolvidas apresentam a vantagem de dispensar a discretização do domínio em diversas situações, e nos casos onde há necessidade de discretização, podem-se obter soluções em subdomínios relativamente extensos.

Acredita-se que o objetivo do trabalho tenha sido alcançado, uma vez que foram obtidas soluções analíticas para os problemas de dispersão de poluentes em meio aquático e na atmosfera. A análise dos resultados encontrados confirma a viabilidade das formulações, já que as soluções concordam com os dados disponíveis na literatura, e além disso, foram obtidas em tempo real. Nos problemas de dispersão de poluentes provenientes de redes de esgoto, os

resultados apresentaram 20% de desvio em relação aos dados experimentais (SISLAB, 2001). No caso de dispersão de poluentes ocasionados por acidentes com cargas tóxicas, os resultados obtidos concordaram qualitativamente com os resultados de Zabadal (2000). Em dispersão de poluentes no ar, o desvio quadrático médio em relação aos resultados obtidos por Moura (1995) foi de 6%. Não foi possível fazer uma comparação com dados exatos, pois não há disponível resultados de experimentos realizados sob condições controladas para a medição das grandezas envolvidas.

Na aplicação relativa a dispersão de contaminantes na água, considera-se a propagação de cargas poluentes provenientes de redes de esgoto e aquelas ocasionadas por acidentes com cargas tóxicas armazenadas em navios. Em ambos casos, a obtenção de soluções em tempo real tem grande importância. No primeiro caso, o planejamento da localização de estações de tratamento de esgoto, visando a balneabilidade de determinadas regiões do corpo hídrico, requer um grande número de simulações para que se possa avaliar onde o tratamento do esgoto seria mais eficiente para despoluição da região de interesse. No segundo caso, quando ocorre um derramamento de uma substância tóxica em um corpo hídrico, é necessário avaliar o impacto ambiental causado pelo despejo, observando as áreas afetadas e o tempo de residência da mancha, especialmente junto a pontos críticos, isto é, nas proximidades de captações de água de estações de tratamento. Dessa forma, torna-se possível avaliar a gravidade do problema, permitindo que as autoridades competentes sejam alertadas e tomem as medidas preventivas como, por exemplo, fechar as estações de abastecimento de água atingidas e contenção da mancha para fins de remoção ou tratamento, evitando que a população receba a água contaminada. É importante que se obtenha o resultado antes que a mancha atinja uma captação de água.

Uma outra vantagem da formulação proposta em relação à performance computacional, se deve ao fato da solução em forma fechada permitir a realização de “testes de carga unitária”, fornecendo as distribuições de concentrações em tempo de processamento bastante reduzido. Os “testes de carga unitária” consistem em atribuir concentração unitária no ponto do despejo, a fim de avaliar a influência de cada ponto de emissão sobre uma determinada região e, assim, detectar os locais onde o tratamento de esgotos seria mais eficiente na despoluição de uma certa região.

Em publicações anteriores, o método apresentou algumas limitações que foram superadas neste trabalho como, por exemplo, o *splash*. A solução anterior não levava em conta que a mancha poluente poderia atingir a margem, isto é, a solução obtida era válida apenas para meio infinito. Além disso, considerava o campo de velocidades localmente uniforme. Neste

trabalho, admite-se a possibilidade do poluente atingir as margens do corpo hídrico, e não é mais necessário supor que o campo de velocidades seja localmente constante, devido à mudança de variáveis implementada no processo de solução da equação diferencial parcial. Ainda há limitações, como no caso de dispersão de poluentes no ar, onde o ajuste de curvas necessário para obter as funções presentes na mudança de variáveis pode ser uma causa de desvio dos resultados.

Aperfeiçoamentos ainda podem ser implementados. Sugerem-se como trabalhos futuros:

- A obtenção de regras para manipulação de exponenciais de operadores diferenciais não-lineares, visando estender a aplicação do método a problemas em mecânica dos fluidos, permitindo que o campo de velocidades do corpo hídrico seja calculado com a utilização dessas regras;
- A formulação de regras para solução de equações integrais com núcleos arbitrários, com o fim de aplicar a formulação a problemas de transporte de partículas e radiação;
- Considerar o problema tridimensional de dispersão de contaminantes na água;
- A aplicação da formulação de obtenção de simetrias de Lie via mapeamento para obtenção da solução do problema em poluição no ar.
- Realizar um trabalho experimental no qual um poluente conservativo seja lançado em uma maquete representativa de um corpo hídrico sob condições controladas de escoamento de modo a validar o modelo com relação à substância utilizada.
- Reformular o critério dos mínimos quadrados de modo a considerar os desvios nas derivadas de primeira e segunda ordem e não apenas na função. Assim, podem-se evitar erros nos ajustes de curvas, retratando melhor as inclinações e as concavidades das funções que descrevem as margens do corpo hídrico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, G., 2000. “**Variáveis Complexas e Aplicações**”, LTC editora, Rio de Janeiro.

Azambuja, H., 1964. “**A Função Delta: Propriedades e Aplicações**”, tese apresentada no concurso para livre docência da disciplina de Física I, Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Beck, D, 2005. “**Soluções Exatas para a Equação de Helmholtz Bidimensional em Regime Transiente**”, dissertação (mestrado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Bendati, M.; Schwarzbach, M.; Maizonave, C.; Almeida, L.; Bringhenti, M., 2003. “Avaliação da Qualidade da Água do Lago Guaíba: Subsídios para Gestão da Bacia Hidrográfica”, **Revista Ecos Pesquisa**, vol. 7, pp. 9-34, Porto Alegre.

Böhm, L., 1981. “**Modelo Matemático de Dispersão de Bactérias**”, Departamento Municipal de Água e Esgotos, Porto Alegre.

Bluman, G., 1989. “**Symmetries and Differential Equations**”, Springer, New York.

Boyer, C., 2001. “**História da Matemática**”, Editora Edgard Blücher, São Paulo.

Buske, D., 2004. “**Solução Analítica da Equação Difusão-Advecção pelo Método GILTT Aplicada à Dispersão de Poluentes Atmosféricos**”, dissertação (mestrado), Programa

de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Buske, D., 2005. “Analytical Solution of the Advection Diffusion Equation with Nonlocal Closure of the Turbulent Diffusion by the GILTT Method”, **Proceedings of XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Guarapari.

Carnahan, J., 1972. “**Applied Numerical Methods**”, McGraw-Hill, New York.

Casalas, A., 1996. “**Aplicativo para Modelação de Estuários e Lagoas: Manual de Uso**”, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Pesquisas Hidráulica, Porto Alegre.

Churchill, R., 1975. “**Variáveis Complexas e suas Aplicações**”, McGraw-Hill, São Paulo.

Costa, C., Vilhena, M., Moreira, D., 2005. Analytical Solution of the Advection Diffusion Equation using the ADMM Method in Stable Conditions: Hendford Experiment. **Proceedings of XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Guarapari.

Cotta, R., 1993. “**Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow Technique**”, CRC Press, Boca Ratón.

Crank, J., 1975. “**The Mathematics of Diffusion**”, Oxford University Press, London.

Dattoli, G.; Giannessi, L.; Quatromini, M.; Torre, A., 1998. “Exponential Operators, Operational Rules and Evolution Problems”, **Il nuovo cimento**, vol. 113B, No. 6, pp. 699-710.

Degrazia, G., Moraes, O, 1992. “A Model for Eddy Diffusivity in a Stable Boundary Layer”, **Boundary-Layer Meteorology**, vol. 58, pp. 205-214.

Dhaubadel, M.; Reddy, J.; Tellionis, D., 1987. “Finite-element Analysis of Fluid Flow and Heat Transfer for Staggered Bundles of Cylinders in Cross Flow”, **International journal for numerical methods in Fluids**, vol. 7, pp. 1325-1342.

Garcia, R., 1997. “**Simulação da Qualidade da Água em Regime Não-permanente no Rio dos Sinos**”, dissertação (mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Greenspan, D.; Casuli, V., 1988. “**Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering**”, Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City.

Hauser, J.; Paap, H.; Eppel, D., 1986. “**Boundary Conformed Coordinate Systems for Fluid Flow Problems**”, Pineridge Press, Swansea.

Ibragimov, N., 1995. “**Applications in Engineering and Physical Sciences**”, CRC Press, Florida.

Kreyszig, E., 1993. “**Advanced Engineering Mathematics**”, John Wiley & Sons, Inc., 7. ed., New York.

Lersch, E.; Hoffman, C.; Zabadal, J., 1999. “Sistema Híbrido de Simulação de Propagação de Poluentes”, **Revista Ecos Pesquisa**, vol. 2, pp. 7-38, Porto Alegre.

Maliska, C., 1995. “**Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**”, LTC Editora, Rio de Janeiro.

Moreira, D., 1996. “**Comparação entre um Modelo Gaussiano Atualizado e a Equação de Difusão no Cálculo da Concentração Superficial de Poluentes na Camada Limite Convectiva: o Caso de Fontes Pontuais Contínuas Elevadas**”, dissertação (mestrado), Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

Moreira, D., 2000. “**Modelo Euleriano Semi-analítico de Difusão Turbulenta de Contaminante**”, tese (doutorado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Moreira, D., Vilhena, M., Carvalho J., Degrazia, G., 2005. “Analytical Solution of the Advection-diffusion Equation with Nonlocal Closure of the Turbulent Diffusion”, **Environmental Modelling and Software**, vol. 20, pp. 1347-1351.

Moura, A., 1995. “**Solução Analítica para Dispersão Vertical Turbulenta em uma Camada Limite Estável**”, dissertação (mestrado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Moura, A., 1999. “**Modelos Multidimensionais Analíticos de Dispersão de Contaminantes na Atmosfera: Coeficientes de Difusão Dependentes da Distância da Fonte**”, tese (doutorado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Mpimpas, H., Anagnostopoulos, P., Ganoulis, J., 2001. “Modelling of Water Pollution in Thermaikos Gulf with Fuzzy Parameters”, **Ecological Modelling**, vol 142, pp. 91-104.

Munson, B.; Young, D.; Okiishi, T., 1997. “**Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**”, Edgard Blücher, São Paulo. Tradução da 2. ed. Americana.

Olver, P., 1993. “Applications of Lie Groups to Differential Equations”, Springer, New York.

Ortega, J.; Poole, W., 1981. “**Numerical Methods for Differential Equations**”, Pitman Publishing, Marshfield.

Pires, C., 1996. “**Um Estudo Analítico de Dispersão de Contaminantes Abandonados por Fontes Áreas em uma Camada Limite Convectiva**”, dissertação (mestrado), Pós-graduação em Sensoriamento Remoto, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Rajar, R., Matjaz, C., 1997. “Hydrodynamic and Water Quality Modeling: an Experience”, **Ecological Modeling**, vol 101, pp. 195-207.

Reddy, J., 1986. “**Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering**”, McGraw-Hill, New York.

Reali, M.; Rangogni, R.; Pennati, V., 1984. “Compact Analytic Expressions of Two Dimensional Finite Difference Forms”, **International journal for numerical methods in engineering**, vol.20, pp. 121-130.

Schettini, E., 1991. “**Modelo Matemático Bidimensional de Transporte de Massa em Elementos Finitos com Ênfase em Estuários**”, dissertação (mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Silveira, A., 1986. “**Modelo Hidrodinâmico Bidimensional com Aplicação ao Rio Guaíba**”, dissertação (mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Silveira, A., Santos, J., Reis, N., Pereira, M., “Modelagem Matemática da Dispersão de Poluentes em Ambientes Urbanos de Topografia Complexa”. **Proceedings of XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Guarapari.

Silvestrini, J., Schettini, E., Rosauo, N., 1989. “EFAD: Código Numérico para Resolver Problemas de Tipo Advecção-difusão pelo Método dos Elementos Finitos”, trabalho apresentado no 6 **Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios Del Métodos de Elementos Finitos**, San Carlos de Bariloche.

Sislab, 2001. **Sistema de Gerenciamento de Dados Ambientais**, DMAE, Porto Alegre.

Spiegel, M., 1977. “**Variáveis Complexas**”, série Schaum, McGraw-Hill, São Paulo.

Yang, Y., Wilson, L., Makela, M., Marcheti, M., 1998. “Accuracy of Numerical Methods for Solving the Advection-diffusion Equation as Applied to Spore and Insect Dispersal”, **Ecological Modeling**, vol. 109, pp. 1-24.

Zabadal, J., 1991. “**Propagação de Bactérias e Substâncias Químicas no Rio Guaíba**”, DMAE/CESB, Porto Alegre.

Zabadal, J., 2000. “Approximate Solutions for the Two Dimensional Problems in Water Pollution, Component Suppression Schemes”, **Revista Ciência e Natura**, N.22, pp. 25-36.

Zabadal, J.; Vilhena, M.; Segatto, C., 2001. “The Total Photon Cross-section Formulation for a Wide Range of Energy”, **Il nuovo cimento**, vol. 116B, No. 2, pp. 183-190.

Zabadal, J.; Vilhena, M.; Poffal, C., Bogado, S., 2004^a. “Simulation of Two-dimensional Viscous Flows Using Lie Algebra”. **Proceedings of XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Recife.

Zabadal, J.; Poffal, C., 2004^b. “Solução da Equação de Difusão Multidimensional Utilizando Simetrias de Lie: Simulação da Dispersão de Poluentes na Atmosfera”, **Proceedings of Encit 2004**, ABCM, Rio de Janeiro.

Zabadal, J.; Beck, D.; Santiago, G., 2004^c. “Soluções Exatas para o Problema de Helmholtz em Duas Dimensões”, **IV Escola de Primavera de Transição e Turbulência**, Porto Alegre.

Zabadal, J.; Poffal, C.; Vilhena, M. 2004^d. “Solução Analítica da Equação Advectiono-difusiva Cartesiana Bidimensional Utilizando Simetrias de Lie”, **XXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Porto Alegre.

Zabadal, J.; Vilhena, M.; Bogado, S.; Poffal, C., 2005^a. “Solving Unsteady Problems in Water Pollution Using Lie Symmetries”, **Ecological Modelling**, vol 186, pp. 271-279.

Zabadal, J.; Poffal, C., Bogado, S., 2005^b. “Closed Form Solutions for Water Pollution Problems”, **Proceedings of XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Recife.

Zill, D.; Cullen, M., 2001. “**Equações Diferenciais**”, Makron Books, São Paulo.

Zwillinger, D., 1997. "**Handbook of Differential Equations**", Academic Press, San Diego.

APÊNDICE I

RESOLUÇÃO CONAMA Nº 20, de 18 de junho de 1986

Publicado no D.O.U. de 30/07/86

O CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE - CONAMA, no uso das atribuições que lhe confere o art. 7º, inciso IX, do Decreto 88.351, de 1º de junho de 1983, e o que estabelece a RESOLUÇÃO CONAMA Nº 003, de 5 de junho de 1984;

Considerando ser a classificação das águas doces, salobras e salinas essencial à defesa de seus níveis de qualidade, avaliados por parâmetros e indicadores específicos, de modo a assegurar seus usos preponderantes;

Considerando que os custos do controle de poluição podem ser melhor adequados quando os níveis de qualidade exigidos, para um determinado corpo d'água ou seus diferentes trechos, estão de acordo com os usos que se pretende dar aos mesmos;

Considerando que o enquadramento dos corpos d'água deve estar baseado não necessariamente no seu estado atual, mas nos níveis de qualidade que deveriam possuir para atender às necessidades da comunidade;

Considerando que a saúde e o bem-estar humano, bem como o equilíbrio ecológico aquático, não devem ser afetados como consequência da deterioração da qualidade das águas;

Considerando a necessidade de se criar instrumentos para avaliar a evolução da qualidade das águas, em relação aos níveis estabelecidos no enquadramento, de forma a facilitar a fixação e controle de metas visando atingir gradativamente os objetivos permanentes;

Considerando a necessidade de reformular a classificação existente, para melhor distribuir os usos, contemplar as águas salinas e salobras e melhor especificar os parâmetros e limites associados aos níveis de qualidade requeridos, sem prejuízo de posterior aperfeiçoamento;

RESOLVE estabelecer a seguinte classificação das águas, doces, salobras e salinas do Território Nacional:

Art. 1º - São classificadas, segundo seus usos preponderantes, em nove classes, as águas doces, salobras e salinas do Território Nacional:

ÁGUAS DOCES

I - Classe Especial - águas destinadas:

- a) ao abastecimento doméstico sem prévia ou com simples desinfecção.
- b) à preservação do equilíbrio natural das comunidades aquáticas.

II - Classe 1 - águas destinadas:

- a) ao abastecimento doméstico após tratamento simplificado;
- b) à proteção das comunidades aquáticas;
- c) à recreação de contato primário (natação, esqui aquático e mergulho);
- d) à irrigação de hortaliças que são consumidas cruas e de frutas que se desenvolvam rentes ao solo e que sejam ingeridas cruas sem remoção de película.
- e) à criação natural e/ou intensiva (aquicultura) de espécies destinadas à alimentação humana.

III - Classe 2 - águas destinadas:

- a) ao abastecimento doméstico, após tratamento convencional;
- b) à proteção das comunidades aquáticas;
- c) à recreação de contato primário (esqui aquático, natação e mergulho);
- d) à irrigação de hortaliças e plantas frutíferas;
- e) à criação natural e/ou intensiva (aquicultura) de espécies destinadas à alimentação humana.

IV - Classe 3 - águas destinadas:

- a) ao abastecimento doméstico, após tratamento convencional;
- b) à irrigação de culturas arbóreas, cerealíferas e forrageiras;
- c) à dessedentação de animais.

V - Classe 4 - águas destinadas:

- a) à navegação;
- b) à harmonia paisagística;
- c) aos usos menos exigentes.

ÁGUAS SALINAS

VI - Classe 5 - águas destinadas:

- a) à recreação de contato primário;
- b) à proteção das comunidades aquáticas;
- c) à criação natural e/ou intensiva (aquicultura) de espécies destinadas à alimentação humana.

VII - Classe 6 - águas destinadas:

- a) à navegação comercial;
- b) à harmonia paisagística;
- c) à recreação de contato secundário.

ÁGUAS SALOBRAS

VIII - Classe 7 - águas destinadas:

- a) à recreação de contato primário;
- b) à proteção das comunidades aquáticas;
- c) à criação natural e/ou intensiva (aquicultura) de espécies destinadas à alimentação humana.

IX - Classe 8 - águas destinadas:

- a) à navegação comercial;
- b) à harmonia paisagística;
- c) à recreação de contato secundário.

Art. 2º - Para efeito desta resolução são adotadas as seguintes definições.

- a) **CLASSIFICAÇÃO**: qualificação das águas doces, salobras e salinas com base nos usos preponderantes (sistema de classes de qualidade).
- b) **ENQUADRAMENTO**: estabelecimento do nível de qualidade (classe) a ser alcançado e/ou mantido em um segmento de corpo d'água ao longo do tempo.
- c) **CONDIÇÃO**: qualificação do nível de qualidade apresentado por um segmento de corpo d'água, num determinado momento, em termos dos usos possíveis com segurança adequada.
- d) **EFETIVAÇÃO DO ENQUADRAMENTO**: conjunto de medidas necessárias para colocar e/ou manter a condição de um segmento de corpo d'água em correspondência com a sua classe.
- e) **ÁGUAS DOCES**: águas com salinidade igual ou inferior a 0,50 ‰.

f) ÁGUAS SALOBRAS: águas com salinidade igual ou inferior a 0,5 ‰ e 30 ‰.

g) ÁGUAS SALINAS: águas com salinidade igual ou superior a 30 ‰.

Art. 3º - Para as águas de Classe Especial, são estabelecidos os limites e/ou condições seguintes:

COLIFORMES: para o uso de abastecimento sem prévia desinfecção os coliformes totais deverão estar ausentes em qualquer amostra.

Art. 4º - Para as águas de classe 1, são estabelecidos os limites e/ou condições seguintes:

a) materiais flutuantes, inclusive espumas não naturais: virtualmente ausentes;

b) óleos e graxas: virtualmente ausentes;

c) substâncias que comuniquem gosto ou odor: virtualmente ausentes;

d) corantes artificiais: virtualmente ausentes;

e) substâncias que formem depósitos objetáveis: virtualmente ausentes;

f) coliformes: para o uso de recreação de contato primário deverá ser obedecido o Art. 26 desta Resolução. As águas utilizadas para a irrigação de hortaliças ou plantas frutíferas que se desenvolvam rentes ao solo e que são consumidas cruas, sem remoção de casca ou película, não devem ser poluídas por excrementos humanos, ressaltando-se a necessidade de inspeções sanitárias periódicas. Para os demais usos, não deverá ser excedido um limite de 200 coliformes fecais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês; no caso de não haver na região meios disponíveis para o exame de coliformes fecais, o índice limite será de 1.000 coliformes totais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês.

g) DBO₅ dias a 20°C até 3 mg/l O₂;

h) OD, em qualquer amostra, não inferior a 6 mg/lO₂;

i) Turbidez até 40 unidades nefelométrica de turbidez (UNT);

j) cor: nível de cor natural do corpo de água em mg Pt/l;

l) pH: 6,0 a 9,0;

m) substâncias potencialmente prejudiciais (teores máximos):

Alumínio:	0,1 mg/l Al
Amônia não ionizável:	0,02 mg/l NH ₃ .
Arsênio:	0,05 mg/l As
Bário:	1,0 mg/l Ba.
Berílio:	0,1 mg/l Be
Boro:	0,75 mg/l B
Benzeno:	0,01 mg/l

Benzo-a-pireno:	0,00001 mg/l
Cádmio:	0,001 mg/l Cd
Cianetos:	0,01 mg/l CN
Chumbo:	0,03 mg/l Pb
Cloretos:	250 mg/l Cl
Cloro Residual:	0,01 mg/l Cl
Cobalto:	0,2 mg/l Co
Cobre:	0,02 mg/l Cu
Cromo Trivalente:	0,5 mg/l Cr
Cromo Hexavalente:	0,05 mg/l Cr
1,1 dicloroetano:	0,0003 mg/l
1,2 dicloroetano:	0,01 mg/l
Estanho;	2,0 mg/l Sn
Índice de Fenóis:	0,001 mg/l C ₆ H ₅ OH
Ferro solúvel:	0,3 mg/l Fe
Fluoretos:	1,4 mg/l F
Fosfato total:	0,025 mg/l P
Lítio:	2,5 mg/l Li
Manganês:	0,1 mg/l Mn
Mercúrio:	0,0002 mg/l Hg
Níquel:	0,025 mg/l Ni
Nitrato:	10 mg/l N
Nitrito:	1,0 mg/l N
Prata:	0,01mg/l Ag
Pentaclorofenol:	0,01 mg/l
Selênio:	0,01mg/l Se
Sólidos dissolvidos totais:	500 mg/l
Substâncias tenso-ativas que reagem com o azul de metileno :	0,5 mg/l LAS
Sulfatos:	250 mg/l SO ₄
Sulfetos (como H ₂ S não dissociado):	0,002 mg/l S
Tetracloroetano:	0,01 mg/l
Tricloroetano:	0,03 mg/l
Tetracloro de carbono:	0,003 mg/l
2, 4, 6 triclorofenol:	0,01 mg/l
Urânio total:	0,02 mg/l U
Vanádio:	0,1 mg/l V
Zinco:	0,18 mg/l Zn
Aldrin:	0,01 mg/l
Clordano:	0,04 µg/l
DDT;	0,002 µg/l
Dieldrin:	0,005 µg/l
Endrin:	0,004 µg/l
Endossulfan:	0,056 µg/l
Epóxido de Heptacloro:	0,01 µg/l
Heptacloro:	0,01 µg/l

Lindano (gama.BHC)	0,02 µg/l
Metoxicloro:	0,03 µg/l
Dodecacloro + Nonacloro:	0,001 µg/l
Bifenilas Policloradas (PCB'S):	0,001 µg/l
Toxafeno:	0,01 µg/l
Demeton:	0,1 µg/l
Gution:	0,005 µg/l
Malation:	0,1 µg/l
Paration:	0,04 µg/l
Carbaril:	0,02 µg/l
Compostos organofosforados e carbamatos totais:	10,0 µg/l em Paration
2,4 - D:	4,0 µg/l
2,4,5 - TP:	10,0 µg/l
2,4,5 - T:	2,0 µg/l

Art. 5º - Para as águas de Classe 2, são estabelecidos os mesmos limites ou condições da Classe 1, à exceção dos seguintes:

a) não será permitida a presença de corantes artificiais que não sejam removíveis por processo de coagulação, sedimentação e filtração convencionais;

b) Coliformes: para uso de recreação de contato primário deverá ser obedecido o Art. 26 desta Resolução. Para os demais usos, não deverá ser excedido um limite de 1.000 coliformes fecais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês; no caso de não haver, na região, meios disponíveis para o exame de coliformes fecais, o índice limite será de até 5.000 coliformes totais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês;

c) Cor: até 75 mg Pt/l

d) Turbidez: até 100 UNT;

e) DBO₅ dias a 20°C até 5 mg/l O₂;

f) OD, em qualquer amostra, não inferior a 5 mg/l O₂.

Art. 6º - Para as águas de Classe 3 são estabelecidos os limites ou condições seguintes:

a) materiais flutuantes, inclusive espumas não naturais: virtualmente ausentes;

b) óleos e graxas: virtualmente ausentes;

c) substâncias que comuniquem gosto ou odor: virtualmente ausentes;

d) não será permitida a presença de corantes artificiais que não sejam removíveis por processo de coagulação, sedimentação e filtração convencionais;

e) substâncias que formem depósitos objetáveis: virtualmente ausentes;

f) número de coliformes fecais até 4.000 por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês; no caso de não haver, na região, meios disponíveis para o exame de coliformes fecais, índice limite será de até 20.000 coliformes totais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês;

g) DBO₅ dias a 20°C até 10 mg/l O₂;

h) OD, em qualquer amostra, não inferior a 4 mg/l O₂;

l) Turbidez: até 100 UNT;

j) Cor: até 75 mg Pt/l;

l) pH: 6,0 a 9,0;

m) Substâncias potencialmente prejudiciais (teores máximos):

Alumínio:	0,1 mg/l Al
Arsênio:	0,05 mg/l As
Bário:	1,0 mg/l Ba
Berílio:	0,1 mg/l Be
Boro:	0,75 mg/l B
Benzeno:	0,01 mg/l
Benzo-a-pireno:	0,00001 mg/l
Cádmio:	0,01 mg/l Cd
Cianetos:	0,2 mg/l CN
Chumbo:	0,05 mg/l Pb
Cloretos:	250 mg/l Cl
Cobalto:	0,2 mg/l Co
Cobre:	0,5 mg/l Cu
Cromo Trivalente:	0,5 mg/l Cr
Cromo Hexavalente:	0,05 mg/l Cr
1,1 dicloroetano:	0,0003 mg/l
1,2 dicloroetano:	0,01 mg/l
Estanho:	2,0 mg/l Sn
Índice de Fenóis:	0,3 mg/l C ₆ H ₅ OH
Ferro solúvel:	5,0 mg/l Fe
Fluoretos:	1,4 mg/l F
Fosfato total:	0,025 mg/l P
Lítio:	2,5 mg/l Li
Manganês:	0,5 mg/l Mn
Mercúrio:	0,002 mg/l Hg
Níquel:	0,025 mg/l Ni
Nitrato:	10 mg/l N
Nítrito:	1,0 mg/l N
Nitrogênio amoniacal:	1,0 mg/l N
Prata:	0,05 mg/l Ag
Pentaclorofenol:	0,01 mg/l

Selênio:	0,01mg/l Se
Sólidos dissolvidos totais:	500 mg/l
Substâncias tenso-ativas que reagem com o azul de metileno:	0,5 mg/l LAS
Sulfatos:	250 mg/l SO ₄
Sulfatos (como H ₂ S não dissociado):	0,3 mg/l S
Tetracloroetano:	0,01 mg/l
Tricloroetano:	0,03 mg/l
Tetracloro de Carbono:	0,003 mg/l
2, 4, 6 triclorofenol:	0,01 mg/l
Urânio total:	0,02 mg/l U
Vanádio:	0,1 mg/l V
Zinco:	5,0 mg/l Zn
Aldrin:	0,03 µg/l
Clordano:	0,3 µg/l
DDT:	1,0 µg/l
Dieldrin:	0,03 µg/l
Endrin:	0,2 µg/l
Endossulfan:	150 µg/l
Epóxido de Heptacloro:	0,1 µg/l
Heptacloro:	0,1 µg/l
Lindano (gama-BHC):	3,0 µg/l
Metoxicloro:	30,0 µg/l
Dodecacloro + Nonacloro:	0,001 µg/l
Bifenilas Policloradas (PCB'S):	0,001 µg/l
Toxafeno:	5,0 µg/l
Demeton:	14,0 µg/l
Gution:	0,005 µg/l
Malation:	100,0 µg/l
Paration:	35,0 µg/l
Carbaril:	70,0 µg/l
Compostos organofosforados e carbamatos totais em Paration:	100,0 µg/l
2,4 - D:	20,0 µg/l
2,4,5 - TP:	10,0 µg/l
2,4,5 - T:	2,0 µg/l

Art. 7º - Para as águas de Classe 4, são estabelecidos os limites ou condições seguintes:

- a) materiais flutuantes, inclusive espumas não naturais: virtualmente ausentes;
- b) odor e aspecto: não objetáveis;
- c) óleos e graxas: toleram-se iridicências;
- d) substâncias facilmente sedimentáveis que contribuam para o assoreamento de canais de navegação: virtualmente ausentes;

- e) índice de fenóis até 1,0 mg/l C₆H₅OH ;
- f) OD superior a 2,0 mg/l O₂, em qualquer amostra;
- g) pH: 6 a 9.

ÁGUAS SALINAS

Art. 8º - Para as águas de Classe 5, são estabelecidos os limites ou condições seguintes:

- a) materiais flutuantes: virtualmente ausentes;
- b) óleos e graxas: virtualmente ausentes;
- c) substâncias que produzem odor e turbidez: virtualmente ausentes;
- d) corantes artificiais: virtualmente ausentes;
- e) substâncias que formem depósitos objetáveis: virtualmente ausentes;
- f) coliformes: para o uso de recreação de contato primário deverá ser obedecido o Art. 26 desta Resolução. Para o uso de criação natural e/ou intensiva de espécies destinadas à alimentação humana e que serão ingeridas cruas, não deverá ser excedida uma concentração média de 14 coliformes fecais por 100 mililitros, com não mais de 10% das amostras excedendo 43 coliformes fecais por 100 mililitros. Para os demais usos não deverá ser excedido um limite de 1,000 coliformes fecais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês; no caso de não haver, na região, meios disponíveis para o exame de coliformes fecais, o índice limite será de até 5,000 coliformes totais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês;
- g) DBO₅ dias a 20°C até 5 mg/l O₂;
- h) OD, em qualquer amostra, não inferior a 6 mg/l O₂;
- i) pH: 6,5 à 8,5, não devendo haver uma mudança do pH natural maior do que 0,2 unidade;
- j) substâncias potencialmente prejudiciais (teores máximos):

Alumínio:	1,5 mg/l Al
Amônia não ionizável:	0,4 mg/l NH ₃
Arsênio:	0,05 mg/l As
Bário:	1,0 mg/l Ba
Berílio:	1,5 mg/l Be
Boro:	5,0 mg/l B
Cádmio:	0,005 mg/l Cd
Chumbo:	0,01 mg/l Pb
Cianetos:	0,005 mg/l CN
Cloro residual:	0,01 mg/l Cl
Cobre:	0,05 mg/l Cu
Cromo hexavalente:	0,05 mg/l Cr

Estanho:	2,0 mg/l Sn
Índice de fenóis:	0,001 mg/l C ₆ H ₅ OH
Ferro:	0,3 mg/l Fe
Fluoretos:	1,4 mg/l F
Manganês:	0,1 mg/l Mn
Mercúrio:	0,0001 mg/l Hg
Níquel:	0,1 mg/l Ni
Nitrato:	10,0 mg/l N
Nitrito:	1,0 mg/ N
Prata:	0,005 m/l Ag
Selênio:	0,01 mg/l Se
Substâncias tensoativas que reagem com o azul de metileno:	0,5 mg/l - LAS
Sulfetos com H ₂ S:	0,002 mg/l S
Tálio:	0,1 mg/l Tl
Urânio Total:	0,5 mg/l U
Zinco:	0,17 mg/l Zn
Aldrin:	0,003 µg/l
Clordano:	0,004 µg/l
DDT:	0,001 µg/l
Demeton:	0,1 µg/l
Dieldrin:	0,003 µg/l
Endossulfan:	0,034 µg/l
Endrin:	0,004 µg/l
Epóxido de Heptacloro:	0,001 µg/l
Heptacloro:	0,001 µg/l
Metoxicloro:	0,03 µg/l
Lindano (gama - BHC):	0,004 µg/l
Dodecacloro + Nonadoro:	0,001 µg/l
Gution:	0,01 µg/l
Malation:	0,1 µg/l
Paration:	0,04 µg/l
Toxafeno:	0,005 µg/l
Compostos organofosforados e carbamatos totais:	10,0 µg/l em Paration
2,4 .- D:	10,0 µg/l
2, 4, 5 - TP:	10,0 µg/l
2, 4, 5 - T	10,0 µg/l

Art. 9º - Para as águas de Classe 6, são estabelecidos os limites ou condições seguintes:

- a) materiais flutuantes; virtualmente ausentes;
- b) óleos e graxas: toleram-se iridicências;
- c) substâncias que produzem odor e turbidez: virtualmente ausentes;
- d) corantes artificiais: virtualmente ausentes;

- e) substâncias que formem depósitos objetáveis: virtualmente ausentes;
- f) coliformes: não deverá ser excedido um limite de 4,000 coliformes fecais por 100 ml em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês; no caso de não haver na região meio disponível para o exame de coliformes fecais, o índice limite será de 20.000 coliformes totais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês;
- g) DBO₅ dias a 20°C até 10 mg/l O₂
- h) OD, em qualquer amostra, não inferior a 4 mg/l O₂;
- i) pH: 6,5, a 8,5, não devendo haver uma mudança do pH natural maior do que 0,2 unidades.

ÁGUAS SALOBRAS

Art. 10 - Para as águas de Classe 7, são estabelecidos os limites ou condições seguintes:

- a) DBO₅ dias a 20°C até 5 mg/l O₂;
- b) OD, em qualquer amostra, não inferior a 5 mg/l O₂;
- c) pH: 6,5 a 8,5;
- d) óleos e graxas: virtualmente ausentes;
- e) materiais flutuantes: virtualmente ausentes;
- f) substâncias que produzem cor, odor e turbidez: virtualmente ausentes;
- g) substâncias que formem depósitos objetáveis: virtualmente ausentes;
- h) coliformes; para uso de recreação de contato primário deverá ser obedecido o Art. 26 desta Resolução, Para o uso de criação natural e/ou intensiva de espécies destinadas à alimentação humana e que serão ingeridas cruas, não deverá ser excedido uma concentração média de 14 coliformes fecais por 100 mililitros com não mais de 10% das amostras excedendo 43 coliformes fecais por 100 mililitros. Para os demais usos não deverá ser excedido um limite de 1.000 coliformes fecais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais, colhidas em qualquer mês; no caso de não haver na região, meios disponíveis para o exame de coliformes fecais, o índice limite será de até 5.000 coliformes totais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais, colhidas em qualquer mês;
- i) substâncias potencialmente prejudiciais (teores máximos);

Amônia:	0,4 mg/l NH ₃
Arsênio:	0,05 mg/l As
Cádmio:	0,005 mg/l Cd
Cianetos:	0,005 mg/l CN
Chumbo:	0,01 mg/l Pb
Cobre:	0,05 mg/l Cu

Cromo hexavalente:	0,05 mg/l Cr
Índice de fenóis:	0,001 mg/l C ₆ H ₅ OH
Fluoretos:	1,4 mg/l F
Mercúrio:	0,0001 mg/l Hg
Níquel:	0,1 mg/l Ni
Sulfetos como H ₂ S:	0,002 mg/l S
Zinco:	0,17 mg/l Zn
Aldrin:	0,003 µg/l
Clordano:	0,004 µg/l
DDT:	0,001 µg/l
Demeton:	0,1 µg/l
Dieldrin:	0,003 µg/l
Endrin:	0,004 µg/l
Endossulfan:	0,034 µg/l
Epóxido de heptacloro:	0,001 µg/l
Gution:	0,01 µg/l
Heptacloro:	0,001 µg/l
Lindano (gama . BHC):	0,004 µg/l
Malation:	0,1 µg/l
Metoxicloro:	0,03 µg/l
Dodecacloro + Nonacloro:	0,001 µg/l
Paration:	0,04 µg/l
Toxafeno:	0,005 µg/l
Compostos organofosforados e carbamatos totais:	10,0 µg/l em Paration
2,4 - D:	10,0 µg/l
2, 4, 5 - T:	10,0 µg/l
2, 4, 5 - TP:	10,0 µg/l

Art.11 - Para as águas de Classe 8, são estabelecidos os limites ou condições seguintes:

a) pH: 5 a 9

b) OD, em qualquer amostra, não inferior a 3,0 mg/l O₂;

c) óleos e graxas: toleram-se iridicências;

d) materiais flutuantes: virtualmente ausentes;

e) substâncias que produzem cor, odor e turbidez: virtualmente ausentes;

f) substâncias facilmente sedimentáveis que contribuam para o assoreamento de canais de navegação: virtualmente ausentes;

g) coliformes: não deverá ser excedido um limite de 4.000 coliformes fecais por 100 ml em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês; no caso de não haver, na região, meios disponíveis para o exame de coliformes recais, o índice será de 20.000 coliformes totais por 100 mililitros em 80% ou mais de pelo menos 5 amostras mensais colhidas em qualquer mês;

Art. 12 - Os padrões de qualidade das águas estabelecidos nesta Resolução constituem-se em limites individuais para cada substância. Considerando eventuais ações sinérgicas entre as mesmas, estas ou outras não especificadas, não poderão conferir às águas características capazes de causarem efeitos letais ou alteração de comportamento, reprodução ou fisiologia da vida.

§ 1º - As substâncias potencialmente prejudiciais a que se refere esta Resolução, deverão ser investigadas sempre que houver suspeita de sua presença,

§ 2º - Considerando as limitações de ordem técnica para a quantificação dos níveis dessas substâncias, os laboratórios dos organismos competentes deverão estruturar-se para atenderem às condições propostas. Nos casos onde a metodologia analítica disponível for insuficiente para quantificar as concentrações dessas substâncias nas águas, os sedimentos e/ou biota aquática deverão ser investigados quanto a presença eventual dessas substâncias.

Art. 13 - Os limites de DBO, estabelecidos para as Classes 2 e 3, poderão ser elevados, caso o estudo da capacidade de autodepuração do corpo receptor demonstre que os teores mínimos de OD, previstos, não serão desobedecidos em nenhum ponto do mesmo, nas condições críticas de vazão ($Q_{crit.} = Q_{7,10}$, onde $Q_{7,10}$, é a média das mínimas de 7 (sete) dias consecutivos em 10 (dez) anos de recorrência de cada seção do corpo receptor).

Art. 14 - Para os efeitos desta Resolução, consideram-se entes, cabendo aos órgãos de controle ambiental, quando necessário, quantificá-los para cada caso.

Art. 15 - Os órgãos de controle ambiental poderão acrescentar outros parâmetros ou tornar mais restritivos os estabelecidos nesta Resolução, tendo em vista as condições locais.

Art. 16 - Não há impedimento no aproveitamento de águas de melhor qualidade em usos menos exigentes, desde que tais usos não prejudiquem a qualidade estabelecida para essas águas.

Art. 17 - Não será permitido o lançamento de poluentes nos mananciais sub-superficiais.

Art. 18 - Nas águas de Classe Especial não serão tolerados lançamentos de águas residuárias, domésticas e industriais, lixo e outros resíduos sólidos, substâncias potencialmente tóxicas, defensivos agrícolas, fertilizantes químicos e outros poluentes, mesmo tratados. Caso sejam utilizadas para o abastecimento doméstico deverão ser submetidas a uma inspeção sanitária preliminar.

Art. 19 - Nas águas das Classes 1 a 8 serão tolerados lançamentos de despejos, desde que, além de atenderem ao disposto no Art. 21 desta Resolução, não venham a fazer com que os limites estabelecidos para as respectivas classes sejam ultrapassados.

Art. 20 - Tendo em vista os usos fixados para as Classes, os órgãos competentes enquadrarão as águas e estabelecerão programas de controle de poluição para a efetivação dos respectivos enquadramentos, obedecendo ao seguinte:

a) o corpo de água que, na data de enquadramento, apresentar condição em desacordo com a sua classe (qualidade inferior à estabelecida), será objeto de providências com prazo determinado visando a sua recuperação, excetuados os parâmetros que excedam aos limites devido às condições naturais;

b) o enquadramento das águas federais na classificação será procedido pela SEMA, ouvidos o Comitê Especial de Estudos Integrados de Bacias Hidrográfica; - CEEIBH e outras entidades públicas ou privadas interessadas;

c) o enquadramento das águas estaduais será efetuado pelo órgão estadual competente, ouvidas outras entidades públicas ou privadas interessadas;

d) os órgãos competentes definirão as condições específicas de qualidade dos corpos de água intermitentes;

e) os corpos de água já enquadrados na legislação anterior, na data da publicação desta Resolução, serão objetos de reestudo a fim de a ela se adaptarem;

f) enquanto não forem feitos os enquadramentos, as águas doces serão consideradas Classe 2, as salinas Classe 5 e as salobras Classe 7, porém, aquelas enquadradas na legislação anterior permanecerão na mesma classe até o reenquadramento;

g) os programas de acompanhamento da condição dos corpos de água seguirão normas e procedimentos a serem estabelecidos pelo Conselho Nacional do Meio Ambiente - CONAMA.

Art. 21 - Os efluentes de qualquer fonte poluidora somente poderão ser lançados, direta ou indiretamente, nos corpos de água desde que obedeçam às seguintes condições:

a) pH entre 5 a 9;

b) temperatura: inferior a 40°C, sendo que a elevação de temperatura do corpo receptor não deverá exceder a 3°C;

c) materiais sedimentáveis: até 1 ml/litro em teste de 1 hora em cone Imhoff. Para o lançamento em lagos e lagoas, cuja velocidade de circulação seja praticamente nula, os materiais sedimentáveis deverão estar virtualmente ausentes;

d) regime de lançamento com vazão máxima de até 1,5 vezes a vazão média do período de atividade diária do agente poluidor;

e) óleos e graxas:

- óleos minerais até 20 mg/l;

- óleos vegetais e gorduras animais até 50 mg/l;

f) ausência de materiais flutuantes;

g) valores máximos admissíveis das seguintes substâncias:

Amônia:	5,0 mg/l N
Arsênio total:	0,5 mg/l As
Bário:	5,0 mg/ Ba
Boro:	5,0 mg/l B
Cádmio:	0,2 mg/l Cd

Cianetos:	0,2 mg/l CN
Chumbo:	0,5 mg/l Pb
Cobre:	1,0 mg/l Cu
Cromo hexavalente:	0,5 mg/l Cr
Cromo trivalente:	2,0 mg/l Cr
Estanho:	4,0 mg/l Sn
Índice de fenóis:	0,5 mg/l C ₆ H ₅ OH
Ferro solúvel:	15,0 mg/l Fe
Fluoretos:	10,0 mg/l F
Manganês solúvel:	1,0 mg/l Mn
Merúrio:	0,01 mg/l Hg
Níquel:	2,0 mg/l Ni
Prata:	0,1 mg/l Ag
Selênio:	0,05 mg/l Se
Sulfetos:	1,0 mg/l S
Sulfito:	1,0 mg/l SO ₃
Zinco:	5,0 mg/l Zn
Compostos organofosforados e carbonatos totais:	1,0 mg/l em Paration
Sulfeto de carbono:	1,0 mg/l
Tricloroeteno:	1,0 mg/l
Clorofórmio :	1,0 mg/l
Tetracloroeto de Carbono:	1,0 mg/l
Dicloroeteno:	1,0 mg/l
Compostos organoclorados não listados acima (pesticidas, solventes, etc):	0,05 mg/l
outras substâncias em concentrações que poderiam ser prejudiciais: de acordo com limites a serem fixados pelo CONAMA.	

h) tratamento especial, se provierem de hospitais e outros estabelecimentos nos quais haja despejos infectados com microorganismos patogênicos.

Art. 22 - Não será permitida a diluição de efluentes industriais com águas não poluídas, tais como água de abastecimento, água de mar e água de refrigeração.

Parágrafo Único - Na hipótese de fonte de poluição geradora de diferentes despejos ou emissões individualizadas, os limites constantes desta regulamentação aplicar-se-ão a cada um deles ou ao conjunto após a mistura, a critério do órgão competente.

Art. 23 - Os efluentes não poderão conferir ao corpo receptor características em desacordo com o seu enquadramento nos termos desta Resolução.

Parágrafo Único - Resguardados os padrões de qualidade do corpo receptor, demonstrado por estudo de impacto ambiental realizado pela entidade responsável pela emissão, o competente poderá autorizar lançamentos acima dos limites estabelecidos no Art. 21, fixando o tipo de tratamento e as condições para esse lançamento.

Art. 24 - Os métodos de coleta e análise das águas devem ser os especificados nas normas aprovadas pelo Instituto Nacional de Metrologia, Normatização e Qualidade Industrial -

INMETRO ou, na ausência delas, no Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater APHA-AWWA-WPCF, última edição, ressalvado o disposto no Art. 12. O índice de fenóis deverá ser determinado conforme o método 510 B do Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater, 16ª edição, de 1985.

Art. 25 - As indústrias que, na data da publicação desta Resolução, possuem instalações ou projetos de tratamento de seus despejos, aprovados por órgão integrante do Sistema Nacional do Meio Ambiente - SISNAMA, que atendam à legislação anteriormente em vigor, terão prazo de três (3) anos, prorrogáveis até cinco (5) anos, a critério do Estadual Local, para se enquadrarem nas exigências desta Resolução. No entanto, as citadas instalações de tratamento deverão ser mantidas em operação com a capacidade, condições de funcionamento e demais características para as quais foram aprovadas, até que se cumpram as disposições desta Resolução.

BALNEABILIDADE

Art. 26 - As águas doces, salobras e salinas destinadas à balneabilidade (recreação de contato primário) serão enquadradas e terão sua condição avaliada nas categorias EXCELENTE, MUITO BOA, SATISFATÓRIA e IMPRÓPRIA, da seguinte forma:

a) EXCELENTE (3 estrelas) : Quando em 80% ou mais de um conjunto de amostras obtidas em cada uma das 5 semanas anteriores, colhidas no mesmo local, houver, no máximo, 250 coliformes fecais por 1,00 mililitros ou 1.250 coliformes totais por 100 mililitros;

b) MUITO BOAS (2 estrelas): Quando em 80% ou mais de um conjunto de amostras obtidas em cada uma das 5 semanas anteriores, colhidas no mesmo local, houver, no máximo, 500 coliformes fecais por 100 mililitros ou 2.500 coliformes totais por 100 mililitros;

c) SATISFATÓRIAS (1 estrela): Quando em 80% ou mais de um conjunto de amostras obtidas em cada uma das 5 semanas anteriores, colhidas no mesmo local, houver, no máximo 1.000 coliformes fecais por 100 mililitros ou 5.000 coliformes totais por 100 mililitros;

d) IMPRÓPRIAS: Quando ocorrer, no trecho considerado, qualquer uma das seguintes circunstâncias:

1. não enquadramento em nenhuma das categorias anteriores, por terem ultrapassado os índices bacteriológicos nelas admitidos;

2. ocorrência, na região, de incidência relativamente elevada ou anormal de enfermidades transmissíveis por via hídrica, a critério das autoridades sanitárias;

3. sinais de poluição por esgotos, perceptíveis pelo olfato ou visão;

4. recebimento regular, intermitente ou esporádico, de esgotos por intermédio de valas, corpos d'água ou canalizações, inclusive galerias de águas pluviais, mesmo que seja de forma diluída;

5. presença de resíduos ou despejos, sólidos ou líquidos, inclusive óleos, graxas e outras substâncias, capazes de oferecer riscos à saúde ou tornar desagradável a recreação;

6. pH menor que 5 ou maior que 8,5;

7. presença, na água, de parasitas que afetem o homem ou a constatação da existência de seus hospedeiros intermediários infectados;

8. presença, nas águas doces, de moluscos transmissores potenciais de esquistossomo, caso em que os avisos de interdição ou alerta deverão mencionar especificamente esse risco sanitário;

9. outros fatores que contra-indiquem, temporariamente ou permanentemente, o exercício da recreação de contato primário.

Art. 27 - No acompanhamento da condição das praias ou balneários as categorias EXCELENTE, MUITO BOA e SATISFATÓRIA poderão ser reunidas numa única categoria denominada PRÓPRIA.

Art. 28 - Se a deterioração da qualidade das praias ou balneários ficar caracterizada como decorrência da lavagem de vias públicas pelas águas da chuva, ou como consequência de outra causa qualquer, essa circunstância deverá ser mencionada no Boletim de condição das praias e balneários.

Art. 29 - A coleta de amostras será feita, preferencialmente, nos dias de maior afluência do público às praias ou balneários.

Art. 30 - Os resultados dos exames poderão, também, se referir a períodos menores que 5 semanas, desde que cada um desses períodos seja especificado e tenham sido colhidas e examinadas, pelo menos, 5 amostras durante o tempo mencionado.

Art. 31 - Os exames de colimetria, previstos nesta Resolução, sempre que possível, serão feitos para a identificação e contagem de coliformes fecais, sendo permitida a utilização de índices expressos em coliformes totais, se a identificação e contagem forem difíceis ou impossíveis.

Art. 32 - À beira mar, a coleta de amostra para a determinação do número de coliformes fecais ou totais deve ser, de preferência, realizada nas condições de maré que apresentem, costumeiramente, no local, contagens bacteriológicas mais elevadas.

Art. 33 - As praias e outros balneários deverão ser interditados se o órgão de controle ambiental, em qualquer dos seus níveis (Municipal, Estadual ou Federal), constatar que a má qualidade das águas de recreação primária justifica a medida.

Art. 34 - Sem prejuízo do disposto no artigo anterior, sempre que houver uma afluência ou extravasamento de esgotos capaz de oferecer sério perigo em praias ou outros balneários, o trecho afetado deverá ser sinalizado, pela entidade responsável, com bandeiras vermelhas constando a palavra POLUÍDA em cor negra.

DISPOSIÇÕES GERAIS

Art. 35 - Aos órgãos de controle ambiental compete a aplicação desta Resolução, cabendo-lhes a fiscalização para o cumprimento da legislação, bem como a aplicação das penalidades previstas, inclusive a interdição de atividades industriais poluidoras.

Art. 36 - Na inexistência de entidade estadual encarregada do controle ambiental ou se, existindo, apresentar falhas, omissões ou prejuízo sensíveis aos usos estabelecidos para as águas, a Secretaria Especial do Meio Ambiente poderá agir diretamente, em caráter supletivo.

Art. 37 - Os estaduais de controle ambiental manterão a Secretaria Especial do Meio Ambiente informada sobre os enquadramentos dos corpos de água que efetuarem, bem como das normas e padrões complementares que estabelecerem.

Art. 38 - Os estabelecimentos industriais, que causam ou possam causar poluição das águas, devem informar ao órgão de controle ambiental, o volume e o tipo de seus efluentes, os equipamentos e dispositivos antipoluidores existentes, bem como seus planos de ação de emergência, sob pena das sanções cabíveis, ficando o referido órgão obrigado a enviar cópia dessas informações ao IBAMA, à STI (MIC), ao IBGE (SEPLAN) e ao DNAEE (MME).

Art. 39 - Os Estados, Territórios e o Distrito Federal, através dos respectivos órgãos de controle ambiental, deverão exercer sua atividade orientadora, fiscalizadora e punitiva das atividades potencialmente poluidoras instaladas em seu território, ainda que os corpos de água prejudicados não sejam de seu domínio ou jurisdição.

Art. 40 - O não cumprimento ao disposto nesta Resolução acarretará aos infratores as sanções previstas na Lei nº 6.938, de 31 de agosto de 1981, e sua regulamentação pelo Decreto nº 88.351, de 01 de junho de 1983.

Art. 41 - Esta Resolução entrará em vigor na data de sua publicação, revogadas as disposições em contrário.

Deni Lineu Schwartz

Presidente

APÊNDICE II

Índice (<i>i</i>)	Descrição da Carga	Coordenada X	Coordenada Y	Vazão (<i>q_i</i>)	Carga (<i>c_i</i>)
2	ARROIO DO CONDE(78)	170761,49	1673973,25	771,85	27000
3	JACUI	170683,17	1685485,78	231000	330
4	GI	191195,58	1683985,88	11510	23000
5	CB6(Arroio da Areia)	183076,22	1683494,6	343,83	1940000
6	Canal do Conduto	183616,8	1683569,37	6800	700000
7	Canal Rio Branco	180961,51	1683357,77	6300	700000
8	Arroio Brigadeiro	187792,26	1684993,09	937,12	112400
9	Arroio Feijó	191619,68	1683180,41	775,18	1300000
10	Dique Assis Brasil	189302,8	1684402,13	90,6	803169
11	CB9(Passo da Mangueira)	188128,74	1684798,04	444,96	1040000
12	CB5	180351,25	1681682,52	440	8000000
13	CB4	179892,24	1680123,59	20,1	8000000
14	CB17	179719,02	1679633,67	20,1	4360000
15	CB3	179182,06	1678226,9	20,1	30000000
16	CB12	178575,81	1677586,01	20,1	4972000
18	37	177276,71	1676789,23	1324	130000000
19	CB16	176661,8	1676364,85	20,1	8000000
20	DILUVIO (39)	177433,32	1674666,96	1030,8	13000000
21	CB13 (67A)	176705,82	1672705,71	20,1	7400000
22	68	175955,82	1670665,72	167,68	7540000
23	44	175775,82	1669825,72	1036,86	8000000
24	PONTA DO DIONISIO(69)	174185,83	1668655,72	3,5	16000000
25	PONTA DO DIONISIO(70)	174185,82	1667545,73	66,6	3400000
26	CAPIVARA (48)	177605,82	1664605,74	296,78	4080000
27	ESPIRITO SANTO (49)	178085,81	1662895,74	139	194000
	PONTA DA SERRARIA				
28	(72A)	177785,82	1662055,74	76	5000000
29	SALSO (71b)	177875,81	1660435,75	1258,4	760000
30	AL1 (LAMI)	190516,3	1652769,73	353,83	3200
31	L4	191996,04	1652850,08	107,39	30000
32	ACB1	193483	1651701	615,87	2600
34	ARROIO RIBEIRO (73A)	171152,24	1648534,85	544,02	9280
35	ARROIO PETIM(76A)	169765,6	1666374,26	761	4720
36	ARROIO CELUPA(77)	170034,02	1658582,1	298,54	700000
38	JACUI	171074,77	1684933,57	926400	330

Índice (i)	Descrição da Carga	Coordenada X	Coordenada Y	Vazão (q_i)	Carga (c_i)
39	CAI	173514,37	1687257,09	81300	2000
40	SINOS	176829,74	1687504,2	60400	11000
41	42 (Ponta do Melo)	176153,58	1671340,96	6,1	79000000
42	72B	182498,13	1656061,55	32,9	5460000
44	72D	181881,87	1656405,34	1	3240000
45	72E	182075,08	1656338,46	6,42	13000000
46	72F	182260,86	1656228,44	12,96	15800000
47	72G	182572,97	1656026,34	9,3	9800000
48	Ar_Passo Fundo(52a)	169588,17	1670799,38	408,24	490000
53	ARADO VELHO(72)	182585,8	1654975,76	398,9	12200
49	EFLU ETE BN(60N)	180428,1	1653847	20	470
50	CANAL SANTA RITA(78A)	168498,81	1662204,75	1	12000000
51	ETA BN EFLU	182468,94	1656167,54	57,02	1878
52	DEP-GALERIA	175860,53	1669566,29	100	4500000