UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

A equilibração dos processos cognitivos na aprendizagem de matemática no ambiente do Mecam

Linha de Pesquisa: Ambientes Informatizados de Ensino-Aprendizagem

Isolda Giani de Lima

Porto Alegre
2004

Isolda Giani de Lima

A equilibração dos processos cognitivos na aprendizagem de matemática no ambiente do Mecam

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, para obtenção do título de Doutor em Informática na Educação.
Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos da Rocha Costa
Co-orientadora: Profa. Dra. Cleci Maraschin

Porto Alegre

2004

AGRADECIMENTOS

Os caminhos que trilhamos são parte das nossas escolhas, e o que vivemos está sempre relacionado às pessoas com quem convivemos. Por isso, o nosso agradecimento, pelo dom da vida e por podermos vivê-la de acordo com os nossos projetos deve estar permanentemente em nós, com a consciência de que somos mais um a plantar e a colher. Mas em alguns momentos é importante para nós externar, em viva voz, o nosso muito obrigada. Como neste que vivo agora, em que a vida se traduz nas relações que tornaram possível o caminhar do doutorado, e minha consciência me remete àqueles que chegam docemente à minha memória, e que mais uma vez acalentam meu coração.

Aos meus pais, queridos e amados Waldemar e Graciema, que me entregaram, com generosidade e ternura, tudo o que aprenderam na vida, e que me ajudaram a construir o elo essencial da minha existência: a fé em Deus, que tanto me fortaleceu e revigorou nessa caminhada.

Ao meu esposo, querido e amado Nelson, que vive comigo os segredos da entrega, do bem-querer, da presença e do amor incondicional, fontes de alento, conforto e ânimo sempre que o cansaço se achegava, querendo se instalar.

Aos meus filhos, queridos e amados Nelsinho, Nelisa e Cássia, com quem a vida tão encantadoramente me presenteou. Vocês e vosso pai foram mestres, nessa jornada, de solidariedade, paciência e companheirismo. Vivemos grandes lições de partilha, de persistência, de espera e de alegria por acreditar.

À minha querida amiga Laurete, “passageira do mesmo trem”, companheira de todas as horas, com quem compartilhei todas as paisagens que se descortinavam à beira do nosso caminho. Juntas crescemos, amadurecemos e nos fortalecemos para essa jornada e também para novas aventuras que vislumbramos à nossa frente.

Aos colegas do LaVia e do Departamento de Matemática da UCS, que se mantiveram vigilantes e prestativos. Sinto-me honrada por fazer parte dessas comunidades.

Às bolsistas de iniciação científica, que acompanharam todo o projeto como batalhadoras e parceiras fiéis aos propósitos do Mecam.

Aos meus alunos, todos, que tornaram possível sonhar, realizar e concretizar a proposta do Mecam, e que são o motivo maior de tudo o que busco como realização profissional.

Aos professores Carla Valentini, Dalcídio Moraes Cláudio, Eliana M. S. Soares e Sérgio Franco, por aceitarem com alegria compor a banca desta tese. Vocês representam o contrapeso do equilíbrio entre a razão e a emoção, que definiram os rumos deste trabalho.

Ao meu professor orientador, Antônio Carlos da Rocha Costa, por acreditar no Mecam e me incentivar a percorrer o caminho das minhas escolhas e, especialmente, por me colocar na rota da professora Cleci Maraschin.

E a você, querida Cleci, minha co-orientadora, o meu agradecimento especial pela disponibilidade, pela valorização de todos os meus esforços e por ter vivido comigo esse “trecho precioso da estrada” que anuncia a chegada e ao mesmo tempo uma nova partida.

A todos o meu muito obrigada!

EPÍGRAFE

Quando nada mais parece ajudar,
eu vou e olho o cortador de pedras,
martelando sua rocha, talvez cem vezes,
sem que uma só rachadura apareça.
No entanto, na centésima primeira martelada,
a pedra se abre em duas,
eu sei que não foi aquela martelada a que conseguiu,
mas todas as que vieram antes.

Jacob Rtts

RESUMO

Esta tese analisa os efeitos na aprendizagem, a partir de uma proposta pedagógica que integra uma metodologia de intervenção apoiada por recursos tecnológicos. A proposta pedagógica é implementada em ambiente virtual de aprendizagem e se destina à realização de estudos complementares, para alunos reprovados em disciplinas iniciais de matemática em cursos de graduação. A metodologia de intervenção é inspirada no método clínico de Jean Piaget e visa identificar noções já construídas, propor desafios, possibilitar a exploração dos significados e incentivar a argumentação lógica dos estudantes. O ambiente de interação é constituído por ferramentas tecnológicas capazes de sustentar interações escritas, numéricas, algébricas e geométricas. A Teoria da Equilibração de Piaget possibilita a análise de ações e reflexões dos estudantes diante dos desafios propostos. São identificados desequilíbrios cognitivos e processos de reequilibração advindos das interações com os objetos matemáticos. A transformação de um saber-fazer para um saber-explicar é considerada indicativo de aprendizagem das noções pesquisadas e decorre de um desenvolvimento das estruturas de pensamento. Além da análise de processos de reequilibração cognitiva, analisou-se o aproveitamento dos estudantes, considerando os graus de aprendizagem definidos nos critérios de certificação dos desempenhos. Os resultados indicam que as interações promovidas com a estratégia pedagógica proposta colaboraram para a aprendizagem de noções e conceitos matemáticos envolvidos nas atividades de estudo. A análise do processo de equilibração permite identificar a aprendizagem como decorrência do desenvolvimento de estruturas cognitivas. O movimento das aprendizagens revelou processos progressivos de aquisição de sentido dos objetos matemáticos, com graus que expressaram condutas de regulação. Estas permitiram ultrapassar um fazer instrumental, por aplicação de fórmulas ou regras, e avançar por um fazer reflexivo sobre os significados dos conceitos envolvidos. A pesquisa sugere a implementação da proposta como estratégia pedagógica na proposição de ambientes de aprendizagem para a educação matemática a distância e como apoio ao ambiente presencial.

ABSTRACT

This thesis analyses the efects in learning through a pedagogical proposal to integrate an interventive methodology supported by technological resources. The pedagogical proposal is implemented in a learning virtual environment, and it is directed to realize complementary studies for students who were reproved in initial disciplines of mathematics in graduation courses. The interventive methodology is inspired in the clinical method by Jean Piaget, and it aims to identify built notions, propose chalenges, and make possible exploring meanings and incentivate logical argumentation from students. Interactive environment is made of technological tools able to support written, numerical, algebrical, and geometrical interactions. Piaget's Equilibration Theory gives possibilities to analyse students' actions and reflections while facing the proposed chalenges. Cognitive unbalance and reequilibration process are identified when they come from interaction with mathematical objects. Transformation from know-how to know-how-to-explain in considered an index of learning the researched notions and derives from a thought structures development. Besides analysing cognitive reequilibration processes, students' improvement was analysed, considering learnign degrees defined according to the criteria of performance certification. Results indicate interactions promoted with proposed pedagogical strategy colaborate to learning notions and mathematical concepts involved in studying activities. The analysis of equilibration process allows to identify learning as a consequence of cognitive structures development. Learning movement revealed progressive provesses to acquire meanings for mathematical objects, with degrees that have expressed regulation conducts. These made possible to overcome an instrumental action, applying formules or rules, and go forward to a reflexive action about the significance of involved concepts. The research suggests to implement the proposal as a pedagogical strategy in defining learning environments to the virtual mathematical education and as a support to presential environment.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO: CONFIGURANDO A PROBLEMÁTICA DA TESE

A preocupação com a educação, em níveis da formação básica e também superior, tem marcado nossa época com o surgimento de estudos e iniciativas na tentativa de buscar novas formas de ação pedagógica, por todos aqueles que, a partir da reflexão sobre sua prática, percebem a necessidade de tornar o fazer pedagógico mais eficaz, que colabore para a melhoria das condições de aprendizagens e para o desenvolvimento de habilidades para conviver, compreender e atuar na sociedade do nosso tempo.

O crescimento acentuado de carências sociais de todas as ordens, e em nível mundial, clama por sujeitos conscientes e comprometidos com a qualidade do seu saber e com valores éticos e morais. Aproximando a lente sobre o nosso País, não podemos deixar de nos reconhecer como um povo que carece de pão, de chão, de saúde e de educação. Não faltam, portanto, motivos para que nos apresentemos com o que temos para contribuir, com nossa possibilidade de transformar e criar a partir do que dispomos e sabemos.

Que parcela cabe a nós educadores frente a essa realidade?

Para Piaget (1980), a educação não é somente uma contribuição que se acrescenta aos resultados de um desenvolvimento individual e espontâneo, mas constitui um dos fatores fundamentais à formação intelectual e moral, tendo a escola boa parte de responsabilidade em relação ao sucesso ou fracasso do sujeito na realização das suas possibilidades.

O possível pode ser interpretado, de acordo com Ramozzi-Chiarottino (1994), de duas formas: em seu aspecto dedutivo, entendido como algo que já está no sujeito ou, na concepção de Piaget, como abertura para novas possibilidades, como um constante *devenir*, um processo de construção ou criação daquilo que ainda não existia. "Um *possível* torna-se possível na medida em que é concebido como tal pelo sujeito, além de 'entendido' em suas condições de atualização." (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1994, p. 101).

A educação deve promover, portanto, condições para que o sujeito conceba e atualize novas possibilidades na construção do seu desenvolvimento intelectual e moral. Podemos entender os novos possíveis na formação intelectual e moral como transformações no sujeito, que, segundo Maturana (1999), mantém, pelo conviver, a congruência com seu entorno. Por isso, na idéia de Maturana, o nosso papel como educadores deve ser o de criar condições para que os sujeitos se tornem aptos a viver de forma plena, de modo que integrem o convívio social, não apenas coexistindo num mesmo espaço, mas com capacidade de gerar transformações em benefício próprio e coletivo.

O fato de nos colocarmos diante do contexto amplo dessa realidade, que parece tão dura e que exige tanto do professor, de certa forma gera um sentimento profundo de incapacidade para agir e reagir diante da imensidão das necessidades que se apresentam. Porém, o que aquieta nossa aflição é olhar o professor e o aluno como entidades coletivas, das quais nós e nossos alunos somos parte integrante. O papel que nos cabe é, então, em relação ao nosso fazer pedagógico junto aos nossos alunos. Essa é nossa parcela que deve ser colaboradora na construção do professor coletivo, capaz de promover os sujeitos em sua condição de cidadania social e cultural.

Entendemos, portanto, fazer parte do nosso compromisso, enquanto profissionais da educação, propor e experimentar alternativas que visem qualificar processos de ensino e aprendizagem.

Um ensino melhor implica promover a aprendizagem. Só quem aprende pode tirar proveito do ensino. É imperiosa a necessidade de despertar estudantes e professores para o compromisso mútuo de buscarem alternativas que auxiliem na implementação de ações que qualifiquem a aprendizagem.

Na Universidade de Caxias do Sul, instituição onde atuamos, uma atenção especial ao aprender vem aos poucos ganhando espaço. A preocupação com a qualidade do ensino e com os altos índices de evasão e reprovação, conforme constatamos num levantamento de dados apresentado na tabela 1, ainda nessa seção, tem despertado o interesse de um número crescente de professores por um fazer educativo voltado ao desenvolvimento psicológico e cognitivo, dando origem a programas de estudos e a experiências em sala de aula que buscam transformar o fazer pedagógico, e a pesquisas que produzem resultados capazes de auxiliar nessa transformação.

Em relação à matemática, área em que atuamos, alguns avanços já se apresentam como benéficos à qualidade da aprendizagem, gerados por estudos e, especialmente, por pesquisas sobre a utilização de *softwares*, como recursos colaboradores dos processos de ensino e aprendizagem, e sobre a criação de ambientes virtuais de aprendizagem para a realização de cursos ou disciplinas em educação a distância e também como apoio a ambientes de aprendizagem presenciais.

É nesse panorama que situamos nossa pesquisa, que tem origem na necessidade de tratar dos problemas relacionados às dificuldades de aprendizagem em matemática e na nossa inquietação em relação à reprovação de estudantes, que, na nossa instituição, devem refazer a disciplina, como forma de retomar os estudos e de reverter sua condição de reprovados.

Sobre as dificuldades relacionadas com a aprendizagem em matemática e as conseqüentes reprovações, destacamos, em alguns tópicos, o que reconhecemos como mais presente no meio de nossa atuação profissional.

✓A pouca atenção dada aos objetos matemáticos, enquanto conceitos; a execução exaustiva de listas de exercícios, como práticas de aprendizagem; o reforço da heteronomia dos estudantes pela valorização maior das respostas que dos procedimentos de resolução; a linguagem própria da matemática que fica sem sentido se simplesmente decodificada; a memorização de procedimentos e a solicitação minimizada do refletir e do argumentar levam a um fazer matemático mecânico. Desprovido de significado, que valor tem o objeto matemático? Percebemos mais uma instrumentalização de símbolos e de regras, e não um *alfabetismo*[1] *matemático*, entendido como uma apropriação da escrita matemática, dos significados da sua simbologia e dos seus conceitos, que possibilitem aos alunos o ingresso numa comunidade de pensamento.

✓O conhecimento com o qual o aluno não interagiu, absorvido por técnicas de memorização, resiste? Talvez até a prova ou um pouco mais, deixando depois o vazio da sensação de que o que se aprende em matemática não tem aplicação na vida nem na profissão.

É comum ouvir falar do cunho livresco, teórico ou desvinculado da realidade dos programas dos currículos escolares e acadêmicos, e não faltam adeptos a propor um ensino do que *realmente importaria*. Muito dessa crença se deve ao fato de termos nos acostumado a interações instrumentais que levam a conhecimentos de práticas desconectados dos significados conceituais.

---

[1] Para Soares (1998), alfabetismo é mais que alfabetização: saber ler e escrever indica estado ou qualidade de alfabetizado. A autora sugere a expressão *letramento* para expressar esse estado ou qualidade; utiliza o adjetivo letrado(a) para caracterizar a pessoa que, além de saber ler e escrever, faz uso freqüente e competente da leitura e da escrita.

A História mostra várias situações de revitalização de conhecimentos adormecidos. Machado (1991, p. 67) refere que os “aspectos de ruptura e continuidade entre os programas de ensino e os conhecimentos que parecem brotar da prática cotidiana não podem ser analisados no âmbito restrito do senso comum”. Ele aponta, como causa da aparente ruptura, a forma superficial como os temas são tratados e questiona se seria possível determinar do conhecimento, construído ou ainda em vias de construção, o que é aplicável e o que não é.

O autor apresenta, como ilustração do quanto podemos nos equivocar com a crença nessa aparente ruptura, o *problema da Agulha de Buffon*, publicado em 1777 num pequeno ensaio de George Louis Leclerc, nomeado Conde de Buffon por Luis XV, que ficou conhecido entre os matemáticos por duas contribuições: o *Método dos Fluxos de Newton* e o *Problema da Agulha de Buffon* (BOYER, 1974). No problema da agulha, propôs que sobre uma grande área plana se traçassem retas paralelas, distantes d unidades uma da outra, e que uma agulha de comprimento l, sendo $l < d$, fosse lançada ao acaso sobre a área plana. A questão consistia em determinar a probabilidade de a agulha cair interceptando uma das retas, e demonstrou que tal probabilidade é dada por $2l/\pi d$. Uma variante do problema, formulada em 1812 por Laplace, que aproxima empiricamente a probabilidade, foi utilizada para calcular aproximações para o número π. Outra face do problema pode ser considerada como aplicação no cálculo do comprimento da agulha ou de qualquer formação linear, inacessível por uma medição direta. Em tais situações, um feixe de paralelas, como os raios X ou *laser*, pode ser disparado sobre o objeto linear, cujo comprimento se deseja calcular. Essa forma de tratar o problema proposto por Buffon concedeu, em 1979, o prêmio Nobel de Medicina ao engenheiro H. N. Hounsfield e ao físico M. Cormack, que, apoiados em resultados do matemático J. Random, tornaram possível a utilização comercial de aparelhos de tomografia computadorizada, com aplicações notáveis na Medicina e na Biologia Molecular.

Todos esses desdobramentos constituíram investigações da queda da agulha sobre o plano, um problema que surgiu desprovido de qualquer interesse prático (MACHADO, 1991). Outros exemplos poderiam ser colocados, expressivos, como o da Agulha de Buffon, e acreditamos mesmo ser esse um campo de possibilidades bastante fértil a ser explorado por pesquisas, que podem auxiliar na elaboração e adequação de problemas sobre o caráter epistemológico e, na medida do possível, de aplicação dos conteúdos de estudo.

Independentemente dessa possibilidade, ou aliada a ela, o que está mais próximo do que podemos fazer desde agora é investir em estratégias de interação que promovam o desenvolvimento da capacidade de pensar e compreender os objetos da matemática. Sem a compreensão dos seus significados, não há possibilidade de reconhecimento da sua utilidade.

Com um fazer pedagógico que privilegia as práticas mecânicas, andamos na contramão do que se requer como ações que levam à construção do conhecimento, quando entendido como produto das ações do sujeito sobre o meio e dos efeitos dessas ações sobre o próprio sujeito. O que se requer são ações transformadoras do sujeito sobre o objeto e do sujeito sobre si mesmo, ações de assimilação (incorporação dos objetos do meio à estrutura do sujeito), e ações de acomodação (modificações dessas estruturas em função das particularidades do objeto) (PIAGET, 1982). Os atos próprios do fazer matemático, como experimentar, visualizar, interpretar, prever, induzir, generalizar, abstrair e demonstrar, nem sempre se constituem como apropriações para os estudantes. E é por essas ações, que o conhecimento matemático pode ser visto como capacidade organizadora do conhecimento humano, que provém, precisamente, da capacidade de retirar as qualidades da coordenação das próprias ações (BECKER, 2001).

Esse referencial pode nos orientar na elaboração de estratégias pedagógicas em matemática. Não podemos, portanto, nos furtar a oferecer diferentes possibilidades de gerar e organizar idéias. Ao contrário, limitamos nossa colaboração, se enfatizarmos o lado calculista e o treinamento de resoluções algébricas ou numéricas.

✓A metodologia predominante no ensino da matemática ainda prioriza a aula expositiva, centrada na fala do professor que transmite os conteúdos, cabendo aos alunos resolver listas de exercícios como forma de reter os conteúdos apresentados. Uma tal concepção de aprendizagem gera a percepção comum de professores e alunos de que a teoria é externa ao sujeito, e a prática é um recurso que permite a sua retenção pelo sujeito que aprende (BECKER, 2002). Os professores, ainda em sua maioria e na qual nos incluímos, enquanto alunos, mesmo enquanto se formavam professores, aprenderam dessa forma e, se não refletirem sobre sua atividade docente, entendem que ensinar é assim, e o aluno, por sua vez, pouco encorajado a pensar, assume uma posição passiva, não questiona a si mesmo nem o que está a sua volta, acostuma-se a ter como verdade o que está na cabeça do professor (KAMII, 1985). Assim, nas escolas, de todos os níveis, "os estudantes são levados a recitar respostas *certas* e raramente são perguntados sobre que pensam sinceramente" (KAMII, 1985, p.118).

✓Os altos índices de reprovação e desistência em disciplinas de matemática, especialmente nas inicias dos cursos de graduação, como ocorre, por exemplo, nos cursos de engenharia, refletem o estado de dificuldade dos processos de ensino e aprendizagem. Verificamos esse fato quando elaboramos o projeto da pesquisa que deu origem a este trabalho.

Realizamos, em março de 2001, um levantamento de dados com o propósito de conhecer o perfil dos alunos e seus aproveitamentos em Cálculo Diferencial e Integral I, disciplina que concentra altos índices de reprovação e desistência (LIMA e SAUER, 2001). Levantamos os dados sobre o aproveitamento dos alunos de duas turmas dessa disciplina, nos cursos de Engenharia Mecânica e Química da Universidade de Caxias do Sul, em cada um dos dois períodos letivos de 1996 a 2000. Obtivemos como resultado que, nesse período, ocorreram 43,7% de aprovações, 34,8% de desistências e 21,5% de reprovações.[2]

Os percentuais acumulados de reprovações e desistências são reveladores de dificuldades e interferem nos altos índices de evasão nos cursos. Na tabela 1, que segue, temos o número total e a média anual de formados nos anos de 1996 a 2000, de acordo com informações obtidas na Pró-Reitoria de Graduação – Divisão de Programação e Análise Acadêmica da Universidade de Caxias do Sul.

Tabela 1 – Formados em Engenharia Mecânica e Engenharia Química

Curso	1996	1997	1998	1999	2000	Média Anual
Eng. Mecânica	14	13	20	17	19	16,6
Eng. Química	14	22	11	5	11	12,6

Os dados mostram a grande diferença que há entre o número de alunos que ingressam e os que concluem os cursos, pois no início de cada ano, ingressaram 60 estudantes em cada um dos cursos. Assim, os percentuais anuais médios desse período foram de 28% e de 21% de formados, em relação ao número de ingressantes, em Engenharia Mecânica e Química, respectivamente.

[2] Consideramos como desistentes os alunos reprovados que não concluíram o processo de avaliação e como reprovados os não desistentes que não atingiram o conceito mínimo de aproveitamento.

E para os que ficam no caminho, na trilha das reprovações, o que se pode fazer? Hoje, repetir a disciplina, nos mesmos moldes, é a opção para o aluno que é reprovado. Perguntando, em conversa informal, a 10 professores de matemática e também de disciplinas de outras áreas, se procuram saber quantos ou quais, dentre os alunos de uma turma, são repetentes, nove responderam que não. E perguntando também sobre o que fazem procurando auxiliá-los, a resposta de quatro professores é que procuram alterar as listas de exercícios, os demais nada fazem de especial nesse sentido. Dessa forma, com a repetição da disciplina, colocamos todos no início de uma mesma caminhada, que vai seguir um mesmo percurso por onde já passaram, que não é idêntico, pois já foram reprovados, o que pode ser ainda mais difícil para o aluno. Por parte dos alunos, o que se observa é que alguns procuram refazer a disciplina com outro professor, buscando um modo diferente ou *livrar-se* do professor que o reprovou, enquanto outros preferem o mesmo professor, porque *já sabem como é* e, assim, têm que fazer menos esforço.

Esse quadro de adversidades, a que ainda se agregam outras, como o excesso de tarefas e obrigações dos professores e dos alunos, na grande maioria trabalhadores-estudantes, reduz para ambos o tempo de dedicação aos estudos e formata um ambiente acadêmico desfavorável ao desenvolvimento da aprendizagem, onde as reprovações e desistências se sucedem, e são comuns mesmo não sendo normais.

Mas a sobrecarga de atividades não nos libera de incluir em nossas tarefas docentes a busca por soluções a questões que se apresentam no dia-a-dia. As dificuldades de aprendizagem manifestadas pelos alunos dizem respeito, sim, ao professor e aos modos como a instituição educativa se organiza. É nossa função intervir nas propostas educativas, com intuito de encontrar novos caminhos para superar dificuldades, entender com os alunos formas de aproveitar melhor o tempo destinado aos estudos, para que se aprenda a estudar e se aprenda a aprender. Há métodos de estudo, assim como de ensino, que não favorecem a aprendizagem. “Toda aprendizagem é *consciente*, deliberada, pensada e resultado de esforços de superação do não-saber.” (OLIVEIRA et al., 2001, p. 21).

Nesse sentido, a busca por aprimoramento de nossa atividade docente está definitivamente marcada pela preocupação com a qualidade da aprendizagem, com a construção de conceitos matemáticos, com o fazer e compreender: fazer para compreender, e compreender para fazer (PIAGET, 1978a).

Diante disso, destacamos algumas estratégias pedagógicas, que reconhecemos em nossos estudos[3] e de colegas professores, e de experiências realizadas em sala de aula, como possibilidades de produzir benefícios para a aprendizagem e de auxiliar os alunos a desenvolverem métodos de estudo que avancem na direção da compreensão: perguntar sempre, não somente pelo desenvolvimento do algoritmo, mas também por um argumento que justifica sua aplicação, e pelo significado do resultado obtido; propor problemas que envolvem várias abordagens, como a geométrica, a algébrica e a numérica; solicitar os significados de expressões simbólicas; solicitar que os alunos escrevam para o professor, não somente na prova; dar oportunidade para que se mostrem e melhorem a expressão das suas idéias; não apenas corrigir a prova, mas retornar com questionamentos que colaborem para a tomada de consciência das ações realizadas, solicitando o aprimoramento das resoluções; promover discussões, em grupos e coletivas, em sala de aula e em outros espaços de interação; criar oportunidades de inverter os papéis da fala; orientar através das idéias centrais para

[3] LIMA ; SAUER, 2000, 2001, 2003a; MORELATTI, 2002; SOARES, 2003.

a leitura de um novo tema e, depois, perguntar ao invés explanar. Acreditamos que não é contando aos alunos o que está nos livros que os ajudamos a entendê-los, melhor pedir que eles leiam e que contem o que leram. O conhecimento requer, segundo D'Ambrósio (1999), "o acúmulo de experiências e práticas e de reflexões sobre elas, de explicações e teorizações", num movimento permanente de renovações e reconstruções.

A reflexão sobre a prática pedagógica nos permite novos possíveis. Devemos, portanto, buscar além de aperfeiçoamento tecnológico e fundamentação matemática, conhecimentos, imprescindíveis para a ação docente, sobre como os alunos aprendem, pois saber o que se vai ensinar não implica conhecer somente o conteúdo, mesmo sendo este a primeira prioridade. Piaget (1980) se diz surpreso com a convicção generalizada de que, para ensinar matemática, basta ter conhecimento da mesma, dispensando-se a preocupação com a maneira como as noções se constroem no pensamento. Hoje, na nossa visão, temas da educação e da psicologia não podem ficar prerrogativa dos que decidem graduar-se numa ou noutra ciência. O como ensinar e aprender deve orientar todo o percurso dos professores, dos formados e dos que estão em formação, como direito e obrigação de todos.

Nesse contexto de dificuldades, mas também de possibilidades, consideramos imprescindível, para qualquer mudança em educação matemática, que professores e instituições tomem para si a responsabilidade de propor e experimentar estratégias pedagógicas que colaborem para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e propiciem novas possibilidades de (re)construção de noções e conceitos em matemática.

Com essa finalidade, desenvolvemos, eu e minha colega de departamento e de doutoramento, professora Laurete Zanol Sauer (2004), uma pesquisa aplicada, Mecam – Programa em Educação a Distância para a **Me**lhoria das **C**ondições de **A**prendizagem de **M**atemática, com o objetivo de criar um ambiente de aprendizagem interativo com proposta pedagógica que integra metodologia de intervenção e recursos tecnológicos. Essa proposta visa oferecer outra possibilidade, diferente de refazer a disciplina nos moldes tradicionais, através da realização de um curso a distância de complementos de estudos para alunos reprovados, sob determinadas condições, em disciplinas iniciais de matemática de cursos de graduação.

Com o objetivo de analisar os efeitos na aprendizagem, gerados através da proposta pedagógica do Mecam, tendo como base a teoria da equilibração de Jean Piaget, elegemos a seguinte questão geral desta tese:

Como evidenciar a aprendizagem de noções e conceitos matemáticos no ambiente de aprendizagem do Mecam, cuja proposta pedagógica integra recursos tecnológicos e uma metodologia de intervenção?

Buscamos responder a essa questão através do que pudermos observar em nossas análises, como respostas às seguintes subquestões:

- **As interações no desenvolvimento das atividades propostas promovem perturbações? Que condutas cognitivas frente às perturbações podem ser identificadas?**
- **Como as condutas frente às perturbações se relacionam com o movimento das aprendizagens dos estudantes?**

Nossa hipótese é que no ambiente de aprendizagem do Mecam, cuja proposta pedagógica integra tecnologia e uma metodologia de intervenção, é possível promover a aprendizagem e, no caso específico desta pesquisa, esse ambiente possibilita a (re)construção de noções e conceitos matemáticos e, com isso, melhorias das condições de aprendizagem de estudantes reprovados em disciplinas iniciais de matemática de cursos de graduação.

Assim, ao longo desta tese, que integra a linha de pesquisa Ambientes Informatizados de Ensino-Aprendizagem do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Estado do Rio Grande do Sul, apresentamos o percurso no qual se constituíram as relações entre os aspectos metodológicos e tecnológicos que caracterizam a proposta pedagógica e o ambiente de aprendizagem do Mecam.

No capítulo 2, que segue, apresentamos o Mecam como projeto de pesquisa e como programa destinado à complementação de estudos. Construímos uma fundamentação teórica que alicerça o desenvolvimento e os modos de interação no ambiente de aprendizagem e a proposta pedagógica, que resultou da interligação entre uma metodologia de intervenção, inspirada no método clínico da Epistemologia Genética, e tecnologias de informação, comunicação e as que possibilitam processamentos matemáticos. As ferramentas disponíveis no ambiente possibilitam a interação, a utilização de várias abordagens na exploração de um mesmo significado e a atividade de escrita como colaboradora no aprimoramento de idéias na construção de noções e conceitos matemáticos. Ainda, nesse capítulo, descrevemos o ambiente do Mecam com seus espaços de interação e ilustramos como a metodologia ocorre na prática.

O capítulo 3 é dedicado à fundamentação teórica que sustenta as análises das aprendizagens no ambiente do Mecam. Situamos a proposta avinda da Epistemologia Genética, segundo a qual a aprendizagem decorrente do desenvolvimento de estruturas cognitivas, que contrapõe, portanto, outras visões como a empirista e a apriorista, que abarcam a maioria das práticas pedagógicas tradicionais no ensino da matemática. Na concepção piagetiana, o simples saber-fazer, como resultado de práticas instrumentais por aplicação de regras e fórmulas, não é suficiente para dar conta do desenvolvimento de estruturas que possibilitam a compreensão, como assimilação de idéias e a possibilidade de conectar essas idéias e de significar os objetos matemáticos. Complementamos esse capítulo apresentando elementos da teoria da equilibração de Jean Piaget, onde os processos de assimilação e acomodação são entendidos como mecanismos que permitem ao sujeito conhecer o mundo. Com base nessa teoria, analisaremos os processos de aprendizagem como processos de equilibração.

No capítulo 4, caracterizamos nossa pesquisa como uma pesquisa empírica e qualitativa, respaldada na metodologia da pesquisa-ação e apresentamos o percurso dos estudos e experimentos, desde a fase que antecedeu a elaboração do projeto. Justificamos a primeira edição do Mecam como uma experiência-piloto, através da qual adequamos vários aspectos em relação aos recursos tecnológicos do ambiente e à estrutura do curso destinado à realização de estudos complementares. Apresentamos, também, os dados: tarefas de aprendizagem e graus de aprendizagem, oriundos da segunda edição experimental, como os dados das análises que nos levam às respostas das questões desta tese.

No quinto capítulo, procedemos às análises em dois momentos. No primeiro, de tarefas de aprendizagem, representativas da variedade de situações encontradas na realização das atividades propostas para o desenvolvimento dos estudos, buscando evidenciar as aprendizagens como processos de equilibração. No segundo, da relação entre as análises do primeiro momento e os graus de aprendizagem atribuídos aos estudantes, em função do saber-fazer e da sua evolução para um saber-explicar.

Finalmente, no capítulo 6, retomamos alguns aspectos da proposta pedagógica e questões que julgamos importantes, no decorrer das análises, para a discussão dos resultados da pesquisa. Destacamos a característica de integração metodológica e tecnológica, como um dos fatores determinantes dos resultados alcançados, e identificamos possibilidades de estudos futuros e de outras implementações pedagógicas em educação matemática, decorrentes do desenvolvimento deste trabalho.

Seguimos, então, apresentando o Mecam, e esperamos que a continuidade da leitura do nosso trabalho seja acompanhada de momentos de reflexão e de interpretações próprias que sugiram novas e possíveis ações pedagógicas, que buscam promover a aprendizagem da matemática.

2 O PROJETO MECAM

O Programa em Educação a Distância para a **ME**lhoria das **C**ondições de **A**prendizagem da **M**atemática (Mecam) constitui-se em uma pesquisa aplicada, em desenvolvimento, no Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Caxias do Sul. Tem, como objetivo, fundamentar uma proposta pedagógica diferenciada, frente às dificuldades de aprendizagem observadas nas disciplinas iniciais de matemática, nos diferentes cursos do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia.

O Mecam está vinculado ao projeto Laboratório de Ambientes Virtuais de Aprendizagem – LaVia[4], em desenvolvimento na Universidade de Caxias do Sul desde 1998. O LaVia foi proposto por um grupo de professores das áreas de psicologia, matemática e informática, com o objetivo de criar um laboratório interdisciplinar para o desenvolvimento e a avaliação de formas alternativas à criação de ambientes virtuais de aprendizagem e iniciar a implantação do uso das novas tecnologias em ambientes de aprendizagem (SOARES et al., 2001).

O grupo do LaVia foi crescendo aos poucos com a integração de professores-pesquisadores e estudantes bolsistas de várias áreas do conhecimento. Essa aproximação teve origem num programa de seminários proposto pela equipe do LaVia, aberto a todos os interessados em discutir e construir um referencial epistemológico que fundamentasse e alicerçasse a construção de ambientes virtuais de aprendizagem.

---

[4] Ambiente virtual do projeto LaVia, disponível em http://ucsnews.ucs.br/lavia. Acesso em: maio de 2004.

Atualmente o LaVia, numa segunda fase como projeto de pesquisa, congrega professores e alunos bolsistas de iniciação científica das áreas de psicologia, educação, artes, matemática, informática, comunicação e lingüística e também da engenharia. Essa segunda fase visa integrar, como subsistemas, diferentes projetos que realizam pesquisas relacionadas a ambientes virtuais de aprendizagem, como forma de compartilhar conhecimentos, somando esforços de ordem tecnológica e epistemológica.

O Mecam, portanto, passou a integrar, como um subsistema, o grupo LaVia, que nessa segunda fase, caracteriza-se como uma comunidade de pesquisa e aprendizagem, com base metodológica ancorada na pesquisa-ação, e que realiza um trabalho interativo e cooperativo, com o propósito de desenvolver ambientes virtuais de aprendizagem, analisar as possibilidades e os limites na utilização da tecnologia, criar estratégias pedagógicas e avaliar os processos de aprendizagem em decorrência das interações nesses ambientes.

A produção científica do LaVia tem apresentado e discutido o processo de constituição do grupo, como comunidade de aprendizagem e pesquisa, e as experiências de implantação de novas tecnologias no ensino superior (SOARES et al., 2001; VALENTINI; SOARES; RIBEIRO, 2001). Além disso, cada subsistema do LaVia, em seus objetos específicos, apresenta avanços em diferentes direções (LIMA; SAUER, 2001, 2002, 2003b; VALENTINI; LUCIANO; ANDREOLA, 2002; SOARES; VALENTINI, 2002).

Nossa participação junto ao LaVia, através do projeto Mecam, tem ampliado a possibilidade de realizar e discutir experiências relacionadas aos processos de aprendizagem em ambientes também de aprendizagem de matemática, que são objetos de pesquisa neste estudo.

No desenvolvimento do projeto Mecam está prevista a implantação de um programa em educação a distância, também denominado de Programa em Educação a Distância para a **ME**lhoria das **C**ondições de **A**prendizagem da **M**atemática, em ambiente de aprendizagem que integra uma metodologia própria de intervenção e recursos tecnológicos que possibilitam a interação, a comunicação, a produção e edição de textos matemáticos e processamentos algébricos, numéricos e geométricos.

A idéia de conceber o Mecam como um programa consiste na possibilidade de agregar nessa proposta diferentes disciplinas de matemática e colegas professores, interessados em avaliar as condições de aprendizagem dos estudantes, e em criar estratégias que promovam melhores condições de aprendizagem e, como conseqüência, que permitam modificar os índices que refletem um elevado número de reprovações e desistências, especialmente em disciplinas iniciais de matemática nos cursos de graduação.

O programa é destinado aos alunos que não alcançaram grau de desempenho suficiente para a aprovação, quando cursaram a disciplina, mas que, mesmo assim, desenvolveram um processo diferenciado de estudo e aprendizagem, demonstrando disposição para assumir sua parcela de responsabilidade na construção do seu conhecimento, ao terem participado com interesse das atividades propostas durante o semestre correspondente.

Ao invés de refazer novamente a disciplina em novo período acadêmico, esses estudantes têm a opção de refazer os estudos num curso a distância, no período de férias que segue o período acadêmico, durante o qual cursaram a disciplina, ou paralelamente à continuidade dos estudos em semestre subseqüente.

Para o desenvolvimento dos estudos no programa Mecam, o estudante realiza um conjunto de atividades sobre os conteúdos principais da disciplina envolvida, que consideramos como sendo os conceitos e as noções básicas referentes ao estudo de funções, limites e derivadas. As atividades são desenvolvidas com apoio de num *software*, o *Scientific Notebook*,[5] que é um editor de textos e também um processador simbólico, numérico e geométrico.

Considerando as resoluções das questões que compõem as atividades, num processo de interação com professores, monitores e colegas, o estudante (re)elabora e aperfeiçoa o que apresentou, orientado por questionamentos feitos pelo professor, com o propósito de promover, por exploração dos significados, a compreensão dos objetos matemáticos envolvidos e dos procedimentos adotados na resolução de problemas.

Ao professor cabe o papel de instigador e problematizador, que busca converter dúvidas, erros ou conhecimentos demonstrados em respostas e resoluções, em algo que tenha sentido para o aluno, criando situações de discussão, questionando e incentivando diferentes maneiras de pensar sobre um mesmo assunto, aproveitando as oportunidades que se apresentam para mantê-lo envolvido em processos de reflexão e tomada de consciência das próprias ações.

Assim, com a retomada dos estudos, num processo diferenciado de interação, por meio de ações que promovem a compreensão e organização das idéias, entendemos poder oferecer aos estudantes uma oportunidade de dedicarem atenção especial às questões e dificuldades que provocaram a reprovação, não somente no sentido de conquistarem a aprovação na disciplina, mas também no de

[5] *Scientific Notebook*. Disponível em: http://scinotebook.tcisoft.com/. Acesso em: maio de 2004.

investirem na melhoria das condições de aprendizagem e na construção de conhecimentos atuais e futuros.

Para a fase experimental do projeto Meçam, foram programadas três edições do curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I. As duas primeiras edições foram realizadas nos períodos de férias correspondentes ao segundo período letivo de 2002 e ao primeiro período letivo de 2003. Os ambientes virtuais de aprendizagem dessas duas edições foram disponibilizados, respectivamente, em http://www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam e em http://www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam2ed. A terceira edição está sendo realizada neste primeiro semestre de 2004 e corresponde ao período letivo do segundo semestre de 2003, cujo ambiente virtual de aprendizagem pode ser acessado em: http://www.ucs.br/deme/disciplinas/mecam3ed.

Os dados a serem analisados no presente estudo são os obtidos durante a realização da segunda edição experimental do projeto.

2.1 A proposta metodológica do Mecam

Nossos primeiros trabalhos sobre a utilização do computador foram desenvolvidos com o objetivo de propor novas metodologias, com apoio de *softwares* matemáticos, que permitissem auxiliar na análise de problemas, muitas vezes prejudicada pela preocupação em efetuar manualmente cálculos excessivamente demorados. Com a utilização crescente de tecnologias de comunicação e informação, voltamos nossa atenção para os benefícios que podem decorrer da utilização de computadores na construção de conhecimentos matemáticos e para a criação de ambientes de aprendizagem mediados pela *web*, como apoio às atividades desenvolvidas em sala de aula. A utilização desses recursos nos colocou, nós e nossos alunos, frente a limitações referentes à carência de ferramentas tecnológicas que permitem utilizar a simbologia da matemática. Essa limitação, no início de nossas experiências, alertou-nos para a dificuldade de expressão dos nossos alunos, quando têm que escrever sobre suas idéias matemáticas, ou, por vezes, apenas traduzir expressões representadas simbolicamente.

Dentre as atividades programadas, com o propósito de auxiliar os estudantes a minimizar essas dificuldades, adotamos a prática de solicitar justificativa verbal para as resoluções e uma análise da coerência das soluções obtidas, considerando o contexto no qual a questão estava inserida. Buscando aprimorar essa prática, passamos a elaborar tarefas de aprendizagem, onde inserimos questionamentos sobre as resoluções apresentadas e sobre os significados dos conceitos abordados. Essas se revelaram especialmente frutíferas: ao responder aos questionamentos, escrevendo suas idéias, justificando os procedimentos adotados e analisando os resultados obtidos, observamos que os estudantes se envolvem em atividades reflexivas que colaboram para a compreensão dos objetos matemáticos (LIMA; SAUER, 2000).

Com o reconhecimento desses benefícios, constituímos uma pesquisa com o propósito de elaborar uma metodologia, com base nos questionamentos sobre os significados dos conceitos matemáticos. Nossos estudos nos levaram ao método clínico de Piaget, onde encontramos elementos de fundamentação para a metodologia do Mecam.

A proposta pedagógica do Mecam consiste, então, na integração de recursos tecnológicos e de uma metodologia de intervenção inspirada no método clínico, que, juntamente com os processos de expressão escrita e a utilização do computador, constituem a base dessa estratégia pedagógica.

2.1.1 *O método clínico*

A metodologia do Mecam tem, como fonte inspiradora, o método clínico de Jean Piaget: uma interação permanente entre perguntas e respostas. Para Castorina et al. (1988, p. 58), "a indagação clínica é o procedimento mais próprio de chegar à organização intelectual na investigação; [...] e mais, tem lugar na criação de situações de aprendizagem que tendem a suscitar a atividade construtiva por parte das crianças".

A preocupação central de Jean Piaget foi responder à questão de como se constrói o conhecimento. Voltou-se ao estudo da gênese do conhecimento, com o intuito de compreender como um conhecimento mais elementar progride até o pensamento mais abstrato. Piaget elaborou o método clínico e o adotou como método clássico das suas investigações.

Em seus primeiros trabalhos, com a hipótese da existência de estreitas ligações entre a linguagem e o pensamento, Piaget estudou o comportamento verbal das crianças, buscando aí a origem do pensamento lógico-matemático. Buscou explorar o raciocínio da criança através de um diálogo, no qual procurava seguir seu pensamento (NEVADO, 1992). O experimentador deixava-se orientar pelo que as crianças verbalizavam, construindo hipóteses da significação cognitiva dessas verbalizações (INHELDER et al., 1977).

O método clínico de Piaget é um método de conversação livre sobre um tema dirigido pelo interrogador. Este orienta o curso do interrogatório e é dirigido pelas respostas do sujeito. Pede-lhe que justifique o que diz, que explique, que diga o porquê, faz-lhe contra-sugestões e acompanha as respostas e os possíveis desvios do seu pensamento, a fim de reconduzi-lo ao tema, com o propósito de obter justificações, testar suas constâncias e fazer contra-sugestões.

Desde o seu emprego na forma original, o método clínico sofreu várias modificações, sempre ligadas aos objetos de estudo e às características das situações experimentais. Mesmo na sua criação, Piaget não o utilizou plenamente, preferiu por vezes proceder à observação pura, tomando nota das falas espontâneas das crianças, outras vezes utilizando testes, mas instaurando diálogos ao mesmo tempo livres e mais aprofundados.

Nas pesquisas realizadas sobre o período sensório-motor,[6] o método de investigação adquiriu nova forma. O interesse teórico de Piaget deslocou-se para a formação das estruturas cognitivas, para a existência de uma lógica, anterior a qualquer lógica da linguagem. No período dessas investigações, os sujeitos em estudo foram seus filhos, e utilizou um método de observação em situações livres e provocadas, onde os intercâmbios verbais foram substituídos por intercâmbios em ações (CASTORINA et al., 1988). Para tal, elaborou experimentos e selecionou comportamentos com a finalidade de pôr em evidência uma estrutura básica. Esses estudos deram origem ao conhecimento das primeiras invariantes, como a do objeto permanente, que resulta do desenvolvimento da capacidade representativa e que

[6] A teoria dos estágios compreende o período que vai do nascimento até o segundo ano de vida. Nesse período, o pensamento é constituído de sensações e movimentos (FRANCO, 1999).

permite localizar objetos não presentes no espaço e conservá-los no tempo (KESSELRING, 1993).

Depois das pesquisas sobre as primeiras invariantes do conhecimento, as investigações se voltaram para as invariantes em sistemas de transformação: as invariantes conceituais sobre as quantidades físicas (massa, peso, etc.), as invariantes geométricas (comprimento, superfície, etc.) e as quantidades lógico-matemáticas (conservação de conjuntos) (NEVADO, 1992). Essa nova problemática, conforme Castorina et al. (1998), provocou importantes modificações no método. Deixou de ser exclusivamente verbal, incluiu experimentos com material concreto, cuja manipulação produz transformações como alongar, achatar, compor, decompor ou deslocar. O interrogatório verbal foi substituído por um procedimento misto, onde as perguntas e respostas relacionavam-se diretamente às ações concretas efetuadas com o material.

Ao longo dos anos, as indagações foram adquirindo um caráter mais sistêmico, com dinâmicas mais normativas. Numa situação de experiência em andamento, as intervenções envolvem perguntas de três formas: de exploração, de justificação e de controle. As de exploração visam desvendar a existência e a estruturação para a noção que se quer buscar; as perguntas de justificativa têm como objetivo confirmar o ponto de vista anunciado, e as de controle, ou contra-argumentação, visam apontar a coerência ou contradições no pensamento. Segundo Castorina et al. (1988), as contra-argumentações têm papel especial na averiguação, por indicarem a existência de uma norma lógica, na medida em que o sujeito tem consciência de que suas interferências provocam um resultado e não podem provocar outros, e sua utilização deu ao método clínico a denominação de método clínico-crítico.

A evolução do método clínico, além de nos aproximar do que efetivamente o constitui, acrescenta em nós a conscientização da elaboração da metodologia que propomos como uma estratégia pedagógica criada e, ao mesmo tempo, em constante recriação, num processo investigativo que aprimora o próprio fazer. Além disso, na idéia sucinta de Dolle (1995) dessa última forma do método clínico, encontramos a essência da inspiração da metodologia do Mecam.

> O método clínico subsiste, sem dúvida, como **um método de livre conversação dirigida para um tema**; transfere-se, porém, de um *material* puramente verbal para um *material* **constituído por experiências**: colocar as crianças diante de um copo d'água e dar-lhes pedrinhas, pedaços de madeira, de cortiça, de cera, etc., e perguntar-lhes o que acontecerá se forem colocadas dentro da água, **pedir-lhe que expliquem o que se passa**, de fato, quando um grande pedaço de cortiça flutua, enquanto que uma pedrinha menor e menos pesada afunda, por que a pedrinha não flutua, ao passo que a madeira flutua, etc., ou ainda explicar o mecanismo da bicicleta por meio de um desenho. Conserva-se ainda **a linguagem**, mas esta não se constitui o único suporte da experiência; ela **passa** agora **a intervir** apenas **para justificar as ações** concretas **realmente efetuadas** (Dolle, 1995, p. 23, grifo nosso).

Ainda em relação ao método clínico, vale destacar como reagiam os sujeitos quando submetidos aos interrogatórios. Piaget [s.d.] interpreta de cinco formas as reações dos sujeitos aos questionamentos e identifica-as, como não-importismo, fabulação, crença sugerida, crença desencadeada e crença espontânea. Destas, Piaget valoriza as duas últimas como condutas significativas para a aprendizagem ou para o desenvolvimento.

O não-importismo caracteriza o que a criança demonstra ou nada demonstra, quando a pergunta feita a aborrece e não provoca nela nenhum esforço de adaptação, responde qualquer coisa e de qualquer forma; a fabulação qualifica a reação da criança que, sem refletir, responde à pergunta inventando uma história, na qual acredita ou não, por um simples exercício de verbalização; a crença sugerida ocorre quando a criança responde simplesmente para contentar o examinador, sem considerar sua própria reflexão.

A crença desencadeada é assim caracterizada por Piaget:

> Quando a criança responde com reflexão, extraindo a resposta de seus próprios recursos, sem sugestão para ela. [...] A crença desencadeada é influenciada necessariamente pelo interrogatório, pois a maneira pela qual a pergunta é feita e apresentada à criança força-a a raciocinar em uma certa direção e a sistematizar seu saber de um certo modo; mas ela é, contudo, um produto original do pensamento da criança, pois nem o raciocínio feito pela criança para responder a questão, nem o conjunto dos conhecimentos anteriores que utiliza a criança durante sua reflexão é diretamente influenciado pelo experimentador. (PIAGET, [s.d.], p.12).

A crença espontânea resulta da história do sujeito. Para Macedo (1994), indica o patrimônio do sujeito e é resultado do desenvolvimento biológico, social e coletivo, e no que diz Piaget,

> [...] quando a criança não tem necessidade de raciocinar para responder pergunta, e pode dar uma resposta imediata porque já formulada ou formulável, ocorre a crença espontânea. Esta ocorre quando a pergunta não é nova para a criança e quando a resposta é fruto de uma reflexão anterior e original. (PIAGET, [s.d.], p. 13).

As reações das crianças, conforme identificadas por Piaget durante as entrevistas em que aplicava o método clínico, são também observáveis em nossos alunos adultos. Basta que nosso olhar avaliativo avance um pouco além da distribuição de notas de desempenhos, determinadas por contagem simples dos erros e acertos apresentados nos exercícios de avaliação. O não-importismo pode ser identificado por atitudes de apatia ou descaso do que só se apresenta como ente físico, deixando seu pensamento fora das fronteiras da sala de aula; aborrecido com o que nela acontece, desiste prontamente ao menor sinal de dificuldade que se apresenta, se chamado a qualquer tipo de ação ou manifestação. A fábula caracteriza os alunos que reagem quando solicitados, mas como “quem não raciocina sobre o que fala ou escreve, apenas *chuta*, fala por falar, representa mas não interpreta o papel, *faz de conta*”. (MACEDO, 1994, p. 105). A crença sugerida marca, em algumas situações, a coerção que ainda é exercida pelo *poder do professor*, que em muitos casos reforça a heteronomia (KAMII, 1985) e mantém os estudantes dependentes das suas ordens e com uma preocupação excessiva em responder àquilo que o professor quer como resposta.

Realmente, como diz Piaget, essas formas de reação não condizem com condutas significativas de aprendizagem nem de desenvolvimento. Pouco ou nada refletem de envolvimento ou interesse, apenas atitudes onde não cabe pensar, ousar ou imaginar, mas cabe apenas dar um retorno.

A crença espontânea é a reação que os professores almejam observar como produto da ação desencadeada com alunos e é essa direção que pretendemos apontar com a metodologia do Mecam. É uma possibilidade que vemos de colaborar para soltar as amarras da dependência afetiva e cognitiva dos alunos e assim promover o desenvolvimento da autonomia intelectual, para gerar métodos de estudo que sejam eficientes como propósitos de aprendizagem, e que a proposta seja reconhecida por professores e alunos como processos de compreensão oriundos de ações reflexivas sobre os significados dos objetos matemáticos.

Mas é na crença desencadeada que se fundamenta e inspira o que propomos como estratégia pedagógica. Influenciada pelo interrogatório, ela abre e fecha elos perdidos ou ignorados pelos alunos. Na interpretação de Macedo (1994), numa corrente de perguntas ou de falas de professores ou colegas, o estudante pode produzir algo que, sem eles, não faria por si mesmo. “Mas o que faz – graças à ajuda do outro – é dele, é produto de algo em que pensa ou em que acredita. A pergunta veio de nós, mas a resposta é criação dele. Aqui ele representa um papel que também criou, por meio da singularidade de sua interpretação.” (MACEDO, 1994, p. 107).

Resta ainda olhar na direção dos professores que, como psicopedagogos, assumimos a vez do experimentador, que deve saber observar, deixar o estudante falar, não desviando nada e não confundindo o que realmente pensa com o que repete de nós, ou seja, o que é construído com que é reproduzido da fala do professor. A reprodução pode ser interpretada como crença sugerida, e esta, para Piaget [s.d.], é a que devemos procurar evitar.

Podemos relacionar o saber observar com o saber dar tempo ao aluno e respeitar o seu tempo. É uma primeira e importante qualidade do professor, que implica deixar o aluno falar, esperar pela sua resposta e seguir a partir dela. Isso, de certa forma, é uma conduta favorecida para o professor que atua no Mecam, pois registra a pergunta para o aluno que está a distância.

A essência do método clínico, que consiste em saber buscar algo precioso e ter a cada instante uma hipótese de trabalho, na visão de Macedo (1994), pode orientar as ações do professor, se entendermos que essa busca tem o sentido de saber o que perguntar, o que problematizar no contexto dos conceitos e das atividades que o professor precisa valorizar.

O autor destaca ainda, como forma de ajuda aos professores, no sentido de poderem qualificar as respostas desencadeadas, o que foi importante para Piaget e seus colaboradores, as perguntas que estes faziam ao avaliar os processos de desenvolvimento nas experiências que realizavam. São cinco as questões consideradas como orientadoras na aplicação do método clínico: observação, reconstituição, antecipação, comparação e explicação. Sobre elas trazemos os aspectos que consideramos relevantes ao professor que deseja implementar sua ação questionadora.

A observação que produz conhecimento sobre o aluno, complementando o que referimos acima, exige uma ação em nada passiva, implica interpretar o que vem do estudante na fala, no silêncio, no erro, na forma refletida ou mecânica como comunica a *sua* matemática.

Em qualquer obra de Piaget onde há relato das conversas clínicas, vamos encontrar constantemente a solicitação da reconstituição, da descrição da ação que o sujeito estava realizando ou que havia realizado. Piaget buscava constatar se a criança sabia transformar em palavras ou imagens algo correspondente ao que fez no plano das ações. Nossos alunos sabem transformar o que diz o professor ou o livro ou o colega em palavras ou imagens suas? É o que entendemos por interpretação, princípio básico para compreensão.

Antecipar é adiantar o que está na frente e, segundo Macedo (1994), é tão importante quanto recorrer ao passado e ao presente, reconstituindo-os no plano simbólico. Consideradas simultaneamente, antecipação e recorrência definem a qualidade reversível de uma ação, que, por isso, a tornam operatória. Ainda, para o autor, planejar, prejulgar, evitar erros ou deduzir algo que ainda não ocorreu são ações fundamentais no caminho da aprendizagem. Nesse sentido, podemos ajudar nossos alunos sugerindo que façam estimativas, que imaginem a resposta, com base em experiências anteriores, em processos de exclusões lógicas e, principalmente, *retardando o lápis e adiantando o raciocínio*, e que se comprometam com a resposta, avaliando e argumentando sobre o que encontram como solução.

A comparação, acompanhada da verificação e da contraposição, está presente nos diálogos das situações experimentais de Piaget, com o propósito de verificar a solidez da argumentação. Podemos também criar situações de confronto de idéias, se oportunizarmos aos nossos alunos a análise de outros pontos de vista, outras resoluções para o mesmo problema, discutindo ou refletindo sobre outras possibilidades.

E a explicação, ou a justificativa, aparece no método clínico como indicadora da conscientização sobre a ação realizada. Nas atividades de aprendizagem, explicar a razão dos procedimentos adotados ou das *contas* realizadas colabora para a compreensão, pela necessidade de argumentar sobre o que e por que faz, a partir do significado do conceito envolvido. Assim, reunimos nesta seção os ensinamentos que podemos tirar do entendimento do método clínico e da sua aplicação, e também das reflexões de Macedo (1994), quando interpreta, no contexto educacional, as reações dos sujeitos quando submetidos ao método clínico, e as principais formas de perguntas que Piaget e seus colaboradores utilizavam para avaliar os níveis de desenvolvimento cognitivo, como possibilidades pedagógicas de qualificar respostas desencadeadas que, para Piaget, produzem conhecimento.

2.1.2 *Elaborando significados através da escrita*

A construção de cada novo conhecimento decorre da ação do sujeito que aprende em contextos de interação. É condição primeira da aprendizagem que o aluno aja, assimilando, sobre o objeto de conhecimento; num segundo momento, que responda a si mesmo às perturbações provocadas pela resistência do objeto, apropriando-se dos mecanismos íntimos de suas ações (BECKER, 1994). Esse processo de construção do novo pode ser explicado, na teoria de Piaget, através da abstração reflexionante.

Refletir, no sentido da linguagem comum, significa, conforme Kesselring (1993), ponderar algo e, no sentido filosófico, significa atentar para o próprio fazer, para nossos pensamentos, representações e sentimentos. Abstrair, por sua vez, é algo como retirar, isolar uma qualidade de um objeto ou um aspecto em determinado contexto.

Piaget distingue dois tipos de abstração: a abstração empírica e a abstração reflexionante ou reflexiva. Uma abstração empírica leva a uma constatação, que resulta da observação do objeto ou das ações executadas, e a abstração reflexionante atinge maior profundidade, leva à compreensão. A abstração reflexiva consiste em elevar a um plano superior determinadas estruturas de comportamento ou de conhecimento (KESSELRING, 1993).

A abstração reflexionante produz, segundo Montangero e Naville (1998), novas formas de conhecimento ou instrumentos de pensamento, retiradas de saberes ou do saber-fazer que o sujeito já possuía. Nesse processo, conforme os autores, podemos distinguir três tempos: primeiro ocorre a abstração de “certos modos de organização dos conhecimentos do sujeito, depois, o reflexionamento, que torna a projetar o que foi abstraído em um plano de conhecimento superior; enfim, ocorre a reflexão ou a reconstrução em um novo plano”. (MONTANGERO; NAVILLE, 1998, p. 92).

Como educadores, devemos, portanto, procurar por estratégias que auxiliem os alunos a estudar, a agir sobre os objetos que buscam conhecer e a aprimorar formas de pensamento. Assim, não podemos restringir o ensino ao desenvolvimento de ações de memorização, que também são importantes, desde que não se esgotem em si mesmas e que ocorram depois da compreensão e sirvam de apoio para atos do pensamento (LIMA; SAUER, 2000).

Os alunos, no contexto de nossa atuação, que é o ensino da matemática no terceiro grau, são adultos ou estão na fase final da adolescência e, assim, poderíamos pensar que se encontram, segundo os estágios de desenvolvimento propostos por Piaget, no nível de pensamento formal, mas essa não é uma realidade para todos. Piaget (1972) afirma que a ordem de sucessão das aquisições é constante, mas não a ordem cronológica. Além disso, segundo Ramozzi-Chiarottino (1988), Piaget tratou do sujeito epistêmico, falou em possibilidades de raciocinar sobre hipóteses e de estabelecer relações entre relações e não no que se passa concretamente com os indivíduos em suas particularidades. A possibilidade, para a autora, não implica diretamente a sua concretização, pois esta depende do meio em que a pessoa está inserida e da sua capacidade de conhecer, que é fruto das trocas que realiza com o meio.

O que pode o professor fazer por seus alunos? Como colaborar para que se desenvolvam a partir das suas condições, identificando primeiro as aquisições solidificadas e refazendo caminhos de aprendizagem, quando necessário? Certamente, nada de novo acontecerá enquanto não dermos vez e voz para os alunos.

Uma convicção oriunda da nossa prática pedagógica, em relação à aprendizagem da matemática, é a de que podemos ajudar nosso aluno a pensar e incentivá-lo a falar sobre o que pensa. Quando o estudante consegue se expressar, argumentando sobre um assunto ou um problema, está num nível superior de compreensão, em relação àquele que apenas processa numericamente, por aplicação de uma equação modelo ou de algumas operações que, por vezes, desenvolve por simples imitação. O fato de nos expressarmos sobre o que sabemos a respeito de determinado assunto indica que estamos em atividade reflexiva, em processo de coordenação dos atos do pensamento (PIAGET, 1995b), que busca construir a própria lógica do que expressamos.

A fala é, toda ela, um sistema de encaixes, parciais ou totais, ou de negação de encaixes entre unidades de nosso sistema conceitual – classificação; e encaixes numa certa ordem – seriação. Falar é um exercício lógico-matemático fundamental. (BECKER; FRANCO, 1999). Uma pedagogia centrada nesse processo tem dupla dimensão e flui exatamente porque essa dupla dimensão existe, isto é, ao falar, e também ao escrever, sobre o que está pensando, o sujeito pode agir sobre o meio, sobre algum objeto, algum conteúdo, sobre as próprias ações, interagindo com outros sujeitos e, ao fazer isso, tem condições de voltar-se sobre si mesmo e, por um processo de tomada de consciência, desenvolver-se (BECKER, 2001).

Piaget buscou a relação entre linguagem e pensamento no período do surgimento da linguagem, no processo de construção das operações concretas e no das operações formais. Encontrou que, em qualquer nível do desenvolvimento intelectual, a linguagem não é suficiente para explicar o pensamento, mas afirma que, quanto mais refinadas são as estruturas do pensamento, mais necessária se torna a linguagem para a elaboração dessas estruturas. Para Piaget, o pensamento precede a linguagem, e esta se limita a transformá-lo, profundamente, ajudando-o a atingir suas formas de equilíbrio através de uma esquematização mais desenvolvida e de uma abstração mais móvel (PIAGET, 1993).

Da linguagem, no sentido genérico, como instrumento de comunicação de idéias, e de elaboração e aprimoramento do pensamento, nos reportamos à linguagem da matemática, caracterizada pela legitimidade ou conveniência da utilização de um sistema de símbolos, abordados didaticamente, em geral, de modo predominantemente técnico e operacional.

Não se trata de levantar a questão sobre a adequação ou não da simbologia matemática, visto que a linguagem matemática expressa a síntese formalizada dos conceitos, e essa formalização inclui um sistema de significações. Cada símbolo é uma entidade de duas faces, inseparáveis como numa moeda, o conceito e a imagem, o significado e o significante (MACHADO, 1991). O que se coloca em discussão é como estabelecer a relação entre o símbolo e a realidade que ele representa.

Se a linguagem simbólica da matemática é imprescindível, o é também a necessidade de dar sentido a todo símbolo lido ou escrito. Para Foucambert (1994), s*aber-decifrar* não pode confundir-se com *saber-ler*. Não exageramos ao dizer que encontramos entre nossos estudantes, ingressantes nos cursos de graduação, os que também não sabem decifrar. Diríamos então, segundo o autor, que esses são analfabetos, pois entende o analfabetismo como o desconhecimento das técnicas de utilização da escrita. Foucambert (1994, p. 19) refere o não *saber-ler* como iletrismo, que considera como “a falta de familiaridade com o mundo da escrita, e nesse sentido, cada um de nós é iletrado em diversos campos”.

De certa forma, convivemos muito de perto com o analfabetismo matemático, embora em grau moderado, e com o iletrismo, o que parece mais um contra-senso. Afinal, desde o primeiro dia de aula de qualquer estudante, não é a matemática uma das disciplinas que concentra o maior número de aulas? Nesse ponto, nós professores de matemática estamos falhando. Muito mais do que a aprendizagem de técnicas para operar com os símbolos, nos diz Machado (1991), a matemática relaciona-se de modo visceral com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, explorar e projetar.

Apresentamos um caso específico com o qual nos deparamos todos os semestres e que revela bem a primazia dos procedimentos automatizados em detrimento de outros que poderiam, por utilização de abordagens variadas da linguagem, colaborar para a compreensão dos significados. A derivada é um tema central dos estudos no Cálculo Diferencial e Integral I, cuja noção está ligada à rapidez ou velocidade com que as grandezas aumentam ou diminuem, os objetos se movem ou as coisas se transformam num dado instante. Da definição da derivada decorre um conjunto de propriedades operatórias chamadas regras de derivação, que funcionam como atalhos para o cálculo da derivada de uma função. Simbolicamente, f' representa a derivada de uma função f. Ocorre que o cálculo de derivadas, pela ênfase dada aos exercícios de prática dessas propriedades, acaba em geral ficando como a essência do estudo das derivadas. Esse fato pode ser constatado, por exemplo, propondo aos alunos uma mesma questão, porém em duas abordagens. Numa forma: sendo f a função definida por $f(t) = 3t^2 - 4t + 2$, calcule $f'(t)$. A menos de um descuido, todos os alunos acertam. Noutra forma: escreva a função que determina as velocidades instantâneas de um móvel, que se desloca na trajetória, de acordo com a função $f(\mathrm{t}) = 3t^2 - 4t + 2$. E, agora, grande parte dos alunos não sabe o que deve fazer. Ou seja, o que ficou foi a regra, a técnica associada a um símbolo, que funciona como um comando de execução e não o significado do que ela produz.

Isso é o que ocorre de mais comum, a prática de procedimentos que calculam valores, mas que não são interpretados pelos significados que encerram. Essas práticas encerram algoritmos aplicados corretamente, cujos resultados são desprovidos de significado. Como diz Machado (1991, p. 83): “É no mínimo curioso o fato de que as características supostamente universais do sistema simbólico que é a matemática sugiram” [...] sua linguagem [...] “como instrumento de comunicação global e universal, enquanto simultaneamente ela segue sendo, no senso comum, um assunto de natureza técnica, destinada à compreensão de poucos”.

Se o estudante, além de resolver um problema analiticamente, auxiliado ou não por computador, tem a tarefa de escrever o porquê das suas escolhas e analisar os resultados obtidos no contexto da situação envolvida, ele estará confrontando possibilidades e buscando por relações entre os conceitos. Enfim, uma maior aproximação entre a técnica e o significado do que produz parece ser uma estratégia na direção de solução para os problemas de ordem pedagógica em matemática. E, nessa possibilidade, a habilidade de ler e escrever sobre as idéias matemáticas parece essencial como colaboradora da aprendizagem; os estudantes necessitam aprender como usar a matemática para resolver problemas descritos por palavras e a expressarem-se com palavras, mais do que resolver problemas-padrão encontrados na maioria dos textos tradicionais (MURPHY, 1999).

O que propomos é uma conduta pedagógica que explore conceitos através da realização de atividades reflexivas, e que essa seja a forma de estudar. Com isso procuramos oferecer aos estudantes uma possibilidade de ampliar seus pontos de vista por várias formas de abordar uma determinada situação ou um problema que lhes é colocado.

Encerramos esta seção com um fragmento de Klüsener (2001, p. 190), que expressa muito das nossas idéias.

> O professor deve procurar não se limitar simplesmente a corrigir exercícios, constatando resultados incorretos, mas deve-se ater ao como e por que da atuação do aluno em uma determinada situação de ensino, além de preocupar-se em analisar as estratégias de solução, bem como as respostas, com a finalidade de buscar no erro as causas das dificuldades e dos obstáculos envolvidos no processo de aprendizagem desse aluno. [...] torna-se necessário resgatar, na prática pedagógica, a proposição de tarefas matemáticas envolvendo as diferentes expressões da linguagem no desenvolvimento dos conceitos, noções do próprio pensamento.

2.1.3 *O computador e a aprendizagem matemática*

A utilização da tecnologia tem dado mostras de poder proporcionar mudanças de paradigma em educação. Em trabalhos, como o de Maçada (2001), Morelatti (2002), Schlemmer (2002) e Valentini (2003), podemos encontrar formas de utilização da tecnologia que promovem a cultura da aprendizagem, onde o objetivo central é a construção do conhecimento e o desenvolvimento da capacidade de criar e de pensar. A tecnologia, segundo Schlemmer (2002), é vista como uma possibilidade a mais de construir conhecimentos através da interação, e de definir comunidades de aprendizagem em educação aberta e a distância.

Mas a tecnologia tem sido utilizada, de modo mais freqüente, com foco centrado na cultura do ensino, que privilegia a instrução e o treinamento, como uma forma modernizada de automatizar a instrução. De acordo com Fagundes e Viccari (1999), nas instituições educacionais, em geral, os computadores são ferramenta de ensino a serviço da transmissão de conteúdos. Porém, segundo as autoras, mais do que uma ferramenta pedagógica, o computador pode ser utilizado, de modo equilibrado, como um meio informacional e como um meio de construção.

Para Valente (2001, 2004), o computador na educação significa a possibilidade de aprender através dele, pois a sua utilização requer certas ações que auxiliam na construção do conhecimento. Segundo o autor, na interação com o computador, o aprendiz manipula conceitos, e isso contribui para o seu desenvolvimento mental. Podemos entender o pensamento de Valente em nosso contexto, considerando, por exemplo, o caso simples de plotar o gráfico de uma função: no *software*, que utilizamos no Mecam, o intervalo padrão considera a variável independente variando de -5 a 5. Nessa situação, se a função a ser plotada for, por exemplo, a definida por $f(x) = \sqrt{x-6}$, o resultado será uma figura em branco, pois essa função só tem imagens reais para valores de *x* iguais ou maiores que 6. Assim, se o estudante não considera o conceito de domínio de uma função, não saberá como modificar adequadamente o intervalo para a variável *x*, na construção do gráfico pretendido.

De acordo com Valente (2004), refletir sobre o resultado de um processamento pode gerar ações variadas: o estudante não modifica seu procedimento, porque o resultado está de acordo com suas idéias iniciais (o estudante relaciona adequadamente o gráfico com o domínio da função) e, assim, o problema está resolvido, ou depura seu procedimento, quando o resultado apresentado difere do que esperava. Nesse caso, a depuração pode ser sobre a linguagem do *software* (o estudante pode ter digitado mal a função), sobre o conceito envolvido no problema (o estudante não sabe sobre o domínio de funções) ou ainda sobre estratégias de resolução de problemas.

O computador, no contexto da matemática, aparece como um colaborador, por permitir tratar de problemas variados que envolvem diferentes níveis de complexidade algébrica, além de tornar possível a utilização concomitante de várias formas de abordagem, como a verbal, a numérica, a simbólica e a geométrica.

Sem um computador ou uma calculadora, a análise da resolução de um problema pode ficar prejudicada pela preocupação em efetuar, manualmente, cálculos excessivamente demorados e fortemente suscetíveis a erros. Sem nenhum tipo de recurso de processamentos, precisamos dedicar boa parte de uma aula para os métodos de resolução, em detrimento da análise e aplicação do conceito que está sendo estudado. Os próprios livros de Cálculo, até pouco tempo, sugeriam uma metodologia baseada em práticas instrumentais, ao dedicarem um espaço mínimo para comentários e análises na resolução de problemas. Porém, têm surgido nos últimos anos textos como os do Anton (2000), Stewart (2001) e Thomas (2002) que mostram claramente uma tendência à utilização de recursos computacionais que permitem agilizar a obtenção de resultados numéricos, simbólicos e geométricos.

Podemos apresentar, como exemplo de um benefício propiciado pelo computador, a possibilidade de novo tratamento no estudo das funções, que são os objetos do Cálculo com importância incontestável, na medida em que tornam possível a representação de fenômenos dos mais variados tipos.

Consideremos o caso particular dos problemas de determinação de valores máximos e mínimos de uma função, que se encontram entre as aplicações mais comuns; basta lembrar a freqüência com que escutamos ou lemos expressões como *lucro máximo*, *custo mínimo*, *tempo mínimo*, *tamanho ótimo*, *potência máxima* ou *distância máxima*. A resolução desses problemas, sem o auxílio de qualquer processador matemático, em geral é longa e envolve, por vezes, um grau de complexidade algébrica superior ao que pode ser alcançado naquele momento, provocando, em determinadas situações, o desvio da atenção do estudante do objeto principal em estudo. Utilizando recursos computacionais para a construção do conceito de máximo e mínimo, podemos amenizar e até eliminar essa dificuldade, como tratar de um número maior de fenômenos e, ainda, ganhar um tempo precioso para a análise e discussão mais detalhada dos resultados.

Ao fazer uso do computador ou de outro recurso, com o propósito de explorar idéias matemáticas, autores como Dubinsky e Schwingendorf (apud MURPHY, 2003), reconhecem, como também nós podemos constatar, que pode haver uma mudança no ambiente da sala de aula centrada no professor, onde predomina o discurso, para um laboratório centrado no estudante, onde é proporcionado a este formular e testar hipóteses e descobrir verdades matemáticas por si próprio. É importante ressaltar, no contexto da aprendizagem, que a fase de exploração das idéias matemáticas deve ser seguida pela formalização dos conceitos, sem a qual o estudante não tem chance de sistematizar o que fez. Conforme Gravina e Santarosa (1999), o processo de aprendizagem deveria ser similar ao da pesquisa matemática, onde o conhecimento é construído a partir de um trabalho de muita investigação e exploração, que culmina com o *coroamento* da formalização, que consiste na escrita formal e organizada dos resultados obtidos.

A favor do computador na educação, também encontramos Papert (1994), que denomina de construcionismo a construção do conhecimento através do computador. Para Papert o computador possibilita o aprender pensando, e entende que o ideal é ensinar de maneira que produza a maior aprendizagem a partir do mínimo de ensino, o que significa disponibilizar os conteúdos à medida que se fazem necessários. Comentando o dito popular africano, *se um homem tem fome, você pode lhe dar um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar*, Papert (1994), que se revela apaixonado pelo ato de aprender, evidencia o sentido maior do ensino e recomenda o computador e a importância do "aprender a aprender – evidentemente além do conhecimento sobre pescar, é também necessário ter boas varas de pesca – motivo pelo qual precisamos de computadores – e saber a localização de águas férteis – motivo pelo qual precisamos desenvolver uma ampla gama de atividades mateticamente[7] férteis". (PAPERT, 1994, p. 125).

No projeto Mecam, o computador está inserido no processo de aprendizagem como um meio de aprender fazendo, numa proposta pedagógica cuja metodologia foi pensada como uma forma de auxiliar os estudantes a pensar sobre o que fazem, como fazem e por que fazem.

Reunimos, assim, nessas três últimas seções, as idéias que nortearam a elaboração da proposta pedagógica do Mecam. Apresentamos a seguir o ambiente de aprendizagem do Mecam.

2.1.4 *O ambiente de aprendizagem do Mecam*

Um ambiente de aprendizagem, independentemente de um contexto presencial ou a distância, deve propiciar condições para a construção de conhecimentos, que ocorre através da interação entre o sujeito e o objeto de

[7] Na expressão "eu usaria o substantivo matética para um curso sobre a arte de aprender" (PAPERT, 1994, p.79) podemos ter uma idéia do sentido que Papert pretende dar à expressão matética.

conhecimento. Essa interação, por sua vez, pode ser promovida por formas variadas de outras interações: entre professores e alunos, entre alunos, e entre alunos e os recursos que apóiam a realização dos estudos.

Um ambiente de aprendizagem é o lugar comum de professores e alunos, em que princípios de ensino e aprendizagem revelam suas concepções de aprendizagem. Segundo Skovsmose (2000), nas práticas tradicionais a aula de matemática é dividida em dois momentos distintos: num primeiro, o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas e, no outro, os alunos realizam exercícios selecionados pelo professor. As variações, segundo esse paradigma, consistem, em geral, de aulas onde o professor ocupa a maior parte do tempo expondo o conteúdo e mostrando exemplos práticos ou de aulas em que o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com a resolução de exercícios. Para o autor e também para nós, esse paradigma não condiz com um cenário de investigação, próprio para o desenvolvimento de aprendizagens em matemática, e uma mudança na direção de um novo paradigma, em que os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação, pode contribuir para engajar os alunos ativamente em seus processos de aprendizagem.

Um ambiente de aprendizagem de matemática deve, de acordo com essa concepção, promover situações que levem os alunos a produzir significados para conceitos e ações que realizam. A interpretação de Skovsmose (2000) de *significado* vem ao encontro da nossa, segunda a qual *significado* implica motivos que determinam a ação, o que inclui o contexto de localização do objetivo e da ação realizada pelo aluno.

Os ambientes virtuais de aprendizagem, propostos para a realização de estudos a distância, ou como apoio ao presencial, possibilitam ultrapassar as barreiras de espaço e tempo. O ambiente virtual de aprendizagem não fica atrelado ao do modelo tradicional, que impõe um mesmo espaço físico e um horário determinado para o encontro de alunos, professores e materiais didáticos (VALENTINI, 2003).

Um ambiente virtual de aprendizagem permite promover a autonomia e a organização individual dos estudos, de acordo com as necessidades dos integrantes da comunidade de aprendizagem, e possibilita que em tempos e em lugares diferentes estejamos presentes, interagindo com outros ou com as idéias de outros que ficam registradas no ambiente.

Para Maçada (2001) o ambiente virtual de aprendizagem se constrói através das relações que nele acontecem, e assim, o sucesso das interações depende do grau de envolvimento do professor e dos alunos. Disponibilizar os conteúdos no ambiente e abastecê-lo de recursos tecnológicos avançados não é suficiente como solução para questões educacionais. Um diferencial só se estabelece mediante uma proposta pedagógica que considera o aluno como interagente e com a participação ativa daqueles que querem aprender, entendendo como participação ativa o envolvimento em atividades de reflexão, interação e cooperação.

A utilização de recursos tecnológicos em ambientes de aprendizagem de matemática permite "perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica". (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003).

Segundo esses autores, um ensino inovador exige do professor um papel cada vez mais marcado pela preocupação em criar situações de aprendizagem estimulantes, que desafiem os alunos a pensar e que favoreçam a diversificação dos percursos de aprendizagem.

Os ambientes de aprendizagem, enriquecidos com recursos telemáticos, possibilitam a realização de atividades que valorizam o envolvimento dos alunos e os torna, conforme Dillenbourg (2004), participantes não somente ativos, mas também atores; não limitados ao uso de informações, mas também produtores delas, eles podem entrar no jogo. Mas alerta que essas possibilidades definem efeitos potenciais e não reais, e não estão isentas de problemas, que, conforme explica, não são de ordem tecnologia, mas se devem ao contexto educacional. A eficácia de um ambiente de aprendizagem não depende da tecnologia, mas das concepções psicopedagógicas do professor.

Sem dúvida, são reais essas afirmações, e reconhecemos que é uma tarefa árdua manter os estudantes envolvidos. As atividades colaborativas são eficazes quando os estudantes participam das discussões motivadas pela curiosidade, necessidade e solidariedade. Os benefícios na aprendizagem aparecem quando os estudantes discutem sobre suas dificuldades, apresentam sugestões aos colegas, questionam sobre suas dúvidas e não simplesmente quando cumprirem o compromisso da realização das tarefas solicitadas. O professor, por sua vez, deve estar disposto a incentivar interações dessa natureza, valorizando as participações, auxiliando nas dificuldades, satisfazendo curiosidades e, na medida do possível, mantendo-os envolvidos a partir de novos e oportunos desafios.

Com essas considerações, apresentamos o ambiente do Mecam, criado para a realização de cursos de estudos complementares, com o propósito de, além de fornecer informações sobre conteúdos matemáticos e tecnologia, acompanhar os estudantes na realização das atividades, auxiliá-los no desenvolvimento da autonomia, da capacidade de lidar com problemas matemáticos e com tecnologia, e de privilegiar a interação entre os sujeitos, entre os sujeitos e os recursos do ambiente e entre o sujeitos e as noções matemáticas que constituem objetos de aprendizagem no contexto da realização dos estudos.

O ambiente de aprendizagem do Mecam foi construído em ZOPE – Z *Object Publishing Environment*, uma plataforma de *software* que viabiliza a construção de ambientes virtuais dinâmicos (RAMALHO, 2003). Trata-se de um servidor de páginas, mantidas e administradas completamente na *web*, através de uma interface, similar a de um gerenciador de arquivos. O Zope utiliza uma estrutura de páginas subdivididas em partes menores chamadas objetos, que podem ser reutilizados sempre que necessário. Não existem páginas estáticas (arquivos) em Zope, as mesmas são geradas dinamicamente, no momento do aviso do navegador. Com isso, podemos simplesmente criar documentos com formato html e utilizar o Zope pela interface de administração via *web* e, uma vez alterado qualquer documento, todas as páginas que o utilizam estarão automática e instantaneamente atualizadas (MARTINS, 2003). Dessa forma, o trabalho de manutenção e atualização das páginas não exige maiores conhecimentos de informática e pode ser realizado por qualquer membro da equipe responsável, cadastrado no ambiente na condição de administrador.[8]

Na seqüência deste capítulo, descrevemos o ambiente de aprendizagem do Mecam, criado para a realização dos cursos Estudos Complementares de Cálculo

[8] A parte do texto que segue, onde descrevemos o ambiente e a metodologia do Mecam, pode ser encontrada também na tese de doutoramento de Sauer (2004), pesquisadora integrante do projeto Mecam. Em seu trabalho, cuja leitura recomendamos, ela realiza um estudo onde procura evidenciar a relação de co-implicação entre concepções epistemológicas dos alunos e sua participação em ambientes de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, oportunizada por ações de reflexões desencadeadas em diálogos matemáticos.

Diferencial e Integral I. Na figura 1, a seguir, apresentamos a página de entrada do ambiente disponibilizado para a segunda edição experimental do projeto.

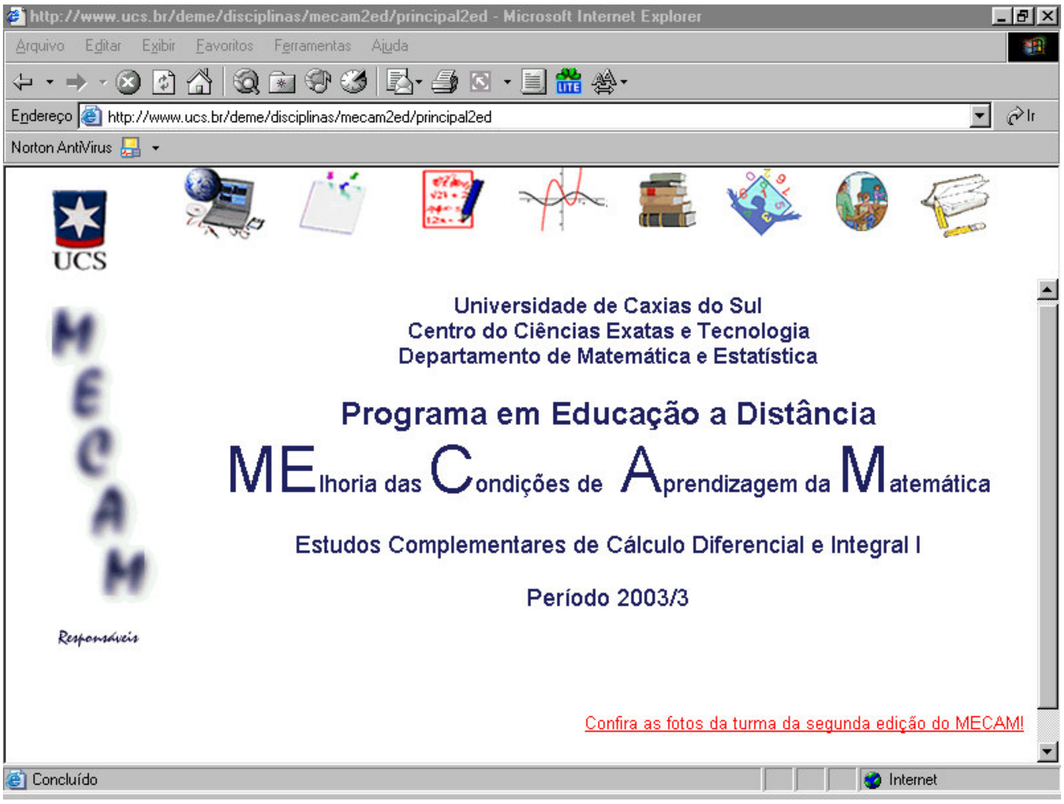


Figura 1: Página de entrada do ambiente de aprendizagem do Mecam

Os recursos tecnológicos disponibilizados no ambiente de aprendizagem do Mecam são idealizados, depurados e organizados de modo que permitam fácil acesso e flexibilidade de utilização, mesmo para aqueles alunos menos familiarizados com recursos da *internet*, buscando, com isso, que os embaraços tecnológicos não interfiram nos estudos de Cálculo. Assim sendo, tais recursos constituem-se apenas no que é necessário e indispensável para a realização dos estudos num curso a distância.

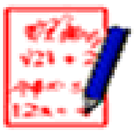
Nossa expectativa é de que o apoio programado para acompanhar os estudantes em relação às suas dificuldades em matemática, além de auxiliá-los a melhorar o seu desempenho, promova o início de um trabalho mais interativo, com o aluno no centro do processo e onde o professor possa proporcionar a ele, aluno, oportunidade de reflexão e de responsabilidade por sua ação e, então, a partir dessa reflexão, uma construção efetiva de seu conhecimento.

O ambiente é constituído por um conjunto de recursos que permitem a comunicação e a realização das atividades e é organizado em espaços ou contextos de aprendizagem. Os recursos que utilizamos justificam-se por suas diferentes finalidades e integram os espaços de acordo com as necessidades detectadas ou confirmadas durante a realização das edições experimentais do projeto.

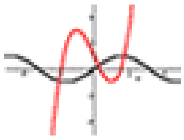
Nos diferentes espaços, os estudantes encontram orientações sobre o curso, sobre a utilização dos diversos recursos disponibilizados no ambiente e sobre a realização das atividades. Os espaços criados são acessados por *links*, que permitem a entrada de qualquer um deles a todos os demais, e são identificados por: *Dinâmica do Curso*, *Agenda*, *Atividades*, *Material de Apoio*, *Leituras*, *Discussões*, *Alunos Participantes* e *Avaliação*.

A *Dinâmica do Curso* é o espaço onde, além da apresentação do programa de estudos, explicitamos a metodologia do Mecam, de forma a tornar claro para os alunos os pressupostos teóricos e as concepções de aprendizagem que a fundamentam, as orientações para a realização das atividades e para a participação efetiva no curso. Apresentamos também os critérios de avaliação que consideram a realização das atividades, a disposição para o seu aperfeiçoamento, a proposição de questionamentos relevantes, a participação com contribuições nas discussões coletivas e a evolução da qualidade das produções.

A *Agenda* é um espaço reservado para comunicações e avisos referentes ao desenvolvimento do curso. Oficialmente divulgamos as datas que definem os prazos máximos para a entrega de cada atividade, ficando a critério do aluno antecipar esses tempos de modo a permitir a análise crítica de seu trabalho e receber sugestões de aperfeiçoamentos que possam ser realizados dentro dos prazos estabelecidos. Nesse espaço agendamos, também, a data do *encontro presencial*, tão logo estejam concluídas as atividades programadas. Durante esse encontro, como condição de aprovação, o aluno deve mostrar-se apto a prestar esclarecimentos sobre as atividades que realizou, confirmando a autoria da participação, numa entrevista realizada individualmente. A própria natureza das interações, promovidas durante o curso, possibilita, pelas problematizações individualizadas, conforme as características de cada contribuição, a identificação de cada participante. Assim, na entrevista presencial é possível perceber, através de um diálogo, se o aluno é realmente o autor das produções que estão em seu nome. Além disso, é possível oportunizar também, durante esse encontro, o aperfeiçoamento das questões que ficaram em aberto nas atividades.



No espaço *Atividades* apresentamos as que devem ser realizadas como desenvolvimento do curso. Cada atividade encontra-se disponível em página própria e num arquivo do *Scientific Notebook* para *download*. Depois de realizada a atividade, o estudante a envia em arquivo para sua pasta (portfólio) em *Alunos Participantes* e, uma imediata comunicação, por correio eletrônico, é feita às professoras orientadoras, informando que a pasta foi atualizada.



Um *Material de Apoio* está disponível em um espaço de mesmo nome, conforme mostra a figura 2, onde são encontradas orientações para a instalação do *software Scientific Notebook* e esclarecimentos a respeito da sintaxe básica dos principais comandos relacionados aos temas da disciplina, da implementação de gráficos e das possibilidades do *software*, como editor de textos matemáticos. Ainda nesse espaço, uma página denominada *Perguntas Freqüentes* reúne e organiza as questões que aparecem no fórum relacionadas ao *software* e aos demais recursos disponíveis no ambiente.

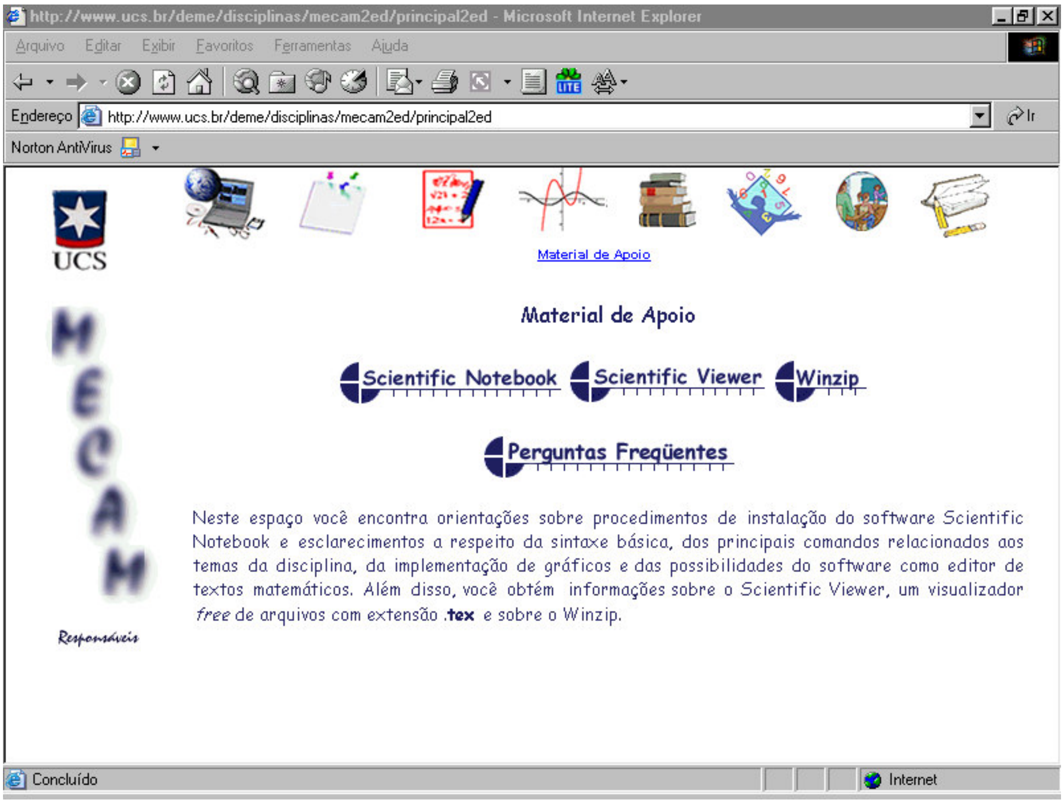


Figura 2: Contexto do material de apoio

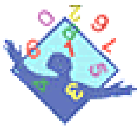
Em relação ao *software* matemático, a opção pelo *Scientific Notebook* permite congregar a edição de textos com processamentos numéricos e simbólicos e com a construção de gráficos. Além disso, esse *software* proporciona o manuseio da simbologia matemática geral, tal como é usualmente expressa, sem a necessidade de conhecimento em programação. Essa qualidade é relevante, pois possibilita a participação de qualquer aluno, mesmo que não tenha conhecimentos prévios em informática.

Em *Leituras* podem ser encontradas, além das referências bibliográficas sugeridas, *links* de acesso a endereços relacionados aos temas de interesse do curso. Uma breve descrição dos assuntos abordados acompanha cada referência, com destaque para os diretamente relacionados ao curso, como forma de auxiliar os estudantes na localização dos temas de interesse.

Além disso, disponibilizamos *Notas de Aula* referentes aos tópicos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Trata-se de uma fonte para consulta rápida, em linguagem simples, com o propósito de familiarizar o aluno em seus estudos iniciais. Nesse espaço, organizado inicialmente com materiais oriundos de polígrafos e notas de aula produzidas por professores da disciplina, temos como propósito agregar as produções coletivas,[9] à medida que forem sendo realizadas, de modo que se constituam num acervo, em linguagem simplificada, do material produzido pelos próprios alunos, como apoio às edições futuras do programa. Esse trabalho, entretanto, ainda não foi possível, pois requer uma atenção especial no sentido de inseri-lo no contexto dos conteúdos de forma coerente e organizada. Hoje, temos no ambiente uma lista de tópicos, numa primeira forma de organização das produções oriundas das duas primeiras edições do programa. O que prevemos

[9] As produções coletivas, no decurso de cada edição, têm espaço próprio, que será descrito ainda nesta seção.

é a disponibilização de tal material na forma de um hipertexto,[10] a partir do qual seja possível um processo de comunicação matemática, organizado de forma não-linear o que, do ponto de vista epistemológico, está relacionado ao próprio processo da aprendizagem. De acordo com Pais (2004), a "importância pedagógica do hipertexto tem origem quando se percebe que a lógica de seu funcionamento aproxima-se da complexidade inerente ao processo de aprendizagem". Dessa forma, as produções coletivas poderão oferecer informações e pontos de partida para desencadear a busca por novas informações, conforme o interesse e o ritmo de aprendizagem de cada estudante.



Todas as discussões relacionadas ao desenvolvimento do curso ocorrem no espaço das *Discussões*. Esse espaço conta com um *Fórum* destinado a discussões de questões tecnológicas e matemáticas e, por isso, a ferramenta permite anexar arquivos, e um recurso de *Correio Interno* para a troca de mensagens envolvendo outros assuntos, não especificamente relacionados às atividades matemáticas. O fórum é um recurso de destaque no ambiente, por ser o espaço das interações entre todos os participantes do Mecam. Esse espaço serve como intermediário entre os questionamentos propostos nos arquivos das atividades e o retorno com os aperfeiçoamentos sugeridos. É um canal de discussões onde os estudantes apresentam suas dúvidas, de acordo com o andamento dos estudos e da realização das tarefas de aprendizagem. Cabe a todos responder às mensagens de monitoras, professoras e colegas, que procuram oferecer alguma contribuição, como sugestões de outras abordagens ou modos de resolução, auxílio na utilização do *software* e na

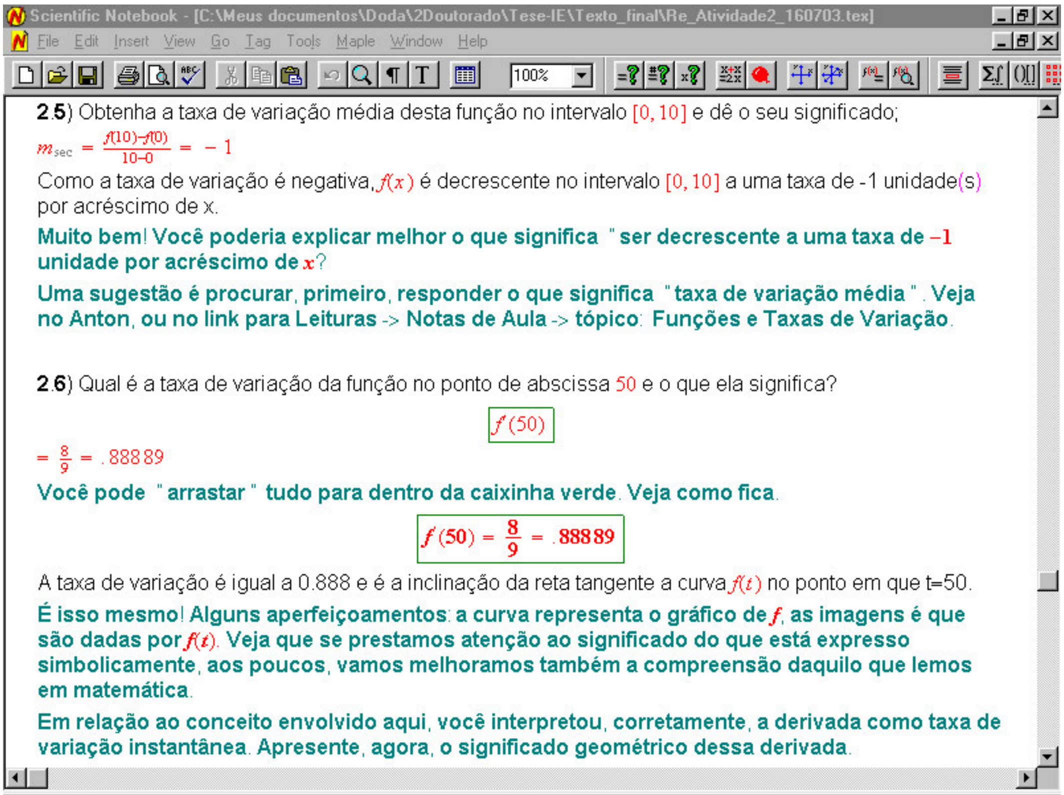
[10] De acordo com Clement (apud PAIS, 2004), trata-se de um conjunto constituído de informações não hierarquizadas integradas entre si por conexões que o leitor pode ativar e que permitem acesso rápido a cada um dos elementos constitutivos do conjunto.

interpretação dos resultados e dos seus significados, além da indicação de fontes de consultas. O professor, no fórum, tem o papel de incentivador das discussões, como orientador e como problematizador. Para isso, deve estar atento às participações e valorizar as contribuições de todos, animar e, por vezes, apaziguar os ânimos.

Assim, as produções resultantes das discussões no fórum são geradas por dificuldades manifestadas pelo aluno ou por problematizações que se constituíram como desafios para vários estudantes durante a realização das atividades. Tais produções são organizadas numa página, que denominamos *Produções Coletivas*, e constituem, como referimos anteriormente, uma coleção de textos apresentados na forma de tópicos, não necessariamente relacionados a uma tarefa de aprendizagem específica, pois uma mesma questão pode gerar várias produções coletivas e estas, por sua vez, podem estar relacionadas a várias das questões propostas nas atividades.

Isso ocorre porque as discussões são relacionadas, em grande parte, a dúvidas individuais, e porque uma mesma questão pode ser problematizada de forma diferente para cada aluno, pois as problematizações dependem do que o aluno responde. As figuras 3 e 4 ilustram essa diversidade, mostrando parte de uma mesma atividade elaborada por dois alunos, em que são gerados questionamentos distintos, de acordo com as respostas apresentadas.

Observaremos, conforme as figuras, que, na apresentação das tarefas, os dois estudantes, dos casos 1 e 2, deram rumos inicialmente diferentes aos questionamentos, na medida em que apresentaram interpretações diferentes para o significado da taxa de variação média.


Scientific Notebook - [C:\Meus documentos\Doda\2Doutorado\Tese-IE\Texto_final\Re_Atividade2_160703.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

2.5) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo $[0,10]$ e dê o seu significado;

$m_{sec} = \frac{f(10)-f(0)}{10-0} = -1$

Como a taxa de variação é negativa, $f(x)$ é decrescente no intervalo $[0,10]$ a uma taxa de -1 unidade(s) por acréscimo de x.

Muito bem! Você poderia explicar melhor o que significa "ser decrescente a uma taxa de -1 unidade por acréscimo de x?

Uma sugestão é procurar, primeiro, responder o que significa "taxa de variação média". Veja no Anton, ou no link para Leituras -> Notas de Aula -> tópico: Funções e Taxas de Variação.

2.6) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?

$\boxed{f(50)}$

$= \frac{8}{9} = .88889$

Você pode "arrastar" tudo para dentro da caixinha verde. Veja como fica.

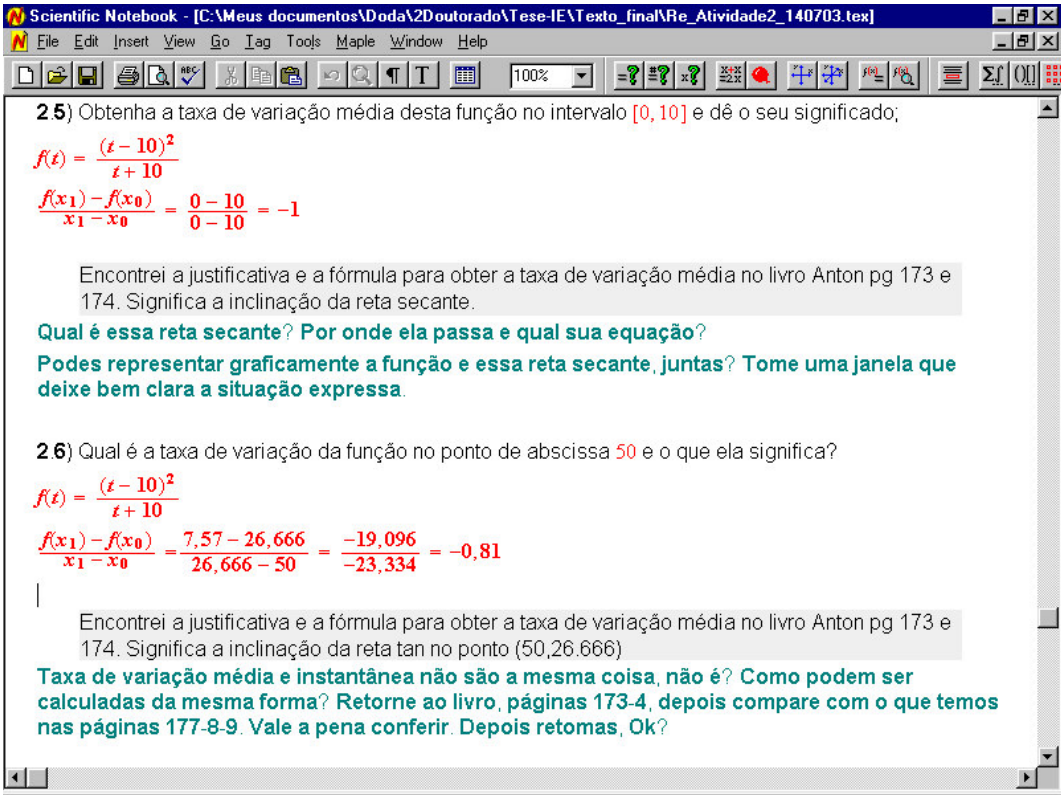
$\boxed{f(50) = \frac{8}{9} = .88889}$

A taxa de variação é igual a 0.888 e é a inclinação da reta tangente a curva $f(t)$ no ponto em que t=50.

É isso mesmo! Alguns aperfeiçoamentos: a curva representa o gráfico de f, as imagens é que são dadas por $f(t)$. Veja que se prestamos atenção ao significado do que está expresso simbolicamente, aos poucos, vamos melhoramos também a compreensão daquilo que lemos em matemática.

Em relação ao conceito envolvido aqui, você interpretou, corretamente, a derivada como taxa de variação instantânea. Apresente, agora, o significado geométrico dessa derivada.

Figura 3: Possíveis problematizações (caso 1)


Scientific Notebook - [C:\Meus documentos\Doda\2Doutorado\Tese-IE\Texto_final\Re_Atividade2_140703.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

2.5) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo $[0,10]$ e dê o seu significado;

$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{0-10}{0-10} = -1$

Encontrei a justificativa e a fórmula para obter a taxa de variação média no livro Anton pg 173 e 174. Significa a inclinação da reta secante.

Qual é essa reta secante? Por onde ela passa e qual sua equação?

Podes representar graficamente a função e essa reta secante, juntas? Tome uma janela que deixe bem clara a situação expressa.

2.6) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?

$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{7{,}57-26{,}666}{26{,}666-50} = \frac{-19{,}096}{-23{,}334} = -0{,}81$

Encontrei a justificativa e a fórmula para obter a taxa de variação média no livro Anton pg 173 e 174. Significa a inclinação da reta tan no ponto (50,26.666)

Taxa de variação média e instantânea não são a mesma coisa, não é? Como podem ser calculadas da mesma forma? Retorne ao livro, páginas 173-4, depois compare com o que temos nas páginas 177-8-9. Vale a pena conferir. Depois retomas, Ok?

Figura 4: Possíveis problematizações (caso 2)

Na questão 2.5, que consta no extrato da figura 3, o estudante calculou adequadamente o valor da taxa, e sua explicação demonstra que tem noção desse significado. O questionamento propõe, então, uma reflexão, e também uma busca, no sentido de melhorar seu entendimento, solicitando nova explicação, em relação à interpretação do sinal e da unidade da taxa. No extrato do caso 2, observamos que a taxa foi também calculada corretamente, e que a interpretação, agora, é a geométrica, onde a taxa expressa o coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função. Mas, nesse caso, não temos ainda uma explicação que demonstre compreensão sobre o que foi apresentado. O questionamento, portanto, solicita que o estudante apresente a reta para a qual sugeriu conhecer o coeficiente angular.

Na questão 2.6, o estudante do caso 1 apresentou a solução correta e interpretou adequadamente o significado do valor obtido. Com isso, no questionamento, sugerimos que interprete o mesmo resultado, agora do que este expressa geometricamente. Já o estudante do caso 2 apresentou o cálculo da taxa de variação média e a interpretação da taxa de variação instantânea. Propomos, então, que reflita, perguntado se essas taxas, que são diferentes, podem ser obtidas da mesma forma.

Assim, para cada aluno e em cada atividade, as propostas de estudo têm caráter flexível, adequado a cada situação, e as discussões no fórum, por sua vez, também ocorrem em diferentes níveis e em várias direções, dependendo da necessidade, do interesse e da disponibilidade de cada um.

Na figura 5 apresentamos o espaço das *Discussões* com seus três contextos de interação: *Fórum*, *Correio Interno* e *Produções Coletivas*, conforme descrevemos acima.

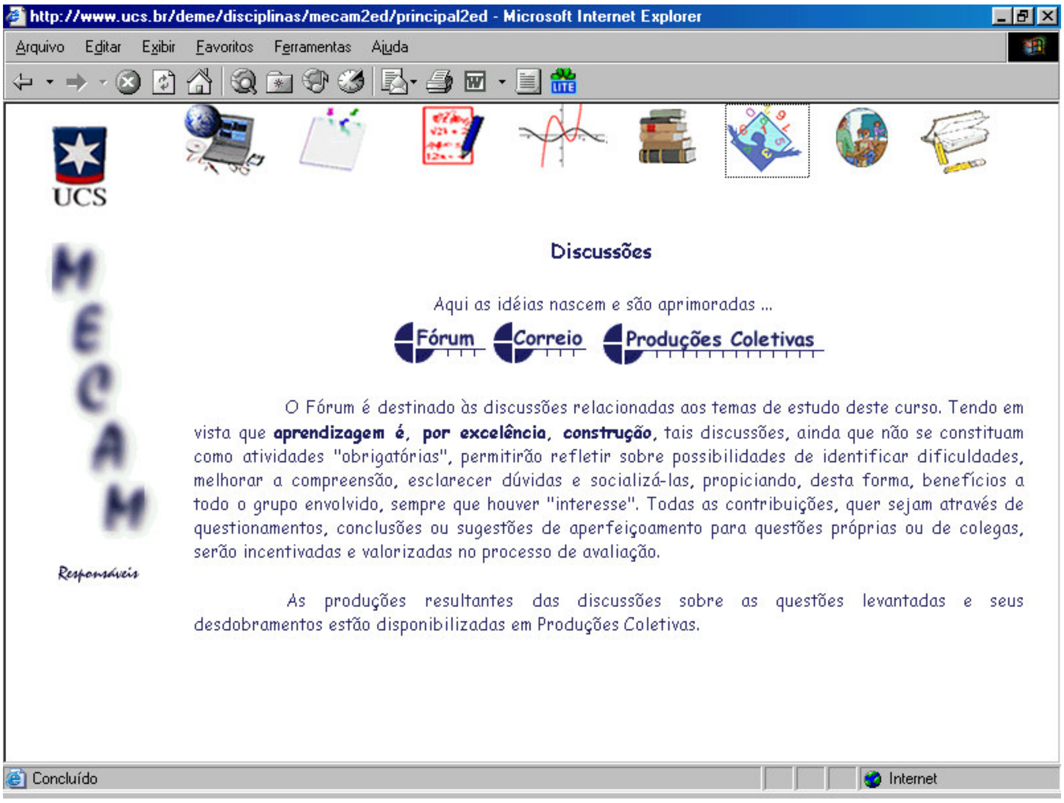


Figura 5: O espaço das *Discussões* no Mecam

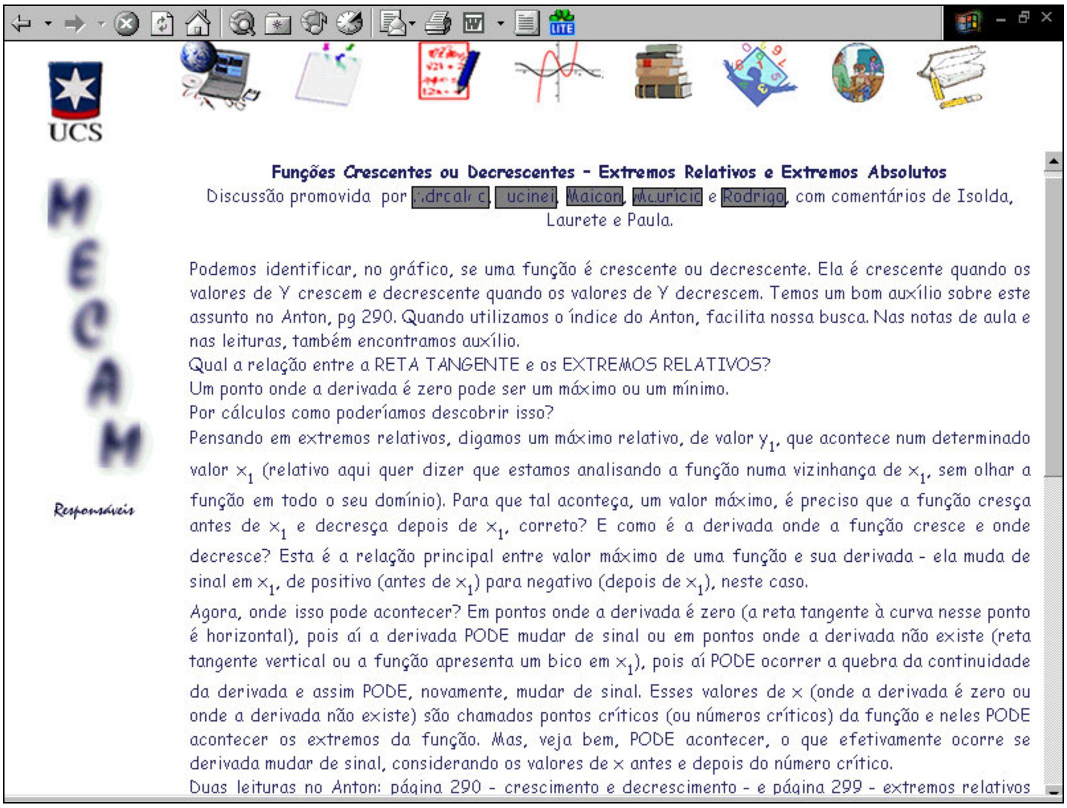
Destacamos a boa qualidade das *Produções Coletivas* que, nesse espaço, são disponibilizadas, como auxílio aos estudos, em forma de hipertextos, porém ainda separados por tópicos, originados das discussões no fórum, em torno dos questionamentos, como mostra a figura 6. Os textos apresentam linguagem simples, a linguagem dos alunos, e os comentários complementares feitos pelas professoras e monitoras. Os mesmos ficam disponíveis no ambiente em cada edição, onde as novas mensagens serão agregadas, aprimorando ou complementando o que já está elaborado.

Figura 6: O espaço das *Produções Coletivas* no Mecam

A organização dos textos ocorre a partir de uma seqüência de mensagens sobre um mesmo assunto ou de mensagens relacionadas a assuntos correlatos, extraindo das mesmas o conteúdo matemático e as fontes onde os temas são abordados, e reorganizando os extratos em frases conectadas.

Na figura 7, temos a ilustração de uma produção coletiva. A mesma resultou de várias discussões, realizadas no fórum, sobre a determinação dos intervalos de crescimento/decrescimento de uma função, a partir da análise do sinal da derivada, e sobre a determinação de extremos relativos e absolutos. Na seqüência de mensagens a seguir, que antecedem à figura 7, apresentamos uma parte das discussões, a que dá inicio ao texto das produções. A mesma envolveu dois estudantes, de quem omitimos os nomes, e uma de nossas monitoras.

crescente e decrescente
Autor: **XXX**
Data: Jul 10, 2003 6:17 pm
Como identificar no gráfico e como calcular se a função é crescente ou decrescente. Quem me ajuda, pela primeira e segunda derivada?
Re: crescente e decrescente (por YYY: quinta, 10 de julho de 2003 às 20:10)
Olá XXX
Eu consegui identificar no gráfico se ela é crescente ou decrescente, olhando os valores de Y. Ela é crescente quando os valores de Y crescem e decrescente quando os valores de Y decrescem.
Re: crescente e decrescente (por Paula: quinta, 10 de julho de 2003 às 21:21)
Oi XXX,
sobre as derivadas que você perguntou temos um bom auxílio sobre o assunto no Anton, pg 290
...lembre-se de utilizar o índice remissivo do Anton, facilitará sua busca, no material de apoio e nas leituras, também encontrará auxílio....
....espero que ajude...
Até...
...Paula


UCS

Mecam

Responsáveis

Funções Crescentes ou Decrescentes - Extremos Relativos e Extremos Absolutos
Discussão promovida por [redacted], [redacted], [redacted], [redacted] e [redacted], com comentários de Isolda, Laurete e Paula.

Podemos identificar, no gráfico, se uma função é crescente ou decrescente. Ela é crescente quando os valores de Y crescem e decrescente quando os valores de Y decrescem. Temos um bom auxílio sobre este assunto no Anton, pg 290. Quando utilizamos o índice do Anton, facilita nossa busca. Nas notas de aula e nas leituras, também encontramos auxílio.
Qual a relação entre a RETA TANGENTE e os EXTREMOS RELATIVOS?
Um ponto onde a derivada é zero pode ser um máximo ou um mínimo.
Por cálculos como poderíamos descobrir isso?
Pensando em extremos relativos, digamos um máximo relativo, de valor y_1, que acontece num determinado valor x_1 (relativo aqui quer dizer que estamos analisando a função numa vizinhança de x_1, sem olhar a função em todo o seu domínio). Para que tal aconteça, um valor máximo, é preciso que a função cresça antes de x_1 e decresça depois de x_1, correto? E como é a derivada onde a função cresce e onde decresce? Esta é a relação principal entre valor máximo de uma função e sua derivada - ela muda de sinal em x_1, de positivo (antes de x_1) para negativo (depois de x_1), neste caso.
Agora, onde isso pode acontecer? Em pontos onde a derivada é zero (a reta tangente à curva nesse ponto é horizontal), pois aí a derivada PODE mudar de sinal ou em pontos onde a derivada não existe (reta tangente vertical ou a função apresenta um bico em x_1), pois aí PODE ocorrer a quebra da continuidade da derivada e assim PODE, novamente, mudar de sinal. Esses valores de x (onde a derivada é zero ou onde a derivada não existe) são chamados pontos críticos (ou números críticos) da função e neles PODE acontecer os extremos da função. Mas, veja bem, PODE acontecer, o que efetivamente ocorre se derivada mudar de sinal, considerando os valores de x antes e depois do número crítico.
Duas leituras no Anton: página 290 - crescimento e decrescimento - e página 299 - extremos relativos

Figura 7: Uma produção coletiva no Mecam

As trocas interativas, no ambiente do Mecam, ocorrem, portanto, através da escrita. Elas é que alimentam e dão vida ao ambiente. Os textos que apresentam dúvidas, sugestões ou orientações determinam o funcionamento e a organização de cada discussão e, em conseqüência, de cada produção coletiva.

As novas possibilidades que emergem dessas interações permitem ao aluno passar da condição de expectador para a de sujeito ativo, cooperativo e criativo, que se expressa, em momentos que julga oportuno, numa linguagem livre e não por padrões de respostas. Além disso, a elaboração pessoal, característica das mensagens dos alunos, e a sua transformação no decorrer do curso são, também, indicativos de progresso na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo.

Procuramos, portanto, incentivar a participação com dúvidas ou contribuições nas discussões, também como um ato de solidariedade que pode beneficiar todo o grupo. Ao incentivar a realização de atividades que têm repercussão social, estamos, de certa forma, promovendo o desenvolvimento de condutas relevantes, tais como a compreensão da informação e a compreensão humana que, para Morin (2002), são condições e garantia da solidariedade intelectual e moral da humanidade.

Alunos Participantes é o espaço onde os estudantes guardam os seus materiais. *Links* identificados por seus nomes dão acesso às pastas (portifólios) individuais, onde são depositados as atividades e seus aperfeiçoamentos, desenvolvidos em arquivos do *Scientific Notebook*. Esses arquivos são os *cadernos dos alunos*, onde são registrados todos os estudos realizados, os questionamentos e os aperfeiçoamentos sugeridos. Além disso, são também guardados em suas pastas os arquivos das auto-avaliações e a ficha individual de avaliação, que é permanentemente atualizada.

Em *Avaliação* apresentamos novamente os critérios de avaliação, conforme descrevemos em *Dinâmica do Curso*, e orientações para a realização das auto-avaliações, propostas como momentos de reflexão sobre a própria ação, com o propósito de identificar dificuldades e sugerir ações de superação das mesmas. Os estudantes avaliam também suas contribuições na interação com os colegas e o que aprenderam com elas, e apresentam sugestões de aprimoramento do ambiente em relação aos aspectos metodológicos e tecnológicos. Há também, nesse espaço, pastas, como as dos estudantes, de acesso restrito para que professores e monitores organizem seus materiais e um *link*, *atividades realizadas*, que dá acesso a uma tabela que informa sobre o andamento da realização das tarefas de cada estudante do Mecam.

É importante destacar que, mesmo buscando a coerência e a unidade entre os espaços que compõem o ambiente virtual de aprendizagem do Mecam, as dissonâncias e diversidades precisam ser consideradas nesse sistema (VALENTINI, 2003). Queremos dizer com isso que, embora busquemos propiciar trocas heterárquicas, desenvolvimento de autonomia, formas variadas de interação e problematização, encontramos momentos de dificuldades e de desencontros que também fazem parte do processo. Tais dificuldades e desencontros estão relacionados a fatores como o uso da tecnologia, as interações entre os sujeitos, o entendimento da aprendizagem como reprodução, o medo de errar, a resistência e dificuldade dos estudantes em expressarem suas idéias a partir da escrita, dentre outros.

A presença dos professores e monitores é fundamental no ambiente, na função de coordenar as discussões e propor questionamentos ou desafios, visando à compreensão e à construção dos conhecimentos. Essas tarefas requerem, além de conhecimento, bom senso e experiência, facilidade na utilização dos recursos e praticidade para adequá-los às necessidades de cada situação, modificando ou acrescentando recursos, antes ou durante a realização do curso.

2.1.5 *A prática metodológica do Mecam*

Na tentativa de criar situações de discussão, incentivando diferentes maneiras de pensar sobre um mesmo assunto, temos procurado aproveitar todas as oportunidades que nossos alunos oferecem, para que aprofundem e construam seus conhecimentos, considerando o que eles demonstram como saber ou como dificuldade.

Procuramos gerar aprendizagens matemáticas diferenciadas por ações intelectuais reflexivas, que derivam de questionamentos e discussões sobre os significados dos conceitos, de modo que o aluno seja incentivado a ir além da utilização de procedimentos mecânicos e respostas simples. Numa sistemática de questionamentos, solicitamos ao aluno que justifique as ações realizadas, que explique, para si mesmo, para o professor e para os colegas por que utiliza determina fórmula numa resolução, e que analise os resultados, confrontando previsões e constatações. A aprendizagem, com compreensão dos significados decorre, segundo Macedo (1994), das reações desencadeadas como um processo de construção resultante do fazer reflexivo, da tomada de consciência, do pensar sobre o fazer, do pensar sobre o ato de pensar (LAFORTUNE; SAINT-PIERRE, 1996).

Ora, parece ser verdade que *quanto mais ensinamos*, *mais aprendemos*, que quanto mais tentamos encontrar argumentos para mostrar aos estudantes um determinado ponto de vista, mais propriedades encontramos. Precisamos, portanto, enquanto educadores, adotar metodologias que propiciem aos nossos alunos também desfrutarem dessa vantagem e conquistarem, assim, a habilidade de aprender, de assimilar novos conceitos, de avaliar novas situações e de lidar com o inesperado, que, segundo Papert (1994), constituem as habilidades que determinarão o padrão de vida de uma pessoa, num futuro próximo. Além disso, não temos todo o conhecimento de que nossos alunos irão precisar. Mais vale, então, ensiná-los a aprender e aprender em atividade, isto é, aprender fazendo; mas mais do que isso, aprender pensando (DEMO, 2001).

A prática metodológica do Mecam considera a investigação sobre as condições iniciais do aluno, que ingressa no curso, e a possibilidade de aprimorá-las, por um processo de reflexão e tomada de consciência que o leve à construção de conhecimentos e à adoção de nova postura de autonomia e de responsabilidade por sua aprendizagem.

Visando à (re)construção dos conceitos essenciais da disciplina, propomos, como desenvolvimento dos estudos, a realização de um conjunto de atividades, que se encontram disponíveis no ambiente desde o início do curso. Cada tarefa de aprendizagem consta de um problema e um questionamento inicial, que gera um processo de problematizações, com a finalidade de identificar as dificuldades relacionadas aos conceitos envolvidos e ao reconhecimento do conhecimento construído.

Não há uma ordem determinada para a resolução das atividades. O que sugerimos é que sejam desenvolvidas antes as que tratam de assuntos mais familiares, como forma de desenvolver a autoconfiança, para quem chega de uma suposta reprovação. Durante todo o trabalho, desde a primeira resolução de cada atividade, orientamos os alunos para que busquem auxílio na bibliografia recomendada, de modo que, em cada momento, apresentem o que julgam ser o melhor, de acordo com suas condições.

Na figura 8 apresentamos a página das *Atividades*,[11] no ambiente da segunda edição experimental do Mecam.

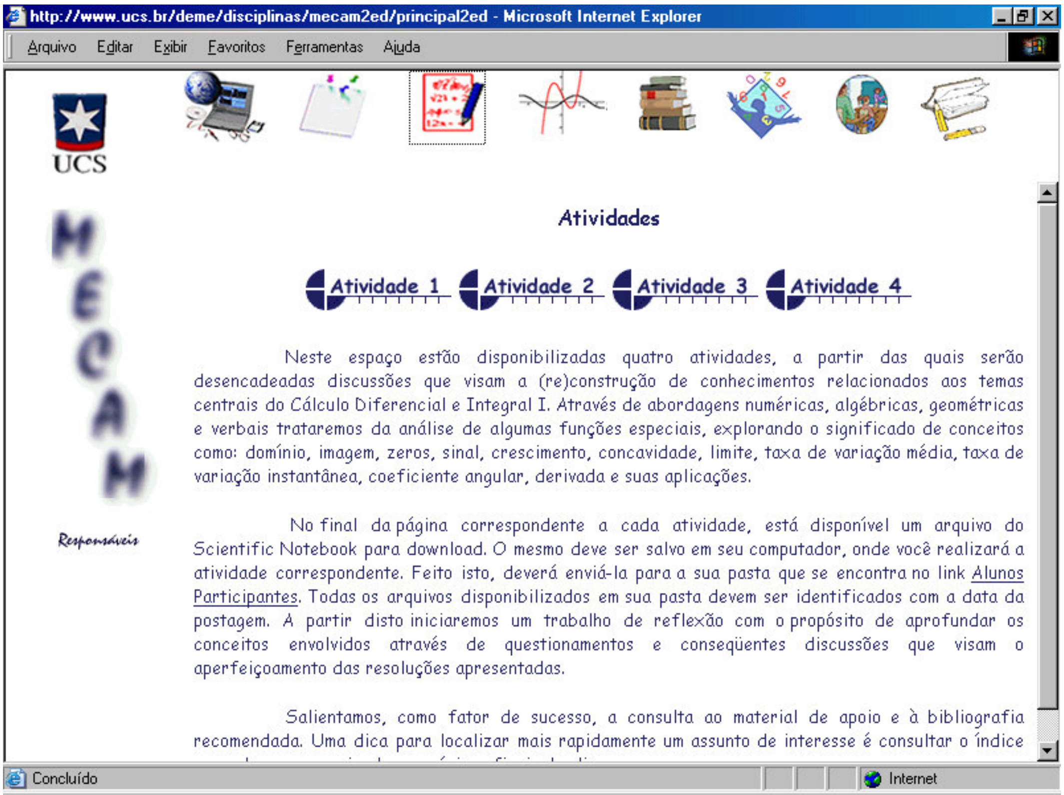


Figura 8: O espaço das atividades no Mecam

As atividades propostas para a realização dos estudos são desenvolvidas em quatro etapas: a *apresentação* da atividade consiste na primeira resolução das tarefas de aprendizagem, que são as questões que compõem a atividade como um todo; *primeiro aperfeiçoamento* da atividade, que consiste em responder aos

[11] As atividades da segunda edição do Mecam constam no Anexo1.

questionamentos feitos sobre a etapa da apresentação; no *segundo aperfeiçoamento* da atividade, os estudantes respondem aos questionamentos feitos sobre o que retornaram como primeiro aperfeiçoamento; *entrevista presencial*, onde os estudantes, numa conversa informal com as professoras, retomam o desenvolvimento das atividades, discutindo sobre as resoluções apresentadas, no sentido de confirmar os conhecimentos demonstrados e esclarecer dúvidas que ainda persistam. Nessa última etapa, os estudantes têm a possibilidade de novamente aperfeiçoar as tarefas, na medida em que respondem aos questionamentos feitos sobre o segundo aperfeiçoamento. As entrevistas são realizadas uma semana depois do encerramento do período destinado à realização das três etapas anteriores de todas as atividades. Piaget (1995a) refere, considerando a aprendizagem, que devemos perguntar-nos, em relação ao sucesso do ensino, dentre outras coisas, o que permanece um tempo depois.

No processo de orientação dos estudantes, consideramos os procedimentos adotados na resolução dos problemas e a proposição de novos questionamentos que utilizam os erros ou acertos, como fontes de desafios que visam ao reconhecimento do que precisa ser (re)elaborado para que sejam superadas as dificuldades ou à possibilidade de estabelecer novas relações e níveis mais elevados de compreensão (LIMA; SAUER, 2002). Os alunos devem, portanto, participar ativamente e mostrar disposição para o aperfeiçoamento das atividades, buscando aprimorá-las no sentido da compreensão dos conceitos.

Para aproximarmos o foco sobre como efetivamente ocorre esse processo metodológico, apresentamos, no Anexo 2, uma atividade completa e, na seqüência dessa seção, algumas situações que exemplificam sua aplicação.

Na figura 9 temos um trecho de uma tarefa de aprendizagem, onde podemos observar que o aluno avança de uma simples resposta inicialmente errada para a sua correção e depois para uma explicação onde demonstra ter compreendido o significado da imagem da função em estudo. As falas da professora podem ser reconhecidas, além do próprio contexto problematizador, pela cor verde da fonte, e seus diferentes tamanhos indicam intervenções em etapas sucessivas do aperfeiçoamento das tarefas.

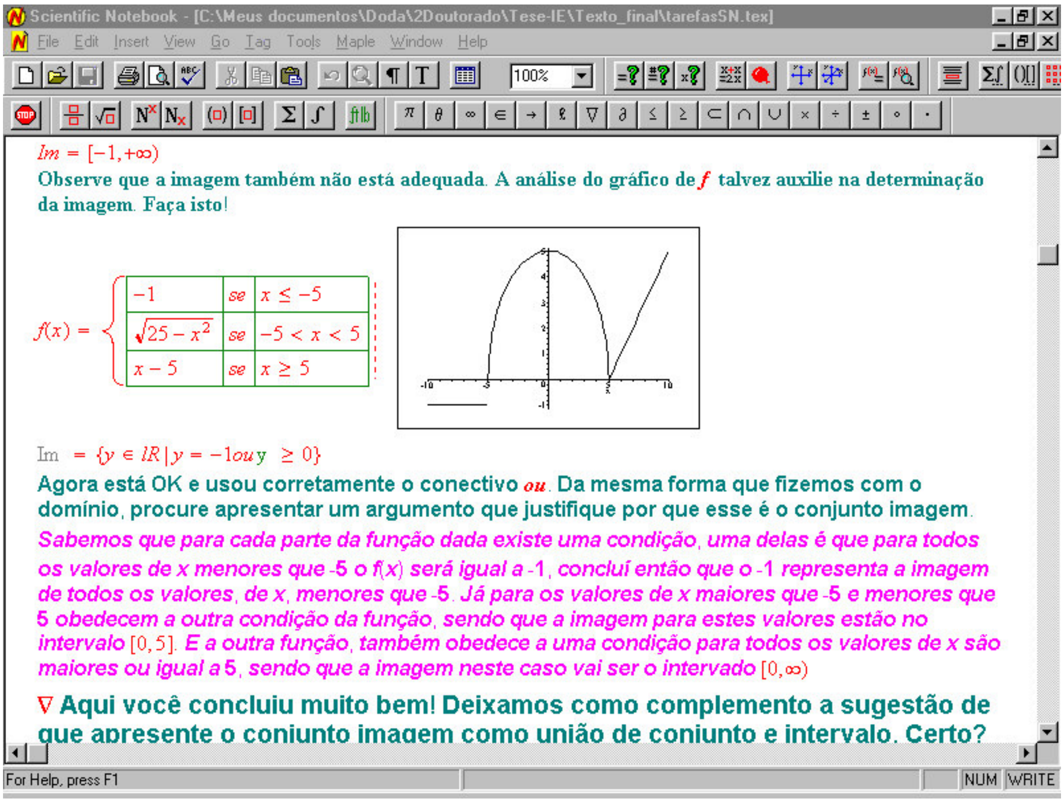
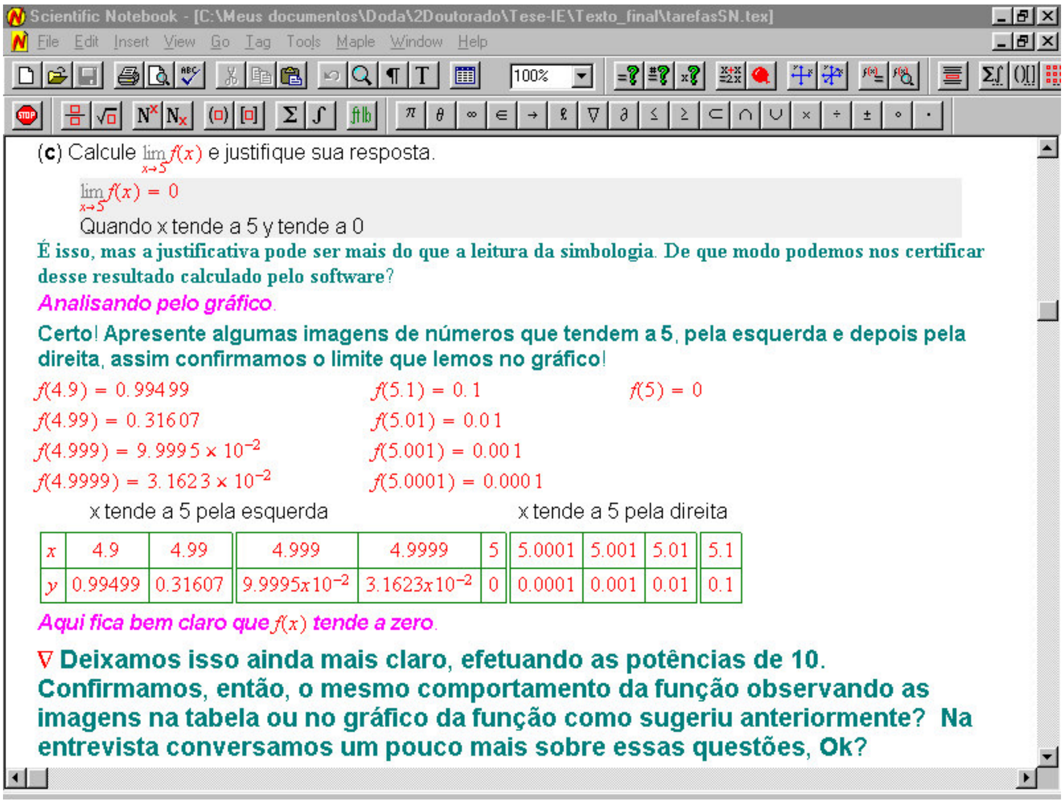


Figura 9: Sobre a imagem de uma função

Com essa estratégia metodológica, podemos ir além do julgamento de certo ou errado de uma resposta apresentada. Ao solicitar ao aluno que retome o que respondeu, sugerindo, quando possível, que analise a mesma situação sob outro ponto de vista, podemos promover novas reflexões, que auxiliam no esclarecimento da própria questão e na compreensão do objeto em estudo.

Nos questionamentos e na solicitação de justificativas, sugerimos, em algumas situações, diferentes abordagens para a resolução das questões, com o propósito de auxiliar no entendimento dos significados. Em geral, os alunos iniciam com procedimentos algébricos: resolvendo uma equação ou aplicando uma fórmula, mas, ao utilizarem outras formas, como a simulação numérica, tradução da simbologia com as próprias palavras ou a visualização geométrica, aumentam as possibilidades de compreensão. Uma tal situação pode ser observada na figura 10.


Scientific Notebook - [C:\Meus documentos\Doda\2Doutorado\Tese-IE\Texto_final\tarefasSN.tex]

File Edit Insert View Go Tag Tools Maple Window Help

(c) Calcule $\lim_{x\to 5} f(x)$ e justifique sua resposta.

$\lim_{x\to 5} f(x) = 0$

Quando x tende a 5 y tende a 0

É isso, mas a justificativa pode ser mais do que a leitura da simbologia. De que modo podemos nos certificar desse resultado calculado pelo software?

Analisando pelo gráfico.

Certo! Apresente algumas imagens de números que tendem a 5, pela esquerda e depois pela direita, assim confirmamos o limite que lemos no gráfico!

$f(4.9) = 0.99499$ $f(5.1) = 0.1$ $f(5) = 0$

$f(4.99) = 0.31607$ $f(5.01) = 0.01$

$f(4.999) = 9.9995 \times 10^{-2}$ $f(5.001) = 0.001$

$f(4.9999) = 3.1623 \times 10^{-2}$ $f(5.0001) = 0.0001$

x tende a 5 pela esquerda x tende a 5 pela direita

x	4.9	4.99	4.999	4.9999	5	5.0001	5.001	5.01	5.1
y	0.99499	0.31607	$9.9995x10^{-2}$	$3.1623x10^{-2}$	0	0.0001	0.001	0.01	0.1

Aqui fica bem claro que $f(x)$ tende a zero.

∇ Deixamos isso ainda mais claro, efetuando as potências de 10. Confirmamos, então, o mesmo comportamento da função observando as imagens na tabela ou no gráfico da função como sugeriu anteriormente? Na entrevista conversamos um pouco mais sobre essas questões, Ok?

Figura 10: Abordagens para limites

Nesse caso, o estudante apresenta uma resolução, obtida com o *software* e cuja justificativa é simplesmente a tradução da simbologia expressa. Com a solicitação de nova forma de argumento, sugere uma exploração do gráfico como possibilidade de confrontar o resultado obtido e, no segundo aperfeiçoamento da tarefa, aceita a sugestão de uma análise segundo uma abordagem numérica da mesma questão.

A metodologia do Mecam permite também investigar sobre o entendimento da aplicação de procedimentos de resolução. Na figura 11 temos uma situação onde a resolução é perfeitamente correta, porém o aluno não demonstra compreender o que executa com seus cálculos.

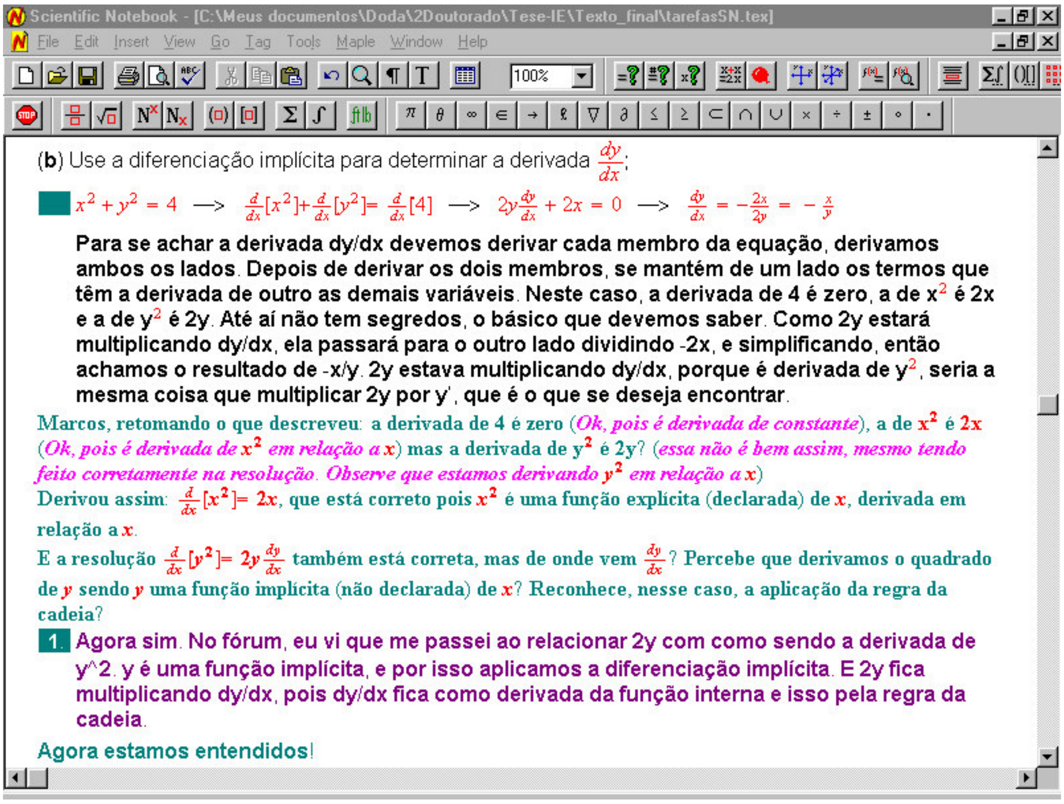


Figura 11: Aplicação de um algoritmo

Novamente, numa abordagem simples de apresentação e correção de uma questão, não perceberíamos que o estudante, apesar de aplicar adequadamente o algoritmo, não tem entendimento do processo que executa. Ao argumentar sobre sua resolução, descreve corretamente os passos do algoritmo, mas quando justifica os resultados das derivadas, podemos perceber que não compreende o significado de função implícita e a regra da cadeia. Nossa orientação e questionamento, nesse caso, podem chamar para o devido esclarecimento, como ocorreu nessa tarefa de aprendizagem.

Na metodologia do Mecam não consideramos, portanto, questionamentos ou respostas padronizadas. Procuramos respeitar os diferentes níveis dos estudantes e orientá-los de acordo com o que oferecem como possibilidades. Cada conquista traduz um entendimento a mais e alimenta o passo seguinte. A motivação é, segundo Maturana (1999), impulsionada pelo motor afetivo, de tal forma que o sujeito esteja disposto a buscar respostas a suas dúvidas e seja capaz de construir conhecimentos a partir dos que possui.

Com os casos apresentados pretendemos dar uma idéia mais clara sobre algumas possibilidades da metodologia do Mecam. No capítulo das análises, apresentamos outras situações que, juntamente com essas e com o Anexo 2, esclarecem a metodologia que propomos.

Em relação ao tempo destinado às atividades, não fixamos prazos finais para o término de cada uma, mas uma data-limite para a primeira entrega de cada atividade. A partir desta, a elaboração das demais e os aperfeiçoamentos sugeridos para cada nova etapa ocorrem simultaneamente. O prazo final para os aprimoramentos é agendado para uma semana antes do término do curso, quando os alunos se apresentam para a entrevista presencial. Nessa ocasião, ocorre também, na presença do aluno e com a devida justificativa, a confirmação da aprovação ou reprovação no curso realizado no Mecam.

Os alunos aprovados no Mecam revertem sua condição de reprovados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, e os reprovados têm como opção retornar à sala de aula ou dar continuidade aos estudos em nova edição do Mecam.

De qualquer forma, pretendemos que – talvez mais importante que constituir uma opção de ensino a distância para alunos reprovados, com determinado perfil – seja a proposta metodológica do Mecam uma possibilidade de gerar um processo reflexivo que auxilie os alunos na construção de seus conhecimentos, mas que, além disso, os leve a assumirem sua parcela de responsabilidade pela própria aprendizagem, desenvolvendo autonomia e construindo um método próprio de estudos, que sobrepuje a resolução de exercícios por práticas mecânicas. Esperamos, assim, colaborar com os estudantes no desenvolvimento da capacidade de aprender a aprender.

3 COMO A TEORIA DA EQUILIBRAÇÃO PODE VISIBILIZAR OS PROCESSOS DE APRENDIZAGEM

Uma teoria é como uma lente através da qual podemos interpretar e explicar a realidade. Em nosso meio educacional, as correntes do empirismo e do apriorismo abrangem a maior parte das explicações do processo de aprendizagem (BECKER, 1993). Considerando a relação sujeito-objeto, condição necessária para que haja conhecimento, essas duas correntes são opostas. Pela interpretação empirista, o conhecimento está no objeto enquanto que pela apriorista o conhecimento está no sujeito.

Jean Piaget, entendendo a insuficiência explicativa tanto do empirismo quanto do apriorismo, formula uma terceira teoria do conhecimento: o construtivismo. Piaget dedicou praticamente toda sua vida pesquisando sobre a maneira como ocorre o desenvolvimento das estruturas mentais responsáveis pelo conhecimento e entende que se produzem e se desenvolvem na interação, no encontro entre sujeitos e objetos.

3.1 A supervalorização do objeto em detrimento do sujeito

Na visão empirista, que predomina em nossos sistemas educacionais, a aprendizagem é avaliada pela modificação dos comportamentos em tempos distintos de observação. Nessa corrente, também identificada como comportamentalismo, pois está fundamentada na psicologia behaviorista instaurada por Watson (1878-1958) e Skinner (1904-1990), a aprendizagem é explicada pela relação entre dois elementos: estímulo e resposta, tidos como suficientes para produzir uma espécie de medida da aprendizagem.

O estímulo comporta as forças do meio, e a resposta é o comportamento associado ao estímulo. Para Dolle (1993), a princípio, ao se falar em interação é sempre possível pensar numa relação dupla e assim expressar a interação entre o sujeito e o meio, por uma representação do tipo *sujeito* ↔ *meio*, e considerar, nesse caso, que a direção ← indica o estímulo, a ação que o meio exerce, e a direção → exprime a reação do sujeito a essa ação. Mas devemos notar aí que o sujeito encontra-se como um objeto sobre o qual se exerce uma ação do exterior, e sua condição é limitar-se a reagir. “Neste caso, onde está a troca [...] se o sujeito é concebido unicamente como algo que reage, que lugar ele ocupa e, por outro lado, qual é a sua parte de iniciativa sobre o meio?” (DOLLE, 1993, p. 26).

De acordo com essa teoria, o que conhecemos provém de estímulos dos objetos e é capturado pela percepção e representado através de imagens mentais. O conhecimento está no objeto; o homem apenas capta o conhecimento a partir da percepção, “é o objeto que imprime o conhecimento no sujeito através do esquema estímulo-resposta, ou mesmo resposta-reforço”. (FRANCO, 1999, p. 18-19). Uma representação mais adequada para a relação sujeito-meio ou sujeito-conhecimento, conforme o empirismo é, portanto, *sujeito* ← *meio* ou *sujeito* ← *objeto* = *conhecimento*, que indica a ação unidirecional do meio sobre o sujeito e não uma interação.

É inegável a importância da experiência no desenvolvimento das estruturas cognitivas, tanto que, para Piaget e Inhelder (1989), ela é um dos fatores do desenvolvimento.[12] Mas a questão que se coloca é "saber como é que o meio exerce a sua ação e como o sujeito registra os dados da experiência". (PIAGET, 1982, p. 337). Esse, conforme Piaget, "é o ponto em que os fatos obrigam a divergir do associacionismo" (1982, p. 337) e é nesse sentido que o esquema *estímulo → caixa-preta → resposta* tem sido tomado como representando a idéia behaviorista do homem, uma caixa preta dentro da qual nada se enxerga.

Piaget considera a importância do papel da história vivida pelo sujeito e da ação das experiências passadas sobre a experiência atual em todas as fases de desenvolvimento, isto é, desde a primeira fase do período sensório-motor até o período das operações formais, quando se acrescenta às condutas a invenção de novos meios por dedução ou combinação mental. Também nessa fase, "onde se poderia pôr em xeque a experiência pelo trabalho do espírito" (PIAGET, 1982, p. 339), a experiência tem seu papel, pelo menos no que diz respeito ao conteúdo das relações elaboradas pelo sujeito.

Ao mesmo tempo em que destaca e justifica a necessidade da experiência para o desenvolvimento da inteligência, Piaget aponta também para a insuficiência das hipóteses empiristas:

> [...] no empirismo há muito mais do que uma simples afirmação do papel da experiência; o empirismo é, antes de tudo, certa concepção da experiência e da sua ação. Por uma parte tende a considerar a experiência como algo que se impõe por si mesmo, sem que o sujeito tenha que organizá-la, isto é, como se ela fosse impressa diretamente no organismo sem que uma atividade do sujeito seja necessária à sua constituição. Por outra parte, e por conseqüência, o empirismo encara a experiência como existente em si mesma, quer ela deva o seu valor a um sistema de *coisas* exteriores, totalmente feitas, e de relações dadas a essas coisas (empirismo metafísico), quer consista num sistema de hábitos e de associações auto-suficientes (fenomenismo). (PIAGET, 1982, p. 339).

[12] Maturação, experiência, transmissão social e equilibração, aos quais retornamos na p. 92.

Na interpretação de Piaget, quanto mais a inteligência se desenvolve, mais ativa e compreensiva se torna a experiência. Dessa forma, a experiência não é auto-suficiente. “É na medida em que o sujeito é ativo que a experiência se objetiva [...]. A objetividade da experiência é uma conquista da acomodação e da assimilação combinadas, isto é, da atividade intelectual do sujeito e não um dado que se lhe impõe de fora”. (PIAGET, 1982, p. 345), mas que se produz mediante mecanismos de equilibração internos.

No que se refere à educação, é bastante forte o reflexo do behaviorismo nas práticas pedagógicas. De acordo Dolle (1993), o professor organiza as informações a transmitir em forma de enunciados, princípios ou teoremas. Vai então apresentá-las aos alunos com explicações que favoreçam a absorção dos conhecimentos e estimulem a atividade dos alunos, e estes, em troca, transformarão as informações como respostas de questões-controle. A aprendizagem, nessa concepção, é entendida como uma modificação do comportamento do aluno, que é gerada pelo professor.

Essa prática metodológica tem sua origem nos princípios pedagógicos do filósofo Friedrich Herbart (1776-1841). Segundo Ghiraldelli (2000), Herbart propôs uma teoria da aprendizagem consolidada pelo método de ensino dos *cinco passos formais da instrução*: preparação, apresentação, associação, generalização e aplicação. Por esse método, cada aula começaria com a recordação dos tópicos estudados anteriormente (preparação); a seguir o professor apresentaria o novo conteúdo (apresentação); depois, se daria a comparação entre o novo conteúdo e os anteriores (associação) por meio de percepções, sensações e associações iniciais; como quarto passo, haveria a formação de conceitos abstratos e gerais (generalização); por fim, o professor proporia exercícios para treinamento e verificação da aprendizagem (aplicação). Os *cinco passos* indicavam um modo simples de conduzir o ensino, sendo esse um dos motivos do seu sucesso entre os professores, que facilmente o transformam num modo *natural de dar aula* – o método expositivo que perdura, com vigor, até os nossos dias. No método expositivo cabe ao professor o papel de favorecer os estímulos, aos quais o aluno responde.

No entanto, para Piaget (1995a), o esquema estímulo-resposta é inteiramente incapaz de explicar a aprendizagem. Quando pensamos em estímulo-resposta, em geral pensamos primeiro no estímulo depois na resposta que produziu. Na interpretação de Piaget, a resposta existia primeiro, pois um estímulo só é assim considerado se for significativo e somente se torna significativo se há uma estrutura que permite a sua assimilação, "uma estrutura que pode acolher este estímulo, mas que, ao mesmo tempo, produz a resposta". (PIAGET, 1995a, p. 4). Dessa forma não é o estímulo que produz a resposta, mas a estrutura que permite a sua assimilação. Talvez o esquema estímulo-estrutura-resposta aproxime melhor uma explicação da aprendizagem, e Piaget propõe ainda que o esquema não seja unidirecional, mas circular, expressando, dessa forma, a aprendizagem como um processo contínuo sem início ou fim demarcados.

3.2 A supervalorização da razão em detrimento do objeto

O apriorismo é uma perspectiva na qual o desenvolvimento intelectual é concebido como resultado de um processo "gradual de maturação de uma série de estruturas pré-formadas na constituição psicofisiológica do próprio sujeito".

(PIAGET, 1982, p. 352). Nessa corrente epistemológica, encontramos a psicologia da *Gestalt*, ou teoria da forma, que tem em Wertheimer, Köhler e Lewin seus expoentes.

Cada invenção da inteligência é explicada por uma estruturação renovada e endógena da percepção ou do sistema de conceitos e relações. "As estruturas que assim se sucedem constituem sempre totalidades, isto é, não podem reduzir-se a associações ou combinações de origem empírica." (PIAGET, 1982, p. 353).

O conhecimento, segundo essa corrente epistemológica, produz-se por uma capacidade interna e inata do sujeito, ou seja, na relação sujeito-objeto, *sujeito* → *objeto* é o esquema que expressa essa idéia, onde o conhecimento depende mais do sujeito, ou seja, há a supervalorização do sujeito em detrimento do objeto.

Segundo Piaget, é possível concordar com a teoria da forma em dois pontos essenciais. Primeiro, com a idéia de que toda conduta onde intervém a compreensão de uma situação dada manifesta-se como totalidade e não como associações ou sínteses entre elementos anteriormente isolados. O segundo ponto de concordância com as interpretações da *Gestalt* deve-se à rejeição de toda e qualquer faculdade ou energia especial de organização, na medida em que essa teoria busca "encontrar as raízes das estruturas intelectuais nos processos biológicos concebidos como sistemas de relações". (PIAGET, 1982, p. 355).

Para Piaget, a teoria da forma, procurando defender a atividade interna da percepção e da inteligência contra o mecanismo das associações externas, situou o princípio da organização no interior dos sujeitos. Porém, fechou-se "num formalismo estático concebido como preexistente ou elaborado à margem da nossa intencionalidade". (PIAGET, 1982, p. 355). É uma idéia de estruturação, porém sem processo.

O reflexo do apriorismo, que considera a estrutura como o centro do processo de conhecimento, deveria, de acordo com Franco (1999), constituir práticas pedagógicas centradas no aluno. Mas na visão inatista, se o aluno não tem o conhecimento, mas nasceu com instrumentos perceptivos ou cognitivos, o que é necessário é que o professor lhe forneça o conteúdo com boas doses de motivação, provocando, assim, o interesse do aluno em aprender. Com isso as práticas continuam semelhantes às dos professores com concepções empiristas.

Assim, as práticas pedagógicas oriundas de qualquer das duas correntes estão centradas basicamente na exposição oral do professor, e os alunos permanecem passivos, reproduzindo apenas modelos através da prática de exercícios.

3.3 A opção pelas orientações do construtivismo

Percebemos, pelo que expomos antes, que Piaget chama a atenção para o fato de que as duas correntes têm parte de razão: o empirismo, ao afirmar que o conhecimento vem da experiência, pois não se constrói conhecimento sem contato com o meio exterior; o apriorismo, por sua vez, ao afirmar que o conhecimento se torna possível por processos internos. Ao mesmo tempo, Piaget reconhece a insuficiência de ambas na explicação do conhecimento e postula uma terceira formulação, explicando o desenvolvimento das estruturas do conhecimento.

Para Piaget, o princípio básico para essa questão é que o conhecimento não está nem no sujeito nem no objeto, mas é construído na interação do sujeito com o objeto. Só agora o esquema *sujeito* $\leftrightarrow$ *meio* ou *sujeito* $\leftrightarrow$ *objeto* tem o seu real significado: o sujeito age sobre o objeto e sofre a ação do objeto. É interagindo que o sujeito produz sua capacidade de conhecer, ao mesmo tempo em que produz o próprio conhecimento.

Não temos em educação soluções ideais, nem práticas pedagógicas definitivas (e nem cabem), considerando o processo continuamente cambiante, como refere Maturana (1999), que resulta do ato do viver do ser humano na construção da sua história. Mas, partindo do pressuposto da interação, buscamos repensar os fundamentos de proposições educativas capazes de produzir aprendizagens, como efeitos de desenvolvimento das estruturas do conhecimento. Especificamente, nesta tese, procuramos verificar como a interação em um ambiente, que articula ferramentas tecnológicas com uma metodologia específica, possibilita evidenciar a aprendizagem de noções matemáticas decorrentes do desenvolvimento cognitivo.

A Epistemologia Genética, através da teoria da equilibração, abre a possibilidade de compreender como as ações de sujeitos, na resolução de problemas específicos de matemática, podem revelar níveis de conhecimentos mais elaborados, a que denominamos aprendizagem.

A questão que Piaget buscou entender e explicar, isto é, como é possível alcançar o conhecimento, inspirou-o na construção de uma epistemologia genética, um modo de compreender os processos mentais que, ao se organizarem de forma que produzam equilíbrios mais ou menos estáveis, originam o conhecimento. Conhecimento é entendido por Piaget como resultado da atividade das estruturas mentais, no sentido de organizar, estruturar e explicar, porém a partir da ação sobre o objeto do conhecimento.

> Para Piaget, não há conhecimento sem conceito, portanto ele parte da ação do sujeito sobre o meio que vive, mas não ocorre sem a estruturação do vivido. [...] Assim, a idéia básica de que conhecer significa inserir o objeto do conhecimento em um sistema de relações, partindo de uma ação executada sobre o objeto, é válida tanto para a criança que organiza seu mundo quanto para o cientista que descobre e explica o campo magnético. (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988, p. 4-5).

E o que são os objetos do conhecimento? São os objetos, animados ou inanimados, do mundo, do meio que nos rodeia (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988). No que se refere a esta pesquisa, os objetos de conhecimento são os processos de aprendizagem dos alunos do Mecam na (re)construção de objetos matemáticos, que, por sua vez, são noções e conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

3.4 Aprendizagem matemática e a compreensão

As concepções de aprendizagem apresentam variações mais ou menos profundas, de acordo com as concepções epistemológicas que as fundamentam. O conceito de aprendizagem, na epistemologia genética, envolve outros dois conceitos que distinguem dois tipos de aprendizagem: aprendizagem no sentido estrito e aprendizagem no sentido amplo.

Piaget e Gréco (1974) denominam uma aprendizagem de *aprendizagem no sentido estrito* ou *restrito* (*stricto sensu*) quando o resultado, que pode ser um conhecimento ou um modo de atuação, é adquirido em função da experiência, o que pode ocorrer de duas formas: por experiência física ou por experiência lógico-matemática.

> A experiência física consiste, com efeito, em agir sobre os objetos de maneira a descobrir as propriedades, que ainda são abstratas nesses objetos como tais: por exemplo: sopesar um corpo a fim de avaliar seu peso. A experiência lógico-matemática consiste igualmente em agir sobre os objetos, mas de forma a descobrir as propriedades que estão, pelo contrário, abstratas das ações mesmas do sujeito, de tal forma que, num certo nível de abstração, a experiência sobre os objetos se torna inútil e a coordenação das ações basta para engendrar uma manipulação operatória simplesmente simbólica e procedendo assim de uma maneira puramente dedutiva: por exemplo, descobrir que uma classe *B* é igual à soma de suas subclasses separadas *A* + *A*'. (PIAGET; GRÉCO, 1974, p. 37).

A aprendizagem no *sentido amplo* (*lato sensu*) decorre da união das aprendizagens no sentido estrito e das equilibrações (PIAGET; GRÉCO, 1974), a qual pode ser também denominada *desenvolvimento das estruturas de conhecimento*. No texto "Desenvolvimento e Aprendizagem", Piaget (1995a) enfatiza a diferença entre o problema do desenvolvimento em geral e o problema da aprendizagem.

Piaget explica que o desenvolvimento do sujeito é um processo espontâneo, ligado ao desenvolvimento do corpo, do sistema nervoso e das funções mentais, e relacionado com a totalidade das estruturas do conhecimento. A aprendizagem apresenta o caso oposto: em geral, é provocada "por um experimentador psicológico ou por um professor, com referência a algum ponto didático, ou por uma situação externa". (PIAGET, 1995a, p. 1).

A relação que podemos estabelecer sobre esses dois conceitos é o contrário do que muitos pensam. Piaget considera que o desenvolvimento explica a aprendizagem, de modo que o desenvolvimento não é a soma das experiências e aprendizagens. "Na realidade, o desenvolvimento é o processo essencial e cada elemento da aprendizagem ocorre como uma função do desenvolvimento total, em lugar de ser um elemento que explica o desenvolvimento." (PIAGET, 1995a, p. 1). Dessa forma,

> (...) conhecer um objeto, conhecer um acontecimento não é simplesmente olhar e fazer uma cópia mental, ou imagem do mesmo. Para conhecer um objeto é necessário agir sobre ele. Conhecer é modificar, transformar o objeto e compreender o processo dessa transformação e, conseqüentemente, compreender o modo como o objeto é construído. (PIAGET, 1995a, p. 1).

No que se refere à aprendizagem da matemática, podemos aproximar esse quadro pelo objetivo da educação matemática, que, segundo Arcavi (1998), é criar estratégias para que o aluno gere e construa compreensão, ou seja, aprendizagens que possam ser reveladoras de um processo de desenvolvimento. Apesar de ser a compreensão o objetivo da educação matemática e, como tal, suposto norteador do fazer pedagógico, ela marca o diferencial entre versões divergentes na proposição e adoção de condutas de ensino e aprendizagem de matemática.

De um lado, vemos a postura centrada na destreza de cálculos caracterizando o ensino-treinamento através de seqüências articuladas de exercícios e problemas projetados, cada qual, para exercitar uma destreza específica; de outro, a postura condizente com o objetivo da educação matemática caracterizando práticas pedagógicas que possibilitam aos alunos também a destreza algébrica e numérica, mas, especialmente, condições de gerar compreensão e sentido daquilo que aprendem (ARCAVI, 1998).

Para Piaget a compreensão está vinculada ao fazer. Considera que

> [...] fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação. (PIAGET,1978a, p. 177).

A tomada de consciência da ação é que leva à compreensão. Antes, pode ocorrer um saber-fazer, um êxito prático, mas sem conceituação. Com a tomada de consciência, o fazer é reconstruído no nível da representação, no nível da compreensão. Ocorre então a passagem da ação para a conceituação, que passa a influenciar a ação. A conceituação fornece à ação um aumento de poder de coordenação e, a partir de determinado nível, planeja a ação.

As coordenações das ações, como um saber-fazer material e causal, podem levar a conhecimentos de outro nível. Isso porque “a ação não consiste em sucessão linear de movimentos, mas de esquemas, como ciclos relativamente fechados que buscam satisfazer necessidades”. (BECKER, 1993, p. 94). Funcionando, esses esquemas se conservam e “sua utilização dos objetos volta a integrá-los nesses ciclos, o que é um processo de assimilação cognitiva”. (PIAGET, 1978a, p. 177).

Piaget (1978a) chamou de *implicações significantes* o exprimir e reunir significações num modo de conexão, o que considera a caracterização mais ampla dos estados de consciência, desde os elementares até os das mais elevadas conceituações. Nesse caso, tudo o que se refere à ação pode ser traduzido por representações significativas por meio de instrumentos semióticos, como a linguagem ou a imagem, “mas o núcleo funcional das próprias coordenações, que constitui o essencial e que, no plano da ação, permanece de natureza causal, encontra seu equivalente no plano do pensamento, naquilo que é de fato a herança mais direta da ação: o sistema das coordenações operacionais, que transforma os objetos do pensamento assim como a ação modifica os objetos materiais” (PIAGET, 1978a, p. 178). Nesse sentido, operação não é uma representação da ação, mas ainda uma ação, pois constrói novidades, embora de outro tipo. É uma ação *significante*, pois utiliza meios de natureza implicativa e não mais de natureza causal.

Podemos então pensar na conceituação como “uma espécie de tradução da causalidade em termos de implicação [...] e, sendo a implicação uma conexão entre significações” (PIAGET, 1978a, p. 178-179), o sistema de implicações significante fornece as razões do sucesso. Assim, resume Piaget: “compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso, o que é, certamente, uma condição preliminar da compreensão, mas condição que esta ultrapassa, visto que atinge um saber que precede a ação e pode abster-se dela”. (PIAGET, 1978a, p. 179). Para nosso estudo, a transformação de um saber-fazer para um explicar será indicativo de um desenvolvimento das noções pesquisadas.

Percebemos, então, não somente a coerência do objetivo da educação matemática, proposto por Arcavi e que é também o entendimento de Bishop (apud ARCAVI, 1998), quando refere que, “em matemática, compreender uma idéia (ou uma expressão, ou conceito) é conectar o significado dessa idéia com o significado de outra idéia em matemática, em outro domínio do conhecimento, ou na vida diária” (BISHOP apud ARCAVI, 1998, p. 83), como numa rede onde cada noção constitui um nó. Concordamos também com Bettencourt e Schoenfeld (apud ARCAVI, 1998) quando acrescentam que, “além de compreender, também está implicado inserir essas idéias em uma comunidade determinada, com suas práticas, seus instrumentos de pensamento, suas crenças, seus modos de discurso e ação”. (BETTENCOURT; SCHOENFELD apud ARCAVI, 1998, p. 83).

Reforçamos, com isso, nosso propósito de promover a melhoria das condições de aprendizagem da matemática no ambiente de aprendizagem do Mecam, cuja metodologia, inspirada no método clínico, considera a exploração dos significados uma possibilidade de favorecer a compreensão das noções e dos conceitos matemáticos.

Se a aprendizagem significativa[13] é resultado de um desenvolvimento cognitivo, como verificar se a forma como os alunos do Mecam respondem às questões é reveladora de um processo de desenvolvimento cognitivo? Com respeito a isso, a teoria da equilibração pode trazer indicadores de processos construtivos, que podem evidenciar a aprendizagem e auxiliar assim a pensar em como o ambiente proposto, que se configura de uma articulação de ferramentas tecnológicas e de uma metodologia de intervenção, é suscetível de visibilizar processos de desenvolvimento.

3.5 O processo da equilibração

A atividade cognitiva constitui um esforço contínuo e permanente de compreensão do mundo. O sujeito, desde o seu nascimento, busca na totalidade indiferenciada diferenciações cada vez mais específicas. Em cada passo do caminho do seu desenvolvimento, interage a partir do seu sistema de significações. Porém, se tudo está em equilíbrio, nada é capaz de mudar a estrutura assimilativa e, em decorrência, as formas de significação. O novo só é percebido como tal quando algo perturba seu equilíbrio.

[13] Aprendizagem significativa tem, nesse contexto, o sentido de compreender através da busca dos significados de noções e conceitos.

Para Piaget e Inhelder (1989), existem quatro fatores que juntos podem explicar o desenvolvimento das estruturas cognitivas: a maturação, a experiência física, a transmissão social e a equilibração.

A maturação interna do sistema nervoso cujo desenvolvimento é uma continuação da embriogênese tem um papel indispensável no desenvolvimento cognitivo, especialmente nos dois primeiros anos do desenvolvimento da criança; a experiência, física ou lógico-matemática, é objetivamente um fator básico do desenvolvimento cognitivo, que resulta das ações exercidas sobre os objetos, de modo a descobrir as propriedades desses objetos ou das ações realizadas; a transmissão social é também fundamental pela valiosa informação que pode ser gerada via linguagem ou via educação. Entretanto, para que a transmissão seja possível, é necessário que uma estrutura possibilite ao sujeito assimilar a informação. A equilibração é, então, o quarto fator, que se acresce aos outros três, "pois, visto que já existem devem de algum modo estar equilibrados entre si". (PIAGET, 1995a, p. 4). E há ainda uma segunda e fundamental razão para a equilibração, como fator de desenvolvimento, que consiste no fato de que, no ato de conhecer, o sujeito é ativo e assim se defrontará com perturbações externas, às quais reagirá buscando compensações, a fim de recompor seu equilíbrio.

O progresso dos conhecimentos, para Piaget (apud INHELDER; GARCIA; VONÈCHE, [s.d.]), não decorre de uma programação hereditária inata, conforme concepções aprioristas, nem de um amontoado de experiências empíricas, conforme concepções empiristas, mas resulta de uma auto-regulação, que podemos designar como uma equilibração, que é um processo de organização interna capaz de conduzir a formas de raciocínio, a equilíbrios aproximados a outros, porém, qualitativamente diferentes, como num processo de otimização.

A equilibração, portanto, não conduz ao retorno do equilíbrio anterior, mas conduz, em geral, a um estado melhor em relação àquele do qual partimos, a formas melhores de equilíbrio, ou, como designou Piaget (1976), a equilibrações majorantes.

Mas falar em equilibração implica falar em desequilíbrios. Estes são as fontes de progresso no desenvolvimento, pois impulsionam o sujeito a ultrapassar seu estágio atual, procurando por avanços e novas direções. São, portanto, as fontes de equilibrações majorantes. Segundo Piaget, os desequilíbrios, também entendidos como contradições, e os conflitos momentâneos representam

> [...] um papel desencadeador, pois sua fecundidade se mede pela possibilidade de superá-los – quer dizer, sair deles. É, pois, evidente que a fonte do progresso deve ser procurada na reequilibração, naturalmente, no sentido, não de um retorno à forma anterior de equilíbrio, cuja insuficiência é responsável pelo conflito ao qual esta equilibração provisória chegou, mas de um melhoramento dessa forma precedente. (PIAGET, 1976, p. 19).

A equilibração tem os mecanismos da assimilação e acomodação como seus componentes fundamentais.

A assimilação ocorre quando o sujeito incorpora os objetos aos seus esquemas, utilizando as estruturas cognitivas que possui. O sujeito assimila os novos significados como função dos que já existem em seus sistemas de significação. A assimilação é, pois, o mecanismo que permite ao sujeito conhecer o mundo. Todas as coisas, idéias, ações ou reações de outros ou de si próprio tendem a ser explicadas, num primeiro momento, pelo próprio sujeito, de acordo com suas estruturas cognitivas atuais. Segundo Rangel (1992), isso nos leva a interpretar uma situação nova de acordo com as nossas concepções e hipóteses atuais. Na interpretação de Dolle (1979), o sujeito, ao estabelecer relações com o objeto, capta o real num dado instante T_1, em função do que ele é nesse instante, das estruturas S_1 que pôde estabelecer anteriormente ao instante T_1. Assim é o que Piaget diz quando declara que o sujeito assimila o exterior às suas estruturas atuais.

A acomodação ocorre quando, nos sistemas de significação existentes, há insuficiências para a incorporação das novas informações. A acomodação é, então, o ajustamento de esquemas ou estruturas cognitivas às resistências impostas pelo objeto que se pretende assimilar. O sujeito modifica, então, suas hipóteses e concepções anteriores, de modo a tornar possível a assimilação, ou seja, o sujeito age no sentido de transformar-se em função da resistência imposta pelo objeto.

Para a formulação da teoria da equilibração, Piaget recorreu à assimilação e à acomodação, como dois postulados, enunciando-os assim: primeiro, "todo esquema de assimilação tende a alimentar-se, isto é, a incorporar elementos que lhe são exteriores e compatíveis com sua natureza" (PIAGET, 1976, p. 14) e, segundo, "todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, ou seja, a se modificar em função de suas particularidades, mas sem com isso perder sua continuidade (portanto, seu fechamento enquanto ciclo de processos independentes) nem seus poderes anteriores de assimilação". (PIAGET, 1976, p.14).

Essas duas afirmações de que a equilibração resulta da necessidade da atividade do sujeito, como impulsionador à pesquisa, e da necessidade de um equilíbrio entre assimilação e acomodação revelam a descrição funcional do equilíbrio cognitivo.

As equilibrações são, portanto, relativas ao equilíbrio entre assimilação e acomodação, e Piaget distingue três formas de equilibração: (i) entre o sujeito e os objetos, ou seja, a equilibração entre a assimilação do objeto aos esquemas de ação do sujeito e acomodação desses esquemas ao objeto; (ii) entre esquemas ou subsistemas que podem ser evidenciados quando a acomodação dos esquemas à realidade exterior está exposta à intervenção de múltiplos obstáculos inesperados; (iii) entre a totalidade de um sistema e suas partes, que é a equilibração da diferenciação e da integração, através da qual os subsistemas são integrados no todo. No caso específico da presente tese, interessam os processos de desequilíbrios e reequilibrações advindos da interação com noções matemáticas. Um nível mais elaborado de equilibração teria efeito na aprendizagem, ou seja, uma aprendizagem é possibilitada pelas condições de desenvolvimento cognitivo.

Para dar uma idéia do movimento progressivo da equilibração, Montangero e Naville (1998) resumem o modelo equilibração da seguinte forma: “As perturbações cognitivas provocam um desequilíbrio (causa ou desencadeador da equilibração) que engendra regulações (meios pelos quais a equilibração se realiza). As regulações visam compensar as perturbações, mas, fazendo isso, geram novas construções.” (MONTANGERO; NAVILLE, 1998, p. 156). Os termos *perturbações*, *regulações* e *compensações* constituem os componentes do processo da equilibração.

As perturbações são obstáculos às assimilações e ocorrem, portanto, quando o meio resiste ao sujeito. Vejamos: para Piaget, “[...] um esquema de assimilação confere significação aos objetos assimilados e determina assim objetivos definidos às ações que a eles se relacionam (pegar, balançar, etc., no plano do sucesso prático, ou compreender uma relação, etc., no plano da representação)”. (PIAGET, 1976, p. 24). Um obstáculo é, então, algo que impede de atingir um objetivo. Mas os obstáculos realmente caracterizam-se como perturbações quando levam a regulações, sendo estas reações às perturbações e consistem na retomada de uma ação com modificação em relação ao seu resultado anterior. As perturbações são classificadas em dois grupos: o das perturbações que se opõem às acomodações e o das lacunas.

As perturbações que se opõem às acomodações ocorrem por resistência dos objetos, por fatos que contradizem um julgamento, são as causas de erros e fracassos à medida que o sujeito se conscientiza disso. As regulações que correspondem a essa classe de perturbações compreendem *feedbacks* negativos. O *feedback*[14] negativo consiste numa retomada da ação no sentido da sua correção, "afastando o obstáculo ou modificando seus esquemas". (PIAGET, 1976, p. 25).

As lacunas são as perturbações, situações que impedem a chegada a um objetivo, "que deixam as necessidades insatisfeitas e se traduzem pela insuficiente alimentação de um esquema". (PIAGET, 1976, p. 25). Mas não é qualquer lacuna que constitui uma perturbação: "mesmo um homem de ciência não é em nada motivado pelo campo considerável de suas ignorâncias, porque se trata de domínios que não lhe concernem". (PIAGET, 1976, p. 25). A lacuna é, portanto, perturbação quando se relaciona a um esquema de assimilação já ativado. Trata-se, então, "da ausência de um objeto ou das condições de uma situação que seriam necessárias para concluir uma ação, ou ainda da carência de um conhecimento que seria indispensável para resolver um problema". (PIAGET, 1976, p. 25). Nesse caso, o *feedback* positivo é o tipo de regulação correspondente, um prolongamento da atividade assimiladora que incorpora elementos no sentido de reforçar a ação, podendo nesse caso ocorrer uma reincidência do erro.

Assim, a perturbação, diz Piaget (1976), "não é senão um obstáculo produzindo o fracasso de uma assimilação [...] ela pode, pois, desencadear ou não

[14] Piaget (1976) propõe para as regulações os conceitos cibernéticos de *feedback*, cujo "significado mais geral é o de um sistema em que a informação sobre o resultado de um processo ou de uma atividade modifica o seu desenvolvimento ulterior". (PIAGET, apud BECKER, 1993, p. 94, n. 31).

uma regulação, mas pode haver também incompreensão mais ou menos durável da situação, rejeição de um esquema, bloqueio da ação, etc." (PIAGET, 1976, p. 165). Por outro lado, havendo regulação, ela pode ou não ser compensatória, como no caso de um *feedback* positivo que produz o reforço do erro. Assim, não tem sentido falar em regulação se a repetição da ação não provoca nenhuma modificação "e com a ilusória esperança de ser bem sucedida; [...] ainda menos quando o sujeito interessado por um aspecto imprevisto da perturbação, empenha a sua atividade numa outra direção". (PIAGET, 1976, p. 25).

No momento em que surge um fato novo, este pode não produzir nenhuma modificação no sistema cognitivo ou constituir uma perturbação. Quando ocorre a perturbação, a reequilibração que se produz será obtida por condutas que podem ser de três tipos: do tipo alfa, do tipo gama ou do tipo beta.

A conduta do tipo alfa ocorre quando se trata de uma pequena perturbação; aqui a compensação é obtida por meio de simples modificações que o sujeito introduz no sentido inverso da perturbação, de ações empregadas para anular ou neutralizar o efeito de outras. Tais condutas são parcialmente compensadoras e o equilíbrio resultante é instável. Isso pode ocorrer quando, do ponto de vista do sujeito, o problema ou a situação não são suficientemente provocadores, ou, se o são, quando o elemento de perturbação é negligenciado (por um tipo de repressão cognitiva) ou afastado. "No caso de uma característica incompatível com a descrição, o sujeito a negligenciará, ainda que percebida, ou pretenderá levá-la em consideração, mas deformando-a de modo a submetê-la ao esquema retido para a descrição." (PIAGET, 1976, p. 65).

A conduta do tipo beta, ao contrário da alfa, integra o elemento perturbador no sistema. A compensação não consistirá mais em anular a perturbação ou em rejeitar o elemento novo, mas em modificar o sistema, por deslocamento do equilíbrio, até que o fato novo seja assimilável. A descrição será melhorada, e a explicação causal, antes refutada pelo imprevisto, será completada ou reformulada levando em conta o fato novo. O que era perturbador integra-se na estrutura reorganizada, por meio de relações novas que ligam o elemento incorporado aos que já estavam organizados. O remanejamento que se segue na conceituação modifica o sistema inicial de modo mais ou menos profundo. Segundo Montangero e Naville (1998), a perturbação perde, então, sua característica perturbadora, graças à majoração interposta, e é nessa fase da conduta beta que ocorre a equilibração majorante.

A conduta gama é caracterizada por antecipações das variações possíveis, que, por serem previsíveis e dedutíveis, perdem a característica de perturbações. As novidades inserem-se naturalmente no sistema e integram as transformações virtuais. Os problemas e os erros integram-se ao sistema e fazem parte do processo. O problema é naturalmente solucionável (VALENTINI, 2003).

Nessa marcha para um equilíbrio melhor, que é a equilibração cognitiva, Piaget refere que é impossível distinguir nas equilibrações majorantes o que sobressai como compensação, ou seja, da equilibração, e o que é construção, procedendo de iniciativas espontâneas manifestadas por composições novas ou extensão de domínios. Isso porque “toda construção vem inserir-se em processos de reequilibração (remediar certos defeitos ou limitações das construções anteriores ou inserir-se no processo das diferenciações e integrações)” (PIAGET, 1976, p. 42), além de comportar ela mesma suas próprias regulações. De outra parte, a equilibração majorante acarreta a necessidade de novas construções, pois a intervenção de perturbações e as acomodações resultantes geram “conhecimentos, uns relativos aos objetos e outros às próprias ações dos sujeitos, de tal sorte que a reequilibração se torna indissociável de construções". (Piaget, 1976, p. 34).

Com base nessa fundamentação, pensamos ser possível acompanhar, no ambiente Mecam, os processos de equilibração desencadeados nas interações para, de um lado, poder verificar se as interações no ambiente promovem aprendizagem e, de outro, avaliar o ambiente e suas possíveis futuras implementações, com vistas a melhorias que o qualifiquem como ambiente de aprendizagem.

4 O PERCURSO DOS ESTUDOS

A pesquisa que desenvolvemos caracteriza-se como um estudo aplicado através do qual buscamos constituir e experimentar uma proposta pedagógica para fazer frente às dificuldades de aprendizagem observadas nas disciplinas iniciais de matemática em cursos de graduação. Com os resultados buscamos evidenciar e compreender os processos de aprendizagem, à luz da Epistemologia Genética de Piaget, no contexto de aplicação da proposta pedagógica do Mecam. Trata-se, portanto, de uma pesquisa empírica e qualitativa, respaldada na metodologia de pesquisa-ação.

A característica empírica de uma pesquisa, conforme Demo (2001), considera a intenção de levantar dados empíricos ou factuais, e o caráter qualitativo de uma investigação em educação deve-se a alguns aspectos, destacados por Maçada (2001), com base em Bodgan e Biklen, dentre os quais reconhecemos como compatíveis com a nossa pesquisa: a fonte dos dados é o ambiente característico dos sujeitos da pesquisa, a investigação privilegia a diversidade de dados, o interesse do pesquisador pelo processo e não somente pelos resultados, e a tendência em formular mecanismos explicativos, que abordam a importância dos aspectos subjetivos tanto dos sujeitos como dos pesquisadores.

A pesquisa-ação é definida, por Thiollent (1997), como um tipo de pesquisa de base empírica e que é concebida e realizada em função de uma ação ou da resolução de um problema, onde os pesquisadores e os participantes estão envolvidos de modo cooperativo e participativo. Para esse autor, a idéia de pesquisa-ação é favorável em situações onde as pessoas implicadas, pesquisadores e participantes, tenham algo a *dizer* e a *fazer*.

Para Lévy (apud BARBIER, 1996), nas pesquisas utilizadas e concebidas como formas de favorecer mudanças intencionais, o pesquisador intervém de modo militante em função do que define como fim e que resulta de uma atividade de pesquisa onde os atores se debruçam sobre si mesmos. Lévy classifica, nesse caso, a pesquisa-ação de ação-pesquisa, por considerar o caráter prioritário da ação.

Alguns aspectos principais são destacados por Thiollent (1997) sobre a pesquisa-ação como estratégia metodológica, dentre os quais identificamos em nossa pesquisa: a ampla interação entre os pesquisadores e as pessoas implicadas na situação investigada, o objeto de investigação constituído pela situação e pelos problemas encontrados nessa situação, o objetivo de resolver ou esclarecer os problemas e a intenção de aumentar o conhecimento dos pesquisadores, bem como o conhecimento ou o nível de consciência das pessoas consideradas na situação.

A pesquisa-ação é voltada para a diversidade das áreas de atuação, e encontra, como pesquisa aplicada, a educação como uma de suas áreas prediletas. Uma das justificativas desse fato "consiste na constatação de uma desilusão para com a metodologia convencional, cujos resultados, apesar da aparente precisão, estão muito afastados dos problemas urgentes da situação atual da educação". (Thiollent, 1997, p. 75). A concepção de conhecimento, que seja também ação, chama por pesquisas que não se limitem à descrição de situações de dificuldades ou a levantamentos de resultados de desempenhos, mas que delineiem um ideal e que contribuam para a transformação de uma situação. Podemos pensar nas ações da pesquisa como fontes de novas estratégias pedagógicas, criadoras de novos possíveis que visem enfrentar problemas de aprendizagem ou preencher lacunas identificadas no meio onde estamos inseridos. A pesquisa-ação, nesse sentido, poderia ser designada de pesquisa-construção,[15] na medida em que gera e avalia um novo modo de fazer.

A concepção epistemológica da pesquisa-ação abriga, portanto, a organização e o desenvolvimento das diferentes fases do projeto Mecam. Desde o princípio estivemos, professoras e monitoras, imbuídas em alicerçar o ambiente de aprendizagem, com recursos tecnológicos simples, porém imprescindíveis para a realização dos estudos num curso a distância, e no aperfeiçoamento da metodologia como recurso didático capaz de promover a interatividade. A interatividade, nessa proposta, apóia-se na concepção de Silva (2000), que implica novas formas de comunicação, onde a participação tem o sentido de intervenção, que implica por sua vez interferir e não apenas responder *sim* ou *não*. O papel do professor deve ser o de *dar conta* das interações, é o de estar atento à rede de relações que se estabelece na comunidade de aprendizagem envolvida. Silva destaca que a ênfase não está na tecnologia, mas num estilo de pedagogia sustentada por modos de comunicação que supõem a interatividade, isto é, participação, cooperação, bidirecionalidade, e multiplicidade de conexão entre informações e os atores envolvidos.

Na fase dos experimentos, juntaram-se os estudantes também com disposição de fazer acontecer, de transformar a realidade, não somente a de alunos reprovados, mas também a de uma aprendizagem concebida como um saber-fazer para um fazer e compreender. Os problemas de aprendizagem dizem, portanto, respeito a todos (pesquisadores e participantes) os envolvidos de modo cooperativo na busca de novas soluções.

---

[15] O termo pesquisa-construção foi sugerido pelo Prof. Antônio Carlos da Rocha Costa, orientador deste trabalho de tese, na ocasião da defesa da proposta.

4.1 O percurso

Estimuladas pela participação em encontros e congressos, em grupos de estudos do programa de doutorado, e pelas experiências que vínhamos realizando, com o propósito de inserir o computador como recurso de apoio à aprendizagem da matemática e de criar ambientes virtuais, como apoio ao ambiente presencial, buscamos fundamentar uma proposta pedagógica diferenciada para fazer frente ao elevado número de reprovações e desistências que ocorrem em disciplinas iniciais de matemática nos cursos de graduação.

Com a finalidade de conhecer melhor a realidade dos estudantes dessas disciplinas e a receptividade de uma proposta de estudos complementares na modalidade a distância, realizamos no primeiro semestre de 2001, uma pesquisa que envolveu 180 alunos de três turmas de Cálculo Diferencial e Integral I dos cursos de Engenharia, Bacharelado em Ciência da Computação e Licenciatura em Matemática.

Nessa pesquisa levantamos o perfil dos alunos ingressantes (ano de conclusão do Ensino Médio, de ingresso na universidade, cidade onde mora, aluno que trabalha, cidade onde trabalha, número de disciplinas cursadas no semestre), dados referentes às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I (horas semanais de estudo, se houve reprovações, motivo da(s) reprovações), parecer sobre motivos das dificuldades de aprendizagem (tempo de estudo, matemática básica, metodologia do professor, material didático) e expectativa de aprovação. Buscamos conhecer também a receptividade dos estudantes em relação à possibilidade de realizar estudos na modalidade a distância, ao invés de refazer a disciplina no caso de reprovação, bem como de formas de acesso à internet (se tem e de onde).

Paralelamente a esse levantamento, buscamos o número de reprovações e desistências nessa disciplina, em registros de notas e freqüências, além do número anual de formandos nos cursos de Engenharia Mecânica e Química, conforme apresentamos na tabela 1 do capítulo 1. Os resultados desse levantamento mostraram a viabilidade de experimentar outra alternativa, em lugar de refazer a disciplina nos moldes tradicionais, para os alunos reprovados sem terem desistido. Com base nos resultados desse levantamento, propusemos o projeto Mecam.

As primeiras atividades do projeto consistiram em análises de plataformas[16] próprias para ensino a distância e na elaboração e aplicação de atividades de colaboração/cooperação, como ações complementares às da sala de aula, desenvolvidas por interações a distância entre professor e alunos. Através de um fórum, promovemos interações e discussões, que tiveram como ponto de partida uma atividade proposta em aula. Devido à dificuldade relacionada à utilização, na *web*, da linguagem matemática, parte das discussões foi realizada em arquivos do *software Scientific Notebook* anexados às mensagens do fórum.

No primeiro semestre de 2002, realizamos estudos sobre Zope,[17] que é um servidor de páginas, mantido e administrado completamente na w*eb*. Alguns testes mostraram a simplicidade de criação, administração e manutenção de páginas na internet, e definimos, com isso, nossa opção pela criação da página personalizada do Mecam. Em relação à metodologia, acrescentamos às atividades em sala de aula, além das discussões no fórum, atividades de grupo, desenvolvidas

---

[16] Teleduc – Disponível em http://hera.nied.unicamp.br/pagina/index.php. Acesso em: maio de 2004.
AulaNet – Disponível em http://www.aulanet.uniovi.es/portal/. Acesso em maio de 2004.
Learning Space – Disponível em http://www.lotus.com/. Acesso em: maio de 2004.
[17] Z *Object Publishing Enviroment*.

em arquivos do *software Scientific Notebook*, com questionamentos e sugestões para o aperfeiçoamento das atividades realizadas pelos alunos.

O segundo semestre de 2002, foi dedicado à preparação das edições experimentais do projeto. Criamos o ambiente de aprendizagem do Mecam, definimos as páginas com seus conteúdos e elaboramos as atividades para a realização do primeiro curso de estudos complementares a distância. Contatamos com os coordenadores dos cursos que contém a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, e com nossos colegas professores dessa disciplina para a definição dos critérios de aproveitamento para os alunos que, se aprovados no Mecam, revertessem sua condição de reprovados. No final do semestre, após a divulgação dos resultados finais das avaliações, constituímos a primeira turma do Mecam, com 12 alunos dos cursos de Engenharia Mecânica, Engenharia Química e Licenciatura Plena em Matemática da Universidade de Caxias do Sul, que foram indicados por seus professores, por terem manifestado interesse em participar do projeto e demonstrado envolvimento e responsabilidade por seus estudos no decorrer do semestre.

A primeira edição experimental do programa Mecam aconteceu, durante cinco semanas, nos meses de janeiro e fevereiro de 2003, com a realização do curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I.

Essa primeira edição constituiu uma experiência-piloto na qual buscamos avaliar a adequação dos recursos disponibilizados no ambiente e a organização da dinâmica do curso. A experiência apontou a necessidade de modificação em vários aspectos, tanto em relação aos recursos do ambiente quanto em relação à estrutura do curso.

Considerando as ferramentas para comunicação, nossa primeira idéia foi utilizar um único recurso, pensando em simplificar o ambiente para não provocar embaraços tecnológicos que interferissem nos estudos de Cálculo. Escolhemos um fórum para esse fim. Porém, o que percebemos foi uma grande dificuldade prática na sua utilização, que não permitiu uma organização eficiente das mensagens por qualidade de assuntos tratados. Com isso, ocorreu o que chamamos de poluição de informações, pelo acúmulo e mistura de mensagens de todas as ordens: questões tecnológicas (25% das mensagens), matemáticas (16,7% das mensagens) e de trânsito simples de informações (58,3% das mensagens), ou seja, mensagens de interesses ou necessidades de ordem particular. Perdemos, com isso, na qualidade das interações e no que mais pretendíamos privilegiar: as discussões matemáticas.

Buscando corrigir esse aspecto para a segunda edição, tomamos as seguintes medidas: acrescentamos no ambiente um recurso de correio eletrônico interno para trânsito simples de informações, procuramos aperfeiçoar o material de apoio, acrescentando orientações, especialmente em relação à construção de gráficos, e criamos uma página de perguntas freqüentes, filtrando no fórum as questões referentes à utilização dos recursos do *software Scientific Notebook*. Com isso, na segunda edição, o fórum passou a ser o ponto alto das interações, com 92% das mensagens sobre questões matemáticas.

Em relação às atividades, também fizemos modificações. Na primeira edição, programamos cinco atividades, cada uma relacionada a conteúdos parciais da disciplina e com questões onde tratávamos de vários tipos de funções. Além disso, não limitamos a quantidade de aperfeiçoamentos. Nossa hipótese era de que os alunos resolveriam as atividades em ordens variadas, escolhendo primeiro as atividades sobre os conteúdos com os quais tivessem maior familiaridade, o que não aconteceu: todos resolveram na ordem em que foram propostas. E como não limitamos os aperfeiçoamentos, entendendo propiciar ao aluno aprofundar os estudos, à medida que tivesse maior disponibilidade de tempo e interesse, as primeiras atividades foram desenvolvidas com vários aperfeiçoamentos, e as últimas com um, em sua maioria, ou nenhum, como aconteceu com alguns estudantes, na última atividade. Novamente ocorreram prejuízos, pelo pouco tempo em que os estudantes de envolveram com algumas noções e conceitos importantes do Cálculo.

Para a segunda edição, reduzimos a quantidade de atividades: de cinco para quatro, e as reestruturamos em relação aos conteúdos. Procuramos contemplar os assuntos principais – estudo de funções, limites e derivadas e suas aplicações – em todas as atividades e variamos, em cada uma delas, o tipo da função. Assim, abordamos na primeira atividade as funções polinomiais; na segunda, as funções racionais; na terceira, as funções trigonométricas e, na última, abordamos alguns tipos especiais de funções, como as definidas por partes, as definidas com radicais e as implícitas.

Quanto aos aperfeiçoamentos, fixamos a realização de dois para cada atividade, com nova oportunidade de aperfeiçoamento na entrevista presencial. Com isso, os estudantes conseguiram programar e organizar melhor seus estudos e tiveram oportunidade de retomar noções importantes em várias atividades.

Dessa forma, fez-se presente a dinâmica da pesquisa-ação, que exige, em todas as fases, ações no sentido de corrigir problemas detectados. Assim, os aspectos relacionados ao ambiente de aprendizagem e ao desenvolvimento do curso foram elucidados no decorrer do mesmo, implicando mudanças de rumo, adaptação ou substituição de estratégias planejadas, que se mostraram inviáveis ou ineficazes ao serem colocadas em prática.

O processo de modificações no ambiente, nas atividades de aprendizagem e na dinâmica do curso aconteceu no decorrer do primeiro semestre de 2003, juntamente com a preparação da segunda edição. Os procedimentos de formação da segunda turma do Mecam foram os mesmos que os adotados na primeira edição, e o segundo curso a distância de Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I foi realizado, em cinco semanas, nos meses de julho e agosto de 2003. Participaram dessa edição 12 estudantes dos cursos de Engenharia Mecânica, Engenharia Química, Ciência da Computação e Licenciatura Plena em Matemática da Universidade de Caxias do Sul.

Essa segunda edição do Mecam constitui o experimento de análise no contexto de nosso trabalho de tese, onde procuramos evidenciar as aprendizagens como processos de equilibração. Segundo Kesselring (1993), ao interpretar Piaget, não são os processos de equilibração que podem ser aprendidos; os processos de aprendizagem é que pressupõem a equilibração. Assim, o papel do professor é indispensável nesse sentido, na medida em que não sendo o aluno capaz de formular, por si mesmo, a pergunta certa, tal tarefa cabe ao professor.

Podemos entender, portanto, o sentido da proposta pedagógica do Mecam, como o de promover processos de equilibração gerados por situações de questionamentos e orientações, sendo a aprendizagem produto da reequilibração, como retorno ao equilíbrio, porém melhorado em relação ao estado inicial.

Os dados de análise nesta tese são as tarefas de aprendizagem desenvolvidas pelos estudantes da segunda edição experimental do Mecam, que consistem na resolução e no aperfeiçoamento das questões propostas nas quatro atividades programadas para a realização dos estudos no curso, e os graus de aprendizagens registrados nas fichas de avaliação desses estudantes.

Nas tarefas de aprendizagem procuramos identificar e analisar a diversidade de situações encontradas em relação, primeiro, à possibilidade de gerar perturbações através dos questionamentos e orientações, visando ao aperfeiçoamento das tarefas e, segundo, às condutas de compensação, como reações dos estudantes frente às perturbações constatadas. Com essas análises, buscamos responder à primeira subquestão desta tese: As interações no desenvolvimento das atividades propostas promovem perturbações? Que condutas cognitivas frente às perturbações podem ser identificadas?

Nas fichas de avaliação buscamos responder à nossa segunda subquestão: Como as condutas frente às perturbações se relacionam com o movimento das aprendizagens dos estudantes? Nessas fichas observaremos o movimento das aprendizagens com um olhar sobre o todo construído, a partir da análise dos graus de aprendizagens atribuídos como função do saber-fazer e do saber-explicar, da compreensão demonstrada sobre os procedimentos de resolução e sobre as noções matemáticas envolvidas em cada tarefa de aprendizagem.

Com essas análises buscamos, portanto, entender se efetivamente a proposta pedagógica do Mecam constituiu uma possibilidade de gerar melhorias das condições de aprendizagem, como resposta à questão geral desta tese: Como evidenciar a aprendizagem de noções matemáticas no ambiente de aprendizagem do Mecam, cuja proposta pedagógica integra recursos tecnológicos e uma metodologia de intervenção?

5 ANÁLISES E RESULTADOS

Ao propor a metodologia do Mecam, tínhamos como hipótese que as interações, promovidas por um processo de questionamentos e orientações, inspirado no método clínico e apoiado por recursos tecnológicos, constituíssem um modo significativo de aprendizagem, através do qual os estudantes pudessem (re)construir noções e conceitos em matemática.

Nosso propósito agora é olhar o que foi possível prover com a proposta pedagógica do Mecam, aplicada na segunda edição experimental do projeto, quando da realização do segundo curso a distância de Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I. Participaram dessa edição, conforme descrevemos no capítulo 4, 12 estudantes dos cursos de Engenharia Mecânica, Engenharia Química, Ciência da Computação e Licenciatura Plena em Matemática da Universidade de Caxias do Sul, reprovados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no primeiro semestre de 2003.

Apresentamos, antes das análises, quais recursos, dentre os sugeridos ou disponibilizados no ambiente de aprendizagem constituíram as fontes para a realização dos estudos. Apresentamos também os comentários dos alunos, a respeito do modo como perceberam as interações com os recursos que apontaram como os mais utilizados para o desenvolvimento das atividades. Os dados e os pareceres que apresentamos foram obtidos em duas auto-avaliações,[18] realizadas no decorrer do curso.

---

[18] As auto-avaliações constam no Anexo 3.

A primeira auto-avaliação foi proposta logo após a entrega da quarta atividade, após três semanas de curso; e a segunda, no final do curso. Buscamos, com as auto-avaliações, promover momentos de reflexão e conscientização, e também de avaliação da metodologia e do ambiente construído, por uma análise que os estudantes realizaram da ação e envolvimento demonstrados no processo de aprendizagem e das dificuldades, de ordem tecnológica ou matemática, com as quais se depararam. Nessas auto-avaliações, os estudantes responderam questões sobre sua participação e responsabilidade frente ao compromisso assumido, sobre o modo como se organizaram para os estudos, como avaliaram seus processos de aprendizagem, desempenhos e as possibilidades de interação com os materiais de estudo, com os colegas, professores e monitores. Responderam também questões onde expressaram seus pareceres sobre a metodologia, sobre o ambiente de aprendizagem, identificando benefícios e dificuldades encontradas em relação aos aspectos tecnológicos e aos subsídios fornecidos para o desenvolvimento dos estudos, e sobre a experiência vivenciada em educação a distância.

Numa das questões da primeira auto-avaliação, solicitamos que os estudantes indicassem as fontes, dentre as disponibilizadas ou sugeridas no ambiente, que julgaram ter maior relevância para o desenvolvimento dos estudos e para a realização das atividades. Esses dados são importantes, no contexto da avaliação do ambiente, considerando os recursos de interação destinados à realização dos estudos e às discussões sobre as questões de ordem tecnológica e matemática. As questões, da primeira auto-avaliação, propostas para esse fim, e os resultados oriundos das respostas dos estudantes constam no quadro 1, que segue.

Assinale com (X), dentre as fontes apresentadas, as que contribuíram para a resolução das atividades propostas.		
(Onze dos doze estudantes responderam à questão.)		
Fontes de estudo		**Nº de estudantes**
livro do Anton		11
notas de aula disponibilizadas no Material de Apoio		10
estudo em grupo		5
seu caderno de Cálculo I		8
Outro(s) livro(s) sugerido(s) na bibliografia complementar		2
site(s) de apoio sugerido(s) na bibliografia virtual		2
fórum de discussões		11
outro(s)	monitoria presencial	1
	polígrafos de aula	1
	ajuda de um amigo	2
Destaque três das fontes apresentadas, que considera mais importantes.		
(Os itens não citados foram desconsiderados.)		
Fontes de estudo		**Nº de estudantes**
livro do Anton		11
notas de aula disponibilizadas no Material de Apoio		6
estudo em grupo		3
seu caderno de Cálculo I		3
fórum de discussões		10

Quadro 1: Fontes de estudo

Observamos, na primeira parte do quadro, que todos os recursos disponibilizados ou sugeridos foram utilizados pelos estudantes, que destacaram, conforme a segunda parte do quadro, o livro do Anton (2000) e o fórum como as fontes de maior importância para a realização das atividades.

Quanto ao livro, tivemos a especial atenção em sugeri-lo constantemente como apoio a estudos, pois, por um lado, constituía a bibliografia básica indicada por seus professores também quando cursaram anteriormente a disciplina de Cálculo I e, por outro, julgamos de fundamental importância auxiliá-los no sentido de um aprendizado da sua utilização. É fato observável que os estudantes, em início de cursos de graduação, em geral, mostram dificuldades em estudar nos livros.

Na segunda auto-avaliação, os estudantes apresentaram seus pareceres em relação aos benefícios da interação com o livro para estudos realizados e futuros. No quadro 2, temos a questão proposta e as respostas de 11 dos 12 estudantes que participaram dessa edição, identificados por nomes fictícios.

Por entender que todos podemos e devemos aprender a buscar soluções a nossos problemas, elegemos, enquanto professoras orientadoras, como fator principal da metodologia para as orientações, o incentivo à busca das respostas em lugar de fornecê-las. Voltando a estudar Cálculo, com práticas tradicionais, você reconhece que terá benefícios por ter estudado dessa forma? Como você se vê hoje frente à possibilidade de estudar em livros? (Os depoimentos foram mantidos na íntegra.)	
Estudante	**Depoimento**
Adolfo	Hoje com certeza eu estou muito mais apto a resolver problemas estudando com os livros, confesso que antes de participar do Mecam eu só abria o livro para ver as respostas, por isso eu nunca sabia o porquê das respostas.
Felipe	O processo de aprendizagem do Mecam é muito bom, pois no fórum as maneiras de discussão dos exercícios são diversas. Com isso temos a possibilidade de desenvolver e compreender melhor as atividades em sala de aula. Os livros têm informações valiosas para obter conceitos e bases, mas não geram conhecimento como trabalhos similares ao Mecam.
Fernando	Reconheço, pois, que esse método me fez me interessar mais sobre os assuntos me fazendo correr atrás das coisas, não ter tudo dado na mão, quando tinha dúvidas tinha que correr bastante atrás pra tirá-las, além de fazer a pessoa pensar no que fazer e por que está fazendo isso, acho que isso na frente dos livros não vai mudar, pois isso é uma coisa que se desenvolveu e tornará-se parte do meu aprendizado. E o Anton é que às vezes ficava difícil de entender mas era só dar umas lidinhas que eu me entendia com ele.
Gabriela	Percebi uma diferença enorme estudando desta forma, pesquisei muito mais, fui atrás, consultei livros, que em sala de aula não é tão comum, pois o professor explica e os alunos resolvem. Mas a aprendizagem na matemática, creio eu, muito mais que saber calcular é entender o que se está calculando.
Lucas	Me vejo muito mais seguro quando tenho que estudar algum assunto no livro, o Mecam me propiciou um desenvolvimento melhor para estudar. O Mecam adicionou técnicas de estudo que posso utilizar para todas as outras matérias.
Marcos	Eu aprendi muito mais com o Mecam, do que em aula normal, mesmo não tendo o auxílio de, por exemplo, um professor pessoalmente como nas aulas. Isto porque com a dúvida, passei

	a buscar "mais" a resposta, do que ir perguntando direto ao professor. Assim, passei a pesquisar mais no livro e em polígrafos, mesmo achando o livro meio complicado. Mesmo assim, consegui resolver vários exercícios que, talvez, nas aulas iria recorrer ao professor. Estou bem mais apto para encarar um livro para estudar, mais ágil na procura de assuntos importantes.
Murilo	É, foi meio difícil me adaptar a essa nova forma de avaliação (pelo menos pra mim é uma novidade), mas há é claro benefícios, pois pela internet os alunos podem se desinibir bem mais, aqueles tímidos se soltam mais, fazendo com que cresça a discussão e muito mais. O livro com certeza ajudou muito, até aprendi a "MEXER" com ele. Sinceramente prefiro do jeito tradicional a esse com os livros e tudo ao vivo.
Marina	Creio que não terei problemas com isso, devo admitir que o Mecam ajudou para a compreensão de diversos assuntos que estudei em cálculo, mas que não havia compreendido e gostei muito de aprender a usar, o índice remissivo é uma boa ajuda.
Reinaldo	Como cálculo é uma matéria muito complexa e precisa ser estudado todo dia, o Mecam é muito importante, ele faz você estudar todos os dias no mínimo duas horas por dia para dar conta das atividades exigidas e assim você consegue adquirir um bom conhecimento da matéria. E agora me viro bem com o livro.
Ramon	Acho que é uma idéia muito boa tendo ajuda de professores qualificados e dos livros para as dúvidas de todos os que estiverem participando.
Tiago	Os benefícios que tive em ter estudado desta forma, foi justamente em ir em busca das respostas, em aprender de onde saiu a resposta final ou muitas vezes seus significados. Agora quando voltar em sala de aula vou ter um rendimento maior, por que com o Mecam eu tinha que aprender a buscar informação, pois em tempo normal de aula as Professoras não têm todo esse tempo para ensinar. Agora estudar a partir de um livro não vai mais ser "um bicho de sete cabeças" agora sei que devo buscar as informações dos livros, pois terei muito mais informação, além das explicações dos Professores.

Quadro 2: Pareceres sobre a utilização do livro

Nesses depoimentos podemos constatar que os estudantes reconheceram benefícios por utilizarem o livro como fonte de estudos. Confirmaram, portanto, nossa expectativa em relação às possibilidades de também oportunizar a superação de dificuldades na sua utilização. Nossas orientações, nesse sentido, se constituíram na indicação de páginas onde os temas são tratados ou de termos que constam no índice remissivo. Outro aspecto, que apontamos como destaque, diz respeito aos exemplos apresentados junto aos textos, ilustrativos de aplicação dos conceitos ou noções matemáticas, que, em geral, não são percebidos pelos estudantes do Mecam e também os das nossas disciplinas regulares de início dos cursos, como fontes de estudo ou, então, como dizem alguns, são refeitos como forma de verificarem se sabem fazer o exercício. Nosso entendimento e orientação são de que os mesmos sejam considerados como continuidade do texto de apresentação dos tópicos, pois encerram, além de resoluções de uma variedade de questões, comentários com explicações, justificativas, análises e construções geométricas que contribuem para a construção do conceito matemático em estudo.

Quanto ao fórum, que descrevemos no tópico 2.1.4, canal de encontro para questões matemáticas ou tecnológicas, confirmamos o destaque apontado pela quase maioria dos estudantes, como recurso de auxílio, em seus depoimentos individuas, na primeira auto-avaliação, conforme quadro 3 a seguir:

Como avalia o auxílio prestado pela equipe – professoras, monitoras e também colegas – do Mecam? Quando você solicitou ajuda através do fórum, a resposta ou uma sugestão foram suficientes para resolver a dúvida que tinha?

(Os depoimentos foram mantidos na íntegra.)

Estudante	Depoimento
Adolfo	O auxílio foi ótimo, queria agradecer a todos os que colaboraram com o auxílio prestado. Sempre que utilizei o fórum fui atendido com sucesso as minhas dúvidas.
Felipe	O auxílio prestado nas vezes que tive a necessidade foi muito útil.
Fernando	As monitoras e colegas do Mecam me ajudaram muito, algumas vezes no fórum alguns colegas queriam ajudar, mas não conseguiam entender minhas dúvidas, ficava meio difícil para eles tentar às vezes adivinhar as coisas que não conseguia me expressar bem. Algumas vezes que o fórum não me ajudou eu fui atrás e consegui resolver!
Gabriela	Vi grande empenho de alguns colegas ajudando e colaborando com dicas que auxiliaram meu trabalho, quanto as profes, além

	da ajuda e colaboração, percebi o quanto foram preocupadas com a questão do compreender e não só do resolver. Isso faz com que ocorra a verdadeira aprendizagem na matemática. Sobre as monitorias presenciais da primeira semana não pude aproveitar, pois ficou um pouco difícil pelo motivo de eu não morar em Caxias, mas consegui me virar bem com o fórum.
Lucas	Ótimo, sempre que precisei de auxílio fui atendido, as respostas do que eu perguntava nunca foram as respostas propriamente ditas, mas é melhor assim, sempre foram respostas que despertaram em mim a curiosidade de aprender e com isso aprendi não só pra cálculo mas pra tudo na vida, claro que também eu não estava sem sentido na vida, mas ajudou muito.
Marcos	Acho que nem precisaria responder esta pergunta. Pelo que as sras. mesmo devem ter visto, o fórum me ajudou muito mesmo!!!! Aproveito para agradecer pela ajuda que vocês me deram às dúvidas que coloquei no fórum!!! Foi tão bom o fórum, que nem precisei recorrer à ajuda pessoalmente para a monitoria. Não tenho crítica nenhuma. Excelente mesmo!!! Consegui sanar minhas dúvidas que tinha quando as colocava no fórum, mesmo que demorasse um tempo pra compreender e ter que retornar outras mensagens.
Murilo	Muito aplicadas, disso não posso reclamar... foram muito atenciosas com nós. O fórum era um meio de todos se encontrarem e de tirar suas dúvidas, portanto muito importante.
Marina	Foi muito bom poder contar com essas pessoas, pois elas não negaram auxílio na hora que precisei. Muitas dúvidas existiam, mas o fórum resolveu muitas delas.
Reinaldo	O auxílio de professoras, monitoras e também colegas foi ótimo, sempre que surgia alguma dúvida de um ou de outro conseguia o seu esclarecimento e gostaria de agradecer a todos.
Ramon	Foi muito bom apesar de demorar um pouco.
Tiago	Muito bom, foi uma baita de uma experiência, que vou levar para o resto da vida. As monitoras foram excelentes, principalmente na primeira semana. As Professoras me deram uma baita de uma força principalmente na atividade 3, que foi a mais puxada, só tenho a agradecer.

Quadro 3: As interações no fórum

O fórum constituiu realmente, como atestam os estudantes, um elemento primordial ao bom andamento do curso. É um canal de interação que dá destaque ao ensino a distância, quando conseguimos acompanhar os estudantes nas suas aflições e inquietações cognitivas; de algum modo, estivemos todos, professores, estudantes e monitores, mais próximos, mais vigilantes, mais solidários.

Concordamos, portanto, com nossos alunos, quando referem o livro e o fórum como os suportes principais à proposta pedagógica do Mecam. Nas orientações procuramos incentivá-los nessas interações buscando, com isso, favorecer as interações entre sujeitos e entre os sujeitos e objeto de conhecimento, que possibilitaram a realização e o aperfeiçoamento das tarefas de aprendizagem.

Na continuidade desse estudo, buscamos compreender de que forma ocorreram as aprendizagens dos estudantes que realizaram a segunda edição experimental do Mecam, como reagiram aos questionamentos e como estes serviram de fontes de perturbações para novos e melhores equilíbrios.

As análises e os resultados serão apresentados em dois momentos. No primeiro, faremos uma análise, à luz da teoria da equilibração, do desenvolvimento das tarefas de aprendizagens realizadas pelos alunos, onde buscamos identificar a ocorrência de perturbações e, frente a elas, condutas de compensação alfa, beta e gama. No segundo momento, faremos uma relação entre a análise dos processos de equilibração, oriundos do primeiro momento, e os graus de aprendizagem alcançados pelos estudantes, o que possibilitará visibilizar o movimento das aprendizagens das noções trabalhadas pelos estudantes.

5.1 Análises das condutas

Como metodologia de orientação para o desenvolvimento dos estudos, consideramos um processo de questionamentos inspirado no método clínico, que visa ao aperfeiçoamento das tarefas de aprendizagem com o propósito de promover, não somente a capacidade de resolução dos exercícios propostos por aplicação de algoritmos algébricos ou numéricos, mas, também, e especialmente, a compreensão dos significados dos objetos matemáticos.

Os questionamentos não são planificados em quantidades ou direções, procuramos nos orientar pelo que cada estudante oferece nas resoluções e argumentações que apresenta. Concordamos com Inhelder, Bovet e Sinclair (1977) quando, em relação à aplicação do método clínico, explicam que a sua prática exige grande formação teórica e experimental e, ao mesmo tempo, flexibilidade sobre o que se apresenta, bem como enxergar com clareza o problema e o que se deseja verificar. Assim também ocorre na metodologia do Mecam, onde a própria aplicação vai orientando e aperfeiçoando o fazer pedagógico que, novamente, como entendem Inhelder, Bovet e Sinclair, “progride em função do avanço dos nossos conhecimentos e gradativamente à medida que o quadro de referência teórica se completa” (INHELDER; BOVET; SINCLAIR, 1977, p. 34).

Nosso propósito pedagógico é fazer com que nossas intervenções, na forma de questionamentos ou orientações, operem como perturbações que provoquem desequilíbrios entre os esquemas prévios de assimilação e levem os estudantes a procurar formas de regulações que possibilitem a reorganização ou mesmo a construção de novos esquemas de significação. Dessa forma, buscamos promover processos de compreensão que, segundo Piaget (1978a), consiste em isolar a razão das coisas, dominar em pensamento o fazer, o porquê e o como das ligações constatadas e utilizadas na ação.

É importante deixar claro que não utilizamos o método clínico, tal como foi idealizado, como uma conversação presencial com sujeitos. Mas podemos sustentar, como demonstram os extratos das análises que seguem, que a metodologia do Mecam é inspirada em tal método. Ao mesmo tempo em que julgamos poder visibilizar as aprendizagens das noções discutidas, como decorrentes de processos de equilibrações promovidos pela metodologia, reconhecemos que o percurso intelectual dos estudantes entre o questionamento e o retorno da resposta não está ao nosso alcance. Dessa forma, não pretendemos produzir um tratado sobre o desenvolvimento das estruturas cognitivas, mas verificar como as condutas frente aos desafios dessa conversação não presencial produzem efeitos de aprendizagem de objetos matemáticos.

De modo geral, para a proposição dos questionamentos, levamos em conta a adequada resolução algébrica, geométrica ou numérica correspondente e em concordância com aspectos complementares sobre a compreensão da própria resolução proposta e dos significados envolvidos em cada tarefa de aprendizagem.

Com isso, nas análises que seguem, o saber-fazer e sua transformação para um saber-explicar será indicativo de desenvolvimento da compreensão das noções pesquisadas e de aprendizagens que possam ser reveladoras de um processo de desenvolvimento cognitivo.

Nas tarefas de aprendizagem, que analisamos a seguir, buscamos interpretar seu desenvolvimento como processos de equilibração. As mesmas foram selecionadas intencionalmente, por sua representatividade qualitativa (THIOLLENT, 1988) em relação aos aspectos do que pretendemos observar, ou seja, por ilustrarem e explicitarem a variedade de situações que encontramos em relação à constatação ou não de perturbações e, quando ocorreram, em relação às compensações que puderam ser observadas como resultados de processos de regulação.

As quatro atividades propostas no curso da segunda edição do Mecam possibilitaram o estudo de algumas noções fundamentais ao estudo do Cálculo, de limites e derivadas, com suas aplicações na análise de funções em suas formas analíticas e geométricas. Esses temas constituem o essencial da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Cada atividade é composta por um conjunto de exercícios e problemas que designamos de tarefas de aprendizagem. No encontro presencial que marcou o início do curso, os estudantes começaram a primeira atividade, através da qual procuramos proporcionar uma breve exploração do ambiente, noções sobre o *software* com o qual as atividades foram desenvolvidas, seus comandos básicos para processamentos algébricos e numéricos e para a construção de gráficos, além de informações sobre questões tecnológicas, necessárias para a realização do curso. A partir desse encontro, o curso foi realizado a distância e, em continuidade, os estudantes aperfeiçoaram as tarefas dessa primeira atividade, iniciadas com o *software*, mediante leitura ou interpretação dos gráficos construídos nesse encontro presencial, e realizaram as demais atividades propostas. Não estabelecemos ordem para a realização das atividades, nem para os aperfeiçoamentos. Os estudantes desenvolveram as atividades de acordo com suas próprias escolhas e ritmos de estudo.

Os extratos que apresentamos contêm o desenvolvimento de tarefas de aprendizagem, que serão analisadas buscando identificar reações de perturbações provocadas pelos questionamentos e as correspondentes condutas de compensação.

Fizemos alguns ajustes nos extratos do protocolo em relação à página original. Os nomes dos estudantes são fictícios, como comentamos anteriormente, e as cores diferenciam as participações dos alunos e da professora. Uma primeira leitura do extrato pode parecer confusa, isso porque os alunos foram orientados a responder logo abaixo de cada questionamento, e as intervenções da professora ocorreram imediatamente após as respostas do aluno. Foi a forma que encontramos, nós e os alunos, de localizar rapidamente as novidades nos arquivos das atividades. Assim, os trechos dos extratos não seguem uma apresentação linear. Sugerimos que atentem para formatação, tamanho e cor verde da fonte do texto da professora; as fontes e cores dos textos escritos pelos estudantes foram escolhidas livremente por eles. Três tamanhos de fontes identificam os três momentos de intervenção da professora: a menor é utilizada quando do primeiro envio da atividade, a intermediária, no primeiro aperfeiçoamento e a maior delas, no segundo aperfeiçoamento. Além disso, incluímos nas análises algumas explicações sobre aspectos matemáticos que julgamos pertinentes para possibilitar o acompanhamento das suas descrições.

Na tarefa de aprendizagem, que apresentamos nos Extratos 1 e 2, abordamos o conceito de zeros de funções. Numa primeira parte dessa tarefa, os estudantes determinaram os valores exatos dos zeros da função polinomial f, dada por $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x$, e, nos aperfeiçoamentos desencadeados, apresentaram os significados dos valores encontrados como respostas aos questionamentos propostos.

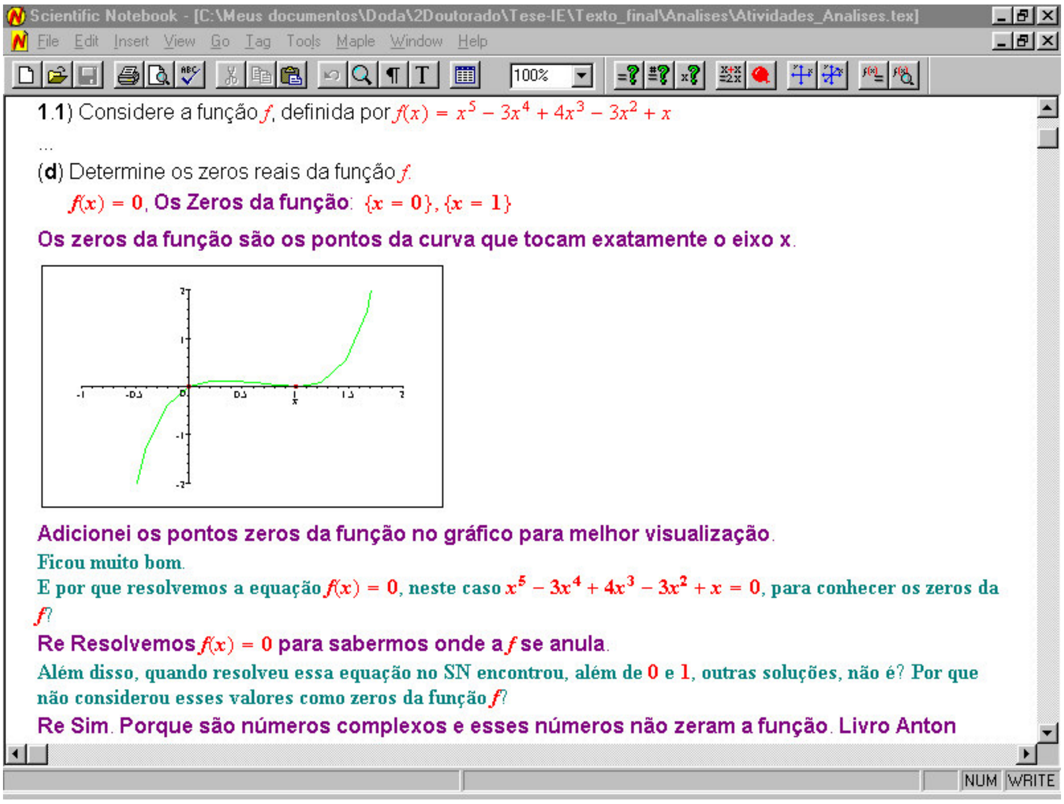


Figura 12: Extrato 1

Nesse fragmento da atividade, o estudante apresentou uma solução correta da questão e sugeriu que a obteve resolvendo com o *software* a equação $f(x) = 0$.

Acompanhando a tarefa percebemos que os questionamentos foram respondidos com desenvoltura até a última pergunta, quando o aluno indicou ter feito uma consulta ao livro. Podemos pensar na reação às perturbações decorrentes do diálogo com a professora como um modo de preencher uma lacuna, pois revelou ter buscado um conhecimento a mais sobre as raízes da equação que não considerou como zeros da função. A regulação, então, constituiu um *feedback* positivo. Porém, o que apresentou como resposta – *Porque são números complexos e esses números não zeram a função* – indica uma conduta compensatória do tipo alfa, na medida em que mostrou ter negligenciado o fato de estar tratando de funções reais de variáveis reais. Negou serem as demais soluções raízes da própria equação que as gerou, numa espécie de assimilação deformante. No caso de funções reais de variáveis reais e, por esse fato, é adequado não considerar os valores complexos, mas é importante ter consciência do motivo pelo qual assim procedemos, o que possibilita passar de um fazer mecânico para um fazer com compreensão.

Salientamos que encontramos poucas situações, onde os estudantes não ultrapassaram a fase de conduta do tipo alfa. O que observamos, na quase totalidade das tarefas, é que os estudantes avançaram para a fase de conduta gama, como ocorreu nesse caso, e que podemos observar no Extrato 2, onde consta a continuidade do desenvolvimento da tarefa.

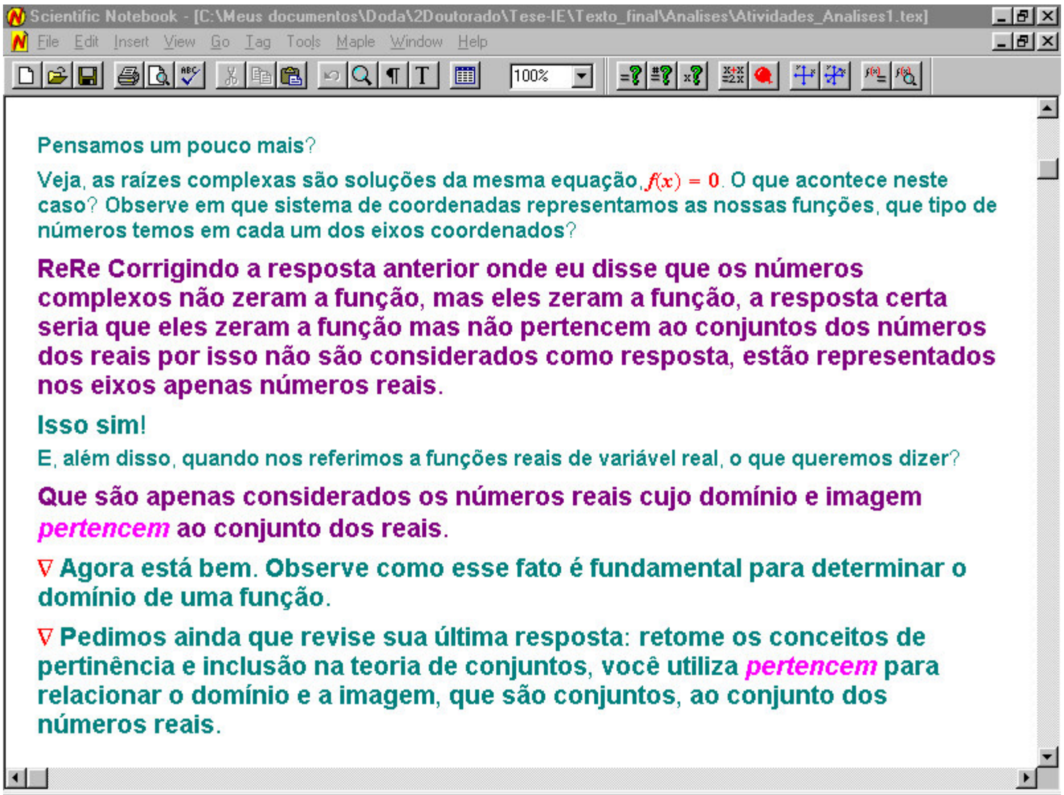


Figura 13: Extrato 2

O triângulo vermelho invertido que aparece no extrato indica que a questão foi novamente colocada para um último aperfeiçoamento na entrevista presencial oral, no final do curso.

O novo questionamento provocou agora nova perturbação, como um obstáculo à assimilação e, ao retomar sua análise, mostrou que estabeleceu novas relações, elaborou melhor seu pensamento e justificou adequadamente, não somente sobre o motivo pelo qual os números complexos não são considerados zeros da função nessa situação, mas também sobre o conceito de funções reais de variável real. Essa ação reflexiva levou o estudante a uma tomada de consciência do significado do conceito de funções reais de variável real. Isso significa que o aprendiz fez uma construção conceitual nova, ou seja, uma reconstrução. Podemos entender, portanto, que modificou seu esquema, a fim de tornar possível a assimilação dessas noções. O equilíbrio gerado é novo e é melhor, pois revela compreensão em suas explicações. A assimilação não é mais deformante, pois consegue reestruturar seu esquema mental e produzir uma conceituação de um maior nível de integração.

Na tarefa do Extrato 3, a seguir, apresentamos um caso, dos poucos, em que o estudante não avançou além da conduta do tipo alfa. O propósito da tarefa consistia em estabelecer a relação entre a derivada de uma função e o comportamento dessa função como crescente ou decrescente.

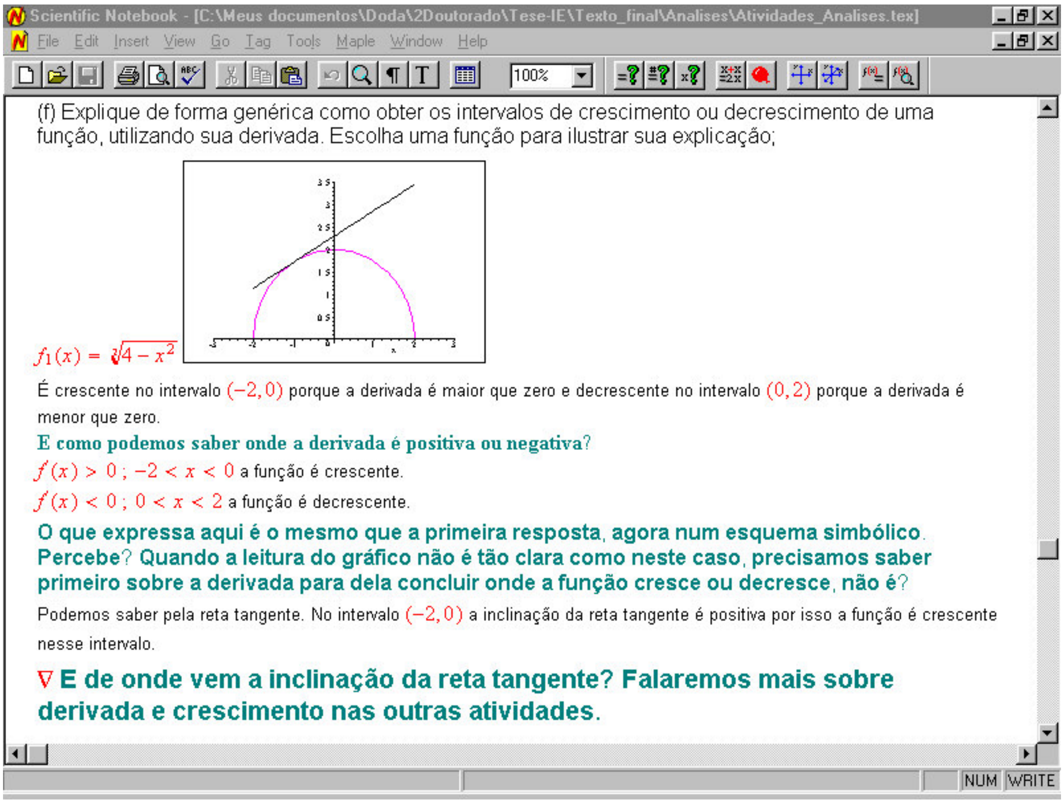


Figura 14: Extrato 3

O estudante respondeu corretamente, com base no conhecimento de que num intervalo, onde uma função tem derivada positiva (negativa), ela é crescente (decrescente). Mas isso implica saber, primeiro, onde a derivada tem sinal constante, o que se faz determinando os pontos críticos[19] da função. Dessa forma, esperaríamos como resposta à primeira pergunta algo que revelasse a necessidade desse procedimento. Porém, pelo que respondeu, parece ter afastado o elemento perturbador e se mantido centrado no exemplo geométrico ilustrativo que escolheu, onde, por simples observação, ficam declarados os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente. E, assim, deu indicativos de não ter assimilado o procedimento para determinação do crescimento ou decrescimento de uma função.

[19] Ponto crítico de um função *f*, definida num intervalo *I*, é todo ponto de *I* que é ou estacionário (ponto onde a derivada se nula) de *f*, ou ponto onde *f* não é derivável, ou um extremo de *I*.

O que se modificou em relação à primeira resposta foi apenas a forma como a expressou, uma tradução simbólica da frase gramatical.

Na segunda intervenção, pretendíamos chamar a atenção do estudante para o fato de que o teste, *sinal constante da derivada num intervalo implica função crescente ou decrescente nesse intervalo*, supõe primeiro determinar o sinal da derivada. Parece agora ter negligenciado o elemento perturbador, buscou outro argumento, porém novamente centrado em seu exemplo onde, além da função, está representada uma reta tangente ao seu gráfico, cuja inclinação é obtida através da derivada. O que modificou, agora, em sua resposta foi a troca da expressão derivada por inclinação da reta tangente, uma nova versão para as respostas anteriores. Dessa forma, podemos pensar que a conduta de compensação foi do tipo alfa, seu esquema de assimilação se manteve inalterado sobre a forma de proceder, para determinar o crescimento ou decrescimento de uma função, que soube descrever de várias formas, porém sem demonstrar compreensão.

Destacamos ainda que, de acordo com nosso entendimento, essa situação de aprendizagem constitui um caso ilustrativo da não-obrigatoriedade que Piaget (1976) estabelece, de implicação entre os componentes da equilibração: uma perturbação não necessariamente provoca regulação e esta, se ocorre, não necessariamente implica uma compensação. Na situação presente ocorreram perturbações, que reconhecemos pelas tentativas do estudante de modificar suas explicações, e as regulações constituíram *feedbacks* negativos, na medida em que modificavam as respostas apresentadas, mas as condutas de compensação, do tipo alfa não levaram a reequilibrações que indicam melhorias do sistema cognitivo.

Não podemos também, nesta análise, deixar de pensar na possibilidade de que o estudante não tenha entendido, nos questionamentos, a direção que pretendíamos dar às suas reflexões. Procuramos ter sempre o cuidado de não sugerir respostas, mas provocar perturbações como forma de promover processos de construção do conhecimento. Esta é uma questão metodológica que deve estar no centro das nossas preocupações: como perguntar adequadamente. Piaget (1926) refere a complexidade dessa questão; em relação ao método clínico, diz que somente a sua prática, com atenção permanente sobre o modo de formular as perguntas, pode auxiliar na proposição adequada das mesmas. Deve-se evitar a sugestão, a crença sugerida, que significa, de certo modo, insinuar uma resposta particular dentre as possíveis. E não pensemos, diz Piaget, “que a sugestão seja fácil de evitar. É necessária uma longa aprendizagem até se aprender a reconhecer e evitar as numerosas formas possíveis de sugestão”. (PIAGET, 1926, p.15). As crenças que têm valor são as espontâneas, onde o sujeito responde a partir de construções já elaboradas, ou as crenças desencadeadas, que ocorrem quando o sujeito consegue construir a resposta por reflexões provocadas pelas perguntas, que nesse caso indicam caminhos para a construção, que é fruto das relações estabelecidas pelo sujeito.

Nesse sentido estamos ainda no início de uma caminhada, que deve levar ao aprimoramento esse aspecto da metodologia que julgamos ser o de maior dificuldade e, ao mesmo tempo, o mais importante nesta proposta que entendemos ser uma possibilidade de desencadear aprendizagens.

Comentamos anteriormente que não encontramos muitas situações onde as reações às perturbações provocadas pelos questionamentos não ultrapassaram a fase das condutas alfa, mas devemos reconhecer que, em alguns casos, como o que temos no Extrato 4, os questionamentos não geraram perturbações.

A tarefa foi parte da Atividade 2, proposta com a finalidade de retomar o conceito de domínio de uma função, para o que, nessa atividade, tomamos a função f, definida por $f(x) = \dfrac{(t-10)^2}{t+10}$.

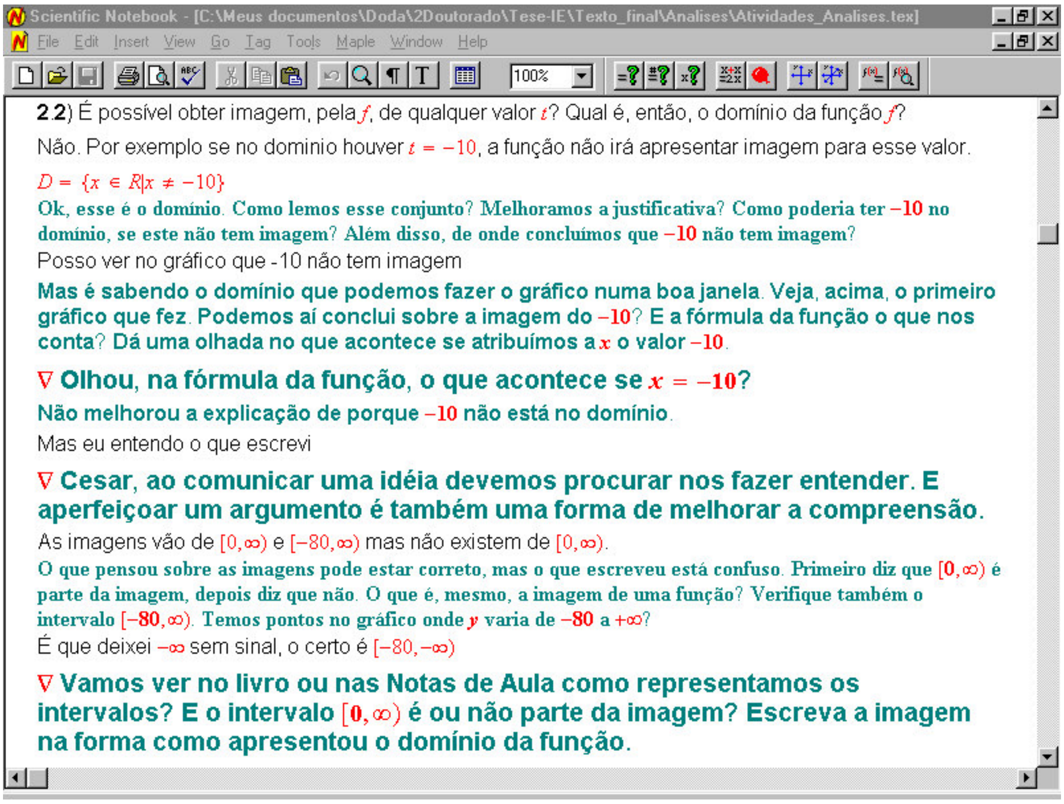


Figura 15: Extrato 4

Podemos observar, nesse extrato, que os questionamentos não provocaram nenhuma atitude que indicasse uma exploração sobre o assunto, o que mostra não ter ocorrido um desequilíbrio. O que o aluno apresentou foram algumas respostas vagas. No primeiro questionamento (letra verde e menor), respondeu apenas à última pergunta da primeira parte e, na segunda, desse primeiro questionamento, que aparece na parte final do extrato, argumentou apenas a falta de um sinal, que em nada modifica a formulação incorreta da imagem. Em relação ao segundo questionamento (verde, tamanho médio), não aceitou a sugestão de analisar o domínio, considerando a fórmula para os valores da função, nada respondendo, e declarou não ter intenção de aperfeiçoar a justificativa sobre o domínio da função. Não cabe, portanto, dizer que houve perturbação, porque as poucas ações que realizou não modificaram os resultados das anteriores, de modo que não houve regulação.

Podemos pensar que os obstáculos levaram o aluno a cessar a ação por um alto grau de incompreensão, por um recalque cognitivo, que ocorre quando a questão não constitui um problema, e o sujeito não resolve porque não entende ou porque nada pensa sobre ele. Outra hipótese é a falta de disposição para o envolvimento na atividade intelectual proposta, uma atitude de "não-importismo", um tipo de reação que Piaget (1978b) observou em alguns sujeitos, quando submetidos a interrogatórios com o método clínico. Ocorre, nesses casos, que a pergunta feita aborrece o sujeito ou, de maneira geral, não provoca nenhum esforço de adaptação, e assim responde qualquer coisa e de qualquer forma.

Afastando o foco da tarefa propriamente dita, de forma a abarcar o contexto da atitude do estudante em relação ao curso, podemos pensar que o desejo de se envolver com os estudos não se transformou em vontade. E não ter vontade significa, para Piaget (1999), ter somente valores instáveis e momentâneos, não sendo o sujeito capaz de submeter-se a uma escala de valores. Para Piaget a vontade é como uma operação intelectual, porém de ordem afetiva. Quando há vontade, uma tendência inicialmente fraca de continuar um trabalho acaba sendo mais forte, mas tal só ocorre quando há descentração. A possibilidade que temos de nos libertar de um desejo atual pode acontecer de duas formas, por um duplo ato de reversibilidade: ou relembramos o passado ou antecipamos o futuro. *Relembrando o passado*, "isto quer dizer que estou comprometido, que o trabalho tem que ser terminado e tenho que fazer o meu trabalho". (PIAGET, 1999, p. 3). Da outra forma, *antecipando o futuro* significa "antecipo a satisfação que este trabalho me dará quando executado, no que vou sentir quando não estiver mais comprometido nesta tarefa que particularmente não é agradável para mim". (PIAGET, 1999, p. 3).

A análise dessa tarefa leva, portanto, a pensar em várias causas para o não-envolvimento de alguns estudantes com seus processos de aprendizagem, seja em tarefas isoladas ou num contexto mais geral. No caso do nosso aluno César, autor da tarefa que analisamos, essa mesma atitude aqui observada foi uma constante; desde o princípio mostrou-se contrariado ao fazer e refazer, como ele dizia, a mesma coisa. Não acolheu como um benefício uma possibilidade diferenciada de estudar e de aperfeiçoar sua ação buscando compreender além do simples fazer. Acabou abandonando o curso.

No Extrato 5 temos uma tarefa que ilustra outro caso, também diferenciado como perfil de estudante, agora em relação ao nível de desenvolvimento cognitivo, que merece ser observado com atenção.

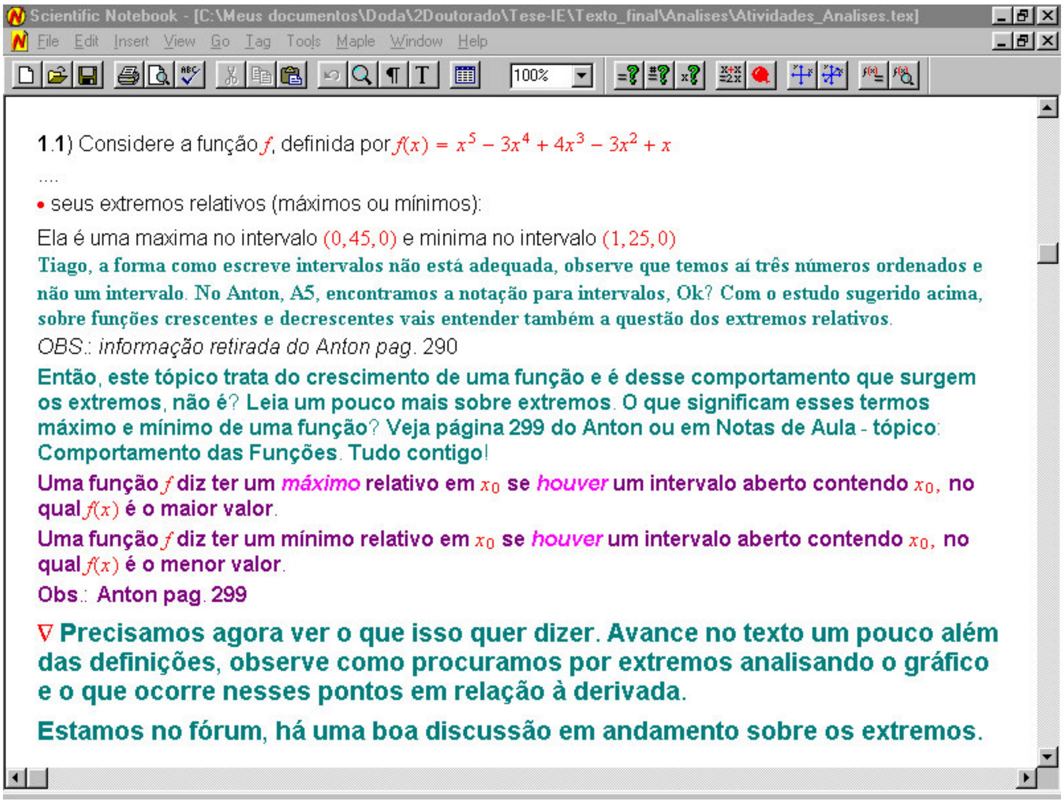


Figura 16: Extrato 5

Piaget (1976) refere que não podemos pensar em classificar as reações possíveis a uma perturbação interna ou externa em tudo ou nada. Entre o fracasso e o sucesso existem múltiplos intermediários, tentativas mais ou menos frustradas ou bem-sucedidas, que encaminham as regulações compensatórias.

É como uma tentativa de assimilação que interpretamos o desenvolvimento da tarefa acima. É como se o estudante se acercasse dos instrumentos de suporte à assimilação, estando a assimilação dos próprios instrumentos além dos seus esquemas. Ocorre a perturbação, o estudante mostra que quer levar adiante seu propósito de realizar a tarefa, e a perturbação é aqui uma lacuna, pela evidente falta de conhecimentos indispensáveis para resolver o problema. O que trouxe como reforço – as definições de extremos – à compreensão do significado de máximo e mínimo relativo não provocou nenhuma mudança. Transcreveu o que encontrou no livro, sem conseguir interpretar. Tiago não apresentou uma apropriação do objeto de conhecimento em suas respostas, tampouco conseguiu expressar sua autoria no processo de aprendizagem, pois, ao responder, copiou trechos do livro ou fez a citação da página em que o assunto é tratado. Parece colocar-se fora do processo de pensar a matemática, ou então, de conseguir dialogar com o objeto de conhecimento, não sendo possível assim nenhuma construção. Não houve, portanto, regulação, tampouco reequilibração.

Assim como nessa tarefa, Tiago apresentou muitas lacunas em todas as atividades e defasagens de estruturas lógicas. Formou-se no Ensino Médio, em um ano numa escola de supletivo, o que acreditamos tenha colaborado para um acúmulo de dificuldades. Observamos, especialmente, a falta de conhecimentos de conteúdos específicos relacionados aos conceitos estudados. Realizou todas as atividades e foi participativo no fórum. Porém, com atitudes que nos fazem pensar em fabulação (MACEDO, 1994), reação que caracteriza os alunos que reagem quando solicitados, mas sem apresentar raciocínio sobre o que expressam, representam um papel sem conseguir interpretá-lo. Com isso, não foi possível ao Tiago, durante esse curso, intensivo, transpor as dificuldades que encontrou e, assim, não reverteu sua condição de reprovado. Mostrou-se, no entanto, um apaixonado pelo Mecam e aguarda a sua terceira edição para refazer os estudos.

As situações de aprendizagem, ou melhor, de não-aprendizagem, que apresentamos nos Extratos 4 e 5 acima, representam os casos de dificuldades que encontramos no Mecam, com relação aos sujeitos da aprendizagem, que não conseguimos ultrapassar. César, desistente, não aceitou o desafio de investir em sua aprendizagem e, de alguma forma, o Mecam não foi para ele um ambiente motivador para os estudos. O estudante Tiago, ao contrário, mostrou querer aprender e recuperar as lacunas, mas não foi possível, ainda, ultrapassar as dificuldades de aprendizagem que apresenta. Tivemos outro aluno desistente, Felipe, que devido a compromissos profissionais não conseguiu se dedicar aos estudos depois da segunda semana do curso. Dos 12 estudantes do Mecam: César, Tiago e Felipe foram os que não reverteram a condição de reprovados.

Em relação aos processos de regulação dos estudantes, como forma de reequilibração frente a perturbações, conflitos ou contrariedades, identificamos nas tarefas de aprendizagem os três tipos de condutas de compensação: alfa, beta e gama, sendo algumas delas atravessadas por mais de um tipo de conduta. As próximas quatro tarefas são reveladoras de tais processos de equilibração, com predominância de condutas do tipo beta.

Os Extratos 6 e 7 contêm o desenvolvimento de uma tarefa proposta como complemento à atividade de estudos sobre funções trigonométricas. Tais funções merecem uma atenção especial em qualquer curso de Cálculo, não somente por modelarem uma grande quantidade de fenômenos naturais,[20] mas também pelo fato constatável de que muitos estudantes, no início dos cursos de graduação, não dominam os conceitos básicos da trigonometria, mesmo sendo esses objeto de estudo por longo período na escola, de acordo com a atual grade curricular de matemática do Ensino Médio.

[20] Em geral, fenômenos que apresentam repetições em períodos constantes podem ser modelados por funções trigonométricas.

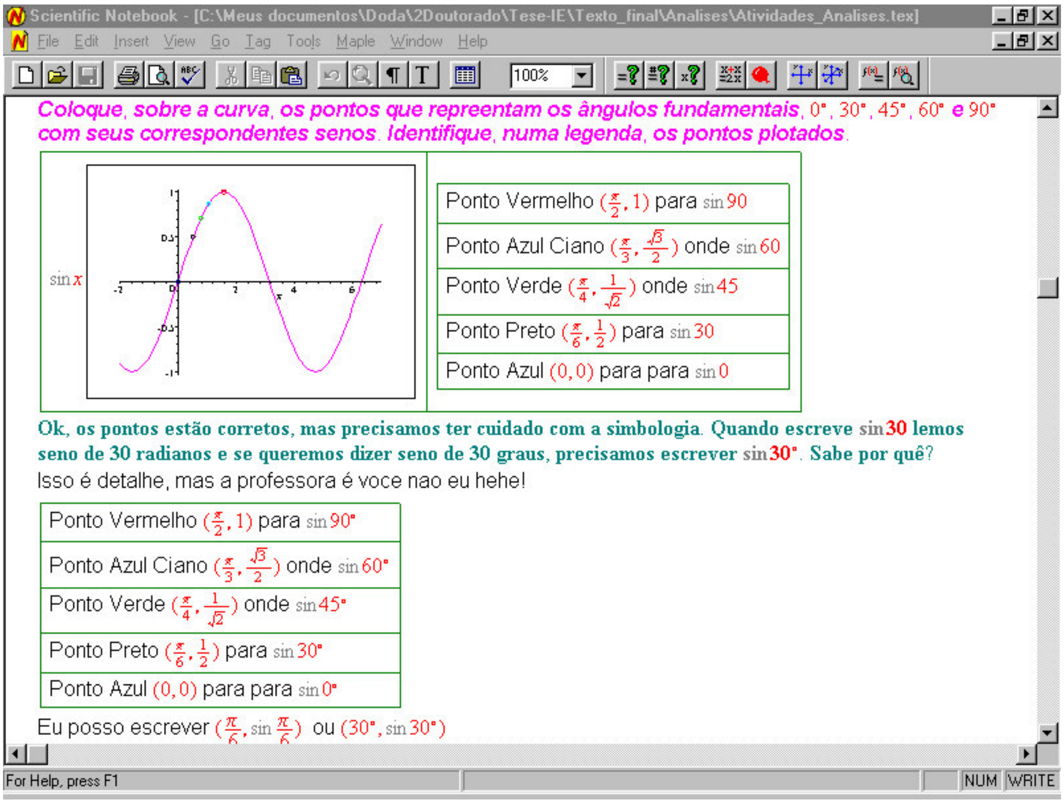


Figura 17: Extrato 6

O estudante iniciou resolvendo corretamente a questão, que consistiu em representar determinados pontos sobre a curva definida pela equação *y* = sen*x*. Numa metodologia onde somente o fazer corretamente é a expressão de aprendizagem, poderíamos considerar que o estudante mostrou saber que, para plotar um ponto sobre a senóide, deve considerar a medida do ângulo ou do arco como coordenada-*x* e sua correspondente imagem sen*x* como coordenada-*y*. A legenda ao lado do gráfico pode até passar despercebida, mas, se pretendemos uma aprendizagem que promova, além do fazer, o compreender, podemos aproveitar as oportunidades geradas pelos próprios estudantes.

Nesse caso específico, podemos observar que os pontos na legenda estão corretamente representados, o que não ocorre quando o estudante escreve sen30 para informar que plotou o ponto correspondente ao seno do ângulo de 30 graus.

Temos aqui uma boa oportunidade para chamar o estudante a refletir sobre a importância de atentar para os significados expressos na simbologia matemática. E com essa intenção propusemos uma primeira reflexão.

O novo fato apresentado parece indicar uma perturbação fraca, e o estudante demonstrou uma conduta de compensação do tipo alfa. Na verdade não tomou consciência do erro, negligenciou o alerta da professora sobre a diferença entre grau e radiano, e sua ação pareceu voltar-se mais a atender à solicitação da professora do que propriamente a uma exploração dos conceitos. Além disso, a observação que colocou logo abaixo da nova legenda – *Eu posso escrever* (π/6, *sin* π/6) ou (30°, *sin* 30°) – parece indicar que utilizou os esquemas de representação simbólica de grau e de radiano, mas não o de diferenciação entre ambos. Nossa segunda intervenção foi no sentido, então, de gerar uma perturbação que o levasse a refletir sobre essa diferenciação.

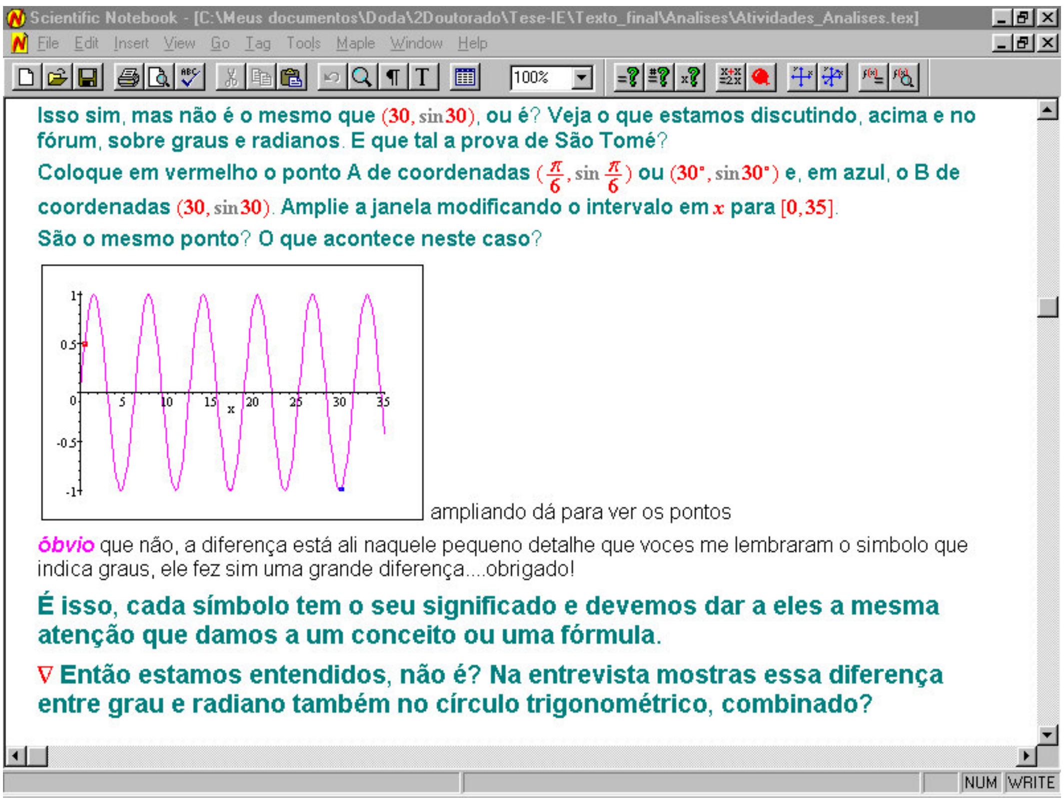


Figura 18: Extrato 7

O desequilíbrio foi gerado pela ação sugerida, e podemos pensar no confronto dos fatos como elemento perturbador e, agora, o estudante integrou-o em seu sistema que foi modificado de modo que simbolize as representações simbólicas de grau e radiano. O comentário que apresentou sobre a ação executada demonstra ter compreendido a diferença operatória das duas representações. A reequilibração ocorreu, agora, por uma conduta beta de compensação. O estudante retornou ao equilíbrio transformado, seu sistema cognitivo foi modificado pela assimilação do novo objeto.

Cabe ainda nesta análise um comentário sobre a metodologia do Mecam. Sugerir um pensamento em determinada direção ou uma ação complementar às tarefas, como fizemos nessa que analisamos, é um procedimento que utilizamos com freqüência, sempre que o estudante não encontra caminhos para a solução de problemas. Segundo Parrat-Dayan e Tryphon (1998), quando interpretam o que Piaget entende ser o papel do professor, sugerem que quando o aprendiz não encontra a solução, o professor deve ajudá-lo por meio de contra-sugestões e guiá-lo para soluções possíveis, mas de modo que a ação seja sempre do sujeito na construção das suas soluções. E é assim também que entendemos nosso papel no Mecam: questionar, orientar e sugerir de forma a proporcionar aos estudantes oportunidades de ações e reflexões que os levem à tomada de consciência sobre o saber-fazer, que os levem ao fazer com compreensão.

Nos próximos dois Extratos, 8 e 9, temos o desenvolvimento de uma tarefa de aprendizagem que envolve o conceito de taxa de variação média, que determina a média das variações das imagens por unidade de variação da variável independente, num determinado intervalo do domínio da função. Geometricamente essa taxa é o coeficiente angular, ou a inclinação, como utilizado no livro do

Anton (2000), da reta secante pelos pontos inicial e final do gráfico da função, no correspondente intervalo de variação.

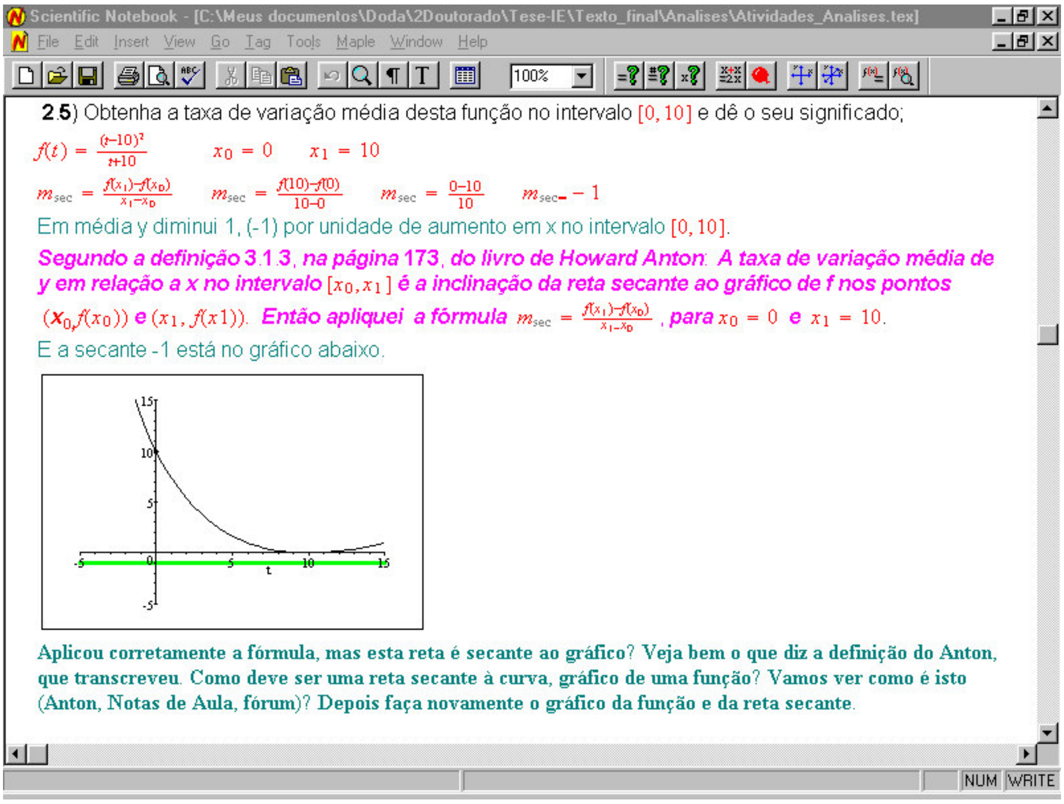


Figura 19: Extrato 8

A questão consiste, como podemos observar no início desse Extrato 8, em determinar e dar significado à taxa de variação média da função considerada no intervalo indicado. A resolução apresentada por Gabriela, autora da tarefa, está correta; calculou a taxa indicando-a como inclinação da reta secante. Justificou os cálculos, transcrevendo o conceito que encontrou no livro, e apresentou uma interpretação adequada para o valor obtido como taxa de variação média. Porém, a ilustração do significado geométrico da referida taxa não corresponde aos cálculos e à descrição apresentada. A assimilação desse significado foi deformante, mostrou uma reta horizontal a uma altura igual ao valor da taxa como sendo a reta secante.

Pensamos com isso que ela soube aplicar a fórmula, mas não compreendeu o significado geométrico do valor encontrado. Em nossa intervenção, procuramos colocar o conceito de reta secante como elemento perturbador.

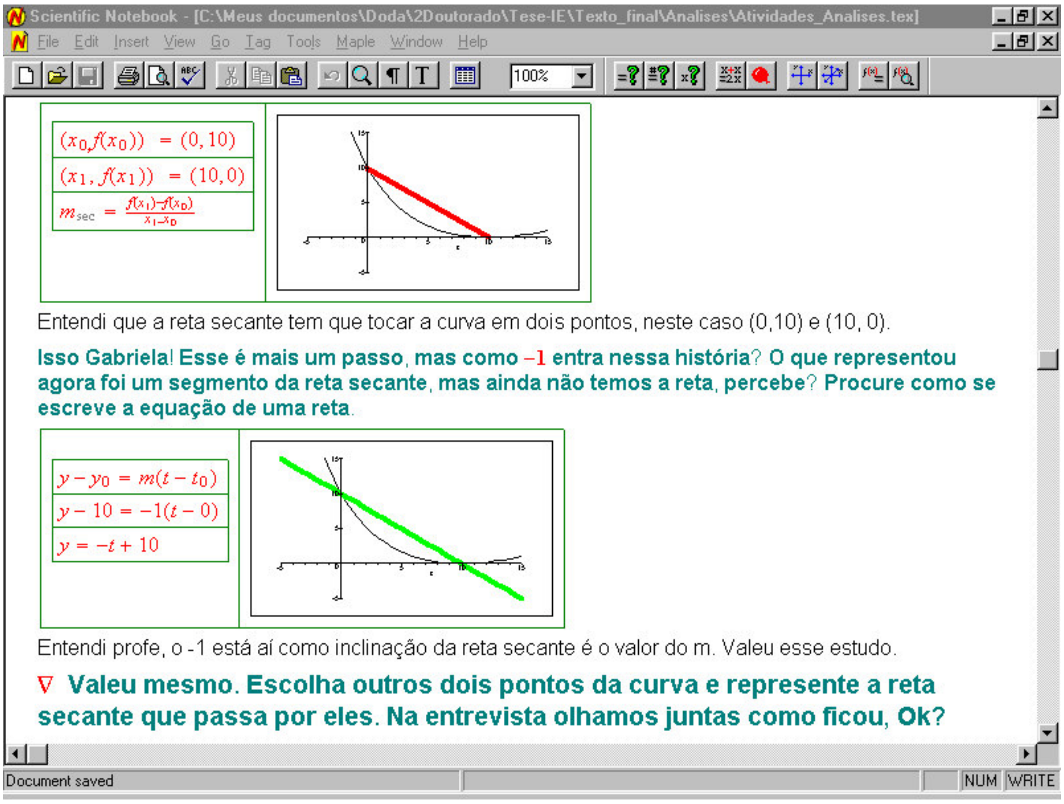


Figura 20: Extrato 9

Percebemos, na seqüência da tarefa, que a perturbação constituiu uma lacuna, ou seja, Gabriela não sabia o que era uma reta secante e a regulação: um *feedback* negativo ocorreu pela busca do conceito e, assim, compensou a perturbação por uma conduta beta. Ocorre, porém, que, centrada no conceito de reta secante, representou apenas um segmento da reta, como mostra o primeiro gráfico do Extrato 9, e não percebeu ainda a relação entre a reta e sua inclinação que calculou anteriormente.

Em nova intervenção, perguntamos, então, por essa relação. O novo elemento perturbador foi integrado em seu sistema e, novamente, por um *feedback* positivo, conseguiu concluir a ação por uma conduta beta. A explicação foi agora completada pela nova construção geométrica, acrescida do reconhecimento da compreensão. A estudante tomou consciência do seu fazer e atingiu assim o nível da conceituação, e o reequilíbrio ampliou o sistema cognitivo pela incorporação dos objetos construídos em sua ação.

A presente tarefa constituiu uma primeira abordagem do problema. Num segundo momento, o mesmo problema foi proposto, como complemento à atividade, num contexto de aplicação prática com o propósito de novamente promover a compreensão do significado da taxa de variação média. O problema é apresentado no Extrato 10, e a tarefa foi desenvolvida pelo estudante Lucas.

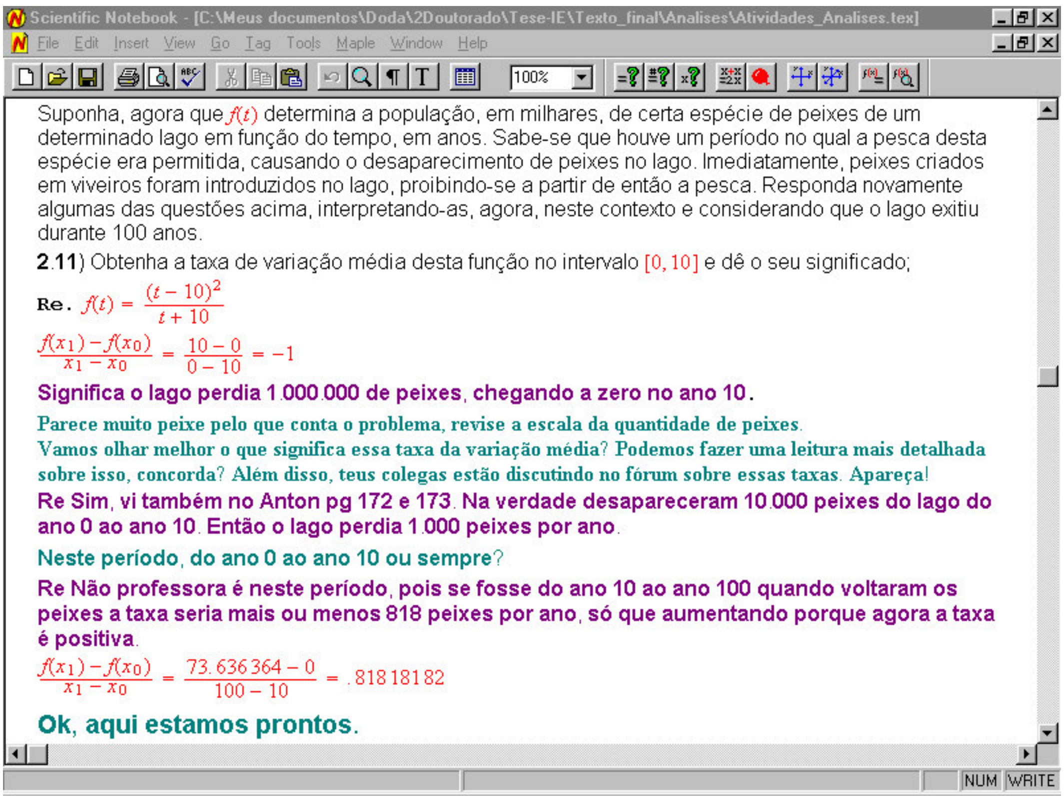


Figura 21: Extrato 10

O que queremos ressaltar nessa tarefa é o perigo da fragilidade da aprendizagem se levarmos em conta apenas a resolução pura e simples de um problema. No ensino tradicional de matemática, a formulação mais comum da questão, depois de enunciado o contexto do problema, seria algo assim: *Obtenha a taxa de variação média dessa função no intervalo* $[0,10]$, sem o complemento: *e dê o seu significado*. Quando se trata de um problema real, o significado da taxa de variação aparece com sua unidade, no caso peixes/ano, com interpretação do significado do sinal.

Solicitar ao estudante que, além de calcular, explique o que faz, o que significa o resultado que obtém é uma forma de promover uma reflexão sobre o fazer e possibilitar que mostre o que e quanto compreende dos conceitos que aplica na resolução de problemas.

Com uma metodologia, como a que propomos no Mecam, é possível avançar além da etapa da simples resolução. No caso dessa tarefa, a resolução numérica da taxa de variação média está correta, mas o que o estudante apresentou como significado da taxa indica que não compreendeu o seu significado. O questionamento proposto possibilitou que pesquisasse e refletisse sobre o objeto de conhecimento. A perturbação, que é uma lacuna, foi compensada por uma conduta do tipo beta. Melhorou sua explicação e, ao responder ao último questionamento, demonstrou que compreendeu, que integrou novo objeto em seu sistema cognitivo.

A próxima tarefa de aprendizagem, que consta nos Extratos 11 e 12, refere-se ao estudo de limites e é outro caso onde podemos observar um processo de equilibração com conduta de compensação do tipo beta.

O conceito de limite, bem como de certas técnicas operatórias relativas a ele, marca o início da quase totalidade dos cursos de Cálculo. Isso porque a derivada[21] é, em particular, um limite. Em decorrência da grande complexidade da sua definição, em geral, abordamos o conceito de limites de modo informal, através de exemplos numéricos ou gráficos. Numa idéia também simplificada, o limite de uma função, quando x tende a um valor x_0, descreve o comportamento da variação da imagem $f(x)$ de números x tomados cada vez mais próximos de x_0.

Na tarefa que vamos analisar a seguir, propusemos aos estudantes determinar o limite da função dada, quando x tende a -5, apresentando uma justificativa para a solução encontrada.

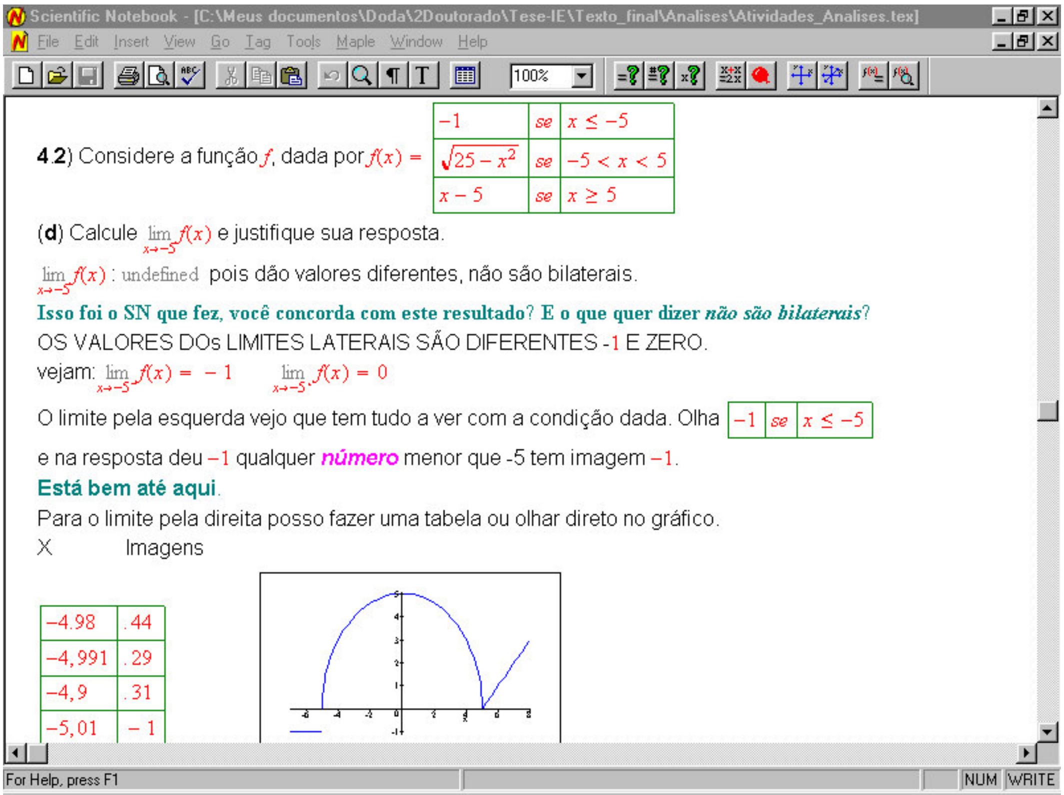


Figura 22: Extrato 11

---

[21] A derivada de $f(x)$ no ponto x_0, representada por $f'(x_0)$, é o limite de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quando x tende a x_0, ou seja, $f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Acompanhando a resolução, podemos dizer que o estudante entendeu a solução obtida com *software* de que o limite não existe, pois justificou com os limites laterais diferentes, também obtidos com o *software*. Ao argumentar sobre os limites laterais, explicou adequadamente o limite da função para valores à esquerda de -5, através do que entendeu pela fórmula da função e, para o limite da função à direita de -5, justificou que o mesmo pode ser observado no gráfico. Porém, a tabela que apresentou, como outra maneira de analisar o limite, nada revela sobre o valor obtido, o que nos leva a pensar que o estudante não compreendia o significado da expressão *x* tende a -5, ficando assim comprometida a assimilação do conceito de limite. Por isso questionamos sobre a tabela e também orientamos sobre o que sugere a expressão *x* tende a -5, conforme apresentamos no Extrato 12, na continuação do desenvolvimento da tarefa.

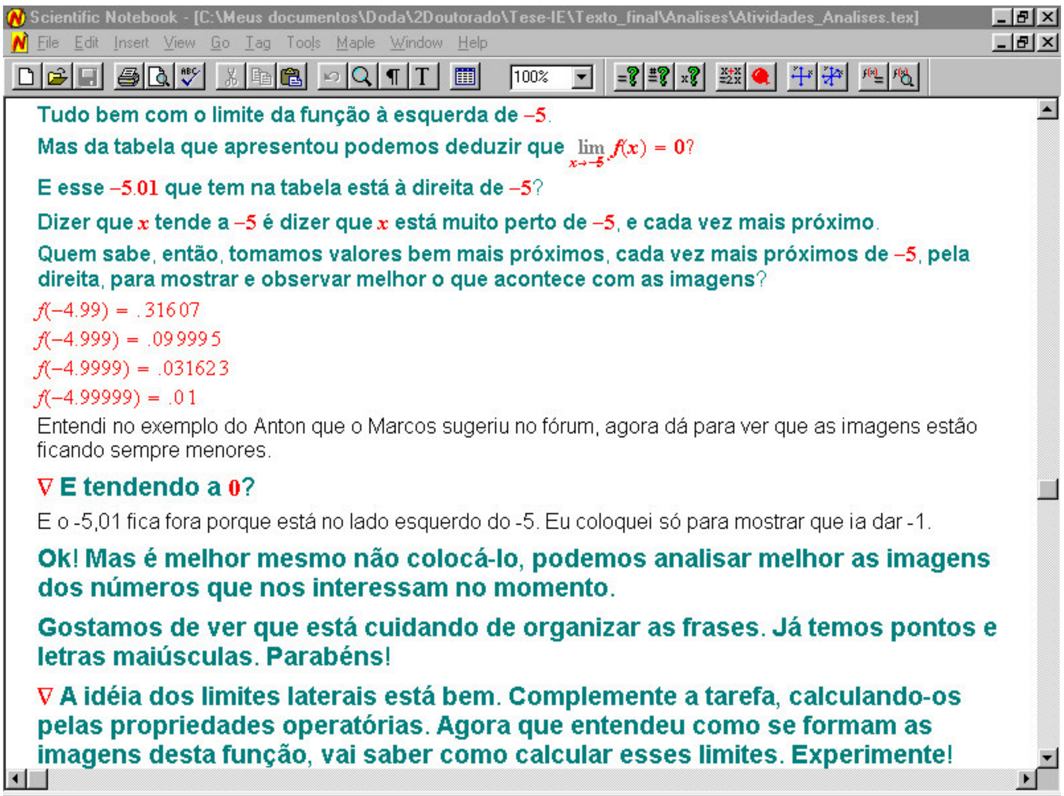


Figura 23: Extrato 12

A nova solução, pela seqüência de imagens, agora adequadas para a análise do limite, e o comentário apresentado são indicativos de que o estudante envolveu-se num processo de equilibração. Ao refazer a ação, modificando o resultado da anterior, demonstrou uma conduta de compensação do tipo beta. O novo equilíbrio agora é melhor e, com isso, ampliou o sistema cognitivo pela assimilação do conceito de limites laterais ao esquema de significação que não podia, até então, a ele se acomodar.

Essas quatro últimas tarefas de aprendizagem que analisamos revelam, pelo que pudemos observar, à luz da teoria da equilibração, processos de equilibração, cujas reequilibrações promoveram a melhoria de processos de conceituação dos estudantes. A evolução de um fazer mecânico, por simples utilização de fórmulas ou regras, para um fazer reflexivo sobre os significados dos conceitos envolvidos, indica uma construção de conhecimentos decorrentes da ação dos aprendizes, ações de transformação dos objetos com compreensão do processo dessa transformação.

As aprendizagens promovidas por esse fazer pedagógico podem ser entendidas, de certa forma, como crenças desencadeadas, que, de acordo com Piaget, “são influenciadas pelo interrogatório” (PIAGET, 1926, p.12) do método clínico, pois a forma como a pergunta é feita encaminha o raciocínio a uma certa direção, que leva o sujeito a sistematizar o conhecimento de uma certa forma. Entendemos que também no ambiente do Mecam as aprendizagens foram influenciadas pelos questionamentos e diríamos, então, num paralelo de expressões, que ocorreram aprendizagens desencadeadas, aprendizagem sempre em contextos de encadeamento de idéias que aproximam as ações dos conceitos matemáticos que as justificam ou que as antecipam.

Para completar essa primeira parte das análises, resta ainda apresentar algumas tarefas de aprendizagem onde identificamos condutas do tipo gama.

Tais tarefas, que se caracterizaram predominantemente por condutas do tipo gama, assim como aquelas onde ocorreram apenas condutas do tipo alfa, também não foram freqüentes durante o curso. As intervenções com questionamentos aconteceram sempre que identificamos resoluções inadequadas ou falta de compreensão dos objetos implicados nas questões. E, nos casos em que, já na apresentação da atividade, o estudante mostrava familiaridade com os conceitos envolvidos, buscamos com os questionamentos confirmar, ampliar ou aprofundar os níveis dos conhecimentos demonstrados, solicitando justificativas ou explicações, introduzindo novas abordagens para os mesmos conceitos ou a aplicação destes em outro tipo de função. Porém, com os novos questionamentos, com raras exceções, como as que apresentaremos a seguir, os estudantes enfrentaram perturbações que foram compensadas por condutas do tipo alfa ou gama.

Nas duas tarefas que seguem, observamos que os estudantes resolveram e explicaram com desenvoltura os questionamentos propostos. Na primeira, o estudante apresentou momentos de contradição, que foram depois compensados, e o desenvolvimento da segunda não revelou obstáculos. Ao contrário, o que se observa é sempre um fazer com compreensão.

Na primeira dessas tarefas, que apresentamos nos Extratos 13 e 14, propusemos aos estudantes uma ação em sentido contrário ao que geralmente se lhes apresenta. Ao invés de calcular a derivada da função em um determinado valor de *x*, que é o mais comumente solicitado, é preciso reconhecer primeiro a condição da derivada, através do contexto do problema, e determinar os valores de *x* que satisfazem tal condição. A questão consiste em determinar em que pontos a reta tangente ao gráfico da função dada é horizontal, o que é o mesmo que solicitar os valores de *x* nos quais a derivada é nula. Uma tal situação é geralmente mais complexa para os estudantes, pois exige uma operação em sentido inverso, e tal somente ocorre quando o pensamento se torna reversível, ou seja, conforme explica Franco (1998), quando é possível organizar as informações em sistemas, conseguindo lidar com as relações nesse sistema, indo e vindo, ou seja, de modo reversível.

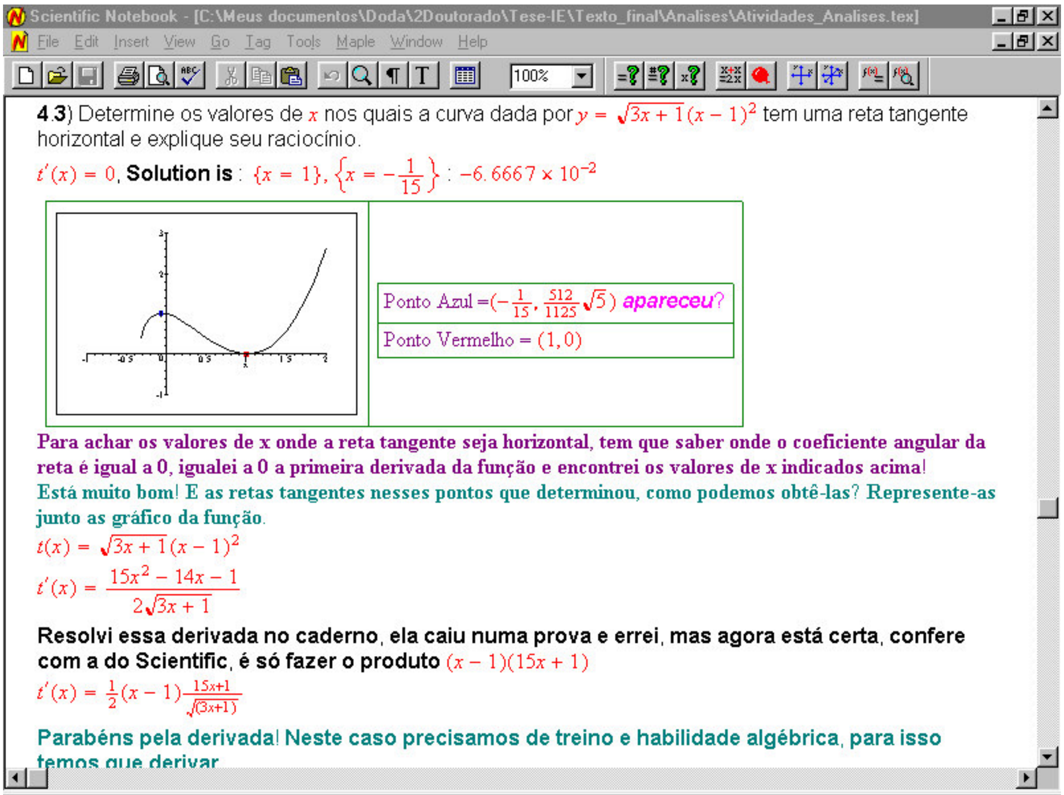


Figura 24: Extrato 13

O estudante Fernando resolveu adequadamente a questão com o *software*. A ilustração geométrica, em que apresentou o gráfico da função com os pontos onde a reta tangente é horizontal, e a sua explicação sobre por que buscou os valores que anulam a derivada indicam que compreendeu o significado geométrico da derivada e também assimilou o conceito de reta horizontal.

Pelo que respondeu em nossa primeira intervenção, quando solicitamos as equações e representações geométricas das retas tangentes, podemos pensar que o estudante mostrou uma contradição. Talvez pelo hábito da prática de exercícios de determinação de retas tangentes, onde o primeiro passo é, em geral, calcular a derivada e com ela concluir a inclinação da reta tangente. É aqui que podemos pensar numa contradição, pois parece que o estudante desconsiderou sua ação anterior, onde buscou conhecer os pontos do gráfico onde a reta tangente é horizontal, condição equivalente a que a derivada seja nula nas abscissas desses pontos. Nesse caso, podemos pensar que o sistema das transformações virtuais, em relação a essas noções, pode ainda não estar completo. Em relação à derivada da função, reconheceu que tentou determiná-la em uma prova, sem sucesso. Mas ao resolvê-la novamente, em seu caderno, conforme explicou, e apresentando a solução obtida, indicou uma conduta do tipo gama. A derivada não se apresentou mais como um elemento perturbador, melhorou seu esquema de assimilação, que se acomoda ao cálculo da derivada pretendida.

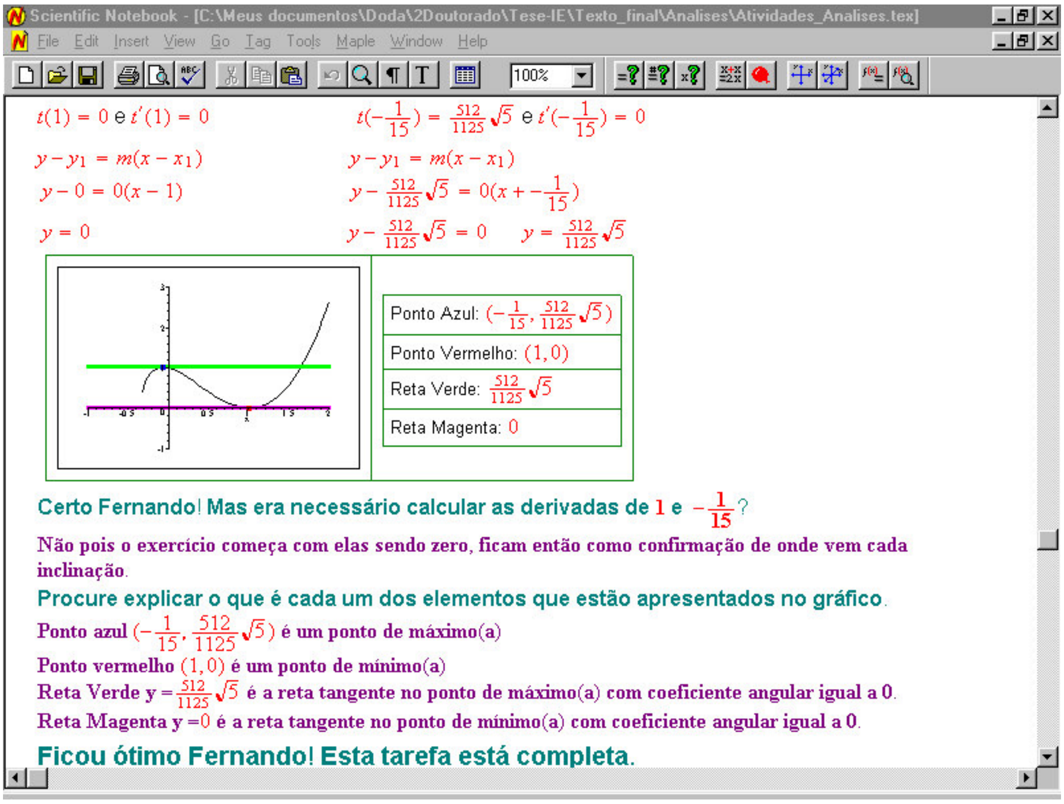


Figura 25: Extrato 14

Na seqüência da tarefa, conforme Extrato 14, o estudante determinou as equações das retas tangentes, numa forma em que mostrou entendimento, e a ilustração geométrica, agora completada com a representação das retas tangentes, demonstrou um fazer no nível da compreensão.

No segundo questionamento, quando perguntamos ao estudante pela necessidade das derivadas, percebeu que as mesmas já estavam determinadas. Mostrou que tomou consciência, não de um erro, que, de fato, não ocorreu, mas da contradição, quando afirmou que as derivadas ficariam como uma confirmação do que calculou. Com isso, compensou a perturbação por conduta do tipo beta.

Quando solicitado a explicar sobre o que entendia serem os elementos que representou junto ao gráfico da função, respondeu adequadamente e ampliou a descrição da resolução, identificando os pontos onde a reta tangente ao gráfico de uma função é horizontal, como pontos de extremos, que nesse caso são extremos locais da função.

Podemos pensar, a partir dessas observações, que houve no desenvolvimento dessa tarefa uma perturbação, compensada por conduta do tipo beta, e que, nas demais situações, as reações aos questionamentos foram condutas do tipo gama, pois foi possível ao estudante antecipar as variações exigidas nas diferentes ações que realizou e que, dessa forma, perderam a característica de perturbações e inseriram-se às transformações virtuais do sistema.

Na próxima tarefa de aprendizagem, podemos observar que o estudante não demonstrou momentos de obstáculos. Na questão apresentada, os estudantes deveriam expressar suas conclusões sobre a relação entre o crescimento ou decrescimento de uma função e a sua derivada.

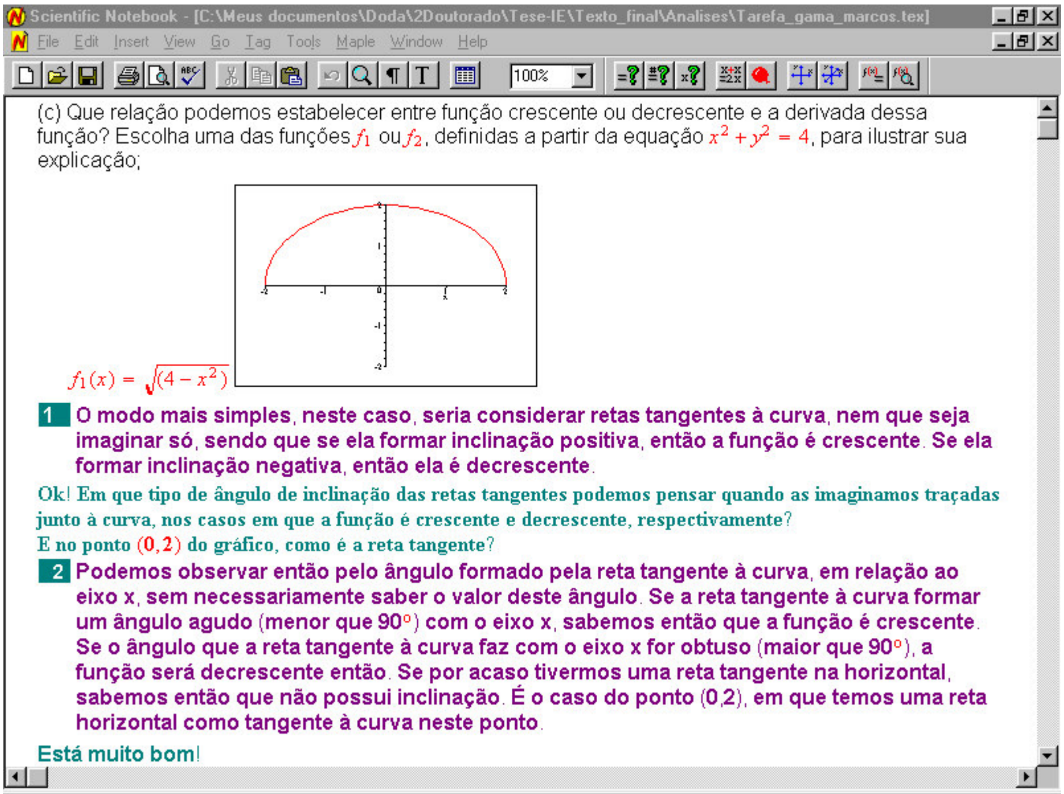


Figura 26: Extrato 15

Nas duas primeiras explicações, o estudante Marcos, autor dessa tarefa, demonstrou que operou em pensamento, quando revelou poder imaginar retas tangentes à curva. Ao responder ao primeiro questionamento, diz que não há necessidade de conhecer o valor do ângulo para concluir que a inclinação da reta é positiva ou negativa, ou seja, agiu sobre a representação mental das retas tangentes ao gráfico da função. Para Piaget (1978a) isso significa que dominou em pensamento a situação que resolve o problema, ou seja, compreendeu.

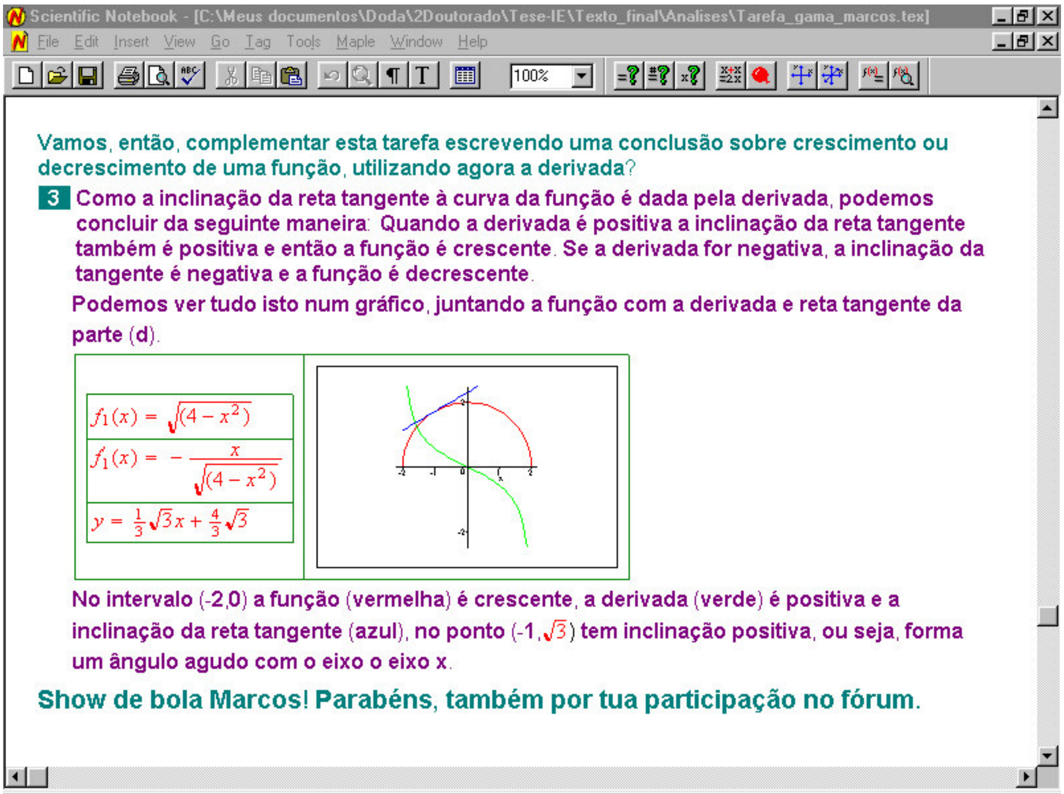


Figura 27: Extrato 16

Da mesma forma, ao responder ao segundo questionamento apresentado no Extrato 16, o estudante estabeleceu adequadamente a relação entre as inclinações das retas tangentes, obtidas através da derivada, e o crescimento ou decrescimento de uma função. A ilustração geométrica que acompanhou a explicação, além de criativa, expressou exatamente a conclusão que apresentou. Assim, traduziu verbalmente e também por representação geométrica o que processou no plano da ação realizada em pensamento.

Nossa conclusão, em relação ao que observamos no desenvolvimento da tarefa do Marcos, é que antecipou as variações possíveis, demonstrando que eram previsíveis e dedutíveis. Perderam, então, as características de perturbações, integraram o conjunto das transformações virtuais do sistema, como ocorre nas condutas do tipo gama.

É importante salientar em relação à conduta do tipo gama, conduta do tipo superior, que não devemos, de acordo com Piaget (1976), pensar que essas transformações não comportam compensações, mas estas ocorrem segundo uma significação nova. Cada transformação pode ser anulada ou invertida, como em situação de perturbação e de sua compensação, mas a diferença é que, no caso dessas transformações, as ações de sentido contrário não ocorrem de modo que uma tenda a anular a outra, mas são solidárias pelo fato de integrarem um mesmo sistema. “O sentido da compensação, por conseguinte, é de uma simetria inerente à organização do sistema, e não mais uma eliminação das perturbações.” (PIAGET, 1976, p. 67).

Considerando as reações dos estudantes frente aos questionamentos nessas tarefas de aprendizagem, onde identificamos a predominância de condutas do tipo gama, acrescentamos que é possível relacioná-las às crenças espontâneas, que Piaget (1926) refere, quando os sujeitos são submetidos ao método clínico. Podemos pensar que os questionamentos não geraram conflitos na construção das respostas e argumentos apresentados, e que as explicações dos estudantes foram fruto de reflexões consolidadas. Seus sistemas já se constituíam móveis e fechados e, assim, os questionamentos não produziram mais contradições.

Finalizamos, com isso, a primeira parte das análises, onde procuramos identificar, no desenvolvimento de diferentes tarefas de aprendizagem, a presença ou não de perturbações geradas pelos questionamentos, e processos de regulação com condutas de compensação do tipo alfa, beta e gama.

5.2 Movimento das aprendizagens

Neste segundo momento das análises, apresentamos quadros que resumem o movimento das aprendizagens, através de graus, que indicam avanços ou retornos no desenvolvimento dos estudos. Os estudantes receberam graus de aprendizagem em cada etapa das quatro atividades que constituíram a proposta de estudos do curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I.

A avaliação dos processos de aprendizagem é sempre um momento de aflição. Como fazer? Como integrar à metodologia um modo que reflita o processo de aprendizagem e que seja continuamente elemento de reflexão do professor e do aluno? Procuramos nos aproximar de um processo de avaliação contínua e cumulativa, que, de acordo com Hoffman (2003), permite acompanhar a construção do conhecimento, em seus aspectos de evolução e complementaridade. Segundo a autora, avaliar implica questionar, propor tarefas e recursos que auxiliem os alunos na construção das respostas. Entendemos ser essa a premissa da construção da proposta pedagógica do Mecam, e procuramos, como sugere Maraschin (2000), fazer da avaliação o acompanhamento reflexivo do fazer das professoras e dos estudantes, nas diversas etapas de desenvolvimento das atividades, e das condições de aprendizagem: os desafios propostos, o envolvimento dos estudantes, a própria metodologia sugerida, os recursos disponibilizados, enfim, todos os elementos do que convencionamos chamar como o ambiente de aprendizagem.

Os graus de aprendizagem expressam a qualidade das resoluções, considerada sob os aspectos do saber-fazer e do saber-explicar. O saber-fazer significa resolver corretamente a questão proposta e o saber-explicar significa justificar ou argumentar de modo a indicar um fazer com compreensão.

Utilizamos para os graus de aprendizagem a escala oficial de conceitos de desempenho da Universidade de Caxias do Sul, onde os processos de avaliação nas disciplinas devem ser traduzidos por conceitos inteiros: 0, 1, 2, 3, ou 4, de acordo com o percentual de aproveitamento dos estudantes. Nessa escala, se o percentual de aproveitamento for inferior a 60, o conceito será 0 (zero); se estiver no intervalo [60, 70), [70, 80) ou [80, 90),[22] o conceito será 1, 2 ou 3, respectivamente, e, se estiver no intervalo [90, 100], o conceito será 4.

No processo de avaliação do Mecam, os graus de aprendizagem são, portanto, 0, 1, 2, 3 e 4, em cada etapa do desenvolvimento das atividades, e cada novo grau atingido substitui o da etapa anterior. Como condição de aprovação no curso, estabelecemos o grau final mínimo 1 em cada uma das quatro atividades propostas.

Segundo os critérios estabelecidos para o registro das avaliações no Mecam, em cada etapa do desenvolvimento da atividade o grau 0 (zero) indica que o estudante não respondeu ou não apresentou um fazer com compreensão, para um mínimo de 60% das questões propostas. Ocorre, nesses casos, que, na maioria das questões, as reações do estudante frente às perturbações não ultrapassam a fase das condutas do tipo alfa ou, então, os questionamentos não geram perturbações.

---

[22] O intervalo do tipo [*a*, *b*) contém *a* e os números entre *a* e *b*.

Dessa forma, em no mínimo 60% das questões propostas na etapa observada, ocorrem situações como as que apresentamos nos Extratos 3, 4 e 5 da seção anterior, da análise das aprendizagens. Os graus 1, 2 e 3 indicam que o estudantes respondeu adequadamente, sabe fazer e sabe explicar, em torno de 60%, 70% e 80% das questões que compõem as tarefas de aprendizagem, respectivamente. Em relação às análises das tarefas de aprendizagem, como processos de equilibração, esses graus 1, 2 e 3 indicam, respectivamente, que em torno de 60%, 70% e 80% das questões, são observadas reações às perturbações correspondentes a condutas do tipo beta ou gama; o grau 4 indica que o estudante respondeu adequadamente, sabe fazer e sabe explicar 90% ou mais das questões, sendo, agora, as condutas do tipo beta e gama observadas em praticamente todas as tarefas de aprendizagem.

Os dados apresentados, nos quadros que seguem, foram retirados das fichas de avaliação[23] dos estudantes, disponibilizadas em suas pastas, no ambiente do Mecam. As mesmas foram atualizadas após cada análise das atividades, quando das apresentações ou aperfeiçoamentos propostos, a fim de permitir aos estudantes o acompanhamento permanente do processo de avaliação.

Cada quadro possui cinco colunas: na primeira, temos os graus de aprendizagem; a segunda, terceira e quarta colunas, contêm os nomes dos estudantes, dispostos de acordo com os graus obtidos na apresentação da atividade, no primeiro e no segundo aperfeiçoamentos, respectivamente; na última coluna os nomes dos estudantes são dispostos conforme o grau que atingiram na entrevista presencial.

No quadro 4, a seguir, apresentamos o movimento das aprendizagens relativamente à primeira das quatro atividades da segunda edição do Mecam.

[23] Apresentamos, no Anexo 4, uma ficha de avaliação.

Grau	Apresentação	Aperfeiçoamento1	Aperfeiçoamento2	Entrevista
4				
3				Gabriela
2		Adolfo Felipe Fernando Gabriela Lucas Marcos Reinaldo	Adolfo Felipe* Fernando Gabriela Lucas Marcos	Adolfo Fernando Lucas Marcos Murilo Reinaldo
1	Adolfo César Felipe Fernando Gabriela Lucas Marcos Murilo Marina Reinaldo Ramon Tiago	Murilo Marina Ramon Tiago	Murilo Reinaldo Ramon Tiago	Marina Ramon
0		César*	Marina	Tiago

Quadro 4: Movimento das aprendizagens da primeira atividade

* Não concluiu a atividade.

Observamos no quadro 4 que, na apresentação da primeira atividade, os 12 estudantes obtiveram grau 1. Essa primeira etapa da atividade 1, como comentamos anteriormente, foi realizada no encontro presencial que marcou o início do curso e, “num acordo de cavalheiros”, combinamos o grau 1 coletivo, pois as questões foram realizadas no grande grupo, com a presença dos alunos, das professoras e das monitoras. Esse grau, brincaram os estudantes, garantia a eles, até aquele momento, a aprovação no curso. Porém, todos se comprometeram a elevar seu grau no primeiro aperfeiçoamento da atividade.

O compromisso assumido foi cumprido pela maior parte dos estudantes. No primeiro aperfeiçoamento dessa atividade, sete estudantes atingiram o grau 2, apresentando cerca de 70% das questões com resolução adequada, quatro estudantes confirmaram o grau 1, apresentando boas resoluções e entendimento em 60% das questões, e um baixou seu grau para 0 (zero), indicando um aperfeiçoamento insatisfatório da atividade.

No segundo aperfeiçoamento, os estudantes responderam aos questionamentos feitos sobre o que apresentaram no primeiro. No quadro dessa atividade, percebemos que nove estudantes mantiveram os graus da etapa anterior: seis deles permaneceram com grau 2, e três com grau 1, indicando assim que responderam adequadamente aos novos questionamentos das tarefas, em cerca de 70% e 60%, respectivamente. Observamos ainda que dois estudantes baixaram seus graus: Reinaldo que, no primeiro aperfeiçoamento, atingiu o grau 2, com os novos questionamentos apresentou outras dificuldades, que conseguiu ultrapassar depois, na etapa da entrevista; o mesmo ocorreu com Marina, que, nesse segundo aperfeiçoamento, não desenvolveu satisfatoriamente as tarefas, mas que, na entrevista, mostrou ter atingindo novos e melhores equilíbrios.

Na coluna correspondente à entrevista presencial, observamos que quatro dos seis estudantes que estavam com grau 2, no segundo aperfeiçoamento, confirmaram os conhecimentos demonstrados até essa etapa, mantendo assim o grau 2 conquistado; uma estudante avançou seu grau para 3, indicando que, além de confirmar os conhecimentos demonstrados, aperfeiçoou algumas tarefas, respondendo aos questionamentos feitos sobre o que apresentou no segundo aperfeiçoamento, mostrando assim boas resoluções e compreensão em cerca de 80% do total das questões propostas para essa etapa final da atividade; dos quatro estudantes que estavam com grau 1 na terceira etapa, um deles apenas confirmou os conhecimentos demonstrados, dois avançaram para o grau 2, complementando parte das tarefas com questões em aberto, após o segundo aperfeiçoamento, e o estudante Tiago não confirmou na entrevista o que apresentou nas etapas anteriores. Os estudantes Felipe e César não concluíram a primeira atividade. César cumpriu apenas a etapa da apresentação e Felipe seguiu até o segundo aperfeiçoamento.

Grau	Apresentação	Aperfeiçoamento1	Aperfeiçoamento2	Entrevista
4			Marcos	Marcos
3		Felipe Marcos	Felipe*	Adolfo Gabriela
2	Felipe Gabriela	Adolfo Fernando Gabriela Lucas	Adolfo Fernando Gabriela Lucas Murilo Reinaldo	Fernando Lucas Murilo Reinaldo
1	Adolfo Fernando Lucas Marcos Murilo Marina Reinaldo	Murilo Marina Reinaldo Ramon Tiago	Marina Ramon Tiago	Marina Ramon
0	César Ramon Tiago	César*		Tiago

Quadro 5: Movimento das aprendizagens da segunda atividade

* Não concluiu a atividade.

Nessa segunda atividade, os alunos iniciaram individualmente as resoluções e podemos observar uma maior dispersão em relação aos graus de aprendizagem na apresentação da atividade. A maioria dos estudantes apresentou em torno de 60% das questões bem desenvolvidas, três estudantes não atingiram o grau de aprendizagem 1, e dois estudantes conquistaram, na apresentação, o grau de aprendizagem 2.

No primeiro aperfeiçoamento, sete estudantes avançaram seus graus de aprendizagem, respondendo aos questionamentos sobre o que apresentaram na primeira etapa, e cinco estudantes permaneceram com os graus da etapa anterior. Apenas o estudante César permaneceu com grau de aprendizagem insuficiente nesse aperfeiçoamento da atividade 2.

No segundo aperfeiçoamento, houve melhoria nos graus de aprendizagem para três estudantes, permanecendo os demais com os graus do primeiro aperfeiçoamento.

Na entrevista presencial, praticamente todos os estudantes confirmaram os conhecimentos demonstrados na realização da atividade, mantendo os graus do segundo aperfeiçoamento. Dois estudantes avançaram para o grau 3, complementando questões que ficaram em aberto, e apenas o estudante Tiago não confirmou o grau 1 obtido na etapa do segundo aperfeiçoamento.

Destacamos nessa atividade a qualidade dos graus de aprendizagem: sete estudantes concluíram as tarefas com boas resoluções e explicando adequadamente, no mínimo, 70% das questões propostas, indicando dessa forma que as condutas de reação aos questionamentos foram, em sua maioria, do tipo beta e gama.

Observamos também que somente um dos estudantes baixou seu grau no decorrer das quatro etapas, para o grau zero, o que ocorreu na entrevista presencial. Os estudantes Felipe e César não concluíram essa segunda atividade.

Grau	Apresentação	Aperfeiçoamento1	Aperfeiçoamento2	Entrevista
4				
3		Adolfo Reinaldo	Adolfo Fernando Marcos Murilo Reinaldo	Adolfo Fernando Gabriela Marcos Murilo Reinaldo
2	Adolfo Lucas Marcos Murilo Marina Reinaldo Ramon	Fernando Gabriela Lucas Marcos Murilo Marina Ramon	Gabriela Lucas Marina Ramon	Lucas Marina Ramon
1	César* Fernando Gabriela			
0	Felipe Tiago	Felipe* Tiago	Tiago	Tiago

Quadro 6: Movimento das aprendizagens da terceira atividade

* Não concluiu a atividade.

Na atividade 3, os estudos foram sobre trigonometria, um assunto onde os estudantes em geral apresentam dificuldades. Percebemos, no entanto, que os estudantes do Mecam demonstraram um bom desenvolvimento das tarefas propostas. Essa atividade gerou, no fórum, muitas discussões e todos se beneficiaram com as trocas e com as boas sugestões apresentadas.

Como podemos observar, no quadro 6, sete estudantes atingiram grau 2 na apresentação da atividade, e os estudantes não baixaram os graus conquistados. Quatro estudantes avançaram seus graus no primeiro aperfeiçoamento, três avançaram no segundo e uma estudante avançou seu grau de aprendizagem na entrevista.

Nessa atividade, com exceção do estudante Tiago, que permaneceu em todas as etapas com grau 0 (zero) e dos estudantes César e Felipe, que não concluíram a atividade, os demais conquistaram, no mínimo, o grau 2, indicando assim reações com condutas do tipo beta ou gama para a faixa de 70% a 80% frente aos questionamentos propostos.

O quadro 7 que apresentamos a seguir expressa o movimentos das aprendizagens no decorrer do desenvolvimento da quarta atividade, proposta na segunda edição do Mecam.

Grau	Apresentação	Aperfeiçoamento1	Aperfeiçoamento2	Entrevista
4				
3	Adolfo Ramon	Adolfo Murilo Reinaldo	Adolfo Marcos Murilo	Adolfo Marcos Murilo Reinaldo
2	Gabriela Marcos Murilo Reinaldo Tiago	Fernando Gabriela Marcos Marina	Fernando Gabriela Reinaldo	Fernando Gabriela Marina
1	Felipe Fernando Lucas	Felipe* Lucas Ramon Tiago	Lucas Marina Ramon Tiago	Lucas Ramon
0	Marina			Tiago

Quadro 7: Movimento das aprendizagens da quarta atividade

* Não concluiu a atividade.

Nessa última atividade do curso, os estudantes obtiveram, na etapa da apresentação, graus bastante diversificados, de 0 (zero) a 3. Como podemos observar, no movimento das aprendizagens do quadro 7, os estudantes Marina, Reinaldo apresentaram avanços e retornos em seus graus, no decorrer do desenvolvimento da atividade e dois estudantes, Tiago e Ramon, baixaram seus graus depois da etapa da apresentação.

Os estudantes Lucas, Gabriela e Adolfo mantiveram em todas as etapas os mesmos graus de aprendizagem, 1, 2 e 3, respectivamente.

O estudante Fernando, que obteve grau 1 na apresentação, avançou para 2 no primeiro aperfeiçoamento e o manteve até a etapa da entrevista; Murilo passou do grau 2, na etapa da apresentação, para 3 nas demais etapas; Marcos permaneceu com grau 2, obtido na etapa da apresentação, no primeiro aperfeiçoamento e avançou para o grau 3, no segundo aperfeiçoamento, confirmando-o na entrevista presencial; Felipe não concluiu a atividade, e o estudante César não a apresentou.

Os movimentos das aprendizagens dos quadros 4 a 7 demonstram que o progresso no desenvolvimento das aprendizagens foi muito significativo, não somente pelos graus finais de cada atividade, onde a maior parte dos estudantes conquistou graus de aprendizagens acima do grau 1, mínimo para a aprovação, mas, também, retomando os quadros com olhar comparativo, podemos observar que houve progressos nas aprendizagens, à medida que o curso evoluía.

A comparação que não pode ser feita é a que sugere a observação da sucessão das atividades, ou seja, não podemos comparar, por exemplo, os graus finais de aprendizagem das atividades 1 e 2, pois as mesmas não foram desenvolvidas uma após a conclusão da outra. Combinamos com os estudantes, no primeiro encontro presencial, somente os prazos finais para a apresentação de cada atividade e um único prazo para a conclusão das atividades. Assim, cada estudante precisou organizar seu processo de estudos, pois desenvolveu simultaneamente diferentes etapas de cada atividade. Tal fato se deve ao caráter intensivo do curso, ao respeito às diferentes velocidades de aprendizagem e também à orientação das professoras, pois as atividades propostas foram elaboradas de forma que os conteúdos essenciais da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I constituíssem questões em todas as atividades. Procuramos, assim, promover os estudos realizados em qualquer atividade, de modo que propiciassem melhores condições para o desenvolvimento das demais.

Considerando os graus finais de cada atividade, observamos que, com exceção do Tiago, que não alcançou grau suficiente para a aprovação, e dos estudantes César e Felipe, que não concluíram o curso, os demais, em sua maioria, conquistaram bons graus de aprendizagens. Constatamos esse fato na tabela 2, a seguir, onde destacamos quantos estudantes obtiveram cada grau final, em cada uma das quatro atividades desenvolvidas ao longo do curso.

Tabela 2: Graus finais nas atividades

Grau	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4
4	0	1	0	0
3	1	2	6	4
2	6	4	3	3
1	2	2	0	2
0	1	1	1	1

Com graus finais 2, 3 e 4 encontramos a maior parte dos estudantes. Esses graus de aprendizagem foram alcançados por sete, sete, nove e sete estudantes nas atividades 1, 2 , 3 e 4, respectivamente. Com isso, podemos dizer que 70% ou mais das tarefas de aprendizagens, realizadas ao longo do curso, constituíram processos de equilibração, onde as reações às perturbações foram condutas do tipo beta e gama, que caracterizam um saber-fazer e um saber-explicar, um fazer com compreensão.

O grau final, no curso, foi definido após a entrevista presencial, onde cada estudante pôde sugeri-lo a partir da análise dos graus finais obtidos em cada atividade, do grau de desempenho que cada um atribuiu a si mesmo na segunda auto-avaliação e do grau representativo da sua participação no fórum. Alguns estudantes sugeriram a média dos graus como grau final, enquanto outros optaram pelo grau mais freqüente. Vale destacar que nenhum dos graus finais seria diferente, se a decisão fosse somente das professoras. No quadro 8, abaixo, temos todos os estudantes, desistentes ou não, distribuídos de acordo com o grau final obtido no curso da segunda edição experimental do Mecam.

Grau	Estudantes
4	
3	Adolfo, Gabriela, Marcos e Murilo
2	Fernando, Lucas e Reinaldo
1	Marina e Ramon
0	Tiago
desistentes	César e Felipe

Quadro 8: Graus finais no curso

Entendemos, com isso, que a proposta pedagógica do Mecam possibilitou, não apenas, que nove dentre 12 alunos conquistassem sua condição de aprovados em Cálculo Diferencial e Integral I, mas também que todos vivessem uma experiência pedagógica diferenciada, cujos benefícios esperamos se reflitam na vida de cada estudante, promovendo mudanças em seus modos de estudar e de aprender.

Encerramos este capítulo das análises, novamente com a fala dos estudantes, agora sobre como perceberam o que consideramos ser a essência da metodologia do Mecam: o desenvolvimento da compreensão sobre os significados dos objetos matemáticos e, como conseqüência, dos procedimentos algébricos ou geométricos onde estão inseridos; uma prática pedagógica que propomos como uma possibilidade de promover melhores condições de aprendizagem de matemática. No quadro 9, apresentamos a questão, proposta para esse fim, e as respostas de 11 dos 12 estudantes dessa segunda edição do Mecam.

Sobre o lema do Mecam: "Pensar a respeito do que sabemos, como sabemos, como fazemos para saber e o que estamos fazendo e aprendendo ajudará a aumentar o grau de consciência sobre nossa aprendizagem". Saber fazer contas e aplicar fórmulas é importante, mas achamos que mais importante é identificar, primeiro, que fórmula aplicar e qual conta fazer. Como você analisa essa ação reflexiva sobre os significados dos conceitos como forma de desenvolver o entendimento e a aprendizagem?

(Os depoimentos foram mantidos na íntegra.)

Estudante	**Depoimento**
Adolfo	Acho que vocês estão 100% certas e concordo com vocês em gênero, número e grau. Gostaria de estudar sempre assim.
Felipe	Eu sou um exemplo errado da forma de estudar sobre cálculo. Na minha participação no Mecam, tive que me ausentar da cidade várias vezes, e não consegui participar o suficiente e estudar, depois das duas primeiras atividades. O resultado foi que não estudando e não compreendendo o que estava nos enunciados, fiz os cálculos e os desenvolvimentos superficialmente e logo vi não obteria êxito. A minha opinião é que o entendimento gera conhecimento.
Fernando	O método usado no Mecam é um ótimo método para aprender, vamos dizer que ele mudou minha maneira de estudar, e de refletir sobre questões e maneiras múltiplas de solução e entendimento do seu resultado.
Gabriela	Se levarmos esse lema para todas as disciplinas, no final do curso, não seremos mais uma turma formada, mas sim uma turma de profissionais qualificados. Não basta sabermos calcular e aplicar todas as fórmulas, mas saber o significado, o porquê, somente assim estaremos realmente aprendendo.
Lucas	Como foi feito no Mecam, onde nunca era dado a resposta de cara, mas sim uma dica pra chegar nela, para mim isso é

	importante, pois faz desperta a curiosidade em aprender.
Marcos	Eu concordo com tudo isto também. Desde o colégio, eu sempre fazia os cálculos sem saber o "porquê" disto. Em Cálculo I, não foi muito diferente também. Até poderia saber aplicar as fórmulas, etc., mas não um significado de saber por que usar tal fórmula em determinada questão. Creio que este foi até um fator de ter sido reprovado, pois na prova você não sabe talvez o que usar, porque não entendeu o objetivo de se usar as determinadas fórmulas e conceitos que aprendeu. O Mecam, sem dúvida, me fez pensar muito sobre isto. E com certeza, me ajudou e muito nos significados do que aprendemos em Cálculo. Outra coisa, com o Mecam, por incrível que pareça, comecei a gostar de estudar. Eu gostei de ficar resolvendo as atividades, de colocar as idéias e perguntas no fórum, foi muito legal!!!
Murilo	Durante esse período vivido com vocês, nós de algum jeito sentimos esse lema, pois como falei na primeira avaliação, vocês abordam os assuntos profundamente, seja qual for o detalhe vocês buscam aperfeiçoá-lo, e com essa estratégia dá para matar futuras dúvidas dos alunos.
Marina	É muito importante compreender a questão antes de sair aplicando qualquer fórmula ou qualquer resposta. Se existe uma compreensão, mesmo sem acesso a fórmulas, temos a idéia de como proceder para a resolução do exercício e muitas vezes o resolvemos por dedução, sem o auxílio de fórmulas ou do que está nos livros.
Reinaldo	Isso é muito importante saber fazer e saber o que se está fazendo, não simplesmente aplicar a fórmula e resolver a questão e sim saber de onde vem e o que significa.
Ramon	Saber o significado do que se está fazendo é muito importante para o entendimento dos conceitos, além de tudo saber porque se estará fazendo e identificar qual o tipo de conceito a ser aplicado, é um ótimo jeito de se aprender cálculo. Não fazendo simplesmente por fazer.
Tiago	Na realidade eu achei muito proveitoso, pois aprendi que meu objetivo não era ter uma resposta, mas sim entender, ver de onde saiu, ver qual fórmula usar, às vezes, sabendo que estava usando a formula certa, não chegava ao resultado esperado, porém o mais importante era saber que era aquela fórmula, daí era só pensar no desenvolvimento para chegar no resultado.

Quadro 9: Pareceres sobre a metodologia do Mecam

O que percebemos nos pareceres dos estudantes é que desenvolveram um processo consciente de aprendizagem, reconhecendo benefícios por um estudo onde procuraram se ater ao significado dos conceitos aplicados. Orientando-os pelos questionamentos, ao invés de fornecer respostas, como prática da metodologia do

Mecam, foram incentivados a buscar por si mesmos formas de reequilibração frente às perturbações geradas. Entendemos, assim, que a metodologia do Mecam colaborou também para o desenvolvimento da auto-estima e da confiança. Em nenhum momento do curso observamos nos estudantes qualquer manifestação de desagrado por terem sido reprovados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Essa condição foi o que os levou ao Mecam, mas o dissabor da reprovação pareceu superado pelo envolvimento com os estudos e pela satisfação demonstrada por estarem aprendendo. Destacamos, em especial, nesses pareceres, o reconhecimento dos estudantes de que a matemática pode ser compreendida e de que estudar matemática pode não ser sofrimento, pode até ser um prazer!

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Tratamos, nesta tese, da aprendizagem matemática, um problema que nos inquieta e que envolve vários aspectos, que se refletem em demonstrações de insatisfação por parte de professores e estudantes, frente a dificuldades que se agravam ano após ano. Como dissemos, em várias oportunidades neste trabalho, entendemos fazer parte de nossa função, enquanto professores, propor alternativas pedagógicas que visem colaborar para a melhoraria das condições de aprendizagem.

Neste capítulo final, nos propomos, inicialmente, a retomar algumas questões e constatações que julgamos importantes no decurso das análises e que nos levam a responder às questões deste estudo. Esse exercício, juntamente com outras constatações e indagações, com as quais nos deparamos no desenvolvimento do trabalho, torna possível, num segundo momento, a explicitação de novas questões e possibilidades de estudos futuros.

Em nossa pesquisa construímos um ambiente de aprendizagem, com metodologia de intervenção, inspirada no método clínico e apoiada por recursos tecnológicos, que se destina à realização de estudos complementares para alunos reprovados em disciplinas iniciais de matemática de cursos de graduação. Com o Mecam, os estudantes podem retomar os estudos, sem refazer a disciplina e, com isso, acrescentamos ao procedimento acadêmico regular a possibilidade de dar continuidade a um processo de construção de conhecimentos já iniciado.

Optamos, ao delinear a metodologia, por um procedimento questionador, que permita identificar saberes já construídos e objetos matemáticos ainda não compreendidos, e que considera a exploração dos significados uma possibilidade de favorecer a compreensão de noções e conceitos matemáticos.

Ao longo do trabalho, descrevemos o caminho da pesquisa que levou à construção da proposta pedagógica do Mecam e sua implementação na realização de duas edições experimentais. Apresentamos dois momentos de fundamentação teórica: primeiro, no capítulo 2, sobre os princípios que embasaram a proposta pedagógica: o método clínico, a elaboração de idéias através da escrita e o computador na aprendizagem da matemática e, segundo, no capítulo 3, sobre a opção por orientações pedagógicas construtivistas, o compreender em matemática e a teoria da equilibração, onde encontramos subsídios para a análise das aprendizagens geradas com a metodologia do Mecam. Os resultados permitiram evidenciar que as ações e reações dos estudantes, frente aos questionamentos, podem promover níveis de conhecimentos mais elaborados, um requisito para o que denominamos de aprendizagem.

Os dados que analisamos são oriundos da segunda edição experimental do Mecam. Consideramos a primeira um estudo-piloto, através do qual adequamos a proposta e os recursos tecnológicos, disponibilizados no ambiente, para a realização do segundo curso de Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I.

Dedicamos o primeiro momento das análises às tarefas de aprendizagem desenvolvidas pelos estudantes, onde buscamos pelo reconhecimento de perturbações provocadas pelos questionamentos e, quando assim se caracterizaram, das condutas de compensação frente às perturbações.

Nessa etapa das análises, nosso interesse voltou-se, portanto, para a identificação de desequilíbrios gerados pelos questionamentos e para os processos de reequilibrações advindos das interações com os objetos matemáticos.

Consideramos o saber-fazer e sua transformação para um saber-explicar como indicativo de desenvolvimento de compreensão das noções pesquisadas, como assimilação dessas noções em estruturas de significação. Segundo Piaget (1995a), é a assimilação, entendida como integração de qualquer realidade a uma estrutura, o fundamental na aprendizagem, e, assim, deve se constituir na preocupação central do ponto de vista das aplicações pedagógicas.

Nas atividades desenvolvidas pelos estudantes, observamos uma diversidade de situações representadas nesse trabalho pelas tarefas de aprendizagem analisadas no capítulo 5.

As situações que classificamos como não-importismo ou fabulação revelaram o perfil de estudantes para quem a proposta do Mecam não foi de proveito pleno, se consideramos a possibilidade de reverter a condição de reprovação. Tais situações ficaram concentradas, como reações aos questionamentos, para dois dos 12 estudantes participantes dessa edição experimental.

Para um dos estudantes a proposta do Mecam não foi suficientemente convidativa aos estudos e, com isso, não concluiu o curso. Limitou-se, nas atividades que apresentou, a resolver as questões, de acordo, apenas, com suas idéias iniciais sobre as noções e os conceitos ali envolvidos. Não considerou os questionamentos sobre o primeiro fazer ou pensar, como uma possibilidade para aperfeiçoamentos, pois não demonstrou qualquer tipo de busca que indicasse um esforço na direção do entendimento ou de uma reformulação para o que apresentava. Para esse estudante, os questionamentos não provocaram perturbações, pois não demonstrou reações que indicassem seu envolvimento no processo de aprendizagem.

Entendemos ser oportuno, nesse caso, destacar a importância de o aluno aceitar o convite à aprendizagem. Ao mesmo tempo, não podemos deixar de reconhecer que muito do perfil inerte de alguns estudantes é moldado ao longo dos anos por práticas pedagógicas que dão ênfase à reprodução do que foi mostrado pelo professor, práticas que não os envolveram em ações de pensamento, que não consideraram possibilidades de gerar e defender idéias, que não propiciaram o desenvolvimento da compreensão dos objetos de conhecimento. O saber-fazer, em geral, de acordo com o modelo, foi suficiente. Reconhecemos, portanto, a dificuldade e a resistência de alguns estudantes de se envolverem em processos alternativos de aprendizagem, especialmente quando constituem situações diferenciadas de suas práticas rotineiras. Por outro lado, desejaríamos que todos aceitassem o desafio de outra forma de fazer, que investissem e se empenhassem na direção do objetivo almejado. Mas, para tal, é imprescindível que o desejo inicial, segundo Piaget (1999), transforme-se em vontade, que aponte, então, para uma postura que busca conquistar uma nova forma, também, de ser estudante.

O segundo desses estudantes buscou avançar no que lhe foi possível, naquilo que sua condição permitiu. Apresentou muitas dificuldades, lacunas cognitivas que não conseguiu preencher no período destinado à realização dos estudos no Mecam. O caráter intensivo do curso foi prejudicial a ele, que demonstrou necessitar de um tempo maior, talvez, sem determinação de quantidade, a fim de que lhe fosse possível recompor também a matemática básica requisitada para o desenvolvimento do Cálculo.

Esse estudante foi participativo e mostrou disposição. Mas o que apresentou no desenvolvimento das atividades foi, na maior parte das tarefas, o que observamos na figura 16 das análises: reprodução de trechos do livro ou das notas de aula, aplicação de algoritmos, como num jogo de encaixe de peças por tentativas, repetição de trechos de discussões do fórum, sem conseguir expressar sua autoria ou pensamento crítico. Seu comportamento revelou o que Piaget (s.d.) denomina de fabulação: respondeu, mas sem demonstrar raciocínio. O fato de ter estado (como que) de fora do processo de pensar a matemática, de dialogar com o objeto de conhecimento, não lhe permitiu assimilar conceitos básicos e fundamentais do Cálculo I. O que demonstrou como perturbação não o levou a comportamentos de regulação. Segundo Piaget (1976), parece adequado, numa tal situação, pensar que regulações não foram possíveis devido a situações de incompreensão que se mantiveram no decorrer do curso.

Com isso, não reverteu sua condição de reprovado em Cálculo Diferencial e Integral I. Mesmo assim, apresentou melhorias em vários aspectos, especialmente no que destacamos: adquiriu boa familiaridade com o *software* e com os recursos tecnológicos disponibilizados no ambiente do Mecam, aprendeu a localizar os assuntos no livro, melhorou na expressão escrita, na utilização da simbologia matemática e na interpretação de gráficos. Por conta desse progresso, sua opção foi aguardar a terceira edição do Mecam e estudar matemática básica, com o auxílio do Núcleo de Apoio ao Ensino da Matemática do Departamento de Matemática e Estatística, onde os estudantes do Centro de Ciências Exatas da Universidade de Caxias do Sul podem buscar auxílio com acadêmicos do curso de Licenciatura Plena em Matemática, num programa personalizado de (re)construção de conhecimentos matemáticos dos níveis fundamental e médio. Esperamos, portanto, na terceira edição do Mecam, colaborar com esse estudante em seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, a partir do que elaborou nessa edição do programa.

Em relação ao perfil dos estudantes do Mecam, podemos dizer que, de certa forma, identificamos a variedade de situações com as quais nos deparamos também em sala de aula. Considerando os dois estudantes citados, um pareceu querer apenas ver o que é o Mecam, mas (como se fosse) do lado de fora, sem disposição para se envolver nem para dedicar do seu tempo a parcela requerida para os estudos. Muitos estudantes, em nossas salas de aula, também relutam contra a idéia de estudar, escrever, explicar e argumentar em matemática. Em expressões que encontramos nos textos das atividades desse aluno, como: [...] *não tenho tempo de fazer isso de novo*! *Isso é coisa de matemática ou de português*? *Já fiz essa atividade*. [...] *digam, então, como querem que eu faça*, identificamos posturas de contrariedade, de querer saber apenas se está certo ou errado o resultado que apresentou. A tomada de consciência dos benefícios que se acrescem ao fazer com compreensão não ocorre de modo simples, quando os estudantes estão habituados a um fazer matemático instrumental. É um processo lento e exige determinação, porém essa é a condição, para que seja possível aplicar o conhecimento de forma crítica.

Por outro lado, o segundo estudante representa os que chegam à universidade com muitas dificuldades, acumuladas em suas histórias de interação com as instituições educativas e que têm efeitos em seu desenvolvimento cognitivo. Reconhecemos a necessidade de um grande esforço para a retomada de um processo que apresenta muitas lacunas e/ou defasagens no desenvolvimento de estruturas lógicas de pensamento. Muitos desistem, e os que persistem precisam investir mais tempo em seus estudos e estar dispostos a conviver, por vezes, com períodos que intercalam fracassos e sucessos, na construção de conhecimentos e estruturas de assimilação que possibilitem a superação de dificuldades.

Nesse sentido, outros projetos poderiam vir de encontro à necessidade de acolher velocidades diferenciadas de aprendizagem e, também no Mecam, mesmo propondo avançar os períodos acadêmicos regulares, cabe buscar a possibilidade de ampliar os prazos finais, quando o estudante caminha na direção da construção de conhecimento, mas com a necessidade de um tempo bem maior.

Tivemos ainda um terceiro estudante do Mecam que não reverteu a reprovação anterior. Não concluiu o curso pela necessidade que se apresentou de ter que atender a compromissos profissionais. Este representa a parcela de estudantes com os quais convivemos também em nossas disciplinas regulares, cuja sobrecarga imposta pelo trabalho limita, e por vezes impede, que se dediquem aos estudos.

Os demais estudantes foram bem-sucedidos, revertendo a reprovação, e representam 75% dos alunos da segunda edição. É um resultado animador como índice de aprovação, especialmente se o comparamos com a média, em Cálculo Diferencial e Integral I, de alunos aprovados por semestre (48%), obtida no levantamento que realizamos em 2001, na fase da elaboração do projeto, como destacamos no capítulo 1.

Conforme demonstramos na tese, a aprovação, nesse caso, resulta do fato de que as interações, no ambiente do Mecam, promoveram perturbações cognitivas no decorrer do desenvolvimento das atividades de estudo para 10 dos 12 alunos dessa edição. Incluímos, aqui, um dos estudantes desistentes, o terceiro ao qual nos referimos anteriormente, pois as tarefas que realizou e aperfeiçoou, no período dos estudos, constituíram aprendizagens decorrentes de processos de equilibração.

As análises mostraram que as tarefas de aprendizagem podem ser interpretadas como processos de equilibração, que promoveram melhorias nos sistemas cognitivos dos estudantes, na medida em que demonstraram ultrapassar um fazer instrumental, por aplicação de fórmulas ou regras, e se envolveram, orientados pelos questionamentos e pelas sugestões propostas, num fazer reflexivo sobre os significados dos conceitos envolvidos.

As reações frente às perturbações puderam ser observadas nas respostas apresentadas aos questionamentos, onde os estudantes complementaram as resoluções, como *feedbacks* positivos, preenchendo lacunas, quando lhes faltaram conhecimentos para concluir uma determinada ação. De outro modo, as análises revelaram, também, modificações na ação, como *feedbacks* negativos, indicando tomada de consciência de erros, quando os questionamentos sugeriam resoluções ou argumentações inadequadas. As novas ações indicaram uma busca e um fazer reflexivo, quando os estudantes revelaram compreensão em suas explicações, demonstrando, assim, que modificaram seus esquemas, a fim de tornar possível a assimilação de noções e de conceitos matemáticos.

Constatamos, ainda, nas análises, a não-implicação obrigatória, entre perturbação como geradora de regulação e desta como geradora de compensação, conforme explica Piaget (1976). Observamos que os questionamentos não geraram perturbações para um dos estudantes e, para outro, as ações frente aos questionamentos não constituíram regulações, em grande parte das tarefas realizadas, onde novas respostas não modificaram os resultados das anteriores. Porém, para os demais estudantes, constatamos, nos retornos aos questionamentos, modificações ou complementos nas tarefas de aprendizagens que interpretamos como condutas de compensação do tipo alfa, beta ou gama.

Identificamos condutas do tipo alfa em respostas que expressaram equilíbrios instáveis, por negação de outras anteriores ou negligência de fatores apontados ou implicados nas resoluções apresentadas. Tais condutas permearam grande parte das tarefas de aprendizagem; porém, na maioria dos casos, constituíram situações intermediárias de equilibração, que levaram a outras, compensadas por condutas do tipo beta.

As condutas de compensação do tipo beta foram observadas quando resoluções ou explicações, inicialmente inexistentes, inadequadas ou incompletas foram apresentadas, transformadas ou complementadas, indicando ações de interação com os objetos matemáticos. Tais ações envolveram, a partir dos questionamentos ou das sugestões propostas, pesquisas nos materiais de estudo, discussões no fórum, explorações numéricas e geométricas com o *software*. Os retornos, com novas resoluções ou explicações verbais melhoradas, revelaram reflexão e tomadas de consciência que modificaram os objetos de conhecimento, permitindo, com isso, que fossem assimilados, ou que assimilações deformantes fossem modificadas por novos processos de equilibração. As condutas de compensação do tipo beta indicaram, portanto, que os estudantes retornaram ao equilíbrio transformados: seus sistemas cognitivos foram modificados, ampliados por assimilação de novos objetos de conhecimento. A predominância, observada nas tarefas de aprendizagem, de condutas do tipo beta, confirma a possibilidade de desencadear aprendizagens através da proposta pedagógica Mecam.

As condutas gama caracterizaram as reações aos questionamentos onde não evidenciamos a presença de perturbações. As resoluções algébricas, numéricas ou geométricas ou as argumentações demonstraram um saber-fazer e um saber-explicar próprios de quem já integrou as noções ou os conceitos matemáticos em seu sistema cognitivo. Essas condutas podem ser explicadas por elaborações que, de acordo com Piaget (1976), integram um conjunto completo de transformações virtuais, de forma que os processos de assimilação e acomodação decorrem de estruturas cognitivas já consolidadas. Entendemos como coerente o fato de essas condutas não terem sido freqüentes no Mecam, considerando que os estudantes desenvolveram um processo de (re)construção de conhecimentos através de uma proposta pedagógica, cuja metodologia buscou rastrear as dificuldades de aprendizagem.

Desse primeiro momento das análises concluímos, portanto, como resposta à nossa primeira subquestão de tese, que a proposta pedagógica do Mecam possibilitou aos estudantes desenvolver aprendizagens como decorrentes de processos de equilibração. A metodologia, inspirada no método clínico e apoiada por recursos tecnológicos, foi desenvolvida com o propósito de gerar perturbações, e possibilitou promover ações e reflexões, como reações frente aos questionamentos. Com isso, na maior parte das tarefas de aprendizagem, as perturbações desencadearam mudanças, processos de regulação, que propiciaram o fazer e o significar e, assim, o compreender. E ocorreram também, para todos os sujeitos, situações de aprendizagem nas quais as perturbações constituíram, em cada etapa, lacunas ou obstáculos à assimilação, até aquele momento, intransponíveis. Tais situações ficaram caracterizadas por tarefas de aprendizagem cujos questionamentos permaneceram em aberto.

Os objetos de conhecimento só se configuram como tais à medida que são assimilados por nosso sistema cognitivo. Mas a construção do objeto, do significado, depende do ato de significar, e a significação, para Piaget, segundo Ramozzi-Chiarattino (1988), é o resultado da possibilidade de assimilar.

Com o segundo momento das análises, buscamos responder à segunda subquestão desta tese: como as condutas frente às perturbações se relacionam com o movimento das aprendizagens dos estudantes? Observamos como as condutas dos estudantes, frente aos questionamentos, relacionaram-se ao aproveitamento dos estudantes, considerando os graus de aprendizagens definidos nos critérios de avaliação.

Com a proposta pedagógica do Mecam, procuramos fazer com que os questionamentos operassem como perturbações, que provocassem desequilíbrios entre os esquemas prévios de assimilação. E, através de orientações na utilização dos recursos tecnológicos e dos materiais recomendados para os estudo, de sugestões com abordagens diversificadas para os conceitos, de incentivo à socialização dos conhecimentos no fórum, procuramos promover formas de interação com os objetos matemáticos, que desencadeassem processos de regulação, que levassem à reorganização ou construção de novos esquemas de significação. O alvo, portanto, do que buscamos promover com a metodologia do Mecam, foi a aprendizagem significativa, como resultado de reequilibrações, que implicam o fazer e o compreender, no sentido dado por Piaget (1978a), que consiste, então, em dominar em pensamento o fazer, a razão das coisas e o porquê das ligações constatadas.

Nossa concepção de aprendizagem em matemática considera importantes o saber-fazer e o saber-explicar, e o aprimoramento de ambos por ações próprias do fazer-matemático (observar, representar, estimar, interpretar, avaliar, argumentar, comparar, deduzir, formalizar) e de reflexões sobre as ações e sobre os próprios objetos matemáticos.

Definimos, com isso, os graus de certificação das aprendizagens, seguindo as normas para registro de desempenhos da Universidade de Caxias do Sul. Conforme demonstramos nos quadros 4 a 7, dos movimentos das aprendizagens correspondentes, respectivamente, às atividades 1 a 4, os estudantes aprovados alcançaram graus de aprendizagem 1, 2, 3 e 4, em relação ao saber-fazer e saber-explicar, ao compreender, que interpretamos como reações aos questionamentos, com condutas do tipo beta ou gama em, respectivamente, 60%, 70%, 80% e 90% das questões propostas, em praticamente todas as etapas de desenvolvimento das atividades. Desses estudantes, apenas três baixaram seus graus no decorrer da realização das atividades: dois retrocederam seus graus em uma das etapas da primeira e da quarta atividades e outro apenas numa etapa da quarta atividade. Os demais estudantes aprovados, seis dos nove, mantiveram ou avançaram seus graus no decorrer da realização das tarefas de aprendizagem.

Quanto aos graus de aprendizagem que definiram os conceitos finais nas atividades, destacamos, conforme tabela 2 do capítulo 5, o grau mínimo 2 conquistado em todas as atividades, por sete dos nove estudantes aprovados, sendo a atividade 3 concluída pelos nove estudantes com conceito 2, que expressa condutas do tipo beta ou gama em, pelo menos, 70% das questões propostas em cada atividade.

Ressaltamos, em relação à certificação das aprendizagens, que mesmos graus não revelaram pontos comuns de chegada. Diferentemente de processos de desempenho que avaliam por levantamento de acertos e erros, com instrumentos como provas de questões que indagam por uma única resposta, a metodologia do Mecam possibilitou analisar quanto o estudante avançou a partir da sua condição inicial, de acordo com sua história, e de acordo também com o seu envolvimento e a disposição em retomar e refletir sobre suas ações. Assim, os pontos de partida foram os mesmos – as questões iniciais de cada atividade – mas os percursos e os pontos de chegada, nas diversas tarefas de aprendizagem, constituíram particularidades delineadas pelos questionamentos, a partir do que cada estudante apresentou nas diversas etapas de desenvolvimento das atividades.

Os conceitos finais de aprovação, reunidos no quadro 8, revelam que nove, dos 12 participantes, foram aprovados no curso Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I, na segunda edição experimental do Mecam e, conseqüentemente, conquistaram aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Os conceitos na disciplina, passaram, com isso, a ser 1, 2 e 3 para, respectivamente, dois, três e quatro estudantes. Esses graus declaram também que em, respectivamente, 60%, 70% e 80% das tarefas de aprendizagem, identificamos condutas do tipo beta e gama, como reações aos questionamentos propostos.

Constatamos, assim, que os estudantes do Mecam desenvolveram processos progressivos de aprendizagem em cada uma das atividades, com graus que expressam condutas de regulação, frente aos desequilíbrios cognitivos provocados pelos questionamentos, que lhes permitiram ultrapassar conflitos e incompatibilidades por processos de equilibração majorante.

Dessa forma, nosso objetivo em analisar, com base na teoria da equilibração, os efeitos gerados através dessa proposta pedagógica, que integra recursos tecnológicos e uma metodologia de intervenção, tornou possível evidenciar a aprendizagem de noções e conceitos matemáticos no ambiente de aprendizagem do Mecam; aprendizagens que resultaram de processos de equilibração, perturbações e regulações, decorrentes das intervenções do professor e das ações dos sujeitos sobre os objetos de conhecimento, ações de transformação dos objetos com compreensão do processo dessa transformação.

Além de apresentar nossas conclusões a respeito das subquestões e questão geral desta tese, julgamos pertinente trazer outras constatações e indagações, que entendemos vinculadas à pesquisa e aos resultados obtidos.

Destacamos em relação à tecnologia que a mesma integrou a proposta pedagógica como suporte e possibilidade do seu desenvolvimento. Primeiro, propiciando que o curso fosse desenvolvido ampliando-se a distância entre os participantes, uma forma de conciliar a diversidade de interesses, necessidades, espaço e tempo, e, também, de oportunizar aos estudantes a vivência de um aprender que pode ser redimensionado por práticas pedagógicas que incorporam a tecnologia. Um processo que pode transformar ambas, pedagogia e tecnologia, se a opção for por caminhos de construção do conhecimento, do pensamento coletivo, de espaços de convivência dos sujeitos da educação, alunos e professores e ambos como aprendizes.

Segundo, permitindo a construção do ambiente de aprendizagem com recursos para incrementar a metodologia, com expedientes do modo convencional como atividades de estudo, leituras, resolução de problemas e cumprimento de compromissos agendados, mas agregando a esses outras possibilidades propiciadas por recursos telemáticos. Não tivemos como propósito, neste estudo, comparar ambientes presenciais e virtuais, até porque nosso entendimento é de que ambos vão servir às concepções de ensino e aprendizagem do professor que os propõe. Mesmo assim, não podemos deixar de ressaltar que, em nossa pesquisa, o ambiente de aprendizagem foi um fator determinante dos resultados alcançados. É difícil pensar a metodologia do Mecam sem o apoio do ambiente virtual e do suporte tecnológico que permitiu a realização das atividades num processo permanente de interações nos arquivos das atividades, no correio interno e, especialmente, no fórum. Tornou-se, pois, um recurso de interação imprescindível, que possibilitou processos coletivos e colaborativos de aprendizagem, através dos quais os estudantes puderam receber (e prestar) auxílio dos colegas, das monitoras e professoras em suas dificuldades relacionadas a questões matemáticas ou tecnológicas. A proximidade entre os participantes do Mecam foi intensa, o cuidado que todos demonstraram, uns com os outros, foi para nós um motivo de grata surpresa e uma experiência ainda não vivida em muitos anos de atuação em ambientes presenciais.

Quanto à utilização do *software*, com o qual os estudantes realizaram as atividades, destacamos que suas características de editor de textos, e de textos matemáticos, e de processador algébrico, numérico e geométrico, permitiram que implementássemos a metodologia proposta.

O registro de todas as formas de interação propiciou a sistematização das participações dos estudantes nos espaços dedicados às perguntas freqüentes e às produções coletivas e, com isso, a criação de outros materiais de apoio à realização dos estudos e à utilização da tecnologia, produzidos pelos próprios estudantes, conservando seu modo de conversar. Além disso, permitiu às professoras e aos estudantes acompanhar os processos de interação e de aprendizagem, e, dessa forma, melhores condições para a avaliação. Esta se constituiu, também, num elemento de colaboração e reflexão, na medida em que tornou possível retomar os processos de pensamento em vários momentos, a inclusão ou modificação de abordagens ou recursos, como auxílio na construção de noções e de conceitos, ao longo da elaboração das produções matemáticas.

A necessidade, e também a possibilidade, que todos tiveram de escrever para se comunicar, perguntando ou respondendo, explicando e argumentando no fórum e nos arquivos das atividades, colaborou para a elaboração e organização de idéias e para o conhecimento dessas construções cognitivas, o que, no ensino tradicional de matemática, em geral não acontece.

O ambiente do Mecam constituiu, portanto, um ambiente de aprendizagem como o próprio termo sugere, um espaço para a construção de estruturas de pensamento capazes de transformar os modos de assimilação. Interpretamos essa condição favorável como vinculada aos fatores tecnológicos que destacamos, não por sua condição isolada de recursos telemáticos, pois por si mesmos nada garantem nem qualificam um ambiente como construtivista, mas por possibilitarem e potencializarem a metodologia do Mecam.

Acreditamos ter sido essa metodologia inspirada no método clínico, cuja prática foi garantida pelo envolvimento das professoras e bolsistas monitoras, que deu ao Mecam esse significado de estratégia pedagógica, denominada de *método mecam* pelos alunos, fundamentada no desenvolvimento de estruturas de pensamento. Orientados pelos questionamentos e desafios propostos pelas professoras, os alunos que se envolveram foram agentes no desenvolvimento de aprendizagens. Nesse processo pedagógico, a dimensão afetiva foi de relevância inquestionável. Ao professor cabe o papel de problematizador e instigador, com a responsabilidade de estar atento ao processo, valorizando as participações do aluno e procurando envolvê-lo em ações que requisitam sua participação em atividades de estudo, de colaboração, de socialização de idéias próprias e de conhecimentos; e o aluno deve apresentar-se com disposição, entendida como assumir sua parte, ao que Piaget (1999) denomina de vontade, para o exercício do pensar, pesquisar, explicar e argumentar e, especialmente, com disposição para rever e analisar resultados e de buscar por novos ou por seus fundamentos.

Esperamos, assim, que dessa experiência, proporcionada aos participantes do Mecam, não registrem apenas a oportunidade que tiveram de rever sua condição de reprovados numa disciplina, mas que a mesma os fortifique em sua condição de estudantes, de construtores do seu conhecimento, e que se configure como colaboradora no desenvolvimento de condutas compatíveis com as habilidades e competências requeridas para a formação profissional e humana. É possível que muitos dos nossos alunos, quando egressos, não utilizem o instrumental do Cálculo em sua vida profissional, mas acreditamos que nenhum deles estará liberado de atuar com capacidade de identificar e resolver problemas, de gerar e defender idéias próprias com consistência, de analisar, de discutir e ponderar idéias nas relações interpessoais, de aprimorar seu conhecimento e de aportá-lo no conhecimento científico e tecnológico disponível. Além disso, espera-se de todos a capacidade de pensar, de aprender, de planejar e desenvolver projetos compatíveis com as demandas sociais e tecnológicas e que todos conquistem uma condição digna, ética e humana de viver.

Esse é o ideal que nossa condição de humanos talvez impeça de atingir, mas é também o referencial que pode guiar o que projetamos como possibilidades de promover a construção do conhecimento e o desenvolvimento da personalidade intelectual, para o qual, segundo Piaget (1980), somente os métodos ativos em educação podem contribuir, e num meio coletivo onde possam ocorrer interações intelectuais organizadas, neste estudo confirmadas na análise das atividades dos estudantes.

Não tivemos como objetivo, em nossa pesquisa, identificar os obstáculos que se constituíram ao longo da história de ensino e aprendizagem de matemática dos nossos estudantes, nos diferentes níveis de sua formação escolar. Esse olhar retrospectivo é importante, porém nossa opção foi assumir uma investigação sobre o que se apresenta e sobre o que podemos modificar, projetando nosso olhar para frente. O que procuramos foi construir, consolidar e analisar uma proposta pedagógica com possibilidade, como constatamos nas análises, de fazer frente às dificuldades de aprendizagem de matemática, considerando os saberes dos estudantes e uma metodologia de interação-intervenção, apoiada pela tecnologia, que possibilitou acompanhá-los em suas interações, seguindo seus progressos individuais em diversos domínios, como alicerce para a construção de estruturas de assimilação. Procuramos, com essa pesquisa, desenvolver uma estratégia pedagógica que propõe a ruptura com práticas centradas no fazer do professor e na observação apática do aluno e construir/inventar novas concepções de ensinar, de aprender e de inclusão no domínio da matemática. Isso implica o fazer e o refletir do aluno, bem como a orientação questionadora, problematizadora e instigadora do professor, que busca levar o educando a avançar além da etapa da primeira resolução, na direção da compreensão, do fazer e compreender.

Em nosso percurso como professora de matemática, nossa atenção se manteve voltada para questões relacionadas à qualidade da aprendizagem, como declaramos nas primeiras páginas deste trabalho, e nos levou a realizar diversas experiências, sempre buscando por estratégias que promovessem a compreensão dos conceitos matemáticos. Mas o início das experiências e dos estudos que nos levaram a essa pesquisa constituiu um marco na nossa vida de professora: inserir o computador como apoio às atividades em sala de aula, e a tecnologia de comunicação como forma de estender as ações do ambiente presencial. A constatação das dificuldades que nossos alunos enfrentam ao escrever sobre matemática, pois a simbologia matemática (ainda) não navega na *web*, nos levou a criar estratégias que os auxiliassem a aprimorar também suas formas de comunicação. Passamos a contar e explicar menos e a perguntar mais, solicitar explicações e justificativas. Essa foi a virada: os alunos também respondem, também explicam, para o professor, para si próprios e para os colegas, e o professor também aprende e compreende como se aprende.

Percorremos, então, o caminho desta pesquisa, com a qual elaboramos, fundamentamos, experimentamos e analisamos os efeitos na aprendizagem da proposta pedagógica do Mecam, cujo cerne está na metodologia e na possibilidade de sua implementação por utilização de recursos tecnológicos. Esse percurso, sobre o qual refletimos neste trabalho de tese, nos rendeu genuínos processos de equilibração, que nos envolveram em reconstruções teóricas e práticas do ensinar e do aprender em sala de aula e em ambientes virtuais, e que nos apontaram possíveis, alguns realizados e outros (ainda) idealizados. Foi um caminhar que nos premiou com o encontro e o convívio com pessoas parceiras e solidárias: alunos, colegas professores de matemática e do grupo LaVia, bolsistas e monitores, com os quais compartilhamos estudos, aprendizados, aflições e alegrias. Por essa convivência expressiva, colaborativa e compartilhada, escrevemos este trabalho na primeira pessoa do plural, o que expressa, de alguma forma, o nosso reconhecimento a todos e a nossa consciência de que o conhecimento se constrói na troca, na interação.

Chegando ao final deste trabalho, percebemo-nos num ponto que não é de parada. Ao contrário, é de ramificações que apontam para possibilidades e para a busca de respostas a tantas inquietações cognitivas, educativas e afetivas provocadas pelo exercício desta reflexão.

Considerando a proposta pedagógica do Mecam, o que prevemos na continuidade desses estudos visa ao permanente aperfeiçoamento do ambiente de aprendizagem, quanto à atualização dos recursos tecnológicos ou à inserção de outros, à medida que forem sendo necessários e, quanto à metodologia, no aprimoramento das formas de questionar, especialmente no sentido de manter ou levar o aluno a pensar numa determinada direção pretendida. Quanto aos materiais de estudo disponibilizados no ambiente, os estudantes apontaram, nas auto-avaliações e em algumas discussões no fórum, a necessidade de ampliar os tópicos no espaço *Notas de Aula*. Entendemos ser essa uma oportunidade para envolver os demais professores de Cálculo em nossas discussões, numa estratégia de implementação de um espaço comum, por ampliação do atual, do Mecam, através da integração das notas de aula dos diversos professores e do planejamento colaborativo/cooperativo de atividades de aprendizagem, fundamentadas na interação e na proposta pedagógica do Mecam, para a sala de aula e também para os ambientes virtuais de apoio ao presencial. Nessa direção, pretendemos dar continuidade a essa pesquisa, em novo projeto a ser proposto com base neste trabalho de tese.

Quanto aos dados coletados, nesta edição de análise do Mecam e em outras próximas, novos estudos podem proceder ao levantamento e à análise das dificuldades mais expressivas encontradas no desenvolvimento das atividades de aprendizagem e dos fatores que constituíram obstáculos para os processos de assimilação. Esses estudos podem sugerir e orientar a proposição de estratégias pedagógicas específicas que visem auxiliar os estudantes a enfrentar e superar tais dificuldades. Outra possibilidade de aproveitamento dos dados gerados estaria na análise dos benefícios dessa proposta pedagógica em processos da escrita dos estudantes, na apropriação da simbologia e no exercício da função autor, conforme propõe Maraschin (2000b).

Nosso desejo é que este estudo possa contribuir com os professores, como um convite, um incentivo para que se debrucem sobre suas práticas pedagógicas. A aprendizagem depende, sem dúvidas, de fatores como saberes anteriores, motivação, interesse, envolvimento, disposição do estudante, mas esperamos ter demonstrado que a ação do professor, atento e sensível a essas questões, buscando por estratégias pedagógicas que privilegiem a ação e a reflexão sobre os objetos de conhecimento, pode interferir na melhoria das condições de aprendizagem e, conseqüentemente, no desempenho dos estudantes.

Entendemos que este trabalho também pode contribuir para repensar a formação de professores. A metodologia que implementamos nesse projeto, bem como a proposta do Mecam, poderia servir como ponto de partida para constituir um eixo de ação pedagógica nos cursos de Licenciatura de Matemática. Julgamos de importância fundamental que os acadêmicos da licenciatura sejam formados por práticas pedagógicas que buscam promover a aprendizagem e a conscientização de que não basta o conhecimento em matemática para promover a aprendizagem dos seus conteúdos. No nosso entendimento, as mudanças desejadas para a educação matemática só poderão ser percebidas efetivamente à medida que a formação dos professores mudar. Nós somos o exemplo vivo do quanto é difícil o desmonte de práticas enraizadas na instrução, na fala do professor e nele como centro do processo, das quais ainda não nos livramos totalmente. Nesse sentido, uma pesquisa sobre a relação entre as concepções dos professores que formam futuros professores e as concepções dos jovens formandos também poderia contribuir para gerar novas reflexões e processos de tomada de consciência dos efeitos da ação pedagógica na formação do professor de matemática.

Cabe ainda responder a uma pergunta que nos é feita com freqüência quando falamos sobre o Mecam: por que uma proposta somente para alunos reprovados? Não pela condição dos reprovados, pois todos reconhecem como relevante qualquer possibilidade de oferecer aos estudantes meios de auxiliá-los em suas dificuldades. Mas o que essa pergunta sugere é: por que não utilizar a proposta do Mecam em sala de aula, o que talvez evitasse muitas reprovações. Os alunos do Mecam também nos questionam. Na segunda auto-avaliação, quando perguntamos se recomendariam o Mecam aos colegas, um deles respondeu: *Eu recomendaria sem dúvida, se algum deles caísse nessa da reprovação*. *Aprendi no Mecam mais que Cálculo*, *aprendi a estudar e procurar sentido para o que faço. Mas o Mecam tem que estar na sala de aula, é lá que o aluno tem que passar*. Essa metodologia está também nas salas de aula, nas nossas salas, nasceu lá, e foi tomando forma como estratégia pedagógica para complemento e aprofundamento, em ambiente virtual, de assuntos tratados em ambiente presencial, ou seja, uma metodologia para a continuidade dos estudos iniciados em sala de aula, na mesma proposta de resolução e aperfeiçoamento de atividades de aprendizagem.

Agregou-se a isso a solicitação dos coordenadores de cursos para que os professores de matemática auxiliassem a pensar em alternativas pedagógicas que colaborassem para a modificação dos índices de reprovação e, por conseqüência, de evasão. Tal solicitação veio ao encontro de nossa inquietação frente às reprovações, especialmente de estudantes que demonstraram progressos significativos no decorrer da disciplina. O Mecam é, para esses estudantes, uma possibilidade de não repetirem a disciplina para recompor um percurso, de aproveitarem do que conseguiram desenvolver para refletir sobre os significados dos objetos não compreendidos, de assimilar novos objetos, de identificar dificuldades e dedicar a elas uma atenção especial, que lhes permita superá-las.

Na tese de Sauer (2004), professora parceira nesse projeto, encontramos resultados da aplicação dessa metodologia para a tomada de consciência na aprendizagem em ambientes virtuais de apoio ao ensino presencial. As duas teses podem contribuir, portanto, em discussões com os professores de matemática, e também de outras áreas, sobre aspectos pedagógicos e constituir uma possibilidade de reflexão e de revisão das práticas para o ensino e a aprendizagem, com base nas experiências realizadas e em resultados alcançados.

Do aperfeiçoamento dessa prática pedagógica no Mecam e de novas experiências, que temos realizado em sala de aula para o desenvolvimento de estudos de conteúdos totalmente novos, vislumbramos para um futuro próximo a possibilidade de atuar em educação matemática a distância, em disciplinas de graduação, na educação continuada de professores e em programas de pós-graduação.

Finalmente, nossa expectativa é que, ao final do projeto, o programa seja oficializado como atividade acadêmica regular na Universidade de Caxias do Sul. Nesse sentido, a continuidade dessa pesquisa se dará na direção de agregar ao programa Mecam os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, como monitores orientadores. Nossa hipótese é que podemos ser orientadoras desses acadêmicos e estes assumirem o nosso papel, atuando como orientadores dos alunos no desenvolvimento das atividades. Assim, poderemos expandir a oferta de vagas e de disciplinas no programa e oferecer aos estudantes da licenciatura a oportunidade de se envolverem com essa prática pedagógica, na prática, e analisar os efeitos dessa experiência na formação dos futuros professores que atuarão no Mecam.

Esta tese que se constitui para nós como um grande desafio, um olhar, uma reflexão crítica sobre a própria prática, como a avaliação de um possível que se tornou real, é agora de todos nós, professores e professores de matemática. Desejamos, pois, que a experiência, os dados e os resultados apresentados, que procuramos descrever apontando os benefícios da aprendizagem com compreensão dos significados dos objetos de conhecimento, contribuam para gerar novos possíveis na construção de ambientes de aprendizagem para a educação matemática, idealizados, projetados e implementados com o propósito de promover a **me**lhoria das **c**ondições de **a**prendizagem da **m**atemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARCAVI, A. E em matemática, o que constroem aqueles que instruem. S*ubstratum: temas fundamentais em psicologia e educação*, Porto Alegre: Artmed, v. 2, n. 5, p. 79-97, 1998.

ÁVILA, G. O ensino da matemática. *Revista do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro: SBM, n. 23, p. 1-7, 1993.

BARBIER, R. *La recherche action*. Tradução de Lucie Didio. Paris: Econômica, 1996.

BECKER, F. *Da ação à operação*: o caminho da aprendizagem em J. Piaget e P. Freire. Porto Alegre: Palmarica, 1993.

______. Modelos pedagógicos e modelos epistemológicos. *Educação e Realidade*, Porto Alegre, v.19, n.1, p. 89-96, 1994.

______. *Educação e construção do conhecimento*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

______. *A epistemologia do professor:* o cotidiano da escola. 10. ed. Petópolis: Vozes, 2002.

BECKER, F. et al. *Revisitando Piaget*. Porto Alegre: Mediação, 1999.

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

CASTORINA, J. A. et al. Alcances do método de exploração crítica em psicologia genética. In: ______. *Psicologia genética:* aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. Tradução de José Cláudio de Almeida. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação para uma sociedade em transição*. Campinas: Papirus, 1999.

DEMO, P. *Saber pensar*. 2. ed. São Paulo: Cortez, Instituto Paulo Freire, 2001.

DILLENBOURG, P. *Virtual learning environments*. Disponível em: <http://tecfa.unige.ch/tecfa/publicat/dil-papers-2/Dil.7.5.18.pdf>. Acesso em: maio de 2004.

DOLLE, J. M. *De Freud a Piaget.* Buenos Aires: Paidós, 1979.

DOLLE, J. M. *Para além de Freud e Piaget*: referenciais para novas perspectivas em psicologia. Petrópolis: Vozes, 1993.

DOLLE, J. M. *Para compreender Jean Piaget*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan: 1995.

FAGUNDES, L. C.; VICCARI, R. *Informática na Educação: Teoria e Prática*, Porto Alegre: Ed. da Ufrgs, v. 2, n. 2, p. 9-10, 1999. Apresentação.

FICHTNER, B. Ensinar e aprender, um diálogo com o futuro. In: SILVA, L. H.; AZEVEDO, J. C.; SANTOS, E. S. (Org.). *Identidade social e a construção do conhecimento*. Porto Alegre: Ed. Smed/Pmpa, p.146-176, 1997.

FRANCO, S. R. K. *O construtivismo e a educação*. 7. ed. Porto Alegre: Mediação, 1999.

FOUCAMBERT, J. *A leitura em questão*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

GHIRALDELLI JUNIOR, P. *História da educação*. São Paulo: Cortez, 2000.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. *Informática na Educação: Teoria e Prática*, Porto Alegre: Ed. da Ufrgs, v. 1, n. 2, p. 73-88, 1999.

HOFFMAN, J. *Avaliar para promover*. Porto Alegre: Mediação, 2003.

INHELDER, B.; BOVET, M.; SINCLAIR, H. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento*. São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, B.; GARCIA, R.; VONÈCHE, J. *Epistemologia genética e equilibração*: homenagem a Jean Piaget. Lisboa: Livros Horizonte, [s.d].

KAMII, C. *A criança e o número*. São Paulo: Papirus, 1985.

KESSELRING, T. *Jean Piaget*. Petrópolis: Vozes, 1993.

KLÜSENER, R. Ler, escrever e compreender a matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos. In: NEVES, I. C. B. (Org.). *Ler e escrever:* compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Ed. da Ufrgs, p. 177-191, 2001.

LAFORTUNE, L.; SAINT-PIERRE, L. *A afetividade e a metacognição na sala de aula*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

LIMA, I. G.; SAUER, L. Z. A criação de ambientes de aprendizagem matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, XI., 2000, Alagoas. *Anais*... Alagoas: Fafeal, 2000. 1 CD-ROM.

______. Melhoria das condições de aprendizagem da matemática para a engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA, XXVIII., 2001, Porto Alegre. *Anais*..., Porto Alegre: Pucrs, 2001. 1 CD-ROM.

______. Programa em educação à distância para a melhoria das condições de aprendizagem da matemática. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, VI., 2002, Vigo. *Anais*... Vigo: Ribie, 2002. 1 CD-ROM.

______. Uma proposta metodológica e sua contribuição para a aprendizagem de matemática na formação de engenheiros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA, XXX., Rio de Janeiro. *Anais*... Rio de Janeiro: UFRJ, 2003a. 1 CD-ROM.

______. Possibilidades de aprendizagem em matemática: uma prática pedagógica em educação à distância. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, X., 2003, Porto Alegre. *Anais*... Porto Alegre: Pucrs, 2003b.

MAÇADA, D. L. *Rede virtual de aprendizagem*. 2001, 158f. Tese (Doutorado em Informática em Educação) – Pgie, Ufrgs, Porto Alegre, 2001.

MACEDO, L. Método clínico de Piaget e avaliação escolar. In: ______. *Ensaios construtivistas*. 4. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994. p. 103-114.

______. Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar. *Aprendizagem e desenvolvimento*, Lisboa: Instituto Piaget, v. VI, n. 21/22, p. 9-17, 1996.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

MARASCHIN, C. Avaliação (da ou na) aprendizagem. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO DO COLÉGIO CORAÇÃO DE JESUS, II., 2000, Florianópolis. *Anais*... Florianópolis, 2000a, p.36-39.

______. Tecnologias e exercício da função autor. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO CIENTÍFICA, VII., 2000. Ijuí, 2000. *Anais*... Ijuí, 2000b, p. 35-44.

MARTINS, L. *Introdução ao Zope*. Disponível em: <http://zope.gf.com.br/ZopeIntro>. Acesso em: maio de 2004.

MATURANA, H. *Emoções e linguagem na educação e na política*. Belo Horizonte: Ed. da Ufmg, 1999.

MONTANGERO, J.; NAVILLE, D. M. *Piaget ou a inteligência em evolução*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

MORELATTI, M. R. M. A abordagem construcionista no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, VI., 2002, Vigo. *Anais*... Vigo: Ribie, 2002. 1 CD-ROM.

MORIN, E. *Os sete saberes necessários à educação do futuro*. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

MURPHY, L. D. *Computer Algebra System in Calculus Reform*. Disponível em: <http://www.mste.uiuc.edu/users/Murphy>. Acesso em: maio de 2004.

NEVADO, R. A. Metodologia da pesquisa nos estudos do LEC. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 3-10, 1992.

OLIVEIRA, M. I. et al. Eu estudante. In: Preti, O. (Org.). *A aventura de ser estudante:* um guia metodológico. Cuibá: Ufmg, 2001. p. 13-40.

PAIS, L. C. *Questões epistemológicas*. Disponível em: <http://www.ltnet.org/members/CG-CEMTE/lcpais/info/info.htm>. Acesso em: maio de 2004.

PAPERT, S. *A máquina das crianças*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PARRAT-DAYAN, S.; TRYPHON, A. In: ______. (Org.). *Sobre a pedagogia* (textos inéditos de Jean Piaget). São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998. Introdução.

PIAGET, J. *A representação do mundo na criança*. Tradução de Rubens Fiúza. Rio de Janeiro: Record, [s.d.].

______. Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *The Human Development*, n.15, p.1-12, 1972. Tradução livre: BECKER, F.; IWASZKO, T. B. M. Evolução intelectual da adolescência à vida adulta. Porto Alegre: Ufrgs, 1993.

______. *A equilibração das estruturas cognitivas:* problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

______. *A tomada de consciência*. São Paulo: Melhoramentos, Edusp, 1977a.

______. *Psicologia da inteligência*. Rio de Janeiro: Zahar, 1977b.

______. *Fazer e compreender*. São Paulo: Melhoramentos, Edusp, 1978a.

______. *A formação do símbolo na criança*. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1978b.

______. *Para onde vai a educação*. 14. ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1980.

______. *O nascimento da inteligência*. Rio de Janeiro: Zahar, 1982.

______. *Seis estudos de psicologia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1993.

______. *Desenvolvimento e aprendizagem*. Tradução de Paulo Francisco Slomp. Porto Alegre: Ufrgs/Faced/Debas, 1995a.

______. *Abstração reflexionante*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995b.

______. *Vontade e ação*. Porto Alegre: Ufrgs/Faced/Debras, 1999.

PIAGET, J.; GRÉCO, P. *Aprendizagem e conhecimento*. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

PIAGET, J.; INHELDER, B. *A psicologia da criança*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1989.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (Ed.). *Formação de professores de matemática:* explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p. 159-192. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>. Acesso em: maio de 2004.

RAMALHO, L. *Zope*: *uma plataforma para web sites dinâmicos e flexíveis*. Disponível em <http://www.magnet.com.br/classic/byo/zope0.html>. Acesso em: maio de 2004.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. *Psicologia e epistemologia genética de Jean Piaget*. São Paulo: EPU, 1988.

______. *Em busca do sentido da obra de Jean Piaget*. São Paulo: Ática, 1994.

RANGEL, A. C. *Educação matemática e a construção do número pela criança:* uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

SAUER, L. Z. *O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos*. 2004, 196f. Tese (Doutorado em Informática em Educação) – Pgie, Ufrgs, Porto Alegre, 2004.

SILVA, M. *Sala de aula interativa*. Rio de Janeiro: Quartet, 2000.

SCHLEMMER, E. *AVA:* um ambiente de convivência interacionista sistêmico para comunidades virtuais na cultura da aprendizagem. 2002, 370f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Pgie, Ufrgs, Porto Alegre, 2002.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, E. M. S. Auto-avaliação e aprender a aprender, no contexto da aprendizagem de matemática para a engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA, XXX., Rio de Janeiro. *Anais*... Rio de Janeiro: UFRJ, 2003a. 1 CD-ROM.

SOARES, E. M. S. et al. Laboratório de ambientes virtuais de aprendizagens – LaVia. *ABED*, 2001. Rio de Janeiro: 2001.

SOARES, E. M. S. et al. Comunidades virtuais de aprendizagem: uma realidade em construção. VIRTUAL-EDUCA 2001, CONFERÊNCIA INTERNACIONAL SOBRE EDUCAÇÃO, FORMAÇÃO E NOVAS TECNOLOGIAS, Madrid, 2001. 1 CD-ROM.

SOARES, E. M. S.; VALENTINI, C. B. O uso das novas tecnologias na qualificação pedagógica. In: RIBEIRO, L. B. M.; CORTELETTI, I. A.; STEDILE, N. L. R. (Org.). *Reflexão sobre a ação:* uma estratégia na formação de professores para o nível superior de ensino. Caxias do Sul: Educs, 2002.

SOARES, M. *Letramento:* um tema em três gêneros. Belo Horizonte: Autêntica, 1998.

STEWART, J. *Cálculo*. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2001.

THIOLLENT, M. *Pesquisa-ação nas organizações*. São Paulo: Atlas, 1997.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

VALENTE, J. A. Criando oportunidades de aprendizagem continuada ao longo da vida. *Pátio*, Porto Alegre, v. IV, n.15, p. 8-12, nov.2000/jan.2001.

VALENTE, J. A. *Por que o computador na educação*? Disponível em <http://www.nuted.edu.ufrgs.br/biblioteca/texto.php?texto=51&assunto=4>. Acesso em: maio de 2004.

VALENTINI, C. B. *Tecendo e aprendendo*: redes sociocognitivas e autopoiéticas em ambientes virtuais de aprendizagem. 2003, 213f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Pgie, Ufrgs, Porto Alegre, 2003.

VALENTINI, C. B.; SOARES, E. M. S. S.; RIBEIRO, L. B. M. Comunidades virtuais de aprendizagem: uma realidade em construção In: VIRTUAL-EDUCA 2001, Conferência Internacional sobre Educação, Formação e Novas Tecnologias, 2001, Madrid. *Anais*... Madri: VIRTUAL-EDUCA, 2001. 1 CD-ROM.

VALENTINI, C. B.; LUCIANO, N. A.; ANDREOLA, T. Comunidades de aprendizagem: interações em ambientes virtuais. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA, VI., 2002, Vigo. *Anais*... Vigo: Ribie, 2002. 1 CD-ROM.

ANEXOS

Ver arquivos pasta Anexos

Atividade 1

sobre funções polinomiais

PRIMEIRA PARTE - a ser realizada durante o encontro presencial. Ao finalizar envie o arquivo para a sua pasta, com o nome seunome_Atividade1_070703.

1.1) Considere a função f, definida por $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x$:

(**a**) Salve a função f.
Com o cursor sobre a mesma, clique em **New Definition**. Para confirmar que f foi salva, clique em **Show Definitions**. Este procedimento permite que o SN memorize a função pelo seu nome "f" não sendo necessário digitar a lei que a define, toda a vez que precisar referir-se à mesma.

(**b**) Construa seu gráfico e diga qual é o seu domínio e sua imagem.
Os procedimentos envolvendo construção de gráficos podem ser encontrados no ambiente do programa, em Material de Apoio, Scientific Notebook, item 7, ou então, utilizando o link Perguntas Freqüentes.
Aproveite esta atividade para explorar a janela de formatação dos gráficos (aquela janela azul no canto inferior direito da janela do gráfico), bem como verificar suas propriedades e esclarecer suas dúvidas. Note que para formatar o campo de visualização dos gráficos, você precisará relembrar de conceitos muito importantes como domínio e imagem de uma função, em geral, além de características próprias das funções polinomiais, úteis para isto. Por exemplo, as relacionadas ao número de zeros de uma função polinomial.

(**c**) Com base na "observação do gráfico" de f e dos estudos realizados na disciplina de Cálculo 1 determine, aproximadamente, os zeros de f.

(**d**) Determine os valores exatos dos zeros de f.
No link para Leituras, selecione Matemática Básica e escolha o tópico Polinômios e Equações para encontrar algumas informações sobre a determinação dos zeros de uma função, ou raízes de uma equação.
Com a utilização do Scientific Notebook podemos determiná-los, também, utilizando os comandos **Solve Exact** ou **Solve Numeric**. Neste caso, digite $f(x)$=0 e clique em **Maple -> Solve -> Exact**.
Outro procedimento útil na obtenção dos zeros de uma função é escrevê-la na forma fatorada. No SN, menu Maple, escolha a opção **Factor**.

(**e**) Agora, lembrando o significado geométrico de zero de uma função, marque os zeros de f, obtidos em (**c**), no gráfico construído em (**a**). Apresente novamente o gráfico de f.
No ítem 8 do Material de Apoio sobre o Scientific Notebook encontramos orientações sobre como proceder, para isto.

(**f**) Determine os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

(**g**) Traduza com suas palavras as afirmações feitas em (**f**).

(**h**) Determine as derivadas primeira e segunda de f.
No ítem 5 do Material de Apoio sobre o Scientific Notebook podemos encontrar orientações de como obtê-las com o auxílio do SN.

(**i**) Esboce, num mesmo sistema de eixos, os gráficos de f e de suas respectivas derivadas, utilizando cores diferentes e legenda explicativa.
No Material de Apoio, uma das Perguntas Freqüentes, refere-se a isto.

(**j**) Novamente, com base na "observação do gráfico" de f e dos estudos realizados na disciplina de Cálculo 1 determine, aproximadamente:
- os intervalos em que f é crescente:
- os intervalos em que f é decrescente:
- seus extremos (máximos ou mínimos):
- os intervalos em que f é côncava para baixo:
- os intervalos em que f é côncava para cima:
- seu(s) ponto(s) de inflexão.

SEGUNDA PARTE - a ser disponibilizada em sua pasta até o prazo máximo estabelecido para o envio da Atividade 1, nomeando-a como: Atividade1_XX0703, onde XX representa o dia da postagem.

1.2) Procure responder detalhadamente (uma a uma): como podemos confirmar cada uma das aproximações fornecidas em (**j**) valendo-nos dos gráficos esboçados em (**i**)?
Para isto você precisará rever as relações entre uma função e suas derivadas primeira e segunda. Em Leituras, os tópicos Comportamento das Funções e O que a Derivada Segunda nos diz graficamente, podem ser úteis.

download da Atividade 1

Atividade 2

sobre funções racionais

Nesta atividade, vamos retomar o estudo das funções racionais. Localize esse tipo de função em seu livro, veja índice remissivo, procure esclarecer por que elas têm essa designação e como se comporta o domíno de tais funções.
Sempre que tiver uma dúvida, não importa em que momento ocorre, seja na resolução da atividade ou numa leitura, não deixe passar a oportunidade de esclarecê-la, sem isso não temos como compreender os significados dos conceitos. Procure se esse assunto não está sendo discutido no fórum ou se não consta nas perguntas freqüentes. Isto pode adiantar sua busca. Se o que encontrou não é suficiente ou se quer discutir com os colegas e orientadoras, encaminhe sua dúvida ao fórum, você receberá auxílio prontamente e além disso colabora com seus colegas. Participe sempre, sua colaboração é preciosa!

2) Considere f a função definida por:

$$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$$

Responda as questões que seguem, logo abaixo de seus enunciados. Lembre sempre de explicar seu raciocínio e, de preferência, indique em que local do livro ou da página, encontramos fundamentação para os nossos argumentos.

2.1) Obtenha a imagem, pela função f, dos números 0, 5, 10, 50 e 100. Apresente os cálculos que determinam essas imagens e apresente-as também diretamente do SN, após salvar a função.

2.2) É possível obter imagem, pela f, de qualquer valor t ? Qual é, então, o domínio da função f ?

2.3) Esboce o gráfico da função f, numa janela onde t varia de -50 a 150 e $f(t)$ varia de -200 a 150. O que você observa em relação às imagens de números que se aproximam cada vez mais de -10?

2.4) Ainda observando o gráfico verifique se a função tem máximo ou mínimo relativo. Estime esses valores e para que valores de t eles ocorrem.

2.5) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo [0,10] e dê o seu significado.

2.6) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?

download da Atividade 2

Atividade 3
sobre funçõestrigonométricas

Nesta atividade trataremos de alguns conceitos e propriedades das funções seno e cosseno. Elas constituem o fundamento básico do estudo das demais funções trigonométricas. Em **Notas de aula** e em **Matemática Básica** disponíveis em **Leituras**, você encontra boas orientações que podem auxiliá-lo neste estudo. Também no seu livro - veja índice remissivo - há vários tópicos que tratam de trigonometria e funções trigonométricas.
Não esqueça que o fórum é nosso canal de comunicação para buscar e oferecer auxílio. Para qualquer dúvida, e nenhuma dúvida é sem importância, apareça por lá! Participe sempre, sua colaboração é preciosa!

3.1) Como primeira tarefa desta atividade solicitamos que faça a leitura da Revisão de Trigonometria, proposta pelo Anton no Apêndice E, páginas A-39 a A-44 na parte final do livro. Dessa leitura, transforme em pergunta **uma** das dúvidas que surgirem e encaminhe-a ao fórum ou participe da discussão, se a mesma já foi apresentada por algum colega.

3.2) Na Figura 3.1 está representado o círculo trigonométrico e sobre ele, em vermelho, o ponto P, correspondente à extremidade de um arco ou ângulo.

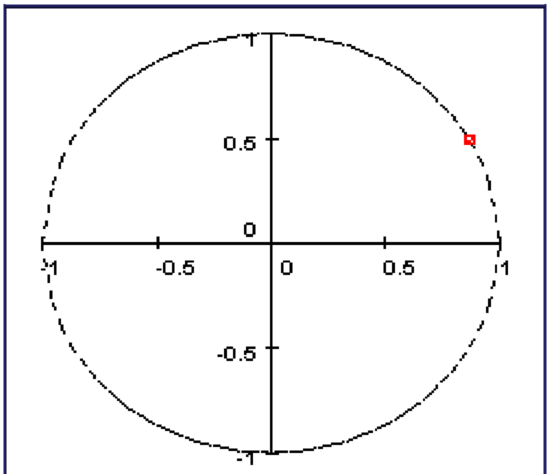


Figura3.1

3.2.1) Aproxime, por um valor inteiro, a medida do ângulo e também do comprimento do arco determinado pelo ponto P;

3.2.2) Qual par ordenado (x,y) representa as coordenadas cartesianas do ponto P, e o que representa, neste caso, a abscissa x e a ordenada y?

3.3) Complete as sentenças abaixo, substituindo os pontilhados e adicione na Figura 3.2, nas cores solicitadas, os seguintes pontos:
R, em azul, correspondente à extremidade do arco de (π/3) radianos, que equivale a .... graus.

S, em verde, correspondente à extremidade do ângulo de 135 graus, que equivale a .... radianos.
T, em magenta, correspondente à extremidade do ($7\pi/6$) radianos, que equivale a .... graus.

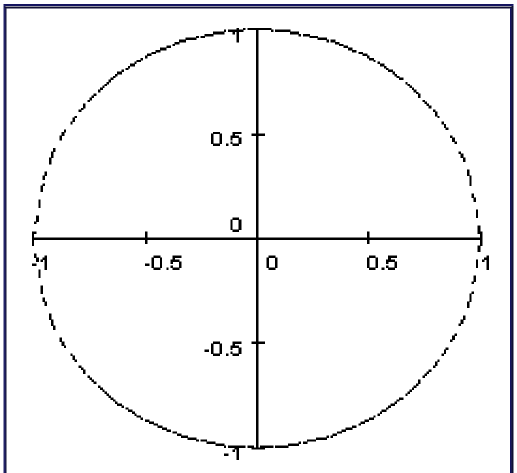


Figura3.2

3.4) Os segmentos "pintados" na Figura 3.3 correspondem a representações geométricas de senos ou co-senos de determinados arcos ou ângulos. Identifique tais segmentos escrevendo-os como senos ou co-senos de arcos ou ângulos aproximados. Para isto, substitua adequadamente os pontilhados nas sentenças que seguem abaixo.

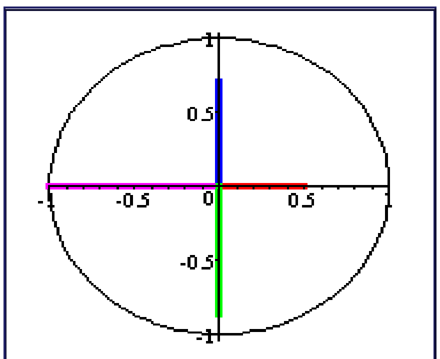
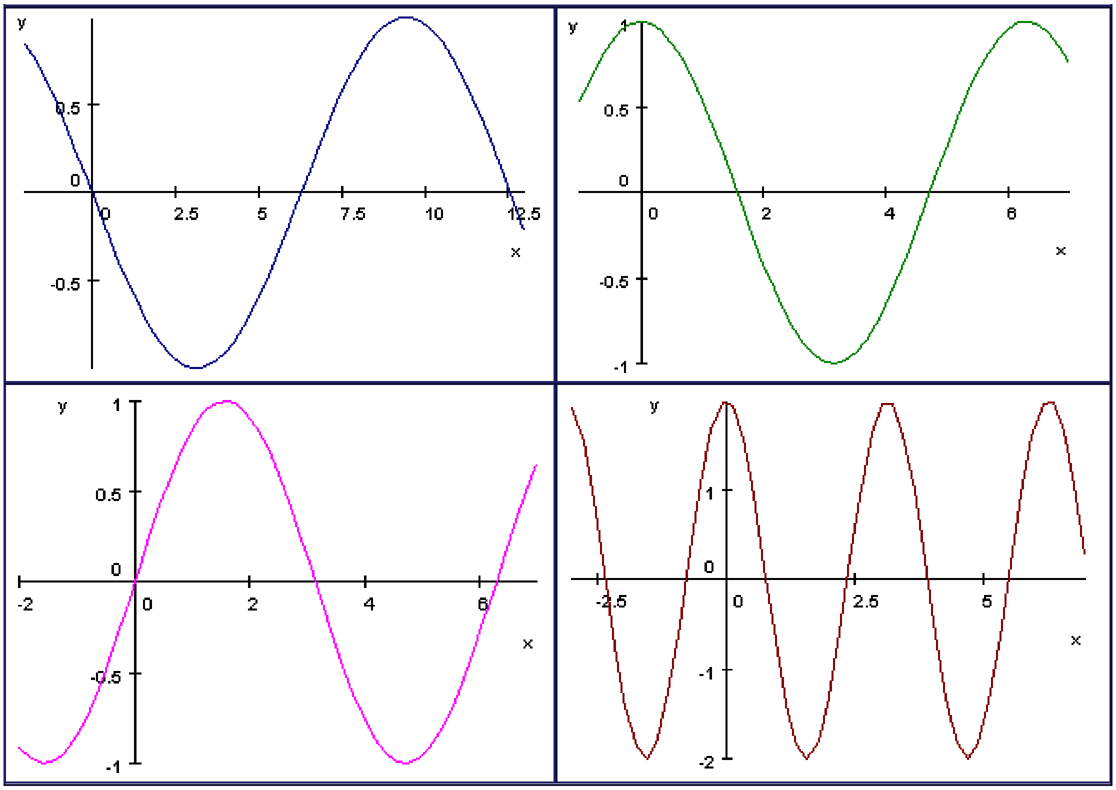


Figura3.3

O segmento de cor .... corresponde ao .... do arco de ....radianos;
O segmento de cor .... corresponde ao .... do ângulo de ....graus;
O segmento de cor .... corresponde ao .... do arco de ....radianos;
O segmento de cor .... corresponde ao .... do ângulo de ....graus.

3.5) Os gráficos das funções y = sin x, y = cos x, y = -sin(x/2) e y = 2cos2x. Associe cada gráfico à correspondente equação, reescrevendo-a, abaixo de cada um, e apresente dois argumentos que justificam tal associação.



[download da Atividade 3]

Atividade 4

sobre outras funções de interesse

Nesta atividade daremos atenção às funções algébricas, em geral, sobre as quais é difícil estabelecer regras genéricas. Entretanto, assim como as demais funções estudadas nas atividades anteriores, são funções que merecem destaque devido às suas aplicações como modelos matemáticos de fenômenos de interesse. Por exemplo, a função algébrica

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

fornece, de acordo com a *Teoria da Relatividade*, a massa m de uma partícula com velocidade v_0, onde m_0 é a massa da partícula no repouso e $c = 3{,}0\times 10^5\ km/s$ é a velocidade da luz no vácuo.
Com as funções definidas por partes, por sua vez, também envolvidas nesta atividade, não é diferente. As mesmas aparecem, por exemplo, no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada. É o caso da função de *Heaviside*, definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & se \quad t < 0 \\ 1 & se \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Além destas, queremos envolver também as funções definidas implicitamente, que, nem sempre, podem ser descritas expressando-se uma variável em termos da outra. Para estas, é necessário considerar métodos próprios de derivação.

4.1) Considere o círculo de equação $x^2 + y^2 = 4$.

(**a**) Esboce o seu gráfico, com o auxílio do SN;
O tópico Derivação Implícita, no link para Leituras, em Notas de Aula, bem como o tópico 6 do Material de Apoio sobre o Scientific Notebook, podem ser úteis.

(**b**) Use a diferenciação implícita para determinar a derivada dy/dx;

(**c**) Determine, explicitamente, duas funções f_1 e f_2 definidas implicitamente pela equação dada;

(**d**) Determine as respectivas derivadas de f_1 e f_2;

(**e**) Utilize os resultados obtidos em (**c**) e em (**d**) para confirmar a derivada obtida em (**b**);

(**f**) Explique de forma genérica como obter os intervalos de crescimento ou decrescimento de uma função, utilizando sua derivada. Escolha uma das funções f_1 ou f_2 para ilustrar sua explicação;

(**g**) Determine as inclinações das retas tangentes ao círculo dado, no ponto de abscissa -1 e explique seu raciocínio.

4.2) Considere a função f, dada por

$$f(x)=\begin{cases} -1 & se \quad x \le -5 \\ \sqrt{25-x^2} & se \quad -5 < x < 5 \\ x-5 & se \quad x \ge 5 \end{cases}$$

(**a**) Qual é o seu domínio e qual é sua imagem?

(**b**) Calcule os valores de $f(-7)$, $f(-1)$ e $f(5)$ e justifique sua resposta.

(**c**) Calcule $\lim_{x\to 5} f(x)$ e justifique sua resposta.

(**d**) Calcule $\lim_{x\to -5} f(x)$ e justifique sua resposta.

(**e**) Verifique se f tem pontos de descontinuidade e justifique sua resposta.

4.3) Determine os valores de x nos quais a curva dada por

$$y=\sqrt{3x+1}(x-1)^2$$

tem uma reta tangente horizontal e explique seu raciocínio.

download da Atividade 4

Atividade2

Re_Atividade2_310703

Olá XXXX, você concluiu satisfatoriamente esta atividade. Sugerimos, entretanto, que procure ler ou discutir um pouquinho mais sobre o que apontamos neste último retorno. Selecionamos algumas questões para a entrevista presencial. As mesmas estão marcadas com um triângulo invertido (∇) e servirão para confirmar o conhecimento que demonstrou ter, ao desenvolver a atividade, e também para um último aperfeiçoamento.

Re_Atividade2_250703

Oi XXXX, entendemos que a qualidade das respostas apresentadas aqui evoluiu em relação à primeira versão dessa atividade. Você apresentou as conclusões sugeridas em quase todos os questionamentos e demonstrou ter estudado sobre o assunto. É nisso que acreditamos. Sabemos que não é possível, nesse nível, progredir utilizando apenas nossa intuição. É preciso que ela esteja muito bem acompanhada de leituras, estudos, reflexões e discussões. Para que avance um pouco mais na compreensão dos conceitos aqui envolvidos, propomos mais alguns questionamentos, além da revisão de algumas respostas apresentadas. Retorne com brevidade, para que possa apresentar mais um aperfeiçoamento, de acordo com os critérios de avaliação estabelecidos. Vamos lá, falta pouco! Confiamos que a disposição e envolvimento que demonstrou até aqui trarão resultados positivos.

Re_Atividade2_160703

Olá XXXX, você demonstra, nessa atividade, a compreensão de alguns conceitos. Porém precisamos melhorar outros. As taxas de variação média e instantânea, a derivada e suas aplicações na análise da função dada, são assuntos onde sugerimos uma atenção especial. Para isto, procure seguir as sugestões dadas, respondendo cada pergunta logo abaixo de sua formulação, sem apagar nada do que escrevemos, apenas acrescentando.
A sua ficha de avaliação foi atualizada e queremos sugerir também que leia com atenção os critérios de avaliação, no link correspondente. Participe do fórum, estamos todos juntos lá e sentindo sua falta!
Acreditamos, pois já foi possível constatar, que você pode concluir com êxito essa etapa. Continue com empenho e procurando aperfeiçoar o seu trabalho.
Aguardamos o retorno dessa atividade e o encaminhamento das demais.

Sobre funções racionais

Nesta atividade, vamos retomar o estudo das funções racionais. Localize esse tipo de função em seu livro, veja índice remissivo, procure esclarecer por que elas têm essa designação e como se comporta o domíno de tais funções.
Sempre que tiver uma dúvida, não importa em que momento ocorre, seja na resolução da atividade ou numa leitura, não deixe passar a oportunidade de esclarecê-la, sem isso não temos como compreender os significados dos conceitos. Procure se esse assunto não está sendo discutido

no fórum ou se não consta nas perguntas freqüentes. Isto pode adiantar sua busca. Se o que encontrou não é suficiente ou se quer discutir com os colegas e orientadoras, encaminhe sua dúvida ao fórum, você receberá auxílio prontamente e além disso colabora com seus colegas. Participe sempre, sua colaboração é preciosa!

2) Considere f a função definida por $f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$

Responda as questões que seguem, *logo abaixo de seus enunciados*. Lembre sempre de explicar seu raciocínio e, de preferência, indique em que local do livro ou da página, encontramos fundamentação para os nossos argumentos.

2.1) Obtenha a imagem, pela função f, dos números $0, 5, 10, 50$ e 100. Apresente os cálculos que determinam essas imagens e apresente-as também diretamente do SN, após salvar a função;

$f(0) = \frac{(0-10)^2}{0+10} = \frac{100}{10} = 10$

SN$f(0) = \frac{(0-10)^2}{0+10} = 10$

$f(5) = \frac{(5-10)^2}{5+10} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

SN$f(5) = \frac{5}{3}$

$f(10) = \frac{(10-10)^2}{10+10} = \frac{0}{20} = 0$

SN$f(10) = 0$

$f(50) = \frac{(50-10)^2}{50+10} = \frac{1600}{60} = \frac{160}{6} = \frac{80}{3}$

SN$f(50) = \frac{80}{3}$

$f(100) = \frac{(100-10)^2}{100+10} = \frac{8100}{110} = \frac{810}{11}$

SN$f(100) = \frac{810}{11}$

OK! As imagens foram calculadas corretamente.

Agora veja que valor de *t*, possui imagem 40.

$\frac{(t-10)^2}{t+10} = 40$, Solution is : $\left\{t = 30 + 20\sqrt{3}\right\} : t = 64.6 :: \left\{t = 30 - 20\sqrt{3}\right\} : t = -4.641$

Acima foram dados os valores de t, pois são com esses valores que iremos ter a $Imgf = 40$

Muito bem XXXX! Mas retome o final da frase, é melhor continuar escrevendo gramaticalmente, pois assim parece que a imagem da função é 40. O que não é verdade, não é?

Não, 40 é imagem só desses dois valores de t.

Acima foram dados os valores de t, pois são com esses valores que iremos ter a imagem igual a 40.

Ok!

2.2) É possível obter imagem, pela f, de qualquer valor t? Qual é, então, o domínio da função f?

$f(t) = \dfrac{(t-10)^2}{t+10}$

Não, pois se colocarmos -10 no denominador da função a função ***ira*** se anular.

$\boldsymbol{D = \{x \in R | x \neq -10\}}$

$\boldsymbol{f(-10)} = \notin$

XXXX, podemos perceber que você tem um boa idéia sobre isto, mas o que afirma, aqui, está sem sentido. Se o -10 anulasse *a função* ele seria um de seus zeros, como vimos na atividade1, não é isso? Sugerimos que reescreva o argumento apresentado, de forma que ele fique coerente com o domínio apresentado. Além disso, revise também a última afirmação $f(-10) = \not\in$ procurando na barra de ferramentas, o símbolo adequado. Esse que usou é o símbolo para "não pertence".

Se colocarmos -10 no denominador a função se torna inexistente!

$f(-10) = \nexists$

Agora sim! Você percebeu que -10 anula o *denominador da função*? E qual é o problema com relação ao fato do denominador se anular?

Pois não existe divisão com denominador zero!

∇ Por que não?

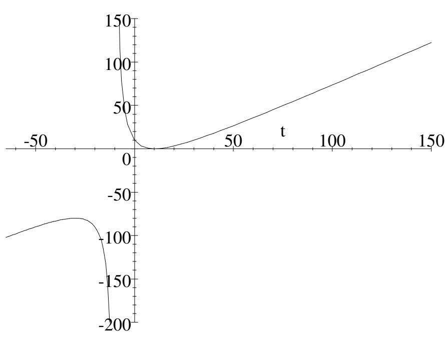
Aqui ainda temos um probleminha de notação. Estamos lendo: "f de -10 é igual a não existe". Saberia propor outa forma para escrever "não existe f de -10", simbolicamente?

Professoras não sei se essa está correta acho que sim pois $\nexists$ quer dizer não existe, não é?

$f(x)\ \nexists$ quando $x = -10$

∇ Pode ser assim, veja que a leitura fica com sentido agora. Uma alternativa que temos quando não sabemos qual símbolo utilizar é escrever a frase gramatical: Veja de quantos modos podemos dizer essa mesma afirmação: a função não existe para $x = -10$ ou -10 não tem imagem pela função f ou a função não está definida para $x = 10$. Mas é importante atentarmos para a linguagem, sem saber o que os símblolos dizem não temos como entendê-los quando os encontramos num texto. Falamos um pouco mais sobre isto na entrevista final, certo?

2.3) Esboce o gráfico da função f, numa janela onde t varia de -50 a 150 e $f(t)$ varia de -200 a 150. O que você observa em relação às imagens de números que se aproximam cada vez mais de -10?



A função cresce indefinidamente quando x tende a -10 à direita, e decresce indefinidamente quando x tende a -10 à esquerda, tendo assim uma assíntota vertical no ponto -10.

Anton pág.121!

Muito bem! É isso mesmo! Como aperfeiçoamento, sugerimos que escreva estas afirmações utilizando a linguagem de limites.

$\lim_{x \to -10} f(t)$ (Limite de $f(t)$ quando x tende a -10) é infinito.

Mas não foi essa a sua afirmação, acima! Lá você se referiu aos limites laterais e aqui ao $\lim_{t \to -10} f(t)$, percebe a diferença? Além do mais, agora a afirmação não é mais verdadeira!

$\lim_{t \to -10^+} f(t) = \infty$

$\lim_{t \to -10^-} f(t) = -\infty$

Me perdi ali em cima mas agora esta certo neh?

∇ Agora está bem! E o que podemos dizer sobre o limite $\lim_{x \to -10} f(t)$?

Depois apresente aqui a definição de assíntota horizontal, escreva a equação desta que temos aqui, justificando a sua ocorrência neste caso.

Gráfico de muitas (mas não todas) funções racionais podem começar ou terminar cada vez mais perto de uma reta horizontal, chamada de assintota horizontal, quando se percorre a curva em ambas as direções.

Neste caso professora acho q temos uma assintota vertical e não horizontal.

$X = -10$

É isso mesmo XXXX, falha nossa! Essa assíntota é vertical mesmo, e sua equação é, de fato, $x = -10$.

2.4) Ainda observando o gráfico verifique se a função tem máximo ou mínimo relativo. Estime esses valores e para que valores de t eles ocorrem;

Possue.(***possui***)

$f'(t) = (t-10)\frac{t+30}{(t+10)^2}$

Essa derivada é a do SN, sabe como obtê-la?

Tem que ser pela regra do quociente.

$$f'(t) = \frac{(t+10)(t-10)^{2'} - (t-10)^2(t+10)'}{(t+10)^2}$$

$$f'(t) = \frac{(t+10)2(t-10) - (t-10)^2 1}{(t+10)^2}$$

$$f'(t) = \frac{2t^2 - 20t + 20t - 200 - t^2 + 20t - 100}{(t+10)^2}$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 20t - 300}{(t+10)^2}$$

∇ É a mesma que foi obtida como software? Como saber?

$f'(t) = 0$, as soluções são: $\{t = 10\}, \{t = -30\}$

Ponto mínimo: $[10, 0]$

$f'(10) = 0$

Ponto máximo:$[-30, -80]$

$f'(-30) = 0$

XXXX, retome a forma de representação de pontos. Dá uma olhadinha nisso? Procure

distinguir a notação de ponto e a de intervalo.
tá certo profes os pontos tem que ser $(10,0)$ e $(-30,-80)$

Isso está mais adequado.

Para achar o ponto máximo e mínimo eu encontro primeiro os valores de $f'(t) = 0$ e depois eu analiso o gráfico de $f(x)$, se o ponto é máximo ou é mínimo observamos da seguinte maneira:

-quando o ponto for máximo seus valores antecessores se trocados em $f(x)$ serão positivos e seus sucessores negativos, o que diz que o gráfico era crescente e quando passado pelo ponto máximo virou descrecente.

-quando o ponto for (negativo) ***ou de mínimo***?seus valores antecessores se trocados em $f(x)$ serão negativos e seus sucessores positivos, o que diz que o gráfico era decrescente e quando passado pelo ponto mínimo virou crescente.

Parece só uma confusão na escrita, mas vamos confirmar.

- **Primeiro, por que as soluções da equação $f'(t) = 0$ são abscissas dos possíveis extremos relativos?**

Se uma função f tiver extremos relativos, então eles ocorrem ou em pontos de $f'(x) = 0$ ou em pontos de não-diferenciabilidade. Os pontos nos quais $f'(x) = 0$ ou a função não é diferenciável são chamados de pontos críticos de f.

∇ Isso mesmo! Mas vamos tentar entender porque realmente é assim.

O que podemos entender por função não diferenciável?

E lembramos que a variável da função é t, certo?

- **Agora voltando ao que foi dito. Para um ponto ser de máximo, a função à sua esquerda tem que ser positiva e à sua direita negativa?**

O que quer dizer função positiva ou negativa? E função crescente ou decrescente?

Eu realmente me enganei a função é positiva se está acima do eixo x e é negativa se está abaixo.

Para um ponto ser máximo as imagens a sua esquerda tem q ser crescente e a sua direita descrescente!

Para um ponto mínimo as imagens a sua esquerda tem q ser descrescente e a sua direita crescente!

Isto sim!

∇ E se justificássemos pela derivada da função? Como é a derivada da função nos pontos logo à esquerda e logo á direita de um ponto de mínimo e de um ponto de máximo? Faça o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, da função e da sua derivada, como fizemos na atividade 1.

Dá uma passadinha no fórum? Já tem muito dessa discussão em andamento.

2.5) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo $[0,10]$ e dê o seu significado;

Taxa de Variação Média $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{0-10}{10-0} = -1$

Se $y = f(x)$, então a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ é a

inclinação $m_{\sec}$ da reta secante de f que passa pelos pontos $(x_0,f(x_0))$ e $(x_1,f(x_1))$, isto é:
$m_{\sec} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Correto! Quer dizer que a inclinação da reta secante que passa por dois pontos da f, neste caso, é -1. Quais são estes pontos e qual a equação da reta secante em questão. Escreva reta e represente-a geometricamente junto ao gráfico de *f*.

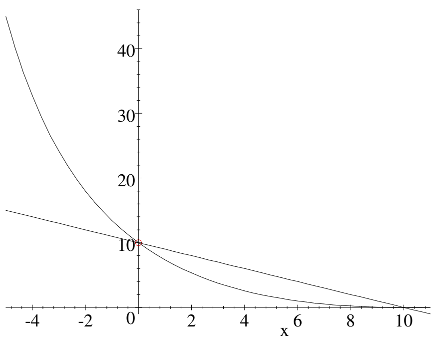
$(0,10)e(10,0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 10 = -1(x - 0)$

$-10 + y = -x$

$y = -x + 10$



Está ótimo!

2.6) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?

$f(50) = \frac{80}{3} = 26.667$

$\frac{f(50)-f(26.667)}{50-26.667} = .818\,18$

Calculando $f(50)$ encontrei sua imagem para formar um ponto com x e apartir dai encontrei o valor da taxa de variação no ponto de abscissa 50.

Procure justificar os cálculos apresentados. O que calculou?
Será isto mesmo? Vamos ao Anton, pág 173! Aí encontramos o que é e como obter a taxa de variação de uma função num ponto.

Se $y = f(x)$, então a taxa de variação instantanea de y em relação a x_0 é a inclinação m_{tg} da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0, isto é:
$m_{tg} = \lim_{x_4 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Isto está certo, mas como se aplica essa relação, avance um pouquinho mais em sua leitura, para compreender como pode obter o valor desta taxa de variação instantânea. Também pode ser útil o link para Leituras -> Notas de Aula, tópicos Funções e Taxas de Variação e também Derivada e Regras de Derivação.

$f'(50) = \dfrac{8}{9}$

essa é a taxa de variação instantanea no ponto de abcissa 50
Calculei a derivada pois a taxa de variação instantanea é a derivada no ponto analisado.

E a taxa de variação instantanea é o coeficiente angula da reta tangente no ponto de abcissa 50.

∇ Certo, agora confirme isso, pois é aqui que as peças se juntam: veja novamente a definição de taxa de variação instantânea, de inclinação da reta tangente a um ponto do gráfico e da derivada de uma função num ponto. Conversamos mais sobre taxas na entrevista. Combinado?

Complemento da Atividade2

Suponha, agora que $f(t)$ determina a população, em milhares, de certa espécie de peixes de um determinado lago em função do tempo, em anos. Sabe-se que houve um período no qual a pesca desta espécie era permitida, causando o desaparecimento de peixes no lago. Imediatamente, peixes criados em viveiros foram introduzidos no lago, proibindo-se a partir de então a pesca. Responda novamente algumas dessas questões acima, interpretando-as neste contexto e considerando que o lago exitiu durante 100 anos.

$$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$$

2.7) Obtenha a imagem, pela função f, dos números 0, 5, 10, 50 e 100 e diga o que essas imagens expressam;

$f(0) = 10$

$f(5) = \frac{5}{3} : 1.6667$

$f(10) = 0$

$f(50) = \frac{80}{3} = 26.667$

$f(100) = \frac{810}{11} = 73.636$

A imagem expressa a população de peixes no lago!

OK! Procure, agora, traduzir a expressão f(100)=73,636 neste contexto.

T é o tempo d ***existencia*** do lago nesse caso 100 anos, calculando a função com t = 100 iremos encontrar a população de peixes q tinhamos no lago em 100 anos de ***existencia*** do lago q nesse caso é igual a 73.636 peixes.

OK!

2.8) Qual é, agora, o domínio da função f?

$D = (0, 100)$

O lago deve ter tido um inicio 0 e como diz no texto acima ele ele existiu durante 100 anos.

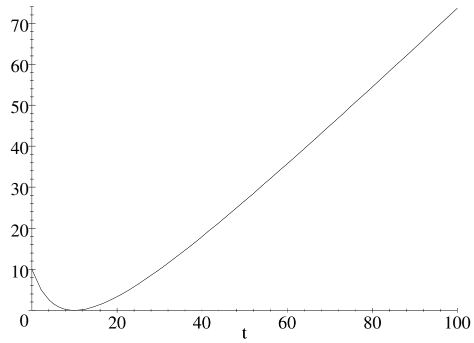
Vamos explicar esse início zero? O texto diz que ele existiu durante 100 anos. E, de acordo com o significado de domínio de uma função, o que representa o intervalo (0,100)? Ele deve ser um intervalo aberto ou fechado?

Inicio 0 pois não diz q o lago surgiu no ano 0 e existiu até o anos 100, ele existiu durante 100 anos pode ter sido em 1890 à 1990 como pode ter sido de 1500 à 1600, enfim um inico q chamamos de 0 neste caso.

O intervalo representa o tempo de existência do lago e tem que ser fechado, pois 0 seria o ano 1500 e 100 o ano 1600.

∇ Muito bem, é isso mesmo! Então, escrevemos novamente o domínio?

2.9) Esboce o gráfico da função f, numa janela que identifique o período de existência do lago;



É isto!

2.10) Observando o gráfico o que podemos concluir a respeito dos valores máximo e mínimo absoluto da função?

Se observarmos $f(x)$, conforme segue o texto lá em cima, iremos ver q ela apresenta sim um ponto de minim***o***(a) mas de máxim***o***(a) não.

Ponto de mínim***o***(a) $[10, 0]$.

Refazemos a representação do ponto?

∇Passou direto por essa questão. Retome-a escrevendo adequadamente o ponto indicado.

E veja que, neste contexto, precisamos levar em consideração que o período de existência do lago não é infinito. Leia novamente o enunciado e procure pela diferença entre extremos relativos e extremos absolutos.

Sugerimos Anton, unidade 6.1, notas de aula e o fórum, é claro.

Profes se entendi bem como mostra o teorema 6.1.3 do Anton pág 331. O ponto máximo seria neste caso como o intervalo é finito e fechado o ponto extremo.

Ponto de máximo $\left(100, \frac{810}{11}\right)$

∇ É isto, pois, neste caso de intervalo fechado e de extremos absolutos, as imagens dos extremos do intervalo podem ser a maior ou menor imagem, comparada com as demais! E falando nos peixes, como interpretar esse ponto de máximo absoluto? E o ponto de mínimo absoluto como fica?

2.11) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo $[0, 10]$ e dê o seu significado;

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{0-10}{10-0} = -1$

Isso quer dizer que a cada ano foram pescados 1 milhão de peixes.

1 milhão? E mais, está garantida essa defazagem de peixes em cada ano?

Não, desapareceram do lago em média mil peixes

∇ Ok, e qual é a unidade desta "taxa de variação média"? Veja que a taxa é uma fração, assim deve ser sua unidade.

2.12) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?
$f'(50) = \frac{8}{9} = .888\,89$
Calculei a derivada pois a taxa de variação instantânea é a derivada do instante analisado.

Correto!

Isso quer dizer que no ano 50 de existência do lago houve uma variação na população de peixes de 0.88889 milhões.

Quanto ao significado de taxa de variação instantânea, procure associá-lo a uma velocidade instantânea: se olhamos para o velocímetro e este estiver marcando 80 Km/h, deduziremos que andamos 80 km na última hora de percurso? Pense sobre isto e leia também, no Anton, como interpretamos taxas de variação instantânea, no início do capítulo 3.

Significa que durante o passar de todo do ano cinqüenta, a população de peixes cresceu, cerca de, 890 peixes.

∇ Assim está melhor. Falaremos sobre interpretações de taxas de variação instantânea na entrevista final, ok? Continuamos pensando nisso, certo?

Atividade2

Re_Atividade2_310703

Olá XXXX, você concluiu satisfatoriamente esta atividade. Sugerimos, entretanto, que procure ler ou discutir um pouquinho mais sobre o que apontamos neste último retorno. Selecionamos algumas questões para a entrevista presencial. As mesmas estão marcadas com um triângulo invertido (∇) e servirão para confirmar o conhecimento que demonstrou ter, ao desenvolver a atividade, e também para um último aperfeiçoamento.

Re_Atividade2_250703

Oi XXXX, entendemos que a qualidade das respostas apresentadas aqui evoluiu em relação à primeira versão dessa atividade. Você apresentou as conclusões sugeridas em quase todos os questionamentos e demonstrou ter estudado sobre o assunto. É nisso que acreditamos. Sabemos que não é possível, nesse nível, progredir utilizando apenas nossa intuição. É preciso que ela esteja muito bem acompanhada de leituras, estudos, reflexões e discussões. Para que avance um pouco mais na compreensão dos conceitos aqui envolvidos, propomos mais alguns questionamentos, além da revisão de algumas respostas apresentadas. Retorne com brevidade, para que possa apresentar mais um aperfeiçoamento, de acordo com os critérios de avaliação estabelecidos. Vamos lá, falta pouco! Confiamos que a disposição e envolvimento que demonstrou até aqui trarão resultados positivos.

Re_Atividade2_160703

Olá XXXX, você demonstra, nessa atividade, a compreensão de alguns conceitos. Porém precisamos melhorar outros. As taxas de variação média e instantânea, a derivada e suas aplicações na análise da função dada, são assuntos onde sugerimos uma atenção especial. Para isto, procure seguir as sugestões dadas, respondendo cada pergunta logo abaixo de sua formulação, sem apagar nada do que escrevemos, apenas acrescentando.
A sua ficha de avaliação foi atualizada e queremos sugerir também que leia com atenção os critérios de avaliação, no link correspondente. Participe do fórum, estamos todos juntos lá e sentindo sua falta!
Acreditamos, pois já foi possível constatar, que você pode concluir com êxito essa etapa. Continue com empenho e procurando aperfeiçoar o seu trabalho.
Aguardamos o retorno dessa atividade e o encaminhamento das demais.

Sobre funções racionais

Nesta atividade, vamos retomar o estudo das funções racionais. Localize esse tipo de função em seu livro, veja índice remissivo, procure esclarecer por que elas têm essa designação e como se comporta o domíno de tais funções.
Sempre que tiver uma dúvida, não importa em que momento ocorre, seja na resolução da atividade ou numa leitura, não deixe passar a oportunidade de esclarecê-la, sem isso não temos como compreender os significados dos conceitos. Procure se esse assunto não está sendo discutido

no fórum ou se não consta nas perguntas freqüentes. Isto pode adiantar sua busca. Se o que encontrou não é suficiente ou se quer discutir com os colegas e orientadoras, encaminhe sua dúvida ao fórum, você receberá auxílio prontamente e além disso colabora com seus colegas. Participe sempre, sua colaboração é preciosa!

2) Considere f a função definida por $f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$

Responda as questões que seguem, *logo abaixo de seus enunciados*. Lembre sempre de explicar seu raciocínio e, de preferência, indique em que local do livro ou da página, encontramos fundamentação para os nossos argumentos.

2.1) Obtenha a imagem, pela função f, dos números $0, 5, 10, 50$ e 100. Apresente os cálculos que determinam essas imagens e apresente-as também diretamente do SN, após salvar a função;

$f(0) = \frac{(0-10)^2}{0+10} = \frac{100}{10} = 10$

SN$f(0) = \frac{(0-10)^2}{0+10} = 10$

$f(5) = \frac{(5-10)^2}{5+10} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

SN$f(5) = \frac{5}{3}$

$f(10) = \frac{(10-10)^2}{10+10} = \frac{0}{20} = 0$

SN$f(10) = 0$

$f(50) = \frac{(50-10)^2}{50+10} = \frac{1600}{60} = \frac{160}{6} = \frac{80}{3}$

SN$f(50) = \frac{80}{3}$

$f(100) = \frac{(100-10)^2}{100+10} = \frac{8100}{110} = \frac{810}{11}$

SN$f(100) = \frac{810}{11}$

OK! As imagens foram calculadas corretamente.

Agora veja que valor de t, possui imagem 40.

$\frac{(t-10)^2}{t+10} = 40$, Solution is : $\left\{t = 30 + 20\sqrt{3}\right\} : t = 64.6 :: \left\{t = 30 - 20\sqrt{3}\right\} : t = -4.641$

Acima foram dados os valores de t, pois são com esses valores que iremos ter a $Imgf = 40$

Muito bem XXXX! Mas retome o final da frase, é melhor continuar escrevendo gramaticalmente, pois assim parece que a imagem da função é 40. O que não é verdade, não é?

Não, 40 é imagem só desses dois valores de t.

Acima foram dados os valores de t, pois são com esses valores que iremos ter a imagem igual a 40.

Ok!

2.2) É possível obter imagem, pela f, de qualquer valor t? Qual é, então, o domínio da função f?

$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$

Não, pois se colocarmos -10 no denominador da função a função ***ira*** se anular.

$\boldsymbol{D = \{x \in R | x \neq -10\}}$

$\boldsymbol{f(-10) =\notin}$

XXXX, podemos perceber que você tem um boa idéia sobre isto, mas o que afirma, aqui, está sem sentido. Se o -10 anulasse *a função* ele seria um de seus zeros, como vimos na atividade1, não é isso? Sugerimos que reescreva o argumento apresentado, de forma que ele fique coerente com o domínio apresentado. Além disso, revise também a última afirmação $f(-10) = \notin$ procurando na barra de ferramentas, o símbolo adequado. Esse que usou é o símbolo para "não pertence ".

Se colocarmos -10 no denominador a função se torna inexistente!

$f(-10) = \nexists$

Agora sim! Você percebeu que -10 anula o *denominador da função*? E qual é o problema com relação ao fato do denominador se anular?

Pois não existe divisão com denominador zero!

∇ Por que não?

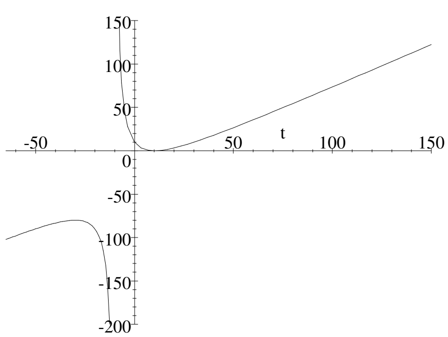
Aqui ainda temos um probleminha de notação. Estamos lendo: "f de -10 é igual a não existe". Saberia propor outa forma para escrever "não existe f de -10", simbolicamente?

Professoras não sei se essa está correta acho que sim pois $\nexists$ quer dizer não existe, não é?

$f(x)$ $\nexists$ quando $x = -10$

∇ Pode ser assim, veja que a leitura fica com sentido agora. Uma alternativa que temos quando não sabemos qual símbolo utilizar é escrever a frase gramatical: Veja de quantos modos podemos dizer essa mesma afirmação: a função não existe para $x = -10$ ou -10 não tem imagem pela função f ou a função não está definida para $x = 10$. Mas é importante atentarmos para a linguagem, sem saber o que os símblolos dizem não temos como entendê-los quando os encontramos num texto. Falamos um pouco mais sobre isto na entrevista final, certo?

2.3) Esboce o gráfico da função f, numa janela onde t varia de -50 a 150 e $f(t)$ varia de -200 a 150. O que você observa em relação às imagens de números que se aproximam cada vez mais de -10?



A função cresce indefinidamente quando x tende a -10 à direita, e decresce indefinidamente quando x tende a -10 à esquerda, tendo assim uma assíntota vertical no ponto -10.

Anton pág.121!

Muito bem! É isso mesmo! Como aperfeiçoamento, sugerimos que escreva estas afirmações utilizando a linguagem de limites.

$\lim_{x \to -10} f(t)$ (Limite de $f(t)$ quando x tende a -10) é infinito.

Mas não foi essa a sua afirmação, acima! Lá você se referiu aos limites laterais e aqui ao $\lim_{t \to -10} f(t)$, percebe a diferença? Além do mais, agora a afirmação não é mais verdadeira!

$\lim_{t \to -10^+} f(t) = \infty$

$\lim_{t \to -10^-} f(t) = -\infty$

Me perdi ali em cima mas agora esta certo neh?

∇ Agora está bem! E o que podemos dizer sobre o limite $\lim_{x \to -10} f(t)$?

Depois apresente aqui a definição de assíntota horizontal, escreva a equação desta que temos aqui, justificando a sua ocorrência neste caso.

Gráfico de muitas (mas não todas) funções racionais podem começar ou terminar cada vez mais perto de uma reta horizontal, chamada de assintota horizontal, quando se percorre a curva em ambas as direções.

Neste caso professora acho q temos uma assintota vertical e não horizontal.

$X = -10$

É isso mesmo XXXX, falha nossa! Essa assíntota é vertical mesmo, e sua equação é, de fato, $x = -10$.

2.4) Ainda observando o gráfico verifique se a função tem máximo ou mínimo relativo. Estime esses valores e para que valores de t eles ocorrem;

Possue.(***possui***)

$f'(t) = (t-10)\frac{t+30}{(t+10)^2}$

Essa derivada é a do SN, sabe como obtê-la?

Tem que ser pela regra do quociente.

$$f'(t) = \frac{(t+10)(t-10)^{2'} - (t-10)^2(t+10)'}{(t+10)^2}$$

$$f'(t) = \frac{(t+10)2(t-10) - (t-10)^2 1}{(t+10)^2}$$

$$f'(t) = \frac{2t^2 - 20t + 20t - 200 - t^2 + 20t - 100}{(t+10)^2}$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 20t - 300}{(t+10)^2}$$

∇ É a mesma que foi obtida como software? Como saber?

$f'(t) = 0$, as soluções são: $\{t = 10\}, \{t = -30\}$

Ponto mínimo: $[10, 0]$

$f'(10) = 0$

Ponto máximo:$[-30, -80]$

$f'(-30) = 0$

XXXX, retome a forma de representação de pontos. Dá uma olhadinha nisso? Procure

distinguir a notação de ponto e a de intervalo.

tá certo profes os pontos tem que ser $(10,0)$ e $(-30,-80)$

Isso está mais adequado.

Para achar o ponto máximo e mínimo eu encontro primeiro os valores de $f'(t) = 0$ e depois eu analiso o gráfico de $f(x)$, se o ponto é máximo ou é mínimo observamos da seguinte maneira:

-quando o ponto for máximo seus valores antecessores se trocados em $f(x)$ serão positivos e seus sucessores negativos, o que diz que o gráfico era crescente e quando passado pelo ponto máximo virou descrecente.

-quando o ponto for (negativo) ***ou de mínimo***?seus valores antecessores se trocados em $f(x)$ serão negativos e seus sucessores positivos, o que diz que o gráfico era decrescente e quando passado pelo ponto mínimo virou crescente.

Parece só uma confusão na escrita, mas vamos confirmar.

- **Primeiro, por que as soluções da equação $f'(t) = 0$ são abscissas dos possíveis extremos relativos**?

Se uma função f tiver extremos relativos, então eles ocorrem ou em pontos de $f'(x) = 0$ ou em pontos de não-diferenciabilidade. Os pontos nos quais $f'(x) = 0$ ou a função não é diferenciável são chamados de pontos críticos de f.

∇ Isso mesmo! Mas vamos tentar entender porque realmente é assim.

O que podemos entender por função não diferenciável?

E lembramos que a variável da função é t, certo?

- **Agora voltando ao que foi dito. Para um ponto ser de máximo, a função à sua esquerda tem que ser positiva e à sua direita negativa**?

O que quer dizer função positiva ou negativa? E função crescente ou decrescente?

Eu realmente me enganei a função é positiva se está acima do eixo x e é negativa se está abaixo.

Para um ponto ser máximo as imagens a sua esquerda tem q ser crescente e a sua direita descrescente!

Para um ponto mínimo as imagens a sua esquerda tem q ser descrescente e a sua direita crescente!

Isto sim!

∇ E se justificássemos pela derivada da função? Como é a derivada da função nos pontos logo à esquerda e logo á direita de um ponto de mínimo e de um ponto de máximo? Faça o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, da função e da sua derivada, como fizemos na atividade 1.

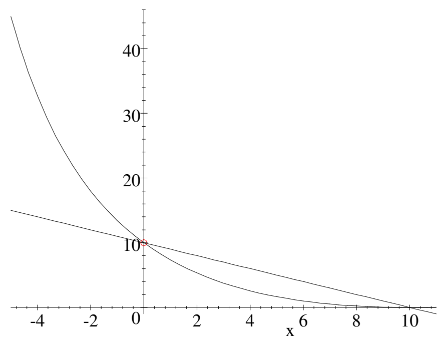
Dá uma passadinha no fórum? Já tem muito dessa discussão em andamento.

2.5) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo $[0,10]$ e dê o seu significado;

Taxa de Variação Média $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{0-10}{10-0} = -1$

Se $y = f(x)$, então a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ é a

inclinação $m_{\sec}$ da reta secante de f que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, isto é:
$m_{\sec} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.
Correto! Quer dizer que a inclinação da reta secante que passa por dois pontos da f, neste caso, é -1. Quais são estes pontos e qual a equação da reta secante em questão. Escreva reta e represente-a geometricamente junto ao gráfico de f.
$(0,10)e(10,0)$
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 10 = -1(x - 0)$
$-10 + y = -x$
$y = -x + 10$



Está ótimo!

2.6) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?
$f(50) = \frac{80}{3} = 26.667$
$\frac{f(50)-f(26.667)}{50-26.667} = .81818$
Calculando $f(50)$ encontrei sua imagem para formar um ponto com x e apartir dai encontrei o valor da taxa de variação no ponto de abscissa 50.
Procure justificar os cálculos apresentados. O que calculou?
Será isto mesmo? Vamos ao Anton, pág 173! Aí encontramos o que é e como obter a taxa de variação de uma função num ponto.
Se $y = f(x)$, então a taxa de variação instantanea de y em relação a x_0 é a inclinação m_{tg} da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0, isto é:
$m_{tg} = \lim_{x_4 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
Isto está certo, mas como se aplica essa relação, avance um pouquinho mais em sua leitura, para compreender como pode obter o valor desta taxa de variação instantânea. Também pode ser útil o link para Leituras -> Notas de Aula, tópicos Funções e Taxas de Variação e também Derivada e Regras de Derivação.
$f'(50) = \dfrac{8}{9}$
essa é a taxa de variação instantanea no ponto de abcissa 50
Calculei a derivada pois a taxa de variação instantanea é a derivada no ponto analisado.

E a taxa de variação instantanea é o coeficiente angula da reta tangente no ponto de abcissa 50.

∇ Certo, agora confirme isso, pois é aqui que as peças se juntam: veja novamente a definição de taxa de variação instantânea, de inclinação da reta tangente a um ponto do gráfico e da derivada de uma função num ponto. Conversamos mais sobre taxas na entrevista. Combinado?

Complemento da Atividade2

Suponha, agora que $f(t)$ determina a população, em milhares, de certa espécie de peixes de um determinado lago em função do tempo, em anos. Sabe-se que houve um período no qual a pesca desta espécie era permitida, causando o desaparecimento de peixes no lago. Imediatamente, peixes criados em viveiros foram introduzidos no lago, proibindo-se a partir de então a pesca. Responda novamente algumas dessas questões acima, interpretando-as neste contexto e considerando que o lago exitiu durante 100 anos.

$$f(t) = \frac{(t-10)^2}{t+10}$$

2.7) Obtenha a imagem, pela função f, dos números 0, 5, 10, 50 e 100 e diga o que essas imagens expressam;

$f(0) = 10$

$f(5) = \frac{5}{3} : 1.6667$

$f(10) = 0$

$f(50) = \frac{80}{3} = 26.667$

$f(100) = \frac{810}{11} = 73.636$

A imagem expressa a população de peixes no lago!

OK! Procure, agora, traduzir a expressão f(100)=73,636 neste contexto.

T é o tempo d ***existencia*** do lago nesse caso 100 anos, calculando a função com t = 100 iremos encontrar a população de peixes q tinhamos no lago em 100 anos de ***existencia*** do lago q nesse caso é igual a 73.636 peixes.

OK!

2.8) Qual é, agora, o domínio da função f?

$D = (0, 100)$

O lago deve ter tido um inicio 0 e como diz no texto acima ele ele existiu durante 100 anos.

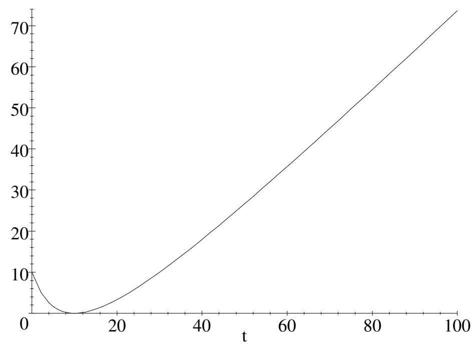
Vamos explicar esse início zero? O texto diz que ele existiu durante 100 anos. E, de acordo com o significado de domínio de uma função, o que representa o intervalo (0,100)? Ele deve ser um intervalo aberto ou fechado?

Inicio 0 pois não diz q o lago surgiu no ano 0 e existiu até o anos 100, ele existiu durante 100 anos pode ter sido em 1890 à 1990 como pode ter sido de 1500 à 1600, enfim um inico q chamamos de 0 neste caso.

O intervalo representa o tempo de existência do lago e tem que ser fechado, pois 0 seria o ano 1500 e 100 o ano 1600.

∇ Muito bem, é isso mesmo! Então, escrevemos novamente o domínio?

2.9) Esboce o gráfico da função f, numa janela que identifique o período de existência do lago;



É isto!

2.10) Observando o gráfico o que podemos concluir a respeito dos valores máximo e mínimo absoluto da função?

Se observarmos $f(x)$, conforme segue o texto lá em cima, iremos ver q ela apresenta sim um ponto de minim***o***(a) mas de máxim***o***(a) não.

Ponto de mínim***o***(a) $[10, 0]$.

Refazemos a representação do ponto?

∇Passou direto por essa questão. Retome-a escrevendo adequadamente o ponto indicado.

E veja que, neste contexto, precisamos levar em consideração que o período de existência do lago não é infinito. Leia novamente o enunciado e procure pela diferença entre extremos relativos e extremos absolutos.

Sugerimos Anton, unidade 6.1, notas de aula e o fórum, é claro.

Profes se entendi bem como mostra o teorema 6.1.3 do Anton pág 331. O ponto máximo seria neste caso como o intervalo é finito e fechado o ponto extremo.

Ponto de máximo $\left(100, \frac{810}{11}\right)$

∇ É isto, pois, neste caso de intervalo fechado e de extremos absolutos, as imagens dos extremos do intervalo podem ser a maior ou menor imagem, comparada com as demais! E falando nos peixes, como interpretar esse ponto de máximo absoluto? E o ponto de mínimo absoluto como fica?

2.11) Obtenha a taxa de variação média desta função no intervalo $[0, 10]$ e dê o seu significado;

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{0-10}{10-0} = -1$

Isso quer dizer que a cada ano foram pescados 1 milhão de peixes.

1 milhão? E mais, está garantida essa defazagem de peixes em cada ano?

Não, desapareceram do lago em média mil peixes

∇ Ok, e qual é a unidade desta “ taxa de variação média ” ? Veja que a taxa é uma fração, assim deve ser sua unidade.

2.12) Qual é a taxa de variação da função no ponto de abscissa 50 e o que ela significa?

$f'(50) = \frac{8}{9} = .888\,89$

Calculei a derivada pois a taxa de variação instantânea é a derivada do instante analisado.

Correto!

Isso quer dizer que no ano 50 de existência do lago houve uma variação na população de peixes de 0.88889 milhões.

Quanto ao significado de taxa de variação instantânea, procure associá-lo a uma velocidade instantânea: se olhamos para o velocímetro e este estiver marcando 80 *Km/h*, deduziremos que andamos 80 *km* na última hora de percurso? Pense sobre isto e leia também, no Anton, como interpretamos taxas de variação instantânea, no início do capítulo 3.

Significa que durante o passar de todo do ano cinqüenta, a população de peixes cresceu, cerca de, 890 peixes.

∇ Assim está melhor. Falaremos sobre interpretações de taxas de variação instantânea na entrevista final, ok? Continuamos pensando nisso, certo?

Auto-avaliação 1

Neste momento em que todos estão, praticamente, concluindo a apresentação das atividades do nosso curso, queremos convidá-lo a refletir sobre o processo que temos desenvolvido com esse estudo. Justificamos este convite, pela importância de nos questionarmos sobre "o que aprendemos" e "como aprendemos". Pensar a respeito do que sabemos, como sabemos, como fazemos para saber e o que estamos fazendo e aprendendo ajuda a aumentar o grau de consciência sobre nossa aprendizagem

Com o objetivo de incentivar, mais uma vez, sua participação de forma plena no Mecam, você está convidado a refletir e analisar conosco a qualidade da infra-estrutura oferecida pelo Mecam e também sobre o seu processo de envolvimento e melhoria das condições de sua aprendizagem. Solicitamos, então, que responda as seguintes questões:

1. Aproximadamente, durante quantas horas diárias você se envolveu com os estudos? Esse tempo de dedicação foi adequado às suas necessidades?

2. Você utilizou todos os recursos do ambiente do Mecam?
Quanto ao tempo necessário para se familiarizar com o ambiente: fórum, downloads, envio de atividades e correio, assinale com (X) a opção que melhor expressa sua avaliação.
( ) Muito, atrapalhou o andamento das atividades;
( ) Pouco, não "perdi" tempo com isto;
( ) Médio e adequado às minhas necessidades.
E para com o software Scientific Notebook?
( ) Muito, atrapalhou o andamento das atividades;
( ) Pouco, não "perdi" tempo com isto;
( ) Médio e adequado às minhas necessidades.

3. Como avalia o auxílio prestado pela equipe - professoras, monitoras e também colegas - do Mecam?
Quando você solicitou ajuda através do fórum, a resposta ou uma sugestão foram suficientes para resolver a dúvida que tinha?

4. Assinale com (X), dentre as fontes apresentadas, as que contribuíram para a resolução das atividades propostas:
( ) livro do Anton
( ) notas de aula disponibilizadas no Material de Apoio;
( ) estudo em grupo
( ) seu caderno de Cálculo I
( ) outros livro(s) sugerido(s) na bibliografia complementar. Qual(is)?

( ) **site(s) de apoio sugerido(s) na bibliografia virtual. Qual(is)?**
( ) **fórum de discussões**
( ) **outro(s). Quais?**
Destaque três das fontes apresentados, que considera mais importantes.

Tratamos, nas quatro atividades que constituíram a orientação dos estudos, de vários conceitos do Cálculo I e de diferentes formas de abordagem dos assuntos matemáticos. A mesma tabela reúne esses conceitos e abordagens nas questões 5, 6 e 7, a seguir. Na questão 5 vamos expressar o que trouxemos para o Mecam, na 6, o que aprendemos no Mecam e na sete o que ainda não sabemos. Marque com X, em cada questão, os ítens que expressam a sua condição.

5. Que conhecimentos trouxe em sua "bagagem" e pôde utilizar no Curso Complementos de Cálculo Diferencial e Integral I no programa Mecam?

6. Que conhecimentos julga ter adquirido no Mecam?

7. O que você identifica como dificuldade que ainda não conseguiu superar?

8. Se você fizesse uma prova no final do curso com questões como as que encontrou em cada uma das atividades, marque no parênteses quanto, de 0 a 10, acha que obteria como desempenho.
( ) **na Atividade1** ( ) **da Atividade2** ( ) **da Atividade3** ( ) **da Atividade4**

9. Considerando o seu processo de desenvolvimento atribua um dos conceitos: Insuficiente, Regular, Bom, Muito Bom ou Excelente, que melhor expresse seu envolvimento e o grau do conhecimento que pode adquirir com os estudos desenvolvidos.
Na Atividade 1:
Na Atividade 2:
Na Atividade 3:
Na Atividade 4:

10. Atribua um dos graus: 0, 1, 2, 3 ou 4, que expressa o quanto você cresceu com o Mecam, na forma de se expressar verbalmente, utilizando a gramática e a linguagem matemática.

Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Departamento de Matemática e Estatística
Programa em Educação a Distância
Melhoria das Condições de Aprendizagem da Matemática

Estudos Complementares de Cálculo Diferencial e Integral I – Período 03-3

Ficha de avaliação

Aluna: **GABRIELA**

Atividade 1	**Data**	**Grau**	**Observações**
Apresentação	10.07.03	1	Sugestão de aperfeiçoamento relacionado a notações de intervalos e solicitação dos argumentos confirmando a análise da função dada, em relação às propriedades envolvidas.
Aperfeiçoamento 1	16.07.03	2	As questões relacionadas à notação ainda não ficaram totalmente esclarecidas. A análise da função continua baseada em aproximações com base na observação do gráfico. Sugerimos a confirmação dessas aproximações.
Aperfeiçoamento 2	20.07.03	2	A atividade foi concluída satisfatoriamente. Ficaram sugestões de aperfeiçoamento para serem esclarecidas na entrevista presencial, especialmente as relacionadas à análise da função a partir das informações fornecidas pelas derivadas primeira e segunda.
Questionamentos Relevantes	Ainda não apresentou nenhum questionamento relevante no fórum de discussões.		
Contribuições Relevantes	15/07 - Regra geral da derivada 14/07 - Equação na forma fatorada		
Conclusão	07.08.03	3	Confirmou com aperfeiçoamentos os conhecimentos demonstrados na realização desta atividade.

Atividade 2	**Data**	**Grau**	**Observações**
Apresentação	14.07.03	2	Sugestão de aperfeiçoamento a partir de respostas a alguns questionamentos visando aprofundar os conhecimentos, que já podem ser considerados bons.
Aperfeiçoamento 1	22.07.03	2	Sugestão de aperfeiçoamentos especialmente relacionados às interpretações da derivada como taxa de variação instantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de *f*.

Aperfeiçoamento 2	28.07.03	2	Concluiu de forma satisfatória. Os aperfeiçoamentos sugeridos visam esclarecer dúvidas reveladas por algumas respostas apresentadas, sobre as quais deverá comentar na entrevista presencial final.
Questionamentos Relevantes	13/07 - Atividade 2, item 2.3 14/07 - Atividade 2.item 2.6 21/07 – Segunda parte atividade 2 21/07 - Taxas de variação		
Contribuições Relevantes	16/07 – Como eu calculo f''(x) no SN 17/07 - Atividade 2		
Conclusão	07.08.03	3	Confirmou com aperfeiçoamentos os conhecimentos demonstrados na realização desta atividade.
Atividade 3	**Data**	**Grau**	**Observações**
Apresentação	20.07.03	1	Sugestão de aperfeiçoamento visando esclarecer as principais características das funções seno e co-seno, como seus principais valores, sinais, período, amplitude e modificações dos respectivos gráficos, a partir das modificações dos coeficientes.
Aperfeiçoamento 1	28.07.03	2	Mostrou avanços em relação à apresentação, ao justificar os procedimentos e revisá-los, de acordo com as sugestões. O último aperfeiçoamento é sugerido visando aprofundar os conhecimentos adquiridos.
Aperfeiçoamento 2	30.07.03	2	Concluiu a atividade de forma satisfatória. Foram apontadas questões como pontos de partida para discussões visando confirmar, elevando, se possível, o grau obtido.
Questionamentos Relevantes	20/07 - Atividade 3 - item 3.5		
Contribuições Relevantes	17/07 – Exercício 3.2		
Conclusão	07.08.03	3	Confirmou com aperfeiçoamento os conhecimentos demonstrados na realização desta atividade.
Atividade 4	**Data**	**Grau**	**Observações**
Apresentação	24.07.03	2	Sugestão de aperfeiçoamento de algumas respostas e revisão de outras, com a apresentação de argumentos e cálculos que confirmem conclusões apresentadas.

Aperfeiçoamento 1	28.07.03	1	As respostas apresentadas revelam insegurança com relação aos conceitos fundamentais aqui envolvidos. As sugestões apresentadas visam promover uma maior compreensão, para que seja possível aplicá-los em outras situações.
Aperfeiçoamento 2	30.08.03	2	Concluiu a atividade com êxito. Foram apontadas algumas questões para discussão durante a entrevista final, a partir das quais será possível confirmar os conhecimentos que demonstrou ter ou também esclarecer dúvidas ainda observadas. Neste caso, ao apresentar suas próprias conclusões, poderá elevar o grau obtido até aqui.
Questionamentos Relevantes	27/07 - Atividade 4		
Contribuições Relevantes	27/07 – Exercício 4.2		
Conclusão	07.08.03	2	Confirmou com aperfeiçoamentos os conhecimentos demonstrados na realização desta atividade.
Auto-avaliação 1 – AA1	20.07.03		
Auto-avaliação 2 – AA2	02.08.03		
Entrevista	Data: 07.08.03		

Avaliação Global

	Ativ 1	Ativ 2	Ativ 3	Ativ 4	AA1-AA2	Participação	Grau Final
Grau	3	3	3	2	2	2	3